Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій

04-03-364М

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія інформації та автоматів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання.

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАКОТ
Протокол № 9 від 31.08.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія інформації та автоматів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання. [Електронне видання] Данченков Я. В. – Рівне : НУВГП, 2023. – 34 с.

Укладач: Данченков Я. В., кандидат технічних наук, доцент**,** доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій, доктор технічних наук, професор.

Керівник освітньої програми «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» Христюк А. О., к.т.н., доцент, доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

З М І С Т

Вступ

Виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Теорія інформації та автоматів» передбачено навчальним планом для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю 174 "Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка" всіх форм навчання.- ,і їх виконання є обов'язковим.

Практичні роботи вимагають від студентів застосування теоретичних положень з дисципліни " Теорія інформації та автоматів " для їх виконання.

Метою практичних занять з дисципліни “Теорія інформації та автоматів » є - навчити студентів розрахувати ентропію джерела інформації; записувати числа в будь-якій системі числення та переводити числа з однієї системи числення в іншу, вміти використовувати ефективне кодування інформації для її передавання каналами звя’зку, розуміти логіку роботи цифрового автомата тощо.

Практичне заняття №1-2 . Визначення кількості інформації мірами Р. Хартлі та К. Шеннона та ентропії ергодичного джерела повідомлення

1.1. Мета заняття : Навчитись визначати кількість інформації мірами Р. Хартлі та К. Шеннона та ентропії ергодичного джерела повідомлення.

1.2. Теоретичні відомості

На сьогодні найбільш розроблена задача синтаксичної оцінки інформації. При синтаксичному рівні аналіз інформації визначається як міра зменшення невизначеності знань про будь-який об'єкт (предмет) у процесі його пізнання.

Для оцінки ступеня невизначеності знань на синтаксичному рівні розроблено велику кількість різних математичних мір, але найбільше використовуються дві міри:

- структурна або логарифмічна, запропонована Р. Хартлі в 1928 р.;
- ймовірнісна, запропонована К.Шеноном в 1948 р.

При розробці логарифмічної міри Р.Хартлі запропонував наступне [1]:

- сигнали, за допомогою яких передаються повідомлення, складаються з дискретних елементів (символів);
- елементи сигналів можуть приймати кінцеву кількість різних значень (m) (сукупність всіх m значень утворює алфавіт);
- усі символи між собою статистично незалежні і рівноімовірні;
- передача інформації відбувається за відсутності завад.
-

Р.Хартлі запропонував міру визначення інформації як логарифм можливих сигналів з однаковою кількістю символів.

$$I= log_a N=log_a m^n=n\ log_a m \qquad (1)$$

В тому випадку, якщо ймовірність будь-якого стану або появи символу алфавіту неоднакові, тобто $P_1 \neq P_2 \neq P_m$, використовується ймовірнісна міра, яку запропонував К. Шеннон

$$I = -n\sum_{i=1}^{m} P_i \log_a P_i \ , \qquad (2)$$

де m – кількість символів в алфавіті, n – кількість символів алфавіту в повідомленні, P_i – імовірність (відносна частота) появи символу із значенням *i* в повідомлені.

Вперше визначення ентропії в теорії інформації запропонував її фундатор К. Шеннон [1].

Кількість інформації, яка приходиться на один символ, називається змістовністю або ентропією:

$$H = \sum_{i=1}^{m} H_i = \frac{I}{n} = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_a P_i \,. \qquad (3)$$

1.2.1. Поняття про ергодичне джерело повідомлень

Джерелом повідомлення може бути об'єкт, стан якого визначається деяким фізичним процесом, що має місце в часі або у просторі за випадковим (попередньо невідомим) закону.

Джерело дискретних повідомлень створює (виробляє) деяку послідовність символів x_i, при цьому порядок надходження цих символів випадковий і характеризується деякою сукупністю ймовірностей. Нас цікавить, яка середня кількість інформації створюється таким джерелом на один символ, або за одиницю часу. Для відповіді на це питання необхідно з'ясувати які статичні (ймовірнісні) показники можуть охарактеризувати джерело, яке розглядається. Тобто необхідні більш глибокі та детальні імовірнісні характеристики джерела, а саме залежність імовірності передачі даного сигналу від того, які символи були передані раніше. Імовірнісні (або кореляційні) зв'язки між символами можуть розповсюджуватися на більші або менші групи символів.

Нехай по каналу зв’язку передається така послідовність символів : $x_1; x_2; x_3;..x_g; x_h.;.x_i; x_j;...x_n$.

1.Якщо ці символи незалежні, то умовна ймовірність передачі символу x_j дорівнює $p\left(x_j \middle| x_i, x_h, x_g ...\right) = p\left(x_j\right)$.

2. Для всіх *g, h, i, j,* якщо має місце кореляційний зв'язок між двома сусідніми символами, тоді $p(x_j l x_i , x_h , x_g) = p(x_j l x_i)$

Тобто імовірність передачі символу x_j залежить лише від того, який був попередній символ x_i і не залежить від символів, що передавалися раніше.

3. В тому випадку, якщо такий зв'язок має місце між трьома сусідніми символами, тоді: $p\left(x_j \middle| x_i, x_h, x_g \ldots\right) = p\left(x_j \middle| x_j, x_h\right)$.

Аналогічні співвідношення можуть бути розповсюджені для кореляційних зв'язків на групи із більшої кількості символів.

У більшості джерел, які зустрічаються на практиці, кореляційні зв'язки розповсюджуються на кінцеву кількість символів, такі джерела називають **ергодичними**.

В ергодичному джерелі для символів $x_g \ldots x_s$, що далеко відстоять один від одного, кореляційний зв'язок відсутній, тобто поява x_s не залежить від того, яким був x_g і відповідно тоді $p\left(x_s \middle| x_g\right) = p(x_s)$ для всіх g.

Прикладом ергодичного повідомлення є будь-яка мова. В будь-якій книжці частота окремих літер і сполучень різних літер більш-менш однакова, хоч змістовність цих книжок різна. Такі обставини дозволяють застосувати математичний апарат, для аналізу мов і має велике значення для побудови систем зв'язку, машин для друку, перекладу та інше.

Отже, щоб визначити ентропію ергодичного джерела інформації, треба встановити , як на неї діє кореляційний зв'язок між елементами (символами)сигналу.

Розглянемо такі можливі варіанти:

1. Джерело виробляє сигнали, які статистично не залежать один від одного і мають однакову імовірність, тобто

$$p\left(x_j \middle| x_i, x_h, x_g \ldots x_N\right) = p\left(x_j\right) \text{ і,}$$

$$p(x_i) = p(x_j) = p(x_h) = p(x_N) \text{ тобто } p(x_i) = 1/\text{N}.$$

В цьому випадку для визначення кількості інформації на одне повідомлення (сигнал) використовується формула Р.Хартлі для ентропії:

$$H(x) = log_a N = -log_a P(x_i) \qquad (4)$$

1.3. Приклади

1. Джерело виробляє чотири символи x_1 x_2. x_3. x_4 з ймовірностями $p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=p(x_4)=\frac{1}{4}$. Кореляційні зв'язки між символами відсутні. Використовуючи (2) отримаємо

$$H(x_i)=-log_2 4=2Біт$$

2. Джерело виробляє сигнали які статистично незалежні один від іншого, але мають іншу імовірність появи.

Тобто $p(x_j|x_i,x_h,x_g...x_N)=p(x_j)$ і

$p(x_i)\neq p(x_j)\neq p(x_h)\neq p(x_N)$;

В цьому випадку використовується формула К. Шеннона (3).

Наприклад. Джерело виробляє також чотири символи, але із різними ймовірностями

$$p(x_1)=\frac{1}{2},\quad p(x_2)=-\frac{1}{4},\qquad p(x_3)=p(x_4)=\frac{1}{8}$$

Кореляційні зв'язки між символами відсутні. Використовуючи (3) знаходимо:

$$H(x)=-\sum_{j=1}^{n} p_j\, log_2\, p_j=\frac{1}{2}log_2 2+\frac{1}{4}log_2 4+2\frac{1}{8}log_2 8=\frac{7}{4}=1{,}75Біт$$

3. В тому випадку, якщо має місце кореляційний зв'язок тільки між двома сусідніми символами і імовірності появи окремих символів неоднакові для визначення ентропії джерела використовують такий вираз [1] :

$$H=-\sum_{h=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}P(x_j,x_i)\log P(x_j/x_i)=\sum_{i,j=1}^{m}P(x_j,x_i)\log P(x_j/x_i) \quad (4)$$

Наприклад: імовірності появи символів $p(x_1)=\frac{1}{2}$, $p(x_2)=-\frac{1}{4}$, $p(x_3)p(x_4)=\frac{1}{8}$ і між двома сусідніми символами мають місце кореляційні зв'язки, які представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

x_{ij}	$p(x_i x_j)$	$p(x_j \vert x_i)$	x_{ij}	$p(x_i x_j)$	$p(x_j \vert x_i)$
x_1x_1	13/32	13/16	x_3x_1	0	0
x_1x_2	3/32	3/16	x_3x_2	0	0
x_1x_3	0	0	x_3x_3	0	0
x_1x_4	0	0	x_3x_4	1/8	1
x_2x_1	1/32	1/8	x_4x_1	1/16	1/2
x_2x_2	1/8	1/2	x_2x_2	1/32	1/4
x_2x_3	3/32	3/8	x_4x_3	1/32	1/4
x_2x_4	0	0	x_4x_4	0	0

В табл. 3 $p(x_i x_j)$ імовірність всіх можливих пар символів $p(x_j|x_i)$ імовірність впливу x_i на x_j (тобто імовірність переходів). Якщо відомі $p(x_i x_j)$ тоді

$$p(x_i)=\sum_j p(x_i, x_i) \tag{5}$$

$$p(x_i|x_j)=\frac{p(x_i x_j)}{p(x_j)} \tag{6}$$

З цієї таблиці видно, що за символом x_3 в цьому джерелі завжди приходить символ x_4, а після символи x_1 генерується або такий же символ x_1, або символ x_2. Так як імовірності деяких пар символів дорівнюють нулю, то в джерелі, що розглядається, мають місце дев'ять характерних станів. Скориставшись формулою (4) отримаємо:

$$H(x)=\frac{13}{32}log_2\frac{13}{16}+\frac{3}{32}log_2\frac{3}{16}+\frac{1}{32}log_2\frac{1}{8}+\frac{1}{8}log_2\frac{1}{2}+\frac{3}{32}log_2\frac{3}{8}+$$
$$\frac{1}{8}log_2 1+\frac{1}{16}log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{32}log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{32}log_2\frac{1}{4}=0{,}886\,Біт$$

Розв’язок цих прикладів практично доводить висновок, ***що ентропія джерела зменшується при збільшені кореляційних зв’язків між символами і що максимальною ентропія джерела буде, якщо ймовірність появи різних символів однакова і між ними відсутній кореляційний зв’язок.***

1.4. Завдання для самостійного розв'язування

Завдання 1

Колода складається з 32 карт від сімок і вище. Гравець 1 достає будь-яку карту. Гравець 2 повинен вгадати, яку карту витягнув 1 гравець, задаючи питання. Перший гравець дає відповіді "так" або "ні". Визначати мінімальну кількість питань, яка гарантує другому гравцю вірне відгадування вийнятої карти.

Пояснення до завдання 1

Кількість різних карт N= 32. Так як, будь яка карта може бути витягнута із однаковою імовірністю, тоді згідно формули (54) ентропія системи $H(X) = \log_2 32 = 5$ Біт.

Відповідь «так» або «ні» містить 1 Біт інформації і тому достатньо 2 гравцю отримати 5 відповідей «так» або «ні» щоб відгадати карту.

Наприклад 1 гравець достав сімка пік.

Алгоритм запитань 2 гравця, який гарантує вгадування наступний.:

1. Карта червоної масті? Відповідь 1 гравця – ні, це 1 біт.
2. Це піка? Відповідь –так, це ще один біт.
3. Карта старших розрядів? Відповідь – ні, це третій біт.
4. Розряд карти меньше дев’ятки? Відповідь –так, четвертий біт.
5. Це вісімка? Відповідь –ні., це п’ятий біт.

Тобто, карта яку витягнув 1 гравець, це сімка пік.

Завдання 2

Визначити мінімальну кількість зважувань, які необхідно провести на рівноплечій вазі, щоб серед 27 на вигляд однакових монет знайти одну фальшиву , яка більш легка.

Пояснення до завдання 2

Загальна невизначеність ансамблю – $H(U) = \log_2 27$ Біт.

Одне зважування дозволяє прояснити невизначеність ансамблю U^1, який налічує три можливих стани:

- ліва частина ваги легша;
- права частина ваги легша;
- вага знаходиться в рівновазі.

Ця невизначеність $-H(U^1) = \log_2 3$ Біт.

А так, як H(U) = $3\log_2 3$ = 3 H(U^1), тоді для визначення фальшивої монети достатньо провести три зважування за наступним алгоритмом.

1. Спочатку зважують по 9 монет. Фальшива монета буде знаходитись серед тих 9 монет , які виявилися більш легкими, або серед тих, які не зважувались, якщо мала місце рівновага правої та лівої чашки терези.

2. Аналогічно після другого зважування кількість монет, серед яких знаходиться фальшива скоротиться до трьох.

3. Останнє третє зважування дасть можливість вказати, яка монета є фальшивою.

Завдання 3

На керованому об'єкті є три клапани, кожний з яких може знаходитися в одному із двох положень (відкритому або відкритому). З об'єкта передаються повідомлення про зміну положення клапанів. В результаті спостережень на протязі великого проміжку часу встановлено, що із 100 переданих повідомлень /ί, відносяться до першого клапана, A_2 до другого і A_3 до третього (значення A_1, A_2, A_3 для кожного варіанту завдання приведені в табл. 2).

Клапани спрацьовують незалежно один від одного. Визначити кількість інформації, що міститься в одному повідомленні.

Пояснення до завдання 3

Середню кількість інформації, яка приходиться на одне достовірне повідомлення у випадку, коли імовірності появи повідомлень, неоднакові. визначається за формулою:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) \ \textit{Біт}, \text{ або } \left(\frac{\textit{дв.один}}{\textit{повід}} \right)$$

де $p(x_i)$ - імовірність появи повідомлення x_i.

Позначимо повідомлення про те. що 1-й клапан закрився x_{13} повідомлення про те, що 1-й клапан відкрився x_{1B}. Аналогічні позначення введемо для 2-го та 3-го клапанів.

Для кожного клапана кількість повідомлень про його відкриття або закриття буде однаковою і відповідно імовірності цих повідомлень будуть рівними, тобто

$$P(x_{12}) = P(x_{23}); \ P(x_{23}) = P(x_{2B}); \ P(x_{33}) = P(x_{3B}).$$

Використавши статистику спостережень, наведену в табл. 2

для випадку $A_1 = 70$, $A_2 = 20$, $A_3 = 10$,

Імовірність повідомлень.	X_{13}	X_{1B}	X_{23}	X_{2B}	X_{33}	X_{3B}
$P(x_i)$	0,35	0,35	0,1	0,1	0,05	0,05

отримаємо:

$$H(x) = 2 \cdot 0{,}35 \log_2 0{,}35 - 2 \cdot 0{,}1 \log_2 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}05 \log_2 0{,}05 = 2{,}156 \textit{Біт}$$

Таблиця 2

Таблиця варіантів для самостійного розв'язку 3 завдання

	Варіант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A_1	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
A_2	30	39	30	29	30	25	20	28	22	19
A_3	10	10	8	8	6	10	14	5	10	12
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A_1	44	45	35	32	52	24	36	55	48	56
A_2	46	50	40	48	38	44	42	30	46	32
A_3	10	5	15	20	10	32	22	25	6	22
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A_1	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68
A_2	30	30	30	30	30	30	26	22	18	14
A_3	20	18	16	14	12	10	12	14	16	18

Завдання 4

Визначити об'єм інформації який міститься в зображенні при умові що воно поділяється на n рядків по m елементів в кожному рядку (згідно заданого варіанту, див. табл. 3). Яскравість кожного елемента передається 8 квантованими рівнями. Різні градації яскравості рівно ймовірні, а яскравості різних елементів не корельовано.

Пояснення до завдання 4

Так як всі елементи незалежні і рівно імовірні, тому ентропія зображення буде визначатися:

$H(Xз) = M{*}H(Xел)$ дв.одиниць/зображ.,

де M – кількість елементів розкладення , $H(Xел)$ –ентропія одного елемента.

В зв'язку з тим ,що різні градації яскравості не корельовано і вони є рівно імовірні тоді згідно формули (4):

$H(Xел) = \log_2 8 = 3$ дв. од. (*Біт*).

Якщо, наприклад n = 500, а m = 500 тоді об'єм інформації, що міститься в зображенні буде:

$H(X_з) = M*H(X_{ел}) = 500*500*3 = 750000$ дв.одиниць/зображ.

Таблиця 3

Таблиця варіантів для самостійного розв'язку 4 завдання

	Варіант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550
m	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
n	120	155	220	255	390	370	310	420	400	450
m	205	220	310	390	420	470	505	570	610	630
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
n	220	240	260	280	300	320	340	350	360	370
m	320	330	340	350	360	370	380	390	400	410

Завдання 5

Зображення (згідно варіанту із завдання 4) записується на магнітну стрічку. По ширині магнітної стрічки 30 *Біт* інформації , щільність запису по довжині 10 *Біт/мм*.

Яка довжина магнітної стрічки потрібна для запису одного зображення ?

Пояснення до завдання 5

Якщо, наприклад n = 500, а m = 500 тоді об’єм інформації що міститься в зображенні буде:

$H(Xз) = M*H(Xел)$ = 500*500*3 = 750000 дв.одиниць/зображ.,

Тоді для запису цього зображення потрібна стрічка довжиною:

$$l = \frac{750000}{30*10} = 2500 \text{ мм.}$$

Таблиця варіантів для самостійного розв’язку завдання 5 така ж як для завдання 4.

Практичне заняття № 3-4. *Системи числення. Математичні операції з двійковими числами*

1.1.Мета заняття:

Навчитися записати будь-яке число в різних системах числення, переводити числа з однієї системи числення в іншу та здійснювати математичні операції з двійковими числами.

1.2. Системи числення (теоретичні відомості)

В теорії кодування відрізняють двійкову, десяткову, вісімкову та інші системи числення. Під **системою числення** розуміють сукупність правил зображення чисел цифровими знаками. Розрізняють позиційні й непозиційні системи числення. У непозиційних системах числення вага знака не залежить від його положення по відношенню до інших знаків у числі. У римській системі числення: I - 1, V - 5, X - 10 і т. д. Недоліками непозиційних систем числення є громіздкість зображення чисел і труднощі у виконанні операцій. На сьогодні основними системами числення є позиційні. Система числення називається позиційною, якщо під час запису числа одна і таж цифра має різне значення, яке визначається місцем (позицією), на якому вона знаходиться. Кількість знаків, яка використовується в системі числення називають основою, або модулем.. Запис числа – це сума добутків знаків на відповідну ступінь основи системи числення. Тобто будь-яке число N в певній системі числення можливо записати у вигляді ряду

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i g^i , \qquad (7)$$

де α_i - розрядні коефіцієнти, значення яких змінюються від 0 до g-1; g – основа (алфавіт) системи числення; i-номер розряду;

n-кількість розрядів.

Назва позиційної системи числення походить від основи, тобто, якщо g=2 –двійкова, g=8 – вісімкова, g=10 – десяткова системи числення тощо.

Для запису чисел у десятковій системі використовують 10 цифр (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), у двійковій – дві (0,1), у вісімковій – вісім (0,1,2,3,4,5,6,7) а в шіснадцятковій шістнадцать знаків – 10 цифр (0…..9) і шість літер (A,B,C,D,E,F).

Використання формули (57) дозволяє співвіднести число будь якої системи числення із десятковою скориставшись таблицею 4

Наприклад, двійкове число N(2) = 1011001,101 можна записати у вигляді наступного ряду N(2) = 1011001,101 =
$1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3}$ =
64+16+8+1+0,5+0,125 = 89, 652 (10).

А шістнадцятковке число N(16) = 5A3F,2B запишеться так:

5A3F,2B = $5\cdot 16^3$ + $A\cdot 16^2$ + $3\cdot 16^1$ +$F\cdot 16^0$ +$2\cdot 16^{-1}$ +$B\cdot 16^{-2}$ =
$= 5\cdot 16^3 + 10\cdot 16^2 + 3\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 + 2\cdot 16^{-1} + 11\cdot 16^{-2} =$
=20480+2560+48+15+0,0625+0,0039 = 23088,0664(10).

Таблиця 4

Таблиця відповідності кодів між різними системами числення

Десяткова	Двійкова	Вісьмкова	Шістнад-цяткова
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10

1.3. Завдання для самостійного розв'язку

Записати числа різних систем числення.

1. Десяткових – 40,561; 1806,02; 5,11; 20,25; 354,65; 873,96; 245,6.
2. Двійкових – 111,10101; 10,1011; 1010,11; 1101,01; 1001,011.
3. Вісімкових – 315,6; 30,76; 274,07; 346,16; 653,42; 321,54.
4. Шістнадцяткових – A7F,6; 2E,C6; B6,3E; E5A,B2; 2B3,CA.

1.4. Переведення числа в будь яку систему числення

Розглянемо спочатку алгоритм переведення десяткового числа в двійкове.

1. Переведення цілої частки десяткового числа в двійкову систему числення здійснюється послідовним діленням цього числа на основу двійкової системи числення до тих пір, поки частка не буде менше за дільник. В результаті залишки від початку, і є двійковим відображенням десяткового числа.

2. Щоб перевести десяткову дріб в двійкову систему числення її послідовно множать на 2, при цьому кожного разу тільки дрібну частину добутку, що утворюється. Кількість таких множень відповідає заданій точності. Дріб в двійковій системі записується у вигляді дробу з цілих частин добутків, що утворились; починаючи з першого.

Приклад

Переведіть число N(10) = 148,74 в двійкову систему числення (зробіть перевірку).

Розв'язок

Для цілої частки:

148 : 2= 74 залишок 0
74 : 2= 37 залишок **0**
37 : 2= 18 залишок **1**
18 : 2= 9 залишок **0**
9: 2= 4 залишок **1**
4: 2= 2 залишок **0**
2 : 2= 1 залишок **0**
остання частка **1** напрям зчитування

Перевірка здійснюється за формулою (7).

$$10010100(2)= 1\cdot2^{7} + 1\cdot2^{4} +1\cdot2^{2} =128+16+4=148(10)$$

Для дробової частки:

напрям зчитування

0.74·2=**1**,48
0.48·2=**0,**96
0.96·2=**1,**92
0.92·2=**1,**84
0.84·2=**1,**68
0.68·2=**1**,36

Перевірка за (7)

$0{,}101111(2)=1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}+1\cdot 2^{-5}+1\cdot 2^{-6}=$
$=1/2+1/8+1/16+1/32+1/64=47/64=0{,}73\approx 0{,}74$

1. Аналогічні дії здійснюють для переведення будь-якого числа більшої системи числення в запис меншої системи числення.

1.5. Завдання для самостійного розв'язку

Перевести в двійкову систему $N_{(2)}$ десяткове число $N_{(10)}$, зробити перевірку отриманого результату за формулою (7). Варіанти завдання наведені в табл. 5.

Таблиця 5

$N_{(10)}$	Варіант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	54,28	35,17	61,43	73,15	84,32	48,74	95,12	75,54	68,38	50,21
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
	46,25	54,87	68,13	45,76	34,39	58,79	75,42	99,54	77,38	39,21
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
	87,78	76,83	72,77	81,63	66,54	77,55	84,38	91,59	88,73	95,65

1.6. Двійково-вісімковий та двійково-шістнадцяткові коди

Для побудови двійково-вісімкового коду, необхідно починаючи від коми наліво для цілої частини і направо для дробової частини виділити групи по три двійкових цифри (**триади**) після чого кожну групу перетворюють у вісімковий еквівалент. Наприклад, двійкове число

$N(2) = \begin{array}{|c|c|c|c|} 101 & 010 & 111{,}010 & 100 \\ 5 & 2 & 7{,}2 & 4 \end{array}$ записується вісімковими цифрами як 527,24(8).

Якщо, при такому перетворенні, залишається справа, або зліва від коми остання група двійкових цифр в яких не вистачає їх кількості до трьох, тоді в цих останніх групах цифри, яких не вистачає доповнюють нулями.

Для побудови двійково-шістнадцяткового коду, необхідно починаючи від коми наліво для цілої частини і направо для дробової частини виділити групи по чотири двійкових цифри (**тетради**) після чого кожну групу перетворюють у шістнадцатковий еквівалент.

Наприклад, двійкове число

$$N(2) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} 01 & 0101 & 0111 & 1101, & 1010 & 1110 & 1000 \\ 1 & 5 & 7 & \mathrm{D} & A & E & 8 \end{array}$$

записується шістнадцятковими цифрами як 157D,AE8(16).

Якщо, при такому перетворенні, залишається справа, або зліва від коми остання група двійкових цифр в яких не вистачає їх кількості до чотирьох, тоді в цих останніх групах цифри, яких не вистачає доповнюють нулями.

Треба пам’ятати, що шістнадцяткові та вісімкові цифри це тільки спосіб уяви двійкових чисел, але таке перетворення дозволяє здійснювати компактний запис двійкових чисел в запам’ятовуючих пристроях.

1.7. Завдання для самостійного розв'язку

Записати такі двійкові числа вісімковими та шістнадцятковими цифрами.

1) 1101001001,1011100111; ***2)*** 10110110100110,11101110011;
3) 101011010110101,10011001; ***4)*** 110011001101,01101110;
5) 1110000100111000,1000111; ***6)*** 11110001111001,0011001110;
7) 10011011101,11000110; ***8)*** 1110001110101,10011000;
9) 10110110100110,11101110011; ***10)*** 10101101010101,10011001;

1.8. Дії над числами в двійковій системі числення

При складанні кодів, над двійковими числами необхідно здійснювати арифметичні дії. Але в зв'язку з тим, що при звичайному складанні, множенні таких чисел може з'явитися число більш високого розряду ніж прийнято у використовуємому коді, звичайне складання чисел в кожному розряді з переносом числа в вищий розряд часто не використовується. Дуже часто зате здійснюється так зване складання по mod2 (модулю два), яке позначається знаком $\oplus$. Для складання по mod2 двох двійкових чисел одного розряду використовується таке правило:

$1 \oplus 1 = 0$; $0 \oplus 0 = 0$; $1 \oplus 0 = 1$; $0 \oplus 1 = 1$

Тобто при складанні по mod2 декількох чисел парна кількість одиниць дає 0, а непарна – 1.

Наприклад. Скласти по mod2 такі три двійкових числа: 1101101; 0110100; 1111111.

Розв'язок:

$$
\begin{array}{r}
1101101 \\
\oplus\ 0110100 \\
\oplus\ 1111111 \\
\hline
0100110
\end{array}
$$

Як видно з цього приклада при складанні по mod2 двійкових чисел може скластися так, що сума може бути менше любого із складових.

Правила виконання звичайних арифметичних дій з двійковими числами аналогічні правилам з будь-якими числами позиційних систем (наприклад з числами десяткової системи числення).

В таблиці 6. приводяться правила арифметичних дій в двійковій системі числення.

Таблиця 6

Додавання	Віднімання	Множення
0 + 0 = 0	0 - 0 = 0	$0 \cdot 0 = 0$
0 + 1 = 1	1 - 1 = 0	$0 \cdot 1 = 0$
1 + 0 = 1	1 - 0 = 1	$1 \cdot 0 = 0$
1 + 1 = 10	10 - 1 = 1	$1 \cdot 1 = 1$

Приклад. Є два двійкових числа A = 1001 і B = 0110. Знайдіть їх суму, добуток та різницю і зробіть перевірку за допомогою формули (7).

A=1001(2)= **9**(10) ; **B=0110**(2)= **6**(10).

```
         1001
A+B=   + 0110
       ---------
         1111(2)=15(10)
```

```
              1 зайняли у старшого
A – B=     1001      розряду
         -  0110
         ---------
            0011(2)=3(10)
```

A$\times$**B=**

```
      1001
   x  0110
   --------
      0000
     1001
    1001
   --------
```

110110(2)= $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 =$
=32+16+4+2=**54**(10)

A+B=9+6=15; A-B=9-6=3; A·B=9·6=54.

1.9. Завдання для самостійного розв'язку

1. Здійснити складання по mod2 таких двійкових чисел.
01010101; 10101010; 11001100; 00110011; 1001010; 11001101;
11100010; 01101011; 10101101; 10101010; 0101111; 1001111.

2. Знайдіть ї суму, добуток та різницю двійкових чисел A і B, наведених в таблиці варіантів 7. Зробіть перевірку результатів за допомогою формули (7)

Таблиця 7

	Варіант									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	1010	1110	1001	1011	1101	1001	1101	1010	1001	1110
B	0100	0110	0111	0101	0110	0101	0110	0101	0110	0101
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
A	1101	1011	1110	1001	1010	1011	1010	1110	1101	1001
B	0110	0111	0101	0110	0101	0110	0101	0110	0101	0110
	21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
A	1101	1110	1111	1010	1100	1010	1001	1011	1100	1101
B	0111	0101	0110	0111	0110	1000	0110	1001	0110	0101

Практичне заняття № 5-6. ***Побудова кодів Шеннона-Фано, Хаффмена.***

1.1. Мета заняття: Навчитись будувати ефективні коди Шенона-Фано і Хаффмена.

1.2.Теоретичні відомості

При роботі джерела повідомлення на його виході окремі символи з'являються через певні інтервали часу, в цьому випадку можна говорити про тривалість окремих символів і тому стає питання про кількість інформації, що виробляється джерелом за одиницю часу. Якщо позначити через τ_c середню тривалість символу тоді кількість інформації, що виробляється джерелом за одиницю часу буде визначатись за формулою (11) [1] і називається потоком інформації. Певно, що потік інформації буде залежати від кількості різних символів, що виробляє джерело їх тривалості та статистичних характеристик джерела. Якщо тривалість всіх символів однакова, то тоді потік $\overline{H}(x)$ буде максимальним коли ентропія джерела на символ максимальна (тобто в випадку рівної ймовірності появи всіх символів і їх статистичної незв'язаності). З іншого боку відомо для того щоб в дискретному каналі швидкість передачі була максимальною, необхідно щоб імовірність передачі різних символів були однакові.

Пропускна здатність каналу - це максимальна швидкість інформації, що можлива для цього каналу зв'язку визначається за формулою (20) [1].

Таким чином фактична швидкість передачі інформації може бути максимальною (дорівнювати пропускній здатності), якщо статистичні характеристики джерела повідомлення певним чином узгоджені із властивостями інформаційного каналу. Для збільшення, наприклад, потоку інформації необхідно по можливості зменшувати тривалість символу τ_c. З цією метою, наприклад, необхідно, щоб тривалість цих символів ймовірності появи яких більше (зустрічаються частіше), була б меншою, чим для символів ймовірності поява яких відносно низька.

Для кожного джерела повідомлень його узгодження з каналом (з метою підвищення швидкості передачі інформації) може бути досягнено спеціальним вибором способу кодування і декодування повідомлень. ***Таке кодування повідомлень, при якому досягається найкраще (найефективніше) використання пропускної здібності каналу зв'язку (тобто найбільша швидкість передачі інформації), називають ефективним***

Засоби ефективного кодування залежать від виду і властивостей інформаційного каналу На сьогодні розроблена значна кількість методів ефективного кодування, найбільш широко з яких використовують методи побудови ефективного коду Шеннона-Фано, Хаффмена.

1.3. Побудова коду Шеннона-Фано

Для побудови коду Шеннона-Фано елементи алфавіту чи повідомлення виписують у таблицю в порядку спадання ймовірностей їх появи і розділяють, по можливості, на дві групи так, щоб сумарні імовірності кожної були рівні. Кожному елементу однієї групи, наприклад верхньої, присвоюється символ “0”, а всім нижнім – “1”.

Кожна з цих груп знов ділиться на підгрупи за тим же правилом приблизно різних ймовірностей і у кожній підгрупі заповнюється друга зліва позиція кодової комбінації /верхній “0”, нижній “1”/.

Процес повторюється до тих пір, поки в кожній підгрупі не залишиться по одному елементу.

Приклад побудови кода Шеннона-Фано приведений в таблиці 8

Таблиця 8

№№ повід	Імовірність отримання повідомлення.	Поділ на групи	Кодові комбінації
1	**0.21**	1 1	**00**
2	**0.19**	1 2	**01**
3	**0.18**	2 1 1	**100**
4	**0.17**	2 1 2	**101**
5	**0.12**	2 2 1	**110**
6	**0.10**	2 2 2 1	**1110**
7	**0.02**	2 2 2 2 1	**11110**
8	**0.01**	2 2 2 2 2	**11111**

Σ = 1.0

Середня кількість символів на знак в цьому випадку становить:

$$N_{сер}=\sum_{i=1}^{n1} p_i n_i=2(0,21+0,19)+3(0,18+0,17+0,12)+4(0,10)+5(0,02+0,01)= = 2,76$$

Як бачимо, повідомлення, імовірність яких більша, передаються комбінаціями з меншим числом елементів і, навпаки, повідомлення, які з’являються рідше, передаються комбінаціями з більшим числом елементів. Це призводить до зменшення завантаженості приймаючого-передаючого пристрою і збільшення швидкості передачі інформації.

1.4. Побудова коду Хаффмена

Для побудови коду Хаффмена всі повідомлення від джерела інформації розміщують у стовбець у порядку зменшення ймовірностей. Після цього два повідомлення із найменшою ймовірністю, які розташовані у двох останніх рядках стовпця, об'єднуються в одне, якому приписується сумарна ймовірність. Повідомлення переписуються у новий стовбець, в якому сумарне повідомлення займає положення згідно його ймовірності. Надалі процес об'єднання пари з найменшою ймовірністю повторюється до тих пір, поки не буде отриманий один елемент з ймовірністю "1".

Для утворення кодових слів повідомлень необхідно побудувати кодове дерево. Його побудова починається з відмітки вершини, якій приписується ймовірність 1,0. З вершини проводять дві гілки, які закінчуються вузлами. Вузлам приписують ймовірності, які при додаванні дають одиницю /лівому вузлу, наприклад, більшу імовірність, а правому меншу/. Одній гільці, наприклад лівій, приписують символ "0", а правій – "1". Якщо ймовірність вузла дорівнює ймовірності будь-якого повідомлення, вузлу приписують символ цього повідомлення і переходять до аналізу наступного вузла. Якщо ймовірність вузла утворена сумою двох менших ймовірностей, то із цього вузла знову утворюють дві різнонаправлені гілки, які закінчуються вузлами. Вузлам приписують ймовірності згідно раніше прийнятої орієнтації: лівому – більшу, правому – меншу ймовірність. гілкам приписують символи: лівий – "0", правий – "1". Процес побудови кодового дерева продовжується, поки всі символи повідомлень джерела не будуть приписані кореневим вузлам.

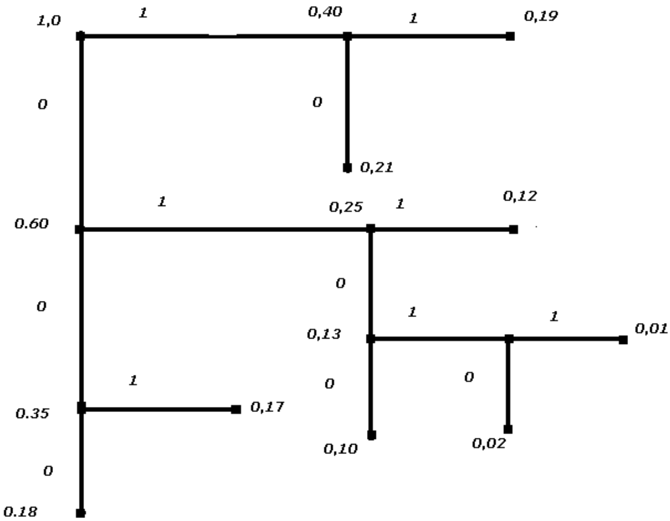
Кодові комбінації, які відповідають повідомленням джерела, записують наступним чином: на отриманому кодовому дереві необхідно прослідкувати по гілкам шлях від кореневого вузла, яке відповідає заданому повідомленню, до вершини дерева, записуючи послідовно зліва направо символи "0" і "1"які приписані гілкам на цьому шляху. Отримані кодові комбінації є оптимальним кодом Хаффмена. Приклад побудови коду Хаффмена приведений в таблиці 9.

Таблиця 9

№ повід	Імовірн. і-го пові-домлення	Допоміжні стовбці									Кодові комбі-нації
		1	2	3	4	5	6			7	
P1	**0.24**	0.24	0.24	***0.24***	0.34	0.42	0.58			1.00	**01**
P2	**0.18**	0.18	0.18	0.24	***0.24***	0.34	0.42				**11**
P3	**0.16**	0.16	***0.18***	0.18	0.24	***0.24***					**000**
P4	**0.14**	0.14	0.16	***0.18***	0.18						**100**
P5	**0.10**	0.10	0.14	0.16							**110**
P6	**0.08**	***0.10***	0,10								**0010**
P7	**0.07**	0.08									**01010**
P8	**0.03**										**11010**

Далі для побудови кодових комбінацій будуємо кодове дерево.

Кодове дерево



1.5. Завдання для самостійної роботи

Побудувати згідно статистичних даних наведених в таблиці10 ефективні коди

1. Шеннона-Фено
2. Хаффмена

Таблиця 10

Варіант										
P_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	0,198	0,228	0,253	0,232	0,250	0,354	0,24	0,19	0,23	0,21
2	0,167	0,172	0,212	0,202	0,231	0,229	0,18	0,17	0,20	0,19
3	0146	0,138	0,145	0,171	0,199	0,151	0,16	0,15	0,16	0,18
4	0,134	0,113	0,097	0,141	0,154	0,106	0,14	0,13	0,14	0,17
5	0,126	0,105	0,089	0,109	0,090	0,068	0,10	0,11	0,12	0,12
6	0,112	0,094	0,082	0,078	0,048	0,045	0,08	0,10	0,08	0,10
7	0,083	0,084	0,075	0,049	0,018	0,028	0,07	0,09	0,04	0,02
8	0,034	0,066	0,047	0,018	0,010	0,019	0,03	0,06	0,03	0,01
P_i	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	0,213	0,205	0,201	0.22	0,20	0,229	0,233	0.21	0,21	0,304
2	0,189	0,178	0,178	0,19	0,19	0,199	0,202	0,18	0,19	0,222
3	0.156	0.146	0,145	0.15	0.15	0146	0,161	0.16	0,15	0,150
4	0,123	0,133	0,133	0.14	0,13	0,126	0,154	0.13	0,14	0,114
5	0,105	0,105	0,115	0.12	0,11	0,090	0,106	0.11	0,11	0,079
6	0,085	0.095	0.095	0,08	0,09	0,088	0,078	0,09	0,09	0,065
7	0.072	0.077	0,079	0,06	0,07	0,068	0.048	0,07	0,06	0,048
8	0,057	0.060	0,054	0,04	0,06	0,054	0.018	0,05	0,05	0,018
P_i	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1	0,192	0,22	0,229	0,19	0,220	0,20	0,218	0,264	0,213	0,230
2	0,188	0,20	0,199	0,17	0,201	0,18	0,172	0,222	0,202	0,211
3	0,163	0,16	0146	0,16	0,149	0,16	0,148	0,160	0,171	0,179
4	0,125	0,14	0,133	0,15	0,126	0,14	0,111	0,114	0,144	0,154
5	0.095	0,11	0,115	0,12	0,090	0,12	0,107	0,079	0,106	0,090
6	0.087	0,08	0.095	0,09	0,088	0,08	0,094	0,065	0,078	0,058
7	0.079	0,07	0,049	0,07	0,068	0,07	0,084	0,058	0.048	0,043
8	0,071	0,02	0,034	0,05	0,058	0,05	0,066	0,038	0.038	0,035

Практичне заняття №7. ***Відображені (рефлексні) коди. Кодова відстань. Вага кодової комбінації***

1.1. Мета заняття:

1. Навчитись правилам кодування та декодування простого двійкового коду в код Грея і навпаки.

2. Навчитись визначати кодову відстань між комбінаціями і будувати кодові комбінації n- розрядного коду, що знаходиться на певній кодовій відстані.

1.2. Теоретичні відомості

В системах збору і переробки інформації особливою задачею є захист інформації від спотворень. Одним із способів захисту інформації від спотворень є кодування.

Кодом називається кінцева множина цілих раціональних чисел, які складаються за певним алгоритмом і відображають певну множину повідомлень.

Кодування – перетворення дискретного повідомлення в дискретний сигнал, яке здійснено за певним правилом.

Свою назву відображені коди отримали завдяки тому, що мають вісь симетрії (вісі „відображення”), відносно яких має місце ідентичність елементів в деяких розрядах. Вісь симетрії, яка проходить у n-розрядному відображеному коді між комбінаціями, відповідаючи рівням (2^{n-1} -1) і 2^{n-1} називається головною віссю симетрії. Відносно неї маємо ідентичність елементів в (n-1) розрядах симетричних кодових комбінацій.

1.3. Побудова кода Грея

Серед відображених кодів найбільше застосування отримав код Грея.

Код Грея утворюється з двійкового коду за наступним алгоритмом:

$$Y_i = X_i \oplus X_{i+1}, \tag{8}$$

де: Y_i – значення і-го розряду коду Грея;

X_i, X_{i+1} – відповідні значення розрядів двійкового числа (i = 1, 2, ..., n, починаючи зліва).

Таким чином, щоб отримати код Грея, достатньо зсунути двійкове число на один розряд вправо, порозрядно просумувати його з початковим числом по mod 2 і відкинути молодший розряд отриманої суми.

Декодування (тобто зворотне перетворення) коду Грея в двійковий код здійснюється за допомогою такого алгоритму:

$$x_n = y_n \ ; \qquad x_i = x_{i+1} \oplus y_i \, , \tag{9}$$

де: x_n і y_n - це значення старшого розряду двійкового коду та коду Грея відповідно (*i = n-1, n-2, ..., 1*, починаючи зліва). До недоліків коду Грея треба віднести „невагомість" кодової комбінації, так як одиниці не визначаються номером розряду і тому перевід двійкової форми в десяткову систему числення не буде визначати порядкового номера кодової комбінації в коді Грея. Такі коди важко декодувати. Тому, якщо треба декодувати код Грея, його переводять у простий двійковий код, а потім вже обробляють.

Приклад 1

Перетворити у код Грея і назад комбінацію простого коду

A= 000111001

Розв'язок:

1. Пряме перетворення простого коду в код Грея:

$$\begin{array}{r} 000111001 \\ \oplus \quad \\ 00011100(1) \\ \hline 000100101 \end{array}$$

тобто шукана кодова комбінація у коді Грея буде мати вигляд

A= **000100101**

Зворотний перевід коду Грея у простий двійковий код виконуємо із застосуванням відомого алгоритму.

$X_9 = Y_9 = 0$
$X_8 = X_9 \oplus Y_8 = 0 \oplus 0 = 0;$
$X_7 = X_8 \oplus Y_7 = 0 \otimes 0 = 0$
$X_6 = X_7 \oplus Y_6 = 0 \oplus 1 = 1;$
$X_5 = X_6 \oplus Y_5 = 1 \oplus 0 = 1;$
$X_4 = X_5 \oplus Y_4 = 1 \oplus 0 = 1;$
$X_3 = X_4 \oplus Y_3 = 1 \oplus 1 = 0;$
$X_2 = X_3 \oplus Y_2 = 0 \oplus 0 = 0;$
$X_1 = X_2 \oplus Y_1 = 0 \oplus 1 = 1$
Тобто А=000111001

1.4. Завдання для самостійного розв'язку

Перетворити у код Грея і назад такі комбінації простого коду:
1. 0100101; 2. 0011010; 3. 0001110; 4. 1010100; 5. 0101101;
6. 0011001; 7. 00110011; 8. 110110; 9. 1001101; 10. 0011010.

1.5. Визначення кодової відстані Хеммінга

Завадозахищені коди базуються на частковому використанні комбінацій коду на всі сполучення і поділяються на коди з визначенням помилок, та коди з визначенням і виправленням помилок. Ступінь захисту інформації від помилок відповідним способом кодування залежить головним чином від мінімальної кодової відстані $d_{\min}$ даного коду.

Існує три види кодової відстані: Хеммінга, Лі та матрична. Але в теорії кодування найбільш широко розповсюджена кодова відстань Хеммінга.

Кодова відстань Хеммінга базується на такому понятті як вага кодової комбінації.

Вага кодової комбінації w - це кількість її елементів, які не рівні нулю.

Кодова відстань Хеммінга *d* між двома комбінаціями однієї довжини n визначається як кількість їх однойменних розрядів (позицій), які містять в собі неоднакові елементи.

Оскільки в двійковій арифметиці сумування однакових елементів дає „0", а різниця „1", відстань Хеммінга між двома кодовими комбінаціями можна визначити їх порозрядним сумування за модулем 2 (mod 2), з наступним підрахунком числа ненульових елементів, тобто визначення ваги *w* такої суми.

Загальна кількість комбінацій довжини n дорівнює 2^n, а кількість комбінацій, які відстоять від даної на відстань *d*, дорівнює кількості сполучень із *n* по *d* , які визначають за формулою (37).

Для того щоб визначити комбінацію, яка відстоїть від заданої на відстань *d*, необхідно додати до даної комбінації будь-яку комбінацію ваги *w=d* (з *d* одиницями та *n-d* нулями). Додавання порозрядне за mod 2.

Для визначення всіх помилок, які кратні $r_{виз}$ кодова відстань повинна бути:

$$d_{min} \geq r_{виз} + 1 \qquad (10)$$

Для виправлення помилок, які кратні $s_{вип}$ кодова відстань визначається:

$$d_{min} \geq 2s_{вип} + 1 \qquad (11)$$

Взагалі, кодова відстань для знаходження та виправлення помилок. може бути знайдена за формулою (38).

Приклади:

1. Визначити кодову відстань між комбінаціями *A* та *B* і записати всі комбінації, які відстоять від *A* на відстань *d = 3*, якщо A=01001. B=11101.

Розв'язок:

$A \oplus B = C$, $\oplus$ - означає додавання по mod 2.

$$\begin{array}{l} \ \ 01001 \\ \oplus \\ \ \ 11101 \\ \hline \ \ 10100 \qquad w=2 \end{array}$$

Вага комбінації становить $w=2$. Вага w кодової комбінації C і є відстанню Хеммінга між комбінаціями A та B.

Будь-яка комбінація ваги $w=3$, яку порозрядно додати до комбінації A (тієї ж довжини), дає нову комбінацію, яка відстоїть від A на відстані $d = 3$

Запишемо всі комбінації ваги $w=3$, які мають довжину $n=5$.

Кількість таких комбінацій відповідно до формули (37) дорівнює:

$$C_5^3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot (1\cdot 2)} = 10$$

Це такі комбінації –> 00111, 01011, 10011, 10101,11001,11010, 11100, 01101, 01110, 10110

Підсумовуючи порозрядно кожну з даних комбінацій із кодовою комбінацією А, отримаємо ті кодові комбінації, які шукаємо:

00111   01011   10011   10110
01001, 01001, 01001, ..., 01001
01110   00010   11010   11111

2. Побудувати всі комбінації n- розрядного коду, які відстоять від комбінації А= 10101 на кодову відстань $d = 1, 2, 3$ якщо $n=5$.

Розв'язок:

До комбінації A необхідно додати комбінації 5-ти розрядного коду з відповідною вагою.

а) $d = 1;$ $$C = C_5^1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)} = 5$$

10101   10101   10101   10101   10101
00001, 00010, 00100, 01000, 10000
10100   10111   10001   11101   00101

б) $d = 2;$ $$C = C_5^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot (1\cdot 2\cdot 3)} = 10$$

10101   10101   10101
00011, 0010, ...,10001.
10110   10011   00100

в) $d = 3;$ $\quad C = C_5^3 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2)} = 10$

10101 10101 10101

00111, 01110, ...,10011.

10010 11011 00110

1.6. Завдання для самостійного розв'язку

1. Визначити кодову відстань між комбінаціями А=110101 та В= 101100 двійкового коду і записати всі комбінації, які відстоять від А та В на відстані $d = 2$.

2. Визначити min та max кодову відстань Хеммінга d між комбінаціями двійкового коду та вказати пари комбінацій з d_{min} і d_{max} і для комбінацій 000011, 110111, 010100, 101001, 011101.

3. Побудувати всі комбінації n- розрядного коду, які відстоять від А= 10110 на кодову відстань $d = 1,2,3$ та згрупувати їх по фазі.

Підрахувати кількість комбінації, які відстоять від даної на кодову відстань $d = 4, \ldots, n,$ якщо $n = 5$.

4. Для умови приклада 3.3, якщо:

а) А = 00110011, n = 8,

б) А = 011010. n = 6,

в) А= 11001. n = 5,

г) А = 000111, n = 6,

д) А = 1100111, n = 7,

ж) А =1 0101, n = 5.

з) А = 0001, n = 4

5. Підрахувати кількість комбінацій n- розрядного коду, які відстоять від комбінації А = 00010 на відстань $d=2$.

6. Для умови прикладу 5, якщо

а) А = 011010, $d=3,$

б) А = 10010, $d=2.$

в) А = 0011111 $d=4.$

г) А = 110001 $d=3$

д) А= 110001 $d=5,$

ж) А = 01()101 $d=4$

г) А=10101010 $d=6$

Рекомендована література

Базова література

1. Данченков Я. В. Теорія інформації : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2012. 111с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/1871

2. М Биков. М., Черв'яков В. Д. Дискретний аналіз і теорія автоматів : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2016. 354 с. URL: http://essuir.sumdu.edu.ua/ bitstream /123456789/ 43899/1/Bukov_analiz.pdf

Допоміжна література

3. Введення в теорію інформації : посібник до вивчення дисципліни теорія інформації для студентів за напрямом підготовки 6.050202 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології / Укладачі : Курко А. М., Решетник В. Я. Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2017. 108 с. URL: https://elartu.tntu.edu.ua/bitstream/lib/21919/1/Book_Kurko%20AM%2C%20Reshetnik%20V.Ya.__2017.pdf

4. Теорія інформації і кодування: курс лекцій : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: А. Є.Коваленко. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 248 с.
URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41907

5. Верьовкін Л. Л. Цифрові логічні автомати. Методичні рекомендації до практичних занять для здобувачів вищої освіти першого бакалаврського рівня за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна техніка» освітньопрофесійної програми «Мікро- та наносистемна техніка». Запоріжжя : ЗНУ, 2021. 32 с. URL: https://dspace.znu.edu.ua/jspui/bitstream/12345/5252/1/VEROVKIN0047626.pd