ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.632.4.001.57+517.54 https://doi.org/10.31713/vt1202319

Бомба А. Я., д.т.н., професор; Остапчук О. П., к.т.н, доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, a.ya.bomba@nuwm.edu.ua, o.p.ostapchuk@nuwm.edu.ua)

УРАХУВАННЯ ЯВИЩ ОСМОСУ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСІВ ТИПУ ФІЛЬТРАЦІЯ-КОНВЕКЦІЯ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ

Розроблено новий підхід до урахування осмосу при прогнозуванні процесів типу фільтрація – конвекція в квазіідеальних пористих середовищах, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Це було досягнуто завдяки використанню переходу від прямих крайових задач (шляхом конформного відображення області фільтрації на відповідну область комплексного потенціалу) до обернених при розв'язуванні відповідних вироджених задач. Завдяки такому підходу автоматично усувається проблема побудови сітки, спрощується рівняння конвективного переносу, задача конвекції зводиться до канонічної області, а розв'язок вдається представити в чисельно-аналітичному вигляді. Явище ж осмосу враховується шляхом збурень виродженої класичної задачі. При переході від «незбурених» до «збурених» задач (зокрема нелінійних) висувалася така вимога, щоб класичні форми законів, що описують дані процеси (рух рідини в пористих середовищах, конвективної дифузії тощо) залишити початково прийнятними, а отримані «незбурені» розв'язки доповнювати різними поправками. Оскільки задачі для знаходження осмос-поправок (на відміну від вироджених) є неоднорідними, то при їх безпосередньому розв'язанні вимагається застосування, наприклад, конформного переходу від даного криволінійного чотирикутника до деякого параметричного прямокутника (а не обов'язково області комплексного потенціалу) або використання методу скінченних елементів із попередньою тріангуляцією криволінійної області. Проте є можливим і представлення вільного члена у вигляді композиції похідних від деякої функції з наступним введенням

відповідного фіктивного потенціалу, а отже із застосуванням методу квазіконформних відображень.

Ключові слова: **крайова задача; фільтрація; конвекція; осмос; збурення; квазіконформні відображення; числові методи.**

Крайові задачі типу фільтрація – конвекція – дифузія – масообмін – осмос в пористих середовищах розглядалися в роботах [1–6]. У роботах [4; 5] розглядалися задачі математичного моделювання процесів фільтрації сольових розчинів з урахуванням взаємовпливу характеристик фільтраційного потоку та ґрунтового середовища, а також досліджено вплив осмотичних явищ на процес масоперенесення.

При розв'язанні відповідних задач масопереносення використовувалися, адаптувалися, розвивалися різного роду аналітичні та числові методи [1–11]. Зокрема, в роботах [1–3] отримали подальший розв'язок методи комплексного аналізу і теорії збурень розв'язання такого роду задач. Природньо враховувати явище осмосу як збурення відповідних процесів фільтрація – конвекція, зберігаючи класичні форми законів, що описують ці процеси, початково прийнятними, та не починаючи заново розв'язання збуреної задачі, отримані «незбурені» розв'язки доповнювати різними поправками.

Отже, **метою** даної роботи є розроблення методології урахування осмотичних явищ шляхом збурення процесу типу фільтрація –конвекція.

Постановка задачі типу фільтрація – конвекція – малий осмос в квазіідеальному пористому середовищі. Розглянемо у деякій чотирикутній криволінійній області G_z ($z = x + iy$), обмеженій двома еквіпотенціальними лініями $AB = \{z = x + iy : f_1(x, y) = 0\}$ і $CD = \{z : f_3(x, y) = 0\}$ та двома лініями течії $DA = \{z : f_4(x, y) = 0\}$ та $BC = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ (f_1, f_2, f_3, f_4 – досить гладкі функції, ортогональні між собою в точках перетину *A*, *B*, *C*, *D*) (рис. 1, а) модельну задачу типу «фільтрація – конвекція – малий осмос» [2; 3]

$$\mathbf{v} = -\kappa \cdot grad\, h + v \cdot grad\, c\,,\ div\, \mathbf{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\varphi\big|_{AB} = \varphi_*\,,\ \varphi\big|_{CD} = \varphi^*\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{AD} = 0\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{BC} = 0\,, \tag{2}$$

$$v_x c_x + v_y c_y - c_t = 0,\ (x,y,t) \in G = G_z \times (0,\infty), \tag{3}$$

$$c\big|_{AB} = c_*(x,y,t),\ c\big|_{t=0,(x,y)\in G_z} = c_0^0(x,y), \tag{4}$$

де $c_*(x,y,t), c_0^0(x,y)$ – задані досить гладкі і узгоджені на $(\partial G_z, 0)$ функції, $h(x,y)$ – напір, $\kappa = \kappa(x,y,\varphi,\psi)$ – коефіцієнт фільтрації (достатньо гладка функція, що, зокрема, допускає розклад в ряд Тейлора по φ), $\varphi = \varphi(x,y) = -k_* h$ – потенціал швидкості фільтрації $\mathbf{v} = (v_x(x,y), v_y(x,y))$ ($-\infty < \varphi_* < \varphi_0 < \varphi^* < +\infty$), $\psi = \psi(x,y)$ – відповідна функція течії, k_* – характерне значення коефіцієнта фільтрації $\kappa = k \cdot k_*$ (k – відповідне приведене значення κ), $\nu = \nu(x,y)$ – коефіцієнт осмосу. В силу малості даного коефіцієнта в порівнянні з κ, представимо його у вигляді $\nu = \varepsilon \cdot \nu_*$, де ν_* – характерний його розмір (співрозмірний κ), а ε – малий параметр. Отже, рінняння (1) можна розглядати як регулярне збурення відповідної вихідної (виродженої) задачі фільтрації – конвекції, яка отримується із (1) при $\varepsilon = 0$.

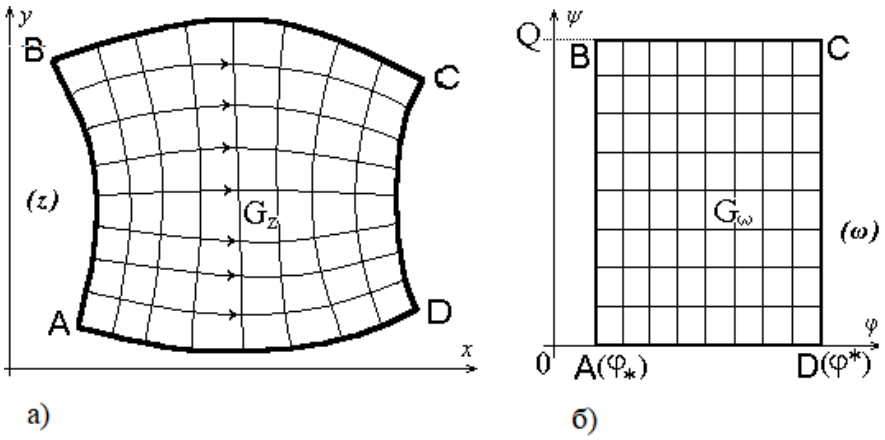

Рис. 1. Фізична область G_z та відповідна їй область квазікомплексного потенціалу G_ω

Відповідна G_z область комплексного потенціалу G_ω зображена на рис. 1, б, де $\omega = \omega(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ –

комплексний потенціал потоку, Q – шукана повна витрата (потік, $Q = \oint\limits_{AB} -v_y dx + v_x dy$). Наслідком рівнянь (1) є

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,\varphi,\psi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_*(x,y)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_*(x,y)\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)=0\ , \tag{5}$$

де час t входить всього лише як параметр (фільтрація квазістаціонарна).

Асимптотика розв'язку. Розв'язок задачі (2)–(5) представимо у вигляді асимптотичного ряду за степенями малого параметра ε

$$\tilde{n} = \tilde{n}_\varepsilon(x,y,t) = \tilde{n}_0(x,y,t) + \varepsilon\cdot\tilde{n}_1(x,y,t) + \cdots + \varepsilon^n\cdot\tilde{n}_n(x,y,t) + \ldots =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde{n}_i(x,y,t) + R_n^c(x,y,t,\varepsilon), \tag{6}$$

$$\varphi = \varphi_\varepsilon(x,y,t) = \varphi_0(x,y) + \varepsilon\cdot\varphi_1(x,y,t) + \cdots + \varepsilon^n\cdot\varphi_n(x,y,t) = +\ldots$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\varphi_i(x,y,t) + R_n^\varphi(x,y,t,\varepsilon), \tag{7}$$

де R_n^c, R_n^φ – залишкові члени, c_i, φ_i ($i = \overline{0,n}$) – шукані члени асимптотики. Підставляючи (6), (7) в (2)–(5) та прирівнюючи у відповідних співвідношеннях члени при однакових степенях ε, для знаходження, зокрема, головних членів асимптотики маємо наступні задачі:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y,\varphi_0,\psi)\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y,\varphi_0,\psi)\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)=0,\\ \varphi_0\big|_{AB}=\varphi_*,\ \ \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\Big|_{AD}=0,\ \ \dfrac{\partial\varphi_0}{\partial n}\Big|_{BC}=0,\ \ \varphi_0\big|_{CD}=\varphi^*;\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}v_{\tilde{o}}(\tilde{n}_0)_{\tilde{o}}+v_y(\tilde{n}_0)_y-(\tilde{n}_0)_t=0,\ \ (x,y,t)\in G=G_z\times(0,\infty),\\ c_0\big|_{AB}=c_*(x,y,t),\ \ c_0\big|_{t=0,(x,y)\in G_z}=c_0^0(x,y)\ .\end{cases} \tag{9}$$

Задачу (8) розв'язуємо шляхом конформного відображення G_z на G_ω (аналогічно [2]). Ввівши функцію течії $\psi_0 = \psi_0(x,y)$, комплексно спряжену до $\varphi_0 = \varphi_0(x,y)$, замість (8) приходимо до більш ширшої задачі

$$k(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = \frac{\partial\psi_0}{\partial y},\ k(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = -\frac{\partial\psi_0}{\partial x};$$

$$\varphi_0\big|_{AB} = \varphi_*,\quad \varphi_0\big|_{CD} = \varphi^*,\quad \psi_0\big|_{AD} = 0,\ \psi_0\big|_{BC} = Q$$

або оберненої до неї задачі (на квазіконформне відображення G_ω на G_z при відповідності кутових точок [2; 6; 7]).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial\varphi_0} = k(x,y,\varphi_0,\psi_0)\dfrac{\partial y}{\partial\psi_0},\ \dfrac{\partial x}{\partial\psi_0} = -\dfrac{1}{k(x,y,\varphi_0,\psi_0)}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi_0},\ (\varphi_0,\psi_0)\in G_\omega, \\ f_1(x(\varphi_*,\psi_0),y(\varphi_*,\psi_0)) = 0,\quad f_3\left(x\left(\varphi^*,\psi_0\right),y\left(\varphi^*,\psi_0\right)\right) = 0,\quad 0\le\psi_0\le Q, \\ f_2(x(\varphi_0,Q),y(\varphi_0,Q)) = 0,\quad f_4(x(\varphi_0,0),y(\varphi_0,0)) = 0,\quad \varphi_*\le\varphi_0\le\varphi^*. \end{cases} \tag{10}$$

При цьому наслідком рівнянь (10) є

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi_0^{\,2}} + k^2(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial^2 x}{\partial\psi^2} - \frac{k'_x(x,y,\varphi_0,\psi_0)\dfrac{\partial x}{\partial\varphi} + k'_y(x,y,\varphi_0,\psi_0)\dfrac{\partial y}{\partial\varphi_0} + k'_\varphi(x,y,\varphi_0,\psi_0)}{k(x,y,\varphi_0,\psi_0)}\frac{\partial x}{\partial\varphi_0} + k(x,y,\varphi_0,\psi_0)\times \tag{11}$$

$$\times\left(k'_x(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial x}{\partial\psi_0} + k'_y(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial y}{\partial\psi_0} + k'_\psi\left(x,y,\varphi_0,\psi_0\right)\right)\frac{\partial x}{\partial\psi_0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi_0^{\,2}} + k^2(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial^2 y}{\partial \psi_0^{\,2}} -$$
$$- \frac{k'_x(x,y,\varphi_0,\psi_0)\dfrac{\partial x}{\partial \varphi_0} + k'_y(x,y,\varphi_0,\psi_0)\dfrac{\partial y}{\partial \varphi_0} + k'_\varphi(x,y,\varphi_0,\psi_0)}{k(x,y,\varphi_0,\psi_0)}\frac{\partial y}{\partial \varphi_0} + k(x,y,\varphi_0,\psi_0)\times \quad (12)$$
$$\times\left(k'_x(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial x}{\partial \psi_0} + k'_y(x,y,\varphi_0,\psi_0)\frac{\partial y}{\partial \psi_0} + k'_\psi(x,y,\varphi,\psi)\right)\frac{\partial y}{\partial \psi_0} = 0.$$

Різницевий аналог (10) у випадку $k = k(\varphi,\psi)$ запишемо у вигляді [2–4; 8–11]

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2\left(1+\gamma^2 k_{i,j}^2\right)x_{i,j} + \dfrac{\Delta\varphi}{2}\left(\gamma k_{i,j}k'_{\psi_{i,j}}\left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}\right) - \dfrac{k'_{\varphi_{i,j}}}{k_{i,j}}\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}\right)\right) + \\ + \gamma^2 k_{i,j}^2\left(x_{i,j-1} + x_{i,j+1}\right) = 0, \quad y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2\left(1+\gamma^2 k_{i,j}^2\right)y_{i,j} + \gamma^2 k_{i,j}^2\left(y_{i,j-1} + y_{i,j+1}\right) + \\ + \dfrac{\Delta\varphi}{2}\left(\gamma k_{i,j}k'_{\psi_{i,j}}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}\right) - \dfrac{k'_{\varphi_{i,j}}}{k_{i,j}}\left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}\right)\right) = 0, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} f_1\left(x_{0,j}, y_{0,j}\right) = 0, & f_3\left(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}\right) = 0, \quad j = \overline{0,n+1}, \\ f_2\left(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}\right) = 0, & f_4\left(x_{i,0}, y_{i,0}\right) = 0, \quad i = \overline{0,m+1}; \end{cases} \quad (14)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)}\times$$
$$\times \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{k_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{\left(x_{i+1,j}-x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j}-y_{i,j}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_{i,j+1}-x_{i,j}\right)^2 + \left(y_{i,j+1}-y_{i,j}\right)^2} + \sqrt{\left(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}\right)^2 + \left(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j}\right)^2}}, \quad (15)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i,\psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i,\psi_j)$, $k_{i,j} = k(\varphi_i,\psi_j)$,
$G_\omega^\gamma = \Big\{\left(\varphi_i,\psi_j\right)\colon \ \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi\cdot i, i = \overline{0,m+1};\ \psi_j = \Delta\psi\cdot j, \quad j = \overline{0,n+1};$
$\Delta\varphi = \dfrac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta\psi = \dfrac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m,n \in \mathbf{N}\Big\}.$

Розв'язок останньої задачі знаходимо ітераційно шляхом почергового уточнення внутрішніх та граничних вузлів одержаної квазіконформної сітки, параметра конформності γ тощо.

У випадку, якщо $k(x,y,\varphi,\psi)=k(x,y)$, то (як і в [2; 5]) вихідна лінійна задача переходить у нелінійну обернену до неї задачу. І все ж, процес побудови наближень розв'язку такої задачі збігатиметься, якщо внести наступні видозміни до побудованого алгоритму: послідовні наближення коефіцієнта провідності $k(x,y)$ на даному кроці у (i, j)-вузлах сітки G_ω^γ знаходимо тепер після наближень відповідних значень $x_{i,j}, y_{i,j}$, а саме $k_{i,j}^{(k)}=k\left(x_{i,j}^{(k)},y_{i,j}^{(k)}\right)$; послідовні наближення внутрішніх вузлів отримуються як і в [2].

Тепер, відповідно до формули для обчислення вектора швидкості даного поля [1; 2] $\vec{v}=\dfrac{d\omega}{dz}=\left(\dfrac{dz}{d\omega}\right)^{-1}$ для виродженої задачі, у внутрішніх вузлах динамічної сітки одержимо:

$$v_{xi,j}=v_x(x_{i,j},y_{i,j})=J_{i,j}^{-1}(x_{i+1,j}-x_{i,j})\Delta\psi,$$

$$v_{y\,i,j}=v_y(x_{i,j},y_{i,j})=J_{i,j}^{-1}(y_{i+1,j}-y_{i,j})\Delta\psi,$$

де $J_{i,j}=(x_{i+1,j}-x_{i,j})(y_{i,j+1}-y_{i,j})-(x_{i,j+1}-x_{i,j})(y_{i+1,j}-y_{i,j})$,

$v_{i,j}=\sqrt{v_{x\,i,j}^2+v_{y\,i,j}^2}$.

Здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi)$, $y=y(\varphi,\psi)$ у рівнянні (3) і умовах (4), приходимо до відповідної задачі конвективного масопереносу для області G_ω:

$$v^2(\varphi,\psi)\cdot\frac{\partial c}{\partial\varphi}+\frac{\partial c}{\partial t}=0,\ (\varphi,\psi,t)\in\Omega=G_\omega\times(0,\infty); \qquad (16)$$

$$c(\varphi,\psi,0)=c_0^0(\varphi,\psi),(\varphi,\psi)\in G_\omega;\ c(\varphi_*,\psi,t)=c_*(\psi,t),\ t\geq 0. \qquad (17)$$

На підставі методу характеристик [1; 3] розв'язок (16), (17) представимо у вигляді

$$c(\varphi,\psi,t)=c_0(\varphi_0,\psi_0,t)=\begin{cases}c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t),\psi), & t\le f(\varphi,\psi)=\int\limits_{\varphi_*}^{\varphi}\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{v^2(\widetilde{\varphi},\psi)},\\ c_*(\psi,t-f(\varphi,\psi)), & t>f(\varphi,\psi).\end{cases}$$

де f^{-1} – функції обернена відповідно до функцій f щодо змінної φ.

Для наближеного обчислення виразу $f^{-1}(f(\varphi,\psi)-t)$, у тому числі для обернення відповідних визначених інтегралів із змінною верхньою границею, використовуємо підхід, описаний у роботі [3]. А саме, зробивши дискретизацію часу t за формулою $t_k=t_{i,j}=f(\varphi_i,\psi_j)$, використовуючи метод трапецій обчислення визначених інтегралів і метод хорд розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо (з метою спрощення запису розв'язків розглянемо випадок з кроком $\Delta\varphi$ за змінною $\varphi=\varphi_0$).

Для знаходження членів $\varphi_1=\varphi_1(x,y),\ \ c_1=c_1(x,y)$ (в результаті окресленої вище процедури) матимемо задачі (для спрощення викладок вважатимемо, що k не залежить від φ)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(b_1(x,y)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)+d_1(x,y,\varphi_1)=0,\\ \varphi_1\big|_{AB}=0,\ \ \left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{AD}=0,\ \ \left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{BC}=0,\ \ \varphi_1\big|_{CD}=0;\end{cases}\tag{18}$$

$$\begin{cases}v_{\tilde{o}}(\tilde{n}_1)_{\tilde{o}}+v_y(\tilde{n}_1)_y+d^1(x,y,\ldots)-(\tilde{n}_1)_t=0,\ \ (x,y,t)\in G=G_z\times(0,\infty),\\ c_1\big|_{AB}=0,\ \ c_1\big|_{t=0,(x,y)\in G_z}=0,\end{cases}\tag{19}$$

де коефіцієнти a_1,b_1,d_1,d^1 виражаються через коефіцієнти розкладів в ряди Фур'є функцій, що входять у вихідні рівняння та відомі «складові» асимптоти розв'язку одержані на попередньому кроці.

Зауважимо, що на відміну від (8), (9) тут рівняння є неоднорідними, а умови однорідними. Розв'язки типу (19) можна одержати з використанням [1–3], а розв'язання (18) можливе трьома шляхами:

– із застосуванням тріангуляції області [4];

–переходом від даного криволінійного чотирикутника до деякого параметричного прямокутника [5];

–представленням вільного члена у вигляді композиції похідних від деякої функції з наступним введенням відповідного фіктивного потенціалу і застосування методу квазіконформних відображень аналогічно як до задачі (8).

Для знаходження членів асимптотики φ_i, c_i вищих порядків приходимо до задач виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_i(x,y)\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(b_i(x,y)\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right) + d_i(x,y,\varphi_i) = 0, \\ \varphi_i\big|_{AB} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right|_{AD} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right|_{BC} = 0, \quad \varphi_i\big|_{CD} = 0; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} v_{\tilde{o}}\left(\tilde{n}_i\right)_{\tilde{o}} + v_y\left(\tilde{n}_i\right)_y + d^i(x,y,\ldots) - \left(\tilde{n}_i\right)_t = 0, \ (x,y,t) \in G = G_z \times (0,\infty), \\ c_i\big|_{AB} = 0, \ c_i\big|_{t=0,(x,y)\in G_z} = 0, \end{cases} \tag{21}$$

де a_i, b_i, d_i, d^i одержуються через розв'язки відповідних задач на попередніх кроках та коефіцієнти розкладу в ряди Фур'є «складників» вихідних рівнянь.

Залишкові члени оцінюємо аналогічно до [1–3] з використанням принципу максимуму для параболічних рівнянь та використанням «верхніх та нижніх мажорант» розв'язків «кутових задач» для диференціальних рівнянь першого порядку (зокрема, рівнянь конвективного масопереносу).

В якості прикладу розглянемо відповідий ситуаційний стан для одновимірного стаціонарного випадку, коли $v = v_* + \varepsilon \cdot c'$, де v_* – фільтраційна складова швидкості, а $\varepsilon \cdot c'$ – осмотична складова (ε – малий параметр). В цьому випадку задачу прогнозування концентрації зведемо до розв'язку $c = c_\varepsilon(x)$ $(0 < x < l)$ рівняння $(c')' - \varepsilon \cdot c'^2 = 0$ за умов $\tilde{n}(0) = 0, \ \tilde{n}(l) = c_*$. Її розв'язок є

$$c = c_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \ ln \frac{l \cdot e^{\varepsilon \cdot c_*}}{x + e^{\varepsilon \cdot c_*}(l - x)},$$

або

$$c = c_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} ln \frac{l \cdot e^{\varepsilon \cdot c_*}}{l \cdot e^{\varepsilon \cdot c_*} + x(l - e^{\varepsilon \cdot c_*})},$$

а розв'язок відповідної виродженої задачі ($\varepsilon = 0$) $c = c_0(x) = \frac{c_*}{l} x$.

Функцію $c = c_\varepsilon(x)$ можна отримати в результаті її розкладу в асимптотичний ряд за степенями ε

$$\tilde{n} = \tilde{n}_\varepsilon(x) = \tilde{n}_0(x) + \varepsilon \cdot \tilde{n}_1(x) + \varepsilon^2 \cdot \tilde{n}_2(x) + \cdots + \varepsilon^n \cdot \tilde{n}_n(x) + R_n(x, \varepsilon).$$

В результаті застосування стандартної процедури прирівнювання, для знаходження c_1, c_2 і т.д., одержимо задачі

$$\tilde{n}_1'' = f_1(x),\ f_1(x) = \tilde{n}_0'^2(x) = \left(\frac{c_*}{l}\right)^2 = \frac{c_*^2}{l^2},\ c_1(0) = c_1(l) = 0,$$

$$\tilde{n}_2'' = f_2(x),\ f_2(x) = 2\tilde{n}_0'\tilde{n}_1',\ c_2(0) = c_2(l) = 0.$$

В результаті їх розв'язання матимемо

$$c_1(x) = \frac{c_*^2}{2l^2} x^2 - \frac{c_*}{2l} x.$$

На рис. 2 зображено графіки функцій $c = c_0(x),\ c = c_\varepsilon(x)$ та $\bar{c}_\varepsilon^1(x) = \mathrm{c}_0(x) + \varepsilon \cdot \mathrm{c}_1(x)$ при $l = 1,\ c* = 1,\ \varepsilon = 10^{-5}$.

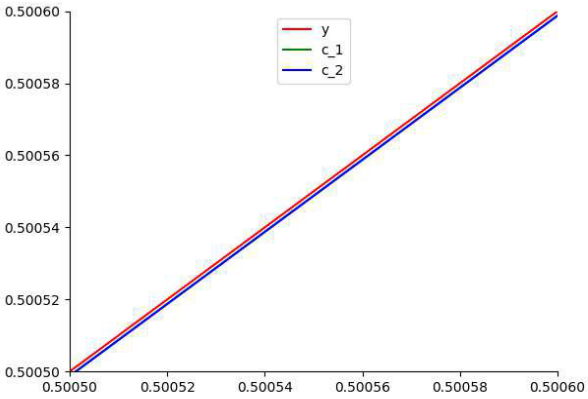

Рис. 2. Графіки функцій $c = c_0(x),\ c = c_\varepsilon(x)$ та $\bar{c}_\varepsilon^1(x) = c_0(x) + \varepsilon \cdot c_1(x)$

Як і очікувалося, результати розрахунків виродженої задачі та двома способами, розв'язаної збуреної задачі є досить близькими. Це пояснюється надто малим значенням коефіцієнта осмому в

порівнянні з іншими параметрами.

Отже, при проведенні вищеописаних досліджень приходимо до **висновку,** що застосування ідей теорії збурень є доречним при моделюванні такого роду процесів, адже «попередні напрацювання» залишаються в силі (урахування осмосу одержуємо шляхом їх поправок). Тому при комп'ютерному моделюванні даного фізичного процесу наяву маємо і економію пам'яті, і машинного часу.

1. Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція – дифузія» : монографія. Рівне : НУВГП, 2008. 252 с. **2.** Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярощак С. В. Методи комплексного аналізу : монографія. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с. **3.** Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах : монографія. Рівне : О. Зень, 2017. 291 с. **4.** Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів : монографія. Рівне : НУВГП, 2004. 211 с. **5.** Власюк А. П., Остапчук О. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах : монографія. Рівне : НУВГП, 2015. 214 с. **6.** Lavrentev M. A., Shabat B. V. Methods of the theory of function of complex variable. Moscow : Nauka, 1987. 544 p. **7.** Godunov S. K., Ryabenkii V. S. Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory. *Elsevier Science*. Amsterdam, 1987. **8.** Lyashko I. I., Makarov V. L., Skorobogatko A. A. The method of calculations. Kyiv, 1977. 408 p. **9.** Marchuk G. I. Methods of Numerical Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1982. **10.** Samarskii Alexander A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001. 761 p. **11.** Samarskii A. A., Vabishchevich Petr N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin, New York : De Gruyter, 2007.

REFERENCES:

1. Bomba A. Ya., Baranovskyi S. V., Prysiazhniuk I. M. Neliniini synhuliarno zbureni zadachi typu «konvektsiia-dyfuziia» : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2008. 252 s. **2.** Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Pryhornytskyi D. O., Yaroshchak S. V. Metody kompleksnoho analizu : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2013. 415 s. **3.** Bomba A. Ya., Prysiazhniuk I. M., Prysiazhniuk O. V. Metody teorii zburen prohnozuvannia protsesiv teplomasoperenesennia v porystykh ta mikroporystykh seredovyshchakh : monohrafiia. Rivne : O. Zen, 2017. 291 s. **4.** Vlasiuk A. P., Martyniuk P. M. Matematychne modeliuvannia konsolidatsii hruntiv v protsesi filtratsii solovykh rozchyniv : monohrafiia. Rivne : NUVHP,

2004. 211 s. **5.** Vlasiuk A. P., Ostapchuk O. P. Matematychne modeliuvannia perenosu solovykh rozchyniv pry filtratsii pidzemnykh vod u gruntovykh masyvakh : monohrafiia. Rivne : NUVHP, 2015. 214 s. **6.** Lavrentev M. A., Shabat B. V. Methods of the theory of function of complex variable. Moscow : Nauka, 1987. 544 p. **7.** Godunov S. K., Ryabenkii V. S. Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory. *Elsevier Science*. Amsterdam, 1987. **8.** Lyashko I. I., Makarov V. L., Skorobogatko A. A. The method of calculations. Kyiv, 1977. 408 p. **9.** Marchuk G. I. Methods of Numerical Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1982. **10.** Samarskii Alexander A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001. 761 p. **11.** Samarskii A. A., Vabishchevich Petr N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics. Berlin, New York : De Gruyter, 2007.

Bomba A. Ya., Doctor of Engineering, Professor, **Ostapchuk O. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

CONSIDERATION OF OSMOSIS PHENOMENA IN MODELING PROCESSES BY THE TYPE OF FILTRATION – CONVECTION USING PERTURBATION THEORY METHODS

A new approach has been developed to account for osmosis in predicting filtration-convection processes in quasi-ideal porous media confined by streamlines and equipotential lines. This was achieved by taking advantage of the transition from direct boundary problems (by conformal mapping of the filtration area to the corresponding complex potential area) to inverse problems when solving the respective degenerate problems. Thanks to this approach, the problem of grid construction is automatically eliminated, the convective transport equation is simplified, the convection problem is reduced to a canonical area, and the solution can be represented in a numerical-analytical form.

The phenomenon of osmosis is accounted for by perturbations of the degenerate classical problem. In the transition from "unperturbed" to "perturbed" problems (in particular, nonlinear ones), such a requirement was put forward that the classical forms of the laws describing these processes (fluid motion in porous media, convective diffusion, etc.) should be left initially acceptable, and the obtained "unperturbed" solutions to be supplemented with various

amendments. Since the problems for finding osmotic corrections (unlike degenerate ones) are non-homogeneous, their direct solution requires, for example, the use of conformal mapping from a given curvilinear quadrilateral to a certain parameterized rectangle (rather than necessarily to the complex potential area) or the use of the finite element method with prior triangulation of the curvilinear area (domain). However, it is possible to represent the free term as a composition of derivatives of some function with the subsequent introduction of the corresponding fictitious potential, and thus the application of the quasi-conformal mapping method.

Keywords: **boundary value problem; filtration; convection; osmosis; perturbation; quasiconformal mappings; numerical methods.**