

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра гідроенергетики, теплоенергетики
та гідравлічних машин

01-06-72М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни «Математичні методи та оптимізація
тепломасообміну» для здобувачів вищої освіти першого
(бакалаврського) рівня за ОПП «Теплоенергетика»
спеціальності 144 «Теплоенергетика» галузі знань
14 «Електрична інженерія» усіх форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості
ННІВГП
Протокол №10 від 20.06.2023 р.

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Математичні методи та оптимізація тепломасообміну» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за ОПП «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» галузі знань 14 «Електрична інженерія» усіх форм навчання [Електронне видання]/Тимейчук О. Ю. – Рівне : НУВГП, 2023. – 9 с.

Укладач: Тимейчук О. Ю., к.т.н., доцент кафедри гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин.

Відповідальний за випуск: Рябенко О. А., д.т.н., професор, завідувач кафедри гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин.

Керівник групи забезпечення спеціальності 144 «Теплоенергетика»

Костюк О. П.

ЗМІСТ

1	Мета і завдання дисципліни	3
2	Лабораторні роботи	4
2.1	Лабораторна робота №1. «Чисельне розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку».....	4
2.2	Лабораторна робота №2. «Чисельне розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку».....	6
2.3	Лабораторна робота №3. «Чисельне розв’язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуассона».....	7
2.4	Лабораторна робота №4. «Чисельне розв’язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності»...	8
2.5	Лабораторна робота №5. «Чисельне розв’язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки»....	9
2.6	Лабораторна робота №6. «Чисельне розв’язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер».....	9

© О. Ю. Тимейчук, 2023

© НУВГП, 2023

1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Мета дисципліни - оволодіння студентами вмінь і навиків застосування основних методів дослідження процесів тепломасообміну з використанням ПЕОМ.

Завдання дисципліни – навчити студента застосовувати отримані знання в курсовому та дипломному проектуванні.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

знати: основні способи побудови математичних моделей процесів тепломасообміну, методи їх дослідження і реалізації на ЕОМ; чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь; вміти: будувати математичні моделі задач розподілу тепла в твердих тілах і розв'язувати їх чисельними методами.

Тематичний план дисципліни

№ з/п	Назва теми та її зміст	Денна форма навчання (год)			
		Усього	Лекції	Лабор. заняття	Сам ост. робота
1	Математичне моделювання з використанням ПЕОМ.	5	1	—	4
2	Чисельне розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 1-го порядку.	17	2	6	9
3	Чисельне розв'язування задачі Коші для ЗДР 2-го порядку.	14	1	4	9
4	Чисельне розв'язування задачі Діріхле для диференціальних рівнянь Лапласа і Пуассона.	15	2	4	9
5	Чисельне розв'язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності.	15	2	4	9
6	Чисельне розв'язування крайової задачі для ЗДР 2-го порядку методом прогонки.	17	2	6	9
7	Закономірності переносу теплової енергії та постановка задачі теплопровідності ребер.	10	1	—	9
8	Постановка задачі теплопровідності для поздовжніх ребер при постійному коефіцієнті теплопровідності на поверхні ребра та теплоізоляції його торця.	10	1	—	9
9	Чисельне розв'язування задачі теплопровідності для поздовжніх ребер.	17	2	6	9
	Усього	120	14	30	76

2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота №1

«Чисельне розв'язування задачі Коші

для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку»

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 1-го порядку на проміжку $[a, b]$ з постійним кроком h :

- методом Ейлера;
- модифікованим методом Ейлера;
- методом Рунге-Кутта.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми.

ВАРІАНТИ

Таблиця 1

Варианти	Диференціальні рівняння	Початкові умови	Проміжок	Крок
1	$y' - \frac{2y}{x+1} + y^2 = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
2	$x^2 y' - 3y - 2x = 0$	$y(1) = 0$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
3	$y' - \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
4	$xy' - 2y + 3e^{-x} = 0$	$y(1) = 1$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
5	$x^2 y' - (1+x)y^2 - 1 = 0$	$y(1) = 0$	$[1; 4]$	$h = 0.3$
6	$(x^2 - y)y' + 2xy^2 = 0$	$y(2) = 1$	$[2; 5]$	$h = 0.3$
7	$y' + \frac{xy}{x+1} - 2y = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
8	$x^2 y' - 2y + 3x = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
9	$xy' + y^3 - 2x^2 = 0$	$y(2) = 1$	$[2; 4]$	$h = 0.2$
10	$x^2 y' + 4y + 2e^{-3x} = 0$	$y(2) = 1$	$[2; 4]$	$h = 0.2$
11	$y' - 2xy + e^x = 0$	$y(0) = 2$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
12	$xy' - \frac{x^2 + y^2}{y} + 4 = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 4]$	$h = 0.3$
13	$x^2 y' - (1 - y^2)x - 2e^{-x} = 0$	$y(1) = 1$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
14	$(x+1)^2 y' - 2xy + e^x = 0$	$y(0) = 2$	$[0; 2]$	$h = 0.2$

Продовження табл. 1

15	$y' + \frac{y}{2x+1} - x^2 = 0$	$y(0) = 2$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
16	$(x^2 + 1)y' + 3xy + \sin x = 0$	$y(1) = 3$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
17	$y' - \frac{xy}{x+1} + 2x^2 = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 4]$	$h = 0.3$
18	$(1+x^2)y' - \frac{x(y^2-1)}{y} = 0$	$y(0) = 2$	$[0; 3]$	$h = 0.3$
19	$y' - \frac{y}{1+e^x} + x = 0$	$y(0) = 2$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
20	$xy' - \frac{3y^2 - x^2}{y} - 2y = 0$	$y(2) = 1$	$[2; 3]$	$h = 0.1$
21	$y' - \frac{y}{x^2+1} + 2x = 0$	$y(0) = 3$	$[0; 3]$	$h = 0.3$
22	$xy' - y + \frac{3x^2}{y} = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
23	$y' + \frac{2y}{x} - x^3 = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
24	$xy' + y - e^x = 0$	$y(1) = 2$	$[1; 4]$	$h = 0.3$
25	$y' - \frac{x}{y^2} + e^{-2x} = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
26	$y' + 2x^2y - \operatorname{tg}x = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
27	$(x^2 + y^2)y' - 2y + e^x = 0$	$y(1) = 3$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
28	$y' - 2e^{-x}y + y = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
29	$y' - (2-y)\operatorname{tg}x = 0$	$y(1) = 0$	$[1; 4]$	$h = 0.3$
30	$y' - \frac{xy}{1+x} - 2x^2 = 0$	$y(0) = 1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$

Лабораторна робота №2
«Чисельне розв'язування задачі Коші
для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку»

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші для ЗДР 2-го порядку на проміжку $[a, b]$ з постійним кроком h методом Ейлера.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми.

ВАРІАНТИ

Таблиця 2

№	Дифрівняння	Початкові умови	Проміжок	Крок
1	$y'' - 2y' + y = 3 \sin x$	$y(1) = 2; \quad y'(1) = -1$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
2	$y'' - 3y' + 2y = 2x + 3$	$y(0) = 4; \quad y'(0) = 2$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
3	$y'' + y = 4e^x$	$y(1) = 4; \quad y'(1) = -1$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
4	$x^2 y'' + xy' = 2 \cos x$	$y(1) = 5; \quad y'(1) = -1$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
5	$y'' - 2y' + 3xy = 2e^x$	$y(1) = -1; \quad y'(1) = 0$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
6	$y'' + 4y = \cos 3x$	$y(2) = 1; \quad y'(2) = 2$	$[2; 3]$	$h = 0.1$
7	$y'' + 2y' + 2y = xe^x$	$y(1) = 1; \quad y'(1) = -1$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
8	$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = e^x$	$y(1) = 1; \quad y'(1) = 2$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
9	$y'' + 4y' + 4y = x \sin 2x$	$y(0) = 2; \quad y'(0) = 1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
10	$y'' - 3y' = e^{5x}$	$y(0) = 2; \quad y'(0) = -1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
11	$x^2 y'' - 2y = 4 \cos x$	$y(1) = 2; \quad y'(1) = -1$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
12	$y'' - 5y' + 6y = e^x$	$y(3) = 1; \quad y'(3) = -4$	$[3; 4]$	$h = 0.1$
13	$y'' + y = 1 + e^x$	$y(1) = 2; \quad y'(1) = -3$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
14	$y'' + 3xy' - y = e^{2x}$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
15	$y'' + y = x^2 - x + 2$	$y(0) = 2; \quad y'(0) = -2$	$[1; 3]$	$h = 0.2$
16	$y'' - 6y' + 5y = x^2 + 1$	$y(3) = 2; \quad y'(3) = 1$	$[3; 4]$	$h = 0.1$
17	$xy'' - 3y' + 2y = \cos x$	$y(2) = 1; \quad y'(2) = 1$	$[2; 4]$	$h = 0.2$
18	$y'' - 2y = x^2 e^x$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$
19	$x^2 y'' + 3y' - 2 = \sin 2x$	$y(1) = 2; \quad y'(1) = -3$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
20	$y'' + 5y' + 6y = 2e^x$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$	$[0; 2]$	$h = 0.2$

Продовження табл. 2

21	$y'' + 4y' = 5e^{2x}$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
22	$y'' - 2y' - y = x + 2$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
23	$xy'' + 2y' = \cos 4x$	$y(2) = 1; \quad y'(2) = -1$	$[2; 4]$	$h = 0.2$
24	$y'' - y' + 2y = 3x^2 - 2$	$y(1) = 1; \quad y'(1) = -1$	$[1; 2]$	$h = 0.1$
25	$y'' - 2y' = e^{4x}$	$y(0) = 2; \quad y'(0) = -1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
26	$x^2 y'' + 3y' + 4y = \cos 2x + 1$	$y(2) = 1; \quad y'(2) = 1$	$[2; 4]$	$h = 0.2$
27	$y'' - 2y' = 8 \sin x$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
28	$y'' + 6y = 2e^{3x}$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
29	$y'' - 3y' - y = 4 \cos^2 x$	$y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$	$[0; 1]$	$h = 0.1$
30	$x^2 y'' - 2y' - y = xe^{4x}$	$y(1) = 2; \quad y'(1) = -2$	$[1; 3]$	$h = 0.2$

Лабораторна робота №3
„Чисельне розв’язування задачі Діріхле
для рівняння Лапласа”

Провести чисельний розрахунок стаціонарного розподілу температури $T(x, y)$ у внутрішніх точках прямокутної пластини довжиною $a=4$ та шириною $b=5$ ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), який описується рівнянням Лапласа $\Delta T \equiv 0$ в області G і задовольняє такі граничні умови:

на нижній ($y=0$) та верхній ($y=b$) сторонах пластини підтримується постійна температура: $T(x,0) = T_1$, $T(x,b) = T_2$,

на бічних сторонах ($x=0$) та верхній ($x=a$) температура змінюється за такими законами:

$$T(0, y) = \frac{T_2 - T_1}{b} \cdot y + T_1, \quad T(a, y) = \frac{T_2 - T_1}{b^2} \cdot y^2 + T_1.$$

де $T_1 = n$, $T_2 = 100 + 10 \cdot n$, n – номер варіанта.

Зауваження. Обчислення проводити з точністю $\varepsilon = 0.5$, кроком $h=1$ і до 2-х знаків після коми.

Лабораторна робота №4

„Чисельне розв’язування змішаної крайової задачі для рівняння теплопровідності”

Знайти розподіл температури $T(x,y)$, який задовольняє рівняння теплопровідності $\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ в стержні довжиною l .

Крайові умови: початкові умови - $T(x,0) = \frac{T_2 - T_1}{l^2} \cdot x^2 + T_1$,
граничні умови - $T(0,t) = T_1, \quad T(l,t) = T_2$.

Вихідні дані: n – номер варіанта, $T_1=50 \cdot n$, $T_2 = 10 \cdot n$, $l=0,5$ м,
 $k = 10$ – кількість кроків по довжині стержня;
 $m=5$ – кількість кроків по часу.

Метал, з якого виготовлено стержень, та його теплотехнічні характеристики задані в таблиці 3.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми.

Теплотехнічні характеристики металів

Таблиця 3

Варіанти	Метали	ρ (кг/м ³)	λ (Вт/(м·К))	c (кДж/(кг·К))
1, 16	Вуглецева сталь	7800	52	0,473
2, 17	Олово	7300	68	0,222
3, 18	Цинк	7150	117	0,384
4, 19	Вольфрам	9340	1,8	0,134
5, 20	Алюміній	2700	236	0,896
6, 21	Дюралюміній	2780	13	0,833
7, 22	Нержавіюча сталь	7817	40	0,460
8, 23	Титан	4460	12	0,524
9, 24	Чавун	7220	63	0,5
10, 25	Хром	7150	96	0,448
11, 26	Нікель	8900	94	0,427
12, 27	Хромонікелева сталь	7833	31	0,460
13, 28	Мідь	8900	403	0,388
14, 29	Бронза	8800	97	0,368
15, 30	Латунь	8500	84	0,392

Лабораторна робота №5
„Чисельне розв’язування крайової задачі
для звичайного диференціального рівняння
2-го порядку методом прогонки”

Методом прогонки знайти чисельний розв’язок звичайного диференціального рівняння 2-го порядку, що задовольняє граничні умови на проміжку $[a, b]$, з постійним кроком h .

Вихідні дані:

диференціальне рівняння: (див. лабораторну роботу №2);

граничні умови:

$$\begin{cases} \frac{n-3}{n+1} y(a) + \frac{n-5}{n+2} y'(a) = -\frac{n-6}{3}, \\ \frac{n-7}{n+3} y(b) - \frac{n-4}{n+9} y'(b) = \frac{n-2}{5}, \end{cases}$$

проміжок $[a; b]: [0.1*n; 1+0.1*n]$; крок $h=0.1$.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми;
 n – номер варіанта.

Лабораторна робота №6
«Чисельне розв’язування задачі теплопровідності
для поздовжніх ребер»

Поздовжнє ребро товщиною в основі $\delta_0 = 0.01 + n \cdot 0.002$, m і висотою $b = 0.08 + n \cdot 0.003$, m , що виготовлене зі сталі (коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 30 + n \cdot 0.5$, $Вт/(м \cdot К)$), відводить теплоту конвекцією ($\alpha = \text{const}$) в навколишнє середовище, температура якого $T_c = 10 + n$, $^{\circ}C$.

Температура ребра в основі $T_0 = 85 + n \cdot 0.5$, $^{\circ}C$, а коефіцієнт тепловіддачі $\alpha = 40 + n \cdot 0.5$, $Вт/(м^2 \cdot К)$. Необхідно знайти розподіл температури в ребрі при теплоізоляції його торця.

Зауваження. Обчислення проводити до 2-х знаків після коми,
 n – номер варіанта.