

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЫСОКИХ БАЛКАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение

В строительной практике часто приходится сталкиваться с расчетом балок при соотношениях пролета к высоте близких к единице.

Известно, что в этом случае теория распределения напряжений, основанная на гипотезах плоских сечений и предположении отсутствия боковых давлений между продольными фибрами, приводит к большой погрешности.

Вопрос о распределении напряжений для такой балки освещен в литературе недостаточно (балка — стенка). Вопрос о распределении напряжений для балки конечной длины и упруго опертой на грунт при тех же отношениях высоты к пролету в литературе совершенно не освещен.

Имеющиеся некоторые работы по балкам на упругом основании базируются на интегрировании дифференциального уравнения упругой линии, выведенного в предположении гипотезы плоских сечений¹.

Поставленная, таким образом, задача может дать более или менее правильное решение о распределении напряжений для „длинных“ балок при большом отношении пролета к высоте. Другие работы основаны на интегрировании дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости, приводя ряд частных решений с некоторыми допущениями².

К допущениям относятся введение гипотезы Winkler'a о пропорциональности между перемещением и давлением, а также неучет сил сдвига в месте соприкосновения двух тел. Имеются работы, в которых отбрасывается гипотеза Winkler'a и решается совместная работа двух тел, заданных упругими константами³.

¹ А. Н. Крылов. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Изд. Академии наук СССР, 1931.

К. Хаяси. Теория расчета балки на упругом основании. Изд. Гостехиздата, 1930.

² К. Marguerre. Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer rauher unterlage. Ingenieur-Archiv. März 1931.

Wieghardt. Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1922.

³ Статья W. Prager'a „Zur Theorie elastisch gelagerte konstruktionen“. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Oktober 1927, B—7, Heft 5.

Однако, эти работы приводят решение для бесконечной полосы, не давая никаких указаний о применении этого решения к коротким балкам. Кроме того, ни в одной работе не сделаны подсчеты распределения напряжений, что необходимо инженерам проектировщикам.

В основу решения в данной работе положено интегрирование дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости. В решении принята гипотеза Winkler'a о пропорциональности между перемещением и давлением.

Следует отметить, что применение в данном случае ($\frac{h}{l}$ близко к единице) гипотезы Winkler'a не даст значительной ошибки, ибо окончательный вывод приводит к тому, что для балок, у которых $\frac{h}{l}$ близко к единице, влияние упругости грунта незначительно.

Относительно способа интегрирования дифференциальных уравнений следует сказать следующее.

Точного решения подобных задач для полосы конечных размеров не имеется. Имеющийся приближенный способ интегрирования дифференциальное уравнение плоской задачи теории методом конечных разностей, развитый Runge¹, Richardson'ом², Liebman'ом³ и примененный Baue'м⁴ для решения балок стенок, имеет очень большие недостатки.

Неудобство этого метода заключается в том, что если мы хотим получить напряжения в одной точке, то обязаны решить всю задачу в целом. Также большое неудобство заключается в том, что бигармоническое уравнение

$$\Delta\Delta F = 0,$$

представленное в форме конечных разностей, плохо поддается решению методом последовательных приближений, а решение системы уравнений связано с большими вычислениями.

В данной работе использован способ интегрирования, примененный Filon'ом⁵. Сущность этого способа заключается в том, что решение принимается в виде рядов

$$F = \Phi(x)\psi(y).$$

¹ Runge. Ueber eine Methode die partielle Differentialgleichung $\nabla u = \text{const}$ numerisch zu integrieren. Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd 56. 1908.

² L. E. Richardson. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations with an Application to the Stresses a Mansory Dam. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1911.

³ Изложение его работы приводится в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова „Методы приближенного решения уравнений в частных производных“. ОНТИ, 1936 г.

⁴ Г. Бай. Расчет балок-стенок, изд. ОНТИ, 1935 г.

⁵ L. N. G. Filon. On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Gross-Section under any System of Load with special Reference to Points of Concentrated or Discountinuous Loading. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Ser. A. Vol 201. 1903.

$\Phi(x)$ принимается в виде тригонометрических функций, а $\psi(y)$ подбирается из условия удовлетворения бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости

$$\nabla\nabla F=0.$$

При этом решении, граничные условия на грани $y = \pm b$ задаются в виде разложения в ряды Фурье и удовлетворяются с желаемой степенью точности. На грани $x = \pm a$ краевые условия удовлетворяются неполностью, а поэтому приходится прибавлять добавочные решения, обычно в полиномах.

В работе излагается вкратце решение Filon'a и Bleich'a¹ для бесконечной полосы, загруженной вертикальными и касательными силами по граням, на основе которого автор дает решение для случая опирания бесконечной полосы на упругий грунт. Рассмотрен вопрос о применении решения для бесконечной полосы к балкам конечных размеров путем добавления решений в полиномах. Приведены графики отпора грунта для балок с различным отношением $\frac{h}{l}$ при различных коэффициентах постели, показывающие степень влияния упругости грунта. Чтобы дать возможно более полное представление о распределении напряжений в высоких балках, подробно проведены подсчеты напряжений для трех случаев однопролетной балки с консолями, при загрузке от колонн симметричной и кососимметричной. Подобная расчетная схема встречается, например, при проектировании фундаментов теплоэлектроцентралей. Для этой схемы приводятся формулы и графики для облегчения подсчетов напряжений в отдельных точках балки.

Для проверки правильности теоретического решения, в лаборатории оптического метода исследования напряжений Украинского института сооружений был проведен опыт над прозрачной моделью балки, результаты которого здесь приводятся.

Следует отметить два труда по балкам на упругом основании, появившихся в печати после окончания настоящей работы.

1. Доктор технических наук профессор Б. И. Жемочкин „Плоская задача расчета бесконечно длинной балки на упругом основании“.

2. „Расчет балки на упругом основании без гипотезы“ Циммермана — Винклера, — сборник статей Фундаментстроения под редакцией проф. Герсеванова. Однако, эти работы рассматривают вопрос несколько в ином разрезе.

Настоящая работа проведена под руководством профессора А. П. Филиппова.

¹ F. Bleich. Der Gerade Stab mit rechte guerschnitt als ebenes Problem. Bauingenieur, 1923, Heft 9 und 10.

1. Решение для прямоугольной балки под действием произвольной нагрузки по Файлону и Блейху

§ 1. Решение в перемещениях

Изложение этого способа можно найти в вышеуказанной работе Файлона.

Не вдаваясь в подробности вывода, отметим, что решение Файлон получает интегрированием дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda' + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u &= 0; \\ (\lambda' + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 v &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где λ' и μ — упругие постоянные для плоского напряженного состояния.

После интегрирования получаем перемещения в виде рядов, содержащих постоянные коэффициенты A', B', \dots и т. д.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^n \sin mx \left[\frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (A' \operatorname{ch} my + B' \operatorname{sh} my) + \right. \right. \\ &+ C' \operatorname{ch} my + D' \operatorname{sh} my \left. \right\} + \frac{1}{\mu} y (A' \operatorname{sh} my + B' \operatorname{ch} my) \left. \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^n \cos mx \left[\frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (E' \operatorname{ch} my - F' \operatorname{sh} my) + \right. \right. \\ &+ G' \operatorname{ch} my - H' \operatorname{sh} my \left. \right\} + \frac{y}{\mu} (E' \operatorname{sh} my - F' \operatorname{ch} my) \left. \right]; \\ v &= \sum_{n=1}^n \cos mx \left[\frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (A' \operatorname{sh} my + B' \operatorname{ch} my) - \right. \right. \\ &- C' \operatorname{sh} my - D' \operatorname{ch} my \left. \right\} - \frac{y}{\mu} (A' \operatorname{ch} my + B' \operatorname{sh} my) \left. \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^n \sin mx \left[\frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (-E' \operatorname{sh} my + F' \operatorname{ch} my) + \right. \right. \\ &+ G' \operatorname{sh} my - H' \operatorname{ch} my \left. \right\} + \frac{y}{\mu} (E' \operatorname{ch} my - F' \operatorname{sh} my) \left. \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

По перемещениям можно найти выражения напряжений:

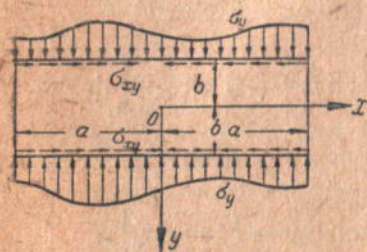
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^n \cos mx \{ (3A' + C') \operatorname{ch} my + (3B' + D') \operatorname{sh} my + \\ &+ 2my (A' \operatorname{sh} my + B' \operatorname{ch} my) \} + \sum_{n=1}^n \sin mx \{ - (3E' + G') \operatorname{ch} my + \\ &+ (3F' + H') \operatorname{sh} my + 2my (-E' \operatorname{sh} my + F' \operatorname{ch} my) \}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \sum_{n=1}^n \cos mx \{ (A' - C') \operatorname{ch} my + (B' - D') \operatorname{sh} my - \\ &- 2my (A' \operatorname{sh} my + B' \operatorname{ch} my) \} + \sum_{n=1}^n \sin mx \{ -(E' - G') \operatorname{ch} my + \\ &+ (F' - H') \operatorname{sh} my - 2my (-E' \operatorname{sh} my + F' \operatorname{ch} my) \}; \\ \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^n \sin mx \{ (A' + C') \operatorname{sh} my + (B' + D') \operatorname{ch} my + \\ &+ 2my (A' \operatorname{ch} my + B' \operatorname{sh} my) \} + \sum_{n=1}^n \cos mx \{ (E' + G') \operatorname{sh} my - \\ &- (H' + F') \operatorname{ch} my + 2my (E' \operatorname{ch} my - F' \operatorname{sh} my) \}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Постоянные определяются из краевых условий по граням $y = \pm b$ (фиг. 1).

Нагрузки по граням $y = \pm b$ могут быть разложены в ряды Фурье:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_y]_{y=+b} &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^n \alpha_n \cos mx + \sum_{n=1}^n \gamma_n \sin mx; \\ [\sigma_y]_{y=-b} &= \beta_0 + \sum_{n=1}^n \beta_n \cos mx + \sum_{n=1}^n \delta_n \sin mx; \\ [\sigma_{xy}]_{y=+b} &= \zeta_0 + \sum_{n=1}^n \zeta_n \cos mx + \sum_{n=1}^n k_n \sin mx; \\ [\sigma_{xy}]_{y=-b} &= \theta_0 + \sum_{n=1}^n \theta_n \cos mx + \sum_{n=1}^n \nu_n \sin mx. \end{aligned} \right\} (4)$$



Фиг. 1

Здесь $m = \frac{n\pi}{a}$, где n — целое число, $2a$ — интервал, в котором происходит разложение функции в ряд, $\alpha_0, \alpha_n, \gamma_n, \dots, \theta_0, \theta_n, \nu_n$ — коэффициенты разложения в ряды Фурье.

Приравнявая σ_y и σ_{xy} (3) соответственным значениям их на контуре $y = \pm b$ (4), получим систему уравнений, из которых можно определить постоянные A', B', C', \dots и т. д.:

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} + \frac{k_n - \nu_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\ B' &= \frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} + \frac{k_n + \nu_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\ C' &= -\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} + \frac{k_n - \nu_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb - 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D' &= -\frac{\alpha_n - \beta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} + \frac{k_n + \nu_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb - 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\
 E' &= -\frac{\gamma_n + \delta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} + \frac{\zeta_n - \theta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\
 F' &= \frac{\gamma_n - \delta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} - \frac{\zeta_n + \theta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\
 G' &= \frac{\gamma_n + \delta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} + \frac{\zeta_n - \theta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb - 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\
 H' &= -\frac{\gamma_n - \delta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} - \frac{\zeta_n + \theta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb - 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}.
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Таким образом, формулы (2), (3) и (5) дают решение для балки, у которой краевые условия по граням $y = \pm b$ целиком удовлетворены, на гранях же $x = \pm a$ получаются некоторые напряжения σ_x и σ_{xy} , для уничтожения которых следует прибавить дополнительное решение (см. § 3).

Из решения (2)–(3) легко получить случай симметричной нагрузки; для этого нагрузку по граням $y = \pm b$ следует разложить только по косинусам. В этом случае в формулах (5) следует положить $\gamma_n = \delta_n = k_n = \nu_n = 0$.

Для случая кососимметричной нагрузки

$$\alpha_n = \beta_n = \zeta_n = \theta_n = 0.$$

§ 2. Решение в функции напряжений

Это решение проще, чем в перемещениях и изложено в вышеуказанной работе Bleich'a, а также в курсе „Теории упругости“ Тимошенко, изд. 1934 г.

Решение сводится к интегрированию дифференциального уравнения плоской задачи теории упругости в функции напряжения (см. фиг. 1).

$$\nabla\nabla F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (6)$$

где F — бигармоническая функция, связанная с напряжениями следующими зависимостями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Решение принимается в виде (для случая симметричной нагрузки):

$$F = Y \cdot \cos mx, \quad (7)$$

где Y — является функцией только координаты y . Вводя это выражение в (6), получим по сокращении на $\cos mx$ дифференциальное уравнение для определения Y :

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} - 2m^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + m^4 Y = 0; \quad (7)$$

решая дифференциальное уравнение, получим

$$Y = C_1 \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my + C_3 y \operatorname{ch} my + C_4 y \operatorname{sh} my. \quad (8)$$

* Для случая отсутствия объемных сил.

Так как n может принимать все значения от 1 до n , то общее решение можно представить в виде ряда:

$$F = \sum_{n=1}^n (C_1 \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my + C_3 y \operatorname{ch} my + C_4 y \operatorname{sh} my) \cos mx \quad (9)$$

и соответственные напряжения σ_x , σ_y и σ_{xy} примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^n [C_1 m^2 \operatorname{ch} my + C_2 m^2 \operatorname{sh} my + C_3 m (2 \operatorname{sh} my + my \operatorname{ch} my) + \\ &\quad + C_4 m (2 \operatorname{ch} my + my \operatorname{sh} my)] \cos mx; \\ \sigma_y &= - \sum_{n=1}^n [C_1 \operatorname{ch} my + C_2 \operatorname{sh} my + C_3 y \operatorname{ch} my + \\ &\quad + C_4 y \operatorname{sh} my] m^2 \cos mx; \\ \sigma_{xy} &= \sum_{n=1}^n [C_1 m \operatorname{sh} my + C_2 m \operatorname{ch} my + C_3 (my \operatorname{sh} my + \operatorname{ch} my) + \\ &\quad + C_4 (my \operatorname{ch} my + \operatorname{sh} my)] m \sin mx. \end{aligned} \right\} (10)$$

Постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 могут быть определены из условия равенства напряжений σ_y и σ_{xy} (10) соответственным выражением нагрузок по граням $y = \pm b$, заданных разложением в ряды Фурье:

$$\text{для } y = +b; \quad \sigma_y = \alpha_0 + \sum_{n=1}^n \alpha_n \cos mx; \quad \sigma_{xy} = 0;$$

$$\text{для } y = -b; \quad \sigma_y = \beta_0 + \sum_{n=1}^n \beta_n \cos mx; \quad \sigma_{xy} = 0.$$

Определяя из этих четырех уравнений постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и подставляя их в выражение (10), получим решение для случая симметричной нагрузки на грани $y = \pm b$ и отсутствия на них касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{(\operatorname{sh} mb - mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my + my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} \cos mx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{(\operatorname{ch} mb - mb \operatorname{sh} mb) \operatorname{sh} my + my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \cos mx; \\ \sigma'_y &= \alpha_0 + \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{(\operatorname{sh} mb + mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my - my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} \times \\ &\quad \times \cos mx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{(\operatorname{ch} mb + mb \operatorname{sh} mb) \operatorname{sh} my - my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \cos mx; \\ \sigma'_{xy} &= \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{my \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} \sin mx + \\ &\quad + \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{my \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \sin mx. \end{aligned} \right\} (11)$$

Это выражение является частным случаем выражения (2), выведенного Filon'ом.

Для случая косо-симметричной нагрузки по грани $y = \pm b$ и отсутствия касательных напряжений вывод аналогичен, только решение берется в виде:

$$F = Y \sin mx.$$

Приводим выражения напряжений для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x'' &= \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{(\operatorname{sh} mb - mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my + my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} \sin mx + \\ &+ \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{(\operatorname{ch} mb - mb \operatorname{sh} mb) \operatorname{sh} my + my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \sin mx, \\ \sigma_y'' &= \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{(\operatorname{sh} mb + mb \operatorname{ch} mb) \operatorname{ch} my - my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + mb} \sin mx + \\ &+ \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{(\operatorname{ch} mb + mb \operatorname{sh} mb) \operatorname{sh} my - my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \sin mx; \\ \sigma_{xy}'' &= - \sum_{n=1}^n (\alpha_n + \beta_n) \frac{my \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my - mb \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb} \cos mx - \\ &- \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{my \operatorname{ch} mb \operatorname{sh} my - mb \operatorname{sh} mb \operatorname{ch} my}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb} \cos mx. \end{aligned} \right\} (12)$$

§ 3. Краевые условия на гранях $x = \pm a$

Полностью удовлетворить краевым условиям на гранях $x = \pm a$ в решении Filon'a и Bleich'a нельзя, так как число постоянных меньше, чем число уравнений для определения этих постоянных. Поэтому приходится определить возникающие на гранях $x = \pm a$ напряжения σ_x и σ_{xy} и для их уничтожения прибавить дополнительное решение.

В своей работе Filon показал, что среднее значение растяжения, сдвигающей силы и изгибающего момента на гранях $x = \pm a$ будут соответственно:

$$\left. \begin{aligned} (T)_{+a} &= (T)_{-a} = \sum_{n=1}^n \frac{\cos ma}{m} (k_n - \gamma_n); \\ (S)_{+a} &= (S)_{-a} = \sum_{n=1}^n \frac{\cos ma}{a} (\gamma_n - \delta_n); \\ -(M)_{+a} &= +(M)_{-a} = \sum_{n=1}^n \frac{\alpha_n - \beta_n}{m^2} \cos ma + \sum_{n=1}^n \frac{b}{m} (k_n + \gamma_n) \cos ma \end{aligned} \right\} (13)$$

Для того, чтобы обратить в нуль (T) и (M), достаточно к решениям (2) и (3) добавить решение в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{T \cdot x}{2bE} - \frac{3M \cdot x \cdot y}{2b^3E}; \\ v &= \frac{\eta \cdot T \cdot y}{2bE} + \frac{3M}{2b^3E} \frac{x^2 - \eta y^2}{2}, \\ \text{где } \eta &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda'}{(\lambda' + \mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Это напряженное состояние не вызывает никаких напряжений на гранях $y = \pm b$, поэтому, взяв T и M в решении (14) с обратным знаком и добавляя решение (14) к основному решению (2), (3), мы можем уничтожить имеющиеся средние значения моментов и растягивающих сил на гранях $x = \pm a$.

Для случая, когда на гранях $y = \pm b$ действуют симметричные или косо-симметричные нагрузки и отсутствуют сдвигающие силы, имеем:

для симметричной нагрузки:

$$(T) = (S) = 0; \quad (M) = \sum_{n=1}^n \frac{\alpha_n - \beta_n}{m^2} \cos ma;$$

для косо-симметричной:

$$(T) = (M) = (S) = 0.$$

Для первого случая, для того, чтобы удовлетворить общим условиям равновесия, достаточно уничтожить (M) прибавлением дополнительного решения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x''' &= -\frac{3}{2} \frac{y}{b^2} \sum_{n=1}^n (\alpha_n - \beta_n) \frac{\cos ma}{m^2}; \\ \sigma_y''' &= 0; \\ \sigma_{xy}''' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для случая, если отношение $\frac{a}{b}$ сильно отклоняется в ту или другую сторону от единицы, добавление решения (15) вполне достаточно для практических расчетов. Для случая $\frac{a}{b}$, близкого к единице, уничтожение только среднего значения (M) недостаточно.

Однако, как нам удалось показать (смотри следующий раздел) в этом случае поправка при более точном решении в напряжениях σ_{xy} и σ_y незначительна и ею практически можно пренебречь. Напряжения σ_x решения (2), (3) и (15) можно корректировать, подбирая добавочное решение в виде функции напряжений

$$F = F_0 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 x + \dots),$$

где F_0 получается двойным интегрированием напряжения σ_x на грани $x = a$, которое требуется уничтожить

$$F_0 = \int \int (\sigma_x)_{\pm a} dy.$$

Коэффициенты полинома $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ подбираются из условия обращения в минимум потенциальной энергии

$$v = \frac{1}{2\epsilon} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

II. Решение для прямоугольной балки, опирающейся на упругое основание

§ 1. Общее решение

Краевые условия на гранях $y = \pm b$ (фиг. 2) приняты: на грани $y = -b$

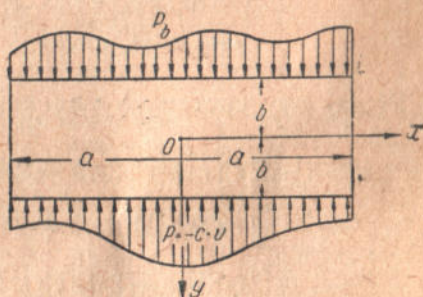
$$(\sigma_y)_{-b} = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos mx + \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r \sin mx; \quad (\sigma_{xy})_{-b} = 0; \quad (15')$$

на грани $y = +b$ по гипотезе Winkler'а

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_y)_{+b} &= -c \cdot v; \\ (\sigma_{xy})_{y=+b} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (15'')$$

где c — коэффициент постели, v — перемещение.

Пользуясь выражением перемещения, выведенного Filon'ом, можно представить $(\sigma_y)_{+b}$ в виде:



Фиг. 2

$$(\sigma_y)_{+b} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin mx, \quad (15''')$$

где

$$A_n = \frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (A' \operatorname{sh} mb + B' \operatorname{ch} mb) - C' \operatorname{sh} mb - D' \operatorname{ch} mb \right\} - \frac{b}{\mu} (A' \operatorname{ch} mb + B' \operatorname{sh} mb),$$

$$B_n = \frac{1}{2m\mu} \left\{ \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu} (-E' \operatorname{sh} mb + F' \operatorname{ch} mb) + G' \operatorname{sh} mb - H' \operatorname{ch} mb \right\} + \frac{b}{\mu} (E' \operatorname{ch} mb - F' \operatorname{sh} mb).$$

Приравнявая при $y = \pm b$ общие выражения напряжений (3) заданным напряжениям $(\sigma_y)_{y=\pm b}$ и $(\sigma_{xy})_{y=\pm b}$ на гранях, получим уравнение для определения постоянных.

При $y = +b$:

$$\begin{aligned} & (A' - C') \operatorname{ch} mb + (B' - D') \operatorname{sh} mb - \\ & - 2mb (A' \operatorname{sh} mb + B' \operatorname{ch} mb) = -cA_n; \\ & (E' - G') \operatorname{ch} mb + (F' - H') \operatorname{sh} mb - \\ & - 2mb (-E' \operatorname{sh} mb + F' \operatorname{ch} mb) = -cB_n; \\ & (A' + C') \operatorname{sh} mb + (B' + D') \operatorname{ch} mb + \\ & + 2mb (A' \operatorname{ch} mb + B' \operatorname{sh} mb) = 0; \\ & (E' + G') \operatorname{sh} mb - (H' + F') \operatorname{ch} mb + \\ & + 2mb (E' \operatorname{ch} mb - F' \operatorname{sh} mb) = 0. \end{aligned}$$

При $y = -b$:

$$\begin{aligned} & (A' - C') \operatorname{ch} mb - (B' - D') \operatorname{sh} mb + \\ & + 2mb (-A' \operatorname{sh} mb + B' \operatorname{ch} mb) = \beta_n; \\ & -(E' - G') \operatorname{ch} mb - (F' - H') \operatorname{sh} mb + \\ & + 2mb (E' \operatorname{sh} mb + F' \operatorname{ch} mb) = \delta_n; \\ & -(A' + C') \operatorname{sh} mb + (B' + D') \operatorname{ch} mb - \\ & - 2mb (A' \operatorname{ch} mb - B' \operatorname{sh} mb) = 0; \\ & -(E' + G') \operatorname{sh} mb - (H' + F') \operatorname{ch} mb - \\ & - 2mb (E' \operatorname{ch} mb + F' \operatorname{sh} mb) = 0. \end{aligned}$$

(16)

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned} A' &= + \frac{\beta_n}{2k} \operatorname{sh} mb \left(\operatorname{sh} 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right); \\ B' &= - \frac{\beta_n}{2k} \operatorname{ch} mb \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right); \\ C' &= - \frac{\beta_n}{2k} (\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb) \left(\operatorname{sh} 2mb - 2mb + \right. \\ & \quad \left. + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right); \\ D' &= + \frac{\beta_n}{2k} (\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb) \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \right. \\ & \quad \left. + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right); \\ E' &= - \frac{\delta_n}{2k} \operatorname{sh} mb \left(\operatorname{sh} 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right); \\ F' &= - \frac{\delta_n}{2k} \operatorname{ch} mb \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right); \\ G' &= + \frac{\delta_n}{2k} (\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb) \left(\operatorname{sh} 2mb - 2mb + \right. \\ & \quad \left. + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right); \\ H' &= + \frac{\delta_n}{2k} (\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb) \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \right. \\ & \quad \left. + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right); \end{aligned}$$

(17)

где

$$k = (\operatorname{sh} 2mb + 2mb)(\operatorname{sh} 2mb - 2mb) + \\ + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} (\operatorname{ch}^3 mb' \operatorname{sh} mb + \operatorname{sh}^3 mb \operatorname{ch} mb + 2mb).$$

В частном случае, чтобы получить на грани $y = +b$ равномерную нагрузку следует положить $\frac{c}{\mu} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} A' &= + \frac{\beta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\ B' &= - \frac{\beta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\ C' &= - \frac{\beta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\ D' &= + \frac{\beta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\ E' &= - \frac{\delta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\ F' &= - \frac{\delta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}; \\ G' &= + \frac{\delta_n}{2} \frac{\operatorname{sh} mb + 2mb \operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} 2mb + 2mb}; \\ H' &= + \frac{\delta_n}{2} \frac{\operatorname{ch} mb + 2mb \operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb - 2mb}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Легко видеть, что выражение (18) является частным значением выражения (5).

Подставляя найденные значения коэффициентов (17) в выражение напряжений (3) и перемещений (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} U &= - \sum_{n=1}^n 4\beta_n \sin mx \frac{2m\mu}{B} \left(\operatorname{sh} 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right) \times \\ &\times \left[\operatorname{ch} my \left(mb \operatorname{ch} mb - \frac{\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh} mb \right) - my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^n 4\beta_n \sin mx \frac{2m\mu}{B} \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right) \times \\ &\times \left[\operatorname{sh} my \left(mb \operatorname{sh} mb - \frac{\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch} mb \right) - my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my \right] + \\ &+ \sum_{n=1}^n 4\delta_n \cos mx \frac{2m\mu}{B} \left(\operatorname{sh} mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch}^2 mb \right) \times \\ &\times \left[\operatorname{ch} my \left(mb \operatorname{ch} mb - \frac{\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh} mb \right) - my \operatorname{sh} mb \operatorname{sh} my \right] - \\ &- \sum_{n=1}^n 4\delta_n \cos mx \frac{2m\mu}{B} \left(\operatorname{sh} 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{sh}^2 mb \right) \times \\ &\times \left[\operatorname{sh} my \left(mb \operatorname{sh} mb - \frac{\mu}{\lambda' + \mu} \operatorname{ch} mb \right) - my \operatorname{ch} mb \operatorname{ch} my \right]. \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\begin{aligned}
V &= \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{2m\mu}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
&\times \left[\text{sh } my \left(mb \text{ch } mb + \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh } mb \right) - my \text{sh } mb \text{ch } my \right] - \\
&- \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{2m\mu}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
&\times \left[\text{ch } my \left(mb \text{sh } mb + \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch } mb \right) - my \text{ch } mb \text{sh } my \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{2m\mu}{B} \sin mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
&\times \left[\text{sh } my \left(mb \text{ch } mb + \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh } mb \right) - my \text{sh } mb \text{ch } my \right] - \\
&- \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{2m\mu}{B} \sin mx \left(\text{sh } mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
&\times \left[\text{ch } my \left(mb \text{sh } mb + \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch } mb \right) - my \text{ch } mb \text{sh } my \right]; \\
\sigma_x &= - \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
&\times [(\text{ch } mb - mb \text{sh } mb) \text{sh } my + my \text{ch } mb \text{ch } my] + \\
&+ \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
&\times [(\text{sh } mb - mb \text{ch } mb) \text{ch } my + my \text{sh } mb \text{sh } my] - \\
&- \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \sin mx \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
&\times [(\text{ch } mb - mb \text{sh } mb) \text{sh } my + my \text{ch } mb \text{ch } my] + \\
&+ \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \sin mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
&\times [(\text{sh } mb - mb \text{ch } mb) \text{ch } my + my \text{sh } mb \text{sh } my]; \\
\sigma_y &= \sum_{n=1}^n 4\beta_n \cos mx \frac{(2m\mu)^2}{B} \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
&\times [(\text{sh } mb + mb \text{ch } mb) \text{ch } my - my \text{sh } mb \text{sh } my] - \\
&- \sum_{n=1}^n 4\beta_n \cos mx \frac{(2m\mu)^2}{B} \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
&[(\text{ch } mb + mb \text{sh } mb) \text{sh } my - my \text{ch } mb \text{ch } my] +
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^n 4\delta_n \sin mx \frac{(2m\mu)^2}{B} \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [(\text{sh } mb + mb \text{ ch } mb) \text{ch } my - my \text{sh } mb \text{sh } my] - \\
& - \sum_{n=1}^n 4\delta_n \sin mx \frac{(2m\mu)^2}{B} \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [(\text{ch } mb + mb \text{sh } mb) \text{sh } my - my \text{ch } mb \text{ch } my]; \\
\sigma_{xy} = & - \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \sin mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [mb \text{ch } mb \text{sh } my - my \text{sh } mb \text{ch } my] + \\
& + \sum_{n=1}^n 4\beta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \sin mx \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [mb \text{sh } mb \text{ch } my - my \text{ch } mb \text{sh } my] + \\
& + \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb - 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{ch}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [mb \text{ch } mb \text{sh } my - my \text{sh } mb \text{ch } my] - \\
& - \sum_{n=1}^n 4\delta_n \frac{(2m\mu)^2}{B} \cos mx \left(\text{sh } 2mb + 2mb + \frac{c}{m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \text{sh}^2 mb \right) \times \\
& \quad \times [mb \text{sh } mb \text{ch } my - my \text{ch } mb \text{sh } my].
\end{aligned} \tag{19}$$

После некоторых преобразований эти выражения можно привести к виду, аналогичному (3) (для случая симметричной нагрузки):

$$\begin{aligned}
\sigma'_x = & \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{(\text{sh } mb - mb \text{ch } mb) \text{ch } my + my \text{sh } mb \text{sh } my}{\text{sh } 2mb + 2mb} \cos mx \cdot M' - \\
& - \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{(\text{ch } mb - mb \text{sh } mb) \text{sh } my + my \text{ch } mb \text{ch } my}{\text{sh } 2mb - 2mb} \cos mx \cdot M''; \\
\sigma'_y = & d_0 + \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{(\text{sh } mb + mb \text{ch } mb) \text{ch } my - my \text{sh } mb \text{sh } my}{\text{sh } 2mb + 2mb} \cos mx \cdot M' - \\
& - \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{(\text{ch } mb + mb \text{sh } mb) \text{sh } my - my \text{ch } mb \text{ch } my}{\text{sh } 2mb - 2mb} \cos mx \cdot M''; \\
\sigma'_{xy} = & \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{my \text{sh } mb \text{ch } my - mb \text{ch } mb \text{sh } my}{\text{sh } 2mb + 2mb} \sin mx \cdot M'' - \\
& - \sum_{n=1}^n \beta_n \frac{my \text{ch } mb \text{sh } my - mb \text{sh } mb \text{ch } my}{\text{sh } 2mb - 2mb} \sin mx \cdot M';
\end{aligned} \tag{20}$$

где коэффициенты M' и M'' зависят от геометрических размеров, упругих констант λ' , μ и коэффициента постели C :

$$M' = \frac{1 + \frac{c}{2m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb}}{1 + \frac{c}{2m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb} + \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mb} \right) + \frac{4mb}{(\operatorname{sh} 2mb)^2}}; \quad (21)$$

$$M'' = \frac{1 + \frac{c}{2m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb}}{1 + \frac{c}{2m\mu} \frac{\lambda' + 2\mu}{\lambda' + \mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb} + \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mb} \right) + \frac{4mb}{(\operatorname{sh} 2mb)^2}};$$

или, переходя к коэффициентам Юнга и Пуансона E и ν подстановкой

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(\nu - 2)}; \quad \mu = \frac{\nu E}{2(1 + \nu)},$$

получим

$$M' = \frac{1 + \frac{c}{E m} \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb}}{1 + \frac{c}{E m} \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mb} + \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb} \right) + \frac{4mb}{(\operatorname{sh} 2mb)^2}}; \quad (22)$$

$$M'' = \frac{1 + \frac{c}{E m} \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb}}{1 + \frac{c}{E m} \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} mb}{\operatorname{sh} mb} + \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{ch} mb} \right) + \frac{4mb}{(\operatorname{sh} 2mb)^2}}. \quad (22)$$

§ 2. Влияние упругости грунта для коротких и длинных балок

Сравним выражение (20) с выражением (11), в котором положим

$$\alpha_n = 0.$$

Из сравнения видно, что влияние упругости на грунт сказывается умножением всех членов ряда решения (11) на коэффи-

коэффициенты M' и M'' . Однако, для коротких балок эти коэффициенты очень быстро обращаются в единицу (при $n=2$). Приводим таблицы 1—4 (стр. 188) для балок с отношением

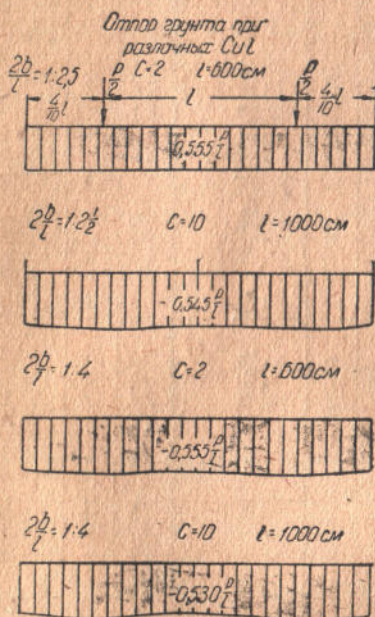
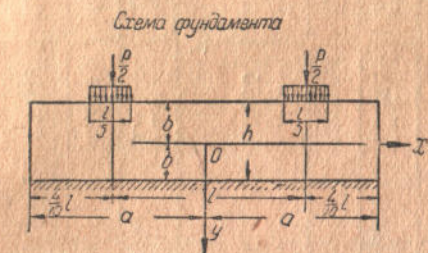
$$\frac{2b}{l} = \frac{h}{l} = 1:4 \text{ и } \frac{2b}{l} = 1:2,5$$

(см. фиг. 3), составленные для различных практически применяемых соотношений $\frac{cl}{E}$.

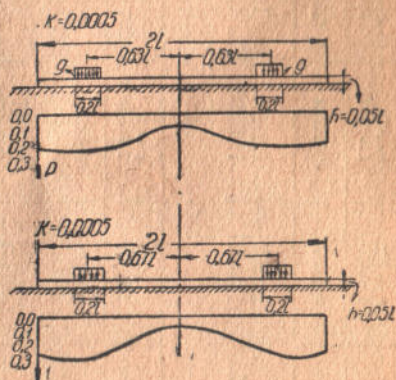
Во всех таблицах принято

$$E = 210\,000 \text{ кг/см}^2.$$

Из рассмотрения таблиц видно, что наибольшая возможная поправка в первом члене ряда для грунта с большим коэффициентом постели ($c=10$) и большого пролета ($l=1000 \text{ см}$) для балки при $\frac{2b}{l} = 1:4$ будет:



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\frac{1 - 0.722}{1.0} \cdot 100 = 28\%.$$

Наибольшая поправка в первом члене ряда для случая $\frac{2b}{l} = 1:2,5$ будет для тех же c и l —7%.

Как показывают вычисления, общая поправка в процентном отношении будет значительно ниже поправки для первого члена.

Для наглядности приводим на фиг. 3 кривые отпора грунта для балок с отношением $\frac{2b}{l} = 1:2,5$ и $\frac{2b}{l} = 1:4$ для симметричной нагрузки.

Балка $\frac{2b}{l} = 1:2,5$

Значение M'

Таблица 1

n	$\frac{cl}{E}$	$\frac{c=2;}{l=600}$		$\frac{c=5;}{l=600}$		$\frac{c=10;}{l=600}$		$\frac{c=2;}{l=800}$		$\frac{c=5;}{l=800}$		$\frac{c=10;}{l=800}$		$\frac{c=2;}{l=1000}$		$\frac{c=5;}{l=1000}$		$\frac{c=10;}{l=1000}$		
		1		0,005714	0,01428	0,02857	0,007619	0,019747	0,038095	0,009523	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761
2		1,0195	1,0254	1,0497	1,0137	1,0348	1,0652	1,017	1,0417	1,0802	1,00326	1,06627	1,00158	1,00394	1,00782	1,00394	1,00782	1,00394	1,00782	1,00394

Балка $\frac{2b}{l} = 1:2,5$

Значение M''

Таблица 2

n	$\frac{cl}{E}$	$\frac{c=2;}{l=600}$		$\frac{c=5;}{l=600}$		$\frac{c=10;}{l=600}$		$\frac{c=2;}{l=800}$		$\frac{c=5;}{l=800}$		$\frac{c=10;}{l=800}$		$\frac{c=2;}{l=1000}$		$\frac{c=5;}{l=1000}$		$\frac{c=10;}{l=1000}$		
		1		0,005714	0,01428	0,02857	0,007619	0,019747	0,038095	0,009523	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761
2		0,991	0,978	0,9589	0,9881	0,9699	0,9437	0,9852	0,9639	0,9307	0,9973	0,9948	0,99869	0,9967	0,9935	0,9967	0,9935	0,9967	0,9935	0,9967

Балка $\frac{2b}{l} = 1:4$

Значение M'

Таблица 3

n	$\frac{2b}{l}$	$\frac{c=2;}{l=600}$		$\frac{c=5;}{l=600}$		$\frac{c=10;}{l=600}$		$\frac{c=2;}{l=800}$		$\frac{c=5;}{l=800}$		$\frac{c=10;}{l=800}$		$\frac{c=2;}{l=1000}$		$\frac{c=5;}{l=1000}$		$\frac{c=10;}{l=1000}$	
		1	1,0194	0,005714	0,01428	0,02857	0,007619	0,019747	0,038095	0,009523	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809
2	1,00205	1,0194	1,0454	1,0822	1,0255	1,0604	1,1037	1,0314	1,0707	1,125	1,00376	1,0402	1,00357	1,00875	1,01742	1,00875	1,01742	1,00875	1,01742

Балка $\frac{2b}{l} = 1:4$

Значение M''

Таблица 4

n	$\frac{cl}{E}$	$\frac{c=2;}{l=600}$		$\frac{c=5;}{l=600}$		$\frac{c=10;}{l=600}$		$\frac{c=2;}{l=800}$		$\frac{c=5;}{l=800}$		$\frac{c=10;}{l=800}$		$\frac{c=2;}{l=1000}$		$\frac{c=5;}{l=1000}$		$\frac{c=10;}{l=1000}$	
		1		0,005714	0,01423	0,02857	0,007619	0,019747	0,038095	0,009523	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809	0,04761	0,023809
2		0,9556	0,89612	0,8157	0,9117	0,86192	0,7643	0,9218	0,8381	0,7220	0,9884	0,9780	0,9944	0,9218	0,8381	0,7220	0,9944	0,9218	0,8381

Все эти кривые отпора настолько близки к прямой, что влиянием упругости можно пренебречь.

Чтобы дать представление о степени влияния упругости грунта для более длинных балок, приводим графики отпора грунта (фиг. 4), приведенные в работе Прагер'а для балок при

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{26,8} \text{ и } \frac{h}{l} = \frac{1}{25,6}.$$

Практически можно не учитывать упругости грунта уже при

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}.$$

III. Частные случаи решения для ленточных фундаментов

§ 1. Ленточный однопролетный фундамент с консолями при $\frac{h}{l} = 1:2,5$ и симметричным нагружением

Нагрузка на фундамент и геометрические размеры указаны на фиг. 5. Влиянием упругости грунта на основании выводов предыдущего раздела пренебрегаем. Нагрузку по краям $y = \pm b$ задаем разложением в ряды Фурье по косинусам:

при

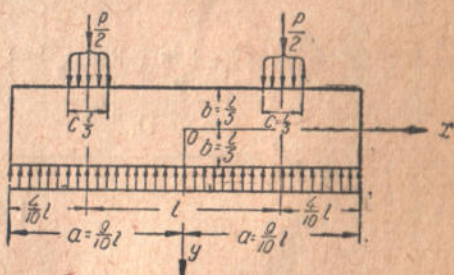
$$y = +b; \sigma_{xy} = 0; \sigma_y = -\frac{P}{2a};$$

при

$$y = -b; \sigma_{xy} = 0; \sigma_y = -\frac{P}{2a} - \frac{5P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2}{3} n\pi - \sin \frac{4}{9} n\pi \right] \cos mx;$$

при

$$x = \pm a; \sigma_{xy} = 0; \sigma_x = 0.$$



Фиг. 5

Для определения напряжений пользуемся выражениями (11), где подставляем:

$$\alpha_n = 0; \beta_n = -\frac{5P}{\pi l} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2}{3} n\pi - \sin \frac{4}{9} n\pi \right].$$

После подстановки и преобразований, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{5}{\pi} \frac{P}{l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2}{3} n\pi - \sin \frac{4}{9} n\pi \right] \cos mx (N'_x - N''_x); \\ \sigma_y &= -\frac{5P}{9l} - \frac{5P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2}{3} n\pi - \sin \frac{4}{9} n\pi \right] \cos mx (N'_y - N''_y); \\ \sigma_{xy} &= -\frac{5P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{2}{3} n\pi - \sin \frac{4}{9} n\pi \right] \sin mx (N''_{xy} - N'_{xy}), \end{aligned} \right\} (23)$$

где $m = \frac{10 n\pi}{9 l}$;

$$N'_x = \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9} - \frac{2n\pi}{9} \operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} \operatorname{ch} my + my \operatorname{sh} my \frac{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}{1 + \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}};$$

$$N''_x = \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9} - \frac{2n\pi}{9} \operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} \operatorname{sh} my + my \operatorname{ch} my \frac{\operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}{1 - \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}};$$

$$N'_y = \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9} + \frac{2n\pi}{9} \operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} \operatorname{ch} my - my \operatorname{sh} my \frac{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}{1 + \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}};$$

$$N''_y = \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9} + \frac{2n\pi}{9} \operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} \operatorname{sh} my - my \operatorname{ch} my \frac{\operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}{1 - \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}};$$

$$N'_{xy} = \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} my \operatorname{sh} my - \frac{\frac{2n\pi}{9} \operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} \operatorname{ch} my}{1 - \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}};$$

$$N''_{xy} = \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}} my \operatorname{ch} my - \operatorname{sh} my \frac{\frac{2n\pi}{9} \operatorname{ch} \frac{2n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}{1 + \frac{\frac{4n\pi}{9}}{\operatorname{sh} \frac{4n\pi}{9}}}.$$

От напряженного состояния (23) на гранях $x = \pm a$ возникают напряжения σ_x и момент M .

Для уничтожения момента достаточно прибавить член (15):

$$\sigma'_x = -\frac{3}{2} \frac{y}{b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos ma}{m^2}.$$

При наших значениях

$$\sigma'_x = +0,87394 \frac{Py}{l^3}. \quad (24)$$

Полностью σ_x на гранях $x = \pm a$ не исчезает от прибавления решения (24), но согласно принципу Сан-Венана отклонение от точного решения будет быстро падать, с удалением от концевой сечения. Подсчеты показали, что в месте опирания колонны поправка будет порядка 4—5%, а в пролете еще меньше.

Результат подсчета напряжений по формулам (23) и (24) приводится на фиг. 6.

Напряжения σ_x , σ_y , σ_{xy} подсчитывались для точек фундамента, находящихся на пересечении квадратной сетки, указанной на схеме фиг. 6, и нанесены для 10 вертикальных и 5 горизонтальных сечений.

Величины ординат приведены только для одной половины балки, вследствие симметрии относительно оси y -ков.

Во всех сечениях, конечно, соблюдаются общие условия равновесия.

§ 2. Однопролетный ленточный фундамент с консолями при $\frac{h}{l} = 1:2,5$ и косо-симметричной нагрузке

Отличие этого случая от предыдущего заключается в том, что нагрузка по граням $y = \pm b$ разлагается в ряды Фурье не по косинусам, а по синусам при $y = +b$

$$\sigma_y = -\frac{40}{9} \frac{5P}{6\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi \sin mx;$$

$$\sigma_{xy} = 0;$$

при $y = -b$

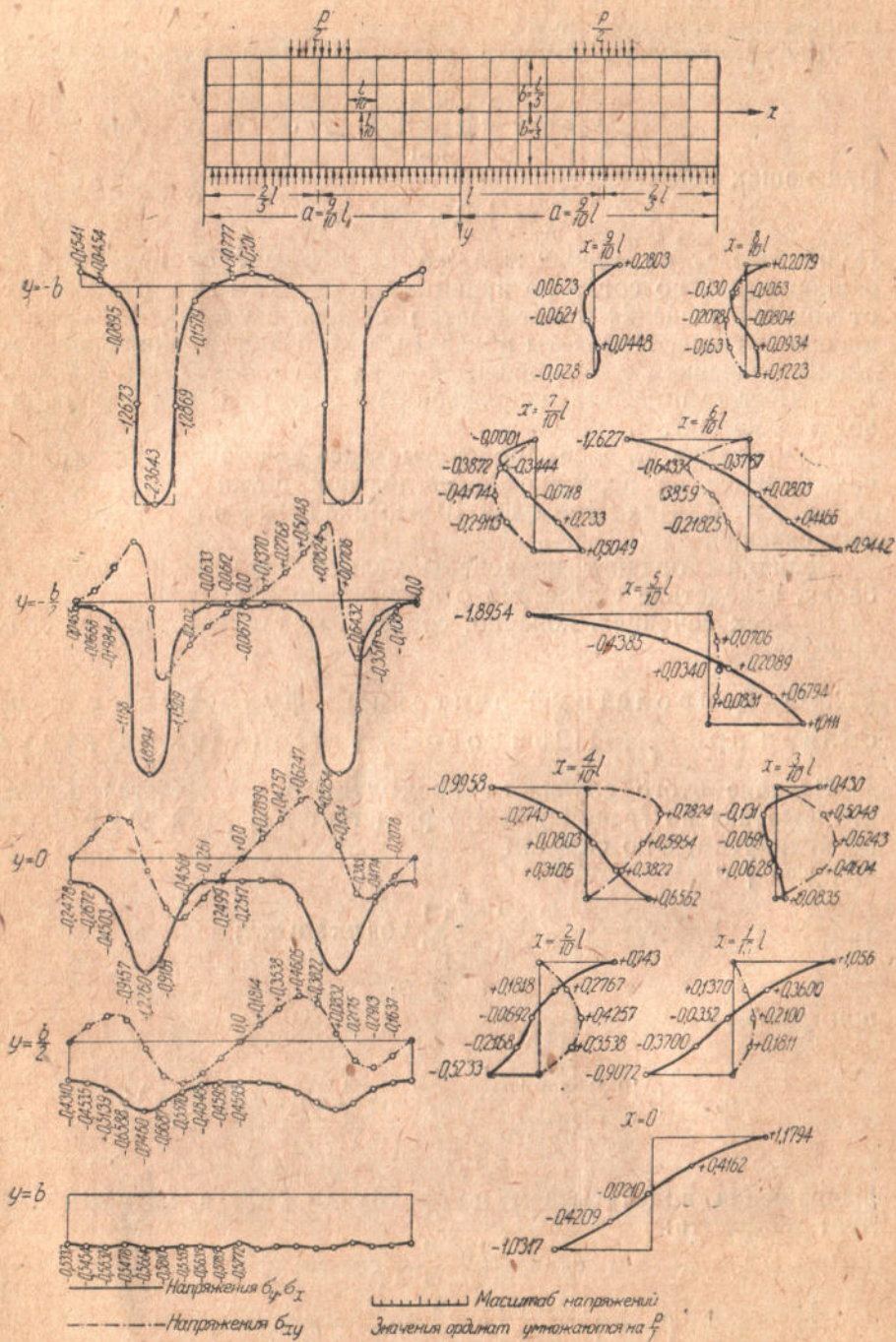
$$\sigma_y = +\frac{10}{\pi} \frac{P}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin mx \left(\cos \frac{4}{9} n\pi - \cos \frac{2}{3} n\pi \right);$$

$$\sigma_{xy} = 0.$$

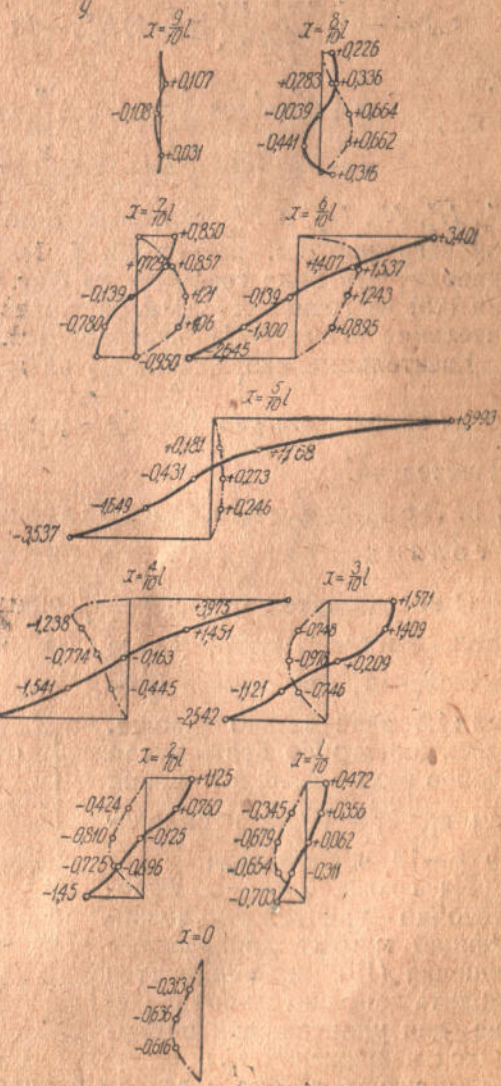
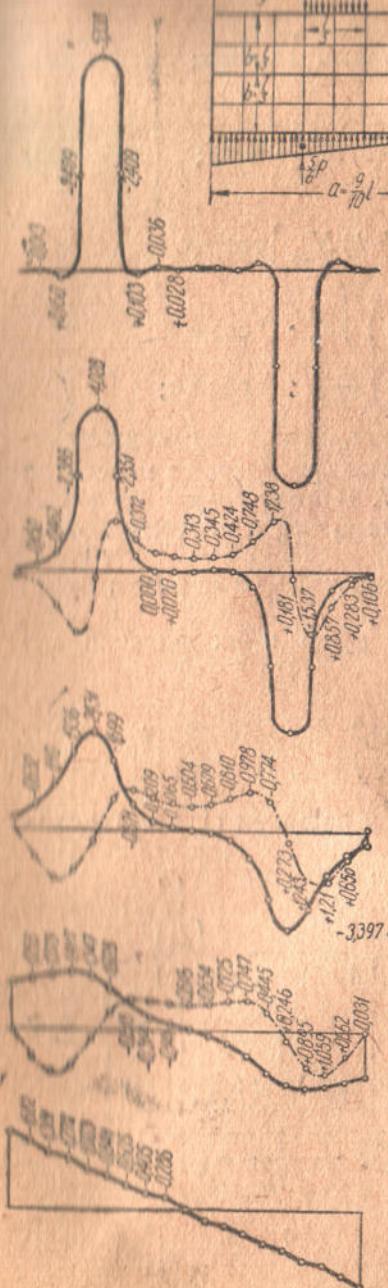
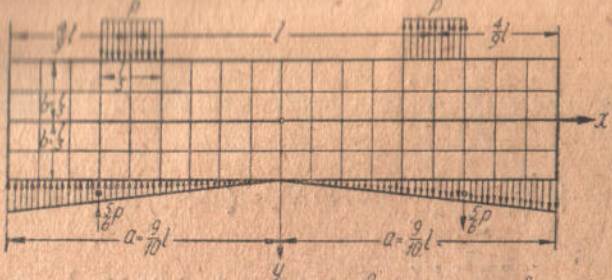
Напряжения подсчитываем по формулам (12), в которых следует положить:

$$\alpha_n = -\frac{100}{27} \frac{P}{\pi l} \frac{1}{n} \cos n\pi;$$

$$\beta_n = +\frac{10P}{\pi l} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{4}{9} n\pi - \cos \frac{2}{3} n\pi \right).$$



Фиг. 6



— Напряжения σ_{xy}, σ_x
 - - - Напряжения σ_{zy}

Масштаб напряжений
 Значения ординат умножаются на $\frac{p}{E}$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= + \frac{10P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left\{ (a-b) N'_x - (a+b) N''_x \right\} \sin mx; \\ \sigma_y &= + \frac{10P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left\{ (a-b) N'_y - (a+b) N''_y \right\} \sin mx; \\ \sigma_{xy} &= - \frac{10P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left\{ (a-b) N''_{xy} - (a+b) N'_{xy} \right\} \cos mx, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$a+b = \left(\cos \frac{4}{9} n\pi - \cos \frac{2}{3} n\pi \right) + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6} \cos n\pi;$$

$$a-b = \left(\cos \frac{4}{9} n\pi - \cos \frac{2}{3} n\pi \right) - \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{6} \cos n\pi;$$

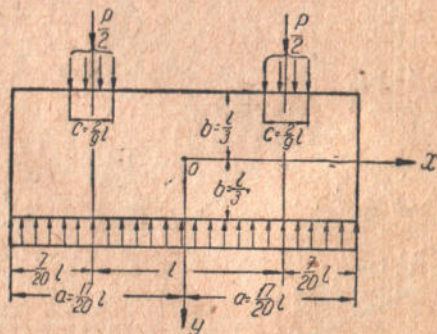
N'_x, N''_x, N'_y, N''_y и N'_{xy} остаются теми же, что и для симметричной нагрузки (см. раздел III, § 1). Все результаты подсчетов приводятся в виде графиков на фиг. 7. В этом случае от решения (25) на гранях $x = \pm a$ напряжения $\sigma_x = 0$ и поэтому дополнительное решение (14) не требуется.

Касательные напряжения σ_{xy} на грани $x = \pm a$ не равны нулю, но их общий интеграл $\int_{-b}^{+b} \sigma_{xy} dy$ — равен нулю и их влияние незначительно.

§ 3. Ленточный однопролетный фундамент с консолями при $\frac{h}{l} = 1:1,5$ и симметричной нагрузке

С возрастанием отношения $\frac{2b}{l}$ ряды в решении (11) и (12) сходятся быстрее, поэтому все вычисления для случая $\frac{2b}{l} = 1:1,5$ значительно проще. Здесь достаточно брать число членов ряда — 3—6, в то время как при $\frac{2b}{l} = 1:2,5$ необходимо 6—10 членов ряда.

На гранях $x = \pm a$ недостаточно уничтожить возникающий момент добавлением решения (15), а приходится вводить дополнительное решение для уничтожения остающихся напряжений σ_x .



Фиг. 8

Упругость грунта в данном случае играет роль еще меньшую, чем в предыдущих примерах, поэтому давление грунта принято равномерно распределенное (фиг. 8).

При указанных на фиг. 8 геометрических размерах нагрузка на гранях $y = \pm b$, разложенная в ряды Фурье, будет: при $y = +b$

$$\sigma_y = -\frac{10P}{17l};$$

при $y = -b$

$$\sigma_y = -\frac{10P}{17l} - \frac{9P}{2\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right] \cos \frac{20n\pi x}{17l}.$$

Подставляя

$$\alpha_n = 0; \beta_n = -\frac{9P}{2\pi l} \cdot \frac{1}{n} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right]$$

в выражения (11) и (15), получим:

$$\sigma_x = -\frac{9P}{2\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right] \cos mx (N'_x - N''_x) - \frac{3,25125 \cdot 3}{4\pi^3 b^3} P l y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right] \cos n\pi; \quad (26)$$

$$\sigma_y = -\frac{10P}{17l} - \frac{9P}{2\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right] \cos mx (N'_y - N''_y);$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{9P}{2\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{110n\pi}{153} - \sin \frac{70n\pi}{153} \right] \sin mx (N''_{xy} - N'_{xy});$$

где

$$N'_x = \frac{\frac{\text{sh } mb - mb \text{ ch } mb}{\text{sh } 2mb} \text{ch } my + my \text{ sh } my \frac{\text{sh } mb}{\text{sh } 2mb}}{1 + \frac{2mb}{\text{sh } 2mb}};$$

$$N''_x = \frac{\frac{\text{ch } mb - mb \text{ sh } mb}{\text{sh } 2mb} \text{sh } my + my \text{ ch } my \frac{\text{ch } mb}{\text{sh } 2mb}}{1 - \frac{2mb}{\text{sh } 2mb}};$$

$$N'_y = \frac{\frac{\text{sh } mb + mb \text{ ch } mb}{\text{sh } 2mb} \text{ch } my - my \text{ sh } my \frac{\text{sh } mb}{\text{sh } 2mb}}{1 + \frac{2mb}{\text{sh } 2mb}};$$

$$N''_y = \frac{\frac{\text{ch } mb + mb \text{ sh } mb}{\text{sh } 2mb} \text{sh } my - my \text{ ch } my \frac{\text{ch } mb}{\text{sh } 2mb}}{1 - \frac{2mb}{\text{sh } 2mb}};$$

$$N'_{xy} = \frac{my \text{ sh } my \frac{\text{ch } mb}{\text{sh } 2mb} - \frac{mb \text{ sh } mb}{\text{sh } 2mb} \text{ch } my}{1 - \frac{2mb}{\text{sh } 2mb}};$$

$$N_{xy} = \frac{my \operatorname{ch} my \frac{\operatorname{sh} mb}{\operatorname{sh} 2mb} - mb \operatorname{ch} mb \frac{\operatorname{sh} my}{\operatorname{sh} 2mb}}{1 + \frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}};$$

$$b = \frac{l}{3}; \quad m = \frac{20\pi}{171}; \quad mb = \frac{20\pi}{51};$$

$$\frac{4}{3} \frac{3,25125}{b^3 \pi^3} P l y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[\sin \frac{110}{153} n\pi - \sin \frac{70}{153} n\pi \right] \cos n\pi \cong 0,1614 \frac{P}{l} y.$$

Если по формулам (26) подсчитать напряжения σ_x для концевое сечения $x = \frac{17}{20} l$, то получим кривую распределения напряжений, представленную на фиг. 9.

Эти напряжения удовлетворяют общим условиям равновесия на всей грани:

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_y dy = 0; \quad \int_{-b}^{+b} \sigma_y y dy = 0.$$

Однако, пренебрегать влиянием оставшейся эпюры напряжений σ_x (фиг. 9), как это мы делали в предыдущем примере (§ 1, раздел III), здесь не следует.

Для подыскания решения, уничтожающего влияние концевых напряжения σ_x , выражаем приближенно его в виде функции y :

$$\sigma_x = -0,1081 \frac{P}{l} + 0,8588 \frac{P}{l^2} y + 1,0869 \frac{P}{l^3} y^2 - 11,7684 \frac{P}{l^4} y^3 + 21,978 \frac{P}{l^5} y^4. \quad (27)$$

Это выражение подобрано по значениям σ_x в 5 точках

$$y = 0; \quad y = \pm \frac{b}{2}; \quad y = \pm b.$$

Решение принимаем в виде полиномов¹

$$F = \varphi_0 + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 - \alpha_2 y),$$

где

$$\varphi_0 = \iint (\sigma_x) dy = \frac{1}{2} P y^2 \left(-0,05405 + 0,28630 \frac{y}{l} + 0,18115 \frac{y^2}{l^2} - 1,17684 \frac{y^3}{l^3} + 1,16520 \frac{y^4}{l^4} \right). \quad (28)$$

¹ Тимошенко. Теория упругости, изд. 1934 г., стр. 171.

Путем дифференцирования выражения (28), получим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4(y^2 - b^2)^2(\alpha_1 + \alpha_2 y)(3x^2 - a^2); \\ \alpha_2 &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + 4\alpha_1(x^2 - a^2)^2(3y^2 - b^2) + 4\alpha_2 y(x^2 - a^2)^2(5y^2 - 3b^2); \\ \alpha_{xy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4x(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2[\alpha_1 4y + \alpha_2(5y^2 - b^2)]. \end{aligned} \quad (29)$$

Для определения коэффициентов α_1 и α_2 составляем условия обращения потенциальной энергии в минимум

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} = 0;$$

где:

$$v = \frac{1}{2E} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy. \quad (30)$$

Подставляя в эти выражения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \text{ и } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

получим после преобразований два уравнения с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_1 \iint [32y(y^2 - b^2)^4(3x^2 - a^2)^2 + 32y(x^2 - a^2)^4(3y^2 - b^2) \times \\ &\times (5y^2 - 3b^2) + 32 \cdot 8x^2 y(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2(5y^2 - b^2)] dx dy + \\ &+ \alpha_2 \iint [32y^2(y^2 - b^2)^4(3x^2 - a^2)^2 + 32y^2(x^2 - a^2)^4(5y^2 - 3b^2) + \\ &+ 64x^2(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2(5y^2 - b^2)^2] dx dy = -8 \iint \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} y \times \\ &\times (x^2 - a^2)^2(5y^2 - 3b^2) dx dy; \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_1 \iint [32(y^2 - b^2)^4(3x^2 - a^2)^2 + 32(x^2 - a^2)^4(3y^2 - b^2)^2 + \\ &+ 32x^2 y^2(x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2] dx dy + \alpha_2 \iint [32y(y^2 - b^2)^4 \times \\ &\times (3x^2 - a^2)^2 + 32y(x^2 - a^2)^4(3y^2 - b^2)(5y^2 - 3b^2) + 32 \times \\ &\times 8x^2 y(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2(5y^2 - b^2)] dx dy = \\ &= -8 \iint \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} (x^2 - a^2)^2(3y^2 - b^2) dx dy; \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

или короче:

$$\alpha_1 A_2 + \alpha_2 B_2 = C_2; \quad (I)$$

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 B_1 = C_1. \quad (II)$$

После интегрирования в пределах $-a > x > +a$; $-b > y > +b$

получим:

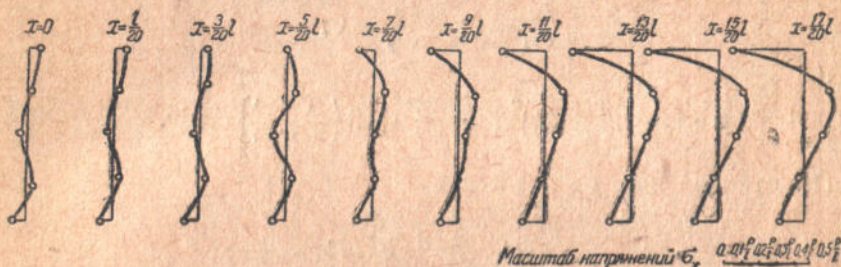
$$B_1 = A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{32 \cdot 32 \cdot 64}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} a^5 b^5 \left(b^4 + a^4 + \frac{4a^2 b^2}{7} \right);$$

$$B_2 = \frac{32 \cdot 32 \cdot 64}{9 \cdot 7 \cdot 5} a^5 b^7 \left(\frac{b^4}{5 \cdot 11} + \frac{a^4}{b^7} + \frac{4a^2 b^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} \right);$$

$$C_1 = \frac{-64 \cdot 4}{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} P a^5 b^5 \left[30,4332 + 527472 \frac{b^2}{l^2} \right];$$

$$C_2 = \frac{32 \cdot 32 \cdot 11,7684 \cdot P a^5 b^7}{15 \cdot 35 \cdot l^4}.$$



Фиг. 10

Решая два уравнения с двумя неизвестными, получим:

$$\alpha_1 = - \frac{30,4332 + 527,472 \frac{b^2}{l^2}}{64 \cdot 4 \left(a^4 + b^4 + \frac{4a^2 b^2}{7} \right)} \frac{P}{l^3};$$

$$\alpha_2 = \frac{3 \cdot 11,7684}{64 \cdot 5 \left(\frac{a^4}{7} + \frac{b^4}{5 \cdot 11} + \frac{4a^2 b^2}{7 \cdot 5 \cdot 3} \right)} \frac{P}{l^4}.$$

Для нашего случая:

$$a = \frac{17}{20} l; \quad b = \frac{l}{3},$$

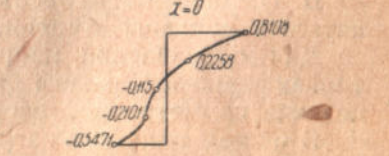
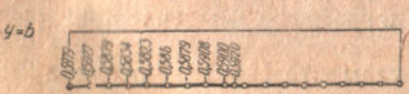
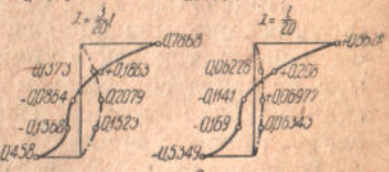
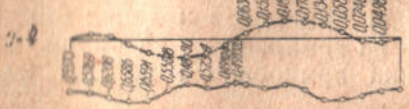
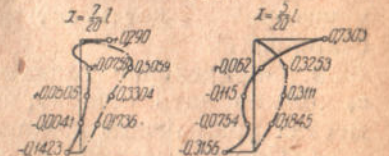
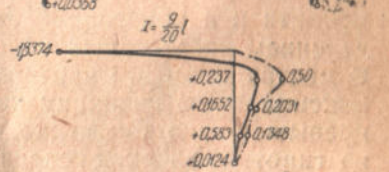
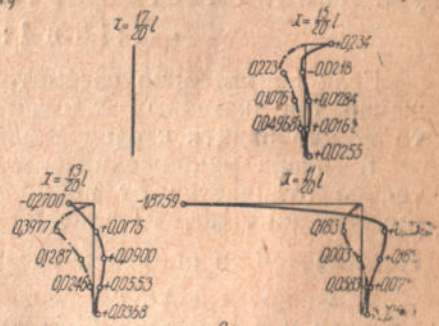
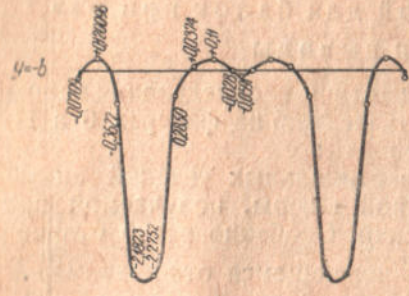
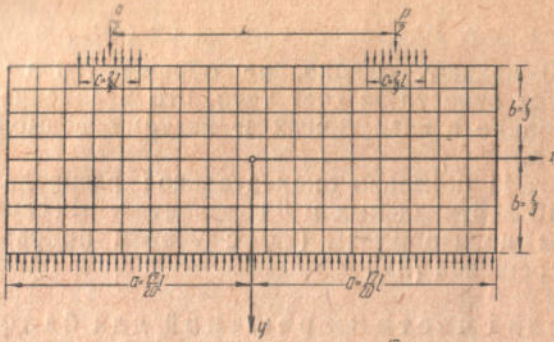
откуда

$$\alpha_1 = -0,59945 \frac{P}{l^3};$$

$$\alpha_2 = 1,41712 \frac{P}{l^4}.$$

Подставляя эти корни в выражение (29), мы получим решение распределения напряжений в балке под действием нагрузки на гранях $x = \pm a$, приложенной по кривой, указанной на фиг. 9.

Подсчеты, которые мы не приводим, показали, что напряжения σ_y и σ_{xy} от этой нагрузки во всех точках балки ничтожны по сравнению с аналогичными напряжениями от нагрузки на гранях $y = \pm b$. Поэтому мы их совершенно не учитываем. Распределение напряжения σ_x для 10 сечений вдоль оси x -ов



————— Напряжения σ_x, σ_y
 ————— Напряжения σ_{xy}

Масштаб напряжений
 Значения ordinат умножаются на $\frac{P}{f}$

Фиг. 11

указано на фиг. 10. Напряжения σ_x от сечения $x = \frac{17}{20} l$ к сечению $x = 0$ падают, однако, не обращаются в нуль. Очевидно это следует отнести за счет того, что уравнение (27) выражает кривую только в пяти точках и поэтому возможны некоторые неточности.

На фиг. 11 показано окончательное распределение напряжений для 10 вертикальных и 5 горизонтальных сечений. Подсчеты проведены по формулам (26) с учетом поправки от дополнительного решения (29).

§ 4. Анализ частных решений для балок при $\frac{h}{l} = 1:1,5$ и $1:2,5$ и выводы

Если внимательно рассмотреть картину распределения напряжений для указанных балок, представленную на фигурах 6 и 11, то можно прийти к следующим выводам:

1. Эпюра напряжений σ_x для вертикальных сечений значительно отличается от прямолинейной эпюры, получаемой при применении гипотезы плоских сечений. Особенно резко отличие сказывается на опорах и при увеличивающемся отношении $\frac{h}{l}$.

2. Распределение касательных напряжений в средней части пролета и в консольной части, примерно, совпадает с распределением касательных напряжений по гипотезе плоских сечений. В местах опор эта картина меняется и точные подсчеты дают максимальную величину касательного напряжения, значительно превышающую такую же, полученную по решениям, основанным на гипотезе плоских сечений. Одновременно перемещается точка, в которой σ_{xy} достигает максимума, ближе к месту сопряжения с колонной.

3. Определение главных напряжений без учета напряжений σ_y должно дать ошибку, значение которой особенно велико в местах примыкания колонны.

4. Подсчитываемое обычно в расчете железобетонных конструкций скальвающее напряжение, очевидно, значительно преуменьшено, так как в точке, находящейся на расстоянии около $\frac{3}{4} h$ от места сопряжения с колонной, возникают значительные скальвающие усилия. Поэтому при армировании таких балок следует особое внимание обратить на армирование на опоре.

В средней части балки картина армирования должна меняться в меньшей степени.

Для определения напряжения σ_x в наиболее характерных точках нами составлены формулы и графики, облегчающие расчет для симметричной нагрузки.

В общем виде для нагрузок фундамента (§§ 1 и 3 раздела III):

$$\sigma_y = + \frac{3}{2} \frac{My}{b^3} - \frac{P}{\pi l} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi}{2a} (l+c) - \sin \frac{n\pi}{2a} (l-c) \right] (N'_x - N''_x) \cos mx \quad (31)$$

где $N'_x - N''_x$ зависит от y и равно:
 для верхней грани $y = -b$

$$N'_x - N''_x = \frac{1 + \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2}{1 - \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2}; \quad (32)$$

для нижней грани $y = +b$

$$N'_x - N''_x = \frac{-\frac{4mb}{\text{sh } 2mb}}{1 - \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2}; \quad (33)$$

член $\frac{3}{2} \frac{My}{b^3} = -\frac{3}{2} \frac{y}{b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos ma}{m^2}$ может быть вычислен точно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos ma}{m^2} = -\frac{P}{\pi l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2}{\pi^2 n^3} \left[\sin n\pi \frac{l+a}{2a} - \sin n\pi \frac{l-a}{2a} \right] \cos n\pi.$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos n\pi \sin n\pi \frac{A}{a} = \frac{\pi^3 A}{12a} (A^2 - 1),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\cos ma}{m^2} = -\frac{P}{48a} [3l^2 + c^2 - 4a^2].$$

Таким образом, для всех точек, лежащих на грани $y = +b$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P}{\pi c} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi}{2a} (l+c) - \sin \frac{n\pi}{2a} (l-c) \right] \times \\ &\times \frac{\frac{4mb}{\text{sh } 2mb}}{1 - \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2} \cos mx - \frac{P}{32ab^3} (3l^2 + c^2 - 4a^2); \end{aligned} \quad (34)$$

для точек, лежащих на грани $y = -b$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\pi c} \sum_{n=1}^n \left[\sin \frac{n\pi}{2a} (l+c) - \sin \frac{n\pi}{2a} (l-c) \right] \frac{1}{n} \times \\ &\times \frac{1 + \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2}{1 - \left(\frac{2mb}{\text{sh } 2mb}\right)^2} \cos mx + \frac{P}{32ab^3} (3l^2 + c^2 - 4a^2). \end{aligned} \quad (35)$$

О сходимости этих рядов можно судить по коэффициентам

$$\frac{1}{n} \frac{1 + \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2}{1 - \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2} \text{ и } \frac{1}{n} \frac{\frac{4mb}{\operatorname{sh} 2mb}}{1 - \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2}$$

Коэффициент $\frac{1}{n} \frac{4mb}{\operatorname{sh} 2mb} \frac{1}{1 - \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2}$ падает очень быстро. Приводим

подсчет этого члена при $\frac{h}{l} = 1:1,5$ и $\frac{h}{l} = 1:2,5$ (таблица 5):

Таблица 5

$\frac{2b}{l}$ \ n	1	2	3
1:1,5	+1,028	+0,0717	+0,0061
1:2,5	+3,17	0,780	0,258

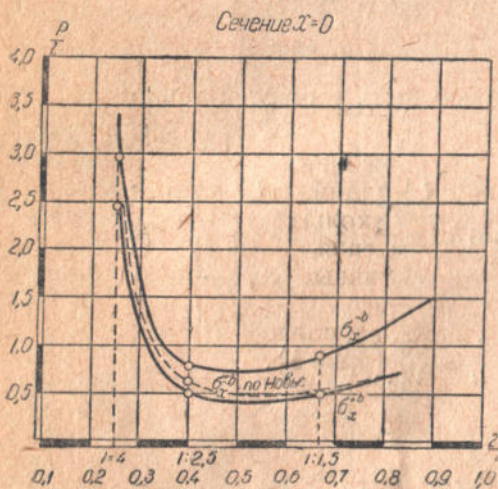
Таблица 5 показывает, что для подсчета напряжений на грани $y = \pm b$ достаточно взять 2—4 члена ряда. Коэф-

фициент $\frac{1 + \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2}{1 - \left(\frac{2mb}{\operatorname{sh} 2mb}\right)^2}$ при $n =$

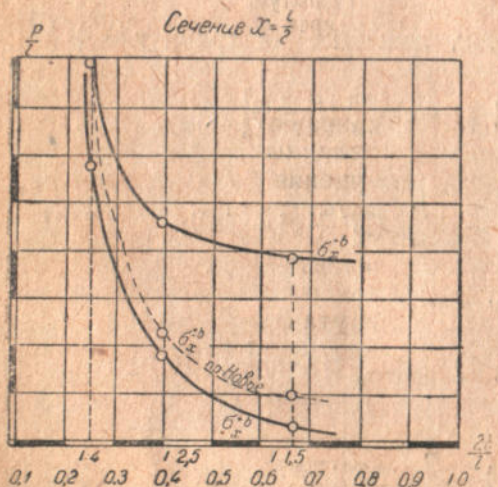
$= 2-3$ уже обращается в единицу, так что весь ряд при $y = -b$ убывает как величина $\frac{1}{n}$, поэтому здесь следует брать больше членов ряда.

На фиг. 12 приведены графики сжимающих и растягивающих напряжений σ_x на гранях $y = \pm b$ посредине пролета для различных соотношений $\frac{h}{l}$.

На фиг. 13 приведены подобные же графики для сечения на опоре.



Фиг. 12



Фиг. 13

IV. Экспериментальная проверка теоретического решения при помощи двойного лучепреломления

§ 1. Краткое описание методики эксперимента и примененных приборов

Не вдаваясь в подробности описания самого метода определения напряжений на поляризационных установках¹, отметим только особенности, встретившиеся в данной работе, и дадим описание аппаратуры, примененной при эксперименте.

Операцию определения напряжений в прозрачных моделях при помощи двойного лучепреломления можно разбить на три этапа.

1. Построение линий равных наклонов главных осей напряжения (изоклины).

2. Построение линий равных разностей главных напряжений (изохромы).

3. Получение суммы главных напряжений.

После проведения этих трех операций, мы имеем полную картину распределения напряжений, поскольку первая операция дает направление главных осей напряжения, а вторая и третья — вместе позволяют получить отдельно главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2 для каждой точки модели.

Первые две операции проводятся на поляризационной установке Кокера или Кирпичева-Зайцева.

Приводим снимок (фиг. 14) поляризационной установки типа Кокера, имеющейся в лаборатории Украинского института сооружений.

Установка состоит из следующих частей:

a — источник света;

b — набор линз;

c — поляризатор (призма Франка-Риттера);

d — анализатор (призма Франка-Риттера);

e — компенсатор;

f — испытываемая модель;

g — экран для изображения.

Последние модели этого прибора, сохраняя схему расположения отдельных его частей, имеют различные усовершенствования. Сюда относятся улучшение освещения (ртутные лампы), установка всех линз и призм на подвижные рейтера, различные системы компенсаторов (Бабинэ-Жамена, Краснова и т. д.).

На снимке (фиг. 15) приводится поляризационная установка Кирпичева-Зайцева с рабочим полем 500×500 мм, имеющаяся в лаборатории Украинского института сооружений.

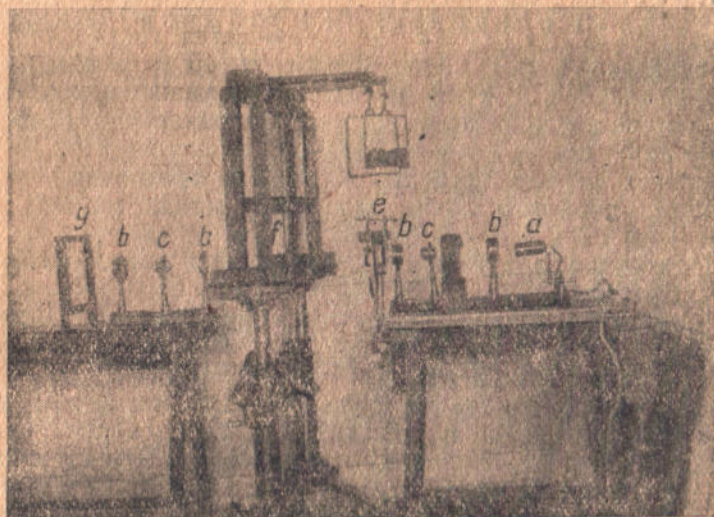
¹ Подробно об этом можно найти в работах:

Кокер и Файлон. Оптический метод исследования напряжений, изд. ОНТИ, 1936.

Работы лаборатории оптического метода изучения напряжений и лаборатории пластических деформаций Научно-исследовательского института математики и механики Ленинградского государственного университета. Сборник статей, вып. I—II, изд. ОНТИ, 1935.

А. К. Зайцев. Оптический метод изучения напряжений, 1927.

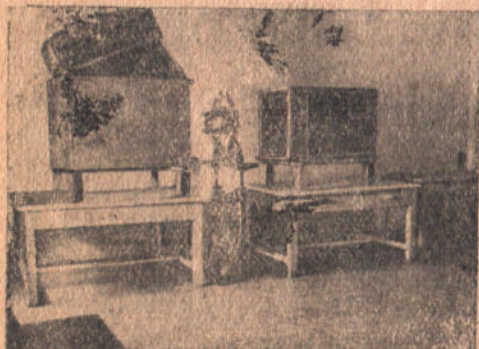
Здесь отраженный свет, полученный от ламп, находящихся в верхней части прибора (1000—1500 W), падает на морблитовое стекло, от которого отражается поляризованным. Затем, проходя



Фиг. 14

через испытываемую модель, свет падает на поверхность анализирующего морблитового стекла и после отражения может быть воспринят фото-аппаратом, либо просто глазом.

Каждый из этих аппаратов имеет свои достоинства и недостатки, поэтому при работе пользовались обоими аппаратами.



Фиг. 15

Получение изоклин на установке Кокера достигается для каждой точки в отдельности отысканием такого положения „скрещенных“ поляризационных призм, при котором в точке происходит потухание света. При этом каждую исследуемую точку следует совмещать с центром светового потока.

Для получения изоклин на установке Кирпичева—Зайцева следует вращать либо всю исследуемую

модель при помощи поворотных приспособлений, либо синхронно вращать поляризатор и анализатор.

Неудобство здесь состоит в трудности именно этих относи-

тельных вращений поляризатора и анализатора по отношению к модели. Преимуществом этой установки по сравнению с установкой Кокера является получение сразу всей изоклины в целом, в то время, как на установке Кокера изоклины строятся по замерам в ряде точек.

Операция получения изохром заключается в том, что в поле исследуемой точки и поставленных под 45° к уже известным направлениям главных осей поляризационных призмы, вводится эталон, у которого плоскости двойного лучепреломления совмещаются с осями исследуемой точки.

Если эталон обладает тарированной разностью хода лучей, то можно подобрать всегда такое положение эталона, чтобы получилось погашение света в исследуемой точке.

Это свидетельствует о том, что разность хода лучей, а следовательно, и их пропорциональная разность главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ в эталоне и модели совпадают.

В качестве эталонов употребляются:

1. Спаренные кварцевые клинья переменной толщины (компенсатор Бабинэ-Жамена).

2. Склеенные слюдяные пластинки, в которых переменность толщины достигается вращением вокруг оси перпендикулярной к световому потоку (компенсатор Краснова).

3. Балка, работающая на чистый изгиб, сделанная из прозрачного материала.

В лаборатории Украинского института сооружений был использован для компенсации третий из перечисленных способов.

Поскольку нам не известно о том, чтобы аналогичный компенсатор применялся в СССР, то мы его опишем.

Этот прибор сконструирован под руководством зав. лабораторией оптического метода исследований напряжений инж. И. Ф. Педашенко и выполнен мастерскими Украинского института сооружений.

Идея самого прибора заимствована из статьи Z. Levinton'a¹, который применял подобный компенсатор при определении напряжений в арочных мостах.

На снимке (фиг. 16) представлен компенсатор лаборатории Украинского института сооружений.

Прибор имеет горизонтальное и вертикальное перемещение. Это позволяет совмещать с исследуемой точкой любую точку



Фиг. 16

¹ Z. Levinton. Photoelastic Determination of Temperature Stresses in a Arch Bridge Model. The Engineering Journal № 11 December 1934.

эталона (из средней части), сделанного из того же прозрачного материала, что и модель. Кроме того, прибор дает возможность поворачивать эталон на любой угол от $+90^\circ$ до -90° . После совмещения главных осей эталона и модели и установки под 45° скрещенных призм мы можем вертикальным и горизонтальным перемещением совместить исследуемую точку с такой точкой компенсатора, чтобы получилось затухание.

Соответствующая этому точка балки позволяет судить о напряжениях в точке модели, так как при чистом изгибе распределение напряжений по высоте балки линейное.

Определение суммы главных напряжений производится либо экспериментально — способ Кокера¹, способ Файлона², способ мембранной³ либо электротепловой аналогии⁴, либо рядом приближенных способов, основанных на интегрировании дифференциальных уравнений, используя при этом данные, полученные экспериментом (изоклины, изохромы, изостаты). Из аналитических следует отметить способ Файлона и ряд предложенных способов работниками НИИММ ЛГУ⁵. Однако, эти способы сложны и дают в определенных точках напряженного поля значительные ошибки. Проще прием, примененный в Днепропетровском институте инженеров транспорта, заключающийся в интегрировании гармонического уравнения Лапласа, которому удовлетворяет $\sigma_1 + \sigma_2$, в конечных разностях.

В нашей работе определение суммы главных напряжений не проводилось, поскольку назначение эксперимента — подтвердить правильность теоретического решения, а для этого вполне достаточно сопоставить изоклины и изохромы, полученные экспериментально, с таковыми же, вычисленными на основе теоретического решения.

¹ Этот способ основан на измерении поперечного расширения модели при помощи экстензометров. Описание способа имеется в книге Кокера и Файлона. Оптический метод исследования напряжений.

² Этот способ чисто оптический, при котором вводится, кроме описанных приборов, интерферометр. В этом случае получают непосредственно σ_1 и σ_2 . Описание смотри в статье Н. Мауег. Spannungsoptische Untersuchung ebener Schwingungsvorgänge.

³ Подобная установка для кручения выполнена в Харьковском машиностроительном институте (проф. Блох). Описание подобных приборов смотри: Тимошенко. Курс теории упругости. 1934.

Н. Reichenbacher. Selbsttätige Ausmessung von seifenhautmodellen. (Anwendung auf das Torsionsproblem). Ingenieur — Archiv, August 1936.

⁴ А. Н. Ложкин. Применение метода электротепловой аналогии к построению прибора для изучения теплопроводности твердых тел и исследованию тепловых мостиков. Журнал Технической Физики, вып. 7, 1936.

П. М. Кичаев. Использование электротепловой и гидродинамической аналогии для решения плоской задачи теории упругости. Журнал Технической Физики, вып. 11, 1937.

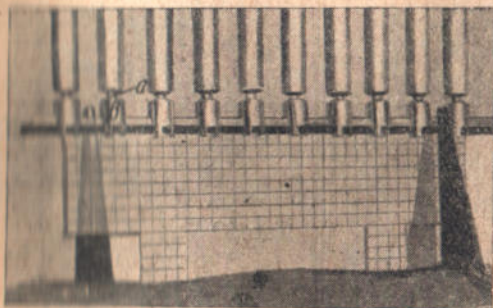
⁵ Смотри вышецитированные работы Кокера и Файлона и сборники НИИММ ЛГУ, вып. I и II.

§ 2. Описание эксперимента

В качестве объекта для проверки теоретического решения набрана балка, рассчитанная в § I раздела III при $\frac{h}{l} = 1:2,5$. Модель этой балки была сделана из зеркального стекла, толщиной в 6 мм, причем длина ее принята 270 мм. Все остальные размеры сделаны пропорционально указанным на фиг. 5. Равномерная нагрузка от грунта создавалась давлением 10 штоков на расстояниях 3,9 мм посредством рычажной передачи. Чтобы разместить грузы, рычаги были направлены через один в разные стороны и делались двух типов 1:10 и 1:5 (фиг. 17). Все давления рычагов были протарированы и грузы подбирались с таким расчетом, чтобы давление всех штоков было одинаковым.

Дальнейшая передача давлений от штоков к модели производилась посредством шариков *a* и металлических головок *b* (фиг. 18). От головок давление передавалось на модели через тонкую металлическую прокладку и упругую прокладку (кожа).

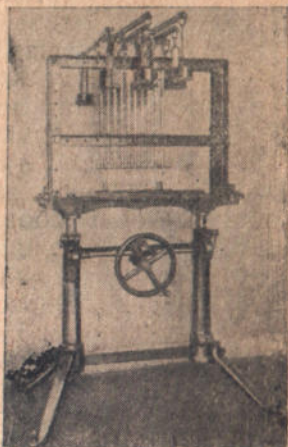
Для того, чтобы создать в месте опирания колонны равномерную передачу нагрузки, принятую при теоретическом расчете, колонна оборвана на высоте равной ширине ее. Между металлической доской, на которую опирались колонны, были проложены упругие прокладки. Для удобства установки модель придерживалась 4 угольниками, сделанными из сталистого железа толщиной в 1 мм, поставленными на ребро, чтобы не мешать просвечиванию модели.



Фиг. 18

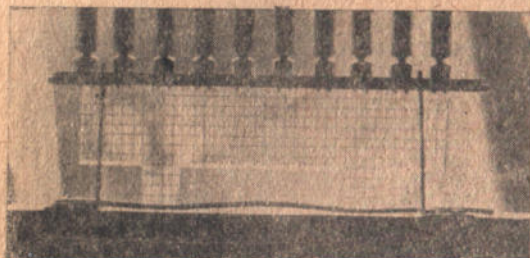
Нагрузка при моменте сопротивления $W = 3,0 \text{ см}^3$ и моменте $M = 190 \text{ кг. см}$ дает нормальное напряжение, подсчитанное по элементарной формуле

$$\sigma = \frac{M}{W} = 62,3 \text{ кг/см}^2.$$



Фиг. 17

Определение изоклинических линий проводилось на установке Кокера (фиг. 14) способом, изложенным выше. Замеры были проведены в одной половине балки для 150 точек. Для облегчения обработки этих данных, а также для контроля были сняты изоклинические линии на установке Кирпичева—Зайцева для углов 0, 10, 30°.



Фиг. 19

На этих снимках для одной половины получается угол 0, 10, 30°, для симметричной половины получаются изоклины для дополнительных углов 90, 80, 60°.

Приводим один из снимков, произведенных на установке Кирпичева—Зайцева для углов 10 и 80° (фиг. 19).

Так как осуществить поворот напряжений модели не представлялось возможным, то поворот произведен поляризатора и анализатора (фиг. 20).

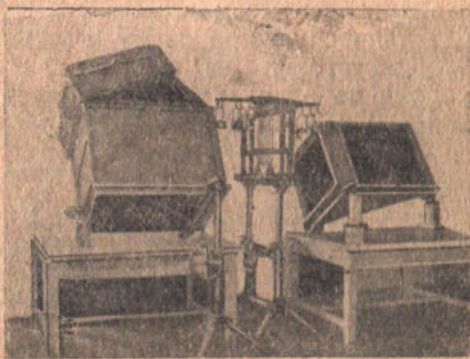
На фиг. 21 представлены изоклинические линии, вычерченные на основании обработки данных, полученных на установках Кокера и Кирпичева—Зайцева.

На фиг. 22 представлены те же линии, полученные на основании теоретического решения (§ 1, раздел III).

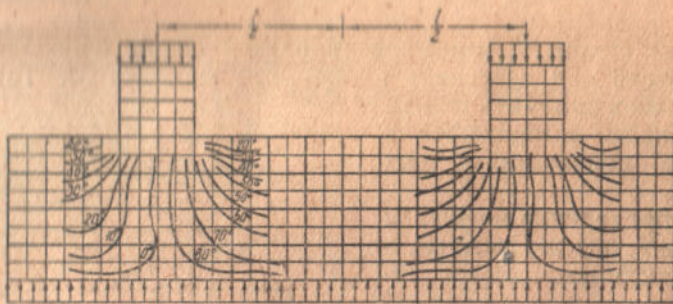
Компенсация проведена на установке Кокера компенсатором, изображенным на фиг. 16. Эта операция более сложна и требует выполнения всех замеров в возможно более короткий срок, так как при длительной работе с балкой, работающей на чистый изгиб, нет уверенности, что нажимные винты не сдадут и напряжение в компенсаторе не изменится.

Практически, при работе до 2 часов подряд, нами не обнаружено значительных изменений в отсчетах компенсатора при повторной компенсации.

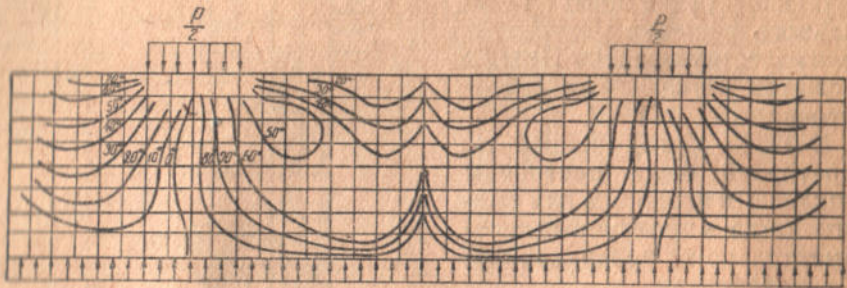
При компенсации не требуется замера абсолютной величины $\sigma_1 - \sigma_2$ ни в модели, ни в компенсаторе, достаточно иметь их относительные величины и затем сопоставить их с какой-либо решенной задачей, а затем сделать пересчет. Так, при компенсации мы поступали следующим образом. Модель, загруженную



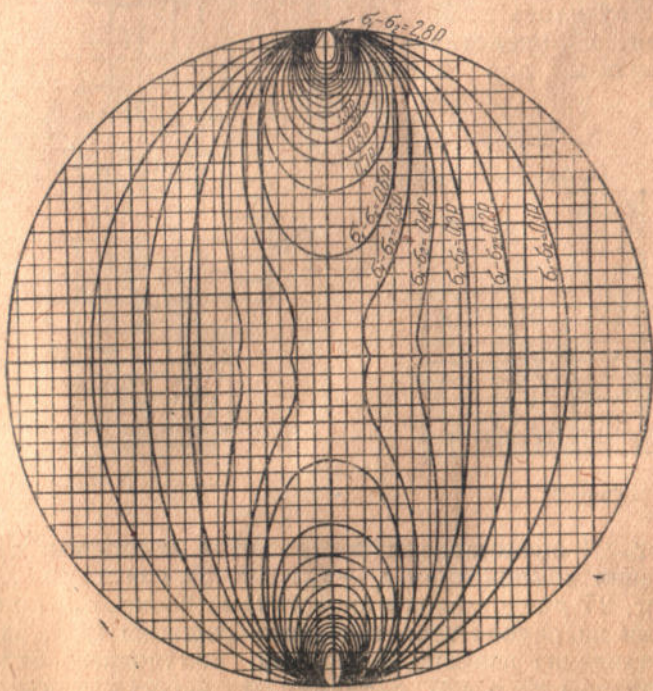
Фиг. 20



Фиг. 21



Фиг. 22



Фиг. 23

некоторой силой P' , закомпенсировали балкой, работающей на чистый изгиб под действием некоторого момента M . Таким образом, можно получить семейство изохром, выраженное в каком-то неизвестном масштабе.

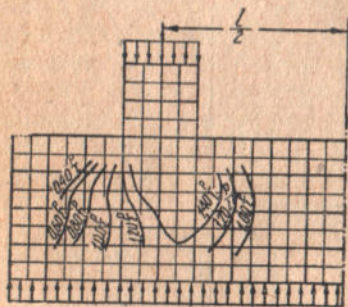
Для определения масштаба достаточно тем же компенсатором закомпенсировать несколько точек уже решенной задачи.

В качестве такого контрольного решения мы употребили известную задачу Hertz'a о сжатии катка двумя сосредоточенными силами.

В 1934—35 году нашей лабораторией были построены изоклины и изохромы для сжатого катка и проверены экспериментально на поляризационных установках.

Следует отметить, что совпадение решения с экспериментом получилось полное.

На фиг. 23 представлены эти изохромы для задачи Hertz'a.

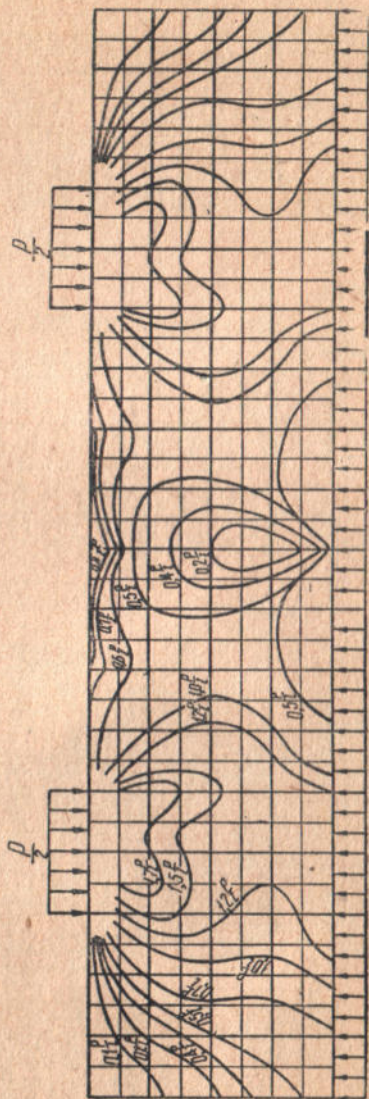


Фиг. 24

На фиг. 24 представлены построенные изохромы для балки на основании компенсации $\sigma_1 - \sigma_2$ в 40—50 точках.

На фиг. 25 представлены аналогичные изохромы, полученные подсчетами на основе теоретического решения (§ 1, раздел III).

Сопоставление изоклин и изохром, полученных экспериментально (фигуры 21 и 24), с такими же линиями, полученными



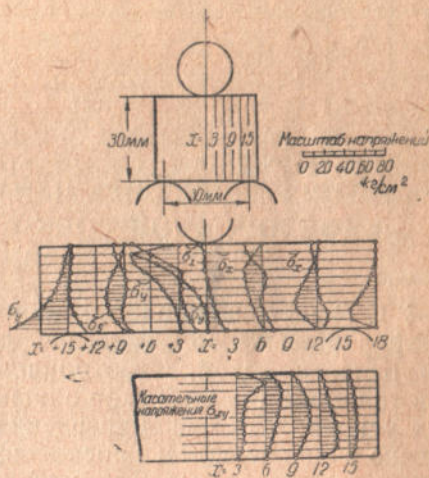
Фиг. 25

на основе теоретического решения (фиг. 22 и 25), показывает, что общий характер распределения напряжений, полученный теоретически, эксперимент подтверждает.

В книге Кокера и Файлоиа приводятся опыты с короткими балками, работающими на изгиб, проведенные проф. Фукухара¹ (Япония).

Для большей убедительности о правильности теоретического решения приводим здесь данные этих опытов, доведенных до определения напряжений σ_x и σ_{xy} для балки, сделанной из нитроцеллюлозы при $\frac{h}{l} = 1:1$ (фиг. 26).

В этом решении при несколько ином нагружении заметно такое же характерное изменение параболы касательных напряжений в сторону увеличения к точке опоры и характерная кривая (см. сеч. +9) для напряжения σ_x , как и в нашем решении для балки, $\frac{h}{l} = 1:1,5$.



Фиг. 26

¹ Кокер и Файлоиа. Оптический метод исследования напряжений, 1936, стр. 395.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ АНИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ТОНКОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ¹

§ 1. В настоящей работе мы имеем ввиду дать вывод общего дифференциального уравнения движения и равновесия упругой поверхности тонкой, анизотропной, неоднородной плиты переменной толщины при возможно общем случае действия на нее внешних усилий, дать вывод уравнения для функции напряжений при плоско-напряженном и плоско-деформированном состоянии и написать дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять перемещения при продольных колебаниях и перемещениях плиты. Кроме того, показать, как из общих уравнений получается целый ряд частных случаев как уже полученных другими авторами, так и неполученных еще никем.

§ 2. Прежде чем перейти к выводу этих общих уравнений, остановимся немного на современном состоянии данного вопроса.

Насколько нам известно, наиболее общее дифференциальное уравнение упругой поверхности тонкой изотропной плиты с постоянной жесткостью было получено Н. Reissner'ом в 1925 году и имело следующий вид:

$$D\Delta\Delta w = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $D = \frac{EJ}{1-\sigma^2}$ — цилиндрическая жесткость плиты,

w — прогиб срединной плоскости плиты,

T_1 — функция, представляющая собой нормальные растягивающие усилия, действующие в направлении оси X -ов,

T_2 — функция, представляющая собой нормальные растягивающие усилия, действующие в направлении оси Y -ов,

S — функция, представляющая собою касательные усилия, действующие в плоскости плиты.

¹ Настоящая работа была доложена 5/X 1937 г. на собрании НИТО строителей при Украинском научно-исследовательском институте сооружений (протокол собрания от 5/X 1937 г.) и в кружке по теории плит 23/X и 29/X при Научно-исследовательском институте математики и механики при Х. Г. У.

Что же касается дифференциального уравнения упругой поверхности изотропной плиты с переменной жесткостью, то здесь следует указать на работу R. Gran Olsson¹, в которой он рассматривает уравнение с линейно меняющейся жесткостью $D = N_0 x$ в направлении оси X -ов вида:

$$\Delta \Delta w + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = \frac{Z'(x, y)}{N_0 x}. \quad (2)$$

Более общее дифференциальное уравнение упругой поверхности изотропной плиты с переменной жесткостью приводит E. Reissner², которое имеет следующий вид:

$$\Delta (D \Delta w) + (1 - \sigma) \left[2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = Z'(x, y), \quad (3)$$

где $Z'(x, y)$ — нормальная нагрузка к срединной плоскости плиты.

В конце 1936 года появилась работа А. И. Лурье³, в которой он приводит более общее уравнение, чем уравнение (3)

$$\Delta (D \Delta w) + (1 - \sigma) \left[2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = Z'(x, y) + \frac{\partial M'}{\partial x} + \frac{\partial L'}{\partial y}, \quad (4)$$

где M' и L' — компоненты главного момента внешних сил.

Наиболее общее уравнение из до сих пор известных для функции напряжений получил С. Г. Михлин⁴,

$$\begin{aligned} & A_{33} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2A_{23} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + (A_{22} + 2A_{13}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2A_{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + \\ & + A_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \left(2 \frac{\partial A_{33}}{\partial x} - \frac{\partial A_{23}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial y} + 2 \frac{\partial A_{13}}{\partial y} - \right. \\ & - 3 \frac{\partial A_{23}}{\partial x} \left. \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial x} + 2 \frac{\partial A_{13}}{\partial x} - 3 \frac{\partial A_{12}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \\ & + \left(2 \frac{\partial A_{11}}{\partial y} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial^2 A_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ & - \left(\frac{\partial^2 A_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Но на этом, насколько нам известно, и ограничиваются типы дифференциальных уравнений, если не считать более частных случаев, вытекающих из вышеприведенных уравнений.

Далее мы покажем вывод дифференциальных уравнений, из которых, как частный случай, наряду с другими уравнениями, могут быть получены и вышеприведенные уравнения (1), (2), (3), (4) и (5).

¹ R. Gran Olsson. Norske vid. Selsk. Skr. 1933, Ing.—Archiv, 5 (1934), стр. 363; Verhandlungen des 8. Skandinavischen Mathematikerkongresses, Stockholm, 1934, S. 149—153 (опубликована 1935). Этой работы нам не удалось достать.

² E. Reissner. Ing.—Archiv, 2 Heft, 1936.

³ А. И. Лурье. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Труды Ленинградского индустриального института, № 6, стр. 57—80, 1936.

⁴ С. Г. Михлин. Плоская деформация в анизотропной среде. Издание Академии Наук СССР. М.—Л. 1936.

§ 3. Согласно обобщенному закону Гука, компоненты напряжений $X_x, Y_y, Z_z, Y_x, X_z, X_y$ связаны с компонентами деформаций $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{xz}, e_{xy}$ следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11}e_{xx} + a_{12}e_{yy} + a_{13}e_{zz} + a_{14}e_{yz} + a_{15}e_{xz} + a_{16}e_{xy}; \\ Y_y &= a_{21}e_{xx} + a_{22}e_{yy} + a_{23}e_{zz} + a_{24}e_{yz} + a_{25}e_{xz} + a_{26}e_{xy}; \\ Z_z &= a_{31}e_{xx} + a_{32}e_{yy} + a_{33}e_{zz} + a_{34}e_{yz} + a_{35}e_{xz} + a_{36}e_{xy}; \\ Y_x &= a_{41}e_{xx} + a_{42}e_{yy} + a_{43}e_{zz} + a_{44}e_{yz} + a_{45}e_{xz} + a_{46}e_{xy}; \\ X_z &= a_{51}e_{xx} + a_{52}e_{yy} + a_{53}e_{zz} + a_{54}e_{yz} + a_{55}e_{xz} + a_{56}e_{xy}; \\ X_y &= a_{61}e_{xx} + a_{62}e_{yy} + a_{63}e_{zz} + a_{64}e_{yz} + a_{65}e_{xz} + a_{66}e_{xy}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{21}, a_{22} \dots a_{66}$ — коэффициенты упругости данного материала плиты.

Величины этих коэффициентов зависят, как от упругих свойств среды, так и от выбранной системы координат.

Коэффициенты эти могут быть либо постоянными, либо функциями точки. Среда, характеризваемая постоянными коэффициентами упругости, называется однородной, а переменными коэффициентами упругости — неоднородной. Ввиду малой толщины плиты, мы будем считать¹, что коэффициенты a_{ik} при неоднородной среде, являются аналитическими функциями только x и y , а от z не зависят.

При существовании потенциала упругих сил (закона сохранения энергии в упругом теле) должно быть:

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Представим себе плиту, у которой боковая поверхность образована цилиндром $f(x, y) = 0$, а верхняя и нижняя поверхности плиты представлены уравнениями:

$$z = (-1)^{k+1} h_k(x, y), \quad (k = 1, 2).$$

При тех предположениях, какие обычно принимают при выводе дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой изотропной плиты, перемещения отдельных точек плиты u_1, v_1, w_1 могут быть представлены при помощи следующих формул:

$$\begin{aligned} u_1 &= u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1 = v - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ \text{и} \quad w_1 &= w + \psi(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где u, v и w (функции от x, y, t) суть перемещения точек срединной плоскости плиты, а $\psi(x, y, z, t)$ — пока неизвестная функция от x, y, z, t .

При отсутствии изгиба перемещения отдельных точек плиты будут:

$$u_1 = u, \quad v_1 = v \quad \text{и} \quad w_1 = 0,$$

так как

$$w_1 = 0, \quad w = 0, \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

¹ С. Г. Михлин, Ibidem.

При наличии только изгиба перемещения отдельных точек плиты будут:

$$u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1 = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

и

$$w_1 = w + \psi(x, y, z, t).$$

§ 4 Для того, чтобы выразить напряжения уравнений (6) X_x , Y_y , Z_z , Y_x , X_y через перемещения срединной плоскости плиты, найдем связь между деформациями e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{yz} , e_{xz} , e_{xy} и перемещениями u_1 , v_1 и w_1 .

Эта связь, как известно, осуществляется при помощи уравнений Коши:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad e_{xz} = \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad e_{xy} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Вставляя в уравнения (8) значения (7), получим:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad e_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{и} \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Нетрудно проверить, что, независимо от вида функции $\psi(x, y, z, t)$, соотношения (9) полностью удовлетворяют уравнениям неразрывности Сен-Венана.

Вставляя значения (9) в уравнения (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_{14} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{15} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &+ a_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \left(a_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ X_y &= a_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{63} \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_{64} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{65} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &+ a_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \left(a_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда при отсутствии изгиба будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_{14} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{15} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ X_y &= a_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + a_{63} \frac{\partial \psi}{\partial z} + a_{64} \frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{65} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Произвольную функцию $C(x, y, t)$ определим из условия, что при $z=0$, $\omega_1 = \omega$, т. е. $\psi(x, y, z, t) = 0$, следовательно, при этом $C(x, y, t) \equiv 0$ и функция ψ будет иметь вид:

$$\psi(x, y, z, t) = -z \left[\frac{a_{31}}{a_{33}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_{32}}{a_{33}} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a_{36}}{a_{33}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{z^2}{2} \left[\frac{a_{31}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{a_{32}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2 \frac{a_{36}}{a_{33}} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]. \quad (15)$$

Напишем теперь выражения для усилия и моментов, отнесенных к единице длины¹:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \int_{-h_2}^{h_1} X_x dz, & T_2 &= \int_{-h_2}^{h_1} Y_y dz, & S &= \int_{-h_2}^{h_1} X_y dz, \\ M_1 &= \int_{-h_2}^{h_1} X_x z dz, & M_2 &= \int_{-h_2}^{h_1} Y_y z dz & \text{и } H &= \int_{-h_2}^{h_1} X_y z dz. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Вставим теперь в выражения (16) значения напряжений (10) и предположим, что средняя плоскость плиты является плоскостью геометрической симметрии ($h_1 = h_2$), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2h \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \\ T_2 &= 2h \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \\ S &= 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (17_1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]; \\ M_2 &= -J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]; \\ H &= -J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (17_2)$$

где

$$J = \int_{-h}^h z^2 dz, \quad \alpha_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{33}}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}}{a_{33}},$$

$$\alpha_{16} = \alpha_{61} = \frac{a_{16}a_{33} - a_{13}a_{36}}{a_{33}}, \quad \alpha_{26} = \alpha_{62} = \frac{a_{26}a_{33} - a_{23}a_{36}}{a_{33}},$$

$$\alpha_{66} = \frac{a_{66}a_{33} - a_{63}a_{36}}{a_{33}}, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}.$$

§ 5. Найдем теперь те уравнения движения и равновесия, которым должны удовлетворять компоненты усилий (17₁) и моментов (17₂).

Пусть $z = h_1(x, y)$ и $z = -h_2(x, y)$ представляют собою соответственно уравнения верхней и нижней поверхности плиты,

¹ С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, II часть, Петроград, 1916.

тогда косинусы углов внешних нормалей к этим поверхностям с осями координат соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} \cos(n_k x) &= -\frac{1}{D_k} p_k; \\ \cos(n_k y) &= -\frac{1}{D_k} q_k; \\ \cos(n_k z) &= +\frac{1}{D_k} r_k; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$p_k = (-1)^{k+1} \frac{\partial h_k}{\partial x}, \quad q_k = (-1)^{k+1} \frac{\partial h_k}{\partial y}, \quad r_k = \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

$$D_k = \sqrt{1 + p_k^2 + q_k^2} \quad (k = 1, 2).$$

Граничные условия на поверхностях $z = (-1)^{k+1} h_k(x, y)$ будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} -X_x^{(k)} p_k - X_y^{(k)} q_k + X_z^{(k)} &= D_k X_k; \\ -Y_y^{(k)} p_k - Y_z^{(k)} q_k + Y_x^{(k)} &= D_k Y_k; \\ -X_z^{(k)} p_k - Y_z^{(k)} q_k + Z_z^{(k)} &= D_k Z_k; \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (19)$$

где $X_x^{(k)}, Y_y^{(k)}, Z_z^{(k)}, X_y^{(k)}, Y_z^{(k)}, X_z^{(k)}$ — значения напряжений на поверхностях $z = (-1)^{k+1} h_k(x, y)$, а X_k, Y_k, Z_k — проекции на оси координат внешних усилий, отнесенных к единице площади и распределенных по торцевым поверхностям плиты

$$z = (-1)^{k+1} h_k(x, y), \quad \text{где } (k = 1, 2).$$

Напишем теперь уравнения движения и равновесия элемента объема тела:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho(X - f_x) &= 0; \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho(Y - f_y) &= 0; \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho(Z - f_z) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$\rho X, \rho Y, \rho Z$ — представляют проекции на оси внешней объемной силы;

f_x, f_y, f_z — проекции ускорения частицы объема, который в момент t находится в точке (x, y, z) ;

ρ — плотность в точке (x, y, z) .

Проинтегрируем уравнения (20) по толщине плиты¹:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho(X - f_x) \right] dz &= 0; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho(Y - f_y) \right] dz &= 0; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho(Z - f_z) \right] dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Рассмотрим в системе (21) каждое слагаемое первого уравнения отдельно:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_x}{\partial x} dz &= \frac{\partial T_1}{\partial x} - p_1 X_x^{(1)} + p_2 X_x^{(2)}; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_y}{\partial y} dz &= \frac{\partial S}{\partial y} - q_1 X_y^{(1)} + q_2 X_y^{(2)}; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_z}{\partial z} dz &= X_z^{(1)} - X_z^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

После подстановки значений слагаемых (22) в первое уравнение системы (21) и использования соотношений (19) будем иметь:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + D_1 X_1 - D_2 X_2 + \int_{-h_2}^{h_1} \rho(X - f_x) dz = 0.$$

Выполняя аналогичные преобразования и над двумя остальными уравнениями системы (21) и делая некоторую замену, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + X' &= 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} + Y' &= 0; \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} X' &= \int_{-h_2}^{h_1} \rho(X - f_x) dz + D_1 X_1 - D_2 X_2; \\ Y' &= \int_{-h_2}^{h_1} \rho(Y - f_y) dz + D_1 Y_1 - D_2 Y_2; \\ Z' &= \int_{-h_2}^{h_1} \rho(Z - f_z) dz + D_1 Z_1 - D_2 Z_2. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹ А. И. Лурье. Ibidem.

Умножим теперь первое и второе уравнение системы (20) на z и проинтегрируем по толщине плиты, т. е. напишем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{\partial X_x}{\partial x} z + \frac{\partial X_y}{\partial y} z + \frac{\partial X_z}{\partial z} z \right] dz + \int_{-h_2}^{h_1} \rho z (X - f_x) dz &= 0; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{\partial Y_x}{\partial x} z + \frac{\partial Y_y}{\partial y} z + \frac{\partial Y_z}{\partial z} z \right] dz + \int_{-h_2}^{h_1} \rho z (Y - f_y) dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Рассмотрим каждое из первых трех слагаемых первого уравнения системы (25) отдельно:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_x}{\partial x} z dz &= \frac{\partial M_1}{\partial x} - p_1 h_1 X_x^{(1)} - p_2 h_2 X_x^{(2)}; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_y}{\partial y} z dz &= \frac{\partial H}{\partial y} - q_1 h_1 X_y^{(1)} - q_2 h_2 X_y^{(2)}; \\ \int_{-h_2}^{h_1} \frac{\partial X_z}{\partial z} z dz &= -N_1 + h_1 X_z^{(1)} + h_2 X_z^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Вставляя значения (26) в первое уравнение системы (25) и принимая во внимание соотношения (19), будем иметь:

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 + \int_{-h_2}^{h_1} \rho z (X - f_x) dz + h_1 D_1 X_1 + h_2 D_2 X_2 = 0.$$

Выполняя аналогичные преобразования и со вторым уравнением системы (25) и делая некоторую замену, окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - N_1 + M' &= 0; \\ \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - N_2 + L' &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} M' &= \int_{-h_2}^{h_1} \rho z (X - f_x) + h_1 D_1 X_1 + h_2 D_2 X_2; \\ L' &= \int_{-h_2}^{h_1} \rho z (Y - f_y) + h_1 D_1 Y_1 + h_2 D_2 Y_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Если положить в выражениях (24) и (26) $f_x = f_y = f_z = 0$, то получим выражения для X' , Y' , Z' , M' и L' , данные проф. А. И. Лурье¹. При $f_x = f_y = f_z = 0$ и плите постоянной толщины ($D_k = 1$, ($k = 1, 2$)), получим общеизвестные выражения для X' , Y' , Z' , M' и L' ^{*}.

¹ А. И. Лурье. Ibidem.

^{*} А. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л. 1933.

Если плита будет двигаться таким образом, что смещения u_1 , v_1 , w_1 всех ее частей остаются все время очень малыми, то, введя обозначение времени t , мы можем вместо f_x , f_y , f_z написать $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$.

Итак мы получили общие уравнения движения и равновесия (23) и (27), которым должны удовлетворять наши компоненты усилий T_1 , T_2 , S , N_1 и N_2 и моментов M_1 , M_2 и H .

§ 6. Чтобы найти общие дифференциальные уравнения движения и равновесия плиты, воспользуемся принципом Гамильтона¹

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(T - A) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0, \quad (29)$$

где: T — кинетическая энергия плиты,

A — работа деформации,

W — работа поверхностных и объемных сил.

В нашем случае:

$$\begin{aligned} T &= \iiint \frac{\rho}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz; \\ A &= \iint \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} \left[\frac{1}{2} a_{11} e_{xx}^2 + a_{12} e_{xx} e_{yy} + a_{13} e_{xx} e_{zz} + a_{16} e_{xx} e_{xy} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} a_{22} e_{yy}^2 + a_{23} e_{yy} e_{zz} + a_{26} e_{yy} e_{xy} + \frac{1}{2} a_{33} e_{zz}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_{36} e_{zz} e_{xy} + \frac{1}{2} a_{66} e_{xy}^2 \right] dz \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} [X_x e_{xx} + Y_y e_{yy} + X_y e_{xy}] dz \right\} dx dy. \end{aligned}$$

При этом мы принимаем, как и в теории изгиба тонких изотропных плит с постоянной толщиной, $Z_x = 0$, $e_{xz} = e_{yz} = 0$.

При этом заметим, что такие же допущения были приняты при выводе дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой изотропной плиты переменной толщины R. Gran Olsson'ом, E. Reissner'ом и проф. А. И. Лурье.

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint \rho (X \delta u_1 + Y \delta v_1 + Z \delta w_1) dx dy dz + \\ &\quad + \iint (X_n \delta u_1 + Y_n \delta v_1 + Z_n \delta w_1) ds dz + \\ &\quad + \iint (X_1 \delta u_1 + Y_1 \delta v_1 + Z_1 \delta w_1) dx dy - \\ &\quad - \iint (X_2 \delta u_1 + Y_2 \delta v_1 + Z_2 \delta w_1) dx dy. \end{aligned}$$

При $e_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ и $e_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$, следовательно, в этом случае

¹ Е. Трэффц. Математическая теория упругости, ГТТИ, 1932, стр. 43, уравнение (8).

ψ является только функцией z и t и выражение для w_1 будет иметь вид (см. выражение (7) и (15)):

$$w_1 = w - C_1 z + C_2 z^2, \quad (A)$$

где C_1 и C_2 являются некоторыми функциями t , т. е.

$$C_1 = C_1(t);$$

$$C_2 = C_2(t).$$

При малой толщине плиты, как это поступают при изотропных плитах, можно принять $w_1 = w$ или $w_1 = w - az + bz^2$, где a и b — некоторые константы.

Напишем выражения вариаций δu_1 , δv_1 и δw_1 , которые согласно (7) и (A) будут равны:

$$\delta u_1 = \delta u - z \delta \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \delta v_1 = \delta v - z \delta \frac{\partial w}{\partial y}$$

и

$$\delta w_1 = \delta w - z \delta C_1 + z^2 \delta C_2, \quad \text{но } \delta C_1 = \delta C_2 = 0, \quad \text{!}$$

следовательно, $\delta w_1 = \delta w$.

Вставляя в уравнение (29) приведенные выше значения T , A и W и пользуясь выражениями (9) и значениями δu_1 , δv_1 и δw_1 , получим:

$$\begin{aligned} & - \int_{-t_0}^{t_1} dt \iiint \rho \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \delta w - z \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \times \\ & \times dx dy dz - \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \left\{ 2h \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \right. \\ & + 2h \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \delta v}{\partial y} + 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \\ & + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left. \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right] + J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \\ & + 2J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\ & + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \left| \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right] dx dy + \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \iiint \left[\rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) - \right. \right. \\ & - z \rho \left(X \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] dx dy dz + \iint \left[(X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) - \right. \\ & - z \left(X_n \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y_n \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \left. \right] ds dz + \iint \left[(X_1 \delta u + Y_1 \delta v + Z_1 \delta w) - \right. \\ & - h_1 \left(X_1 \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \left. \right] D_1 dx dy - \iint \left[(X_2 \delta u + Y_2 \delta v + Z_2 \delta w) + \right. \\ & \left. + h_2 \left(X_2 \frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] D_2 dx dy \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Выполняя не сложные, но довольно длинные преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
 & \int dt \left\{ \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2h \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
 & + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \left. \right\} + \left[\int_{-h_2}^{h_1} \rho \left(X - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) dz + D_1 X_1 - D_2 X_2 \right] \times \\
 & \times dx dy \delta u + \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2h \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \left. \left[\int_{-h_2}^{h_1} \rho \left(Y - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) dz + \right. \right. \\
 & + D_1 Y_1 - D_2 Y_2 \left. \right] dx dy \delta v - \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} + \right. \\
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \left. \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} z \rho \left(X - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) dz + h_1 D_1 X_1 + h_2 D_2 X_2 \right\} - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} z \rho \left(Y - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) dz + h_1 D_1 Y_1 + h_2 D_2 Y_2 \right\} - \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} \rho \left(z - \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) dz + \right. \\
 & + D_1 Z_1 - D_2 Z_2 \left. \right] dx dy \delta w - \int \left\{ 2h \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \\
 & + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left. \right\} \cos(n, x) + 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \cos(n, y) - \\
 & - \int_{-h_2}^{h_1} X_n dz ds \bar{\delta u} - \int \left\{ 2h \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \cos(n, y) + \right. \\
 & + 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \cos(n, x) - \left. \int_{-h_2}^{h_1} Y_n dz \right\} ds \bar{\delta v} - \\
 & - \int \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cos^2(n, x) + 2J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \right] \cos(n, x) \cos(n, y) + J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\
 & + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \right] \cos^2(n, y) + \int_{-h_2}^{h_1} z \left[X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y) \right] dz \left. \right\} ds \frac{\delta w}{\delta n} - \\
 & - \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, x) + \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, x) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, y) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, y) - \\
& - \frac{\partial}{\partial s} \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, x) \cos(n, y) + \\
& + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} \cos(n, x) \cos(n, y) + \\
& + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} [\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)] - \\
& - \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} z p \left(X - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) dz + D_1 X_1 h_1 + D_2 X_2 h_2 \right\} \cos(n, x) - \\
& - \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} z p \left(Y - \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) dz + D_1 Y_1 h_1 + D_2 Y_2 h_2 \right\} \cos(n, y) + \\
& + \int_{-h_2}^{h_1} Z_n dz + \int_{-h_2}^{h_1} z dz \frac{\partial}{\partial s} [-X_n \cos(n, y) + Y_n \cos(n, x)] ds \overline{\delta w} = 0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Примечание. Вариации $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta v}$ и $\overline{\delta w}$ и все выражения, стоящие под знаками контурных интегралов, относятся к контуру плиты, вариации δu , δv и δw и все выражения, стоящие под знаками двойных интегралов, относятся к любой точке упругой поверхности плиты.

Так как в выражении (30) δu , δv и δw совершенно произвольны, то каждый из двойных интегралов и сумма интегралов по контуру должны в отдельности обращаться в нуль¹. Это для каждой точки плиты даст следующую систему дифференциальных уравнений, которую мы напомним, приняв во внимание выражения (24) и (28):

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2h \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + X' = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2h \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2h \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} + Y' = 0; \\
& - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - \\
& - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} - \\
& - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} M' + \frac{\partial}{\partial y} L' + Z' = 0. \quad (32)
\end{aligned} \right\} \quad (31)$$

¹ Clemens Schaefer. Einführung in die theoretische Physik. Bd. II. Berlin und Leipzig, 1929. Имеется русский перевод.

Если перемещения u_1 , v_1 и w_1 будут являться и функциями t , то уравнения (31) и (32) будут зависимы, ибо в выражения M' и L' входят функции u_1 и v_1 , которые одновременно входят и в выражения X' и Y' . При u_1 , v_1 и w_1 независимых от t , $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0$ и, следовательно, выражения X' , Y' , Z' , M' и L' не будут содержать этих производных.

§ 7. Граничные условия. Если края плиты совершенно свободны, то $\delta \bar{u}$, $\delta \bar{v}$, $\delta \bar{w}$ и $\frac{\partial \delta w}{\partial n}$ (которое относится тоже к контуру плиты) вполне произвольны. Следовательно, сумма интегралов по контуру в выражении (30) будет равняться нулю только тогда, когда каждый интеграл в отдельности равен нулю. Принимая во внимание соотношения (17₁) и (17₂), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \cos(n, x) + S \cos(n, y) - \int_{h_2}^{h_1} X_n dz &= 0; \\ T_2 \cos(n, y) + S \cos(n, x) - \int_{h_2}^{h_1} Y_n dz &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$M_1 \cos^2(n, x) + 2H \cos(n, x) \cos(n, y) + M_2 \cos^2(n, y) - \int_{-h_2}^{h_1} z [X_n \cos(n, x) + Y_n \cos(n, y)] dz = 0; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right] \cos(n, x) + \left[\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} \right] \cos(n, y) + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} [(-M_1 + M_2) \cos(n, x) \cos(n, y) + H (\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y))] + \\ & + M' \cos(n, x) + L' \cos(n, y) - \int_{-h}^{h_1} Z_n dz - \\ & - \int_{-h_2}^{h_1} z dz \frac{\partial}{\partial s} [-X_n \cos(n, y) + Y_n \cos(n, x)] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Граничные условия (33) относятся к продольным перемещениям плиты, граничные условия (34) и (35) — к поперечным перемещениям плиты.

Для случая изотропной плиты с постоянной толщиной, как нетрудно проверить, граничные условия (34) и (35) при замене значений M_1 , M_2 и H на их выражения через прогиб срединной плоскости плиты w , будут иметь вид:

$$\begin{aligned} & \sigma \Delta w + (1 - \sigma) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^3(n, y) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^3(n, x) + \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos(n, y) \cos(n, x) = - \frac{1}{D} \int_{-h_2}^{h_1} z [X_n \cos(n, x) + \\ & \left. + Y_n \cos(n, y)] dz; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos(n, y) \cos(n, x) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2(n, x) - \cos^2(n, y)) \right\} = \frac{1}{D} (M' \cos(n, x) + \\ & + L' \cos(n, y)) - \frac{1}{D} \int_{-h_1}^{h_1} Z_n dz - \frac{1}{D} \int_{-h_2}^{h_2} z dz \frac{\partial}{\partial s} [-X_n \cos(n, y) + \\ & + Y_n \cos(n, x)]. \end{aligned} \quad (37)$$

Полученные граничные условия для изотропной плиты с постоянной толщиной при $X_n = Y_n = Z_n = M' = L' = 0$ в точности совпадают с граничными условиями, приведенными для данного случая в труде Clemens Schaefer'a¹.

Граничные условия для плиты с жестко закрепленными краями будут:

$$u = v = w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (38)$$

Граничные условия для плиты с шарнирно закрепленными краями будут: $u = v = w = 0$ и условие (35).

Граничные условия для плиты, свободно уложенной по контуру (край имеет возможность поворачиваться и перемещаться в плоскости плиты, но не может опускаться и подниматься), будут: для u и v условия (33), а для w , $w = 0$ и условие (35).

§ 8. Дифференциальное уравнение упругой поверхности для расчета плиты на изгиб, устойчивость и колебания могут быть получены аналогично тому пути, который указали в свое время Н. Reissner² и Th. V. Kármán³.

Не будем останавливаться на выкладках, а приведем его окончательный вид:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ J \left[\alpha_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\alpha_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ J \left[\alpha_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\alpha_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ J \left[\alpha_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\alpha_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} + M') + \frac{\partial}{\partial y} (T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} + L') + \\ & + Z'(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Это уравнение можно также получить из чисто геометрических соображений. Рассмотрим деформированный элемент плиты (фиг. 1) и спроектируем все силы, действующие на этот элемент на ось Z -ов.

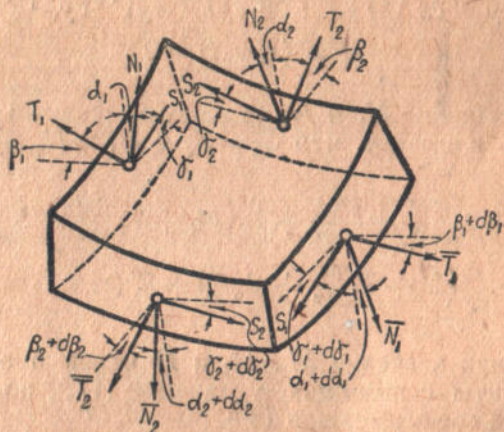
¹ Clemens Schaefer. Ibidem.

² Н. Reissner. Ibidem.

³ Th. V. Kármán. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, № 11/5.

Углы, которые образуют компоненты сил с осями координат, вследствие изгиба срединной поверхности плиты, будут:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}, & \alpha_1 + d\alpha_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, & \alpha_2 &= \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \alpha_2 + d\alpha_2 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy, & \beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}, & \beta_1 + d\beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \\ \beta_2 &= \frac{\partial w}{\partial y}, & \beta_2 + d\beta_2 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy, & \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_1 + d\gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dx, & \gamma_2 &= \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_2 + d\gamma_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy. \end{aligned}$$



Фиг. 1

Усилия, при переходе от одного сечения к другому бесконечно-близкому сечению (фиг. 1), изменятся и будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx, & \bar{T}_1 &= T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx, & \bar{S}_1 &= S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx, \\ \bar{N}_2 &= N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy, & \bar{T}_2 &= T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial y} dy, & \bar{S}_2 &= S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Проектируя все силы на ось Z -ов, получим:

$$\begin{aligned} & \left[-N_1 \cos \alpha_1 + N_1 \cos (\alpha_1 + d\alpha_1) + \frac{\partial N_1}{\partial x} \cos (\alpha_1 + d\alpha_1) dx \right] dy + \\ & + \left[-N_2 \cos \alpha_2 + N_2 \cos (\alpha_2 + d\alpha_2) + \frac{\partial N_2}{\partial y} \cos (\alpha_2 + d\alpha_2) dy \right] dx + \\ & + \left[-T_1 \sin \beta_1 + T_1 \sin (\beta_1 + d\beta_1) + \frac{\partial T_1}{\partial x} \sin (\beta_1 + d\beta_1) dx \right] dy + \\ & + \left[-T_2 \sin \beta_2 + T_2 \sin (\beta_2 + d\beta_2) + \frac{\partial T_2}{\partial y} \sin (\beta_2 + d\beta_2) dy \right] dx + \\ & + \left[-S_1 \sin \gamma_1 + S_1 \sin (\gamma_1 + d\gamma_1) + \frac{\partial S_1}{\partial x} \sin (\gamma_1 + d\gamma_1) dx \right] dy + \\ & + \left[-S_2 \sin \gamma_2 + S_2 \sin (\gamma_2 + d\gamma_2) + \frac{\partial S_2}{\partial y} \sin (\gamma_2 + d\gamma_2) dy \right] dx + \\ & + Z'(x, y, t) = 0, \end{aligned}$$

где

$$Z(x, y, t) = \int_{-h}^h \rho \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + D_1 Z_1 - D_2 Z_2.$$

Пренебрегая бесконечно-малыми третьего порядка и заменяя \cos малых углов на единицы, а \sin малых углов на сами углы и сокращая на $dx dy$, получим:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Z'(x, y, t) = 0$$

или, заменяя значения N_1 и N_2 на их выражения из уравнений (27) и принимая во внимание, что $S_1 = S_2$ и $H_1 = H_2$, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(M_1 + T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(L' + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Z'(x, y, t) = 0. \quad (39a)$$

Или, выражая значения M_1 , M_2 и H через прогиб срединной плоскости плиты с помощью уравнений (17₂), получим искомого дифференциального уравнение (39).

§ 9. Выше, при выводе уравнений (31) и (32), мы приняли $Z_z = 0$ и $e_{yz} = e_{xz} = 0$. Отбросим теперь второе предположение и примем, что $Z_z = 0$, но $e_{xz} \neq 0$ и $e_{yz} \neq 0$, тогда функция ψ будет функцией всех переменных (x, y, z, t) и примет вид формулы (15).

К уравнениям (31) и (32) необходимо в этом случае внести поправки, которые получатся, если мы вместо $w_1 = w - az + bz^2$ возьмем $w_1 = w + \psi(x, y, z, t)$ и вместо $\delta w_1 = \delta w$ возьмем $\delta w_1 = \delta w + \delta \psi$.

В частности приведем поправки, которые получатся, если мы учтем в уравнении Гамильтона (29), во втором его члене А, вы-

ражение $\frac{1}{2} \iint dx dy \int_{-h}^h (X_z e_{xz} + Y_z e_{yz}) dz$, которым выше мы пренебрегли, приняв $e_{xz} = e_{yz} = 0$.

Из уравнений (13), при наличии плоскости упругой симметрии XOY , будем иметь:

$$X_z = a_{54} e_{yz} + a_{55} e_{xz}, \quad Y_z = a_{44} e_{yz} + a_{45} e_{xz}.$$

Из выражений (9)

$$e_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad e_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \int dx dy \int_{-h_2}^{h_1} [(a_{54} e_{yz} + a_{55} e_{xz}) e_{xz} + (a_{44} e_{yz} + a_{45} e_{yz}) e_{yz}] dz = \\ & = \frac{1}{2} \int \int dx dy \int_{-h_2}^{h_1} [(a_{54} + a_{45}) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + a_{55} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + a_{44} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2] dz. \quad (a) \end{aligned}$$

Вводя операторы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{a_{51}}{a_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_{32}}{a_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2 \frac{a_{36}}{a_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \Delta_2 = \frac{a_{31}}{a_{33}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_{36}}{a_{33}} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Delta_3 &= \frac{a_{32}}{a_{33}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_{36}}{a_{33}} \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

будем иметь:

$$\psi(x, y, z) = \frac{z^2}{2} \Delta_1 w - z \Delta_2 u - z \Delta_3 v. \quad (б)$$

Вставляя значение функции ψ в выражение (а), получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{1}{2} \int \int dx dy \int_{-h_2}^{h_1} \left\{ (a_{54} + a_{45}) \left(\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w - z \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u - z \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w - z \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u - z \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v \right) + a_{55} \left(\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w - z \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u - \right. \\ & \left. \left. - z \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v \right)^2 + a_{44} \left(\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w - z \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u - z \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v \right)^2 \right\} dz. \end{aligned}$$

Или, выполняя интегрирование и принимая во внимание геометрическую симметрию плиты по отношению к срединной плоскости, будем иметь:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{1}{2} \int \int dx dy \left\{ (a_{54} + a_{45}) \frac{2h^5}{5 \cdot 4} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w + \right. \\ & + a_{55} \frac{2h^5}{5 \cdot 4} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w \right)^2 + a_{44} \frac{2h^5}{5 \cdot 4} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w \right)^2 \left. \right\} + \frac{1}{2} \int \int dx dy \left\{ (a_{54} + \right. \\ & + a_{45}) \frac{2h^3}{3} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v + \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v \left. \right) + a_{55} \frac{2h^3}{3} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 v \right)^2 \right] + a_{44} \frac{2h^3}{3} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 u \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 v \right)^2 \right] \left. \right\}. \quad (в) \end{aligned}$$

Выполняя вариирование выражения (в), будем иметь следующие поправки соответственно для трех уравнений, полученных нами выше (31) и (32):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1 &= \left\{ (a_{54} + a_{45}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) + \right. \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) \left. \right] + a_{55} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_2 \left(\frac{2h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) + \\ & \left. + a_{44} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 \left(\frac{2h^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) \right\}; \quad (г) \end{aligned}$$

$$\delta \Pi_2' = \left\{ (a_{54} + a_{45}) \left[\frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) \right] + a_{55} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_3 \left(\frac{2h^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) + a_{44} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_3 \left(\frac{2h^3}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 u + \Delta_3 v) \right) \right\}; \quad (д)$$

$$\delta \Pi_3' = \left\{ (a_{54} + a_{45}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 \left(\frac{h^5}{5.4} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 \left(\frac{h^5}{5.4} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w \right) \right] + a_{55} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 \left(\frac{2h^5}{5.4} \frac{\partial}{\partial x} \Delta_1 w \right) + a_{44} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 \left(\frac{2h^5}{5.4} \frac{\partial}{\partial y} \Delta_1 w \right) \right\}. \quad (е)$$

Поправки (г) и (д) относятся к уравнениям системы (31), а поправка (е) — к уравнению (32).

Полученные поправки следует дописать к левым частям уравнений (31) и (32), но, как видно из их выражений, они при малой толщине плиты и при малых значениях $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ существенного значения не имеют и могут быть отброшены.

Аналогично можно получить поправки к первому и третьему членам уравнения Гамильтона (29) и распространить их не только на уравнения (31) и (32), но и на уравнения (33), (34) и (35), относящиеся к граничным условиям. Нами это было проделано и мы убедились, что эти поправки являются малыми величинами более высокого порядка малости относительно h по сравнению с основными членами формул.

Этим подтверждается правильность высказанного нами на стр. 222 предположения, что $w_1 = w$ для тонких плит, независимо от строения их вещества, лишь бы плоскости упругой и геометрической симметрии совпадали между собою.

Для изотропной однородной плиты с постоянной толщиной вышеприведенные поправки будут иметь вид:

$$\delta \Pi_1' = \frac{E\sigma^2 h^3}{3(1+\sigma)} \Delta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\delta \Pi_2' = \frac{E\sigma^2 h^3}{3(1+\sigma)} \Delta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right),$$

$$\delta \Pi_3' = \frac{D3\sigma^2 h^2}{5.4(1+\sigma)^2} \Delta \Delta w,$$

где D — цилиндрическая жесткость плиты,

Δ — оператор Лапласа.

Коэффициенты упругости в уравнениях (31), (32) и (39) α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} , α_{16} , α_{61} , α_{26} , α_{62} , α_{66} можно представить через более привычные нам величины следующим образом:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E_2 G} - \beta_2^2, \quad \alpha_{12} = \frac{\sigma_2}{E_2 G} + \beta_1 \beta_2, \quad \alpha_{16} = -\frac{\beta_1}{E_2} + \frac{\sigma_2 \beta_2}{E_1},$$

$$\alpha_{21} = \frac{\sigma_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_3}{E_1 G}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{E_1 G} - \beta_1^2, \quad \alpha_{26} = -\frac{\beta_2 + \sigma_1 \beta_1}{K},$$

$$\alpha_{61} = -\frac{\sigma_2 \beta_2 + \beta_1}{K}, \quad \alpha_{62} = -\frac{\sigma_1 \beta_1 + \beta_2}{K}, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{E_1 E_2} (1 - \sigma_1 \sigma_2),$$

где:

$$K = \frac{1}{E_1 E_2 G} (1 - \sigma_1 \sigma_2) - \beta_1 \beta_2 \left[\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} \right] - \left[\frac{\beta_2^2}{E_1} - \frac{\beta_1^2}{E_2} \right],$$

E_1 — модуль Юнга при растяжении в направлении оси X -ов,
 E_2 — модуль Юнга при растяжении в направлении оси Y -ов,
 σ_1 — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие материала при растяжении вдоль оси X -ов,
 σ_2 — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие материала при растяжении вдоль оси Y -ов,
 G — модуль сдвига в плоскости XOY ,
 β_1 и β_2 — постоянные, характеризующие удлинение от влияния касательных напряжений X_y или, что то же самое, сдвиг от нормальных напряжений X_x и Y_y .

Из соотношения $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ вытекает, что $\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$.

§ 8. Рассмотрим теперь несколько частных случаев, вытекающих из нашего общего уравнения (39).

1°. При ортогонально-анизотропной плите должно быть:

$$\alpha_{16} = \alpha_{26} = \alpha_{61} = \alpha_{62} = \alpha_{36} = \alpha_{63} = \alpha_{45} = \alpha_{54} = 0.$$

В этом случае:

$$\alpha_{16} = 0, \quad \alpha_{61} = 0, \quad \alpha_{26} = 0, \quad \alpha_{62} = 0, \quad \alpha_{66} = \alpha_{60}.$$

Остальные коэффициенты упругости, входящие в уравнение (39), формы своей не меняют.

Из равенств $\alpha_{16} = \alpha_{61} = \alpha_{26} = \alpha_{62} = 0$ следует, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, следовательно:

$$\alpha_{11} = \frac{E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{12} = \frac{\sigma_2 E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{66} = G,$$

$$\alpha_{22} = \frac{E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{21} = \frac{\sigma_1 E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2} = \frac{\sigma_2 E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad K = \frac{1}{E_1 E_2 G} (1 - \sigma_1 \sigma_2).$$

Уравнение (39) при этом примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_{11} J \Delta w) + 4 \frac{\partial^2 (\alpha_{66} J)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\alpha_{22} J \Delta w) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x^2} [(\alpha_{12} - \alpha_{11}) J] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(\alpha_{21} - \alpha_{22}) J] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial x} [(\alpha_{12} + 2\alpha_{66} - \alpha_{11}) J] \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial}{\partial y} [(\alpha_{21} + 2\alpha_{66} - \alpha_{22}) J] \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ [(\alpha_{12} - \alpha_{11} + 4\alpha_{66} + \alpha_{21} - \alpha_{22}) J] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$= Z'(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[M' + T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[L' + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (40)$$

2°. При однородной среде, ортогональной анизотропии плиты и постоянной толщине уравнение (39) примет вид:

$$A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2C \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z'(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[M' + T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[L' + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (41)$$

где:

$$A = \alpha_{11} J = \frac{E_1 J}{1 - \sigma \sigma_2}, \quad B = \alpha_{22} J = \frac{E_2 J}{1 - \sigma_1 \sigma_2},$$

$$2C = \frac{\sigma_1 E_2 J}{1 - \sigma_1 \sigma_2} + \frac{\sigma_2 E_1 J}{1 - \sigma_1 \sigma_2} + 4GJ.$$

3°. При однородной и изотропной среде коэффициенты упругости будут иметь вид:

$a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0$
и, кроме того,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12}, \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12}).$$

Следовательно,

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\sigma E}{1 - \sigma^2}, \quad \alpha_{16} = \alpha_{61} = \alpha_{26} = \alpha_{62} = 0,$$

$$\alpha_{16} = \alpha_{66} = G.$$

Уравнение (39) при этом примет вид:

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \sigma) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = Z'(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[M' + T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[L' + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (42)$$

4°. Если положить в этом уравнении $T_1 = T_2 = S_1 = 0$, то мы получим вышеуказанное уравнение (4) А. И. Лурье¹.

5°. Если положить в уравнении (42) $T_1 = T_2 = S = M' = L' = 0$, то мы получим уравнение (3) Е. Reissner'a.

6°. Из уравнения (42) также легко может быть получено и уравнение (42) R. Gran Olsson'a, для чего в уравнении (42) следует положить $D = N_0 x$ и $M' = L' = T_1 = T_2 = S = 0$.

7°. При $D = \text{const}$ мы получим уравнение для изотропной плиты с постоянной жесткостью, которое будет иметь вид:

$$D\Delta\Delta w = Z'(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left[M' + T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[L' + T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right]. \quad (43)$$

¹ А. И. Лурье. Ibidem.

8°. Если положить в этом уравнении $Z'(x, y, t) = M' = L' = 0$, то мы получим уравнение (I) Н. Reissner'a¹:

$$D \Delta \Delta w = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 \frac{\partial w}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_2 \frac{\partial w}{\partial y} + S \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (44)$$

9°. Если считать в этом уравнении $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$ и $S = \text{const}$, то получим уравнение Saint-Venant², которое имеет вид:

$$D \Delta \Delta w = T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (45)$$

и т. д.

10°. Если y считать константой, то из уравнения (39) может быть получено дифференциальное уравнение для упругой линии стержня с переменной жесткостью, которое будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(\alpha_{11} J) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = Z'(x, t) + \frac{d}{dx} \left(M' + T_1 \frac{dw}{dx} \right), \quad (46)$$

где $\alpha_{11} = E_1$, так как $\sigma = 0$.

11°. Если положить в уравнении (46) $Z'(x, t) = M' = 0$, то мы получим дифференциальное уравнение упругой линии стержня с массовыми силами, распределенными по оси стержня:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = \frac{d}{dx} \left[T_1 \frac{dw}{dx} \right] \quad (47)$$

или интегрируя один раз по x будем иметь:

$$\frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = T_1 \frac{dw}{dx} + C_1.$$

Можно доказать, что постоянная C_1 при любом виде функции $T_1(x)$ и любых закреплениях концов стержня равна нулю ($C_1 = 0$), тогда:

$$\frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] = T_1 \frac{dw}{dx}. \quad (48)$$

12°. Для „тяжелого“ стержня, нагруженного сверху силой P_1 и собственным весом, функция T_1 будет:

$$T_1 = -[P_1 + q(a - x)],$$

где q — вес 1 пог. м стержня,

a — длина стержня.

Уравнение (48) в этом случае примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left[EJ \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + [P_1 + q(a - x)] = 0. \quad (49)$$

13°. Если положить в уравнении (49) $q = 0$, то получим уравнение упругой линии „невесомого“ стержня и т. д.

Итак, мы видим, как из общего уравнения (39) вытекают все частные случаи дифференциальных уравнений для плит и стержней, как уже известные, так и неизвестные.

¹ Н. Reissner. Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. т. 5, 475. 1925.

² Saint-Venant. Traduction de l'élasticité de Clebsch p. 704.

§ 9. Выведем теперь дифференциальное уравнение для функции напряжений при плоско-деформированном состоянии.

В этом случае должно быть $w_1 = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0$ и, следовательно, $e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0$.

Коэффициенты упругости, приведенные нами выше, α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} , α_{16} , α_{61} , α_{26} , α_{62} , α_{66} при этом примут вид:

$$\alpha_{11} = a_{11}, \quad \alpha_{22} = a_{22}, \quad \alpha_{12} = a_{12}, \quad \alpha_{21} = a_{21}, \quad \alpha_{61} = a_{61}, \\ \alpha_{16} = a_{16}, \quad \alpha_{66} = a_{66}.$$

Первые два уравнения (23) будут удовлетворены, если мы возьмем¹:

$$T_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + T_1^0, \quad T_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + T_2^0, \quad S = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + S^0, \quad (50)$$

где φ — функция напряжений, а T_1^0 , T_2^0 , S^0 — частные решения первых двух уравнений (23).

Заменяя в уравнениях (16) значения T_1 , T_2 и S на их выражения (50) и исключая из этих уравнений u и v , получим искомого дифференциальное уравнение функции напряжений для анизотропной неоднородной среды (с одной плоскостью упругой симметрии) в таком виде:

$$D_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + (2D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + \\ + D_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \left(2 \frac{\partial D_{22}}{\partial x} - \frac{\partial D_{62}}{\partial y} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial D_{66}}{\partial y} + 2 \frac{\partial D_{12}}{\partial y} - 2 \frac{\partial D_{26}}{\partial x} - \frac{\partial D_{62}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \\ + \left(\frac{\partial D_{66}}{\partial x} + 2 \frac{\partial D_{21}}{\partial x} - 2 \frac{\partial D_{16}}{\partial y} - \frac{\partial D_{61}}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \\ + \left(2 \frac{\partial D_{11}}{\partial y} - \frac{\partial D_{61}}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \left(\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 D_{62}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\ - \left(\frac{\partial^2 D_{26}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{16}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 D_{61}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \\ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{21} T_1^0 + D_{22} T_2^0 + D_{26} S^0) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (D_{61} T_1^0 + D_{62} T_2^0 + D_{66} S^0) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D_{11} T_1^0 + D_{12} T_2^0 + D_{16} S^0), \quad (51)$$

где

$$D_{11} = \frac{1}{2h\Delta} (a_{22} a_{66} - a_{26} a_{62}), \quad D_{12} = -\frac{1}{2h\Delta} (a_{12} a_{66} - a_{16} a_{62}), \\ D_{16} = \frac{1}{2h\Delta} (a_{12} a_{26} - a_{16} a_{22}), \quad D_{21} = -\frac{1}{2h\Delta} (a_{21} a_{66} - a_{61} a_{26}), \\ D_{22} = \frac{1}{2h\Delta} (a_{11} a_{66} - a_{16} a_{61}), \quad D_{26} = -\frac{1}{2h\Delta} (a_{11} a_{26} - a_{16} a_{21}), \\ D_{61} = \frac{1}{2h\Delta} (a_{21} a_{62} - a_{61} a_{22}), \quad D_{62} = -\frac{1}{2h\Delta} (a_{11} a_{62} - a_{12} a_{61}), \\ D_{66} = \frac{1}{2h\Delta} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}).$$

¹ А. И. Лурье. Ibidem.

$$D_{ki} = D_{ik}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{vmatrix}.$$

Примечание. Чтобы получить уравнения функции напряжений при плоско-напряженном состоянии, следует везде коэффициенты a_{ik} заменить на α_{ik} .

Напишем теперь несколько частных случаев, вытекающих из уравнения (51).

1°. Из уравнения (51), если принять массовые силы равными нулю, получается уравнение, выведенное С. Г. Михлиным¹, для этого в уравнении (51) следует положить $T_1 = T_2 = S^0 = 0$ и $h = \text{const}$.

2°. Если принять, что среда однородная, массовые силы равны нулю и толщина плиты постоянная $h = \text{const}$, то мы получим из уравнения (51) уравнение, выведенное С. Г. Лехницким², которое имеет следующий вид:

$$D_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - 2D_{21} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} + (2D_{12} + D_{36}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{61} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y^3} + D_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (52)$$

3°. При однородной и изотропной среде, но толщине плиты переменной, уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right] + 2a_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \\ & + 2a_{11} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + 2a_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + 2a_{11} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \\ & + \left[a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \right) - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\ & + 2 \left[a_{11} + a_{21} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \left[a_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \right) - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{a_{12}}{h} T_1^0 + \frac{a_{11}}{h} T_2^0 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\left(\frac{2a_{11}}{h} + \frac{2a_{21}}{h} \right) S^0 \right] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{a_{11}}{h} T_1 - \frac{a_{12}}{h} T_2 \right]. \end{aligned}$$

Или, разделив все уравнения на a_{11} и обозначив $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \sigma$ (коэффициент Пуассона), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \Delta \Delta \varphi + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \right) - \sigma \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2(1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{h} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \right) - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\sigma T_1^0 - T_2^0}{h} \right] + \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{1 + \sigma}{h} S^0 \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{-T_1^0 + \sigma T_2^0}{h} \right]. \quad (53) \end{aligned}$$

¹ С. Г. Михлин. *Ibidem*.

² С. Г. Лехницкий. К вопросу о влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в анизотропной упругой среде. Сборник «Прикладная математика и механика», том III, вып. 1, 1936.

4°. При однородной, изотропной среде и постоянной толщине плиты $h = \text{const}$, уравнение (53) обратится в бигармоническое уравнение с правой частью:

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma T_1 - T_2) + 2(1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} S^\circ + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(-T_1 + \sigma T_2). \quad (54)$$

5°. При отсутствии массовых сил уравнение (54) обратится в известное бигармоническое уравнение

$$\Delta\Delta\varphi = 0. \quad (55)$$

Аналогично из уравнения (51) можно получить и другие типы уравнений, вводя те или иные предположения о строении вещества плиты и о действии сил.

§ 10. Выведем теперь дифференциальные уравнения продольных колебаний анизотропной неоднородной плиты переменной толщины. Нам известны выражения усилий T_1 , T_2 и S через перемещения u и v (16). Вставим эти выражения (16) в уравнения движения и равновесия (23), после чего получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + X' = 0; \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{23} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + Y' = 0. \end{aligned}$$

Заменяя значения X' и Y' через их выражения (24) и предполагая, что смещения u и v остаются все время очень малыми (следовательно, можно написать $f_x = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$, $f_y = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$), получим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} = \\ & = \int_{-h}^{+h} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \rho dz - \int_{-h}^h \rho X dz - D_1 X_1 + D_2 X_2; \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\alpha_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{23} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\alpha_{61} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_{62} \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] 2h \right\} = \\ & = \int_{-h}^h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \rho dz - \int_{-h}^h \rho Y dz - D_1 Y_1 + D_2 Y_2. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Полученные уравнения (56) показывают, что продольные колебания плиты, сопровождаемые соответствующими смещениями

в ее плоскости, совершенно не зависят от поперечных колебаний плиты, определяемых уравнением (32), если $\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0$. Уравнения (56), как нетрудно видеть, ничем не отличаются от уже полученных нами выше уравнений (31).

Напишем несколько частных случаев, вытекающих из системы (56).

1°. При ортогонально-анизотропной плите, как мы видели выше, должно быть:

$$\begin{aligned} \alpha_{16} = \alpha_{61} = \alpha_{26} = \alpha_{62} = 0, \\ \alpha_{11} = \frac{E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{12} = \frac{\sigma_2 E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{22} = \frac{E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \alpha_{21} = \frac{\sigma_1 E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \\ \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \alpha_{66} = G \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{E_1 E_2 G} (1 - \sigma_1 \sigma_2). \end{aligned}$$

При этом система (56) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\frac{E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] 2h \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) 2h \right] = \\ = \int_{-h}^h \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) dz - D_1 X_1 + D_2 X_2; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\frac{E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2} \left(\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] 2h \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) 2h \right] = \\ = \int_{-h}^h \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right) dz - D_1 Y_1 + D_2 Y_2. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

2°. При однородной среде ортогональной анизотропии и постоянной толщине плиты, система (56) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \sigma_1 \sigma_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right] + G \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) - \frac{1}{2h} (X_1 - X_2); \\ \frac{E_2}{1 - \sigma_1 \sigma_2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + G \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right) - \frac{1}{2h} (Y_1 - Y_2). \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

3°. При однородной и изотропной среде, но переменной толщине плиты, система (56) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{2} (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial y} \left[2h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \\ = \frac{1 - \sigma^2}{E} \left[\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) 2h - (X_1 - X_2) \right]; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[2h \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{2} (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial x} \left[2h \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \\ = \frac{1 - \sigma^2}{E} \left[\rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right) 2h - (Y_1 - Y_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

4°. При однородной изотропной среде и постоянной толщине плиты система (56) примет вид¹:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1 - \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \\ = \frac{1 - \sigma^2}{E} \left[\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) - \frac{1}{2h} (X_1 - X_2) \right]; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1 - \sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1 + \sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \\ = \frac{1 - \sigma^2}{E} \left[\rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y \right) - \frac{1}{2h} (Y_1 - Y_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

5°. Уравнение для продольных колебаний и перемещений стержня получится из уравнения (56), если в нем положить $v=0$, $u = u(x, t)$ и $\sigma=0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_{11} \frac{\partial u}{\partial x} 2h \right] = \int_{-h}^h \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) dz - D_1 X_1 + D_2 X_2, \quad (61)$$

где $\alpha_{11} = E$.

6°. При однородной среде и постоянной толщине стержня уравнение (61) примет вид:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X \right) - \frac{1}{2h} (X_1 - X_2). \quad (62)$$

Так как большинство уравнений (при неоднородной среде, при переменной толщине) получилось в частных производных довольно высокого порядка с переменными коэффициентами, то применение точных методов интегрирования здесь вряд ли возможно.

Точные методы могут быть применены только к немногим типам этих уравнений, у которых вид коэффициентов способствует нахождению интегралов в замкнутом виде.

Учитывая это, мы вынуждены обратиться к приближенным методам интегрирования. Наиболее удачным методом приближенного интегрирования уравнений теории упругости является метод акад. Б. Г. Галеркина.

Применяя этот метод, можно получить численные результаты при самых сложных дифференциальных уравнениях.

В процессе настоящей работы мне был сделан ряд ценных указаний проф.-доктором В. М. Майзелем, что считаю своим приятным долгом здесь отметить и принести доктору В. М. Майзелю свою искреннюю благодарность.

¹ А. Ляв. Ibidem.

Принимаем для бетона в общем случае

$$\sigma_1 = \varphi_1(\varepsilon) \text{ и } \sigma_2 = \varphi_2(\varepsilon); \quad (8-9)$$

тогда, на основании гипотезы плоских сечений, будем иметь:

$$\sigma_1 = \varphi_1\left(\frac{\gamma_1}{\rho}\right) \text{ и } \sigma_2 = \varphi_2\left(\frac{\gamma_2}{\rho}\right). \quad (10-11)$$

Уравнения (3) и (7) при этом примут следующий вид:

$$\int_{F_1} \varphi_1\left(\frac{\gamma_1}{\rho}\right) dF - \int_{F_2} \varphi_2\left(\frac{\gamma_2}{\rho}\right) dF = 0 \quad (12)$$

и

$$\int_{F_1} \varphi_1\left(\frac{\gamma_1}{\rho}\right) \gamma_1 dF + \int_{F_2} \varphi_2\left(\frac{\gamma_2}{\rho}\right) \gamma_2 dF = M. \quad (13)$$

Примем для бетона параболический закон для деформаций, как наиболее отвечающий последним экспериментальным данным¹, в виде, предложенном Эмпергером на основании опытов Австрийской железобетонной комиссии:

$$\sigma_1 = \alpha_1 \varepsilon - \beta_1 \varepsilon^2; \quad (14)$$

тот же закон для деформаций мы сохраним и для растянутой области, принимая лишь другие коэффициенты:

$$\sigma_2 = \alpha_2 \varepsilon - \beta_2 \varepsilon^2. \quad (15)$$

Подставляя эти выражения для напряжения в уравнения (12) и (13), получим:

$$\int_{F_1} \left(\alpha_1 \frac{\gamma_1}{\rho} - \beta_1 \frac{\gamma_1^2}{\rho^2} \right) dF - \int_{F_2} \left(\alpha_2 \frac{\gamma_2}{\rho} - \beta_2 \frac{\gamma_2^2}{\rho^2} \right) dF = 0 \quad (16)$$

и

$$\int_{F_1} \left(\alpha_1 \frac{\gamma_1}{\rho} - \beta_1 \frac{\gamma_1^2}{\rho^2} \right) \gamma_1 dF + \int_{F_2} \left(\alpha_2 \frac{\gamma_2}{\rho} - \beta_2 \frac{\gamma_2^2}{\rho^2} \right) \gamma_2 dF = M \quad (17)$$

или

$$\alpha_1 \int_{F_1} \gamma_1 dF - \frac{\beta_1}{\rho} \int_{F_1} \gamma_1^2 dF - \alpha_2 \int_{F_2} \gamma_2 dF + \frac{\beta_2}{\rho} \int_{F_2} \gamma_2^2 dF = 0 \quad (18)$$

и

$$\frac{\alpha_1}{\rho} \int_{F_1} \gamma_1^2 dF - \frac{\beta_1}{\rho^2} \int_{F_1} \gamma_1^3 dF + \frac{\alpha_2}{\rho} \int_{F_2} \gamma_2^2 dF - \frac{\beta_2}{\rho^2} \int_{F_2} \gamma_2^3 dF = M. \quad (19)$$

Уравнения (18) и (19) мы можем записать в таком виде

$$\alpha_1 S_1 - \frac{\beta_1}{\rho} I_1 - \alpha_2 S_2 + \frac{\beta_2}{\rho} I_2 = 0 \quad (20)$$

и

$$\frac{\alpha_1}{\rho} I_1 - \frac{\beta_1}{\rho^2} J_1 + \frac{\alpha_2}{\rho} I_2 - \frac{\beta_2}{\rho^2} J_2 = M \quad (21)$$

¹ Проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе.

$$\frac{1}{\rho} (\beta_1 I_1 - \beta_2 I_2) - (\alpha_1 S_1 - \alpha_2 S_2) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{\rho^2} (\beta_1 J_1 + \beta_2 J_2) - \frac{1}{\rho} (\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2) + M = 0, \quad (23)$$

где S_1 , I_1 и J_1 — моменты: статический, инерции и третьего порядка сжатой области бетона, аналогично S_2 , I_2 и J_2 — растянутой.

Решая совместно уравнения (22) и (23), принимая при этом во внимание, что

$$h_2 = h - h_1, \quad (24)$$

мы можем определить положение нейтральной линии (значение h_1) в каждом сечении и, следовательно, уравнение упругой линии стержня, а также значения напряжений в бетоне в сжатой и растянутой областях.

Из уравнения (23) мы видим, что положение нейтральной линии зависит от величины изгибающего момента M , т. е. зависит от внешней нагрузки, действующей на балку.

Выражения для напряжений могут быть при этом записаны в таком виде:

в сжатой области:

$$\sigma_1 = \alpha_1 \varepsilon - \beta_1 \varepsilon^2 = \alpha_1 \left(\frac{\eta_1}{\rho} \right) - \beta_1 \left(\frac{\eta_1}{\rho} \right)^2; \quad (25)$$

аналогично в растянутой области —

$$\sigma_2 = \alpha_2 \frac{\eta_2}{\rho} - \beta_2 \left(\frac{\eta_2}{\rho} \right)^2. \quad (26)$$

Кривизна, входящая в указанные уравнения (25—26), может быть определена на основании уравнения (22) по формуле:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha_1 S_1 - \alpha_2 S_2}{\beta_1 I_1 - \beta_2 I_2}. \quad (27)$$

Максимальные величины напряжений в бетоне в сжатой и растянутой областях, на основании уравнений (25) и (26), будут равны:

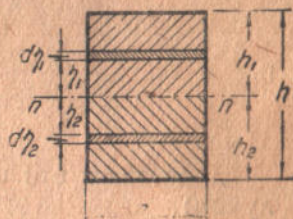
$$\max \sigma_1 = \alpha_1 \frac{h_1}{\rho} - \beta_1 \left(\frac{h_1}{\rho} \right)^2 \quad (28)$$

и

$$\max \sigma_2 = \alpha_2 \frac{h_2}{\rho} - \beta_2 \left(\frac{h_2}{\rho} \right)^2. \quad (29)$$

Применим полученные нами выводы к балке прямоугольного поперечного сечения; в таком случае выражения для S , I и J будут равны (фиг. 2):

$$S_1 = \int_{F_1} \eta_1 dF = \int_0^{h_1} \eta_1 b d\eta_1 = \frac{bh_1^2}{2}, \quad (30)$$



Фиг. 2

$$I_1 = \int_{F_1} \eta_1^2 dF = \int_0^{h_1} \eta_1^2 b d\eta_1 = \frac{bh_1^3}{3} \quad (31)$$

и

$$J_1 = \int_F \eta_1^3 dF = \int_0^{h_1} \eta_1^3 b d\eta_1 = \frac{bh_1^4}{4}; \quad (32)$$

аналогично будем иметь:

$$S_2 = \frac{bh_2^2}{2}, \quad (33)$$

$$I_2 = \frac{bh_2^3}{3} \quad (34)$$

и

$$J_2 = \frac{bh_2^4}{4}. \quad (35)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (22) и (23), мы получим:

$$\frac{1}{\rho} \left(\beta_1 \frac{bh_1^3}{3} - \beta_2 \frac{bh_2^3}{3} \right) - \left(\alpha_1 \frac{bh_1^2}{2} - \alpha \frac{bh_2^2}{2} \right) = 0 \quad (36)$$

и

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\beta_1 \frac{bh_1^4}{4} + \beta_2 \frac{bh_2^4}{4} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\alpha_1 \frac{bh_1^3}{3} + \alpha_2 \frac{bh_2^3}{3} \right) + M = 0 \quad (37)$$

или

$$\frac{2}{\rho} (\beta_1 h_1^3 - \beta_2 h_2^3) - 3(\alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2) = 0, \quad (38)$$

и

$$\frac{3}{\rho^2} (\beta_1 h_1^4 + \beta_2 h_2^4) - \frac{4}{\rho} (\alpha_1 h_1^3 + \alpha_2 h_2^3) + \frac{12}{b} M = 0. \quad (39)$$

Если напряжение в растянутой области достигает допускаемого значения R_2 , т. е.

$$\max \sigma_2 = R_2, \quad (40)$$

то имеем:

$$R_2 = \alpha_2 \frac{h_2}{\rho} - \beta_2 \left(\frac{h_2}{\rho} \right)^2 \quad (41)$$

или

$$\beta_2 \left(\frac{h_2}{\rho} \right)^2 - \alpha_2 \frac{h_2}{\rho} + R_2 = 0. \quad (42)$$

Из этого уравнения мы можем определить отношение $\frac{h_2}{\rho}$, соответствующее предельному допускаемому напряжению R_2 :

$$\frac{h_2}{\rho} = \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \beta_2 R_2}}{2 \beta_2}. \quad (43)$$

Введем обозначение

$$\frac{h_2}{\rho} = \lambda \quad (44)$$

и преобразуем уравнения (38—39), разделив обе части каждого из уравнений на h_2^2 и применив подстановку (44), тогда получим:

$$2\lambda \left[\beta_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 - \beta_2 \right] - 3 \left[\alpha_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 - \alpha_2 \right] = 0 \quad (45)$$

и

$$3\lambda^2 \left[\beta_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^4 + \beta_2 \right] - 4\lambda \left[\alpha_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 + \alpha_2 \right] + \frac{12}{bh_2^3} M = 0 \quad (46)$$

или

$$2\lambda\beta_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 - 3\alpha_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 + 3\alpha_2 - 2\lambda\beta_2 = 0 \quad (47)$$

и

$$3\lambda^2\beta_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^4 - 4\lambda\alpha_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^3 - \lambda(4\alpha_2 - 3\lambda\beta_2) + \frac{12}{bh_2^3} M = 0. \quad (48)$$

Обозначая отношение

$$\frac{h_1}{h_2} = t, \quad (49)$$

и, следовательно, на основании (24):

$$h_2 = \frac{h}{1+t}, \quad (50)$$

будем иметь:

$$2\lambda\beta_1 t^3 - 3\alpha_1 t^2 + 3\alpha_2 - 2\lambda\beta_2 = 0 \quad (51)$$

и

$$3\lambda^2\beta_1 t^4 - 4\lambda\alpha_1 t^3 - \lambda(4\alpha_2 - 3\lambda\beta_2) + \frac{12(1+t)^2}{bh^2} M = 0. \quad (52)$$

На основании уравнения (52), мы можем записать выражение для допускаемого изгибающего момента в такой форме:

$$M = \frac{\lambda b h^2}{12(1+t)^2} [4\alpha_2 - 3\lambda\beta_2 + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda\beta_1 t)] \quad (53)$$

или

$$M = \frac{\lambda W}{2(1+t)^2} [4(\alpha_2 + \alpha_1 t^3) - 3\lambda(\beta_2 + \beta_1 t^4)], \quad (54)$$

где

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad (55)$$

представляет момент сопротивления поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через центр его тяжести.

Решая уравнение (51) относительно t и подставляя полученное значение в выражение (54) для M , мы можем определить величину *допускаемого изгибающего момента* для балки заданных размеров b и h из бетона, качественные характеристики которого определяются коэффициентами α_1 , α_2 , β_1 , β_2 и величиной допускаемого напряжения на растяжение R_2 ; величина λ подсчитывается на основании выражения (43).

На основании полученных формул, мы можем определить также величину *предельного изгибающего момента*, подставляя в выражение (43) значение напряжения в бетоне при разрыве:

$$\sigma_z = \sigma_z, \quad (56)$$

тогда будем иметь:

$$\lambda_z = \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4\beta_2\sigma_z}}{2\beta_2}. \quad (57)$$

Подставляя это значение λ в уравнение (51):

$$2\lambda_z\beta_1 t^3 - 3\alpha_1 t^2 + (3\alpha_2 - 2\lambda_z\beta_2) = 0 \quad (58)$$

и решая его относительно t , мы можем затем на основании формулы (53) для балки заданных размеров, т. е. зная величину

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad (59)$$

определить величину предельного изгибающего момента:

$$M_{\text{пред}} = \frac{\lambda_z W}{2(1+t)^2} [(4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2) + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t)]. \quad (59)$$

Так как величина коэффициента запаса на прочность при изгибе определяется из отношения:

$$m = \frac{M_{\text{пред}}}{M_{\text{расч}}} \quad (60)$$

и, следовательно,

$$M_{\text{расч}} = \frac{M_{\text{пред}}}{m}, \quad (61)$$

то мы можем найти величину допускаемого изгибающего момента по формуле:

$$M_{\text{расч}} = \frac{\lambda_z W}{2(1+t)^2 m} [(4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2) + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t)]. \quad (62)$$

На основании полученного выражения (62) для $M_{\text{расч}}$ мы можем найти W :

$$W = \frac{2(1+t)^2 m M_{\text{расч}}}{\lambda_z [4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2 + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t)]} \quad (63)$$

или

$$bh^2 = \frac{12(1+t)^2 m M_{\text{расч}}}{\lambda_z [4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2 + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t)]}. \quad (64)$$

Таким образом, расчет бетонной балки на изгиб может быть произведен по формуле:

$$W = \frac{2(1+t)^2 m}{\lambda_z [4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2 + t^3(4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t)]} M_{\text{расч}}. \quad (65)$$

где t — определяется из уравнения (58):

$$2\lambda_z\beta_1 t^3 - 3\alpha_1 t^2 + (3\alpha_2 - 2\lambda_z\beta_2) = 0, \quad (58)$$

m — принимаемый нами коэффициент безопасности на прочность и

$$\lambda_z = \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4\beta_2\sigma_z}}{2\beta_2}. \quad (57)$$

Исследуем полученные нами выводы, беря для принятого нами закона деформаций для бетона:

$$\sigma_1 = \alpha_1 \varepsilon - \beta_1 \varepsilon^2 \quad (14)$$

и

$$\sigma_2 = \alpha_2 \varepsilon - \beta_2 \varepsilon^2 \quad (15)$$

следующие дополнительные условия:

$$\text{при } \varepsilon = 0 \quad E_1 = E_2 \quad (64)$$

и

$$\text{при } \varepsilon_2 = \varepsilon_{2 \max}, \quad E_2 = 0, \quad (65)$$

т. е. 1) в начале координат диаграммы для напряжений модули деформаций, измеряемые как tg -ы углов наклона кривой деформаций к оси ε , для области сжатия и растяжения равны между собой; 2) при деформации растяжения равной максимальной, соответствующей моменту разрушения, модуль деформации равен нулю, т. е. касательная к кривой деформаций в указанной точке горизонтальна.

Модули деформаций в области сжатия E_1 и в области растяжения E_2 соответственно равны:

$$E_1 = \alpha_1 - 2\beta_1 \varepsilon \quad (66)$$

и

$$E_2 = \alpha_2 - 2\beta_2 \varepsilon; \quad (67)$$

тогда на основании условия (64) мы будем иметь:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad (68)$$

и на основании условия (65):

$$\beta_2 = \frac{\alpha_2}{2\varepsilon_{2 \max}} = \frac{\alpha_1}{2\varepsilon_{2 \max}}. \quad (69)$$

Подставляя полученные значения коэффициентов α_2 и β_2 , выраженные через α_1 , в уравнения (15) и (67), мы имеем:

$$\sigma_2 = \alpha_1 \varepsilon - \frac{\alpha_1}{2\varepsilon_{2 \max}} \varepsilon^2 = \alpha_1 \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{2 \max}} \right) \quad (70)$$

и

$$E_2 = \alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{2\varepsilon_{2 \max}} \varepsilon = \alpha_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{2 \max}} \right). \quad (71)$$

В момент разрыва бетона, на основании уравнения (70), получим:

$$\sigma_2 = \alpha_1 \varepsilon_{2 \max} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{2 \max}} \right) = 0,5 \alpha_1 \varepsilon_{2 \max}. \quad (72)$$

На основании уравнений (57) и (72) имеем:

$$\lambda_z = e^*_{2\max} = \frac{2\alpha_z}{\alpha_1}, \quad (73)$$

$$3\alpha_2 - 2\lambda_z\beta_2 = 3\alpha_1 - 2\varepsilon_{2\max} \frac{\alpha_1}{2\varepsilon_{2\max}} = 2\alpha_1, \quad (74)$$

$$4\alpha_2 - 3\lambda_z\beta_2 = 4\alpha_1 - 3\varepsilon_{2\max} \frac{\alpha_1}{2\varepsilon_{2\max}} = 2,5\alpha_1; \quad (75)$$

$$4\alpha_1 - 3\lambda_z\beta_1 t = 4\alpha_1 - 3\varepsilon_{2\max}\beta_1 t, \quad (76)$$

тогда уравнение (58) запишется в таком виде:

$$-2\varepsilon_{2\max}\beta_1 t^3 - 3\alpha_1 t^2 + 2\alpha_1 = 0 \quad (77)$$

и выражение (63):

$$W = \frac{2(1+t)^2 m}{\varepsilon_{2\max} [2,5\alpha_1 + t^3(4\alpha_1 - 3\varepsilon_{2\max}\beta_1 t)]} M_{\text{расч.}} \quad (78)$$

Уравнение (77) мы можем записать так:

$$t^3 - 1,5 \frac{\alpha_1}{\varepsilon_{2\max}\beta_1} t^2 + \frac{\alpha_1}{\varepsilon_{2\max}\beta_1} = 0 \quad (79)$$

или

$$t^3 - 1,5\eta t^2 + \eta = 0, \quad (80)$$

где

$$\eta = \frac{\alpha_1}{\varepsilon_{2\max}\beta_1}. \quad (81)$$

Уравнение (80) имеет вид:

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0, \quad (82)$$

где

$$a = -1,5\eta; \quad b = 0 \text{ и } c = \eta. \quad (83-85)$$

Преобразуем его к такому виду:

$$x^3 + 3px + 2q = 0; \quad (86)$$

тогда имеем:

$$p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9} = -\frac{1}{4}\eta^2 \quad (87)$$

и

$$q = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2} = -\frac{1}{8}\eta^3 + \frac{1}{2}\eta = \frac{1}{2}\eta \left(1 - \frac{1}{4}\eta^2\right) \quad (88)$$

и, следовательно,

$$x^3 - \frac{3}{4}\eta^2 x + \eta \left(1 - \frac{1}{4}\eta^2\right) = 0, \quad (89)$$

где

$$t = x - \frac{a}{3} = x + \frac{1}{2}\eta. \quad (90)$$

* $\lambda = \frac{h_2}{\rho} = \varepsilon_2.$

Исследуем полученное нами уравнение (89);

$$q^2 + p^3 = \left[\frac{1}{2} \eta \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 \right) \right]^2 - \left(\frac{1}{4} \eta^3 \right)^3 = \frac{1}{4} \eta^2 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \right); \quad (91)$$

величины α_1 и β_1 , входящие в выражение для η (81), могут быть преобразованы, учитывая предложение проф. Я. В. Столярова принимать за одну из основных характеристических величин для бетона — отношение между конечным модулем деформации E_b (при $\varepsilon = \varepsilon_b$) и начальным E_0 (при $\varepsilon = 0$), называемую „мерой упругости бетона в момент разрушения“:

$$k = \frac{E_s}{E_0} \cdot * \quad (92)$$

Вводя коэффициент k , проф. Я. В. Столяров получает коэффициенты α_1 и β_1 в таком виде:

$$\alpha_1 = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{\sigma_b}{\varepsilon_b} \quad (93)$$

и

$$\beta_1 = \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{\sigma_b}{\varepsilon_b^2}; \quad (94)$$

тогда будем иметь:

$$\eta = \frac{\alpha_1}{\varepsilon_{2\max} \beta_1} = \frac{2}{1+k} \frac{\sigma_s}{\varepsilon_{1\max}} \frac{1+k}{1-k} \frac{\varepsilon_{1\max}^2}{\sigma_b \varepsilon_{2\max}} = \frac{2}{1-k} \frac{\varepsilon_{1\max}}{\varepsilon_{2\max}}. \quad (95)$$

Принимая для обычного бетона:

$$k = 0,2 \quad (96)$$

и

$$\frac{\varepsilon_{1\max}}{\varepsilon_{2\max}} = 10, \quad (97)$$

мы получим:

$$\eta = \frac{2}{1-0,2} \cdot 10 = 25; \quad (98)$$

но даже принимая

$$k = 0 \quad (99)$$

получим:

$$\eta_{\min} = 2 \frac{\varepsilon_{1\max}}{\varepsilon_{2\max}} \quad (100)$$

и, так как

$$\varepsilon_{1\max} > \varepsilon_{2\max}, \quad (101)$$

то во всяком случае

$$\eta_{\min} > 2. \quad (102)$$

Тогда имеем

$$q^2 + p^3 = \frac{1}{4} \eta^2 \left(1 - \frac{1}{2} \eta^2 \right) < 0 \quad (103)$$

* Проф. Я. В. Столяров, loc. cit., стр. 34—35.

и, следовательно, мы получим три действительных корня при решении уравнения (89); решение при этом получится в тригонометрической форме.

Продолжая рассмотрение уравнения (89), находим:

$$p^3 = \frac{\eta^6}{64}, \quad (104)$$

и

$$q^2 = \frac{\eta^2}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 \right)^2 \quad (105)$$

и, следовательно,

$$\frac{q^2}{p^3} = \frac{\eta^2 \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 \right)^2 64}{4\eta^6} = \frac{\left(\frac{1}{4} \eta^2 - 1 \right)^2}{\left(\frac{1}{4} \eta^2 \right)^2} = \left[1 - \left(\frac{2}{\eta} \right)^2 \right]^2; \quad (106)$$

принимая во внимание неравенство (102), получаем:

$$\frac{q^2}{p^3} < 1 \quad (107)$$

или

$$q^2 < p^3. \quad (108)$$

Тогда решения уравнения (89) будут иметь следующий вид:

$$x_1 = \mp 2 \sqrt{p} \cos \frac{\varphi}{3} = \mp \eta \cos \frac{\varphi}{3}, \quad (109)$$

$$x_2 = \pm 2 \sqrt{p} \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) = \pm \eta \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right), \quad (110)$$

$$x_3 = \pm 2 \sqrt{p} \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = \pm \eta \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right), \quad (111)$$

где φ определяется из уравнения:

$$\cos \varphi = \frac{q}{p \sqrt{p}} = \frac{\frac{1}{2} \eta \left(1 - \frac{1}{4} \eta^2 \right)}{\frac{1}{4} \eta^2 \cdot \frac{\eta}{2}} = \frac{4}{\eta^2} - 1. \quad (112)$$

Решения же уравнения (80) будут выражены следующим образом:

$$t = x - \frac{a}{3} = x + \frac{\eta}{2}, \quad (113)$$

и, следовательно,

$$t_1 = \frac{1}{2} \eta \left(1 \mp 2 \cos \frac{\varphi}{3} \right), \quad (114)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \eta \left[1 \pm 2 \cos \left(60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) \right] \quad (115)$$

и

$$t_3 = \frac{1}{2} \eta \left[1 \pm 2 \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) \right], \quad (116)$$

где φ — определяется из уравнения (112) и η на основании уравнения (95). Зная величину η , мы вместо уравнения (112) можем записать:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\eta}. \quad (117)$$

Так как

$$t = \frac{h_1}{h_2} < 1, \quad (49)$$

— бетон лучше работает на сжатие, чем на растяжение,—и так как

$$\eta_{\min} > 2, \quad (102)$$

то выражения, стоящие в скобках уравнений (114—116), должны быть во всяком случае меньше единицы.

Так как

$$\eta_{\min} > 2, \quad (102)$$

то на основании уравнения (117) имеем:

$$\cos \frac{\varphi}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (118)$$

и, следовательно,

$$\frac{\varphi}{2} > 45^\circ \quad (119)$$

или

$$\varphi > 90^\circ. \quad (120)$$

Примем

$$\varphi = (1 + \mu) 90^\circ, \quad (121)$$

где μ — дробное число:

$$0 < \mu < 1, * \quad (122)$$

тогда будем иметь:

$$\frac{\varphi}{3} = (1 + \mu) 30^\circ \quad (123)$$

и, следовательно, принимая во внимание неравенство (122):

$$30^\circ < \frac{\varphi}{3} < 60^\circ, \quad (124)$$

$$0,5 < \cos \frac{\varphi}{3} < 0,866 \quad (125)$$

и

$$1 < 2 \cos \frac{\varphi}{3} < 1,732. \quad (126)$$

При полученных граничных условиях возможных значений величины $2 \cos \frac{\varphi}{3}$ мы видим, что уравнение (114) не даст нам искомого корня уравнения (80), так как при знаке (+) мы будем иметь:

$$t_1 > 1, \quad (127)$$

* φ должно быть наименьшим положительным углом.

что невозможно, так как для бетона

$$t = \frac{h_1}{h_2} < 1, \quad (49)$$

а при знаке (—) мы получим отрицательное значение для t , что также не имеет смысла. Рассматривая уравнение (115), мы получим:

$$60^\circ - \frac{\varphi}{3} = 60^\circ - (1 + \mu) 30^\circ = 30^\circ (1 - \mu) \quad (128)$$

или, следовательно,

$$0 < 60^\circ - \frac{\varphi}{3} < 30^\circ, \quad (129)$$

$$0,866 < \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) < 1 \quad (130)$$

и

$$1,732 < 2 \cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) < 2. \quad (131)$$

На основании соображений, аналогичных приведенным для предыдущего случая, ясно, что уравнение (115) также не даст нам искомого корня уравнения (80).

Переходим к рассмотрению уравнения (116):

$$60^\circ + \frac{\varphi}{3} = 60^\circ + (1 + \mu) 30^\circ = 30^\circ (3 + \mu) \quad (132)$$

или, следовательно,

$$90^\circ < 60^\circ + \frac{\varphi}{3} < 120^\circ, \quad (133)$$

$$-0,5 < \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) < 0, \quad (134)$$

$$-1 < 2 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) < 0. \quad (135)$$

Уравнение (116) может дать нам значение корня t , удовлетворяющее уравнению (80), при знаке (+):

$$t = \frac{1}{2} \eta \left[1 + 2 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \right]. \quad (136)$$

Таким образом, для определения t мы имеем последовательно:

$$\eta = \frac{\alpha_1}{\beta_1 \varepsilon_2 \max} \quad (81)$$

или

$$\eta = \frac{2}{1 - k} \frac{\varepsilon_1 \max}{\varepsilon_2 \max}, \quad (95)$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\eta} \quad (117)$$

и

$$t = \frac{1}{2} \eta \left[1 + 2 \cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \right]. \quad (136)$$

Пример 1.

Примем обычные для бетона среднего качества значения:

$$k = 0,2$$

и

$$\frac{\epsilon_{1 \max}}{\epsilon_{2 \max}} = 10;$$

тогда получим:

$$\eta = \frac{2}{1-0,2} \cdot 10 = 25; \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{25} = 0,056568;$$

$$\frac{\varphi}{2} = 86^\circ 45' 25''; \quad \varphi = 173^\circ 30' 50'',$$

$$\cos \left(60^\circ + \frac{173^\circ 30' 50''}{3} \right) = \cos 117^\circ 50' 17'' = -0,46698$$

и, следовательно,

$$t = \frac{25}{2} (1 - 2 \cdot 0,46698) = 0,8255.$$

На основании уравнения (81) мы можем преобразовать формулу (78):

$$W = \frac{2(1+t)^2 m}{\epsilon_{2 \max} \alpha_1 \left[2,5 + t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right) \right]} M_{\text{расч}} \quad (137)$$

или

$$W = \frac{2(1+t)^2 \eta m}{\epsilon_{2 \max} \alpha_1 [2,5\eta + t^3 (4\eta - 3t)]} M_{\text{расч}}; \quad (138)$$

принимая же во внимание равенство (93), мы получим:

$$\epsilon_{2 \max} \alpha_1 = \frac{2}{1+k} \frac{\epsilon_{2 \max}}{\epsilon_{1 \max}} \sigma_d \quad (139)$$

или на основании выражения (95):

$$\epsilon_{2 \max} \alpha_1 = \frac{2}{1+k} \frac{2}{1-k} \frac{1}{\eta} \sigma_d = \frac{4}{1-k^2} \frac{\sigma_d}{\eta}. \quad (140)$$

Тогда мы имеем:

$$W = \frac{(1-k^2)(1+t)^2 \eta^2 m}{2\sigma_d [2,5\eta + t^3 (4\eta - 3t)]} M_{\text{расч}}, \quad (141)$$

$$W = \frac{(1-k^2)(1+t)^2 \eta^2 m}{\sigma_d [5\eta + 2t^3 (4\eta - 3t)]} M_{\text{расч}} \quad (142)$$

или

$$W = \frac{(1-k^2)(1+t)^2 \eta m}{\sigma_d \left[5 + 2t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right) \right]} M_{\text{расч}}. \quad (143)$$

Если мы обозначим через $\sigma_{\text{ср}}$ среднее напряжение в бетоне в момент разрушения балки, т. е. при

$$mM_{\text{расч}} = M_{\text{пред}}, \quad (144)$$

то будем иметь:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{пред}}}{W} = \frac{\sigma_d \left[5 + 2t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right) \right]}{\eta (1-k^2)(1+t)^2}; \quad (145)$$

с помощью полученной формулы мы можем получить значение напряжения в бетоне в предположении, что допустимо применить формулы:

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad (146)$$

и сравнить его с допускаемым.

На основании уравнения (72) мы можем формулу (138) записать так:

$$W = \frac{(1+t)^2 \gamma m}{\sigma_z [2,5\eta + t^3 (4\eta - 3t)]} M_{расч} \quad (147)$$

или

$$W = \frac{(1+t)^2 m}{\sigma_z \left[2,5 + t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right) \right]} M_{расч}; \quad (148)$$

тогда получим:

$$\sigma_{ср} = \frac{M_{пред}}{W} = \frac{\sigma_z \left[2,5 + t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right) \right]}{(1+t)^2}. \quad (149)$$

На основании уравнений (145) и (149) или же из уравнений (72) и (95) находим:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_d} = \frac{2}{1-k^2} \frac{1}{\eta} \quad (150)$$

или же

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_d} = \frac{2}{1-k^2} \cdot \frac{1-k}{2} \frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{1 \max}} = \frac{1}{1+k} \frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{1 \max}}; \quad (151)$$

эта формула дает зависимость между предельными напряжениями для бетона на растяжение и сжатие.

На основании формулы (148), принимая

$$m M_{расч} = M_{пред}, \quad (152)$$

мы можем определить временное сопротивление бетона растяжению в таком виде:

$$\sigma_z = \frac{(1+t)^2}{2,5 + t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta} \right)} \cdot \frac{M_{пред}}{W} \cdot * \quad (153)$$

Пример 2.

Принимая, как и в примере 1

$$k = 0,2$$

и

$$\frac{\varepsilon_{2 \max}}{\varepsilon_{1 \max}} = 0,1,$$

мы получим:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_d} = \frac{1}{1+0,2} \cdot 0,1 = \frac{1}{12} \quad (154)$$

или

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_d} = 0,093. \quad (155)$$

* См. формулу (149).

Вычислим теперь, на основании формулы (143), величину момента сопротивления W для бетона марки:

$$\sigma_d = 130 \text{ кг/см}^2.$$

Подставляя найденные в предыдущем примере значения $t = 0,8255$ и $\eta = 25$, будем иметь:

$$W = \frac{(1 - 0,2^2)(1 + 0,8255)^2 \cdot 25 \cdot m}{130 \cdot \left[5 + 2 \cdot 0,8255^3 \left(4 - 3 \frac{0,8255}{25} \right) \right]} M_{\text{расч}} = 0,06553 m M_{\text{расч}} \quad (156)$$

или

$$W = \frac{1}{15,27} m M_{\text{расч}}. \quad (157)$$

На основании же формулы (153) мы получим для напряжения в бетоне на растяжение:

$$\sigma_z = \frac{(1 + 0,8255)^2}{2,5 + 0,8255^3 \left(4 - 3 \frac{0,8255}{25} \right)} \frac{M_{\text{пред}}}{W} = 0,71 \frac{M_{\text{пред}}}{W} \quad (158)$$

или

$$\sigma_z = 4,259 \frac{M_{\text{пред}}}{b \cdot h^2}, \quad (159)$$

имея ввиду формулу для W (55).

Если бы мы приняли для бетона $\eta = 10$, то получили бы

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0,14142; \quad \frac{\varphi}{2} = 81^\circ 52' 10'';$$

$$\varphi = 163^\circ 44' 20'', \quad \cos \left(60^\circ + \frac{163^\circ 44' 20''}{3} \right) = -0,41595.$$

Тогда имеем:

$$t = \frac{10}{2} (1 - 2 \cdot 0,41595) = 0,8405$$

и, следовательно:

$$\sigma_z = \frac{(1 + 0,8405)^2}{2,5 + 0,8405^3 \left(4 - 3 \frac{0,8405}{10} \right)} \frac{M_{\text{пред}}}{W} = 0,717 \frac{M_{\text{пред}}}{W} \quad (160)$$

или

$$\sigma_z = 4,3 \frac{M_{\text{пред}}}{b \cdot h^2}. \quad (161)$$

Примем теперь $\eta = 50$, тогда будем иметь:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{50} = 0,028284; \quad \frac{\varphi}{2} = 88^\circ 22' 45'';$$

$$\varphi = 176^\circ 45' 30''; \quad \cos \left(60^\circ + \frac{176^\circ 45' 30''}{3} \right) = -0,48358.$$

Тогда

$$t = \frac{50}{2} (1 - 2 \cdot 0,48358) = 0,821$$

и, следовательно,

$$\sigma_z = \frac{(1 + 0,821)^2}{2,5 + 0,821^3 \left(4 - 3 \frac{0,821}{50} \right)} \frac{M_{\text{пред}}}{W} = 0,708 \frac{M_{\text{пред}}}{W} \quad (162)$$

или

$$\sigma_z = 4,245 \frac{M_{\text{пред}}}{bh^2}. \quad (163)$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент у отношения $\frac{M_{\text{пред}}}{W}$ очень слабо меняется около некоторого значения, что подтверждается также результатами обработки ряда опытов, приведенными проф. Б. Г. Скрамтаевым.

Поэтому мы можем считать, что расчет бетонной балки, работающей на изгиб, может вестись по формуле:

$$\sigma_z = 4,25 \frac{M_{\text{пред}}}{bh^2}, \quad (164)$$

независимо от качественных характеристик проектируемого бетона.

Тогда, принимая

$$\frac{(1+t)^2}{2,5+t^3\left(4-3\frac{t}{\eta}\right)} = 0,71, \quad (165)$$

т. е. за величину, постоянную для всякого бетона, мы можем формулу (143) записать следующим образом:

$$W = 0,355\eta(1-k^2)m \frac{M_{\text{пред}}}{\sigma_d}, \quad (166)$$

или имея ввиду уравнение (95):

$$W = 0,355 \frac{2}{1-k} \frac{\epsilon_{1\text{max}}}{\epsilon_{2\text{max}}} (1-k^2)m \frac{M_{\text{пред}}}{\sigma_d} = 0,71(1+k)m \frac{\epsilon_{1\text{max}}}{\epsilon_{2\text{max}}} \frac{M_{\text{пред}}}{\sigma_d} \quad (167)$$

или обозначая:

$$\frac{\epsilon_{1\text{max}}}{\epsilon_{2\text{max}}} = r, \quad (168)$$

получим формулу для W в таком достаточно простом виде

$$W = 0,71(1+k)rm \frac{M_{\text{пред}}}{\sigma_d}, \quad (169)$$

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Полученные нами результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Формулы (156) или (157) показывают, что среднее напряжение в бетоне — среднее временное сопротивление бетона на растяжение $\sigma_{\text{ср}}$, — на основании формулы (157), для бетона среднего качества получается равным:

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{пред}}}{W} = \frac{mM_{\text{расч}}}{W} = 15,27 \text{ кг/см}^2, \quad (170)$$

т. е., принимая запас прочности

$$m = 2, \quad (171)$$

мы будем иметь величину допускаемого среднего напряжения в бетоне на растяжение равной:

$$\sigma_{\text{ср. доп}} \approx 7,63 \text{ кг/см}^2, \quad (172)$$

что превышает величину допускаемого напряжения на растяжение, предлагаемого нормами приблизительно в 1,5 раза; следовательно, при предварительном расчете бетонных балок на изгиб, на основании обычной формулы сопротивления материалов, справедливой при условии, что материал следует закону Гука:

$$W = \frac{M_{\text{расч}}}{\sigma_{\text{раст. доп}}}, \quad (173)$$

необходимо величину допускаемого напряжения на растяжение принимать увеличенной сравнительно с цифрой, даваемой нормами, в 1,5 раза, а именно:

$$\sigma_{\text{раст. доп}} = 7,5 \text{ кг/см}^2; \quad (174)$$

при этом мы получим запас прочности, равный:

$$m = 2. \quad (171)$$

Принимая согласно нормам:

$$\sigma_{\text{раст. доп}} = 5 \text{ кг/см}^2, \quad (175)$$

мы получим запас прочности, равный:

$$m = 3. \quad (176)$$

2. Формула (153) позволяет определить величину временного сопротивления бетона на растяжение—бетона любого качества; вычислив величину момента сопротивления испытываемой балки W и момент внешних сил, разрушающих балку $M_{\text{пред}}$, мы можем вычислить и значение σ_z для бетона любого качества: качественные характеристики входят в формулу (153) в виде величин t и η , где

$$t = f(\eta)^*, \quad (177)$$

или, следовательно, от величины η , которая выражается уравнением (95):

$$\eta = \frac{2}{1-k} \frac{\epsilon_{1\text{max}}}{\epsilon_{2\text{max}}}, \quad (95)$$

и, как видно, зависит от максимальных деформаций бетона при сжатии и растяжении и от величины

$$k = \frac{E_s}{E_0}, \quad (178)$$

* См. формулы (117) и (136).

называемой „мерой упругости бетона в момент разрушения“ и представляющей собою отношение конечного и начального модулей деформации при сжатии.

Однако, соответствующее исследование показывает, что коэффициент в формуле (153), зависящий от качества бетона

$$\nu = \frac{(1+t)^2}{2,5+t^3 \left(4-3\frac{t}{\eta}\right)},$$

чрезвычайно мало изменяется около своего среднего значения, соответствующего среднему бетону $\approx 0,71$.

Так для

$$\begin{array}{ll} \eta = 10 & \nu_{10} = 0,717 \\ \eta = 25 & \nu_{25} = 0,710 \\ \eta = 50 & \nu_{50} = 0,708. \end{array}$$

Нами было отмечено, что коэффициент

$$\nu = \frac{(1+t)^2}{2,5+t^3 \left(4-3\frac{t}{\eta}\right)}$$

очень мало изменяется около среднего значения $\cong 0,71$.

Исследуем, в какой степени он зависит от принятых нами характеристик для бетона

$$t = f(\eta), \quad (177)$$

$$\eta = \frac{2}{1-k} \frac{\varepsilon_{1\max}}{\varepsilon_{2\max}}. \quad (95)$$

Если бы мы приняли, что касательная к кривой деформации бетона в момент разрушения от сжатия параллельна горизонтальной оси, т. е.

$$E_s = 0 \quad (179)$$

$$k = 0, \quad (180)$$

то мы получили бы, принимая как и ранее

$$\frac{\varepsilon_{1\max}}{\varepsilon_{2\max}} = 10, \quad \eta = \frac{2}{1-0} \cdot 10 = 20$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{20} = 0,07071; \quad \frac{\varphi}{2} = 85^\circ 56' 43'';$$

$$\varphi = 171^\circ 23' 26''; \quad \cos \left(60^\circ + \frac{171^\circ 23' 26''}{3}\right) = -0,45602;$$

$$t = \frac{20}{2}(1 - 2 \cdot 0,45602) = 0,8796;$$

$$v = \frac{(1+t)^2}{2,5+t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta}\right)} = \frac{(1+0,8796)^2}{2,5+0,8796^3 \left(4 - 3 \frac{0,8796}{20}\right)} = 0,688, \quad (181)$$

что отличается от 0,71 лишь на 3%. Примем теперь, что материал сжатой области следует закону Гука, т. е. примем возможное максимальное значение для k :

$$k = 1. \quad (182)$$

Тогда мы получим:

$$\eta = \infty$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\infty} = 0; \quad \frac{\varphi}{2} = 90^\circ; \quad \varphi = 180^\circ;$$

$$\cos \left(60^\circ + \frac{180^\circ}{3}\right) = -0,5; \quad t = \frac{\infty}{2}(1 - 2 \cdot 0,5) = \infty \cdot 0.$$

Чтобы вскрыть полученную неопределенность поступаем как обычно:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\eta}{2} \left[1 + 2 \cos \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) \right] = \frac{0,5 + \cos \frac{\pi + \varphi}{3}}{1/\eta} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{1 - \frac{2}{\eta^2}}} \sin \left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$v = \frac{(1+t)^2}{2,5+t^3 \left(4 - 3 \frac{t}{\eta}\right)} = \frac{(1+0,8165)^2}{2,5+0,8165^3 \cdot 4} = 0,705. \quad (183)$$

Итак мы можем принять с достаточной степенью точности

$$\sigma_z = 0,71 \frac{M_{\text{пред}}}{W} \quad (184)$$

или

$$\sigma_z = 4,25 \frac{M_{\text{пред}}}{bh^2}, \quad (164)$$

заменяя в формуле (184) момент сопротивления через

$$W = \frac{bh^2}{6}. \quad (155)$$

3. На основании формулы (169) мы можем производить расчет бетонного сечения:

$$W = 0,71 (1 + k) r \cdot m \frac{M_{\text{пред}}}{\sigma_d} \quad (169)$$

или на основании формулы (148), принимая во внимание уравнение (165), мы будем иметь:

$$W = 0,71 \frac{m M_{\text{пред}}}{\sigma_z} \quad (185)$$

Результаты испытания четырех бетонных балок¹ позволяют сделать вывод, что полученная нами приближенная формула (164) дает возможность определить значение временного сопротивления при растяжении с достаточной степенью прочности.

Указанные опыты были проведены над бетонными балками обычной марки, но раз-

ного возраста; при этом опыты проводились последовательно в таком порядке: над первой балкой через 6 дней после бетонирования, над второй — через 18, над третьей — через 67 и над четвертой — через 80 дней.

Схема испытания и размеры балок указаны на фиг. 3:

$$l = 0,50 \text{ м}; a = 0,45 \text{ м}; L = 1,40 \text{ м}; b = 15 \text{ см}; h = 15 \text{ см}.$$

Балка № 1 разрушалась при испытании при загрузении силой $P_6 = 156 \text{ кг}$, т. е. при величине максимального изгибающего момента:

$$M_{\text{max}}^6 = 156 \cdot 45 = 7020 \text{ кг. см.}$$

Балка № 2 разрушалась при $P_{18} = 176 \text{ кг}$, т. е. при

$$M_{\text{max}}^{18} = 176 \cdot 45 = 7920 \text{ кг. см.}$$

Балка № 3 — при $P_{67} = 176 \text{ кг}$, т. е. как и балка № 2 при

$$M_{\text{max}}^{67} = 7920 \text{ кг. см.}$$

Балка № 4 — при $P_{80} = 229 \text{ кг}$, т. е. при

$$M_{\text{max}}^{80} = 10305 \text{ кг. см.}$$

Результаты опытов были отработаны по методу Фере и дали значения временного сопротивления σ_z , приведенные в таблице 1. Значения σ_z , получаемые по выведенной нами формуле (164), приведены в предпоследней графе той же таблицы:

¹ Инж. И. Г. Шумилин. Экспериментальное исследование начальных напряжений от усадки бетона в железобетонных элементах.

Таблица 1

№	Возраст бетона	M_{\max}	σ_z		Δ в %
			По Ф е р е	$\sigma_z = 4,25 \frac{M_{\max}}{bh^2}$	
1	6	7020	9,4	8,84	- 6,1
2	18	7920	10,0	9,97	- 0,3
3	67	7920	9,6	9,97	+ 3,8
4	80	10305	14,3	12,98	- 9,7

Таким образом, разница между значениями σ_z , полученными по приближенной формуле и на основании опытов, менее 10%.

ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ХОМУТОВ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СЖАТОЙ БЕТОННОЙ КОЛОННЕ

§ 1. В настоящей работе мы исследуем влияние поперечной арматуры в сжимаемом продольными силами бетонном элементе, армированном стальными хомутами, расположенными на равных расстояниях друг от друга.

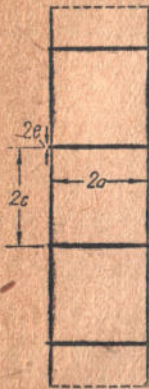
При этом мы используем решение дифференциальных уравнений равновесия для случая деформации симметричной относительно оси, выраженных в цилиндрических координатах, в виде, предложенном Л. Файлоном в его работе: „On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Load“¹, в которой исследованы два случая сжатия цилиндра продольными силами при различных условиях загрузки на боковых поверхностях.

За элемент исследования мы примем бесконечно длинную колонну, стянутую упругими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, диаметр которых равен $2e$, сжимаемую равномерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q (фиг. 1).

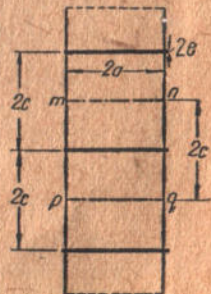
Определив картину напряженного состояния в такой колонне и сравнивая полученные результаты с теми, какие мы получили бы при условии отсутствия хомутов, мы выявим влияние, а следовательно, и значение поперечной арматуры в сжатых железобетонных элементах, исходя из условий их прочности.

При выполнении настоящей работы нами были использованы ценные указания проф. А. П. Филиппова, которому выражаем большую благодарность.

§ 2. Для решения нашей задачи вырежем из колонны двумя плоскостями mn и pq , перпендикулярными к ее оси, элемент, высотой равный $2c$, проводя сечения так, как показано на фиг. 2, т. е. посередине между хомутами.



Фиг. 1



Фиг. 2

¹ Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 198, 1902.

Уравнения равновесия, выраженные в зависимости от перемещений, в рассматриваемом нами случае деформации, симметричной относительно оси ZZ , в цилиндрических координатах имеют следующий вид (фиг. 3)¹:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z} = 0 \quad (1)$$

и

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

где u и w — составляющие перемещений в радиальном направлении и в направлении оси ZZ ; λ и μ — упругие постоянные Ляме.

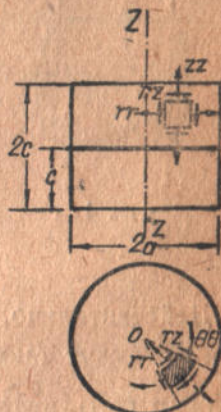
Напряжения \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} выражаются следующими уравнениями:

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\widehat{zz} = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\widehat{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\widehat{rz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (6)$$



Фиг. 3

§ 3. Обозначая в уравнениях (1—2)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y_1 \quad (7)$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial r} = y_2, \quad (8)$$

мы можем, согласно предложения Л. Файлона, найти решения этих уравнений, выражая u в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = & A \cdot \cos(kz + \alpha) \cdot J_1(kr) + \\ & + B \cdot \cos(kz + \beta) \cdot K_1(kr) + \\ & + C \cdot \cos(kz + \gamma) \cdot r \cdot J_0(kr) + \\ & + D \cdot \cos(kz + \delta) \cdot r \cdot K_0(kr) + \\ & + E \cdot z \cos(kz + \epsilon) \cdot J_1(kr) + \\ & + F \cdot z \cos(kz + \theta) \cdot K_1(kr). \end{aligned} \quad (9)$$

В рассматриваемом нами случае напряженного состояния сплошного кругового цилиндра выражения для $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial r}$, явля-

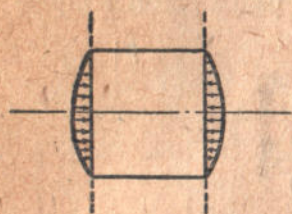
¹ Л. Файлон, loc. cit.

ющиеся решениями уравнений (1—2), могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum [A_1 \cos(kz + \alpha_1) \cdot J_1(kr) + C_1 \cos(kz + \gamma_1) \cdot r \cdot J_0(kr) + E_1 z \cos(kz + \varepsilon_1) \cdot J_1(kr)], \quad (10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \sum [A_2 \cos(kz + \alpha_2) \cdot J_1(kr) + C_2 \cos(kz + \gamma_2) \cdot r \cdot J_0(kr) + E_2 z \cos(kz + \varepsilon_2) \cdot J_1(kr)]; \quad (11)$$

функции K не входят в выражения (10—11), так как они обращаются в бесконечность при $r=0$ на оси цилиндра¹.



Фиг. 4

Предположим цилиндр загруженным на поверхности системой радиальных усилий \widehat{rr} , выражающихся четной функцией от z $|f(z)|$ на кривой поверхности при $r=a$ (Фиг. 4).

Указанные условия загрузки требуют, чтобы u было четной функцией от z и w — нечетной функцией от z . Это следует из уравнения (3) для \widehat{rr} :

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3)$$

Действительно, если u будет четной функцией от z , то $\frac{u}{r}$ и $\frac{\partial u}{\partial r}$ будут также четными функциями от z . В то же время w должно быть нечетной функцией от z , тогда $\frac{\partial w}{\partial z}$ будет четной. При этих условиях: u — четная и w — нечетная функции от z , усилия \widehat{rr} будут выражаться четной функцией от z^2 .

Отсюда следует, что $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial r}$ должны быть нечетными функциями от z .

Следовательно, мы должны положить:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{\pi}{2} \quad (12)$$

и

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0. \quad (13)$$

Тогда мы получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum [A_1 \sin kz \cdot J_1(kr) + C_1 \sin kz \cdot r \cdot J_0(kr) + E_1 z \cos kz \cdot J_1(kr)], \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \sum [A_2 \sin kz \cdot J_1(kr) + C_2 \sin kz \cdot r \cdot J_0(kr) + E_2 z \cos kz \cdot J_1(kr)]. \quad (15)$$

¹ В случае полого цилиндра вошли бы и функции K .

² При этом $\frac{\partial w}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ явятся нечетными функциями от z , а, следовательно, усилия \widehat{rz} будут выражаться нечетной функцией от z .

Интегрируя эти уравнения, мы будем иметь:

$$u = X(r) + \sum \left[-\frac{A_1}{k} \cos kz \cdot J_1(kr) - \frac{C_1}{k} \cos kz \cdot r \cdot J_0(kr) + \frac{E_1}{k} \left(z \sin kz + \frac{\cos kz}{k} \right) \cdot J_1(kr) \right] \quad (16)$$

и

$$w = \Theta(z) + \sum \left[\frac{A_2}{k} \sin kz \cdot J_0(kr) + \frac{C_2}{k} \sin kz \cdot r \cdot J_1(kr) + \frac{E_2}{k} z \cos kz \cdot J_0(kr) \right]. \quad (17)$$

§ 4. Для определения зависимостей между постоянными, подставим полученные выражения для u и w в уравнения (1) и (2):

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r \cdot \partial z} = 0, \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

На основании уравнений (14—15) и (16—17) получим после преобразований на основании уравнения (1):

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) X(r) + \\ & + \sum \{ [(\lambda + \mu) k (A_2 - A_1) - 2(\lambda + 2\mu) C_1 + 2\mu E_1 + 2(\lambda + \\ & + \mu) E_2] \cos kz \cdot J_1(kr) + (\lambda + \mu) k (C_2 - C_1) \cos kz \cdot r \cdot J_0(kr) + \\ & + (\lambda + \mu) (E_1 - E_2) \cdot kz \cdot \sin kz \cdot J_1(kr) \} = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

или же, обозначая

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} = \nabla^2,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \nabla^2 X(r) + \sum \{ [(\lambda + \mu) k (A_2 - A_1) - 2(\lambda + 2\mu) C_1 + 2\mu E_1 + \\ & + 2(\lambda + \mu) E_2] \cos kz J_1(kr) + (\lambda + \mu) k (C_2 - C_1) \cos kz \cdot r \cdot J_0(kr) + \\ & + (\lambda + \mu) (E_1 - E_2) \cdot kz \cdot \sin kz \cdot J_1(kr) \} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

также получим, обозначая

$$\frac{\partial}{\partial z^2} = D^2,$$

на основании уравнения (2)

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) D^2 \Theta(z) + \sum \{ [(\lambda + \mu) k (A_1 - A_2) + 2(\lambda + \mu) C_1 + \\ & + 2\mu C_2 - 2(\lambda + 2\mu) E_2] \sin kz \cdot J_0(kr) + (\lambda + \mu) k (C_1 - \\ & - C_2) \sin kz \cdot r \cdot J_1(kr) + (\lambda + \mu) k (E_1 - E_2) \cos kz \cdot z \cdot J_0(kr) \} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (19) и (20) должны быть равны 0 при любых значениях z и r ; это может быть лишь при условии, что коэффициенты при неизвестных равны 0; на основании этого мы получим

уравнения, дающие нам зависимости между произвольными постоянными:

$$\nabla^2 X(r) = 0; \quad (21)$$

$$D^2 \Theta(z) = 0; \quad (22)$$

$$(\lambda + \mu)(A_1 - A_2)k + 2[(\lambda + 2\mu)C_1 - \mu E_1 - (\lambda + \mu)E_2] = 0; \quad (23)$$

$$(\lambda + \mu)(A_1 - A_2)k + 2[(\lambda + \mu)C_1 + \mu C_2 - (\lambda + 2\mu)E_2] = 0; \quad (24)$$

$$C_1 = C_2 = C; \quad (25)$$

$$E_1 = E_2 = E. \quad (26)$$

На основании уравнения (21) имеем:

$$X(r) = u_0 r; \quad (27)$$

свободный член должен быть равен 0, так как для оси стержня при $r=0$ перемещение u должно быть равно 0.

На основании уравнения (22), имеем:

$$\Theta(z) = \omega_0 z, \quad (28)$$

имея в виду, что ω должно быть нечетной функцией от z^* .

Тогда выражения для перемещений u (16) и ω (17) примут следующий вид:

$$u = u_0 r + \sum \left[-\frac{A_1}{k} \cos kz \cdot J_1(kr) - \frac{C}{k} \cos kz \cdot r \cdot J_0(kr) + \frac{E}{k} \left(z \cdot \sin kz + \frac{\cos kz}{k} \right) J_1(kr) \right], \quad (29)$$

$$\omega = \omega_0 z + \sum \left[\frac{A_2}{k} \sin kz \cdot J_0(kr) + \frac{C}{k} \sin kz \cdot r \cdot J_1(kr) + \frac{E}{k} z \cos kz \cdot J_0(kr) \right]. \quad (30)$$

Условия деформации цилиндра в нашей задаче — торцевые сечения должны оставаться плоскими после деформации:

$$\omega = \text{const при } z = \pm c$$

— позволяют составить новые уравнения для определения произвольных постоянных.

На основании этого условия правая часть уравнения (30) должна сохранить постоянную величину при $z = \pm c$ и при любых значениях r :

$$\pm \omega c + \sum \left[\pm \frac{A_2}{k} \sin kc \cdot J_0(kr) \pm \frac{C}{k} \sin kc \cdot r \cdot J_1(kr) \pm \frac{E}{k} c \cdot \cos kc \cdot J_0(kr) \right] = \text{const}; \quad (31)$$

это может быть удовлетворено при условии, что выражение под знаком Σ обращается в 0 при каких угодно значениях r :

$$\frac{A_2}{k} \sin kc \cdot J_0(kr) + \frac{C}{k} \sin kc \cdot r \cdot J_1(kr) + \frac{E}{k} c \cdot \cos kc \cdot J_0(kr) = 0 \quad (32)$$

или

$$[A_2 \cdot J_0(kr) + C \cdot r \cdot J_1(kr)] \sin kc + E \cdot c \cdot \cos kc \cdot J_0(kr) = 0; \quad (33)$$

* См. стр. 262.

это возможно при

$$\sin kc = 0 \quad (34)$$

и

$$E = 0. \quad (35)$$

Из уравнения (34) следует:

$$kc = n\pi \quad (36)$$

или

$$k = \frac{n\pi}{c}. \quad (37)$$

Уравнения (23—24), принимая во внимание равенство (35), преобразуются следующим образом:

$$(\lambda + \mu)(A_1 - A_2)k + 2(\lambda + 2\mu)C = 0 \quad (38)$$

или

$$(A_1 - A_2)\gamma k + 2C = 0, \quad (39)$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad (40)$$

или

$$A_1 - A_2 + \frac{2C}{\gamma k} = 0. \quad (41)$$

Принимая во внимание, что $E = 0$, мы можем выражения для перемещений u и w записать в таком виде:

$$u = u_0 r + \sum \left[-\frac{A_1}{k} \cos kz \cdot J_1(kr) - \frac{C}{k} \cos kz \cdot r \cdot J_0(kr) \right] \quad (42)$$

и

$$w = w_0 z + \sum \left[\frac{A_2}{k} \sin kz \cdot J_0(kr) + \frac{C}{k} \sin kz \cdot r \cdot J_1(kr) \right]. \quad (43)$$

Составим теперь выражения для напряжений, на основании уравнений (3—6):

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\widehat{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (4)$$

$$\widehat{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\widehat{rz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (6)$$

составляющие касательного напряжения $\widehat{\theta z}$ и $\widehat{r\theta}$, вследствие симметрии, обращаются в 0, так как перемещения в тангенциальном направлении φ равны 0.

Принимая во внимание уравнения (42) и (43), мы будем иметь следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \widehat{rr} = & 2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 + \\ & + \sum \left\{ - \left[(\lambda + 2\mu)A_1 - \lambda A_2 + 2(\lambda + \mu) \frac{C}{k} \right] \cos kz \cdot J_0(kr) + \right. \\ & \left. + 2\mu \frac{A_1}{kr} \cos kz \cdot J_1(kr) - 2\mu C \cdot \cos kz \cdot r \cdot J_1(kr) \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

или, принимая во внимание уравнение (39):

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= 2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 + \\ + \sum -\mu &\left[(A_1 + A_2 - 2\frac{C}{k}) \cdot J_0(kr) - 2\frac{A_1}{kr} J_1(kr) + 2C \cdot r \cdot J_1(kr) \right] \cdot \cos kz. \end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} \widehat{zz} &= \lambda u_0 + (\lambda + 2\mu)w_0 + \\ + \sum \mu &\left[(A_1 + A_2 + 4\frac{C}{k}) \cdot J_0(kr) + 2C \cdot r \cdot J_1(kr) \right] \cdot \cos kz; \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} &= 2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 + \\ + \sum \mu &\left[(A_1 - A_2 + 2\frac{C}{k}) \cdot J_0(kr) - 2\frac{A_1}{kr} J_1(kr) \right] \cdot \cos kz \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$\widehat{rz} = \mu \sum [(A_1 + A_2) \cdot J_1(kr) + 2C \cdot r \cdot J_0(kr)] \cdot \sin kz. \quad (48)$$

Принимая во внимание равенство (37) и вводя обозначение:

$$kr = \rho, \quad (49)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= 2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 + \\ + \sum -\mu &\left[(A_1 + A_2 - 2\frac{C}{k}) \cdot J_0(\rho) - 2\frac{A_1}{\rho} J_1(\rho) + 2\frac{C}{k} \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \widehat{zz} &= 2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu)w_0 + \\ + \sum \mu &\left[(A_1 + A_2 + 4\frac{C}{k}) \cdot J_0(\rho) + 2\frac{C}{k} \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\theta\theta} &= 2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 + \\ + \sum \mu &\left[(A_1 - A_2 + 2\frac{C}{k}) J_0(\rho) - 2\frac{A_1}{\rho} \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \end{aligned} \quad (52)$$

$$\widehat{rz} = \mu \sum \left[(A_1 + A_2) \cdot J_1(\rho) + 2\frac{C}{k} \rho \cdot J_0(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (53)$$

Последнее уравнение (53) показывает, что при $z=0$, т. е. в среднем, сечении цилиндра, а также при $z = \pm c$, т. е. на плоских торцах цилиндра, при любом значении ρ (или r), касательные напряжения равны 0.

Так как, согласно условиям нашей задачи, касательные напряжения на кривой поверхности цилиндра, т. е. при $r=a$ должны быть равны 0, то, на основании уравнения (53), мы будем иметь:

$$(A_1 + A_2) J_1(ka) + 2C \cdot a \cdot J_0(ka) = 0 \quad (54)$$

или, обозначая $\alpha = ka$,

$$(A_1 + A_2) \cdot J_1(\alpha) + 2\frac{C}{k} \alpha \cdot J_0(\alpha) = 0 \quad (55)$$

или

$$A_1 + A_2 + 2\frac{C}{k} \frac{\alpha \cdot J_0(\alpha)}{J_1(\alpha)} = 0. \quad (56)$$

Решая совместно систему уравнений (41) и (56):

$$A_1 - A_2 + \frac{2C}{\gamma k} = 0; \quad (41)$$

$$A_1 + A_2 + \frac{2C}{k} \frac{\alpha \cdot J_0(\alpha)}{J_1(\alpha)} = 0, \quad (56)$$

мы будем иметь:

$$A_1 = -\frac{C}{k} \left[\frac{\alpha \cdot J_0(\alpha)}{J_1(\alpha)} + \frac{1}{\gamma} \right] \quad (57)$$

и

$$A_2 = -\frac{C}{k} \left[\frac{\alpha \cdot J_0(\alpha)}{J_1(\alpha)} - \frac{1}{\gamma} \right]. \quad (58)$$

В дальнейшем для простоты записи мы будем писать J_0 и J_1 , вместо $J_0(\alpha)$ и $J_1(\alpha)$; тогда:

$$A_1 = -\frac{C}{k} \left(\frac{\alpha J_0}{J_1} + \frac{1}{\gamma} \right) \quad (59)$$

и

$$A_2 = -\frac{C}{k} \left(\frac{\alpha J_0}{J_1} - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (60)$$

Принимая во внимание полученные нами выражения (59—60) для A_1 и A_2 (через C), мы можем выражения для напряжений записать в таком виде:

$$\widehat{rr} = 2(\lambda + \mu) u_0 + \lambda w_0 + \sum^{\mu} \frac{2C}{k} \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \cdot J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} - \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (61)$$

$$\widehat{zz} = 2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0 + \sum^{\mu} \frac{2C}{k} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (62)$$

$$\widehat{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu) u_0 + \lambda w_0 + \sum^{\mu} \frac{2C}{k} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \cdot J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \frac{J_0(\rho)}{\rho} \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (63)$$

$$\widehat{rz} = \sum^{\mu} \frac{2C}{k} \left[-\frac{\alpha J_0}{J_1} \cdot J_1(\rho) + \rho \cdot J_0(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (64)$$

Так как, на основании условий загрузки нашего цилиндра некоторой системой усилий \widehat{rr} , последние располагаются некоторым заданным образом на его кривой поверхности, то найдем, на основании уравнения (64), значение \widehat{rr} при $r = a$ ($\rho = ka = \alpha$):

$$\widehat{rr}_{r=a} = 2(\lambda + \mu) u_0 + \lambda w_0 + \sum^{\mu} \frac{2C}{k} \frac{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2}{\gamma \alpha J_1} \cos \frac{n\pi z}{c}. \quad (65)$$

Представим себе, что закон распределения усилий по кривой поверхности цилиндра выражается в виде следующего ряда:

$$\widehat{rr}_{r=a} = P \left(a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi z}{c} \right), \quad (66)$$

что соответствует уравнению (65); в этом выражении (65) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — коэффициенты ряда Фурье, определяемые из вида загрузки, P — постоянная, зависящая от интенсивности нагрузки.

Сравнивая уравнения (65) и (66), находим:

$$2(\lambda + \mu)u_0 + \lambda w_0 = Pa_0 \quad (67)$$

и

$$\mu \frac{2C \gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2}{\gamma a J_1} = Pa_n, \quad (68)$$

откуда имеем:

$$C = \frac{k}{2\mu} \frac{\gamma a J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} Pa_n = \frac{n\pi}{2c\mu} \frac{\gamma a J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} Pa_n. \quad (69)$$

§ 5. На основании условия равновесия статики твердого тела — сумма внешних сил равна сумме внутренних усилий в рассматриваемом сечении — мы можем записать:

$$-\pi a^2 Q = \int_F \widehat{zz} \cdot dF^* \quad (70)$$

или, заменяя $dF = 2\pi r \cdot dr$, получим

$$-\pi a^2 Q = 2\pi \int_0^a r \cdot \widehat{zz} \cdot dr; \quad (71)$$

подставляя выражение для \widehat{zz} (62), будем иметь:

$$-\pi a^2 Q = 2\pi \left\{ [2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0] \cdot \int_0^a r dr + \right. \\ \left. + \sum \mu \frac{2C}{k} \cos \frac{n\pi z}{C} \left[\left(2 - \frac{a J_0}{J_1}\right) \int_0^a r \cdot J_0(\rho) dr + \int_0^a k \cdot r^2 \cdot J_1(\rho) dr \right] \right\}. \quad (72)$$

При интегрировании будем пользоваться известной зависимостью:

$$\left(\frac{d}{x dx}\right)^m [x^n J_n(x)] = x^{n-m} \cdot J_{n-m}(x)^{**} \quad (73)$$

или

$$\frac{d^m}{dx^m} [x^n J_n(x)] = x^n \cdot J_{n-m}(x); \quad (74)$$

при $m = 1$, получим:

$$\frac{d}{dx} [x^n \cdot J_n(x)] = x^n \cdot J_{n-1}(x) \quad (75)$$

или

$$\int x^n J_{n-1}(x) = x^n \cdot J_n(x), \quad (76)$$

* Знак (-), так как сила Q — сжимающая.

** См. Я. Н. Шпилерейн. Таблица специальных функций, ч. 1, стр. 53, ГТТИ, 1933.

Тогда будем иметь:

$$\int_0^a r \cdot J_0(\rho) \cdot dr^* = \frac{r}{k} J_1(\rho) \Big|_0^a = \frac{a}{k} J_1 \quad (77)$$

и

$$\int_0^a r^2 \cdot J_1(\rho) \cdot dr = \frac{r^2}{k} J_2(\rho) \Big|_0^a = \frac{a^2}{k} J_2. \quad (78)$$

Подставляя получим:

$$-\pi a^2 Q = 2\pi \left\{ [2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0] \cdot \frac{a^2}{2} + \right. \\ \left. + \sum \mu \frac{2C}{k} \cos \frac{\pi z}{c} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{a}{k} J_1 + a^2 J_2 \right] \right\} \quad (79)$$

или

$$-Q = 2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0 + 2 \sum \mu \frac{2C}{k} \cos \frac{\pi z}{c} \left(J_2 + \frac{2}{\alpha} J_1 - J_0 \right); \quad (80)$$

на основании зависимости¹:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \quad (81)$$

имеем при $n=1$:

$$J_0 - J_2 = \frac{2}{\alpha} J_1 \quad (82)$$

и, следовательно, выражение под знаком Σ равно 0; при этом получим:

$$-Q = 2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0. \quad (83)$$

Решая совместно систему уравнений (67) и (83):

$$2(\lambda + \mu) u_0 + \lambda w_0 = P a_0, \quad (67)$$

$$2\lambda u_0 + (\lambda + 2\mu) w_0 = -Q, \quad (83)$$

определим значения произвольных постоянных u_0 и w_0 :

$$u_0 = \frac{(\lambda + 2\mu) P a_0 + \lambda Q}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} \quad (84)$$

и

$$w_0 = -\frac{\lambda P a_0 + (\lambda + \mu) Q}{\mu (3\lambda + 2\mu)}. \quad (85)$$

§ 6. Подставляя найденные значения для u_0 и w_0 в выражения для перемещений (42—43) и для напряжений (61—64), мы будем иметь:

$$u = \frac{(\lambda + 2\mu) P a_0 + \lambda Q}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} r + \sum \frac{C}{k^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_1(\rho) - \rho \cdot J_0(\rho) \right] \cos \frac{\pi z}{c} \quad (86)$$

* $\int r \cdot J_0(\rho) \cdot dr = \frac{1}{k^2} \int kr \cdot J_0(kr) \cdot d(kr) = \frac{1}{k^2} kr \cdot J_1(kr) = \frac{r}{k} J_1(\rho).$

¹ См. Шпильрейн, loc. cit, стр. 53.

и

$$w = -\frac{\lambda Pa_0 + (\lambda + \mu) Q}{\mu (3\lambda + 2\mu)} z + \sum \frac{C}{k^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (87)$$

для напряжений:

$$\widehat{rr} = Pa_0 + \sum \mu \frac{2C}{k} \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} - \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (88)$$

$$\widehat{zz} = -Q + \sum \mu \frac{2C}{k} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (89)$$

и

$$\widehat{\theta\theta} = Pa_0 + \sum \mu \frac{2C}{k} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (90)$$

выражение для напряжений \widehat{rz} (64) останется без изменений.Подставляя в полученные нами выражения для перемещений (86, 87) и для напряжений (88—90) и (64) найденное выше значение C (69), будем иметь:

$$u = \frac{(\lambda + 2\mu) Pa_0 + \lambda Q}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} r + \sum \frac{C}{2\pi\mu} \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \left[\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_1(\rho) - \rho \cdot J_0(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (91)$$

$$w = -\frac{\lambda Pa_0 + (\lambda + \mu) Q}{\mu (3\lambda + 2\mu)} z + \sum \frac{C}{2\pi\mu} \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \left[\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (92)$$

и для напряжений:

$$\widehat{rr} = Pa_0 + \sum \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \times \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} - \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (93)$$

$$\widehat{zz} = -Q + \sum \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (94)$$

$$\widehat{\theta\theta} = Pa_0 + \sum \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \times \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \cdot J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (95)$$

$$\widehat{rz} = \sum \frac{\gamma \alpha J_1}{\gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2} Pa_n \left[-\frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) + \rho \cdot J_0(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (96)$$

§ 7. Предположим внешнюю нагрузку \widehat{rr} , приложенной по окружности цилиндра симметрично относительно среднего сечения на ширине, равной $z = \pm e$, с интенсивностью, равной q .

Выше закон распределения нагрузки по кривой поверхности цилиндра мы представили в виде ряда (66):

$$\widehat{rr}_{r=a} = P \left(a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi z}{c} \right). \quad (66)$$

Коэффициенты a_0 и a_n этого ряда могут быть определены, имея в виду указанное положение нагрузки на ширине, равной $z = \pm e$, следующим образом:

$$Pa_0 = -P \frac{e}{c} \quad (97)$$

или

$$a_0 = -\frac{e}{c}; \quad (98)$$

также будем иметь

$$Pa_n = -\frac{2}{c} \int_0^e P \cos \frac{n\pi z}{c} dz^{**} = -\frac{2Pc}{c} \frac{\sin \frac{n\pi z}{c}}{n\pi} \Big|_0^e = -\frac{2P}{n\pi} \sin \frac{n\pi e}{c} \quad (99)$$

или

$$a_n = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi e}{c}. \quad (100)$$

Если мы примем, что $e \rightarrow 0$, величина же Pe остается постоянной и равной: $Pe = \frac{s}{2}$, то получим:

$$Pa_0 = -\frac{s}{2c} \quad (101)$$

и

$$Pa_n = -\frac{2Pe}{c} \cdot \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}} = -\frac{s}{c}. \quad (102)$$

Подставляя полученные выражения для Pa_0 и Pa_n в формулы для перемещений (91, 92) и напряжений (93—96), будем иметь:

$$u = \frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu) s}{4\mu c (3\lambda + 2\mu)} r + \sum \frac{s}{2n\pi\mu} \frac{\gamma^{\alpha} J_1}{\gamma^{\alpha} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha 2}) J_1^2} \left[\rho \cdot J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (103)$$

* И. И. Привалов. Ряды Фурье, стр. 73, ГТТИ, 1931

$$Pa_0 = \frac{1}{c} \int_0^e P dx = \frac{1}{c} P x \Big|_0^e = \frac{Pe}{c}.$$

** И. И. Привалов. loc. cit., стр. 73, а также проф. С. П. Тимошенко, Теория упругости, стр. 59—60, ГТТИ, 1934.

$$w = -\frac{2(\lambda + \mu)cQ - \lambda s}{2\mu c(3\lambda + 2\mu)}z - \sum \frac{s}{2n\pi\mu} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \left[\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (104)$$

и для напряжений:

$$\widehat{rr} = -\frac{s}{2c} - \sum \frac{s}{c} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \times \\ \times \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma\rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (105)$$

$$\widehat{zz} = -Q - \sum \frac{s}{c} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (106)$$

$$\widehat{\theta\theta} = -\frac{s}{2c} - \sum \frac{s}{c} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (107)$$

$$\widehat{rz} = -\sum \frac{s}{c} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (108)$$

Во всех этих выражениях s представляет собою интенсивность внешних сил, приложенных к кривой поверхности цилиндра в среднем его сечении ($c = 0$).

§ 8. Рассмотрим случай цилиндра, стянутого в среднем сечении по наружной поверхности абсолютно жестким хомутом. В таком случае радиальные перемещения u в этом сечении должны быть равны 0, или радиальные перемещения цилиндра без хомутов в рассматриваемом сечении от продольных сил Q должны быть равны радиальным же перемещениям того же цилиндра в том же сечении от радиальных сил s .

Радиальные перемещения в цилиндре, сжимаемом продольными силами Q и радиальными s , определяются уравнением (103) при $z = 0$ и $r = a$:

$$u_{z=0} = \frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu)s}{4\mu c(3\lambda + 2\mu)} a + \\ + \sum \frac{s}{2n\pi\mu} \frac{\gamma\alpha J_1}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} \left[\alpha J_0 - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_1 \right] = \\ = \frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu)s}{4\mu c(3\lambda + 2\mu)} a - \sum \frac{s}{2n\pi\mu} \frac{\alpha J_1^2}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} = \\ = \frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu)s}{4\mu c(3\lambda + 2\mu)} a - \frac{s}{2\pi\mu} \sum \frac{1}{n} \frac{\frac{n\pi u}{c} J_1^2}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2} = \\ = \frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu)s}{4\mu c(3\lambda + 2\mu)} a - \frac{sa}{2\mu c} \sum \frac{J_1^2}{\gamma\alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma\alpha^2)J_1^2}. \quad (109)$$

Приравнявая полученное выражение для $u_{z=0}$ нулю, будем
 $r=a$ иметь:

$$\frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu) s}{4\mu c (3\lambda + 2\mu)} a - \frac{sa}{2\mu c} \sum \frac{J_1^2}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} = 0^*, \quad (110)$$

откуда

$$s = \frac{2\lambda c Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum \frac{J_1^2}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2}}. \quad ** \quad (111)$$

Подставляя это выражение для s в уравнения для напряжений (105—108), мы получим следующие выражения.

Формулы для напряжений в колонне, стянутой абсолютно жесткими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, сжимаемой продольной равномерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q .

$$\widehat{rr} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1 \zeta J_1} \left\{ 1 + \sum_1 2\gamma a \zeta \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma \rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (112)$$

$$\widehat{zz} = -Q - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1 \zeta J_1} \sum_1 2\gamma a \zeta \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (113)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1 \zeta J_1} \left\{ 1 + \sum_1 2\gamma a \zeta \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (114)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1 \zeta J_1} - \sum_1 2\gamma a \zeta \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad *** \quad (115)$$

где
$$\zeta = \frac{J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} \quad (116)$$

* Перемещения должны быть равны, но разных знаков.

** Сила s пропорциональна сжимающей силе Q .

*** Все напряжения пропорциональны сжимающим усилиям Q .

$$\zeta J_1 = \frac{1}{\gamma a^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1}, \quad (117)$$

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \quad (140)$$

и

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

§ 9. Рассмотрим теперь ту же задачу — цилиндр стянут в среднем сечении по наружной его поверхности абсолютно жестким хомутом, но будем полагать, что усилия от хомута, направленные радиально, распределяются по окружности цилиндра симметрично относительно среднего сечения на ширине, равной $\pm e$, с интенсивностью, равной P^* . Ширину полосы $2e$ мы будем при вычислениях принимать равной диаметру хомута.

В этом случае коэффициенты ряда Фурье, в виде которого мы представляем нашу нагрузку, будут выражены, как показано на стр. 271, в виде:

$$Pa_0 = -P \frac{e}{c}, \quad (97)$$

$$Pa_n = -\frac{2P}{n\pi} \sin \frac{n\pi e}{c}. \quad (99)$$

Подставляя эти выражения для Pa_0 и Pa_n в формулы для перемещений (91, 92) и напряжений (93—96), будем иметь:

$$u = \frac{\lambda c Q - (\lambda + 2\mu) P e}{2\mu c (3\lambda + 2\mu)} r + \sum \frac{P e}{n^2 \pi^2 \mu} \frac{\gamma a J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\rho J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{a J_0}{J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (119)$$

$$w = -\frac{(\lambda + \mu) c Q - \lambda P e}{\mu c (3\lambda + 2\mu)} z - \sum \frac{P e}{n^2 \pi^2 \mu} \frac{\gamma a J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{a J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (120)$$

и для напряжений:

$$\begin{aligned} r r = & -\frac{P e}{c} - \sum \frac{2P}{n\pi} \frac{\gamma a J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\left(1 + \frac{a J_0}{J_1} \right) \times \right. \\ & \left. \times J_0(\rho) - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{a J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} - \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (121) \end{aligned}$$

* См. стр. 271.

$$\widehat{r\tau} = -Q - \sum \frac{2P}{n\pi} \frac{\gamma^{\alpha} J_1}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2}) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (122)$$

$$\widehat{\theta\theta} = -\frac{Pe}{c} - \sum \frac{2P}{n\pi} \frac{\gamma^{\alpha} J_1}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2}) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (123)$$

$$\widehat{r\varepsilon} = -\sum \frac{2P}{n\pi} \frac{\gamma^{\alpha} J_1}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2}) J_1^2} \sin \frac{n\pi e}{c} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (124)$$

В рассматриваемом нами случае, величина $u_{z=0}$ определится на основании выражения (119) в следующем виде:

$$u_{z=0} = \frac{\lambda c Q - (\lambda + 2\mu) Pe}{2\mu c (3\lambda + 2\mu)} a - \frac{Pa}{\pi\mu} \sum \frac{J_1^2}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2})} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{n}. \quad (125)$$

Приравнявая полученное выражение для $u_{z=0}$ нулю, будем иметь:

$$\frac{\lambda c Q - (\lambda + 2\mu) Pe}{2\mu c (3\lambda + 2\mu)} a - \frac{Pa}{\pi\mu} \sum \frac{J_1^2}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2})} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{n} = 0, \quad (126)$$

откуда получаем:

$$P = \frac{\frac{\lambda c}{e} Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum \frac{J_1^2}{\gamma^{\alpha^2} J_0^2 - (1 + \gamma^{\alpha^2})} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}} \quad (127)$$

(в пределе $e \rightarrow 0$; $P \cdot 2e$ будет равно s).

Подставляя это выражение для P в уравнения для напряжений (121—124), мы получим следующие выражения.

Формулы для напряжений в колонне, стянутой абсолютно жесткими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, диаметр которых равен $2e$, сжимаемой продольной равномерно распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q :

$$\widehat{rr} = -\frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 2\gamma^{\alpha} \zeta_1 \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma\rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (128)$$

$$\widehat{zz} = -Q \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1} \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{r-1} \times \\ \times \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (129)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{r-1} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (130)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1} \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{r-1} \times \\ \times \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (131)$$

где

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{\gamma \alpha^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}, \quad (132)$$

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad (140)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

Полученные нами формулы для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} в рассматриваемом случае совершенно аналогичны, как и следовало ожидать, формулам, выведенным нами ранее в предположении, что хомуты создают радиальные сжимающие силы в виде сосредоточенных сил s , приложенных по кривой поверхности цилиндра, а не в виде равномерно-распределенной нагрузки с интенсивностью, равной P , как мы предполагаем в данном случае. Отличным является коэффициент ζ_1 который связан с коэффициентом ζ зависимостью

$$\zeta_1 = \zeta \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}. \quad (133)$$

При условии

$$e \rightarrow 0$$

мы будем иметь

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}} = 1, \\ \zeta_1 = \zeta. \quad (134)$$

§ 10. Переходим теперь к исследованию случая колонны, стянутой упругими хомутами. Рассуждая так же, как в случае балки на упругом основании, мы можем написать зависимость между силами s и перемещениями $u_{z=0}$ в виде:

$$s = k \cdot u_{z=0}, \quad r=a \quad (135)$$

где k — коэффициент упругости хомута.

На основании формулы (109), мы можем теперь написать:

$$s = k \cdot \left[\frac{2\lambda c Q - (\lambda + 2\mu)s}{4\mu c(3\lambda + 2\mu)} a - \frac{sa}{2\mu c} \sum \frac{J_1^2}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2} \right] \quad (136)$$

или, следовательно,

$$s = \frac{2c\lambda Q}{4\mu(3\lambda + 2\mu) \frac{c}{ka} + \lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \sum_1^\infty J_1^2}, \quad (137)$$

где, как и раньше, имеем:

$$\zeta = \frac{J_1}{\gamma a^2 J_0^2 - (1 + \gamma a^2) J_1^2}. \quad (116)$$

Принимая в полученном нами выражении для s :

$$k = \infty, \quad (138)$$

т. е. полагая хомут абсолютно-жестким, мы приходим к ранее выведенному нами выражению для s (111).

Если мы примем

$$k = 0, \quad (139)$$

то будем иметь:

$$s = 0, \quad (140)$$

что соответствует случаю отсутствия хомутов¹.

Подставляя выведенное нами выражение для s в уравнения для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} , получим следующие выражения.

Формулы для напряжений в колонне, стянутой упругими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, сжимаемой продольной равномерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q :

$$\widehat{rr} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu c}{ka} + \sum_1^\infty \zeta J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^\infty 2\gamma \alpha \zeta \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma \rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (141)$$

¹ Это следует также из уравнения (135).

$$s = k \cdot u_{z=0}$$

$$\widehat{z\bar{z}} = -Q - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2\frac{\mu c}{ka} + \sum_1^{\infty} \zeta J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha \zeta \times \\ \times \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (142)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2\frac{\mu c}{ka} + \sum_1^{\infty} \zeta J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha \zeta \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (143)$$

$$\widehat{r\bar{z}} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2\frac{\mu c}{ka} + \sum_1^{\infty} \zeta J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha \zeta \left[\rho J_0(\rho) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (144)$$

где:

$$\zeta J_1 = \frac{1}{\gamma \alpha^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1}, \quad (117)$$

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \quad (140)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

Исследование случая колонны, стянутой упругими хомутами, можно также провести, составляя уравнение вида:

$$\delta_1 = u_{z=0}, \quad (145)$$

где через δ_1 мы обозначаем увеличение внутреннего радиуса хомута, появляющееся под влиянием сил s , направленное наружу и, следовательно, растягивающее хомут.

Величину δ_1 мы можем определить приближенно, на основании известной теории толстостенных цилиндров — задача Ляме. Рассматривая хомут как кольцо, вырезанное из металлического цилиндра с внутренним радиусом, равным a , и наружным, равным b (фиг. 5), имеем:

$$\delta_1 = \frac{aq_i}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \gamma \right), \quad (146)$$

где E — модуль Юнга,

γ — коэффициент Пуассона,

q_i — интенсивность внутреннего давления на хомут, которую мы можем приближенно принять равной:

$$q_i = \frac{s}{2e}, \quad (147)$$

полагая равномерное распределение усилий s на ширине, равной диаметру хомута $2e$.

Тогда получим:

$$\delta_1 = \frac{sa}{2Ee} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \eta \right) \quad (148)$$

и, следовательно,

$$\frac{sa}{2Ee} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \eta \right) = u_{z=0}; \quad (149)$$

подставляя вместо $u_{z=0}$ выражение (109), мы получим уравнение, из которого можем определить приближенное выражение для усилий s в рассматриваемом нами случае упругого хомута.

Мы можем также использовать ранее написанное нами уравнение (147)

$$s = k \cdot u_{z=0} \quad (135)$$

или

$$u_{z=0} = \frac{s}{k}; \quad (150)$$

подставляя это выражение для $u_{z=0}$ в наше уравнение, будем иметь:

$$\frac{sa}{2Ee} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \eta \right) = \frac{s}{k}, \quad (151)$$

откуда находим:

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{2Ee} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \eta \right), \quad (152)$$

т. е. величину, обратную коэффициенту упругости хомута.

Подставляя это выражение для $\frac{1}{k}$ в формулы для напряжений, приведенные нами выше (141—144), мы получим приближенные выражения для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} для случая колонны, стянутой упругими металлическими хомутами.

Принимая во внимание приближенность полученного нами выражения для $\frac{1}{k}$, мы можем его упростить следующим образом:

$$b = a + d, \quad (153)$$

где d — диаметр хомута, тогда

$$\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \frac{(a+d)^2 + a^2}{(a+d)^2 - a^2} = 1 + \frac{2a^2}{d(2a+d)} = 1 + \frac{1}{\frac{d}{a} \left(1 + \frac{d}{2a}\right)};$$

заменяя

$$d = 2e, \quad (154)$$

будем иметь:

$$\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = 1 + \frac{1}{2 \frac{e}{a} \left(1 + \frac{e}{a}\right)};$$

тогда получим:

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{2Ee} \left[1 + \frac{1}{2 \frac{e}{a} \left(1 + \frac{e}{a} \right)} + \eta \right]. \quad (155)$$

В полученном нами выражении для $\frac{1}{k}$ отношение $\frac{e}{a}$ величина достаточно малая, практически менее 0,025, в связи с чем мы можем пренебречь ею по сравнению с единицей и записать приближенно:

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{2Ee} \left(1 + \eta + \frac{a}{2e} \right); \quad (156)$$

отбрасывая при этом также $1 + \eta$ величину значительно меньшую, чем $\frac{a}{2e}$, мы получим:

$$\frac{1}{k} = \frac{a^2}{4Ee^2}. \quad (157)$$

Этот же результат мы могли получить из формулы (152):

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{2Ee} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \eta \right) \quad (152)$$

или

$$\frac{1}{k} = \frac{a}{2Ee} \left[\frac{b^2 + a^2}{2e(b+a)} + \eta \right]; \quad (153)$$

принимая в этом выражении

$$b \approx a \quad (159)$$

и пренебрегая величиной η , получим:

$$\frac{1}{k} = \frac{a^2}{4Ee^2}. \quad (157)$$

Подставляя полученное приближенное выражение для $\frac{1}{k}$ в формулы (141—144), получим окончательные выражения для напряжений для цилиндра, стянутого упругими металлическими хомутами и сжимаемого продольной равномерно-распределенной нагрузкой.

В получаемых при этом выражениях для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{r_z}$ мы будем принимать вместо коэффициента ζ коэффициент ζ_1 (см. стр. 276), имея в виду, что мы в наших выводах при определении коэффициента упругости k , или собственно величины $\frac{1}{k}$, учитываем диаметр хомута, равный $2e$; тогда будем иметь:

$$\zeta_1 = \gamma \alpha^2 J_0^2 - (1 + \gamma \alpha^2) J_1^2 \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{c}. \quad (160)$$

Формулы для напряжений в колонне, стянутой упругими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, диаметр которых равен $2e$, сжимаемой продольной рав-

номерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q :

$$\widehat{rr} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{c}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{\zeta_1} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma \rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (161)$$

$$\widehat{zz} = - Q - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{\zeta_1} \times \\ \times \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (162)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{\zeta_1} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \sin \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (163)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \times \\ \times \sum_1^{\infty} 2\gamma \alpha_{\zeta_1} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (164)$$

где

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{\gamma \alpha^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}, \quad (132)$$

$$\gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad (40)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

Преобразуем коэффициент

$$\frac{\lambda Q}{\lambda + 2\mu + 2(3\lambda + 2\mu) \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)}, \quad (165)$$

входящий в состав всех выражений для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} к иному виду, заменив упругие постоянные Ляме λ и μ через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона $\eta = \frac{1}{m}$. Разделив числитель и знаменатель на $\lambda + 2\mu$, получим:

$$\frac{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} Q}{1 + 2 \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(2 \frac{\mu}{E} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)}, \quad (166)$$

по

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{m-1} \quad (167)$$

и

$$\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{m+1}{m-1}; \quad (168)$$

заменяя, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{m-1} Q}{1 + 2 \frac{m+1}{m-1} \left(\frac{m}{m+1} \frac{E^6}{E^{\text{ж}}} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} = \\ & = \frac{Q}{m-1 + 2 \left[m \frac{E^6}{E^{\text{ж}}} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]}; \end{aligned} \quad (169)$$

заменяя, как это принято в теории железобетона,

$$\frac{E^{\text{ж}}}{E^6} = n_1^* \quad (170)$$

будем иметь:

$$\frac{Q}{m-1 + 2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]}. \quad (171)$$

Подставляя это выражение в уравнения для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{r\theta}$, получим следующие выражения.

Формулы для напряжений в колонне, стянутой упругими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, диаметр которых равен $2e$, сжимаемой продольной равномерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q :

$$\begin{aligned} \widehat{rr} = & - \frac{Q}{m-1 + 2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]} \times \\ & \times \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_{\zeta_1}^r}{1-\eta} \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma\rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cos \frac{\pi \zeta z}{c} \right\}; \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \widehat{zz} = & - Q - \frac{Q}{m-1 + 2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]} \times \\ & \times \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_{\zeta_1}^z}{1-\eta} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{\pi \zeta z}{c}; \end{aligned} \quad (173)$$

* n_1 — в отличие от n , уже входящее в формулы.

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{Q}{m-1+2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]} \times \\ \times \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_{s_1}^{\alpha_1}}{1-\eta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (174)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{Q}{m-1+2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_{s_1}^{\alpha_1}}{1-\eta} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (175)$$

где

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{2(1-\eta)} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{n\pi e}{c}, \quad (132)$$

$$\gamma = \frac{1}{2(1-\eta)}, \quad (140)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

В случае абсолютно жестких хомутов:

$$n_1 = \frac{E^{\text{ж}}}{E^6} = \infty \quad (176)$$

и, следовательно, в полученных нами выражениях для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} , член вида

$$\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} = 0, \quad (177)$$

и коэффициент

$$\frac{Q}{m-1+2 \left[\frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right]} \quad (171)$$

примет вид:

$$\frac{Q}{m-1+2(m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1}. \quad (178)$$

§ 11. При обычных условиях работы колонны величина второго члена в скобках выражения (171) мала по сравнению с первым (приблизительно составляет лишь 2—3% первого¹), поэтому

$$^1 \frac{m}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} = \frac{6}{15} \cdot \frac{10}{0,25} \cdot \frac{10}{0,25} = 640; (m+1) \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \approx (6+1) 2 = 14;$$

$$\frac{14}{640} 100 = 2,2\%.$$

мы можем ею пренебречь; отбрасывая также $m-1$, как величину малую по сравнению с тем же первым членом суммы в скобках, мы получим следующее приближенное, но для обычных условий работы достаточно точное, выражение рассматриваемого нами коэффициента в виде:

$$\frac{Q}{2} \frac{n_1 e}{m a} \frac{e}{c} = \frac{1}{2} Q n_1 \eta \frac{e}{a} \frac{e}{c}. \quad (179)$$

Обозначая отношения радиуса хомута e к радиусу колонны a и радиуса хомута e к половине расстояния между хомутами c через:

$$\frac{e}{a} = o, \quad (180)$$

$$\frac{e}{c} = x, \quad (181)$$

будем иметь:

$$\frac{1}{2} Q n_1 \eta o x, \quad (182)$$

где введенные нами величины o и x являются отношениями: o — диаметра хомута к диаметру колонны и x — диаметра хомута к расстоянию между ними.

При этом получим следующие выражения для напряжений. *Приближенные формулы для напряжений в колонне, стянутой упругими хомутами, расположенными на расстояниях, равных $2c$ друг от друга, диаметр которых равен $2e$, сжимаемой продольной равномерно-распределенной по торцам нагрузкой с интенсивностью, равной Q :*

$$\widehat{r r} = -\frac{1}{2} Q n_1 \eta o x \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \zeta_1}{1 - \eta} \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{1}{\gamma \rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cdot \cos \frac{n \pi z}{c} \right\}; \quad (183)$$

$$\widehat{z z} = -Q - \frac{1}{2} Q n_1 \eta o x \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \zeta_1}{1 - \eta} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n \pi z}{c}; \quad (184)$$

$$\widehat{\theta \theta} = -\frac{1}{2} Q n_1 \eta o x \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \zeta_1}{1 - \eta} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) J_0(\rho) + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n \pi z}{c} \right\}; \quad (185)$$

$$\widehat{r z} = -\frac{1}{2} Q n_1 \eta o x \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \zeta_1}{1 - \eta} \left[\rho \cdot J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \cdot \sin \frac{n \pi z}{c}; \quad (186)$$

где:

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{\gamma \alpha^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin \frac{n \pi e}{c}}{\frac{n \pi e}{c}}, \quad (132)$$

$$\gamma = \frac{m^*}{2(m-1)} = \frac{1}{2(1-\eta)}, \quad (187)$$

$$\rho = \frac{\pi r}{c}. \quad (118)$$

Полученные нами приближенные выражения для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} позволяют сделать некоторые выводы относительно влияния хомутов на величину и распределение указанных напряжений в колоннах, вдали от места приложения сил.

1. При постоянном отношении $\frac{a}{c}$ величины напряжений \widehat{rr} и $\widehat{\theta\theta}$ пропорциональны отношениям диаметра хомута к диаметру колонны

$$\sigma = \frac{e}{a} \quad (180)$$

и отношению диаметра хомута к расстоянию между ними

$$z = \frac{e}{c}. \quad (181)$$

2. При отсутствии хомутов напряжения \widehat{rr} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} обращаются в нуль, напряжение же \widehat{zz} будет равно Q .

3. Принимая во внимание, что

$$\alpha = \frac{\pi a}{c} \quad (188)$$

и вынося в выражениях для напряжений \widehat{zz} и \widehat{rz} (184, 186) $\frac{\pi a}{c} \frac{1}{1-\eta}$ за знак Σ , мы получим коэффициент перед Σ в виде:

$$\frac{1}{2} Q n_1 \eta \frac{e}{a} \frac{e}{c} \frac{\pi a}{c} \frac{1}{1-\eta} = \frac{\pi}{2} Q n_1 \frac{\eta}{1-\eta} \left(\frac{e}{c}\right)^2. \quad (189)$$

На основании этого мы можем сказать, что с достаточной степенью приближения влияние хомутов на напряжения \widehat{zz} и \widehat{rz} пропорционально отношению

$$\left(\frac{e}{c}\right)^2, \quad (190)$$

т. е. пропорционально квадрату диаметра хомутов (при $c = \text{const}$) и обратно пропорционально квадрату расстояния между хомутами (при $e = \text{const}$).

Точные формулы (161—164), выведенные нами, показывают также, что степень влияния хомутов на напряжения \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} в большой степени зависит от степени упругости хомутов, т. е. от величины E , чем больше E , тем более возрастает и влияние хомутов на напряжения.

При

$$E = \infty, \quad (191)$$

$$* \gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{m}{2(m-1)}.$$

т. е. в случае абсолютно жестких хомутов, их влияние может возрасти в несколько десятков раз: около 25—30 раз (по приближенным формулам (183, 185, 186) мы бы получили в этом случае величины напряжений, равные ∞).

Таким образом, желая повысить влияние хомутов, мы должны стремиться сделать их возможно жестче, так, чтобы их радиальные перемещения были очень малы.

§ 12. Во всех дальнейших расчетах мы будем принимать согласно норм коэффициент Пуассона η для бетона равным;

$$\eta = \frac{1}{6} \quad (192)$$

или

$$m = \frac{1}{\eta} = 6. \quad (193)$$

При этом получаем

$$\gamma = \frac{1}{2(1-\eta)} = 0,6. \quad (194)$$

Величины напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} примут следующий вид:

$$\widehat{rr} = - \frac{Q}{5+2\left(\frac{6}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1\right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{5}{3\rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1}\right) J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (195)$$

$$\widehat{zz} = - Q - \frac{Q}{5+2\left(\frac{6}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1\right)} \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (196)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{Q}{5+2\left(\frac{6}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1\right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[-\frac{2}{3} J_0(\rho) + \left(\frac{5}{3} + \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (197)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{Q}{5+2\left(\frac{6}{n_1} \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1\right)} \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (198)$$

где

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{0,6a^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1}\right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}, \quad (132)$$

$$\gamma = 0,6, \quad (194)$$

$$\rho = \frac{\pi \pi r}{c}. \quad (118)$$

Величину коэффициента

$$n_1 = \frac{E^{\text{ж}}}{E^{\text{б}}} \quad (170)$$

принимая равной

$$n_1 = 15, \quad (199)$$

что соответствует данным последних экспериментов, а также подтверждается теорией железобетона, основанной на этих данных; согласно таблице значений чисел n_1 , приведенной проф. Я. В. Столяровым¹, для отношения

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\text{вр}}} = 0,4, \quad (200)$$

т. е. при напряжении бетона, равном допускаемому — согласно норм $\sigma_{\text{доп}} = 0,4 \sigma_{\text{вр}}$ — коэффициент

$$n_1 = 14,5$$

для бетона с

$$R_{\text{куб}} = 130 \text{ кг/см}^2$$

или

$$R = 0,85 R_{\text{куб}} = 0,85 \cdot 130 = 110,5 \text{ кг/см}^2;$$

для бетона с

$$R_{\text{куб}} = 120 \text{ кг/см}^2$$

мы бы получили:

$$n_1 = 15,7;$$

таким образом, мы принимаем для n_1 среднее значение:

$$n_1 = 15. \quad (199)$$

Тогда для напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} получим следующие выражения:

$$\widehat{rr} = - \frac{Q}{5 + 2 \left(0,4 \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r1}^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{5}{3\rho} + \frac{\alpha J_0}{\rho J_1} \right) J_1(\rho) \right] \cos \frac{\pi \pi z}{c} \right\}; \quad (201)$$

$$\widehat{zz} = - Q - \frac{Q}{5 + 2 \left(0,4 \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r1}^2 \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{\pi \pi z}{c}; \quad (202)$$

¹ Проф. Я. В. Столяров. Теория железобетона на экспериментальной основе. ГТТИ, 1935.

$$\widehat{\theta} = - \frac{Q}{5 + 2 \left(0,4 \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[-\frac{2}{3} J_0(\rho) + \left(\frac{5}{3} + \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (203)$$

$$\widehat{r_z} = - \frac{Q}{5 + 2 \left(0,4 \frac{a}{e} \frac{c}{e} + 7 \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 1,2 \alpha_{r_1} \left[\rho J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (204)$$

где:

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{0,6\alpha^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^e - 1 \right] - 1} \frac{\sin \frac{n\pi e}{c}}{\frac{n\pi e}{c}}, \quad (132)$$

$$\gamma = 0,6, \quad (194)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c}. \quad (118)$$

Рассмотрим случай наиболее часто встречающихся отношений:

$$o = \frac{e}{a} = \frac{0,25}{10} = \frac{1}{40} = 0,025, \quad (205)$$

$$\chi = \frac{e}{c} = \frac{3e}{\pi a} = \frac{3}{40\pi} = 0,023873; \quad (206)$$

мы при этом принимаем диаметр хомута

$$2e = 0,5 \text{ см},$$

диаметр колонны

$$2a = 20 \text{ см}$$

и расстояние между хомутами

$$2c = 20,94395 \text{ см}^*.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{1}{2} Q n_1 \eta_{\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0,025 \cdot 0,023873 = 0,00049736 Q. \quad (207)$$

При этом напряжения $\widehat{z\bar{z}}$ и $\widehat{r_z}$, согласно полученным нами формулам (184), (186), мы можем выразить в таком виде:

$$\begin{aligned} \widehat{z\bar{z}} &= -Q - \frac{1}{2} Q n_1 \eta_{\rho\chi} \sum_1^{\infty} \frac{\alpha \zeta_1}{1 - \gamma} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} = \\ &= -Q - \frac{1}{2} Q n_1 \eta \frac{e}{a} \frac{e}{c} \frac{\pi a}{c} \frac{1}{1 - \gamma} \sum_1^{\infty} n_{r_1} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} = \\ &= -Q - \frac{\pi}{2} Q n_1 \frac{\eta}{1 - \gamma} \left(\frac{e}{c} \right)^2 \sum_1^{\infty} n_{r_1} \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1} \right) \cdot J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \quad (208) \end{aligned}$$

* Из соотношения $\frac{\pi a}{c} = 3$.

$$\widehat{r_z} = -\frac{\pi}{2} Q n_1 \frac{\eta}{1-\eta} \left(\frac{e}{c}\right)^2 \sum_1^{\infty} n \zeta_1 \left[\rho \cdot J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (209)$$

Принимая во внимание принятые нами числовые значения для n_1 , η и α , получаем:

$$\widehat{z_z} = -Q - 0,00179 Q \sum_1^{\infty} n \zeta_1 \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \cdot J_0(\rho) + \rho J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (210)$$

$$\widehat{r_z} = -0,00179 Q \sum_1^{\infty} n \zeta_1 \left[\rho \cdot J_0(\rho) - \frac{\alpha J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}. \quad (211)$$

Из удобств подсчета полученные формулы преобразуем следующим образом (подобные преобразования необходимо сделать и в выражениях для $\widehat{r_r}$ и $\widehat{\theta\theta}$):

$$\widehat{z_z} = -Q - 0,00179 Q \sum_1^{\infty} n \zeta_1 J_1 \left[\left(2 - \frac{\alpha J_0}{J_1}\right) \frac{J_0(\rho)}{J_1} + \rho \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \quad (212)$$

$$\widehat{r_z} = -0,00179 Q \sum_1^{\infty} n \zeta_1 J_1 \left[\rho \frac{J_0(\rho)}{J_1} - \frac{\alpha J_0}{J_1} \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \sin \frac{n\pi z}{c}, \quad (213)$$

где

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1}\right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin 0,075n\pi}{0,075n\pi}, \quad (214)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c} \quad (215)$$

$$\alpha = \frac{n\pi a}{c} = 3n. \quad (215)$$

Подставляя те же значения $\frac{e}{a}$ и $\frac{e}{c}$ в формулы (200—203) для напряжений $\widehat{r_r}$, $\widehat{z_z}$, $\widehat{\theta\theta}$ и $\widehat{r_z}$, мы получим их в следующем виде:

$$\widehat{r_r} = -\frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 \left[\left(1 + 3n \frac{J_0}{J_1}\right) J_0(\rho) - \left(\rho + \frac{5}{3\rho} + \frac{3nJ_0}{\rho J_1}\right) J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}, \quad (216)$$

$$\widehat{zz} = -Q - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 \left[\left(2 - 3n \frac{J_0}{J_1} \right) J_0(\rho) + \rho \cdot J_1(\rho) \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (217)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 \left[-\frac{2}{3} J_0(\rho) + \left(\frac{5}{3} + 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{\rho} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (218)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 \left[\rho J_0(\rho) - 3n \frac{J_0}{J_1} J_1(\rho) \right] \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad (219)$$

где:

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1} - 1} \frac{\sin 0,075n}{0,075n}; \quad (213)$$

$$\rho = \frac{n\pi r}{c} \quad (218)$$

и

$$\alpha = 3n. \quad (214)$$

Преобразовывая аналогично формулам (212) и (213), будем иметь:

$$\widehat{rr} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 J_1 \left[\left(1 + 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_0(\rho)}{J_1} - \left(\rho + \frac{5}{3\rho} + \frac{3n}{\rho} \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \cos \frac{n\pi z}{c_1} \right\}; \quad (220)$$

$$\widehat{zz} = -Q - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 J_1 \left[\left(2 - 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_0(\rho)}{J_1} + \rho \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (221)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 J_1 \left[-\frac{2}{3} \frac{J_0(\rho)}{J_1} + \left(\frac{5}{3} + 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (222)$$

$$\widehat{rr} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 3,6n \zeta_1 J_1 \left[\rho \frac{J_0(\rho)}{J_1} - 3n \frac{J_0}{J_1} \frac{J_1(\rho)}{J_1} \right] \sin \frac{n\pi z}{c} . \quad (223)$$

§ 13. Принимая во внимание уравнение (132) и делая соответствующую подстановку в выражениях, стоящих под знаком \sum , мы получим следующие выражения для напряжений:

$$\widehat{rr} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} 48 \frac{\left(1 + 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_0(\rho)}{J_1} - \left(\rho + \frac{5}{3\rho} + \frac{3n}{\rho} \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_0(\rho)}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \cdot \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (224)$$

$$\widehat{zz} = -Q - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 48 \frac{\left(2 - 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_0(\rho)}{J_1} + \rho \frac{J_1(\rho)}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (225)$$

$$\widehat{\theta\theta} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} 48 \frac{\left(\frac{5}{3} + 3n \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{J_1(\rho)}{J_1} - \frac{2}{3} \frac{J_0(\rho)}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}; \quad (226)$$

$$\widehat{rz} = - \frac{Q}{14 \left(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 \right)} \sum_1^{\infty} 48 \frac{\rho \frac{J_0(\rho)}{J_1} - 3n \frac{J_0}{J_1} \frac{J_1(\rho)}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cdot \sin \frac{n\pi z}{c} . \quad (227)$$

На основании полученных нами формул (224—227) построим графики распределения напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} в различных поперечных сечениях колонны, стянутой упругими хомутами при указанных отношениях:

$$\frac{e}{a} = \frac{1}{40}, \quad \frac{e}{a} = \frac{3}{40\pi} = 0,023873 \quad [204-205]$$

и, следовательно,

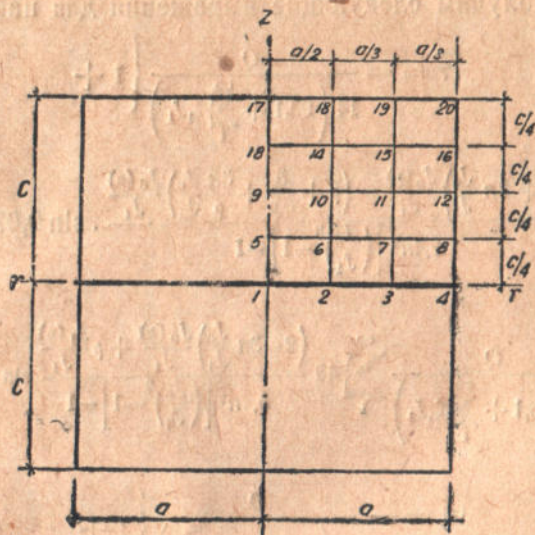
$$\frac{a}{c} = 0,95493. \quad (227)$$

Для построения графиков вычислим величины напряжений \widehat{rr} , \widehat{zz} , $\widehat{\theta\theta}$ и \widehat{rz} в точках 1, 2, 3, ... 20 (фиг. 6) с координатами:

$$z = 0, \frac{c}{4}, \frac{c}{2}, \frac{3c}{4} \text{ и } c \quad (228-232)$$

и

$$r = 0, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3} \text{ и } a. \quad (233-236)$$



Фиг. 6

Для точек, лежащих на поверхности колонны, мы получим:

$$\widehat{rr}_{r=a} = 0; \quad (237)$$

$$\widehat{zz}_{r=a} = -Q -$$

$$-\frac{24Q}{7(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1)} \sum_1^{\infty} \frac{2 \frac{J_0}{J_1} - 3n \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right]}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cdot \cos \frac{n\pi z}{c}; \quad (238)$$

$$\widehat{\theta\theta}_{r=a} =$$

$$= -\frac{Q}{14(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1)} \left| 1 + 16 \sum_1^{\infty} \frac{\frac{5}{3n} + \frac{J_0}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cdot \cos \frac{n\pi z}{c} \right|; \quad (239)$$

$$\widehat{rz}_{r=a} = 0, \quad (240)$$

$$\zeta_1 J_1 = \frac{1}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin 0,075n}{0,075n}. \quad (213)$$

При вычислении выражения:

$$\sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin 0,075n}{0,075n}, \quad (241)$$

а также величин напряжений $\widehat{z z}_{r=a}$ (238) и $\widehat{\theta \theta}_{r=a}$ (239), вследствие отсутствия достаточного числа табличных данных для функций Бесселя J_0 и J_1 , оказывается необходимым представить их в виде рядов.

Функции Бесселя чисто мнимого аргумента с индексами: 0 и 1 могут быть выражены в виде асимптотических рядов следующим образом:

$$J_0 = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(1 + \frac{1}{8\alpha} + \frac{9}{128\alpha^2} + \frac{75}{1024\alpha^3} + \frac{3675}{32768\alpha^4} + \frac{59535}{262144\alpha^5} + \dots \right), \quad (242)$$

$$J_1 = \frac{e^\alpha}{\sqrt{2\pi\alpha}} \left(1 - \frac{3}{8\alpha} - \frac{15}{128\alpha^2} - \frac{105}{1024\alpha^3} - \frac{4725}{32768\alpha^4} - \frac{72765}{262144\alpha^5} - \dots \right) \quad (243)$$

и, следовательно,

$$\frac{J_0}{J_1} = 1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{3}{8\alpha^2} + \frac{3}{8\alpha^3} + \frac{63}{128\alpha^4} + \frac{27}{32\alpha^5} + \dots \quad (244)$$

Тогда выражение (241) мы сможем представить в виде двух сумм, из которых первая вычисляется на основании табличных данных для J_0 и J_1 , вторая же непосредственным путем:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1 &= \sum_1^5 \frac{1}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \frac{\sin 0,075n}{0,075n} + \\ &+ \frac{25}{27} \sum_6^{\infty} \left(8 + \frac{16}{9n} - \frac{49}{81n^2} - \frac{584}{729n^3} - \frac{46633}{104976n^4} - \dots \right) \frac{\sin 0,075n}{n^2}. \quad (245) \end{aligned}$$

Аналогичным образом мы получим следующие выражения для напряжений $\widehat{z z}_{r=a}$ и $\widehat{\theta \theta}_{r=a}$:

$$\begin{aligned} \widehat{z z}_{r=a} &= -Q - \frac{24Q}{7(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1)} \left[\sum_1^5 2 \frac{J_0}{J_1} - 3n \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] \right] \frac{\sin 0,075nc \cos \frac{n\pi z}{c}}{c} + \\ &+ \frac{5}{9} \sum_6^{\infty} \left(1 + \frac{2}{9n} - \frac{19}{162n^2} - \frac{100}{729n^3} - \frac{2015}{26244n^4} - \dots \right) \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c}. \quad (246) \end{aligned}$$

$$\widehat{\theta\theta}_{r=a} =$$

$$= - \frac{Q}{14(96,1 + \sum_1^{\infty} \zeta_1 J_1)} \left\{ 1 + 16 \sum_1^5 \frac{\frac{5}{3n} + \frac{J_0}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c} + \right. \\ \left. + \frac{80}{9} \sum_6^{\infty} \left(1 + \frac{37}{18n} + \frac{121}{324n^2} - \frac{2515}{11664n^3} - \frac{12235}{52488n^4} - \dots \right) \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c} \right\}. \quad (247)$$

§ 14*. При определении напряжений в цилиндре \widehat{zz} и $\widehat{\theta\theta}$ необходимо просуммировать ряды для \widehat{zz} (246)

$$\sum_1^5 \frac{2 \frac{J_0}{J_1} - 3n \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right]}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c} + \\ + \frac{5}{9} \sum_6^{\infty} \left(1 + \frac{2}{9n} - \frac{19}{162n^2} - \frac{100}{729n^3} - \frac{2015}{26244n^4} - \dots \right) \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c}$$

и для $\widehat{\theta\theta}$ (247)

$$\sum_1^5 \frac{\frac{5}{3n} + \frac{J_0}{J_1}}{5,4n^2 \left[\left(\frac{J_0}{J_1} \right)^2 - 1 \right] - 1} \sin 0,075n \cos \frac{n\pi z}{c} + \\ + \frac{80}{9} \sum_6^{\infty} \left(1 + \frac{87}{18n} + \frac{121}{324n^2} - \frac{2516}{11664n^3} - \dots \right) \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c}.$$

Первая часть каждого ряда \sum_1^5 вычисляется непосредственно, причем цилиндрические функции J_0 и J_1 можно взять из таблиц специальных функций¹.

Вторую часть суммы (246) представим в таком виде:

$$\frac{5}{9} \sum_6^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c} + \frac{2}{9} \sum_6^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{c} - \\ - \frac{19}{162} \sum_6^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{c} - \frac{100}{729} \sum_6^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n^4} \cos \frac{n\pi z}{c}. \quad (248)$$

* Настоящий параграф написан и все вычисления проведены младшим научным сотрудником УНИИС'а К. М. Воловельским.

¹ Я. Н. Шпильрейн. Таблицы специальных функций, ч. I, ГТТИ, 1933.

Каждую сумму вычисляем в отдельности.

Путем дифференцирования уравнения изогнутой оси балки, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки, представленной в тригонометрическом виде в виде ряда Фурье, можно получить следующие значения сумм:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n} \cos \frac{n\pi z}{c} \left| \begin{array}{l} = \frac{\pi}{2} - \frac{0,075}{2} \text{ для } z=0, \\ = -\frac{0,075}{2} \text{ для } z>c, \end{array} \right. \quad (249-250)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n^3} \cos \frac{n\pi z}{c} \left| \begin{array}{l} = -\frac{\pi^3}{12} \left(1 - \frac{C_1}{e}\right) \left[\left(1 - \frac{C_1}{e}\right)^2 - 1\right] \text{ для } z=0, \\ = \frac{\pi^3}{12} \frac{C_1}{e} \left[1 - \left(\frac{C_1}{e}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{z}{e}\right)^2\right] \text{ для } z>c, \end{array} \right. \quad (251-252)$$

где

$$\frac{C_1}{e} = \frac{0,075}{\pi}. \quad (253)$$

Вычитая из обеих частей полученных равенств значения первых пяти членов, находим необходимые нам значения рядов (249—252) от 6 до ∞ .

Остальные две суммы ряда (248), а именно:

$$\text{a) } \frac{2}{9} \sum_6^{\infty} \frac{\sin 0,075}{n^2} \cos \frac{n\pi z}{c} \text{ и б) } \frac{100}{729} \sum_0^{\infty} \frac{\sin 0,075n}{n^4} \cos \frac{n\pi z}{c} \quad (254-255)$$

можно вычислить с помощью интегральных функций.

Первые члены до $n=12$ вычислялись непосредственно, а с 12 до ∞ суммы были заменены интегральным синусом, т. е. выражением

$$\text{si } x = -\int_x^{\infty} \frac{\sin u}{u} du. \quad (256)$$

Так как наша сумма представляет собой выражение, в которое входит произведение синуса на косинус, то предварительно преобразовываем в сумму двух синусов по формуле

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]. \quad (257)$$

Тогда у нас будут интегралы вида:

$$\int_{12}^{\infty} \frac{\sin\left(0,075x + \frac{x\pi z}{c}\right)}{x^2} dx \text{ и } \int_{12}^{\infty} \frac{\sin\left(0,075x - \frac{x\pi z}{c}\right)}{x^2} dx, \quad (258-259)$$

которые после замены переменных и интегрирования по частям сводятся к интегралу вида (256), находящемуся уже непосредственно из таблиц¹.

¹ Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций, ч. I, ГТИ, 1933

Аналогично было проделано и для вычисления сумм, определяющих напряжения $\widehat{\theta\theta}$.

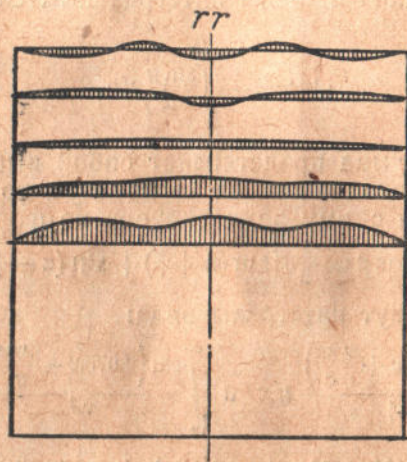
Определение напряжений \widehat{rr} и \widehat{rz} сводится к составлению вспомогательных таблиц для вычисления коэффициентов цилиндрических функций для заданных ρ от 0 и до 15 (в зависимости от быстроты сходимости), после чего легко и получались значения напряжений для $z=0$.

Для других же значений z , т. е. $z = \frac{1}{2}c, z = \frac{3}{4}c, z = c$, необходимо эти коэффициенты умножить соответственно на $\cos \frac{\pi z}{c}$ для \widehat{rr} и $\sin \frac{\pi z}{c}$ для напряжения \widehat{rz} . Все значения напряжений для различных z сведены в таблицы 1—4.

Напряжения \widehat{rr}

Таблица 1

$r \backslash z$	0	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{3}{4}c$	c
0	-0,0026318Q	-0,0019139Q	-0,00053702Q	+0,00046089Q	+0,00078972Q
$\frac{a}{3}$	-0,0018141Q	-0,0012956Q	-0,00054356Q	-0,00015566Q	-0,000039387Q
$\frac{2}{3}a$	-0,0024926Q	-0,0011353Q	-0,00018585Q	-0,000020751Q	+0,0000067729Q
a	0	0	0	0	0



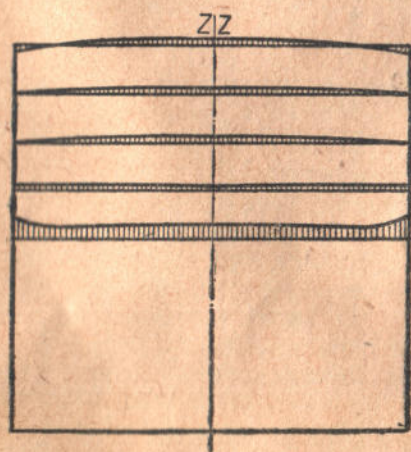
Фиг. 7

Напряжения \widehat{zz}

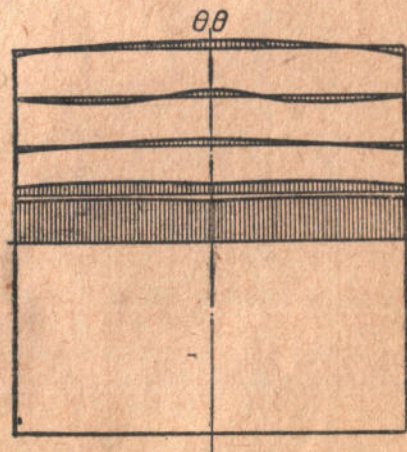
$r \backslash z$	0	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{3}{4}c$	c
0	-1,0126Q	-0,99839Q	-1,0007Q	-1,00072Q	-1,00067Q
$\frac{a}{3}$	-1,0129Q	-0,99844Q	-1,0008Q	-1,00070Q	-1,00058Q
$\frac{2}{3}a$	-1,0124Q	-0,99893Q	-1,00084Q	-1,00040Q	-1,00024Q
a	-1,0210Q	-0,99603Q	-1,00057Q	-1,00002Q	-0,99892Q

Напряжения $\widehat{\theta\theta}$

$r \backslash z$	0	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{3}{4}c$	c
0	-0,45438Q	-0,10851Q	-0,012836Q	-0,0067146Q	-0,018793Q
$\frac{a}{3}$	-0,47350Q	-0,11991Q	-0,010555Q	+0,0047614Q	-0,0043812Q
$\frac{2}{3}a$	-0,48291Q	-0,11205Q	-0,0091542Q	+0,0077028Q	-0,0046540Q
a	-0,46312Q	-0,098129Q	+0,00051695Q	+0,0063094Q	+0,0030883Q



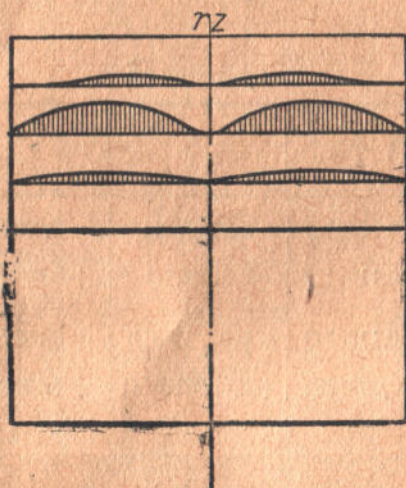
Фиг. 8



Фиг. 9

Напряжения r_z

$r \backslash z$	0	$\frac{c}{4}$	$\frac{c}{2}$	$\frac{3}{4}$	c
0	0	0	0	0	0
$\frac{a}{3}$	0	+0,000085690Q	+0,00026472Q	+0,000084292Q	0
$\frac{2}{3}a$	0	+0,00085158Q	+0,00028182Q	+0,000010734Q	0
a	0	0	0	0	0



Фиг. 10

ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУНТОВ

Основной целью настоящей работы была попытка наметить пути для исследования комплекса явлений, действующих и развивающихся в ламинарных промежутках между зернами грунта.

Постановка этого вопроса в таком разрезе была вызвана теми соображениями, что только глубокий анализ этих явлений может содействовать выявлению сущности гидромеханических характеристик грунтов, являющихся критерием для суждений об их качествах при использовании в виде естественного основания под фундаментами сооружений.

Общая установка относительно грунтов

В настоящей работе принято за основу следующее положение:

Всякий грунт является системой трех фаз: твердой, жидкой и газообразной, т. е. системой, представляющей предмет изучения коллоидной химии. Поэтому применяем к ней основное уравнение энергетики:

$$\frac{\epsilon}{v} = \frac{\epsilon_v}{v} + W \frac{s}{v}, \quad (1)$$

где ϵ — полная энергия системы, отнесенная к элементарному объему;

ϵ_v — объемная энергия, отнесенная к тому же объему, сюда относится энергия, проявляемая силовыми воздействиями веса грунта, тепловая энергия и др;

W — поверхностная энергия, отнесенная к единице поверхности твердой фазы (энергия раздела фаз), как-то: поверхностные натяжения жидкой фазы, сорбционные явления, энергия сцепления части и т. д.

Энергия поверхностного натяжения жидкой фазы, зависящая от величины менисков воды между частицами твердой фазы, т. е. степени заполнения ее пор (влажность грунта), довольно значительна и удерживает частицы грунта во взаимной связи, что наблюдается в сильно дисперсных грунтах, например, в глинах.

Энергия сцепления частиц грунта в сухом состоянии еще более значительна. Ясно, что величина второго слагаемого урав-

нения тем больше, чем дисперснее грунт; $\frac{S}{v}$ — суммарная поверхность твердой фазы, характеризующая степень дисперсности частиц.

Для глин суммарная поверхность грунта $1 \frac{S}{v}$ — порядка 29 000—42 000 $см^2$ в 1 $см^3$ грунта, т. е. равновелика поверхности шара диаметром 96—117 $см$, для лессовых суглинков Украины она равновелика поверхности шара с диаметром $D=68—84$ $см$. Нормальные лессы обычно дают для D величины еще меньшие. Наименее дисперсными грунтами являются пески.

Величина суммарной поверхности грунтов определяется по формуле

$$\frac{S}{v} = 6(1-p) \left[\frac{g_1}{d_1} + \frac{g_2}{d_2} + \frac{g_3}{d_3} \right], \quad (2)^*$$

где p — пористость грунта в долях от единицы;

g_i — отношение веса фракции ко всему комплексу фракций грунта;

d_i — средний диаметр зерна фракции.

Если суммарную поверхность относить не к единице объема, а к одному грамму грунта, тогда:

$$\frac{S}{g} = \frac{6(1-p)}{\Delta} \left[\frac{g_1}{d_1} + \frac{g_2}{d_2} + \frac{g_3}{d_3} + \dots \right], \quad (3)$$

где Δ — удельный вес твердой фазы грунта; для лессовидных суглинков $\Delta \cong 2,65$.

Цункер называет величину $\frac{S}{v}$, отнесенную к 1 $см^3$ грунта, суммарной поверхностью для 1 $см^3$ грунта, а величину в скобках $\left[\frac{g_1}{d_1} + \frac{g_2}{d_2} + \frac{g_3}{d_3} + \dots \right]^*$ — удельной поверхностью и обозначает через u .

Тогда

$$U = g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 + \dots + g_i u_i \neq \sum g_i u_i,$$

где U — удельные поверхности отдельных фракций.

¹ Она зависит в большой степени от пористости грунта, а следовательно, и от состояния его влажности.

* Вывод формулы (2): Пусть средний диаметр частицы = d . Тогда число n частиц в объеме v $U = \frac{v}{\frac{1}{6} \pi d^3} = \frac{6v(1-p)}{\pi d^3}$; поверхность одной частицы = πd^2 ,

тогда: $\frac{S}{v} = \frac{\pi d^2}{v} \cdot \frac{6v(1-p)}{\pi d^3} = \frac{6(1-p)}{d}$. Отсюда можно вывести формулу (2), принимая с некоторым приближением условие, что удельный вес твердой фазы всех фракций одинаков.

² Диаметры частиц им берутся в $мм$; в случае определения суммарной поверхности, отнесенной к 1 $см^3$ по формуле (2), нужно в нее вводить множитель $\gamma=10$ для перехода от $мм$ к $см$.

Величину $\frac{1}{U}$ Цункер называет диаметром действующего зерна грунта.

Величина U хорошо характеризует степень дисперсности грунта, а величины $6(1-p)$ или $6\frac{1-p}{\Delta}$ характеризуют пористость и, до некоторой степени, структурность грунта.

Удельные поверхности по номенклатуре Цункера для украинских лессов и лессовидных суглинков представляют величины порядка 290—530, глины дают величины от 600 до 1000 и более.

Не следует забывать, что при вычислении удельных поверхностей наибольшие трудности возникают в определении величин среднего диаметра зерна фракции d_{cp} , которые можно определить по формулам:

$$d_{cp} = \frac{d_{min} + d_{max}}{2},$$

или, исходя из принципа равенства удельных поверхностей частиц:

$$\frac{1}{d_{cp}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_{min}} + \frac{1}{d_{max}} \right)^*.$$

Вторая формула дает несколько преувеличенные значения по сравнению с первой.

В результате нашей проработки вопроса мы пришли к следующим выводам.

Точность определения удельной поверхности U для каждой фракции зависит от степени приближения законов изменения зерен фракции грунта к линейному закону, т. е. $\frac{\Delta g_i}{\Delta d_i} = \text{const}$, где Δg_i и Δd_i означают приращение величин g и d на бесконечно малом участке. Для песчаных и пылевых частиц грунтов этот закон вообще близок к линейному, для глинистых частиц имеются большие отклонения, в особенности для фракции 0,001—0, заключающей весь комплекс самых дисперсных элементов, вместе с коллоидной составляющей грунта. Практика показала, что пользование вышеприведенными формулами для удельных и суммарных поверхностей не дает больших погрешностей, так как и на этом участке величина среднего диаметра обычно близка к величине

$$d_{cp} = \frac{d_{max} + d_{min}}{2},$$

где d_{min} принимается = 0.

* Эта формула не применима для последней, наиболее дисперсной, фракции грунта.

В настоящей главе мы делаем попытку создания новых предпосылок для грунтов на базе молекулярной физики, которые давали бы возможность учета величины внутренних силовых воздействий, возникающих между частицами грунта в процессе его увлажнения и высыхания, ограничиваясь пока случаем отсутствия внешних сил, действующих на грунт.

В качестве основных предпосылок нами приняты следующие положения:

1. Грунт представляет сочетание частиц правильной шарообразной формы с диаметром, равным диаметру действующего зерна (по терминологии Цункера), величина которого, как указано выше, определяется по формуле:

$$d = \frac{1}{U}; U = \sum \frac{n_i}{d_i},$$

где U — удельная поверхность грунта,

d_i — средние диаметры фракций,

n_i — весовое содержание фракций по отношению к грунту.

2. Все эти шарообразные зерна считаем расположенными по определенной системе группировки, удовлетворяющей условиям равенства пористости этой системы — пористости грунта в каждый момент рассмотрения происходящих в нем процессов, как увлажнения, так и высушивания.

Отсюда следует, что означенная схема группировки должна давать однозначные решения для пористости грунта в зависимости от других физических его показателей.

3. Частицы грунта в пределах рассматриваемых процессов никогда не находятся в соприкосновении друг с другом, а везде имеют между собой просветы. Такое предположение, вполне соответствующее современным установкам физики, все же ограничивается в выведенных нами ниже формулах пределами принимаемых точностей, как расчетных, так и данных опыта. Поэтому, при наличии просветов между зернами очень малых размеров, выходящих за пределы точности расчетов и данных опытов, величина просветов принимается условно = 0.

4. Процесс постепенного размачивания грунтов — вплоть до суспензии и обратного их высушивания принимается происходящим таким образом, что в каждый наблюдаемый момент данный грунт находится в состоянии влажности, равномерно распределенной по всему рассматриваемому объему. В точности такого условия в природе не наблюдается, но с достаточной степенью приближения, физически, оно соответствует случаю очень тонкой пластинки грунта, насыщаемой влагой по всей ее поверхности, при условии наблюдения влажности ее в каждом случае по истечении некоторого времени после выключения действия источника увлажнения, что дает возможность некоторого выравнивания степени влажности по ее объему. Более точно это

соответствует случаю очень большого массива грунта, при условии рассмотрения элементарного объема его, значительно удаленного от источника возникновения влажности.

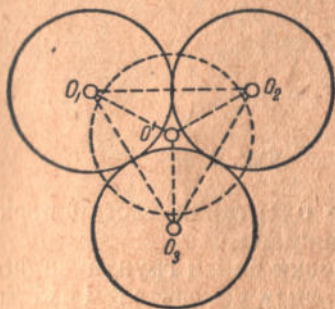
За исходную базу для установления системы расположения действующих зерен грунта принимаем условно случай полного их соприкосновения.

Для шаров имеем 3 основных системы группировки:

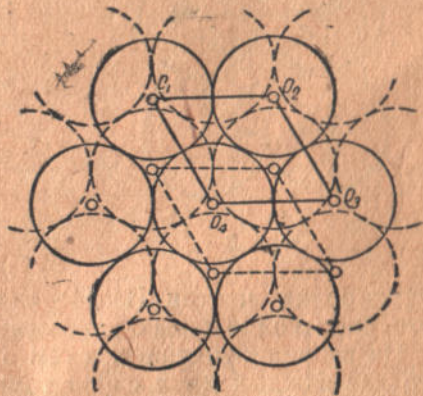
А. Гексагональная система

За основу здесь принимается группировка из 4 шаров с центрами, находящимися в вершинах тетраэдра $O_1O_2O_3O'$.

Выделенная нами система принадлежит двум слоям шаров: нижнему и верхнему, не-



Фиг. 1



Фиг. 2

посредственно расположенным один над другим, причем в нижний слой входят 3 шара и в верхний один (Фиг. 1).

На фиг. 2 указана схема системы взаимного перекрытия одного слоя зерен грунта другим¹.

Б. Центрированно-кубическая или октаэдрическая группировка

За основу здесь принимается группировка из 5 шаров с центрами, находящимися в вершинах квадратной пирамиды $O_1O_2O_3O_4O'$ (Фиг. 3), имеющей основанием квадрат (две таких пирамиды, имеющих общее основание, дают октаэдр).

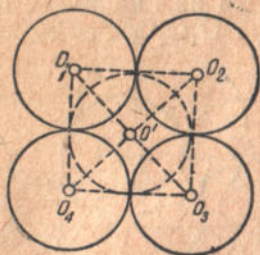
На фиг. 4 указана схема системы взаимного перекрытия одного слоя зерен грунта другим для этой группировки частиц.

¹ Эта схема может иметь вариант перекрытия слоев, когда каждый верхний шар покрывает каждый нижний, а не находится в промежутке между ними.

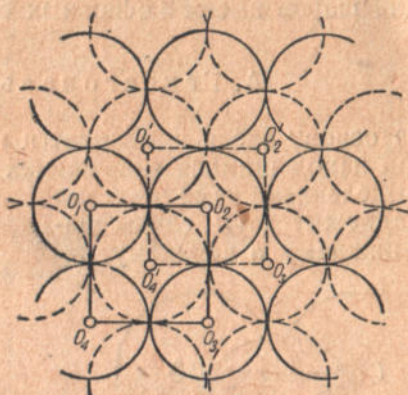
В. Кубическая группировка

За основу этой группировки принимается 4 шара с центрами $O_1O_2O_3O_4$ в плоскости чертежа и 4 шара с центрами $O'_1O'_2O'_3O'_4$, непосредственно лежащими выше чертежа, всего 8 шаров; центры их находятся в вершинах куба (фиг. 5).

На фиг. 6 указана схема системы взаимного перекрытия одного слоя другим для этой



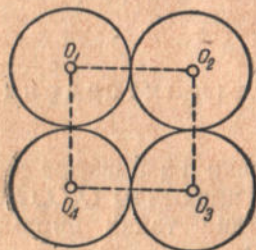
Фиг. 3



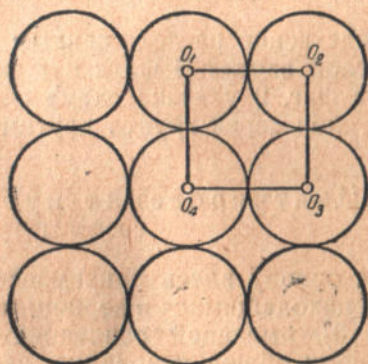
Фиг. 4

группировки частиц. Из нее видно, что очертания частиц верхнего слоя совмещены с таковыми для нижнего слоя.

Из вышеприведенных схем группировки зерен грунта видно, что для каждого двух слоев грунта основным показателем взаимного расположения зерен и их система является сдвоенная фигура ромба или квадрата, в частном случае кубической группировки—совмещенный квадрат.



Фиг. 5



Фиг. 6.

Отсюда следует, что каждая система группировки зерен грунта может быть преобразована в другую путем соответствующих взаимных тангенциальных перемещений зерен и перемещением одного слоя зерен по другому или этими двумя перемещениями совместно, т. е. переход от одной

системы к другой связан с вращательными движениями одних зерен относительно других и поступательными движениями одного слоя по другому.

Если теперь обратиться к радиальным перемещениям, то вполне ясно, что последние не меняют системы группировки, а только изменяют степень ее пористости; это наглядно вытекает из рассмотрения ниже приведенных фигур 7 и 8.

Если теперь принять во внимание, что в рассматриваемых явлениях (увлажнения и высушивания грунтов) единственной причиной, вызывающей изменение объема грунта, а следовательно, пористости его, является изменение степени влажности, то, согласно принятому нами условию (4) и основам теории упругости, можно считать, что возможность возникновения в данных условиях тангенциальных перемещений между частицами и взаимных сдвигов слоев исключается, а потому остаются единственно возможными радиальные перемещения частиц грунта.

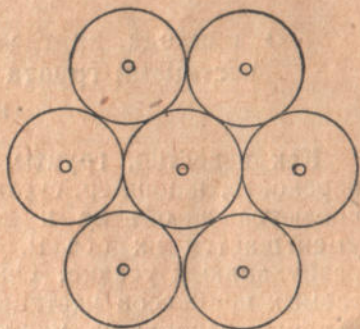
Отсюда, как следствие, вытекает неизменность системы группировки частиц грунта на протяжении всего процесса увлажнения и высыхания его при условиях, принятых выше.

При постановке опытов трудно создать условия такого процесса от сухого грунта до полного разжижения—до суспензии, поэтому его приходится изучать отдельными этапами, причем, конечно, возможны различные

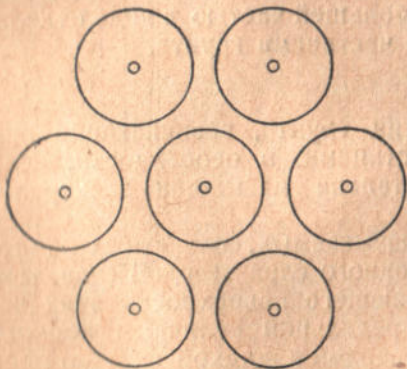
начальные условия или различные системы группировки частиц.

Рассмотренная выше схема процесса аналогична процессу постепенного равномерного нагревания или охлаждения очень тонких пластинок из материала, обладающего большой теплопроводностью, например, металлических; при этом будут наблюдаться только одни радиальные перемещения частиц, вызывающие изменение объема пластинок.

Возвращаясь к рассмотренным системам группировки частиц, из всего сказанного выше можно заключить, что по существу каждая система является начальным условием процесса; под



Фиг. 7



Фиг. 8

таким только углом зрения ее и можно рассматривать при изучении процессов, происходящих в грунтах.

О природе внутренних сил, действующих между частицами грунта в процессах его увлажнения и высыхания

Как известно, грунты, обладающие большой степенью дисперсности, например, суглинки и глины, при увлажнении увеличиваются в объеме и наоборот, с уменьшением влажности уменьшается их объем, или, как говорят, они подвергаются разбуханию и усадке. Очевидно, в каждый момент рассматриваемых процессов частицы грунта находятся в состоянии мгновенного равновесия между внутренними силами их взаимного притяжения и отталкивания.

1. Силы притяжения:

а) силы сцепления между частицами грунта, зависящие от характера касающихся поверхностей частиц и расстояния между ними, а также от тех ламинарных жидких или полужидких заполнителей, играющих роль цементирующего или склеивающего фактора;

б) силы капиллярного натяжения или, так называемые, менисковые силы воды, находящейся большей частью в виде отдельных распыленных капелек между частицами грунта.

2. Силы отталкивания:

а) электрические заряды частиц грунта, возникающие при наличии воды между этими частицами, в особенности, если эта вода в соответственной степени насыщена электролитами;

б) упругое сопротивление, так называемых, сольватных оболочек частиц грунта, т. е. адсорбционного слоя твердой (или, точнее, мезоморфной) воды, покрывающего поверхность этих частиц и нарастающего до своей предельной величины ионного насыщения поверхности раздела твердой и жидкой фаз, по мере увеличения менисков воды—в процессе постепенного увлажнения грунта;

в) силы набухания каких-либо веществ, обладающих этими способностями и находящихся в ламинарных просветах между частицами;

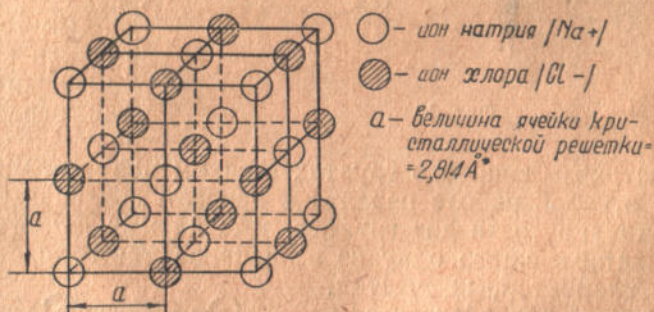
г) ионные силы отталкивания между частицами грунта; эти силы в рассматриваемых процессах не участвуют, так как могут проявляться лишь при воздействии внешних сил на совершенно высушенный грунт, так как требуют для своих проявлений очень тесного сближения частиц грунта.

Дав перечень всех внутренних межчастичных сил грунтов, рассмотрим теперь их природу более подробно.

Силы притяжения и отталкивания между частицами грунта (1а и 2г)

Всякий минерал, из которого состоят частицы грунта, представляет агрегат, образованный первичными элементами кристаллических тел, размеры которых определяются его кристаллической решеткой; эта последняя устанавливает также порядок и взаимное расположение атомов или ионов и расстояние между ними. Строение кристаллической решетки расшифровывается помощью рентгеновского анализа (метод Дебая, Лауэ и др.).

По существу, расположение атомов в кристаллической решетке напоминает расположение шаров в рассмотренных выше



Фиг. 9

схемах группировки, с расстояниями между атомами, во много раз превосходящими диаметр их; и здесь также не наблюдается плотного заполнения пространства со взаимным соприкосновением атомов.

Ввиду значительных просветов между атомами по отношению к их диаметрам, возможно размещение в этих просветах дополнительных атомов, причем образуются более или менее сложные варианты основных группировочных схем.

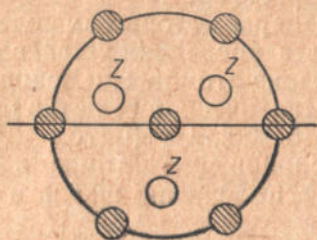
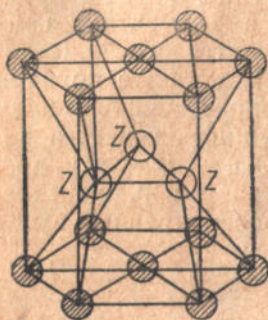
Как пример расположения атомов, соответствующий приведенной выше кубической группировке, даем схему расположения атомов (ионов) в кристаллической решетке каменной соли (фиг. 9).

В качестве примера расположения атомов (ионов), соответствующего схеме (фиг. 2), гексагональной системы приводим образец кристаллической решетки магния в пространственном изображении (фиг. 10).

Как видим, схема расположения атомов в кристаллической решетке полностью совпадает с приведенной выше схемой (фиг. 2) взаимного перекрытия слоев зерен при гексагональной группировке.

В качестве примера, иллюстрирующего нашу третью схему группировки зерен (центрированно-кубическую) приводим расположение атомов в кристаллической решетке хлористого цезия

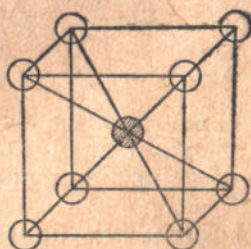
(фиг. 11). Из рассмотрения этой пространственной схемы группировки атомов видно, что она в точности соответствует приведенной выше схеме группировки частиц грунта (фиг. 3 и 4).



Фиг. 10

Из всего сказанного видно, что, рассматривая грунты как некоторые схемы группировки зерен, мы, по существу, следовали схемам группировки атомов в кристаллических решетках твердых тел, только заменили атомы укрупненными частицами, зернами грунтов.

Рассматривая вопрос о грунтах в таком разрезе, мы должны были бы в своей работе перейти к основам создания начал новой теории упругости для грунтов, уже не изотропного тела, а тела, представляющего одну из вышеприведенных систем группировки элементарных частиц, подверженного воздействию сил, вызывающих радиальные и тангенциальные перемещения этих частиц. Как известно, теория упругости, основанная на предположении изотропного тела, дает для случая твердого тела в пределах упругих деформаций результаты, подтверждаемые опытом. Поэтому, ввиду полной аналогии группировочных схем, можно считать, что эта теория должна быть относительно справедливой и для многих явлений в грунтах, что неоднократно подтверждалось опытом. Поэтому наше предположение о неизменности группировочных схем в упрощенных процессах увлажнения и высыхания грунтов можно считать имеющим под собой логическую базу.



○ — CS
 ● — CL

Фиг. 11

Основные очертания элементарных ячеек пространственных решеток твердых тел

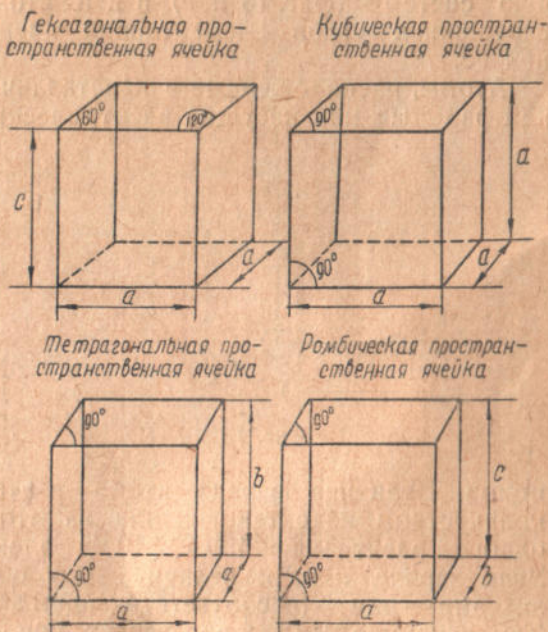
За основу измерений ячеек, образованных зернами грунта, в соответствии с нашими установками относительно схем взаимного перекрытия слоев зерен (см. фиг. 2, 4), принимаем призматические ячейки, имеющие основаниями квадраты и ромбы, обозначенные на наших схемах буквами O_1, O_2, O_3, O_4 ; высоты этих

ицек равны расстоянию между идентичными слоями зерен. Ниже изображены ячейки твердых тел, построенных на кристаллографических осях.

Если в кубической системе величины расстояний между атомами как в направлении рядов, так и между рядами равны друг другу, то давая последней величине несколько другое значение, получаем, так называемую тетрагональную систему решетки, а при различных значениях просветов по всем трем направлениям получаем ромбическую систему. Все эти системы показаны на фиг. 12.

Ниже нами приводится таблица 1 размеров кристаллической решетки некоторых минералов.

Из рассмотрения таблицы 1 видно, что размеры основной ячейки решетки варьируют в пределах $5,63 \text{ \AA}$ (каменная соль) до $20,05 \text{ \AA}$ (слюда); в среднем для минералов эта величина порядка $5-6 \text{ \AA}$.



Фиг. 12

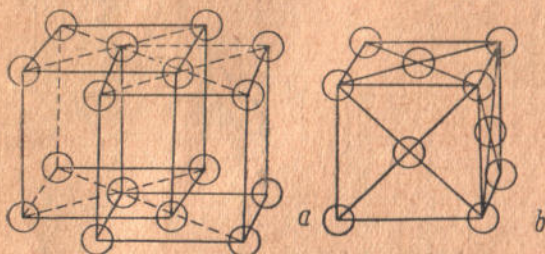
Таблица 1

Минералы	Кристаллическая система	Длина осей ячеек в \AA		
		a	b	c
Плавленый шпат	Куб. решетка	5,46	5,46	5,46
Пирит	Куб. центрир.	5,38	5,38	5,38
Известковый шпат	Ромбическая	6,36	$a=46^{\circ}6'$	$p=0,25$
Доломит	—	6,02	—	—
Магнезит	Ромбоэдрич.	5,61	$a=48^{\circ}12'$	—
Кварц	—	4,89	—	5,38
Каменная соль	Кубич	5,63	5,63	5,63
Слюда	Моноклин.	5,17	8,96	$\beta=84^{\circ}10'$

Выше нами были рассмотрены основные пространственные ячейки, их размеры и тип пространственно-центрированной системы; перейдем теперь к понятию „граде-центрированной“ системы. Она получается очень просто: в системе перекрытия

слоев для центрированной кубической группировки (фиг. 4), строим две взаимно входящие друг в друга ячейки — на квадратах $O_1 O_2 O_3 O_4$ и $O'_1 O'_2 O'_3 O'_4$ имеем схему, изображенную ниже. Обобщая полученную систему для верхних и нижних граней на боковые грани (фиг. 3), получим типичную гранецентрированную систему (фиг. 13 *a, b*), в ней атомы находятся не только в вершинах углов элементарной ячейки, но и в центрах граней ее.

Атомы, расположенные в кристаллических решетках, бывают нейтральные или несущие электрический заряд, который вызывается наличием приобретенных (захваченных атомами) электронов или потерявшими некоторое количество таких; в первом случае они имеют отрицательный заряд, во втором — положительный. При наличии электрического заряда, атомы носят название



Фиг. 13

ионов. Величина заряда атома в этом случае определяется количеством недостающих или избыточных электронов. Заряд одного электрона $= 4,774 \times 10^{-10}$ электростатических единиц. Знак заряда иона и величина его обыкновенно обозначается знаками — или $+$ (в соответствующем заряду количестве знаков). Так, например: Mn^{+++} обозначает ион Mn (катион Mn) с тремя положительными электрическими зарядами; Cl^- — ион Cl (анион Cl) с одним отрицательным зарядом.

Система кристаллической решетки, заполненной ионами, называется гетерополярной. Ионы в кристаллической решетке, находясь под взаимным воздействием электрических сил притяжения и отталкивания, образуют системы устойчивого равновесия.

Обыкновенно для означенного условия они располагаются, в зависимости от знака, в шахматном порядке, как это видно на фиг. 9 кристаллической решетки каменной соли.

В случае кристаллической решетки, составленной из нейтральных атомов (гемеополярной), последние все же находятся под силовым воздействием друг на друга, так как, несмотря на равенство зарядов ядра и электронной оболочки, последняя не полностью экранирует действие ядра и внешние воздействия означенной системы все же проявляются, правда, с меньшим районом действия (электростатические воздействия таких элементов, созданных из двух взаимовоздействующих друг на друга атомов, уже не носят характер диполя, а приближаются к квадруполью, октополью и т. д.).

На основании сказанного выше следует, что линейные размеры и очертания ячеек кристаллической решетки являются след-

ствием условий взаимного равновесия системы под влиянием внутренних силовых воздействий между ионами. Конечно, характер системы и размеры ячеек зависят еще от того количества энергии, или силовых воздействий, которые сообщаются этой системе извне (например, тепловая энергия, действие внешних сил и т. д.), так, если на твердое тело подействуют некоторые внешние силы, то имеющееся равновесие будет нарушено и начнется деформация кристаллической решетки, причем в ней проявятся реактивные сопротивления действующим силам.

Из сказанного ясно, что основным вопросом в этой области было выявление характера функциональной зависимости между линейными размерами межионных расстояний, величиной внутренних силовых воздействий между ними, и величиной их электрических зарядов.

Означенные зависимости выведены Борном и имеют вид:

$$F_{\text{притяж}} = \frac{e^2}{r^2},$$

где e — величина электрического заряда,

r — расстояние между ионами,

$F_{\text{притяж}}$ — сила притяжения между ионами;

$$F_{\text{отталкив}} = \beta \frac{e^2 a^8}{r^{10}},$$

где β и a — коэффициенты; для каменной соли: $\beta = 0,29$;

$$a = 2,8 \times 10^{-8} \text{ см};$$

e и r — имеют те же значения, что и для предыдущей формулы.

Силы отталкивания обуславливаются взаимным воздействием электронных оболочек атомов (ионов) и выявляются в случае значительного приближения таковых друг к другу.

Решая совместно два последних уравнения из условия их равенства, находим r_0 , характеризующее условие ионного равновесия кристаллической решетки.

Роговский дал графическое изображение этих зависимостей, приводимое нами ниже (фиг. 14).

Здесь на оси X -ов отложены расстояния между ионами, по оси — Y -ов внутренние межионные силы.

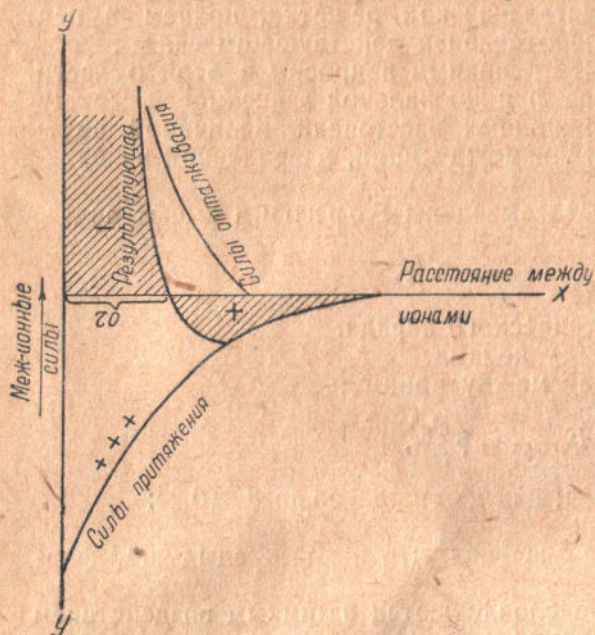
Очевидно, опытным путем почти невозможно выявить действительные величины значения сил притяжения и отталкивания, поэтому приходится иметь дело только с их алгебраической суммой или результирующей.

Обычно проводимые опыты над твердыми телами не подтверждают этой теоретической зависимости и расходятся в порядке нескольких степеней 10.

Академик Иоффе своими блестящими опытами над каменной солью показал значение состояния и обработки поверхности исследуемых образцов, где достаточно незначительных трещин на поверхности, чтобы совершенно изменить числовые величины

разрывающих усилий в несколько раз. Конечно, также большое значение в этом случае имеет и степень однородности структуры испытываемых образцов.

Академик Иоффе также установил, исследуя величины пробойного электрического напряжения на крайне тонких слоях стекла порядка меньших 500 μ , что для них эти величины пробойного напряжения близки к теоретическим, вычисленным Роговским.



Фиг. 14

Если теперь обратиться к грунтам, которые состоят из отдельных зерен минералов различной крупности, в свою очередь представляющих агрегаты из первичных кристаллов, в этом случае не может быть и речи о вовлечении в сферу ионного действия притяжения и отталкивания всех ионов, расположенных по поверхности этих частиц. Обычно такое вовлечение для двух рассматриваемых зерен возможно только для некоторой части их поверхностей (по поверхности их соприкосновения диаметром порядка

нескольких ячеек кристаллической решетки, а может быть десятков или сотен — в зависимости от характера очертания этих поверхностей соприкосновения). Под взаимным соприкосновением зерен мы здесь подразумеваем приближение их поверхностей на расстояние большее размеров ячеек их кристаллической решетки.

Если теперь эти силы рассматривать не только по отношению к двум выделенным зернам, а считать их отнесенными к 1 см^2 сечения грунта, перпендикулярному к направлению действующих внешних сил, то, очевидно, что чем грунт дисперснее, тем больший эффект ионных воздействий проявится на единице площади сечения (при всех равных прочих условиях). Также ясно, что грунт не может быть столь же крепким на разрыв и сжатие, как и та порода, из которой он произошел.

Из сказанного выше следует также, что для появления ионных воздействий между частицами грунта необходимо очень тесное приближение зерен его друг к другу. Если взять очень

дисперсный грунт в сухом порошкообразном состоянии и подвергнуть его сильному давлению с целью сближения его частиц, то в результате выявляются ионные воздействия кристаллических решеток поверхностей этих частиц в виде сцепления их, могущие сопротивляться разрывающим усилиям.

О твердой и мезоморфной воде

Всякая поверхность раздела двух фаз: твердой — жидкой, твердой — газообразной, обладая ионной активностью или „адсорбционной способностью“, создает на грани этого раздела адсорбционные слои двухмерных газов и двухмерной воды. Эти слои обладают несколько другими свойствами состояния материи, чем те, из которых они образовались, а именно: они приобретают по преимуществу свойства, присущие твердым телам, в них образуется кристаллическая решетка, т. е. сравнительно правильное размещение атомов или ионов по некоторой системе пространственных ячеек. Правда, такая структура этих слоев ограничивается обычно одним или несколькими молекулярными слоями. По мере удаления от поверхности раздела фаз эта упорядоченность взаимного расположения атомов (ионов) постепенно ослабевает, но все же еще на много молекулярных слоев распространяется некоторое подобие твердого состояния (такое явление особенно ярко выражено для воды). Это полутвердое — полужидкое состояние воды называется „мезоморфным“. В. О. Оствальд это состояние воды считает „не полужидким и не полутвердым, а на две трети жидким и на одну треть твердым“. Такие мезоморфные оболочки, обволакивающие зерна грунта, называются обычно „сольватными“ оболочками.

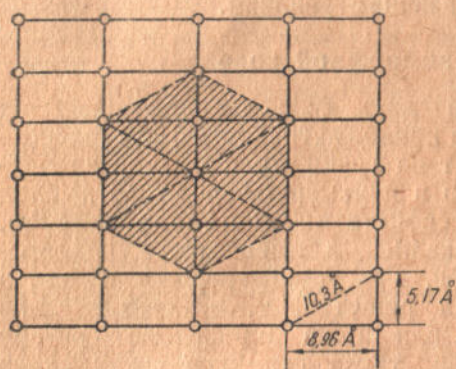
В качестве примера, несколько поясняющего сказанное выше, рассмотрим данные опытов Лангемюра с адсорбцией азота на слюде. Из этих опытов выяснилось, что адсорбированный газ, покрывая поверхность слюды (в предположении одномолекулярного слоя), не заполняет ее сплошным слоем молекула к молекуле вплотную, а дает всегда, в зависимости от температуры, некоторые проценты покрытия, т. е. различные плоскостные коэффициенты пористости этого слоя.

Кристаллическая решетка слюды имеет величины $a = 8,96 \text{ \AA}$; $b = 5,17 \text{ \AA}$; $c = 20,05 \text{ \AA}$ (моноклинная система). Если рассматривать элементы ее решетки, находящиеся в плоскости a и b , то размеры их таковы, что из данной системы решетки можно выделить очертания правильных шестиугольников. В этом и таится особенность слюды, что в ней, как бы, имеются две системы: основная моноклинная и, кроме того, она, как говорят, имеет „гексагональный габитус“.

Фигура 15 поясняет сказанное.

Будем теперь считать, что адсорбция молекулы газа возможна на каждом ионе или серединой наибольшего промежутка между двумя смежными ионами кристаллической решетки слюды

по ряду их; причем также условно, что, в каком бы проценте плоскостной пористости не адсорбировался газ, он всегда дает упорядоченное закономерное распределение молекул по поверхности слюды; тогда означенные предположения приводят к простому следствию: рассмотренного ряда кристаллических решеток, постепенно выделяемых из основной схемы решетки слюды, в порядке уменьшения плоскостной пористости вплоть до основной решетки и более дробных величин. В качестве примера сказанного, рассмотрим две выделенных адсорбционных решетки:



Фиг. 15

1) гексагональную систему решеток;
2) основную решетку слюды.

Адсорбция газа по гексагональной условно выделенной из основной системы решетки

Пусть размер стороны шестиугольника этой решетки

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5,17^2 + 8,96^2} = 10,30 \text{ \AA};$$

d — диаметр молекулы азота $\cong 3 \text{ \AA}$.

Тогда плоская пористость системы решетки

$$p = \frac{\frac{\lambda^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6 - \frac{\pi d^2}{4} \cdot 2}{\frac{\lambda^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 6} = 1 - \frac{\pi d^2}{3 \sqrt{3} \lambda^2} = 0,94;$$

$$1 - p = 0,06.$$

Итак, при данной системе адсорбционной решетки газ будет занимать 6% поверхности слюды, покрывая ее одномолекулярным слоем.

Адсорбция газа системой решетки слюды (полностью)

$$p = \frac{8,96 \times 5,17 - \frac{\pi d^2}{4}}{8,96 \times 5,17} = 0,846;$$

$$1 - p = 0,154.$$

Следовательно, при данной системе адсорбционной решетки, газ будет занимать 15,4% поверхности слюды¹.

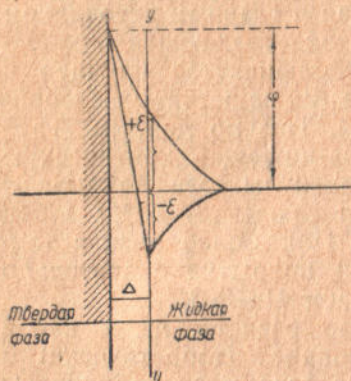
Основными факторами, влияющими на избирательную способность молекул газа при создании различного рода плоскостных пористостей и предлагаемого нами, условно, создания некоторых упорядоченных схем решеток, являются: ионная активность поверхностного слоя слюды и физические условия, в которых проходит процесс адсорбции газа, главным образом, термический фактор. Тепловая энергия, являющаяся главным источником дезорганизации кристаллических решеток, создающая колебательные движения его элементов, в большинстве случаев и является главным корректором виртуальных решетчатых адсорбционных систем, в период их создания. Так, по данным Лангемяра, для температуры опыта, превышающей критическую температуру газа, адсорбированные молекулы газа покрывают всего несколько процентов поверхности слюды (3—13%), а при критической температуре $t = 90^{\circ} - 24\%$. При более низких температурах (ниже критической) величина покрытия значительно возрастает, достигая для некоторых газов 41—86%.

Проделанные нами выше примерные расчеты ни в какой мере не претендуют на разрешение вопроса (теоретически) о действительном распределении молекул газа в адсорбционном слое при различных физических условиях, они приведены лишь для выявления характера процесса адсорбции. Точная расшивка этого вопроса может быть получена электронографическим анализом, основанным на интерференционных явлениях при рассеянии электронов от кристаллических сред. Источником электронов служит, обычно, как и в рентгеновских трубках, — либо газовый разряд, либо накаливаемая нить. Работа с быстрыми электронами дает возможность изучать кристаллическую структуру тончайшего поверхностного слоя порядка десятков или сотен атомных слоев, что открывает новые перспективы, недоступные рентгеновским лучам.

При рассмотрении вопроса о характере мезоморфной воды на границе раздела твердой и жидкой фаз приходится сталкиваться с комплексом сопровождающих ее явлений, на которых остановимся подробнее. Прежде всего, вода, находящаяся в грунтах, не всегда бывает нейтральна (т. е. когда концентрация водородных ионов соответствует случаю $\text{pH} = 7$), обычно она бывает насыщена электролитами, в силу чего, на разделе твердой и жидкой фазы создается зона, насыщенная ионами, которая носит название „ионной атмосферы“. В результате такой концентрации ионов у раздела фаз возникают электрические заряды, потенциалы которых изменяются по некоторой убывающей плавной кривой — от поверхности раздела вглубь жидкой фазы.

¹ Из рассмотрения опытных данных процента покрытия слюды газом следует, что адсорбция атомов идет до более уплотненных схем, в предположении одномолекулярного слоя или же, что адсорбированный слой не мономолекулярен.

В большинстве случаев твердая дисперсная фаза грунта заряжается отрицательно, в соответствии с отношением ее диэлектрической постоянной к таковой же воды, имеющей положительный заряд; в результате получается биполярный слой, который дает объяснение многим явлениям в рассматриваемой системе. При рассмотрении кривой изменения потенциалов электрических зарядов у раздела фаз выделяют два характера потенциала: 1) термодинамический потенциал, обычно соответствующий реальной максимальной величине потенциала кривой и находящийся на границе раздела фаз, 2) электрокинетический потенциал, приблизительно соответствующий реальной границе мезоморфной воды. Последнее вытекает из того факта, что если наблюдать движение воды по трубке, то электрокинетический потенциал всегда (по смыслу своего значения) соответствует той границе, которая разделяет движущийся слой воды от неподвижного, адсорбированного стенками трубки. Весьма возможно, что толщина этого слоя зависит также от скорости



Фиг. 16

движения воды в трубке, т. е. от степени силовых воздействий на слой мезоморфной воды, сопротивляемость которого внешним воздействиям, очевидно, должна уменьшаться по мере удаления от поверхности раздела фаз.

Электрокинетический потенциал, находясь на грани неподвижной и движущейся воды, имеет два различных знака: на поверхности твердой воды —, а на поверхности движущегося слоя воды +, чем и вызывается тот эффект трения струи о поверхность трубки, с которым имеют обычно дело при изучении этого явления. Ниже помещаем схему, иллюстрирующую указанные выше электрические явления, сопровождающие поверхность раздела твердой—жидкой фазы в грунтах (фиг. 16).

Здесь означают:

- Δ — толщина слоя мезоморфной воды;
- $+ε', -ε$ — электрокинетический потенциал;
- φ — термодинамический потенциал;
- $у - у$ — поверхность скольжения воды или граница мезоморфной воды.

О толщине слоя мезоморфной воды

В. О. Оствальд¹, говоря о мезоморфном состоянии мыльной воды, согласно опытам проф. Перрэна, указывает, что

¹ В. О. Оствальд. Наука о коллоидах. Электротехника, гетерогонный катализ. Лен. издат 1932, стр. 8.

отдельные круглые плоские пластинки, из которых состоят слои мезоморфной воды, имеют толщину кратную 4,3 μ .

К. В. Вагнер, определяя толщину этого слоя простым взвешиванием покрытых им тел, указывает, что она колеблется в пределах от 3 до 100 μ .

Проф. Терцаги¹ на основании своих опытов измерения ее между двумя стеклами, путем наблюдения интерференционных полос, дает для толщины слоя величину порядка 100 μ .

Гатчек принимает для сольватной оболочки зерен грунта, в среднем, толщину $\cong 100 \mu$.

К сожалению, все эти данные страдают тем недостатком, что не освещают сущности структуры этого слоя, законов распределения плотности его по мере удаления от поверхности раздела фаз. Во всяком случае, по всем указанным выше источникам для стекла — воды эта величина считается порядка 100 μ . Для грунтов она, вероятно, не имеет постоянного характера и должна зависеть от многих показателей, как, например, от ионной активности твердой фазы, наличия электролитов в воде и т. д.

О величинах электрических зарядов частиц грунта

К сожалению, в этой области имеется мало более или менее точных данных, но ввиду необходимости дать в нашей работе представление хотя бы о порядке этих величин, приводим ниже данные Невесу, который определял величину заряда частиц теоретически, исходя из рассмотрения их, как шаровых конденсаторов, при потенциале в 0,07 в, принимая один элементарный заряд (электрона) равный $4,7 \times 10^{-10}$ электростатических единиц, диэлектрическую постоянную = 80, расстояние между обоими частями двойного электрического слоя (или толщину его) в 5 μ . В результате он получает величины заряда частиц в зависимости от степени их дисперсности (таблица 2).

Из приведенных в таблице 2 величин зарядов частиц и приблизительных подсчетов, сделанных нами, следует, что никакого реального значения силы взаимного отталкивания, вызванные означенными электрическими зарядами, не имеют.

Таблица 2

Радиус частиц в μ	Заряд в электронах
0,24	1,00
0,48	2,2
0,72	3,3
0,96	4,60
1,20	6,00
2,40	14,30
12,00	162
24,00	550
140	4650000
24000	465000000

¹ Проф. Терцаги. Строительная механика грунтов. Госстрой-издат, 1933, стр. 54.

Значение их может выявляться только для чрезвычайно разжиженных грунтов, т. е. в состоянии суспензии.

О характере поверхностного слоя частиц глинистых грунтов

Рассматривая отдельные частицы грунта, замечаем, что они состоят из различных минералов, различной крупности и формы. Кроме того, частицы глинистых грунтов обыкновенно бывают покрыты очень тонкой оболочкой из желатиновидного геля, некоторые же частицы, главным образом, в пределах глинистых фракций, целиком состоят из геля. Обычно в грунтах встречаются три вида гелей, различных по химическому составу: 1) гель кремневой кислоты или силикагель, 2) алюмогель, представляющий гидрат окиси алюминия и 3) феррогелигидраты окиси и закиси железа.

В большинстве случаев эти гелевые оболочки представляют комплексные соединения нескольких из перечисленных выше гелей, при чем окраска грунта обычно обуславливается наличием феррогелей, имеющих оттенки цветов от яркочерного до синевато-зеленого. Означенные гели принадлежат к так называемым необратимым гелям; возникши однажды, они претерпевают процесс постепенного старения, который может продолжаться очень большой период времени (до тысячелетий) пока гель не превратится в конечный продукт характера окаменелости. С этим процессом связана также способность их к набуханию, которая все более и более уменьшается по мере продвижения процесса старения. В лабораторных условиях большинство этих гелей довольно скоро теряют указанную выше способность.

Старение геля сопровождается усадкой с самопроизвольным выделением воды. Это явление называется синерезисом. Отсюда ясно, что обволакивающие зерна грунта гелевые оболочки находятся в сильно натянутом состоянии.

Состарившиеся гели, в виду своей необратимости, неспособны к набуханию,—эти выводы основаны на изучении изменения их объема в присутствии воды. Теперь возникает вопрос, не происходит ли все же процесс набухания—для этих старых гелей—в очень тонком слое поверхности соприкасания их с водой. Такая постановка вопроса, в случае опытного подтверждения, может дать материал для создания гипотезы о причинах набухания глинистых грунтов за счет набухания гелевой оболочки их зерен, минуя участие в этом процессе предполагаемых упругих свойств мезоморфной воды. Проверку этой проблемы можно вести несколькими экспериментальными путями:

Первый путь: исследование изменения объема очень сильно диспергированного порошка из сравнительно старого необратимого геля в присутствии воды, по сравнению с каким-нибудь порошком минерала, диспергированного до тех же размеров.

Второй путь: насыщение свежими гелями глинистых грунтов, которые тщательно перемешиваются с последним; вся эта масса подвергается высушиванию, затем тщательному растиранию в порошок и испытывается на набухание в цилиндрах с водой, по сравнению с нормальным грунтом в тех же условиях. В этом случае сравнивается набухание оболочек из более старого геля по отношению к более молодому.

Третий путь — измерение способности набухания очень тонких слоев геля на стекле в присутствии воды. Здесь измерения должны производиться исключительно тонкими измерительными приборами.

Для анализа характера проведения опытов по первому пути сделаем маленький ориентировочный подсчет, который дает некоторое освещение условий, в которых должны протекать эти опыты.

Обозначим: величину просвета между частицами геля — через λ , величину диаметра частицы — через d . Пусть точность линейных измерений опыта = 1%, тогда имеем:

$$\frac{\lambda}{d} = 0,01, \text{ отсюда } d = 100 \times \lambda.$$

Из данных опытов над грунтами, исходя из кубической группировки частиц, λ_{\max} (см. таблицу 4) имеет величину порядка $< 200 \text{ м}\mu$. Тогда имеем $d \leq 100 \times 200 \text{ м}\mu = 0,02 \text{ мм}$. Опыты с силикагелем и феррогелями, высушенными при 105°C и затем диспергированными, не показали ожидаемого набухания. Не исключается возможность наличия в оболочках зерен грунтов более сложных соединений некоторых веществ с означенными гелями. Ввиду сложности вопроса, таковой полностью исследован в этом направлении не был. Более положительные результаты показали только те опыты, которые соответствовали второму пути исследования.

Ниже приводим некоторые данные этих опытов (таблица 3).

Таблица 3

Название грунта	Количество сухого грунта в см^3	Количество набухшего грунта в см^3		
		Обычным способом	С силикагелем	Освобожден от гелей
Харьковский лессов. суглинок	5	9,5	11,7	—
Харьковский лессов. суглинок	5	9,5	9	—
Кембрийская глина	5	15,5	20,5	6,5
Кембрийская глина	5	13	19	—
Каолин	5	11,5	15	—

О характере распределения воды во влажных грунтах

Если взять грунт, высушенный при 105°C в порошкообразном виде, и подвергнуть его действию паров воды, то начнется

сорбционный процесс насыщения поверхности его твердой фазы (адсорбента) молекулами воды, заимствуемыми адсорбентом из пара; покрыв адсорбент до ионного насыщения его поверхности, с образованием, сверх указанного адсорбированного слоя, некоторой жидкой обволакивающей его пленки воды (что приблизительно соответствует понятию максимальной гигроскопической влажности), пар может после этого, при подходящих условиях, конденсироваться, в виде отдельных менисков между зернами грунта — тоже до определенного процента, в зависимости от многих физических показателей. Говоря о первоначальной адсорбции пара, соответствующей максимальной гигроскопической влажности, состояние этого слоя мы не отождествляем с состоянием мезоморфной воды, исходя из следующих соображений.

Толщина из этого слоя, как увидим ниже¹, по приблизительным подсчетам — порядка 18 *мр*, причем этот тонкий слой ограничен с обеих сторон с двумя разделами фаз: твердой — жидкой и жидкой — газообразной.

Первый раздел фаз обуславливает стремление к образованию кристаллической решетки воды, второй раздел фаз создает за счет энергии газовых молекул воздуха сильный источник дезорганизации появления кристаллической решетки, поэтому более естественно допустить, что, в основном, этот слой находится в состоянии жидкой пленки. Если стать на точку зрения гипотезы, что основным источником сил расталкивания частиц в процессе набухания является прослойка мезоморфной воды между ними, тогда вышеприведенные соображения о состоянии рассматриваемого слоя воды максимальной гигроскопической влажности вполне соответствуют принятой установке, так как нижеприведенные данные опытов (см. график II, стр. 331) не указывают на какое-нибудь заметное набухание грунта в этом случае, которое должно было бы появиться для толщины слоя в 18 *мр*.

С точки зрения гипотезы гелевых оболочек отсутствие увеличения объема грунта при данных условиях вызывает большие затруднения в смысле достаточно логического объяснения данного явления.

Если взять тот же сухой образец и насыщать его непосредственно водой, то таковая начнет перемещаться по его капиллярным ходам силами капиллярного натяжения. При этом создается ряд зон в порядке удаления от источника воды:

- 1) зона заполнения пор грунта водой до полного насыщения;
- 2) зона частичных менисков между зернами грунта;
- 3) зона адсорбционного ионного насыщения водой поверхности частиц грунта тонкой обволакивающей пленкой.

Мы предполагаем, что мениски между частицами грунта образуются лишь после полного адсорбционного насыщения поверхности зерен, что соответствует приблизительно максимальной гигроскопической влажности.

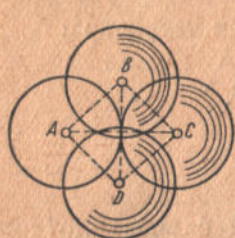
¹ Таблица 5.

Основные геометрические соотношения между пористостью грунта, диаметром его частиц и просветами между этими частицами

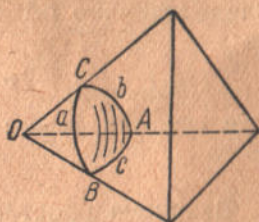
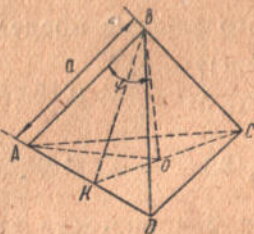
Рассмотрим гексагональную систему группировки шарообразных частиц грунта (фиг. 17). Здесь мы имеем следующие зависимости между геометрическими элементами ее:

$$\overline{KB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad KO = \frac{1}{3} \overline{KB} = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$h = \overline{BO} = \sqrt{\overline{KB}^2 - KO^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \cos \psi = \frac{h}{a} = 0,815.$$



Фиг. 17



Фиг. 18

Объем тетраэдра

$$v = \frac{a^3}{12} \sqrt{2} \cong 0,118 a^3.$$

Если $a = 2R$, где R радиус частицы грунта, тогда

$$v = 0,118 \times 8R^3 \cong 0,944 R^3.$$

При неплотном касании $a = 2R + \lambda$, где λ —величина просвета между зернами грунта. Тогда

$$v = 0,118 \times 8 \left(R + \frac{\lambda}{2}\right)^3 \cong 0,944 R^3 \left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^3.$$

Определение коэффициента пористости системы

Прежде всего определяем величину объема, занимаемого твердой фазой в пределах элементарного тетраэдра. Пусть зерно грунта, имеющее центр в точке O , отсекает некоторую часть тетраэдра $OSAB$ посредством сферического треугольника SAB (фиг. 18).

Из сферической тригонометрии имеем зависимость:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A,$$

откуда:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

но

$$a = b = c = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Тогда

$$\cos A = \frac{\cos 60^\circ - \cos^2 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} \cong 0,333;$$

$$A = 70^\circ 33'; \angle A = \angle B = \angle C.$$

Величина сферического избытка:

$$\varepsilon = 3 \times 70^\circ 33' - 180^\circ = 31^\circ 39'.$$

Площадь сферического треугольника ABC

$$s = \frac{\pi R^2}{180} \times 31^\circ 39' = 0,175 \pi R^2.$$

Следовательно объем одного зерна в пределах тетраэдра:

$$v = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 0,175 \pi R^2}{4 \pi R^2} = 0,183 R^3.$$

Для четырех зерен:

$$4 \times 0,183 R^3 = 0,735 R^3.$$

Величина пространственной пористости для случая плотного касания зерен:

$$p = \frac{v_{\text{тетр}} - v_{\text{зерен}}}{v_{\text{тетр}}} = \frac{0,944 - 0,735}{0,944} = 0,222.$$

Величины p во всех нижеприводимых формулах условимся брать не в %, а в долях единицы.

Зависимость между пористостью грунта, диаметром зерна и величиной просвета между зернами для гексагональной системы группировки

На основании вышесказанного имеем:

$$p = \frac{0,944 \left(R + \frac{\lambda}{2}\right)^3 - 0,735 R^3}{0,944 \left(R + \frac{\lambda}{2}\right)^3} = \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^3 - 0,775}{\left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^3} = 1 - \frac{0,775}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3},$$

где d — диаметр действующего зерна. Преобразовывая указанную зависимость, имеем:

$$\frac{\lambda}{d} = \sqrt[3]{\frac{0,920}{1-p}} - 1.$$

Для определения величин просветов имеем зависимость:

$$\lambda = d \left(\sqrt[3]{\frac{0,920}{1-p}} - 1 \right).$$

Зависимость между плоской пористостью (для сечения проходящего через центры зерен ряда) и пространственной пористостью или отношением величины просвета к диаметру действующего зерна для гексагональной системы группировки зерен

Если рассматривать в гексагональной системе группировки зерен грунта ряд плоских сечений, параллельных какому-нибудь ряду зерен, то будем иметь в каждом сечении различную плоскую пористость, причем наименьшее значение будет в сечении, проходящем через центры зерен каждого ряда.

Из фиг. 19 видно, что площадь треугольника ABC

$$s = \frac{(2R + \lambda)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^2 \sqrt{3}.$$

Площадь, занимаемая частицами грунта в рассматриваемом сечении, равна $\frac{1}{6} \pi R^2 \cdot 3 = \frac{\pi R^2}{2}$, отсюда:

$$p_{\text{плоск}} = \frac{R^2 \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^2 \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right]}{R^2 \left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^2 \sqrt{3}} \cong 1 - \frac{0,915}{\left(1 + \frac{\lambda}{2R}\right)^2}.$$

Но так как:

$$\frac{\lambda}{2R} = \frac{0,920}{\sqrt{1-p}} - 1,$$

то

$$p_{\text{плоск}} = 1 - \frac{0,915}{0,920^3} \sqrt[3]{(1-p)^2} \cong 1 - 1,08 \sqrt[3]{(1-p)^2},$$

или

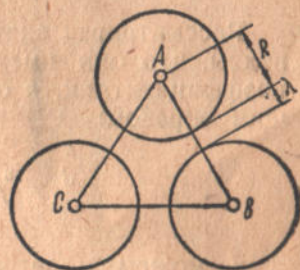
$$1 - p_{\text{плоск}} = 1,08 \sqrt[3]{(1-p)^2}.$$

Если такие же подсчеты сделать для других систем, то для центрированно-кубической системы будем иметь:

$$p = 1 - \frac{0,720}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3}$$

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{0,895}{\sqrt{1-p}} - 1; \quad 1 - p_{\text{плоск}} = 0,98 \sqrt[3]{(1-p)^2};$$

$$\cos \psi = \cos 45^\circ = 0,707.$$



Фиг. 19

Для кубической системы

$$p = 1 - \frac{0,525}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3};$$

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{0,775}{\sqrt[3]{1-p}} - 1; \quad 1 - p_{\text{плоск}} = 1,02 \sqrt{(1-p)^2};$$

$$\cos \psi = 1,00.$$

Рассматривая значения формул для нескольких группировок, видим, что они имеют одинаковый вид и отличаются только коэффициентами, в общем виде их можно представить следующим образом:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{\gamma}{\sqrt[3]{1-p}} - 1; \quad p = 1 - \frac{\gamma^3}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3}.$$

γ можем определить из условия $\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{d}$. Тогда $\gamma = \left(1 + \frac{\lambda_0}{d}\right)^3 \sqrt[3]{1-p_0}$, где p_0 начальная пористость грунта при условии $\frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda_0}{d}$ для состояния грунта с сильно сближенными частицами (например, при температуре 105° Ц).

Тогда эти формулы примут вид:

$$\frac{\lambda}{d} = \left(1 + \frac{\lambda_0}{d}\right) \sqrt[3]{\frac{1-p}{1-p_0}} - 1;$$

$$p = 1 - (1-p_0) \frac{\left(1 + \frac{\lambda_0}{d}\right)^3}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3}$$

$$1 - p_{\text{плоск}} = \varepsilon \sqrt[3]{(1-p)^2},$$

где ε близко к единице.

Так как для сильно сухих грунтов величина $\frac{\lambda_0}{d}$ обычно очень мала и с достаточной точностью может быть принята $= 0$, поэтому эти формулы можно привести к упрощенному виду:

$$\frac{\lambda}{d} = \sqrt[3]{\frac{1-p}{1-p_0}} - 1; \tag{5}$$

$$p = 1 - \frac{(1-p_0)}{\left(1 + \frac{\lambda}{d}\right)^3}; \tag{6}$$

$$1 - p_{\text{плоск}} = \varepsilon \sqrt[3]{(1-p)^2}. \tag{7}$$

Мениски воды между частицами грунта
и зависимости между их элементами

За основной параметр, определяющий все элементы мениска, принимаем центральный угол α (фиг. 20). Тогда имеем следующие зависимости, имея ввиду, что

R — радиус действующего зерна,

$$r = CO_1,$$

Из треугольника gOO_1 имеем:

$$R + \frac{\lambda}{2} = (R + r) \cos \alpha$$

или

$$r = \frac{R}{\cos \alpha} \left(1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2R} \right).$$

Величина объема мениска
воды

С грубым приближением принимаем объем его равным объему цилиндра ϵCDF — 2 шаровых сегмента ϵAC (фиг. 20):

$$v_{\text{цил}} = \pi \overline{BC}^2 \times CD;$$

но

$$\overline{BC} = R \sin \alpha;$$

$$CD = 2r \cos \alpha = 2R \left(1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2R} \right);$$

поэтому

$$v_{\text{цил}} = 2\pi R^3 \sin^2 \alpha \left(1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2R} \right).$$

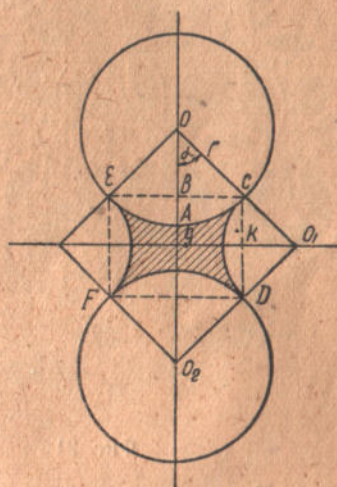
$$2v_{\text{шар. сегм}} = 2\pi AB^2 \left(R - \frac{\overline{BA}}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha).$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} v_{\text{мен}} &= 2\pi R^3 \left(1 - \cos \alpha + \frac{\lambda}{2R} \right) \sin^2 \alpha - \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^2 \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) = \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \left[1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 3 \left(1 - \cos^2 \alpha \right) \frac{\lambda}{2R} \right]. \end{aligned} \quad (1a)$$

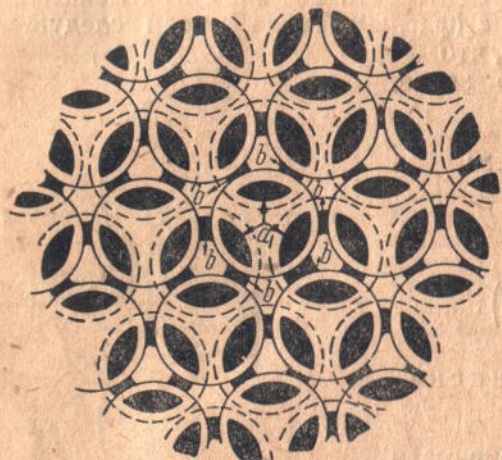
Зависимость между влажностью грунта $\langle \alpha$ и пористостью его

Пусть имеем грунт, частицы которого (действующие зерна) расположены по гексагональной системе группировки, а взаимное перекрытие двух ее слоев показано на нижеприведенном чертеже (фиг. 21).



Фиг. 20

Из чертежа видно, что каждое шаровидное зерно имеет 12 соприкасающихся к нему менисков: 6 менисков типа *b* с боков и 6 типа *a* (3 сверху и 3 снизу).



Фиг. 21

Если считать, что каждому зерну соответствует половина мениска, то мы будем иметь 6 менисков, отнесенных к одному зерну¹.

Обозначим объемную влажность грунта в процентах через w_v , тогда

$$\begin{aligned} \frac{w_v}{100} &= \frac{6 \cdot v_{\text{мен}}}{\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{1-p}} \cong \\ &\cong \frac{4.50(1-p) v_{\text{мен}}}{\pi R^3}, \end{aligned}$$

где p — пространственная пористость грунта;

R — радиус действующего зерна грунта;

$v_{\text{мен}}$ — объем одного мениска воды.

Подставляя величину $v_{\text{мен}}$ из формулы (1а), имеем:

$$\frac{w_v}{100} = \frac{4.50(1-p) 2\pi R^3}{3\pi R^3} \left[1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 3(1 - \cos^2 \alpha) \frac{\lambda}{d} \right],$$

или

$$\frac{w_v}{100} = 3(1-p) \left[1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 3(1 - \cos^2 \alpha) \left(\sqrt[3]{\frac{1-p_0}{1-p}} - 1 \right) \right],$$

так как

$$\frac{\lambda}{d} = \sqrt[3]{\frac{1-p_0}{1-p}} - 1,$$

но

$$w_v = w_g (1-p) \Delta,$$

где w_g — весовая влажность в процентах от сухого грунта, а

Δ — удельный вес твердой фазы $\cong 2,65$.

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{w_g}{100} &= \frac{3(1-p)}{\Delta(1-p)} \left[1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + 3(1 - \cos^2 \alpha) \left(\sqrt[3]{\frac{1-p_0}{1-p}} - 1 \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= 1,13 \left[1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 3(1 - \cos^2 \alpha) \left(\sqrt[3]{\frac{1-p_0}{1-p}} - 1 \right) \right]. \quad (8)$$

¹ То же будет и для центрированно-кубической группировки зерен.

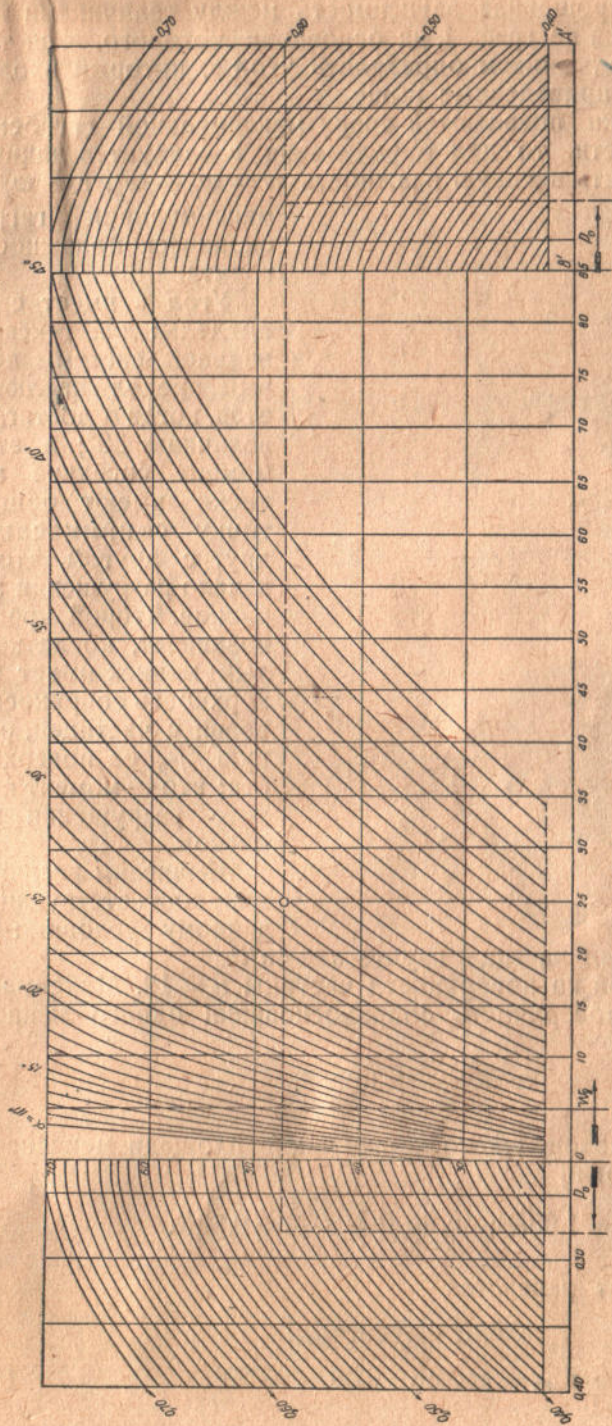


График I.

Способ пользования графиком. Пусть грунт в высушенном состоянии имеет пористость p_0 , тогда для соответствующий этой влажности пористости p угол α находится следующим образом: отыскиваем точки на участках AB и $A'B'$, соответствующие данному значению p_0 , затем находим на ординатах, соответствующих этим точкам, значение пористости p . К полученным верхним ординат прикладываем линейку ось X , затем на участке графика BB' замечаем требуемую влажность w_g , которая дает вполне определенную точку. Пересечение ординаты, проходящей через эту точку с линейкой и будет давать искомое значение угла α .

Примечание: Даны $p_0 = 0,28$; $p = 50$; $w_g = 25\%$; $\alpha = 34^{\circ}30'$

Означенная упрощенная зависимость между величинами w_g , α , p , p_0 изображена на граф. 1, на основании которого, зная три величины w_g , p , p_0 , можем определить угол α , который входит во все формулы, приведенные выше.

Так как мениски появляются сверх максимальной гигроскопической влажности, то для определения α следует в данную формулу (8) вводить весовую влажность $w = w_g - w_g^0$, где $w_g^0 \cong$ максимальной гигроскопической влажности грунта.

Угол α имеет свои пределы: для гексагональной системы первый предел наблюдается, когда α достигает величины 30° ; в этот момент соседние мениски имеют общую точку соприкосновения друг с другом, это — начало разрушения менисков. Вторым пределом возникает, когда каждый мениск имеет поверхность соприкосновения с частицей, равную $1/2$ ее поверхности; это — момент полного разрушения менисков.

Вычислим величину их, соответствующую данному условию:

величина поверхности частицы грунта $s = 4\pi R^2$.

Число менисков на поверхности частицы $n = 12$. Максимальная возможная поверхность соприкосновения одного мениска с зерном грунта:

$$\omega = \frac{4\pi R^2}{12} \cong 1,05R^2.$$

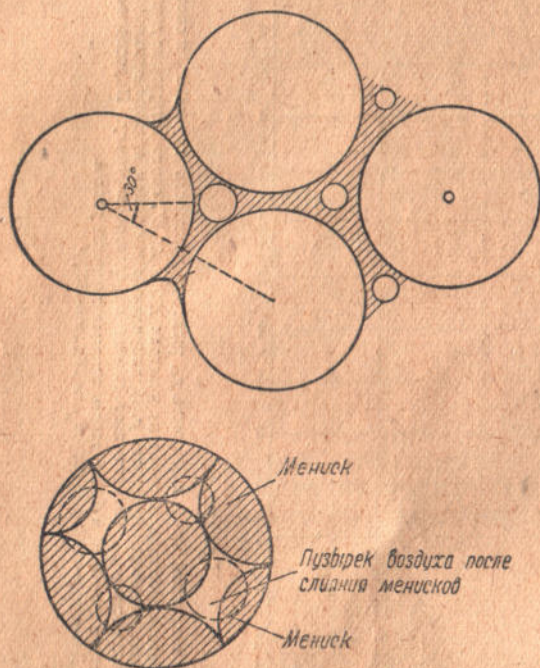
Радиус круга, равновеликого предельной площади мениска r_0 , находится из условия

$$\pi r_0^2 = 1,05R^2; \quad r_0 = R \sqrt{\frac{1,05}{\pi}} = 0,58R.$$

α_{\max} определяем из равенства

$$0,58R = R \sin \alpha_{\max};$$

$$\alpha_{\max} = \arcsin 0,58 = 35^\circ 30'.$$



Фиг. 22

Итак, процесс разрушения менисков для гексагональной системы происходит в пределах $\alpha = 30 - 35,5^\circ$.

Ввиду некоторых грубых приближений, допущенных в приводимых формулах, сделанных для упрощения расчетов, действительный момент разрушения менисков не совсем соответствует углу $\alpha = 30^\circ$; как показывают данные опытов, по разрыву восьмерок из грунта, приводимые ниже, начало разрушения менисков можно считать при угле α , равном $34^\circ 30'$.

Самый процесс разрушения менисков сводится к разрушению криволинейного очертания поверхностей менисков, с образованием отдельных пузырьков воздуха и слиянию смежных менисковых объемов воды; этот процесс иллюстрируется фиг. 22.

О характере процессов увлажнения и высыхания грунтов, приводящих к набуханию и усадке их

Для выяснения этого вопроса ассистентом Э. Е. Фрайфельд был проделан ряд опытов над различными глинистыми грунтами, которые сводились к следующему. Приготавлилось тесто из предварительно высушенного, размельченного в порошок и просеянного суглинка или глины.

Посредством медной пластинки толщиной в 2 мм с круглым отверстием $d = 50$ мм посередине приготавлилась круглая лепешка из грунта, которая постепенно высушивалась, а затем через ряд промежутков времени определялся объем и вес. Образец окончательно высушивался при 105°C в сушильном шкафу и взвешивался. В результате для каждого момента наблюдения могли быть определены: пористость грунта p и весовая влажность по отношению к весу сухого грунта w_g . Удельный вес твердой фазы определялся пикнометром. Это была первая часть опытов, которая давала возможность изучить усадку грунтов от сравнительно влажного состояния грунтов до высушенного при 105°C .

Вторая часть опытов производилась следующим образом: измерительный цилиндр наполнялся водой и в него насыпали исследуемый грунт в размельченном состоянии (в естественно сухом виде), затем содержимое измерительного цилиндра размешивалось стеклянной палочкой и оставлялось спокойно осаждаться в течение нескольких суток. После этого, слой воды над осевшим грунтом осторожно удалялся пипеткой, а остаток его снимался фильтровальной бумажкой.

В таком состоянии грунт оставался некоторое время, причем непрерывно замечалось постепенное выделение сверху некоторого слоя воды толщиной 1—2—3 мм при постепенной осадке грунта.

Снявши этот слой воды можно было обнаружить вторично его появление. Такие манипуляции проделывались над указанным грунтом неоднократно, причем это явление наблюдалось каждый

последующий раз; правда, свободный слой воды после каждой манипуляции уменьшался, стремясь в пределе к нулю.

Целью второго цикла опытов было определить начало усачных процессов в грунте, начиная от состояния наибольшей его влажности, по возможности, слабо меняя его режим введением каких-либо дополнительных посторонних сил.

Между этими двумя циклами опытов, в смысле состояния влажности грунтов, был некоторый разрыв последовательности наблюдений всего процесса. Этот промежуток был заполнен посредством графической интерполяции (т. е. соединением выявившихся участков кривых, устанавливающих искомые функциональные зависимости).

Результаты этих опытов, сделанных над различными грунтами, дали некоторые зависимости между влажностью и пористостью грунтов, которые нами изображены в виде нижеприводимого граф. II, где по оси абсцисс откладывались весовые влажности исследуемых грунтов, а по оси ординат — соответствующие пористости.

Из рассмотрения приведенного графика следует, что эта зависимость представляет собою семейство кривых, из которых каждая в отдельности состоит из двух участков: прямолинейного и криволинейного. Все эти кривые асимптотически вливаются в кривую полного заполнения пор грунта водой, уравнение которой очевидно должно иметь вид:

$$p_1 = \frac{\Delta w_g}{100 + \Delta \cdot w_g},$$

где p_1 — теоретическая пористость грунта в долях единицы, полностью насыщенного водой, соответствующая весовой влажности w_g , взятой в % (по отношению к весу сухого грунта, высушенного при 105° Ц), а

Δ — удельный вес твердой фазы.

Также характерно, что каждая кривая имеет свой параметрический показатель, представляющий пористость высушенного грунта.

Означенное семейство кривых приблизительно удовлетворяет уравнению:

$$p = \frac{p_0}{e^v} + \frac{\Delta w_g}{100 + \Delta w_g}, \quad (9)$$

где e — основание натуральных логарифмов, а $v = \frac{0,029 w_g}{p_0}$.

Ввиду того, что величина Δ мало отличается от средней величины 2,63—2,65, в приведенном графике она принята — 2,63. Из графика ясно видно значение оставшихся пузырьков воздуха после распада менисков, которое, как увидим ниже, начинается для гексагональной системы около 30% влажности, между тем, как еще долго не происходит слияние кривых действительной пористости грунтов с кривой полного заполнения водой.

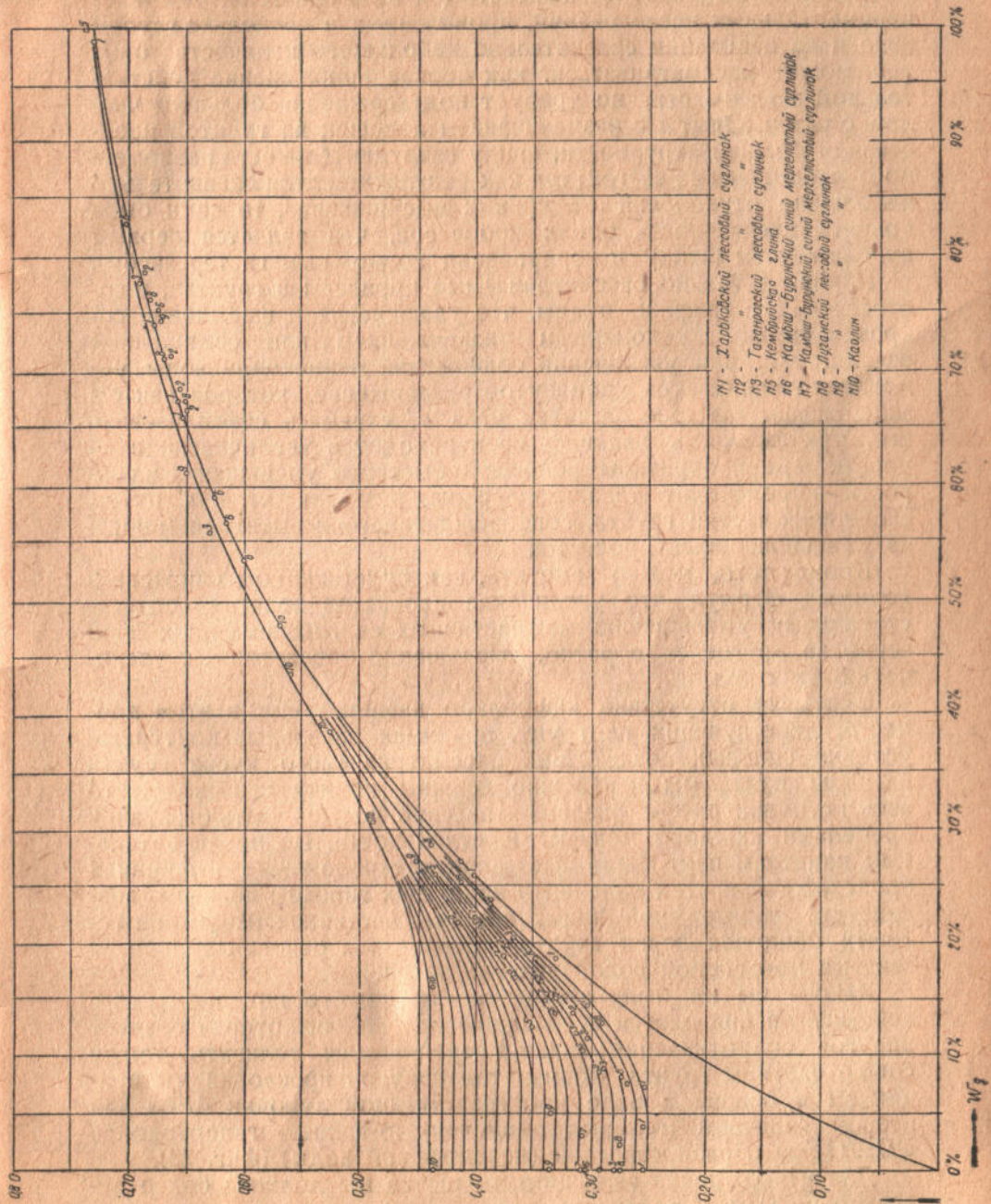


График II

Приведенная выше зависимость (9), выявленная на базе экспериментальных исследований, проделанных в несколько грубом виде и на основании сравнительно небольшого количества опытов, может рассматриваться, как первое приближение действительной зависимости, но требует подтверждения большим числом опытов. Опыты с размачиванием лепешек из грунтов представили большие трудности, ввиду затруднительности равномерного насыщения их влагой; так как результаты дали сравнительно небольшие отклонения от кривых высушивания, то нами была принята идентичность обоих процессов, что является первым приближением (ввиду игнорирования возможным гистерезисом).

Изучая детально рассматриваемые процессы в грунтах, в соответствии с граф. II, видим, что увлажнение и высыхание сопровождается закономерным раздвижением или сближением частиц; так, при увеличении содержания менисковой воды немедленно начинается упомянутое раздвижение, которое как бы задерживает быстрое развитие угла α , стремясь стабилизировать его, причем часть излишка ее переходит в увеличивающийся просвет λ ; при обратном процессе — быстрого уменьшения влажности — происходит также задержка развития угла α путем сближения частиц грунта, сопровождающегося вытеканием воды из уменьшающихся просветов.

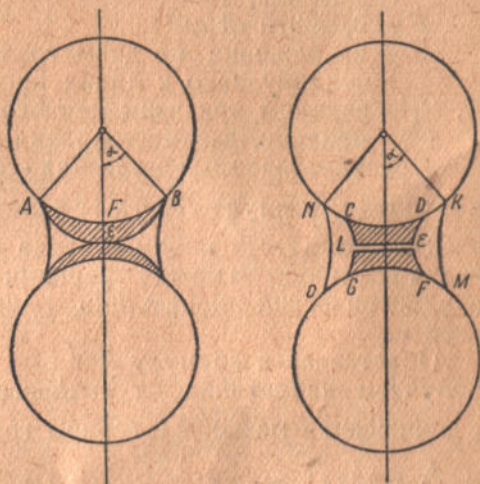
Кроме того, можно заметить, как будет видно из нижеприводимых формул, что увеличение просветов ведет к соответствующему уменьшению межчастичных сил, нажимающих одно зерно на другое, и, наоборот, уменьшение просветов — к увеличению этих сил.

Учитывая отсутствие каких-либо внешних сил в этом процессе, действующих на грунт, принимая начальные контурные условия силовых воздействий рассматриваемого куска грунта равными нулю, мы неизбежно должны прийти к выводу, что весь источник рассматриваемых явлений должен быть ограничен пределами каждого мениска в отдельности. По предварительным наметкам нами было высказано предположение о причинах происхождения этих явлений в виде двух гипотез: первая — воздействие мезоморфной воды, вторая — частичное набухание гелевых оболочек зерен грунта, которое мы относим только на занятые менисковой водой участки зерен.

Какова бы ни была означенная причина, в конечном итоге действие ее приводится к созданию прослойки, которая создает упругое сопротивление силам, стремящимся сблизить между собою частицы грунта. Форму этой упругой прослойки мы принимаем в основе в виде пространственной луночки $AFB\epsilon$ для второй гипотезы (гелевых оболочек) и в виде гиперболоида $CD\epsilon JG$ для первой гипотезы (мезоморфной воды) (фиг. 23).

Для утверждения означенных гипотез мы должны более детально изучить и проанализировать характер изменения очертаний объема луночек в соответствии с рассматриваемыми процессами в грунтах.

Возьмем процесс увеличения влажности, сопровождающийся нарастанием объема менисков. В этом случае по второй гипотезе развитие луночки объясняется просто: с увеличением количества менисковой воды начинается интенсивное впитывание ее в гелевую оболочку, причем избыток воды до некоторой степени поглощается ею, что приводит к процессу задерживания развития угла α ; при этом луночка, набухая, тем самым увеличивает просвет между частицами грунта. Обратного выдавливания воды из набухшей луночки, по мере ее увеличения, не происходит, потому что силы, сближающие частицы между собой, все уменьшаются, стремясь в пределе к очень малым величинам. При обратном процессе уменьшения влажности, в силу большого натяжения оболочки, начинается отдача воды, которая уменьшает величину луночки, тем самым вызывая увеличение сил между частицами грунта, а следовательно, и дальнейшее развитие начавшегося процесса.



Фиг. 23

Для обоснования первой гипотезы, мы сталкиваемся с рядом темных мест и противоречий, которые требуют тщательных дальнейших исследований. Здесь приходится сделать ряд предположений чисто априорного характера:

1. Мезоморфная вода с увеличением давления на ее слой переходит частично в жидкую, по аналогии со льдом и металлами (под чрезвычайно сильным давлением).

2. Мезоморфная вода для своего существования требует всегда наличия защитного слоя $DKMF$, $NCGO$ жидкой воды, препятствующего дезорганизации ее со стороны молекул воздуха, действующих по поверхности раздела мениска и воздуха (фиг. 23). Нарастание слоя мезоморфной воды идет по наружной поверхности гиперболоида мезоморфной воды и по внутренней, разделяющей прослойке жидкой воды $L—e$, благодаря наличию максимального напряжения в этом диаметральной сечении, достигающего такой величины, при которой происходит разжижение мезоморфной воды. Не будем останавливаться детально на рассмотрении характера участия мезоморфной воды в этих процессах и перейдем к построению интересующих нас зависимостей в процессах, происходящих в грунтах.

Величины менисковых сил в грунтах

Для определения менисковых сил между зернами грунта пользуемся обычно принятой в этих случаях формулой Лапласа¹

$$\sigma' = F \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

где F — сила поверхностного натяжения мениска на 1 см^2 его площади;

$$F = 0,000075 \text{ кг/см}^2;$$

σ' — напряжение по диаметральному сечению мениска (перпендикулярно к линии, проходящей через центры зерен);

R, R_1 — радиусы кривизны мениска в плоскостях, нормальных к мениску, взаимно-перпендикулярных друг к другу.

В рассматриваемых менисках обе кривизны различного знака, поэтому в формуле Лапласа перед членом $\frac{1}{R_1}$ следует взять знак минус. Пусть имеем 2 зерна с центрами O_1 и O_2 (фиг. 20); величина просвета между зернами λ ; радиус зерна R ; основной параметрический показатель менисковой воды — центральный угол α .

Подставляя в формулу Лапласа значение $R = r$ и $R_1 = R \sin \alpha$, получаем напряжение от силового воздействия по поверхности соприкосновения мениска с зерном грунта; зная, что $r = \frac{R}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{\lambda}{2R} - \cos \alpha \right)$, имеем:

$$\sigma_1 = \frac{F}{R} \left[\frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\lambda}{2R} - \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right].$$

Для перехода от менисковых напряжений к напряжениям для 1 см^2 сечения рассматриваемого образца грунта, имеем следующую формулу (считая, что на каждое зерно действуют 3 менисковых силы в гексагональной системе и что рассматриваемое сечение нормально к контрольным, разрывающим образец, внешним усилиям и расположено параллельно ряду частиц):

$$\sigma' = \frac{\pi AB^2 \cdot 3 \cos \psi \sigma_1}{\pi R^2 (1 - P_{\text{плоск}})}.$$

В данной формуле сохранены прежние обозначения. Вводя значение $AB = R \sin \alpha$, имеем:

$$\sigma' = \frac{3\sigma_1 \pi R^2 \sin^2 \alpha \cos \psi (1 - P_{\text{плоск}})}{\pi R^2} \cong$$

$$\cong 2,44 \sigma_1 \sin^2 \alpha (1 - P_{\text{плоск}}) \cong 2,65 \sigma_1 \sin^2 \alpha \sqrt[3]{(1 - P)^2}.$$

¹ См. статью Покровского и Булычева. Журнал Технической Физики, № 4, 1933.

Подставляя значение σ_1 , получаем:

$$\sigma' = \frac{5,30 F}{d} \sin^2 \alpha \sqrt[3]{(1-P)^2} \left[\frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\lambda}{2R} - \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right]$$

или зная, что $F = 0,000075 \text{ кг/см}^2$, имеем:

$$\sigma' \cong \frac{0,0004}{d} \sin^2 \alpha \sqrt[3]{(1-P)^2} \left[\frac{\cos \alpha}{1 + \frac{\lambda}{2R} - \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right],$$

так как

$$1 + \frac{\lambda}{2R} \cong \sqrt[3]{\frac{1-P_0}{1-P}},$$

то:

$$\sigma' = \frac{0,0004}{d} \sin^2 \alpha \sqrt[3]{(1-P)^2} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt[3]{\frac{1-P_0}{1-P}} - \cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} \right], \quad (10)$$

где

d — средний диаметр действующего зерна грунта в см;

$$d = \frac{1}{U};$$

P — пространственная пористость образца в долях единицы.

P_0 — пористость образца в сухом состоянии,

α — определяется по графику I в функции W_g , P и P_0 (с учетом вычета из W_g величины W_g^0).

Для рассматриваемого плоского сечения грунта, кроме основных напряжений от менисковых сил в той их части, которая определяется по формуле Лапласа, в нем еще возникают аналогичные напряжения, вызванные силами, приложенными по окружности соприкасания менисков воды с зернами грунта¹.

Эти дополнительные напряжения, применительно к гексагональной системе группировки зерен, можно принять приблизительно

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{3 F' * 2 \pi R \sin \alpha \cos \psi}{\pi R^2} \cong \\ &= \frac{0,0008}{d} \sin \alpha \sqrt[3]{(1-P)^2}. \end{aligned} \quad (10a)$$

Означенное дополнительное напряжение следует прибавлять к основным, вычисленным выше по формуле 10. Формулы (10) и (10a), хотя и дают величины менисковых напряжений в данном сечении в функции гранулометрического состава грунта, его пористости и влажности, все же не решают полностью поста-

¹ Работа Покровского и Булычева — Журнал технической физики № 4, 1933, том III.

* Значение F' соответствует силовым воздействиям на единицу длины.

вленной нами задачи, так как они дают решения для каких-либо определенных состояний, но не освещают всего процесса полностью. Для разрешения поставленной задачи необходимо знание функциональной зависимости между пористостью грунта и его влажностью.

Эта зависимость (9) представлена на графике II.

Поэтому можно считать, что поставленная в данной работе задача сводится к совместному удовлетворению 4 условий:

$$1) \frac{\lambda}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{1-P_0}{1-P}} - 1;$$

$$2) \frac{w_g - w_g^0}{100} = 1.13 [1 - \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 3(1 - \cos^2 \alpha) \frac{\lambda}{2R}];$$

$$3) \frac{P_0}{e \frac{P_0}{(0.029 w_g)}} + \frac{\Delta w_g}{100 + \Delta w_g};$$

4) $\sigma = \sigma' + \sigma''$, где σ' и σ'' находятся по формулам (10) и (10а).

Для других систем группировки необходимо введение обобщения по указанным выше формулам. Для опытного выявления величин менискового напряжения в грунтах в функции от их влажности ассистентом Э. Е. Фрайфельд были произведены механические анализы нескольких глинистых грунтов, которые фигурировали во всех вышеприведенных опытах.

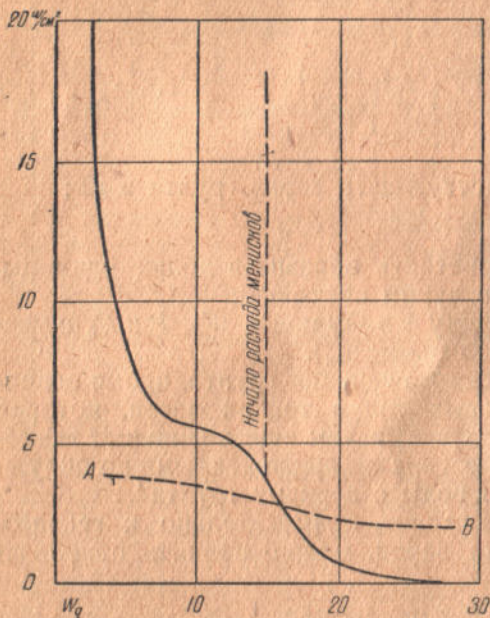
На основании данных механического анализа нами были получены кривые менисковых напряжений для нескольких грунтов — с помощью выведенных формул и графиков.

С целью контроля полученных выше теоретических предпосылок, ассистентом Э. Е. Фрайфельд были проделаны опыты над разрывом восьмерок из этих грунтов с различной влажностью.

Эксперименты были проделаны для следующих грунтов:

1) Харьковский лессовый суглинок, с территории Института сооружений, 2) Кембрийская глина (Слуцк — речка Поповка).

Данные разрывных напряжений были нанесены на графиках III и IV, где по оси X откладывались влажности, а по оси Y — разрывные напряжения. Линии АВ — расчетные напряжения от менисковых сил.



Граф. III

При рассмотрении графиков разрывных напряжений, полученных из данных опытов, в зависимости от влажности их, видим, что для кембрийской глины, в пределах связности грунтов, вызываемых менисковыми силами, данные расчета хорошо увязываются с опытом. Эти расчетные силы, с одной стороны, на участке сухого грунта усиливаются силами ионных воздействий, вызывающих асимптотическое приближение разрывных напряжений к оси Y , с другой стороны, они резко снижаются за пределами распада мениска, что и наблюдается в опытных данных.

Для Харьковского лесового суглинка, богатого карбонатами, как видно из графика III, замечается уклонение опытных данных по отношению к расчетным.

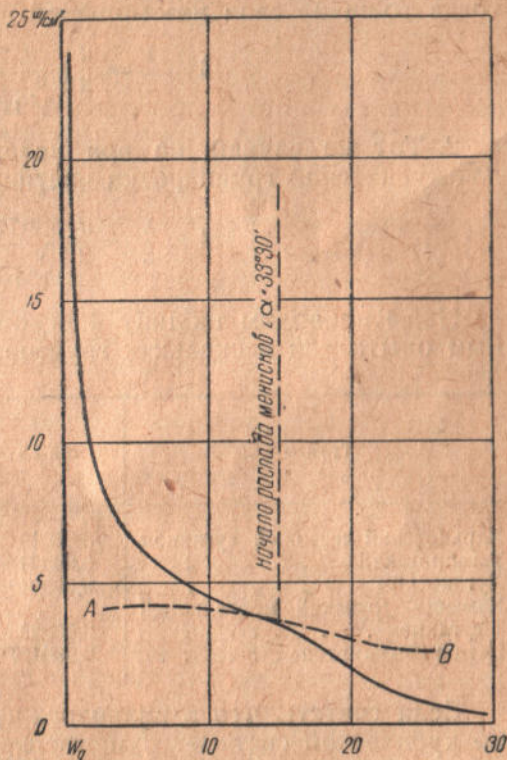
Данные опытов с каолином дают близкое совпадение с расчетными данными. Интересен тот факт, что в каолине почти совершенно отсутствует ионное сцепление частиц в сухом участке диаграммы, в виде асимптотического приближения разрывных напряжений к оси Y диаграммы и ограничивается лишь очертаниями менисковых напряжений.

В дополнение ко всему сказанному выше, остановимся на вопросе о толщине слоя мезоморфной воды на поверхности частиц грунта или местных утолщений гелевой оболочки зерен грунта. По существу эта величина довольно изменчива и очевидно зависит от многих показателей, как-то:

- 1) материала частиц (оболочек геля) и состояния поверхностного слоя их;
- 2) наличия электролитов;
- 3) величин действующих сил на частицы грунта и т. д.

Точное определение величины этого слоя, конечно, представляет значительные трудности. Сделаем некоторые попытки выявить порядок ее на основании выведенных нами выше формул и данных опыта.

Величины ее определяем в двух предположениях:



Граф. IV

1. Максимальное значение ее при условиях свободного осаждения зерен грунта в измерительном цилиндре, со значительным избытком слоя воды над осевшим грунтом при условиях пользования формулами для гексагональной системы группировки частиц:

$$\frac{\lambda}{d} = \frac{0,920}{3\sqrt{1-p}} - 1,$$

тогда толщина слоя мезоморфной воды

$$\delta = \frac{\lambda}{2} = \frac{d}{2} \left(\frac{0,920}{3\sqrt{1-p}} - 1 \right).$$

2. Тот же случай, но при условиях пользования формулой для кубической группировки частиц:

$$\delta = \frac{\lambda}{2} = \frac{d}{2} \left(\frac{0,775}{3\sqrt{1-p}} - 1 \right).$$

Ниже приводим таблицу 4 искомых величин, согласно данным опыта для нескольких грунтов.

Таблица 4

Грунты	d в см	p	δ в <i>тр</i> по системам группировки	
			Гексагональной	Кубической
Харьковский лессовый суглинок	0,00019	68	340	132
Таганрогский " "	0,00024	68	420	137
Луганский " "	0,00024	—	—	—
Камыш-бурунский мергелистый суглинок	0,00028	62	380	150
Кембрийская глина	0,000137	72	270	80

Если считать, что в цилиндрах частицы грунта располагаются по кубической системе группировки, тогда получаем искомую толщину, близкую к 100 *тр*¹. По гексагональной системе группировки она дает величины порядка 300—400 *тр*.

О величинах толщины слоя воды соответствующей максимальной гигроскопической влажности

Определяем ее по формуле

$$\xi = \frac{w_g^0}{S},$$

где S — суммарная поверхность частиц 1 см³ грунта;
ξ — толщина слоя.

¹ По данным проф. Терцаги и других, она близка к толщине слоя мезоморфной воды в 100 *тр*.

Принимая $w_g = 3,5-5\%$ (весовая влажность), имеем данные таблицы 5.

Таблица 5

Грунты	S в $см^2$	w_g в %	ξ в $ты.$
Лессовидн. грунты	20000	0,035	17,5
Кембрийская глина	28000	0,05	17,9

Подводя итог всему сказанному в данной главе, мы видим, что приняв две основных гипотезы о причинах набухания и усадки грунтов, мы вывели ряд формул, которые освещают довольно детально механику этих процессов в грунтах. Теперь, естественно, возникает вопрос, какая же гипотеза имеет наибольшие преимущества. Решение этого вопроса требует очень большого количества опытов по всевозможным физическим показателям рассматриваемых процессов в грунтах. Отметим два опыта, произведенные в лаборатории Украинского института сооружений, относящиеся к этому вопросу.

Первый опыт — влияние температуры на величину набухания грунта. Для этого пользовались измерительным цилиндром, куда насыпался грунт в порошкообразном виде. Цилиндр наполнялся водой, затем измерялась высота осевшего грунта при комнатной температуре. Тот же опыт проделывался при температуре выше $50^\circ C$. Никакого заметного понижения уровня грунта во втором случае не обнаружилось, что и можно было ожидать, так как, по данным Трилля (для ртути и для других жидкостей), до $100^\circ C$ никакого разрушения твердой жидкости на грани раздела фаз не замечается.

Во втором опыте кембрийская глина подвергалась неоднократному продолжительному кипячению сначала в растворе едкого натра, затем в растворе соляной кислоты, до полного почти побеления этого грунта, который в нормальном виде имел синюю окраску. Это побеление служило признаком разрушения гелевых оболочек зерен.

Нормальная кембрийская глина в цилиндре, взятая в сухом порошкообразном виде, занимала $5 см^3$, после осаждения в цилиндре с водой она, в результате набухания, занимала объем около $15 см^3$. Та же глина, переработанная вышеуказанным способом, взятая в сухом виде в количестве $5 см^3$, при осаждении в воде занимала объем в $6,5 см^3$. Означенный объем глины не изменялся, находясь в цилиндре с водой в течение года.

Механический анализ нормальной кембрийской глины дал следующие результаты (таблица 6).

Таблица 6

Фракции в мм	0,25—0,05	0,05—0,01	0,01—0,005	0,005—0,001	< 0,001
Процент	2,6	24,4	30,3	10,5	32,2

Удельная поверхность $U = 728,67$.

Механический анализ переработанной вышеуказанным способом глины составляет (таблица 7):

Таблица 7

Фракции в мм	0,25—0,05	0,05—0,01	0,01—0,005	0,005—0,001	< 0,001
Процент	3,6	25	33,5	17,4	20,5

Удельная поверхность

$$U = \frac{0,036}{0,15} + \frac{0,25}{0,03} + \frac{0,315}{0,0075} + \frac{0,174}{0,003} + \frac{0,205}{0,0005} = 521.$$

Данные опыта, как видим, оказались не совсем показательными, так как при обработке грунта очень мелкие частицы, очевидно, растворились в сильных реактивах, но все же из него можно получить некоторые выводы: так, для харьковского лессового суглинка, для которого удельная поверхность равна 525, после набухания 5 см³ сухого порошкообразного грунта получается объем порядка 10 см³, тогда как для обработанной кембрийской глины только 6,5 см³.

Характерно также, что грунты, прокаленные при 700° Ц, почти теряют способность к набуханию.

Подводя итог всему сказанному в данной работе, можно сделать выводы:

1) Метод приведения грунта к упорядоченной системе расположения зерен шарообразной формы, аналогичной кристаллической решетке минералов с переменными по величине просветами между зернами, примененный в данной работе, хотя и не дает полных совпадений с данными опыта, все-же в некоторых случаях приближается к ним.

2) Указанный метод дает возможность некоторых приближенных расчетных величин расстояний между зернами грунтов в процессах увлажнения и высыхания, менисковых размеров, толщины водных обволакивающих оболочек зерен грунта и т. д.

ВОПРОСЫ ГРИБОУСТОЙЧИВОСТИ ДЕРЕВЯННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1. Общие соображения

Три условия должны быть выполнены одновременно, чтобы деревянная конструкция подверглась опасности поражения грибами.

Во-первых, древесина должна быть заражена грибницей или спорами грибов, во-вторых, древесина должна быть увлажнена и в-третьих, температура среды должна находиться в установленных пределах.

Каждое из этих условий необходимо, но ни одно из них не является достаточным. Борьба с гниением древесины поэтому может вестись путем устранения только одного из этих трех факторов.

Наиболее действительным и доступным является защита древесины от гниения путем понижения ее влажности. Абсолютная надежность этого способа подтверждена вековым опытом.

Сухие деревянные конструкции сохраняются в течение неограниченного срока. Консервирование сушкой является универсальным способом сохранения любых органических продуктов: сена, фруктов, овощей и т. д.

Создание температуры, препятствующей развитию грибов или убивающей их, в практических условиях не всегда доступно. Защита древесины от заражения также крайне затруднительна. Не всегда можно уберечь древесину в лесу, в пути, на складах, на стройке и, наконец, в сооружении от заражения; тем более, что последнее не сразу проявляется, и по виду здоровая древесина, не изменившая цвета и не имеющая никаких внешних признаков поражений грибами, может оказаться зараженной ими. Антисептирование также не во всех случаях и не полностью является надежной гарантией в отношении защиты от заражения и тем более от гниения уже зараженной конструкции.

Тем не менее нельзя пренебрегать и теми способами борьбы с грибами, которые защищают древесину от заражения или основаны на действии температур, убивающих грибницу или препятствующих ее жизнедеятельности.

В некоторых случаях мы можем бороться с грибами только этими средствами, в других — они дополняют способы, основан-

ные на борьбе с влажностью древесины, придавая последним большую надежность.

Роль влажности древесины в жизнедеятельности грибов, разрушающих древесину, повидимому, заключается в следующем. Как показали опыты Миллера¹, в результате деятельности грибов, целлюлоза древесины, составляющая более 50% ее вещества, поглощает из воздуха кислород и разлагается на воду и углекислоту. Этот процесс осуществляется грибами при помощи выделяемых ими ферментов. Однако, действие ферментов возможно лишь в том случае, если последние растворены. Илькевич², Миллер и Борщевский полагают, что влажность, соответствующая точке насыщения волокна (30—31%)³, является той минимальной влажностью древесины, при которой возможно начало процесса развития или возобновления жизнедеятельности грибов.

При влажности древесины ниже этого предела, как полагают упомянутые авторы, грибы не могут развиваться. Это объясняется тем, что влажность ниже точки насыщения волокна — гигроскопическая, следовательно, в этом случае вода в древесине находится в связанном состоянии. При более высокой влажности имеется и свободная вода.

Установление нижнего предела влажности, при которой еще возможно развитие грибов, понятно, является вопросом перво-степенной важности. Практика показала, что для защиты конструкции от гниения ее влажность не должна быть выше 18% и во всяком случае — 23%. Ряд исследований показал, что грибы развиваются при влажности ниже 31%. Некоторые грибы (синевы) прорастают на древесине с влажностью 22—23%.

Это расхождение теоретических соображений с опытом Борщевский пытается объяснить неравномерностью распределения влаги в древесине. При средней влажности 23 и более процентов, по его мнению, в отдельных слоях возможно достижение точки насыщения волокна⁴.

Такое объяснение нельзя назвать удачным.

Во-первых, предполагая неравномерное распределение влаги, следует ожидать переувлажнения отдельных слоев даже в сухой древесине и, следовательно, возможности развития грибов и в последней, что, однако, не наблюдается; во-вторых, это объяснение весьма убедительно опровергается опытами Э. Е. Фрай-

¹ Проф. В. В. Миллер. Вопросы биологии и диагностики домовых грибов. Процесс гниения древесины и ее самоувлажнения, М. 1932.

А. Н. Борщевский. Анализ современной теории гниения. „Строительная Промышленность“, № 2, 1935.

² К. Я. Илькевич. Грибы разрушители древесины, М. 1912.

³ Дальнейшее развитие грибов, по Миллеру, возможно и при более низкой влажности, так как действием грибов целлюлоза древесины разлагается на воду и углекислоту. При этом первая способна создать достаточную влажность для распространения грибов даже на сухую древесину.

⁴ А. Н. Борщевский и проф. В. Г. Цветаев, Инструкция по борьбе с гниением дерева.

фельд, описанными в ее статье в настоящем сборнике. Несмотря на то, что опыты производились на образцах толщиной около 1 мм, в которых трудно предполагать неравномерное распределение влаги, грибы прорастали при влажности 26%.

Повидимому, неправильно принимать нижним пределом возможного прорастания грибов точку насыщения волокна. Этим пределом, вероятно, является влажность 22—23%, ниже которого это прорастание не наблюдалось.

Теоретическим обоснованием такого утверждения могут являться следующие соображения. В 1858 г. Нагелли, наблюдая явление двойного лучепреломления в волокнах древесины, крахмала и некоторых других веществ пришел к выводу, что последние состоят из мельчайших кристалликов — мицелл. Окончательно эта гипотеза была подтверждена рентгенографическим путем Шеером в 1921 г. На мицеллярную структуру древесины указывают также явления разбухания и усушки древесины, которые различны в радиальном, тангенциальном и продольном направлениях. Это обстоятельство легко объясняется различием размеров мицелл в этих направлениях.

Дальнейшие рентгенографические изыскания показали, что на поверхности мицелл молекулы расходятся веером, на основании чего Катц¹ предположил, что молекулы целлюлозы длиннее мицелл. Последние являются лишь местами упорядоченного расположения молекул, межмицеллярные же пространства заполнены неорганизованно расположенными молекулами. Подобное предположение, хорошо согласуемое с дальнейшими нашими выводами, между прочим, объясняет причину пропорциональности между разбуханием древесины и ее влажностью.

Действительно, предполагая, что межмицеллярные поры не заполнены молекулами, следовало бы ожидать нелинейной зависимости между разбуханием и влажностью. Несомненно, что при малом увлажнении вода адсорбируется на древесине мономолекулярным слоем. Разбухание при этом возможно было бы только при условии, что толщина пор мала по сравнению с молекулами воды, которые, проникая в поры, „расталкивают“ их. Но при этом нельзя было бы ожидать так называемой „капиллярной адсорбции“, то-есть конденсации паров в узких порах над резко вогнутыми менисками, поскольку в порах толщиной в 2—3 молекулы вообще бессмысленно говорить о мениске. Если же предположить, что межмицеллярные поры велики и допускают полимолекулярную адсорбцию, то невозможно объяснить разбухание при низкой влажности древесины.

Между тем, при наличии молекул в межмицеллярных порах, следует ожидать „расталкивания“ молекул целлюлозы при любой влажности древесины.

¹ Д-р Р. Катц. Рентгенографический метод исследования, как метод определения, протекают ли процессы при коллоидно-химических изменениях высокополимерных веществ только на поверхности мицеллы или процессы протекают также внутри мицеллы. Техника, № 4, 1935.

Молекулы сложных органических соединений—ферментов огромны по сравнению с молекулами воды. В сухой древесине в межмицеллярные поры даже молекулы воды проникают с трудом, „расталкивая“ молекулы целлюлозы; ферменты туда проникать не могут, почему и остаются неактивными. Лишь по мере увлажнения и разбухания древесины возможно проникновение ферментов в стенки волокон древесины. Для различных видов грибов состав, а следовательно, и размеры молекул ферментов могут быть различными. Поэтому и нижний предел влажности для различных видов грибов различен. Этим пределом является тот, при котором размеры разбухших пор становятся большими, чем размеры соответствующих молекул ферментов.

Так как прорастания грибов не наблюдалось при влажности древесины ниже 22%, эту последнюю, по видимому, и следует признать верхним допустимым пределом влажности древесины.

Назначая влажность древесины, идущей в дело, нужно, однако, помнить, что влага в древесине способна перемещаться и, хотя начальная влажность ее может и не превосходить указанного выше предела, в результате перемещения отдельные слои древесины могут сильно переувлажняться, при чем создается опасность поражения конструкции грибами.

Поэтому важно выяснить законы движения влаги, для чего в первую очередь необходимо установить механизм движения влаги.

2. Механизм движения влаги в древесине

Несмотря на большой теоретический и практический интерес, механизм движения влаги в древесине изучен недостаточно. На сегодняшний день нет исчерпывающего объяснения этого явления. Существует лишь ряд гипотез, иногда противоречивых, пытающихся объяснить сложные явления, наблюдаемые при движении влаги в процессе увлажнения и сушки древесины.

Эти гипотезы основываются на некоторых опытных данных, заключающихся в основном в следующем. Если сосуд с водой покрыть деревянной пластинкой и устранить возможность утечки воды через щели, то количество воды в сосуде будет уменьшаться испарением через эту пластинку. Сначала испарение будет происходить неравномерно, затем, когда влажность древесины достигнет состояния гигроскопического равновесия, потеря влаги будет строго равномерной и будет зависеть от площади пластинки, ее толщины и упругости водяного пара в сосуде и окружающем пространстве (эксикаторе).

Подобные опыты производили: Стилвелл¹, Мартлей², Фокин³ и др. Аналогичные опыты производились в Украин-

¹ С. Т. Д. Стилвелл. Движение влаги в древесине в связи с ее сушкой. Сборник „Сушка дерева“, М. 1932.

² Д. Ф. Маттлей. Движение влаги в древесине. Установившееся состояние. Сборник „Сушка дерева“, М. 1932.

³ Инж. К. Ф. Фокин. Новые данные о паропроницаемости материалов. „Проект и Стандарт“, № 8—9, 1935.

ском институте сооружений автором, совместно с С. К. Пузиновским. Результаты опытов у всех исследователей получились весьма близкими. Рассмотренное явление весьма сходное с диффузией, которая, как известно, подчиняется закону Фика:

$$dn = -D_c \frac{dc}{dx} f dz, \quad (1)$$

где n — количество продиффундировавшего вещества,

D_c — коэффициент диффузии,

$\frac{dc}{dx}$ — градиент концентрации,

f — площадь,

z — время.

Знак минус указывает, что диффузия течет в сторону понижения концентрации.

Из газового закона: $p\upsilon = RT$, или $p = cRT$; где $c = \frac{1}{\upsilon}$ следует, что вместо концентрации можно принять парциальное давление. Для водяного пара в воздухе зависимость между p и c выражается формулой:

$$p = \frac{(1 + aT)c}{1,0582}. \quad (2)$$

При отсутствии температурного перепада можно написать:

$$dn = -D_n \frac{dh}{dx} f dz \quad (3)$$

или

$$dn = -D_\varphi \frac{d\varphi}{dx} f dz, \quad (3')$$

где $\frac{dh}{dx}$ — градиент упругости пара, а

$\frac{d\varphi}{dx}$ — градиент относительной влажности воздуха в порах древесины.

Известно, что вследствие гигроскопичности древесины, при влажности ее ниже точки насыщения волокна, между ее влажностью, температурой и относительной влажностью воздуха существует определенная зависимость такая, что:

$$w = f(\varphi, t), \quad (4)$$

где w — влажность древесины и φ — относительная влажность воздуха.

Зависимость эта была изучена многими исследователями. Наиболее полно она дана Н. Н. Чулицким в виде t, φ, w диаграммы (фиг. 1).

Из (4) следует, что вместо уравнения (3) или (3') можно написать:

$$dn = -k \frac{dw}{dx} f dz. \quad (5)$$

Действительно, на основании (4):

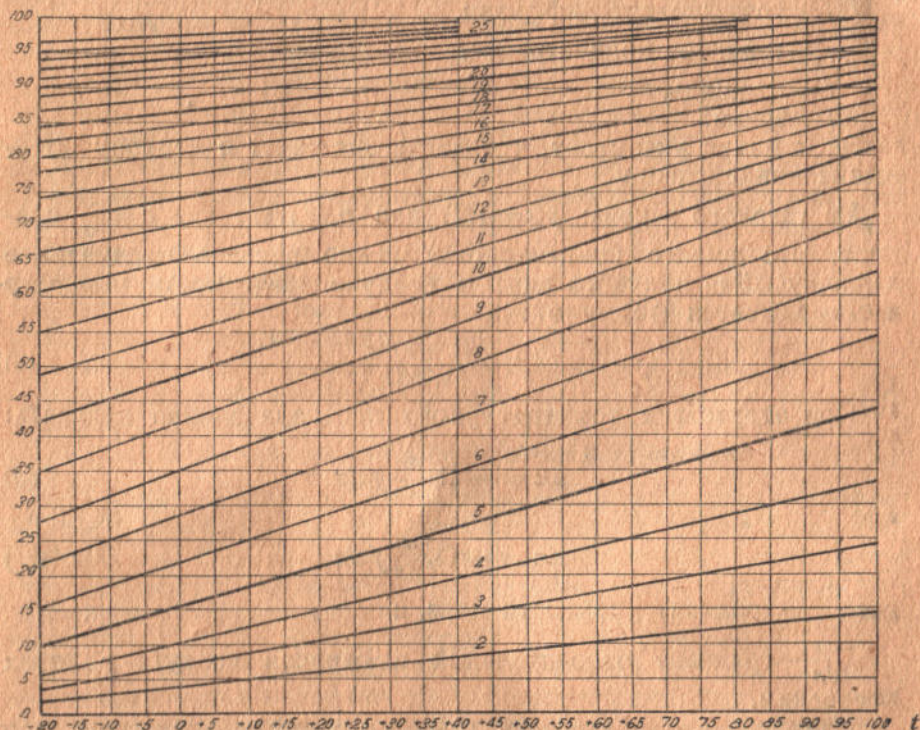
$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx};$$

таким образом, приняв:

$$D = k \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (6)$$

получим полное совпадение обоих уравнений.

φ



Фиг. 1

Простейшие предположения, вытекающие из уравнений (3) и (5), заключаются в следующем:

1) влага диффундирует в виде пара в порах древесины (уравнение (3)) или

2) влажность древесины на поверхностях устанавливается равновесной влажностью прилегающих к этим поверхностям слоев воздуха.

Таким образом, в пластине создается перепад влажности, в результате которого диффундирует заключенная в порах стенок волокон (межмицеллярных порах) вода (уравнение (5)).

Некоторые исследователи (Тиман, Стилвелл и др.) предполагают, что фактически в древесине протекают оба явления

одновременно: в межмицеллярных порах движется вода, в полостях волокон и сосудах — пар. Другие (Эгнер, Любимов и др.) полагают, что влага по пути трансформируется то в воду (в межмицеллярных порах), то в пар (в полостях волокон).

Надо отметить, что уравнения (3) и (5) не всегда тождественны. Действительно, при наличии разности температур, градиент упругости пара может достигать весьма значительных размеров, между тем, градиент влажности древесины может отсутствовать или даже принимать отрицательные значения. При влажности выше точки насыщения волокна и неизменной температуре упругость пара, во всех слоях древесины, равна насыщающей и не зависит от влажности древесины. Таким образом, градиент влажности может существовать независимо от наличия градиента упругости пара и наоборот. Поэтому весьма важно для практических целей установить истинный механизм движения влаги и, следовательно, справедливость одного из приведенных уравнений.

Указанный вопрос интересует, главным образом, строителей с точки зрения паропроницаемости, увлажнения и сушки конструкции, а также сушильщиков для построения теории динамики влаги в древесине и других твердых телах.

Строители, основываясь на положениях, выдвинутых А. Н. Борщевским¹ и К. Ф. Фокиным², обычно принимают уравнение (3), на основании чего заключают о возможности увлажнения конструкции при наличии температурного перепада, если с холодной стороны уложен пароизолятор.

Сушильщики придерживаются уравнения (5), которое позволяет относительно просто построить теорию динамики сушки, согласно уравнению (второй закон Фика):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (7)$$

решение которого дано Фурье.

Хотя удовлетворительного теоретического обоснования справедливости указанного уравнения для динамики сушки нет, экспериментальные данные говорят в пользу его приемлемости. Поэтому некоторые авторы теории динамики сушки (Шервуд, Лыков и др.) считают уравнение (7) эмпирическим: механизм же движения влаги, по крайней мере при влажности древесины выше точки насыщения волокна, объясняют не диффузией, а капиллярными силами.

Уравнение (7) показывает, что движение влаги идет в сторону понижения влажности, но не может идти в сторону повышения ее, поэтому сухая стенка не может увлажняться выше состояния, равновесного влажности окружающего воздуха, т. е. выше

¹ А. Н. Борщевский. Причины поражения зданий домовыми грибами, М., 1932.

² К. Ф. Фокин. Строительная теплотехника ограждающих частей зданий, М., 1932.

точки насыщения волокна. При этом теория „глубинной конденсации“, выдвинутая А. Н. Борщевским, как одно из обоснований его взглядов на причины поражения зданий домовыми грибами, и в дальнейшем разработанная К. Ф. Фоккиным, была бы неверна и не было бы нужды в профилактических конструктивных мероприятиях против поражения зданий домовыми грибами. Однако, эксперименты, проводимые для обоснования применимости уравнения (7) для теории динамики влаги, производились над образцами, на противоположных сторонах которых была одинаковая температура. Справедливость же данного уравнения для случая, когда эти температуры не равны, экспериментально не была доказана.

Для выяснения истинного характера механизма движения влаги в древесине нами, совместно с С. К. Пузиновским и Б. Г. Гмырей, в Украинском институте сооружений был поставлен ряд опытов, проливающих некоторый свет на интересующее нас явление. Приведем краткое описание этих опытов, основные результаты их и выводы.

1. Стеклянные сосуды диаметром 4 и 10 см наполнялись дистиллированной водой или насыщенным раствором хлористого кальция, накрывались цилиндрическими пластинками и заклеивались с боков фольгой на вазелине или асфальтовом лаке и ставились в термостаты. Серной кислотой различной концентрации поддерживалась постоянная влажность в окружающей среде (термостате или эксикаторе).

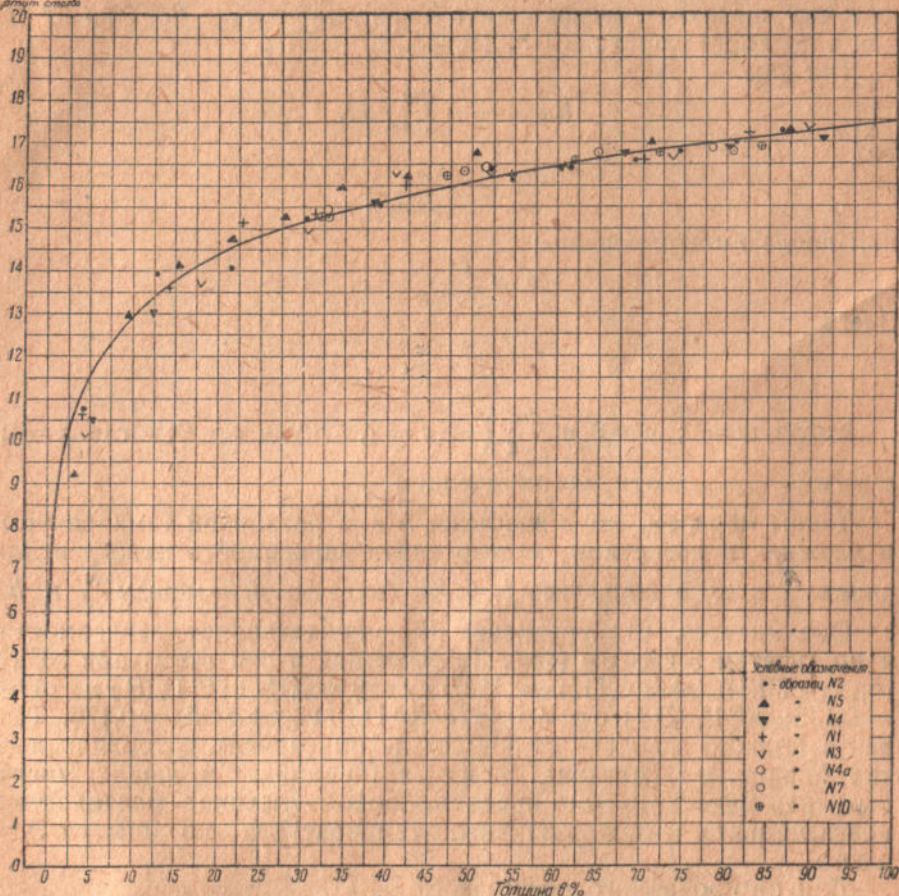
Температура и влажность регистрировались термографами и гигрографами. Всего было поставлено 90 опытов, при $t=0$, 10 и 20° Ц и перепадах относительной влажности воздуха в сосуде и окружающей среде: 100%—85%, 100%—70%, 70%—23%, 23%—0%.

Результаты опытов показали, что утечка воды, а следовательно и коэффициент диффузии, не связана с температурой, но сильно зависит от влажности воздуха. Средние значения коэффициента диффузии, в размерности $\frac{2}{\text{м. час. мм рт. ст.}}$ при перепаде в 100%—70%, для сосны и ели поперек волокон оказались 0,0075, близкие к данным Фоккина 0,0082 и Мартлея 0,00807 (данные Мартлея получены для того же интервала влажности воздуха путем пересчета в размерность $\frac{2}{\text{м. час. мм рт. ст.}}$).

После окончания опытов образцы были расколоты на тонкие слои, в которых была определена влажность. По t , φ , w диаграмме (Чулицкого) была определена упругость водяного пара по слоям образца. Результаты приведены на фиг. 2, на которой по оси ординат отложены упругости пара, а по оси абсцисс—отношение расстояния x рассматриваемого слоя от поверхности, на которой упругость пара равнялась бы 0, к некоторой фиктивной толщине образца X , при которой относи-

тельная влажность воздуха на поверхностях образца равнялась бы 0% и 100%.

Свойства
дерева в
данный момент



Фиг. 2

Как видно, результаты опытов на ряде образцов ложатся на одну кривую, уравнение которой с достаточной точностью для не слишком малых влажностей¹ имеет вид:

$$h = H \left(1 + \alpha \ln \frac{x}{X} \right), \quad (8)$$

где H — упругость насыщенного пара.

Кривая эта построена для опытов при $t = +20^\circ \text{C}$.

¹ Очевидно, при малых влажностях древесины (меньше 5%) уравнение это неверно, так как при $\frac{x}{X} = 0$; $\ln \frac{x}{X} = -\infty$ и следовательно $h = -\infty$. Однако, на практике с такими малыми влажностями не приходится встречаться.

Если построить аналогичную кривую на основании опытов Мартлея, проведенных при $t = +40^\circ \text{Ц}$, то оказывается, что ее уравнение будет то же. Эгнер¹, пользуясь другим методом, получил значение коэффициента k при температуре 80, 60 и 40°Ц для влажности древесины 5, 10, 15, 20 и 25%.

Так как

$$dn = -k \frac{dw}{dx} f dz,$$

то

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{dn}{f dz} \frac{1}{k}$$

или после интегрирования:

$$w = \frac{dn}{f dz} \frac{x}{k} + c.$$

Здесь

$$x = \frac{x}{X}.$$

Когда $w = 0$; $x = 0$ и $\frac{dn}{f dz} \frac{x}{k} + c = 0$, откуда $c = 0$; когда $x = 1$; $w = w_{\text{нас. волокна}}$; откуда определяем $\frac{dn}{f dz}$.

Таким образом, имея значения k для различной температуры и влажности древесины, можно найти зависимость между величиной $\frac{x}{X}$ и w , а пользуясь t , φ , w диаграммой — между $\frac{x}{X}$ и h .

Оказывается, что уравнение (8) удовлетворяет зависимости и по опытам Эгнера (фиг. 3). Значения α при этом: при 20°Ц (опыты УКИС'а) = 0,115; 40°Ц (Эгнер) = 0,139; 60°Ц (Эгнер) = 0,135; 80°Ц (Эгнер) = 0,127; 40°Ц (Мартлей) = 0,176. Так как α должно зависеть от породы лесоматериала, которая в опытах Мартлея (Англия), Эгнера (Германия) и наших могла быть различной, нужно придать особое значение постоянству коэффициента α при различных температурах, по опытам Эгнера.

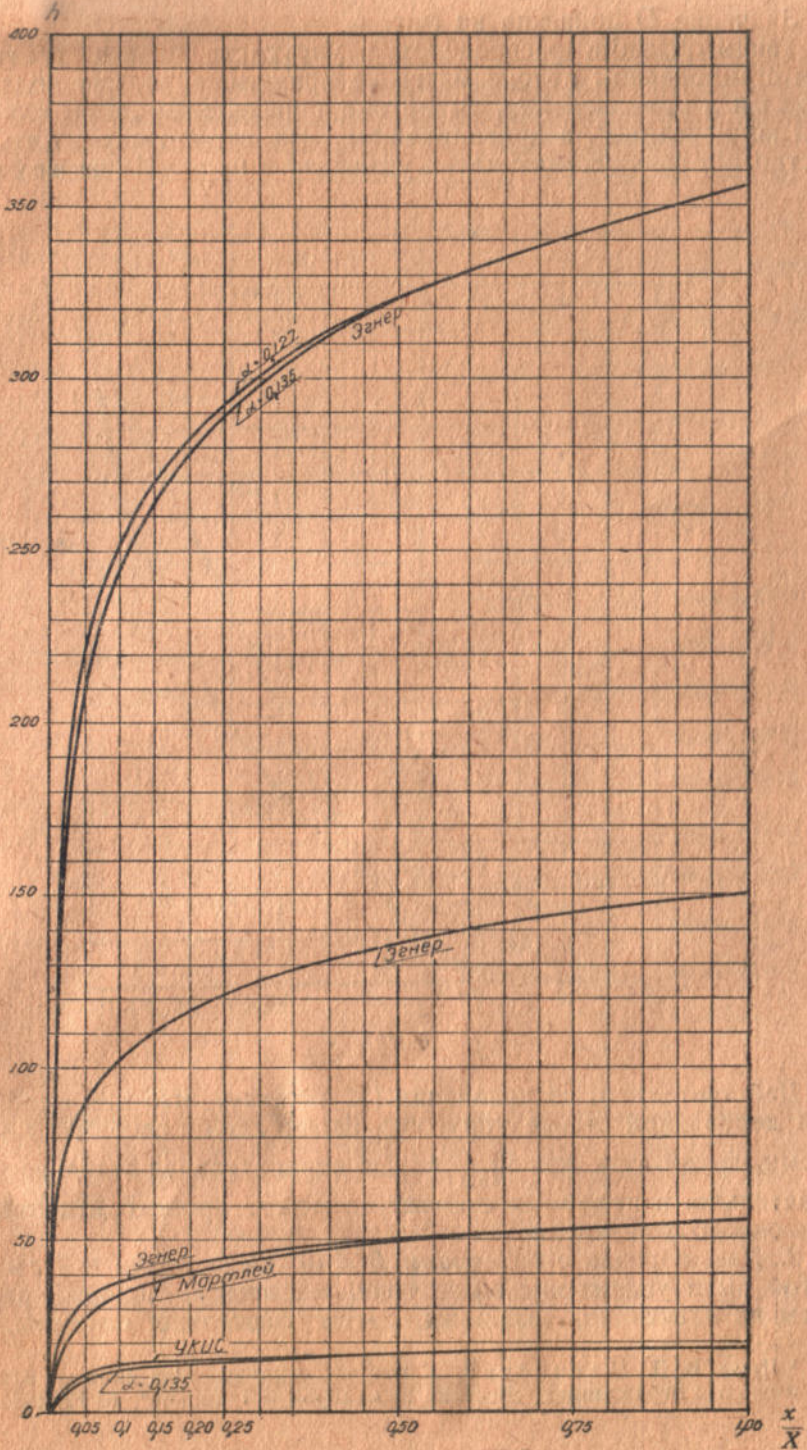
Для стационарного режима:

$$\frac{dn}{dz} = -Df \frac{dh}{dx} = \text{const.}$$

Откуда коэффициент диффузии может быть постоянным лишь при постоянстве градиента. Опыты же показывают, что градиент зависит от влажности древесины, откуда и коэффициент диффузии является величиной переменной, зависящей от влажности древесины и выражающейся формулой:

$$D = \frac{dn}{f dz} : \frac{dh}{dx}. \quad (9)$$

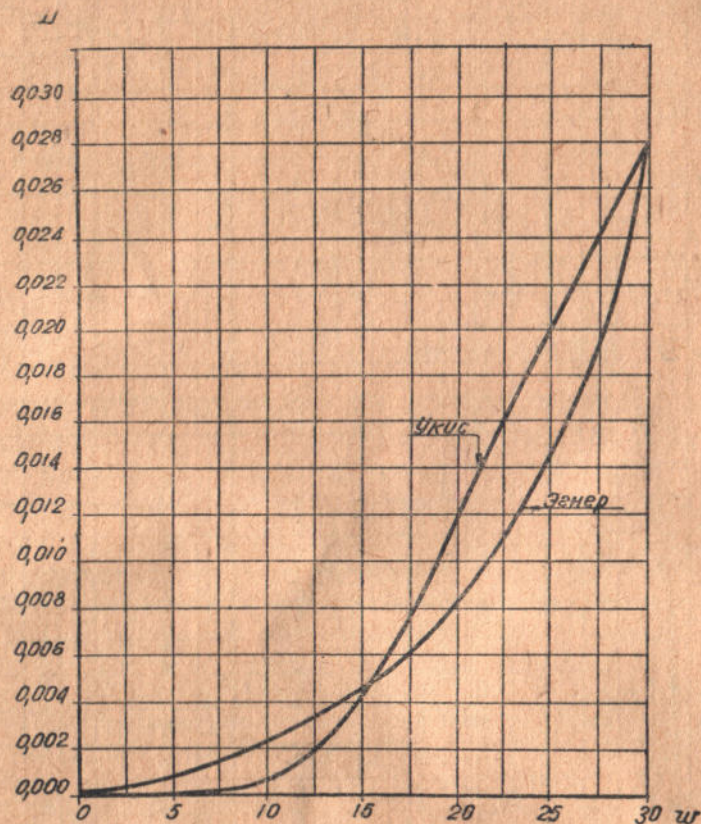
¹ Данные опытов Эгнера заимствованы нами из рукописи В. Т. И. инж. Федорова „Динамика сушки дерева“.



Фиг. 3

Значение D показано на фиг. 4.

Таким образом, распределение упругости пара в древесине при стационарном потоке влаги не прямолинейно, как полагает Фокин в предлагаемом им методе определения „зоны глубокой конденсации“, а криволинейное. На недооценку этого, известного и раньше, положения указывал и проф. Мачинский¹.



Фиг. 4

Действительно, из уравнения (8) вытекает, что при однородной деревянной стенке упругость пара в любом слое будет ниже насыщающей, так как $\ln \frac{x}{X}$ всегда отрицательная величина. Следовательно, в подобных стенках не может происходить конденсационного увлажнения.

2. Два образца с размерами 5×10 см в плане и 7 см высотой были увлажнены выше точки насыщения волокна, расколоты на пластинки, взвешены, затем тщательно сложены, так

¹ Проф. В. Д. Мачинский. К вопросу о конденсации водяных паров в строительных ограждениях. „Вестник Инженеров и Техников“, № 12, 1935.

чтобы не были видны места раскола, после чего с пяти сторон заклеены фольгой на новолAKE; незаклеенной стороной образцы были приведены в соприкосновение с поверхностью воды, температура которой во время опыта поддерживалась 99° Ц. Сверху был установлен холодильник с проточной водой. При этом образцы были заклеены и касались воды так, чтобы ток влаги в одном образце был от середины к периферии, а в другом — в обратном направлении. Распределение температуры в образце замерялось термопарами и было линейным. Опыт, не считая времени прогрева, длился 18 часов. Затем образцы были разобраны и быстро взвешены. Так как древесина была увлажнена выше точки насыщения волокна, то в порах был насыщенный пар.

При линейном распределении температуры $t = a - bx$ упругость насыщенного пара в древесине определялась формулой Магнуса:

$$H = 4,58 \cdot 10^{\frac{7,44(a-bx)}{234,7+a-bx}}$$

а коэффициент диффузии по формуле:

$$D = - \frac{dn}{fdz} : \frac{dH}{dx} \quad (9')$$

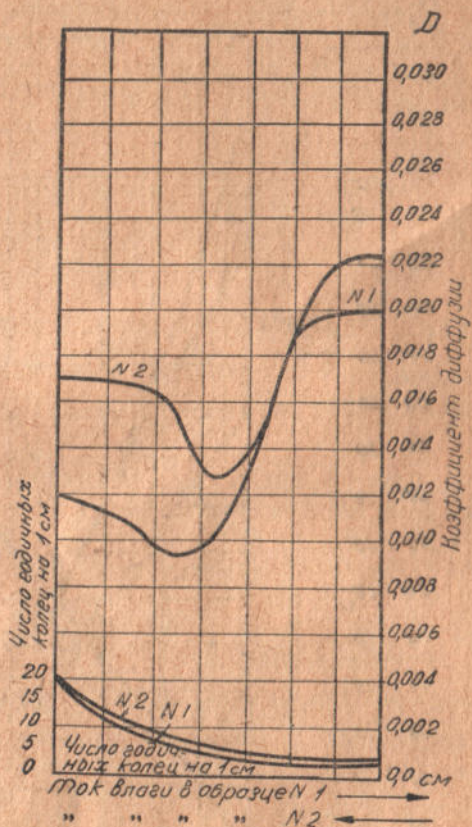
Результат опытов показан на фиг. 5. Как видно, коэффициент диффузии не связан с температурой, но зависит от количества годовичных колец на единицу длины.

Коэффициент диффузии k (по формуле 5), как известно, весьма сильно меняется с температурой, это дает основание полагать, что формула (3) лучше отражает физическую картину, чем формула (5).

3. Если коэффициент диффузии, как указывалось выше, не зависит от температуры, то уравнение (8) распределения упругости пара справедливо и при наличии температурного перепада.

Приняв $t = f(x)$, напишем:

$$h = 4,58 \cdot 10^{\frac{7,44f(x)}{234,7+f(x)}} \left(1 + 0,135 \ln \frac{x}{\bar{x}} \right) \quad (8')$$



Фиг. 5

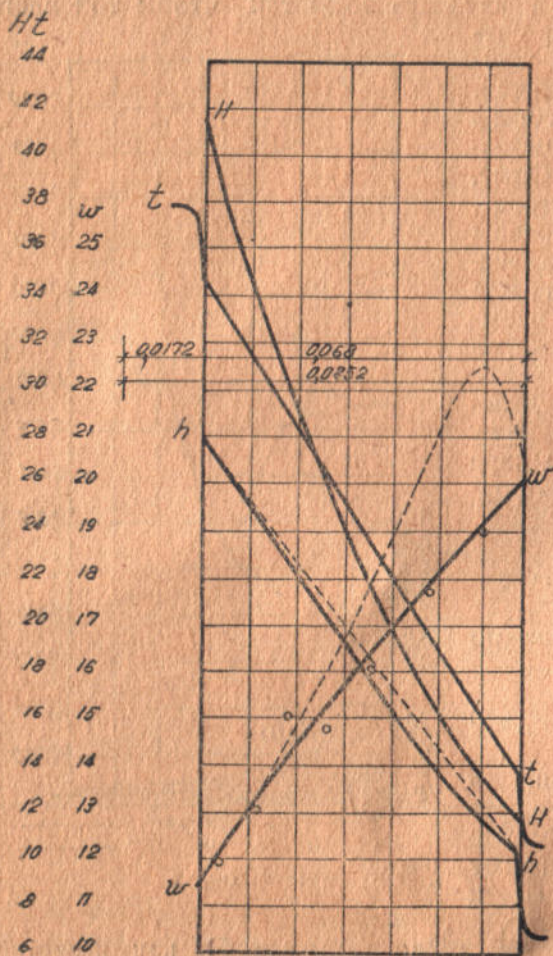
В установку, состоящую из двух герметически закупоренных камер, в которых поддерживались постоянные, но различные температуры и влажность, регистрировавшиеся термографами и гигрографами, были заложены образцы древесины. Образцы были поставлены между обеими камерами так, чтобы через них

шел ток влаги, расколоты в направлении перпендикулярном току и периодически взвешивались. Через 2 месяца было установлено, что ток влаги стационарен. Распределение температуры, влажности древесины и упругости водяного пара (t , w и h) показано на фиг. 6. На этой же фигуре показано распределение упругости пара, полученное по формуле (8')¹.

Пунктиром показано распределение влажности древесины и упругости водяного пара, полученные по известному способу Фокина.

Как видно формула (8') хорошо отвечает опытным данным, между тем способ Фокина приводит в данном случае к неверным результатам.

4. Движение влаги в холодную зону может быть объяснено гипотезой диффузии пара. На первый взгляд, однако, может показаться, что и капиллярная гипотеза разрешает эту задачу. Последнее мнение разделяется некоторыми сушильщиками (на-



Фиг. 6

¹ Так как φ_1 и φ_2 , а также t_1 и t_2 — относительные влажности и температуры в камерах — регистрировались, то по формуле (8) получаем:

$$\varphi_1 = \frac{100 h_1}{H_1} = 100 \left(1 + \alpha \ln \frac{x_1}{X} \right) \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{100 h_2}{H_2} = 100 \left(1 + \alpha \ln \frac{x_2}{X} \right),$$

кроме того, $x_2 = x_1 + a$, где a толщина образца.

пример, Любимовым¹). Для выяснения этого обстоятельства был поставлен ряд опытов, заключающихся в следующем. Образец древесины раскалывался на слои, взвешивался, затем тщательно составлялся, чтобы не были видны места раскола, заворачивался в фольгу на лаке и устанавливался на нагреватель; сверху на образец ставился холодильник с проточной водой. Распределение температуры регистрировалось термомпарами.

Параллельно ставились такие же опыты с нерасколотыми образцами, чтобы устранить влияние раскола. Через некоторый промежуток времени образцы разбирались или раскалывались и устанавливалось распределение влажности.

Капиллярное натяжение в эллиптических капиллярах определяется известным уравнением Лапласа

$$p = \alpha \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (10)$$

или для плоских пор (так как $r_2 = \infty$)

$$p = \frac{\alpha}{r} \quad (10')$$

Но $\alpha = \alpha_0 - \beta t$, где α — постоянная капиллярного натяжения, для воды при 0°C равная 75,8 эргов, β — температурный коэффициент равный 0,152 в размерности $\frac{\text{эрг}}{\text{градус}}$.

При наличии разности температур на поверхностях образца, полагая межмицеллярные поры плоскими, разность капиллярных натяжений

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\alpha_0 - \beta t_1}{r'} - \frac{\alpha_0 - \beta t_2}{r''}, \quad (11)$$

где t_1 и t_2 — температуры на поверхностях, а r' и r'' — средние полутолщины межмицеллярных пор на этих же поверхностях.

Очевидно, когда $p_1 > p_2$ или $\frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} > \frac{r'}{r''}$, натяжение на поверхности I (теплой) больше, чем на поверхности II (холодной), и влага будет двигаться к теплой поверхности, что никогда не наблюдается. Если $p_1 < p_2$; $\frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} < \frac{r'}{r''}$ влага движется к холодной поверхности и при $\frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} = \frac{r'}{r''}$ движения влаги не происходит.

При влажности древесины выше точки насыщения волокна усушка не наблюдается, следовательно, $r' = r''$. Поэтому $\Delta p = \frac{\beta}{2}(t_2 - t_1)$ и влага всегда должна идти к холодной поверхности. Но по мере движения влаги, если доступ ее извне прекращен, с теплой стороны происходит подсыхание. Влажность древесины опускается ниже точки насыщения волокна, при этом начинается усушка, толщина пор уменьшается и когда $\frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} = \frac{r'}{r''}$ дальнейшее движение влаги должно прекратиться.

¹ Н. Я. Любимов. Теория и практика сушки дерева, 1932.

Точные размеры пор определить затруднительно, но отношение $\frac{r'}{r}$ приблизительно можно вычислить следующим образом.

Назовем удельный вес древесины g ; объемный вес абсолютно сухой древесины g_c , тогда объем всех пустот в сухой древесине составит:

$$O_{\text{сух}} = \frac{g - g_c}{g}. \quad (12)$$

Тот же образец в сухом состоянии, занимающий объем, равный единице, при увлажнении разбухает до $\frac{1}{1 - J_{06}}$; где J_{06} — объемная усушка. Очевидно, что древесины при этом не прибавилось и увеличение объема произошло только за счет увеличения пустот, поэтому объем их во влажной древесине составляет:

$$O_v = O_c + \frac{1}{1 - J_{06}} - 1 = \frac{g - g_c}{g} + \frac{J_{06}}{1 - J_{06}}. \quad (13)$$

Предположив, что при достижении точки насыщения волокна все пустоты в нем заполнены водой, определим ее количество:

$$\gamma = 0,31 g_c.$$

Если плотность воды при этом не изменяется, т.е. равна единице, то объем межмицеллярных пор составляет:

$$O_{\text{в.м.п}} = 0,31 g_c,$$

а объем полости трахеид во влажной древесине:

$$O_{\text{вт}} = O_v - O_{\text{в.м.п}} = \frac{g - g_c}{g} + \frac{J_{06}}{1 - J_{06}} - 0,31 g_c. \quad (14)$$

В сухой древесине объем полости трахеид уменьшается так же, как и всего образца и составит:

$$O_{\text{ст}} = O_{\text{вт}} (1 - J_{06}), \quad (14')$$

а объем межмицеллярных пор:

$$\begin{aligned} O_{\text{с.м.п}} &= O_c - O_{\text{ст}} = \frac{g - g_c}{g} - \left(\frac{g - g_c}{g} + \frac{J_{06}}{1 - J_{06}} - 0,31 g_c \right) (1 - J_{06}) = \\ &= O_c J_{06} + (1 + J_{06}) \left(O_{\text{в.м.п}} - \frac{1}{1 - J_{06}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Предположим, что межмицеллярные поры плоские и толщина их $d = 2r$ одинакова в тангенциальном и радиальном направлениях. Количество пор в каждом направлении будет в таком случае пропорционально усушке. Назовем количество пор в тангенциальном направлении n_τ и в радиальном n_p .

$$n_\tau = kn_p.$$

k — отношение тангенциальной усушки к радиальной; $k = 1,79$; $b_p = b_\tau = b$ — ширина поры; для квадратного сечения, со стороной равной 1, $b = 1$; l — длина поры.

Объем межмицеллярных пор в сухой древесине, пренебрегая поперечными порами (в торцах мицелл), составит:

$$O_{с.м.п} = n_\tau b_p l d + n_p b_\tau l d = (1 + k) n_p b l d, \quad (16)$$

а во влажной древесине:

$$O_{в.м.п} = n_\tau (b_p + \Delta b_p) l (d + \Delta d) + n_p (b_\tau + \Delta b_\tau) l (d + \Delta d),$$

но

$$b_p = b_\tau; n_\tau = k n_p; \Delta b_p = n_p \Delta d; \Delta b_\tau = k n_p \Delta d,$$

откуда:

$$O_{в.м.п} = n_p l [(1 + k) b d + 2 k n_p d \Delta d + (1 + k) b \Delta d + 2 k n_p \Delta d^2] \quad (17)$$

$$\frac{O_{в.м.п}}{O_{с.м.п}} = \frac{n_p l [(1 + k) b d + 2 k n_p d \Delta d + (1 + k) b \Delta d + 2 k n_p \Delta d^2]}{n_p l (1 + k) b d}$$

или после сокращения:

$$\frac{O_{в.м.п}}{O_{с.м.п}} = \left(1 + \frac{\Delta d}{d} \right) \left[1 + \frac{2 k n_p \Delta d}{(1 + k) b} \right],$$

но

$$1 + \frac{\Delta d}{d} = \frac{d + \Delta d}{d} = \frac{2r''}{2r'} = \frac{r''}{r'}; b = 1;$$

$n_p \Delta d$ — есть радиальное разбухание P , откуда:

$$\frac{r'}{r''} = \frac{O_{с.м.п}}{O_{в.м.п}} \left[1 + \frac{2 k P}{(1 + k) b} \right] = \frac{O_{с.м.п}}{O_{в.м.п}} \left(1 + \frac{2 k P}{1 + k} \right). \quad (18)$$

Примем сухой вес для сосны в среднем 0,46; $J_{06} = 0,104$, тогда:

$$O_c = \frac{1,54 - 0,46}{1,54} = 0,7;$$

$$O_{в.м.п} = 0,31 \cdot 0,46 = 0,142;$$

$$O_{с.т} = (0,7 + \frac{0,104}{1 - 0,104} - 0,142) (1 - 0,104) = 0,604;$$

$$O_{с.м.п} = 0,7 - 0,604 = 0,096;$$

$$\frac{r'}{r''} = \frac{0,096}{0,142} \left(1 - \frac{2 \cdot 1,79 \cdot 0,04}{1 + 1,79} \right) = 0,64.$$

Если разность влажностей на обеих поверхностях образца Δw меньше, чем влажность, соответствующая полному гигроскопическому насыщению $w_{гигр}$, то

$$\frac{r'}{r''} = 1 - \frac{w_{гигр} - w_1}{w_{гигр}} (1 - 0,64).$$

Таким образом, движение влаги в холодную зону будет идти до полного высушивания образца на теплой поверхности при разности температур на поверхностях, удовлетворяющих условию:

$$\frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} < 1 -$$

$$= \frac{w_{\text{гигр}} - w_1}{w_{\text{гигр}}} (1 - 0,64).$$

На фиг. 7 показан результат одного из наиболее характерных опытов. Как видно, на теплой поверхности образец почти полностью высох, на холодной увлажнились выше точки насыщения водяного пара, вычисленная по t, φ, w — диаграмма, понижается к холодной зоне. Между тем $t_1 = 94,5^\circ \text{C}$; $t_2 = 37,5^\circ \text{C}$; $w_{\text{гигр}} = 29\%$, $w_1 = 4\%$.

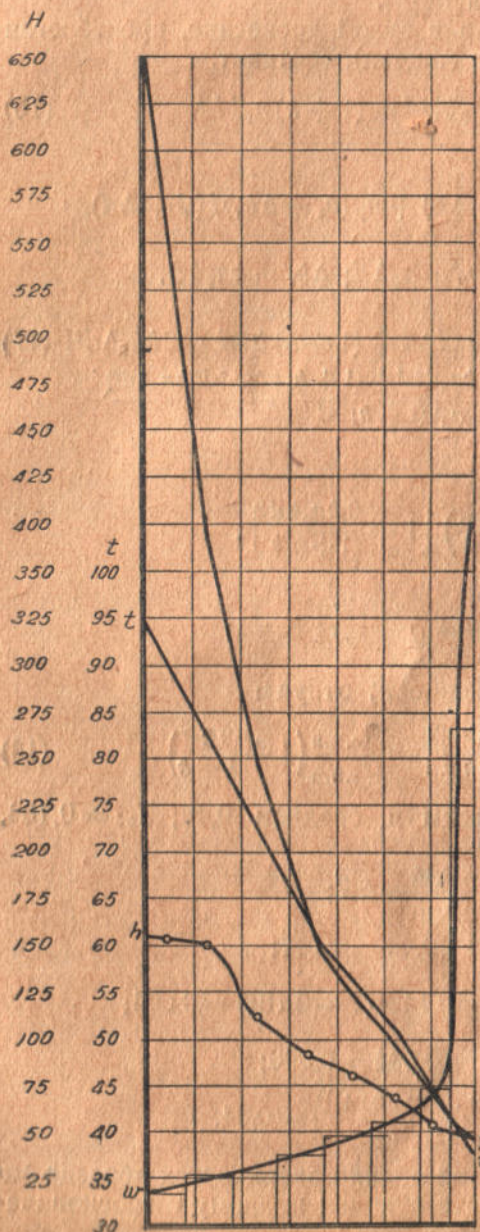
При этих условиях:

$$\frac{r'}{r''} = 1 - \frac{29 - 4}{29} \times$$

$$\times (1 - 0,64) = 0,69;$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_0 - \beta t_1}{\alpha_0 - \beta t_2} &= \\ &= \frac{75,8 - 0,152 \cdot 94,5}{75,8 - 0,152 \cdot 37,5} = \\ &= 0,875 > 0,69. \end{aligned}$$

Таким образом, движение влаги шло в сторону понижения упругости водяного пара, как и должно было бы быть при диффузии пара и в направлении, обратном тому, в котором должно



Фиг. 7

и в направлении, обратном тому, в котором должно

было бы происходить движение под действием капиллярных сил. Приведенные результаты ставят под сомнение гипотезу о капиллярных силах, как причины движения влаги к поверхности испарения.

5. Некоторое объяснение причины движения влаги к поверхностям испарения можно найти в результатах следующих опытов.

Несколько деревянных пластинок размерами $0,135 \times 0,135 \times 0,02$ м (0,02 м вдоль волокон) были увлажнены до 120—150%, расколоты, затем тщательно сложены и с четырех сторон были заклеены фольгой на вазелине. С двух сторон шла сушка попереk волокон при $t = 20^\circ \text{C}$ и $\varphi = 70\%$. Периодически образцы разбирались и взвешиванием определялась в них влажность. Затем были произведены следующие расчеты. Считая, что движение влаги вызвано перепадом упругости водяного пара, надо предположить, что количество тепла, затраченное в i -ом слое на испарение, равно количеству тепла, полученному из окружающего пространства и смежных слоев.

Для каждого слоя можно написать уравнение теплового баланса:

$$z \left[\alpha f_{in} (t_n - t_i) + \lambda f_b \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{x_i} \right) + \lambda f_b \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{x_{i-1}} \right) \right] = q_n \Delta m_i \quad (18)$$

где:

z — время

α — коэффициент тепловосприятая,

f_{in} — площадь наружной поверхности слоя,

f_b — площадь поперечного сечения образца,

x_i — полусумма толщин смежных слоев в метрах,

t — температура в слоях и наружная,

q_n — теплота испарения и

Δm — потеря влаги в слое образца.

Решая систему подобных уравнений, получим значение температуры. Зная температуру и учитывая, что во всех слоях влажность древесины выше точки насыщения волокна, находим упругость насыщенного пара; затем имеем для каждого слоя закон Фика, в форме:

$$f_b z \left[\frac{H_{i+1} - H_i}{x_i} - \frac{H_i - H_{i-1}}{x_{i-1}} \right] = -D_i. \quad (19)$$

Обработав подобным образом один из образцов, получим для периода в 144 часа следующие значения (таблица 1).

Значения D , хотя и отличаются от истинных (0,027), однако, не слишком сильно. Полученные отношения могут быть объяснены недостаточной точностью расчета.

Таким образом, разность температур является одним из факторов, вызывающих движение влаги при сушке.

№ слоя	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Толщина слоя	0,013	0,014	0,014	0,015	0,015	0,016	0,016	0,013	0,017
Потеря веса	+9,55	+0,75	-0,24	-0,2	-0,53	0,48	-0,15	+0,40	+10,35
<i>H</i>	16,88	17,18	17,72	17,92	17,77	17,72	17,77	17,58	17,00
<i>t</i>	19,39	19,77	20,18	20,36	20,22	26,176	20,22	20,04	19,49
<i>D</i>	0,0371	0,080	0,0343	0,053	0,102	0,190	0,00403	0,0404	0,0445

При влажности древесины выше точки насыщения волокна движение влаги возможно только при наличии перепада температуры, при меньшей влажности градиент упругости водяного пара возникает как следствие наличия перепада влажности древесины.

3. Практические выводы

Уяснив себе механизм движения влаги, мы можем сделать ряд важных практических выводов.

1. Если в конструкции нет перепада температуры, то процесс сушки протекает следующим образом. Сначала происходит испарение влаги с поверхности древесины в окружающее пространство. Вследствие затраты тепла на испарение, температура поверхности при этом понижается. Пока понижение температуры не проникло вглубь конструкции или если конструкция с боков защищена от испарения пароизоляцией и через эти грани все время поступает тепло, как в рассмотренном выше опыте, в конструкции имеет место температурный перепад, который вызывает движение влаги. Однако, обычно в конструкциях притока тепла с боков нет и вскоре во всей толще устанавливается практически одинаковая температура. Тогда движение влаги происходит вследствие того, что на поверхности древесина подсохла и равновесная ей упругость водяного пара меньшая, чем в середине образца, где влажность большая. Таким образом, древесина подсыхает от краев к середине. Чем толще образец, тем больше времени нужно для его полной просушки. При этом увеличение времени сушки пропорционально 1,5—2 степени толщины образца. Для массивных конструкций эти сроки естественной сушки весьма значительны.

На фиг. 8 показано: ломаной — влажность образца до опыта; кривыми — влажность в процессе сушки при температуре 20°C и влажности воздуха 70%. Как видно, за 6 месяцев, середина образца еще не начала подсыхать.

Скорость сушки конструкции при отсутствии температурного перепада часто еще меньшая, чем в случае, изображенном на фиг. 8, так как обычно массивные деревянные конструкции окра-

шиваются, штукатурятся или покрываются толем, руберойдом или другим пароизолятором. Все это еще более замедляет сушку.

Естественно, что за время, потребное для просушки конструкции, — много месяцев, иногда несколько лет, конструкция, зараженная грибами, может сгнить прежде чем высохнет.

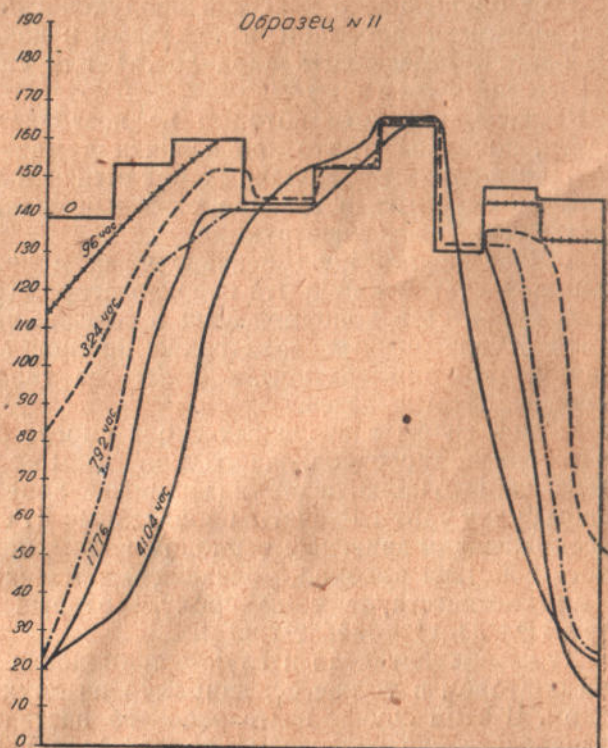
Для ускорения сушки конструкции снабжаются вентилируемыми воздушными прослойками. Это, однако, не может значи-

тельно ускорить сушку. Вмеждуетажных перекрытиях, где обычно применяется подобная вентиляция, скорость движения воздуха настолько мала, что конструкция, уложенная из сырого леса, для полной просушки требует весьма длительного срока. Этот вопрос был подробно рассмотрен инж. И. П. Ковтуном при помощи разработанного инж. К. Т. Лисоволенко метода расчета сушки пластинки при неоднородных условиях на поверхностях¹.

2. Наличие температурного перепада в конструкции вызывает движение влаги в зону пониженной температу-

ры. С теплой стороны, если только влажность воздуха в теплом помещении не слишком велика, древесина быстро подсыхает. Но коэффициент диффузии резко падает с понижением влажности (см. фиг. 4), благодаря чему подсохшие с теплой стороны слои древесины затрудняют доступ влаги из помещения.

В холодных слоях, напротив, влажность возрастает, коэффициент диффузии при этом также возрастает, что ускоряет движение влаги. Если в подобной конструкции с холодной стороны



Фиг. 8

¹ А. С. Эпштейн, К. Г. Лисоволенко и И. П. Ковтун. Исследование возможности поражения грибами деревянных конструкций промышленных и гражданских сооружений (альбом грибоустойчивых конструкций). Рукопись намечена к печати.

обеспечена поверхностная сушка, благодаря отсутствию пароизоляции или устройством хорошо вентилируемого воздушного прослойка, то высыхание конструкции может происходить весьма быстро. Метод расчета сушки и увлажнения конструкции дан автором¹. Метод этот, однако, должен быть уточнен на основе данных опытов, приведенных в этой статье, и в первую очередь введением переменного коэффициента диффузии.

Учет осушающего действия продухов в бесчердачных покрытиях возможен способом, изложенным в докладе автора: „Анализ работы осушающих продухов,“² или способом, предлагаемым К. Ф. Фокиным³.

Расчеты, привести которые не позволяет объем настоящей статьи, показывают, что при наличии температурного перепада избыток влаги в бесчердачных покрытиях в течение первой же зимы переместится в крайние холодные слои, а при наличии продуха удаляется из конструкции.

3. Если конструкция бесчердачных покрытий массивна и с холодной стороны покрыта пароизолятором (руберойдом), то вся влага скопится в холодной зоне в течение первой же зимы. Но зимой в увлажненных слоях грибы не смогут развиваться, вследствие низкой температуры, в более же теплых слоях — вследствие недостатка влаги.

Весной грибы в наружных слоях смогут развиваться, однако, достаточно одного солнечного дня, чтобы прогреть на несколько часов конструкцию, и в увлажненной зоне толщиной 1—2 см грибы будут убиты. Расчеты, проведенные К. Т. Лисоволенко⁴, рассмотревшим движение тепловой волны, показали, что длительность действия высокой, убивающей температуры на глубине до 2 см соответствует тому сроку, который по опытам Э. Е. Фрайфельд⁵ убивает грибы.

Хуже обстоит дело в случае применения конструкции с пароизолятором в толще ее; например, из двух досок и толя с войлоком. В этом случае влага рабочего настила сконцентрируется непосредственно под толем в теплой зоне, где, с одной стороны, по условиям температуры развитие грибов возможно и зимой, с другой стороны — летом нагрев прямыми лучами солнца недостаточен, чтобы убить грибы. Такие конструкции, очевидно, допустимы только из хорошо просушенного леса.

¹ Инж. А. С. Эпштейн. Расчет конденсационного увлажнения конструкций. „Проект и стандарт“, № 11, 1936.

² А. С. Эпштейн. Анализ работи висушувальних продухів. Сборник „Боротьба з домовими грибами“, Киев, 1936.

³ К. Ф. Фокин. Теплотехнический расчет покрытий с вентилируемыми воздушными прослойками. „Отопление и вентиляция“, № 6, 1936.

⁴ А. С. Эпштейн, К. Г. Лисоволенко и И. П. Ковтун. Исследование возможности поражения грибами деревянных конструкций промышленных и гражданских сооружений (альбом грибоустойчивых конструкций). Рукопись намечена к печати.

⁵ Э. Е. Фрайфельд. „Влияние высоких температур на грибницу деструктивных грибов“. „Індустріальне Будівництво“, № 11, 1936.

ВЛАЖНОСТЬ ДРЕВЕСИНЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВОЗМОЖНОСТИ ПОРАЖЕНИЯ ЕЕ ГРИБАМИ

Главнейшим фактором, влияющим на развитие домашних грибов в сооружениях, является влажность древесины. Точное знание пределов влажности, при которой может происходить развитие дереворазрушающих грибов, может в значительной мере облегчить борьбу с ними. Особенно интересен и актуален для строителя вопрос о низшем пределе влаги, при котором возможно развитие гриба.

Вопрос о влиянии влажности на развитие домашних грибов еще очень слабо разработан и освещен в литературе. Относительно наиболее изученного гриба *Merulius lacrymans* есть исследования Илькевича и Леман и Шейбле. У тех же двух авторов есть указания относительно оптимальной влажности для *Poria varovaria*, *Coniophora cerebella* и некоторых других грибов.

Исследования Илькевича над *Merulius lacrymans* устанавливают, что при содержании воды в дереве меньше 22—23% и больше 57—60% гриб уже не может разрушать дерево.

Данные Лемана и Шейбле относительно оптимальной влажности для некоторых грибов приведены в таблице 1:

Данные этих двух источников выражены относительной влажностью. Так называется влажность, выражающая отношение веса влаги в древесине к ее полному первоначальному весу.

В настоящее время процент влажности древесины исчисляется отношением веса влаги к весу древесины в абсолютно-сухом состоянии. Это выражение влажности носит название абсолютной влажности. Относительная влажность выражается меньшей цифрой, чем абсолютная, и всегда меньше 100%; абсолютная же может быть и больше 100%.

Переводя цифровые данные вышеприведенных источников из относительной влажности в абсолютную, получим:

По Илькевичу гриб *Merulius lacrymans* при содержании

Таблица 1

Название гриба	Оптимум влажности в %, необходимой для развития гриба при росте на березовых опилках
<i>Merulius lacrymans</i>	20
<i>Poria vaporaria</i>	35
<i>Daedalea quercina</i>	40
<i>Armillaria mellea</i>	45
<i>Stereum purpureum</i>	45 — 50
<i>Coniophora cerebella</i>	50 — 60

влаги в дереве меньше 28—30 и больше 132—150% уже не может разрушать дерево.

По Леману и Шейбле оптимальная влажность для развития грибов такова (в %):

<i>Merulius lacrymans</i>	25
<i>Poria vaporaria</i>	54
<i>Daedalea quercina</i>	66
<i>Armillaria mellea</i>	82
<i>Stereum purpureum</i>	82—100
<i>Coniophora cerebella</i>	100—150

При сравнении результатов исследования двух авторов наблюдаются некоторые противоречия, отмеченные уже проф. Миллером. В то время как по Илькевичу 28—30% являются нижшим пределом влажности, при котором гриб *Merulius lacrymans* уже не может разрушать дерево, — по Леман и Шейбле 25% влажности являются оптимальными для развития того же гриба.

Эти противоречия в цифровом материале, выражающем влажность древесины, необходимую для развития дереворазрушающих грибов, еще более усугубляются, благодаря смешиванию различными авторами данных, исчисленных в абсолютной и относительной влажности.

Пределы влажности для *Merulius lacrymans*, данные Илькевичем на основании экспериментов и выраженные в относительной влажности, трактуются некоторыми авторами как в абсолютной.

Так, в „Инструкции по борьбе с гниением дерева“ ЦБС строительной промышленности в §§ 6—9 указаны абсолютные влажности, наилучшие для развития грибов. Для *Merulius lacrymans* приведены цифры 22—57%; для *Poria vaporaria* — 25—35%; для *Coniophora cerebella* — 45—60%.

Как видно из предыдущего, эти цифры полагают абсолютную влажность, в то время как в действительности эти пределы справедливы при относительной влажности или абсолютной 28—132% для *Merulius lacrymans*; для *Poria vaporaria* — 33—54%; для *Coniophora cerebella* — 100—150%.

Те же, примерно, противоречия наблюдаются и в труде инж. Голдина „Руководство по борьбе с домовым грибом“. По Голдину процент абсолютной влажности, при котором происходит развитие большинства дереворазрушающих грибов, колеблется от 17 до 80%.

Относительно *Merulius lacrymans* указано: „Степень абсолютной влажности древесины, в пределах которой мерулиус может развиваться — от 20 до 60% (по Илькевичу)“ (стр. 66). *Coniophora cerebella*, по данным инж. Голдина, предпочитает высшие пределы влажности древесины (40—80%, стр. 74).

Если количество влаги в дереве выразить абсолютной влажностью (инж. Голдин на 35 странице предупреждает, что „в дальнейшем изложении под влажностью всегда будем подразу-

мевать абсолютную влажность⁴), то 40—80% это не есть высший предел влажности древесины. По данным Лемана и Шейбле оптимум влажности для *Coniophora cerebella*, выраженный в абсолютной влажности, равен 100—150%.

Согласно существующей теории (Илькевич, Миллер, Борщевский) развитие дереворазрушающих грибов возможно лишь в том случае, если влажность древесины выше „точки насыщения волокна“, т. е. 30%.

Точкой насыщения волокна называется такое состояние древесины, когда полости клеток свободны от воды и заполнены воздухом, а вода находится в толще клеточных стенок. Точки насыщения волокна древесины достигает при гигроскопическом увлажнении, т. е. до этого предела древесина поглощает пары воды из воздуха. При насыщении водой выше 30% появляется вода в полостях клеток. Следовательно, по существующим взглядам гриб может развиваться в дереве лишь тогда, когда в нем имеется вода в капельно-жидком состоянии, наличие же гигроскопической влаги недостаточно для прорастания грибов.

Ввиду того, что влажность дерева, как гигроскопического материала, зависит от температуры и влажности окружающего воздуха и, в свою очередь, оказывает влияние в закрытых пространствах на влажность последнего, представляет интерес попытка изучения комплексного влияния влажности древесины и влажности воздуха на произрастание дереворазрушающих грибов.

Увязка изучения этих вопросов является особенно интересной при выяснении низшего предела влажности и возможности роста гриба при увлажнении ниже точки насыщения волокна, т. е. ниже 30%.

В микологической лаборатории Украинского института сооружений были произведены эксперименты, выясняющие возможность роста гриба в древесине, увлажненной гигроскопическим путем до точки насыщения волокна и ниже таковой.

Объектом изучения служил гриб *Poria varogaria* Pers.

Исследования производились в направлениях изучения:

- 1) минимальной влажности, необходимой для произрастания грибницы, находящейся в воздушно-сухом пораженном дереве в жизнеспособном состоянии;
- 2) минимальной влажности здорового дерева, при которой возможно его заражение.

I

В первом случае материалом служила древесина, доставленная из сооружений, пораженных грибом *Poria varogaria*.

Древесина разбивалась на куски толщиной от 3 до 5 см и в таком состоянии оставалась в лаборатории на 1½—2 месяца. За это время она достигала комнатно-сухой влажности 8—12% и уже тогда являлась материалом для опытов.

Ввиду того, что нашей задачей являлось изучение возможности прорастания гриба при слабом увлажнении, последнее

производилось не капельно-жидкой влагой, а парообразной. Древесина разбивалась на кусочки приблизительно 1—2 мм толщиной, которые нанизывались на проволоку и подвешивались в эксикаторе с извлеченными сетками. Концы проволоки прикреплялись к стенкам эксикатора пластилином. На дно эксикаторов наливалась вода или серная кислота слабых концентраций, с целью установления разных степеней относительной влажности воздуха, а в зависимости от этого и разных степеней увлажнения древесины. Ввиду малых размеров эксикаторов, влажность воздуха не удалось определить приборами. Последняя устанавливалась следующим образом. По удельному весу кислоты определялось ее процентное содержание. Воспользовавшись диаграммой Чулицкого, рассчитанной на основании данных Реньо величин, определялась относительная влажность воздуха в зависимости от концентрации кислоты. В наших опытах влажность воздуха была высокой — не ниже 93,8%.

Для того, чтобы избежать конденсации влаги при колебаниях температуры, эксикаторы с плотно закрытыми и смазанными вазелином крышками устанавливались в термостат, в котором строго поддерживалась температура 22° Ц.

Показателем отсутствия конденсации служило чистое, незапотевшее изнутри стекло посуды.

Для того, чтобы убедиться, что поверхность древесины также не содержит капельно-жидкой влаги, нами применялся порошок, состоящий из гашеной извести $\text{Ca}(\text{OH})_2$ в смеси с порошком фенолфталеина. Порошок — в сухом состоянии белого цвета — в присутствии воды, благодаря взаимодействию индикатора со щелочью, приобретал ярко-красную окраску. Прикосновение такого порошка к древесине с наличием капельно-жидкой влаги моментально выдавало присутствие таковой.

В наших опытах в шкафу с постоянной температурой не наблюдалось покраснения порошка при прикосновении к древесине, из чего можно заключить, что образцы увлажнялись только парообразной влагой. Такая проба обычно производилась в момент изъятия образцов для определения влажности.

Подвешенная древесина, поглощая пары воды из воздуха, увлажнялась в разной степени, в зависимости от концентрации жидкости.

Достигнув некоторого увлажнения, внутридревесный мицелий начинал прорастать и появлялся снаружи в виде белого пушка.

При появлении наружного мицелия, образцы извлекались из эксикатора, быстро помещались в бюкс и высушивались в сушильном шкафу при 105° Ц до постоянного веса.

Взвешивание производилось с точностью до четвертого знака. Влажность вычислялась по отношению к сухому весу образцов.

Большое количество экспериментов было произведено в эксикаторах с 100% относительной влажностью воздуха. На дно эксикаторов наливалась вода или укладывалось хорошо увлажненное дерево. Обычно на третий день древесина, пораженная