УДК 539.3

УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ НДС БАЛКИ З ВРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ТА ПОПЕРЕЧНОГО ОБТИСНЕННЯ

В. О. Шевченко
здобувач вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, группа БЦІ -13,
навчально-науковий інститут будівництва та архітектури
Науковий керівник – к.т.н., доцент О. Г. Гуртовий

Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне, Україна

Викладено процедуру отримання розрахункових диференціальних рівнянь поперечного згинання балки із композитних чи інших штучних сучасних матеріалів з врахуванням впливу на напружено-деформівний стан деформацій та напруг поперечного зсуву та поперечного обтиснення.
Ключові слова: уточнена модель, згинання балки, розрахункові рівняння, поперечний зсув, поперечне обтиснення

The procedure for obtaining the calculated differential equations of transverse bending of beams from composite or other artificial modern materials is presented, taking into account the influence on the stress-strain state of deformations and stresses of transverse shear and transverse compression.
Keywords: refined model, beam bending, calculated equations, transverse shear, transverse compression

В техніці, машинобудуванні та в будівництві широко використовуються сучасні матеріали штучного походженя, до основних фізичних характеристик яких можна віднести знижену поперечну жорсткість. Тому методи розрахунків елементів конструкцій із таких матеріалів, зокрема, такого конструктивного елементу як балка, що зазнає згинання, потребують уточнень. Ці уточнення повинні враховувати такі компоненти напружено-деформівного стану (НДС), як деформації поперечного зсуву та поперечного обтиснення.

Побудову уточнених моделей розрахунку елементів конструкцій започаткували Е. Рейсснер [1], С. А. Амбарцумян [2] та продовжили інші автори, зокрема, також в [3], де побудовано теорію вищих порядків ітераційного наближення. Суттєвий вклад у розв’язання даної проблеми зробив В. Г. Піскунов та його учні [4]. Так, в [5] В. Г. Піскунов виклав «схему» ітераційних уточнень для побудови уточнених моделей розрахунку елементів конструкцій.

В залежності від того, які з фізико-механічних характеристик матеріалу в поперечному напрямку є суттєво слабшими у порівнянні з характеристиками в інших напрямках, потрібно уточнено моделювати (більш точно апроксимувати) ту чи іншу компоненту напружено-деформованого стану елемента конструкції.

В даному дослідженні проводиться уточнене моделювання НДС для матеріалу зігнутої балки, у якого особливо «ослаблений» поперечний осьовий модуль, а також модуль поперечного зсуву.

Перше наближення (поперечний зсув). Розглянемо балку прямокутного поперечного перерізу шириною b, висотою h та довжиною l з поздовжньою віссю x_1, що лежить на серединній поверхні, та вертикальною віссю $x_3 = z$. Поперечне навантаження на верхню поверхню балки $q(x_1)$. Поперечний осьовий модуль пружності E_3 та модуль поперечного зсуву G_{13} значно менші від модуля E_1 вздовж осі x_1. Застосуємо далі позначення похідних нижніми індексами після коми. Зміщення в довільній точці балки у напрямку осей координат позначимо u_1, та u_3.

Проінтегруємо по z співвідношення Коші для деформації поперечного зсуву e_{13}, прийнявши при $z=0$ на нейтральній лінії переміщення $u_1=0$. Напругу та деформацію поперечного зсуву приймемо у вигляді квадратної параболи, як це запропоновано в [2, 4]. Тоді отримаємо

$$u_1=-\int_0^z u_{3},_1\,dz-\Big(\int_0^z \frac{E_1}{G_{13}}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} zdz\Big)\beta\,, \tag{1}$$

де $\beta(x_1)$ – невідома функція поперечного зсуву.

Друге наближення (поперечне обтиснення). Введемо гіпотезу для напруг поперечного обтиснення у вигляді лінійної функції:

$$\sigma_{33}=\gamma_1+z\gamma_2\,,$$

де $\gamma_1(x_1)$ та γ_2 – невідомі функції обтиснення.

Знехтуємо в законі Гука для поперечних деформацій e_{33} ефектом Пуассона, як це зроблено в [3, 4], прийнявши наближено

$$e_{33}\approx \sigma_{33}/E_3=\frac{1}{E_3}(\gamma_1+\gamma_2)\,.$$

Проінтегрувавши по z співвідношення Коші для e_{33} та прийнявши при $z=0$ функцію прогину для поперечного зміщення $u_3=w(x_1)$, отримаємо вираз для вертикальних (поперечних) зміщень в довільній точці перерізу балки у вигляді:

$$u_3=w+\int_0^z \frac{1}{E_3}\,dz\gamma_1+\int_0^z \frac{1}{E_3}\,zdz\gamma_2\,. \tag{2}$$

Підстановка (2) в (1) дозволяє знайти вираз для горизонтальних (вздовж осі x_1) зміщень в довільній точці перерізу балки у вигляді:

$$u_1=-\,zw,_1-\Big(\int_0^z \frac{E_1}{G_{13}}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} zdz\Big)\beta-\int_0^z\int_0^z \frac{1}{E_3}\,dz^2\gamma_1,_1-\int_0^z\int_0^z \frac{1}{E_3}\,zdz^2\gamma_2,_1\,. \tag{3}$$

Або в згорнутому вигляді:

$$\begin{gathered}u_1=-\,zw,_1-\psi_{13}\beta-f_1\gamma_1,_1-f_2\gamma_2,_1\,;\\ u_3=w+f_1,_3\,\gamma_1+f_2,_3\,\gamma_2\,,\end{gathered} \tag{4}$$

де

$$\psi_{13}=\int_0^z \frac{E_1}{G_{13}}\int_{-\frac{h}{2}}^{z} zdz;\qquad f_1=\int_0^z\int_0^z \frac{1}{E_3}\,dz^2;\qquad f_2=\int_0^z\int_0^z \frac{1}{E_3}\,zdz^2\,.$$

Підстановка (4) у співвідношення Коші дає вирази для деформацій, а підстановка далі в закон Гука – вирази для напруг.

Для виведення розрахункових диференціальних рівнянь застосовано варіаційний принцип Лагранжа,що в розгорнутому вигляді має вигляд:

$$\delta\Pi=\int_0^l\int_0^b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{[\sigma_{11}(-z\delta w,_{11}-\psi_{13}\delta\beta,_1-f_1\delta\gamma_1,_{11}-f_2\delta\gamma_2,_{11})+\sigma_{33}(f_1,_{33}\,\delta\gamma_1+f_2,_{33}\,\delta\gamma_2)+$$
$$+\sigma_{13}\psi_{13}\delta\beta]-q(\delta w+f_1^h,_3\,\delta\gamma_1+f_2^h,_3\,\delta\gamma_2)\}dzdx_2dx_1=0\,,$$

де f_1^h, f_2^h - значення функцій при $z=0,5h$.

Після інтегрування по частинах отримано розрахункові рівняння в узагальнених зусиллях:

$$M_{11},_{11}+q=0\,;\quad \overline{M}_{11},_1+\overline{Q}_1=0\,;\quad \overline{\overline{M}}{}_{11}^{(i)},_{11}-\overline{\overline{N}}{}_{33}^{(i)}+qf_i^h,_3=0;\qquad i=1,2 \tag{5}$$

та граничні умови:

$$[M_{11}\delta w,_1]_0^l=0\,;\quad [M_{11},_1\delta w]_0^l=0\,;\quad [\overline{M}_{11}\delta\beta]_0^l=0\,;\quad [\overline{\overline{M}}{}_{11}^{(i)}\delta\gamma_i,_1]_0^l=0\,;\quad [\overline{\overline{M}}{}_{11}^{(i)},_1\delta\gamma_i=0]_0^l=0.$$

Тут введено наступні узагальнені зусилля:

$$M_{11}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\sigma_{11}zdzdx_2\,;\quad \overline{M}_{11}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\sigma_{11}\psi_{13}dzdx_2\,;\quad \overline{\overline{M}}{}_{11}^{(i)}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\sigma_{11}f_idzdx_2\,;$$

$$\overline{\overline{N}}{}_{33}^{(i)}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\sigma_{33}f_i,_{33}\,dzdx_2\,;\quad \overline{Q}_1=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b\sigma_{13}\psi_{13},_3\,dzdx_2\,.$$

Виходячи з того, що отримано сім граничних умов на кожному краю балки, загальний порядок диференціювання розрахункових рівнянь у функціях переміщень становить 14.

Розрахункові рівняння в функціях переміщень отримано підстановкою в (5) виразів напруг через функції переміщень $w,\beta,\gamma_1,\gamma_2$ і мають вигляд:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b[A_{1111}(-z^2w,_{1111}-\psi_{13}z\beta,_{111}-f_1z\gamma_1,_{1111}-f_2z\gamma_2,_{1111})+$$
$$+A_{1133}(f_1,_{33}z\gamma_1,_{11}+f_2,_{33}z\gamma_2,_{11})]dx_2dz+q=0\,;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b[A_{1111}(-z\psi_{13}w,_{111}-\psi_{13}{}^2\beta,_{11}-f_1\psi_{13}\gamma_1,_{111}-f_2\psi_{13}\gamma_2,_{111})+$$
$$+A_{1133}(f_1,_{33}\psi_{13}\gamma_1,_1+f_2,_{33}\psi_{13}\gamma_2,_1)+G_{13}\psi_{13}{}^2,_3\beta]dx_2dz=0\,;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_0^b[A_{1111}(zf_iw,_{1111}+\psi_{13}f_i\beta,_{111}+f_1f_i\gamma_1,_{1111}+f_2f_i\gamma_2,_{1111})+$$
$$+A_{1133}(-f_1,_{33}f_i\gamma_1,_{11}-f_2,_{33}f_i\gamma_2,_{11})+A_{3311}(-zf_iw,_{11}+\psi_{13}f_i\beta,_1-f_1f_i\gamma_1,_{11}-f_2f_i\gamma_2,_{11})+$$
$$A_{3333}(f_1,_{33}f_i\gamma_1+f_2,_{33}f_i\gamma_2)]dx_2dz-qf_i^h,_3=0;\qquad i=1,2\,.$$

Отже, варіаційним методом отримано розрахункові диференціальні рівняння та відповідні граничні умови для розрахунку на міцність та деформативність композитних балок при поперечному згинанні на основі уточнюючих НДС гіпотез про розподіл по висоті поперечного перерізу балки деформацій і напруг поперечного зсуву та поперечного обтиснення. Точність даних гіпотез потребує перевірки шляхом числових розрахунків тестових задач, що являється предметом подальших досліджень.

1. Reissner E. On the Theory of Bending of Elastic Plates. J. of Mathematics and Physics. 1944. Vol. 23. P. 184-191. **2.** Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М. : Наука, 1974. 446 с. **3.** Гуртовый А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур. Механика композитых материалов. 1999. Т. 35. № 1. С. 13–28. **4.** Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек. Прикладная механика. 2002. Т. 38. № 2. С. 22–57. **5.** Пискунов В. Г. Итерационная аналитическая теория в механике слоистых композитных систем. Механика композитных материалов. 2003. Т. 39 № 1. С. 3–24.