УДК 514.18:514.12

ПОЄДНАННЯ МЕТОДІВ НАРИСНОЇ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПІД ЧАС ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

В. Ю. Люшин
здобувач вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, група БЦІ-12,
навчально-науковий інститут будівництва та архітектури
Науковий керівник – к.т.н., доцент В. В. Крівцов

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна

У статті показано доцільність застосування методів нарисної та аналітичної геометрії під час вивчення властивостей геометричних фігур, які відповідно до навчальних планів розглядаються паралельно обома геометріями в першому семестрі. Така комбінація методів навчання сприяє більш ґрунтовному та якісному опануванню навчальним матеріалом, формує у здобувачів вищої освіти навички аналізу результатів, отриманих різними засобами.
Ключові слова: аналітична геометрія, нарисна геометрія, фігура, координата, рівняння.

The article shows the expediency of applying the methods of descriptive and analytical geometry while studying the properties of geometric figures, which, according to the curriculum, are considered in parallel with both geometries in the first semester. Such a combination of learning methods helps in a more complete mastery of the educational material, forms the skills of analyzing the results obtained by various means in the higher education students.
Keywords: analytical geometry, descriptive geometry, figure, coordinate, equation.

Нарисна геометрія є розділом математики, яка вивчає властивості геометричних фігур за допомогою їх плоских зображень. В аналітичній геометрії, яка є також одним із розділів математики, ці ж самі фігури досліджуються засобами алгебри. Тому логічно поєднати описовий характер розгляду геометричних фігур, якого дотримується нарисна геометрія, з строгими математичними формулюваннями, що використовуються в аналітичній геометрії [1; 2]. Таке поєднання різних підходів до висвітлення одного і того ж питання повинно значно підвищити якість отриманих знань, вчить здобувачів освіти послідовно мислити, використовувати та аналізувати різнопланову інформацію для отримання позитивних результатів.

Метод координат дозволяє пізнавати властивості геометричних фігур як в нарисній, так і в аналітичній геометрії, оскільки є спільним засобом дослідження.

Метою даного дослідження є показати на прикладі розв’язування задачі за допомогою методів нарисної та аналітичної геометрії, доцільність застосування обох методів при вивченні властивостей геометричних фігур.

Задача. Площина α задана трикутником ABC, вершини якого мають такі координати: A(100,30,50), B(70,70,30), C(10,50,100). Виконати побудову слідів площини та встановити величини відрізків, які відсікає площина на осях x, y, z. Визначити відстань від початку координат – точки 0 до площини α. Здійснити аналіз виконаних графічних побудов та отриманих математичних рівнянь, які описують ці побудови.

Розв'язування. На рис. 1 побудовано сліди h^{α} і f^{α} площини α. Продовжуємо сліди до перетину з осями x, y, z. Відмічаємо, що площина α, яка задана трикутником ABC, відтинає по осі x відрізок $a \approx 202$, по осі y відрізок $в \approx 148$, по осі z відрізок $c \approx 162$.

Рівняння площини, що проходить через три точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, має вигляд [3]:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Підставляючи в це рівняння значення координат A, B і C, отримаємо лінійне рівняння площини α:

$$24x + 33y + 30z - 4890 = 0. \quad (2)$$

Рівняння зведемо до нормального рівняння у відрізках [3]:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\ , \quad (3)$$

де a, b, c величини відрізків, які відтинають площину α відповідно на осях x, y, z. Для конкретних значень маємо рівняння площини α у відрізках: $\frac{x}{203.8} + \frac{y}{148.2} + \frac{z}{163.0} = 1$, де a = 203.8, b = 148.2, c = 163.0, що відповідає даним, знайденим графічним способом.

Якщо рівняння площини у відрізках буде проілюстровано рис. 1, то ми отримаємо графічну інтерпретацію даного рівняння. З іншого боку, знаючи рівняння площини у відрізках, можна побудувати епюр площини, заданої слідами, що дозволить надалі, за потребою, виконувати на епюрі інші графічні побудови.

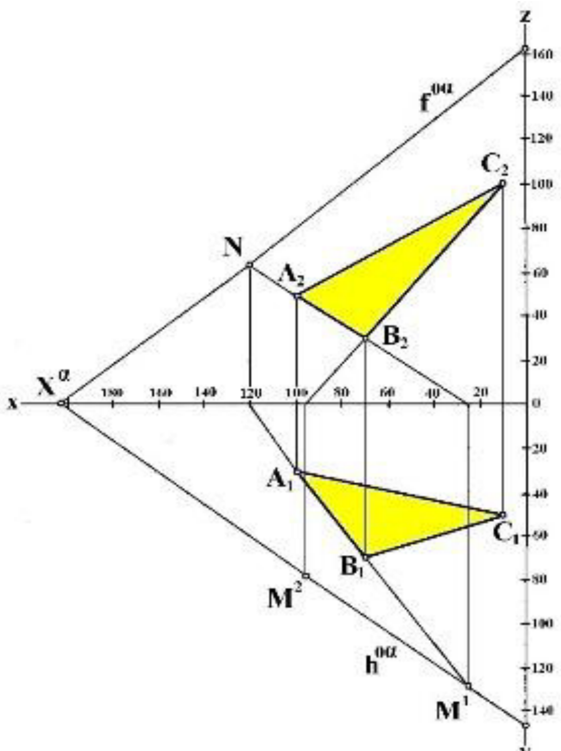

Рис. 1. Побудова слідів площини

Математичні розрахунки, на відміну від графічних побудов, є більш точними, тому у відповідальних конструкціях саме результати обчислень використовують при розробці робочої документації для будівництва. Водночас графічні зображення дозволяють уявити об'єкт, що проєктується, що дає можливість корегувати та перевіряти правильність цифрових розрахунків.

Можна перевірити правильність графічних побудов та математичних обчислень на прикладі визначення координат точки M^1 – горизонтального сліду прямої АВ, яка лежить в площині α. Відомо [3], що рівняння прямої АВ, яка проходить через точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4)$$

або для конкретних значень координат точок А і В : $\frac{x-100}{-30}+\frac{y-30}{40}+\frac{z-50}{-20}$.

Точка M^1 – це точка перетину прямої АВ з горизонтальною площиною проєкцій, яка описується рівнянням z = 0. При z = 0 координати x і y точки M^1 дорівнюють відповідно 25 і 130.

Визначені в результаті обчислень координати точки M^1 збігаються, в межах припустимої похибки, з координатами точки M^1, що знайдені графічним способом. Це дозволяє здійснювати взаємний контроль математичних розрахунків та графічних побудов, тим самим позбавлятися ймовірних помилок.

На рис. 2 відстань від точки 0 – початку координат до площини α визначається довжиною відрізка 0К*, де $0K_1$ і $0K_2$ – горизонтальна та фронтальна проєкції відрізка 0К перпендикуляра n, проведеного з точки 0 на площину α. Координати точки К перетину перпендикуляра n з площиною α: $x_K = 45$, $y_K = 62$, $z_K = 55$.

Відстань p від певної точки $P(x_1,y_1,z_1)$ до площини, що задана рівнянням $A_x + B_y + C_z + D = 0$, визначається за формулою

$$p = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \qquad (5)$$

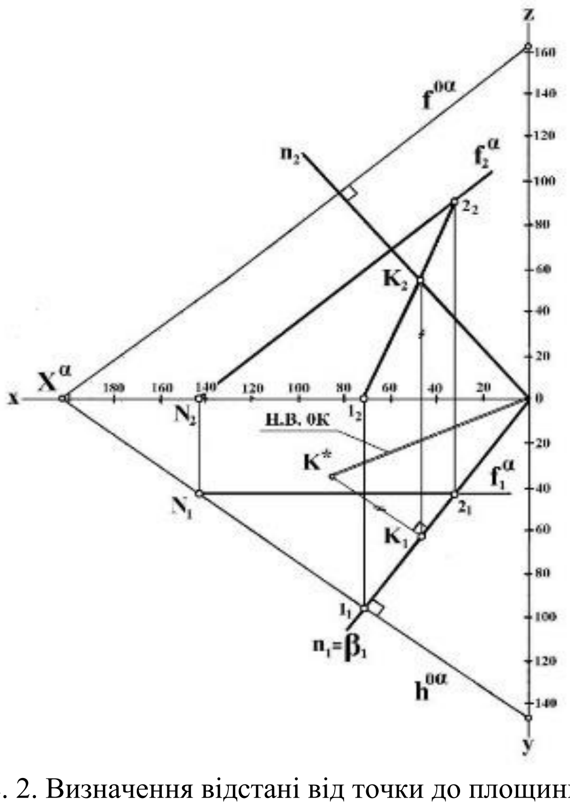

Рис. 2. Визначення відстані від точки до площини

Враховуючи, що точка Р є точкою з координатами, що дорівнюють 0, а рівняння площини α $24_x + 33_y + 30_z - 4890 = 0$, маємо, що відстань $p = \frac{4890}{50.6} = 96.6$.

Відстань p можна знайти також, якщо рівняння площини $A_x + B_y + C_z + D = 0$ привести до виду:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0, \quad (6)$$

де p – відстань від точки 0 до площини α; α, β, γ – кути нахилу перпендикуляра n з осями x, y, z.

Помноживши рівняння площини α 24x +33y + 30z - 4890 = 0 на нормуючий множник [3], отримаємо таке рівняння площини α:

$$0.47x + 0.65y + 0.59z - 96.6 = 0 \quad (7)$$

звідки p = 96.6.

За останнім рівнянням визначаємо координати точки К: $x_к = p \cdot \cos\alpha = 96.6 \cdot 0.47 = 45.4$; $y_к = p \cdot \cos\beta = 96.6 \cdot 0.65 = 62.8$; $z_к = p \cdot \cos\gamma = 96.6 \cdot 0.59 = 56.9$.

Координати точки К, отримані розрахунковим способом, збігаються з координатами цієї ж точки, що знайдені графічним способом.

Кути нахилу α, β, γ перпендикуляра n відповідно з осями x, y, z визначити нескладно, оскільки cosα = 0.47, cosβ = 0.65, cosγ = 0.59, а отже, $\alpha = \arccos 0.47 = 61.95^0$; $\beta = \arccos 0.65 = 49{,}45^0$; $\gamma = \arccos 0.59 = 53.84^0$.

Визначення величин кутів α, β, γ графічними способами, які пропонує нарисна геометрія, потребує додаткових побудов, в результаті яких площини кутів, заданих перпендикуляром n (відрізком ОК) та осями x, y, z, були б паралельні до площин проєкцій. Найбільш простим є спосіб обертання навколо проєкціюючої прямої, за яку можна прийняти осі x, y, z. На рис. 3 визначено натуральну величину кута β обертанням навколо осі y площини кута, заданої перпендикуляром n та віссю y.

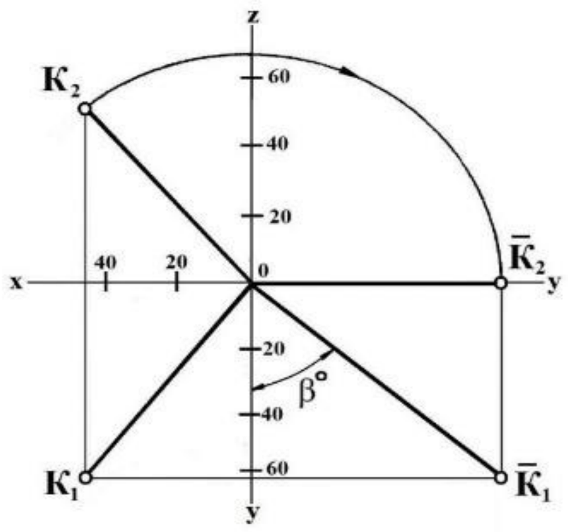

Рис. 3. Визначення натуральної величини кута

Величина кута β, який визначений графічним способом, збігається з величиною цього ж кута, знайденою аналітичним способом. Це підтверджує правильність виконаних обчислень та графічних побудов.

Наведений у статті підхід до розв’язку задач з використанням засобів як нарисної, так і аналітичної геометрії дозволяє здобувачам вищої освіти ґрунтовніше опанувати матеріал, що розглядається, вчить вмінню використовувати інваріантний підхід до вирішення поставленого завдання, аналізувати отриманий результат, контролювати правильність виконаних розрахунків та оптимізувати хід їх проведення.

1. Крівцов В. В., Дєєв С. С. До методики розв’язування задач з нарисної геометрії. *Вісник Українського державного університету водного господарства та природокористування.* Рівне : НУВГП. 2003. Вип. 5 (24). С. 207–212. **2**. Козяр Микола, Валерій Ківцов. Окремі аспекти методики розв’язування задач з нарисної геометрії. *Науковий вісник Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського. Педагогічні науки.* 2016. № 3 (54). С. 47–57. **3**. Аналітична геометрія : навч. посіб. / В. П. Яковець, В. Н. Боровик, Л. В. Ваврикович. Суми : ВТД «Університетська книга», 2004. 296 с.