

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра гідроенергетики, теплоенергетики
та гідравлічних машин

01-06-65М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання лабораторних робіт з навчальної
дисципліни «Математичні методи і моделі в інженерних
розрахунках» для здобувачів вищої освіти першого (бакалавр-
ського) рівня за ОПП «Теплоенергетика» спеціальності
144 «Теплоенергетика» галузі знань
14 «Електрична інженерія» усіх форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості
ННІВГП

Протокол №10 від 20.06.2023 р.

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Математичні методи і моделі в інженерних розрахунках» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» галузі знань 14 «Електрична інженерія» усіх форм навчання [Електронне видання] /Тимейчук О. Ю. – Рівне : НУВГП, 2023. – 21 с.

Укладач: Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент кафедри гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин.

Відповідальний за випуск: Рябенко О. А., д.т.н., професор, завідувач кафедри гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин.

Керівник групи забезпечення спеціальності 144 «Теплоенергетика»

Костюк О. П.

ЗМІСТ

1. Мета і завдання дисципліни	3
2. Лабораторні роботи	4
2.1 Лабораторна робота №1. „Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом Жордана-Гаусса”.....	4
2.2 Лабораторна робота №2. „Оптимізація функцій багатьох змінних методом градієнтного спуску”.....	8
2.3 Лабораторна робота №3. “Математична обробка даних експерименту методом найменших квадратів”.....	10
2.4 Лабораторна робота №4. „Розв’язування задач лінійного програмування графічним методом”.....	13
2.5 Лабораторна робота №5. „Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом”.....	15
2.6 Лабораторна робота №6. „Транспортна задача. Побудова опорних планів перевезень та їх оптимізація”.....	16
2.7 Лабораторна робота №7. „Побудова та оптимізація сіткових графіків”.....	20

© О. Ю. Тимейчук, 2023
© НУВГП, 2023

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою курсу "Математичні методи і моделі в інженерних розрахунках" є оволодіння студентами вмінь і навиків застосування основних методів дослідження технічних систем з використанням ПК.

В результаті вивчення курсу студенти повинні знати способи побудови деяких математичних моделей, методи їх дослідження і реалізації на ПК; методи розв'язування задач лінійного програмування та побудови і оптимізації сіткових графіків.

На основі отриманих знань студент повинен вміти: будувати математичні моделі деяких задач і досліджувати їх відомими методами; розв'язувати задачі лінійного програмування; будувати та оптимізувати сіткові графіки.

Тематичний план дисципліни

№ з/п	Назва теми та її зміст	Денна форма навчання (год)			
		Усього	Лекції	Лабораторні заняття	Самостійна робота
1	Вступ. Математичне моделювання з використанням ПЕОМ.	25	1	—	24
2	Системи лінійних алгебричних рівнянь. Метод Жордана-Гаусса розв'язув. СЛАР	25	1	4	20
3	Багатомірна оптимізація функцій. Методи градієнтного спуску.	25	2	4	19
4	Регресійний аналіз. Метод найменших квадратів.	25	2	6	17
5	Лінійне програмування. Постановка задач лінійного програмування (ЗЛП) та їх розв'язування графічним і симплекс-методом. Методи побудови та оптимізації опорних планів перевезень транспортних задач.	25	6	12	7
6	Сіткові графіки (СГ). Поняття сіткової моделі та її застосування. Приклади побудови та оптимізації СГ.	25	4	10	11
Усього		150	16	36	98

2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота №1

„Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом Жордана-Гаусса”

Розв’язати систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) $AX=B$ методом Жордана-Гаусса.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.

Варіанти

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 5.7 & 3.3 & 1.3 \\ 3.5 & 4.7 & 2.1 \\ 4.1 & 5.8 & -1.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.7 \\ 0.8 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 4.7 & 2.8 & 1.9 \\ 2.1 & 3.1 & 1.8 \\ 4.2 & -2.3 & 9.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \\ 2.8 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 3.1 & 2.8 & 1.7 \\ 1.9 & 3.1 & 2.1 \\ 7.5 & 3.8 & 9.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.1 \\ 5.6 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 9.1 & 5.6 & 7.8 \\ 3.8 & 5.1 & 2.8 \\ 4.1 & 5.7 & 7.2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 6.7 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 3.3 & 2.1 & 2.8 \\ 4.1 & 8.7 & 4.8 \\ 2.7 & 1.8 & 7.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 5.7 \\ 3.2 \end{pmatrix};$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 7.6 & 5.8 & 4.7 \\ 3.8 & 4.1 & 2.7 \\ 2.9 & 2.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10.1 \\ 9.7 \\ 7.8 \end{pmatrix};$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 3.8 & -2.5 & 3.7 \\ 0.5 & 0.8 & 1.7 \\ 1.6 & 2.3 & -4.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix};$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 5.4 & -2.3 & 3.4 \\ 4.2 & 7.7 & -2.3 \\ 3.4 & 2.4 & 7.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 2.7 \\ 1.9 \end{pmatrix};$$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 8.6 & 1.8 & -4.7 \\ 2.7 & -3.6 & 0.4 \\ 1.5 & 4.5 & -1.6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.5 \\ -1.6 \end{pmatrix};$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 5.6 & 2.7 & 1.9 \\ 3.4 & -9.6 & -2.4 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix};$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 2.7 & 0.9 & -1.5 \\ 4.5 & -8.8 & 6.7 \\ 5.1 & 3.7 & -7.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 2.7 \\ -0.4 \end{pmatrix};$$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} 9.5 & -3.5 & 7.3 \\ 3.1 & -8.6 & -2.3 \\ 0.8 & 7.4 & -9.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ 6.4 \end{pmatrix};$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 8.8 & 6.7 & -1.2 \\ 6.4 & 1.3 & -2.7 \\ 2.4 & -4.5 & 8.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 3.8 \\ -0.6 \end{pmatrix};$$

$$14) \quad A = \begin{pmatrix} 9.4 & -6.2 & -0.5 \\ 3.4 & 8.3 & 0.8 \\ 2.3 & -1.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 1.7 \end{pmatrix};$$

$$15) \quad A = \begin{pmatrix} 7.8 & 5.3 & 4.8 \\ 3.3 & -7.1 & 1.8 \\ 4.5 & 3.3 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.3 \\ 3.4 \end{pmatrix};$$

$$16) \quad A = \begin{pmatrix} 3.8 & 4.1 & -2.3 \\ -2.1 & 3.9 & -5.8 \\ 1.8 & 1.1 & -2.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 3.3 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$17) \quad A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.2 & 3.1 \\ 2.1 & 1.9 & -2.3 \\ 4.2 & 3.9 & -3.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.6 \\ 5.1 \end{pmatrix};$$

$$18) \quad A = \begin{pmatrix} 5.8 & 3.3 & -3.2 \\ 2.5 & -7.8 & 3.3 \\ 6.5 & -7.1 & 9.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.1 \\ 6.1 \end{pmatrix};$$

$$19) \quad A = \begin{pmatrix} 9.2 & 5.2 & -5.3 \\ 3.8 & -6.0 & 4.2 \\ 7.6 & 5.1 & -9.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.1 \\ 5.0 \\ 4.9 \end{pmatrix};$$

$$20) \quad A = \begin{pmatrix} 5.1 & 3.1 & 4.2 \\ 4.3 & 4.5 & -4.0 \\ -2.2 & -3.7 & 6.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 4.3 \\ 2.7 \end{pmatrix};$$

$$21) \quad A = \begin{pmatrix} -7.1 & 6.8 & 6.1 \\ 5.0 & 9.8 & -5.3 \\ 8.3 & -7.8 & 8.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.3 \\ 6.1 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$22) \quad A = \begin{pmatrix} 8.7 & -2.1 & 4.5 \\ 2.0 & 4.3 & -1.8 \\ 1.6 & 5.1 & 6.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 3.1 \\ -2.3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{23)} \quad A = \begin{pmatrix} 6.3 & 5.1 & -0.6 \\ 3.4 & -7.2 & 3.4 \\ 0.8 & 1.3 & 3.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.0 \\ -2.4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{24)} \quad A = \begin{pmatrix} 4.5 & 2.3 & -3.7 \\ 2.1 & 8.1 & 5.8 \\ 1.2 & 1.1 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -3.1 \\ 5.3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{25)} \quad A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.3 & -0.5 \\ 1.3 & 5.7 & -1.2 \\ 0.8 & 4.1 & 9.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 7.8 \\ 5.4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{26)} \quad A = \begin{pmatrix} 6.2 & 1.3 & -0.7 \\ 0.4 & 5.7 & 1.3 \\ 2.1 & -0.9 & 3.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.9 \\ -1.1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{27)} \quad A = \begin{pmatrix} 5.3 & -0.6 & -1.1 \\ 1.2 & 6.3 & -1.3 \\ 2.1 & -1.4 & 9.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.0 \\ 9.2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{28)} \quad A = \begin{pmatrix} 4.8 & -1.2 & 2.4 \\ 2.7 & 9.8 & 3.1 \\ 0.8 & -0.3 & 3.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 9.6 \\ 4.7 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{29)} \quad A = \begin{pmatrix} 6.7 & 1.4 & -2.7 \\ 1.3 & 5.7 & 1.3 \\ 3.1 & 2.3 & -5.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 5.2 \\ 6.3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{30)} \quad A = \begin{pmatrix} 5.8 & 0.9 & 1.1 \\ 0.2 & 6.4 & -0.5 \\ 0.8 & -0.4 & 2.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{pmatrix}.$$

Лабораторна робота №2
„Оптимізація функцій багатьох змінних
методом градієнтного спуску”

Знайти мінімум функції двох змінних $f(x,y)$ з точністю $\varepsilon=0.1$, при заданій початковій точці M_0 та кроці h , методом градієнтного спуску (методом поділу кроку).

Зауваження. Обчислення проводити до чотирьох знаків після коми.

Таблиця 1

Варіанти	Функція	Початкова точка	Крок
1	2	3	4
1	$f(x, y) = e^{x^2} + y + (x - y)^2$	$M_0(0, 0)$	$h = 0.3$
2	$f(x, y) = e^{y^2 - x} + e^x$	$M_0(1, 1)$	$h = 0.2$
3	$f(x, y) = e^{-x} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
4	$f(x, y) = e^y + (y - x^2)^2$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
5	$f(x, y) = e^{x^2 - y} + e^y$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
6	$f(x, y) = e^x + y^2 - 2x$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
7	$f(x, y) = x^2 - \cos(y - 1)$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
8	$f(x, y) = y^2 + e^x - 3x$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
9	$f(x, y) = e^{x - y} + x^2 + y^2$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.2$
10	$f(x, y) = e^{-y} - \cos(x^2 + y)$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
11	$f(x, y) = e^x + (x - y^2)^2$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.2$
12	$f(x, y) = e^x + x^2 + y^2$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
13	$f(x, y) = e^{y^2 - x} + x^2$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
14	$f(x, y) = e^{-x} - \cos(x^2 + y^2)$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.3$
15	$f(x, y) = e^{-y} + (x^2 + y)^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$

1	2	3	4
16	$f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + y^2$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
17	$f(x, y) = y^2 - \cos(x-1)$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.3$
18	$f(x, y) = x^2 + e^y - 3y$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
19	$f(x, y) = e^y + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
20	$f(x, y) = e^{-x} + y^2 + 2x$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
21	$f(x, y) = e^{-y} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$
22	$f(x, y) = e^x - \cos(x-y^2)$	$M_0(1, 1)$	$h = 0.3$
23	$f(x, y) = e^{-x} + (x+y^2)^2$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
24	$f(x, y) = e^y - \cos(x^2 - y)$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.3$
25	$f(x, y) = e^{-x-y} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$
26	$f(x, y) = x^2 - \cos(1+y)$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
27	$f(x, y) = y^2 + e^{-x} + 3x$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
28	$f(x, y) = e^y + x^2 - 2y$	$M_0(-1, -1)$	$h = 0.3$
29	$f(x, y) = x^2 + e^{-y} + 3y$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
30	$f(x, y) = e^{-y} + x^2 + 2y$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.3$

Лабораторна робота №3

“Математична обробка даних експерименту методом найменших квадратів”

Побудувати апроксимаційний поліном 1-го степеня $y=a \cdot x+b$ методом найменших квадратів (МНК) та встановити тип та тісноту зв'язку між множинами X та Y.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми.

Варіанти

1)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	10.4	4.9	0.4	16.4	2.5	16.6	3.6	17.6	16.8	10.2	16.9

2)

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	9.7	4.7	0.8	15.7	3.0	16.2	4.3	17.2	16.5	10.5	16.7

3)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	9.0	4.6	1.2	15.0	3.6	15.8	5.0	16.8	16.2	10.8	16.6

4)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	8.3	4.5	1.6	14.3	4.2	15.4	5.7	16.4	15.9	11.1	16.5

5)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	7.6	4.3	2.0	13.6	4.7	15.0	6.4	16.0	15.6	11.4	16.3

6)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	10.1	4.8	0.6	16.1	2.8	16.4	4.0	17.4	16.6	10.4	16.8

7)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	9.4	4.7	1.0	15.4	3.3	16.0	4.7	17.0	16.3	10.7	16.7

8)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	8.7	4.5	1.4	14.7	3.9	15.6	5.4	16.6	16.1	10.9	16.5

9)

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	8.0	4.4	1.8	14.0	4.4	15.2	6.1	16.2	15.8	11.2	16.4

10)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	8.7	4.5	1.4	14.7	3.9	15.6	5.4	16.6	16.1	10.9	16.5

11)

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	8.0	4.4	1.8	14.0	4.4	15.2	6.1	16.2	15.8	11.2	16.4

12)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

13)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	6.6	4.1	2.7	12.6	5.6	14.3	7.5	15.3	15.2	11.8	16.1

14)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	5.9	4.0	3.1	11.9	6.1	13.9	8.2	14.9	14.9	12.1	16.0

15)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	8.3	4.5	1.6	14.3	4.2	15.4	5.7	16.4	15.9	11.1	16.5

16)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	7.6	4.3	2.0	13.6	4.7	15.0	6.4	16.0	15.6	11.4	16.3

17)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	6.9	4.2	2.5	12.9	5.3	14.5	7.1	15.5	15.4	11.6	16.2

18)

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	6.2	4.0	2.9	12.2	5.8	14.1	7.8	15.1	15.1	11.9	16.0

19)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

20)

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	6.6	4.1	2.7	12.6	5.6	14.3	7.5	15.3	15.2	11.8	16.1

21)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

22)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	5.2	3.8	3.5	11.2	6.7	13.5	8.9	14.5	14.7	12.3	15.8

23)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	4.5	3.7	3.9	10.5	7.2	13.1	9.6	14.1	14.4	12.6	15.7

24)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	6.9	4.2	2.5	12.9	5.3	14.5	7.1	15.5	15.4	11.6	16.2

25)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	6.2	4.0	2.9	12.2	5.8	14.1	7.8	15.1	15.1	11.9	16.0

26)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	5.5	3.9	3.3	11.5	6.4	13.7	8.5	14.7	14.8	12.2	15.9

27)

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	4.8	3.8	3.7	10.8	7.0	13.3	9.2	14.3	14.5	12.5	15.8

28)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	9.4	4.7	1.0	15.4	3.3	16.0	4.7	17.0	16.3	10.7	16.7

29)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	10.1	4.8	0.6	16.1	2.8	16.4	4.0	17.4	16.6	10.4	16.8

30)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	9.0	4.6	1.2	15.0	3.6	15.8	5.0	16.8	16.2	10.8	16.6

Лабораторна робота №4

„Розв’язування задач лінійного програмування графічним методом”

Постановка задачі

Підприємство випускає два види продукції і використовує для цього три типи ресурсів: працю, сировину та паливо. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, наявність ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці 4.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 4

Типи ресурсів	Одиниця виміру	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Наявність ресурсів
		I вид	II вид	
<i>Праця</i>	людино-дні	a_{11}	a_{12}	b_1
<i>Сировина</i>	т	a_{21}	a_{22}	b_2
<i>Паливо</i>	т	a_{31}	a_{32}	b_3
<i>Прибуток від реалізації одиниці продукції</i>	тис. грн.	c_1	c_2	X

Початкові дані задаються у вигляді матриці A та вектора \bar{C} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{C} = (c_1, c_2).$$

Хід розв’язування задачі

1. Побудувати математичну модель задачі лінійного програмування (ЗЛП) і записати її в стандартній розгорнутій формі.
2. Розв’язати ЗЛП графічним методом і зробити висновок.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.

Варианти

$$1) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 41 \\ 5 & 8 & 34 \\ 4 & 5 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 8)$$

$$2) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 39 \\ 7 & 2 & 35 \\ 3 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 3)$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 8 & 55 \\ 9 & 5 & 52 \\ 4 & 7 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$4) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 65 \\ 3 & 7 & 43 \\ 8 & 4 & 65 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 5)$$

$$5) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 63 \\ 6 & 7 & 65 \\ 9 & 4 & 51 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (8, 7)$$

$$6) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 56 \\ 5 & 6 & 50 \\ 8 & 3 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (9, 5)$$

$$7) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 52 \\ 8 & 7 & 80 \\ 4 & 9 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 6)$$

$$8) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 80 \\ 4 & 7 & 62 \\ 6 & 5 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 8)$$

$$9) \begin{pmatrix} 3 & 8 & 73 \\ 7 & 4 & 53 \\ 6 & 5 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 4)$$

$$10) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 55 \\ 8 & 5 & 85 \\ 9 & 4 & 84 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 7)$$

$$11) \begin{pmatrix} 8 & 5 & 58 \\ 4 & 5 & 46 \\ 9 & 7 & 68 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 7)$$

$$12) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 52 \\ 5 & 9 & 56 \\ 4 & 7 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 6)$$

$$13) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 76 \\ 7 & 6 & 82 \\ 9 & 4 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$14) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 60 \\ 7 & 6 & 73 \\ 4 & 9 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 8)$$

$$15) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 41 \\ 9 & 5 & 65 \\ 8 & 3 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 5)$$

$$16) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 63 \\ 4 & 7 & 75 \\ 8 & 5 & 72 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 4)$$

$$17) \begin{pmatrix} 9 & 6 & 48 \\ 3 & 8 & 54 \\ 5 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 6)$$

$$18) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 85 \\ 5 & 7 & 81 \\ 3 & 4 & 52 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 4)$$

$$19) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 68 \\ 5 & 8 & 72 \\ 6 & 5 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 3)$$

$$20) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 58 \\ 7 & 3 & 46 \\ 8 & 7 & 74 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$21) \begin{pmatrix} 6 & 7 & 77 \\ 8 & 5 & 81 \\ 9 & 4 & 85 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (9, 7)$$

$$22) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 5 & 3 & 30 \\ 3 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 4)$$

$$23) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 110 \\ 7 & 4 & 76 \\ 5 & 8 & 80 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 3)$$

$$24) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 55 \\ 8 & 5 & 47 \\ 6 & 7 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$25) \begin{pmatrix} 8 & 7 & 60 \\ 9 & 5 & 47 \\ 5 & 6 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 3)$$

$$26) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 79 \\ 7 & 9 & 108 \\ 8 & 5 & 105 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 8)$$

$$27) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 62 \\ 5 & 8 & 59 \\ 6 & 5 & 57 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 5)$$

$$28) \begin{pmatrix} 6 & 7 & 110 \\ 8 & 5 & 112 \\ 4 & 9 & 115 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$29) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 64 \\ 6 & 5 & 42 \\ 9 & 8 & 66 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 2)$$

$$30) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 94 \\ 6 & 5 & 76 \\ 7 & 8 & 110 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 5)$$

Лабораторна робота №5

„Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом”

Постановка ЗЛП та вихідні дані наведені в лабораторній роботі №4.

Хід розв’язування задачі

1. Записати умову ЗЛП в канонічній формі.
2. Розв’язати ЗЛП симплекс-методом і зробити висновок.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.

Лабораторна робота №6

„Транспортна задача. Побудова опорних планів перевезень та їх оптимізація”

Постановка задачі

У трьох (чотирьох) постачальників A_1, A_2, A_3 (A_1, A_2, A_3, A_4) є запаси однорідних вантажів відповідно в кількостях a_1, a_2, a_3 (a_1, a_2, a_3, a_4), які необхідно перевезти до чотирьох (трьох) споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 (B_1, B_2, B_3) з потребами відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 (b_1, b_2, b_3). Відстані (в км) задані у вигляді матриці $C(3,4)$ або $C(4, 3)$.

Необхідно знайти оптимальний план перевезень вантажів при якому затрати на перевезення будуть мінімальними.

Хід розв'язування задачі

1. Побудувати початковий опорний план перевезень ТЗ трьома методами:

- а) північно-західного кута;
- б) мінімальної вартості (мінімального елемента в матриці);
- в) подвійної переваги.

2. Вибрати опорний план, при якому сумарні затрати на перевезення найменші, перевірити його на оптимальність методом потенціалів або розподільчим методом і зробити висновок.

Варіанти

$$1) \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (250; 180; 220; 260);$$
$$b = (310; 280; 250);$$

$$2) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (320; 220; 250);$$
$$b = (300; 180; 210; 130);$$

$$3) \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 4 \\ 11 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (200; 220; 210; 180);$$
$$b = (290; 190; 210);$$

$$4) \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 \\ 5 & 13 & 14 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (200; 230; 300); \\ b = (260; 340; 220; 270);$$

$$5) \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (160; 180; 190; 170); \\ b = (220; 160; 240);$$

$$6) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (260; 180; 200); \\ b = (180; 160; 210; 180);$$

$$7) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad a = (195; 175; 200; 180); \\ b = (240; 160; 210);$$

$$8) \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (250; 180; 200); \\ b = (220; 180; 165; 195);$$

$$9) \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (190; 210; 180; 140); \\ b = (260; 220; 180);$$

$$10) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 210; 160); \\ b = (160; 190; 200; 170);$$

$$11) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 10 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 300; 450; 310);$$

$$b = (400; 200; 300);$$

$$12) \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 10 & 12 \\ 6 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 180; 200);$$

$$b = (190; 220; 200; 210);$$

$$13) \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 11 & 12 & 7 \\ 10 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 310; 250; 200);$$

$$b = (300; 200; 270);$$

$$14) \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 11 & 9 \\ 12 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (340; 250; 300);$$

$$b = (250; 300; 310; 260);$$

$$15) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \\ 13 & 9 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad a = (340; 270; 260; 200);$$

$$b = (280; 300; 290);$$

$$16) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (300; 220; 250);$$

$$b = (280; 320; 260; 310);$$

$$17) \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 13 & 13 & 4 \\ 9 & 11 & 5 \\ 7 & 10 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (450; 400; 250; 200);$$

$$b = (390; 280; 350);$$

$$18) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (300; 200; 380); \\ b = (370; 280; 110; 230);$$

$$19) \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 8 \\ 12 & 13 & 9 \\ 7 & 6 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 280; 310; 260); \\ b = (480; 290; 230);$$

$$20) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 11 \\ 8 & 7 & 9 & 3 \\ 10 & 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 260; 240); \\ b = (360; 230; 190; 210);$$

$$21) \quad C = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 11 \\ 12 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \\ 13 & 5 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 270; 290; 250); \\ b = (330; 260; 380);$$

$$22) \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 7 & 6 \\ 8 & 10 & 11 & 14 \\ 6 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 230; 350); \\ b = (290; 180; 270; 260);$$

$$23) \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 11 & 13 & 10 \\ 7 & 15 & 8 \\ 14 & 10 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (270; 320; 230; 160); \\ b = (360; 190; 280);$$

$$24) \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 8 & 15 \end{pmatrix}; \quad a = (390; 320; 270); \\ b = (230; 290; 310; 220);$$

$$25) \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 13 \\ 9 & 7 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 190; 320; 270);$$

$$b = (330; 260; 340);$$

$$26) \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 12 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (380; 320; 230);$$

$$b = (310; 170; 260; 240);$$

$$27) \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \\ 15 & 12 & 14 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (190; 230; 210; 270);$$

$$b = (290; 240; 260);$$

$$28) \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 5 & 11 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (220; 190; 350);$$

$$b = (230; 180; 250; 210);$$

$$29) \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad a = (180; 230; 120; 160);$$

$$b = (270; 150; 240);$$

$$30) \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 14 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (370; 240; 180);$$

$$b = (230; 190; 310; 160).$$

Лабораторна робота №7

„Побудова та оптимізація сіткового графіка”

Постановка задачі

Побудувати та оптимізувати сітковий графік (СГ) будівництва.

Хід розв’язування задачі

1. Знайти вартість будівництва об’єкта.
2. Побудувати СГ будівництва.

3. Знайти коефіцієнти складності СГ та напруженості повних шляхів.
4. Оптимізувати СГ.
 - 4.1. Перевести з нормативного режиму в активний роботи, що лежать на критичному шляху, і знайти додаткові витрати.
 - 4.2. Перевести з нормативного режиму в пасивний роботи, що не лежать на критичному шляху, і знайти економію та кінцеву вартість спорудження об'єкта.

Таблиця 5

Вихідні дані для побудови та оптимізації СГ

№ з/п	Шифр роботи	Режими роботи					
		Нормативний		Активний		Пасивний	
		Тн Тривалість (дні)	ΔZн Вартість одного дня (тис. грн.)	ΔТа Тривалість (дні)	ΔZА Вартість одного дня (тис. грн.)	ΔТп Тривалість (дні)	ΔZп Вартість одного дня (тис. грн.)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0-1	$r=$	1	1	$g+r=$		2
2	1-2	$n=$	4	0	$k+n=$		4
3	1-3	6	5	$k=$	7		7
4	1-8	2	3	1	6		6
5	2-3	$p=$	8	1	10		$g+k=$
6	2-5	7	3	$g=$	$i=$		7
7	2-6	$i=$	12	2	14		$p=$
8	3-4	$g=$	5	1	7		$i=$
9	4-7	8	2	3	$p=$		4
10	5-7	10	9	2	$g+p=$		10
11	6-9	$k=$	3	1	$i=$		3
12	8-9	$n=$	4	0	6		6
13	7-10	4	8	2	$k=$		7
14	9-10	5	3	2	$i+k=$		5

Примітка. Значення коефіцієнтів (голосні букви: А, О, Е, І, И, У, Я, Ю, Є, Ї):

i – кількість букв в імені;

r – кількість голосних букв в імені;

k – кількість приголосних букв в імені;

p – кількість букв в прізвищі;

n – кількість голосних букв в прізвищі;

m – кількість приголосних букв в прізвищі.