

539.1

Б-54

А. ВЕТЕ и Д. Ф. БЕЧЕР

ФИЗИКА ЯДРА

ЧАСТЬ

I

УСТОЙЧИВЫЕ
СОСТОЯНИЯ
ЯДЕР

ОГОНЬ ЗНАЮЩИХ ИХ ИИ

11193

п

Г. А. БЕТЕ и Р. Ф. БЕЧЕР

539.1
Б-54

у

ФИЗИКА ЯДРА

ЧАСТЬ I

УСТОЙЧИВЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Г. Д. ЛАТЫШЕВА



о/а

проверено
1968 г.

Цена 7 руб., перепл. 1 руб. 50 коп.



ОНТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
ХАРЬКОВ

НКТП
1988

0

Ответственный редактор проф. *А. В. Желеховский*
Литредактор *И. Б. Гордон*
Техредактор *Ф. И. Бергер*
Корректор *Ф. И. Малая*

Типо-цинкография ОНТИ. Харьков, Суздальские ряды, 18/20. Уполномочен.
Главлита № 7513. Зак. № 1516. Тираж 3000. 15³/₄ печ. листа. Уч.-авт. 19,2 л.,
авт. 18,2 л. В печ. листе 51.000 знаков. Бум. 60 × 92. Вес 1 метр. стопы 35 кг.
Сдано в набор 11/1-38 г. Подписано к печати 9/IV-38 г.

314-11
К 209
Москва

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЯДЕР

§ 1. Заряд. Вес (A4)⁽¹⁾

Из всех величин, характеризующих ядро, заряд является наиболее важным для атомной физики. Он определяет число электронов атома в его нейтральном состоянии, уровни энергии атома, его химические свойства; одним словом, все свойства атома, за исключением очень малых поправок, подобных поправкам для сверхтонкой структуры, изотопического смещения спектральных линий и т. д.

Хорошо известно, что заряд Ze различных ядер есть целое кратное заряда e протона. Каждое целое число Z соответствует известному химическому элементу. Все элементы со значениями от 1 до 92 действительно обнаружены в природе, за исключением элементов 85 и 87⁽²⁾. Недавно были получены при опытах с ядерными превращениями элементы 93 и, повидимому, 94 (F6, F9).

При наших современных знаниях по атомной физике, о заряде ядра элемента можно легко заключить из химических или спектроскопических свойств элемента (периодическая система). Наиболее прямое измерение заряда ядра атома состоит однако в определении его спектра рентгеновых лучей, другими словами, в определении энергии связи внутренних электронов. Другой метод основан на рассеянии под большими углами α -частиц или протонов ядрами элемента. Он менее точен, но имеет большое историческое значение — путем таких опытов Резерфорд пришел к своей модели устройства атома из ядра и электронов (R15, C4).

Вторая ядерная величина — атомный вес — была известна задолго до открытия существования атомного ядра. Более того, еще в 1813 г. Прутт предполагал, что все атомные веса — целые кратные веса атома водорода. Позднее было показано, что это правило выполняется точнее, если за единицу взять одну шестидесятую веса атома кислорода. Однако и тогда остаются некоторые резкие исключения из правила кратных весов, например, хлор.

Мы знаем теперь, что все элементы, не подчиняющиеся этому правилу, а также и многие, приблизительно подчиняющиеся, в

⁽¹⁾ Буква и число, например (A4), употребляются для ссылок на оригинальные работы, список которых находится в конце книги.

⁽²⁾ Открытие иллиния (61), до сих пор недостаточно.

действительности состоят из нескольких изотопов. Ядра двух изотопов обладают одним и тем же зарядом, но различным весом. Так как химические и спектроскопические свойства атома определяются одним только зарядом, изотопы ведут себя химически одинаково и имеют (практически) одинаковый спектр. Атомный вес различных изотопов очень близок к целому, в то время как находящиеся в природе смешанные элементы, содержащие не один изотоп, понятно, имеют вообще ⁽¹⁾ не целочисленный атомный вес.

Анализ изотопического состава элемента, так же как и определение атомного веса отдельных изотопов, производится при помощи масс-спектрографа (А4). Главным образом благодаря работам Астона, в настоящее время мы знаем около 280 различных изотопов, что соответствует наличию около 3 изотопов на элемент. Наибольшее количество изотопов приходится на олово (10 изотопов).

Атомные веса известных изотопов простираются от 1 (легкий водород) до 238 (уран). В пределах от 1 до 212 существует по меньшей мере 1 изотоп на каждый целочисленный атомный вес (M11) за исключением атомных весов 5 и 8. Во многих случаях один атомный вес существует для двух изотопов двух различных элементов, например, один из изотопов аргона и один из изотопов кальция имеют атомный вес 40. Ядра, имеющие одинаковый атомный вес и разный заряд ядра, называются изобарами. Известны 44 пары таких изобар, если исключить 10 пар, для которых один из двух изобар сомнителен. По меньшей мере в двух случаях, повидимому, определено существование трех изобар (атомный вес 96 — Zr, Mo, Ru — и атомный вес 124 — Sn, Te, Xe). В действительности существующее число пар изобар конечно больше, чем найденное число, потому что практически неизвестны изобары в группе редких земель. Это связано с большой трудностью разделить различные редкие земли и определить, соответствует ли значение, найденное при помощи масс-спектрографа, массе действительно наблюдаемого элемента или примеси других редких земель.

Для обозначения изотопа пишут сверху химического символа элемента атомный вес изотопа, например, H², A⁴⁰, Te¹²⁴. Некоторые авторы дополнительно отмечают слева в углу заряд ядра, например, ${}_{18}^{40}\text{A}$ или ${}_{18}^{40}\text{A}$. Мы этого делать не будем, потому что заряд однозначно определяется химическим символом. Едва ли следует говорить о том, что верхний значок не дает точного атомного веса изотопа; этот последний слегка отличается от целого числа; значок дает лишь „массовое число“, т. е. целое число, наиболее близкое атомному весу.

(1) В некоторых случаях все изотопы, за исключением одного, очень редки, например, количество изотопов 17 и 18 в кислороде очень мало по сравнению с O¹⁶. При этом атомный вес природного смешанного элемента приблизительно равен атомному весу преобладающего изотопа и потому близок к целому числу.

Таблица I

Известные устойчивые изотопы

A — атомный вес, Z — заряд ядра, Ch — химический символ

A	Z	Ch	A	Z	Ch	A	Z	Ch	A	Z	Ch	A	Z	Ch	A	Z	Ch
1	1	H	49	22	Ti		38	Sr	119	50	Sn	156	64	Gd	200	80	Hg
2	1	H	50	22	Ti	88	38	Sr	120	50	Sn	157	64	Gd	201	80	Hg
3	1	H		24	Mo	89	39	Y	121	51	Sb	158	64	Gd	202	80	Hg
4	2	He	51	23	V	90	40	Zr	122	50	Sn	159	65	Tb	203	81	Tl
5	—	—	52	24	Cr	91	40	Zr		52	Te	160	64	Gd	204	80	Hg
6	3	Li	53	24	Cr	92	40	Zr	123	51	Sb	161	66	Dy		82	Pb
7	3	Li	54	24	Cr		42	Mo		52	Te	162	66	Dy	205	81	Tl
8	—	—		26	Fe	93	41	Cb	124	50	Sn	163	66	Dy	206	82	Pb
9	4	Be	55	25	Mn	94	40	Zr		52	Te	164	66	Dy			(U Pb)
10	5	B	56	26	Fe		42	Mo		54	Xe	165	67	Ho	207	82	Pb
11	5	B	57	26	Fe	95	42	Mo	125	52	Te	166	68	Er			(AcPb)
12	6	C	58	28	Ni	96	40	Zr	126	52	Te	167	68	Er	208	82	Pb
13	6	C	59	27	Co		42	Mo		54	Xe	168	68	Er			(ThPb)
14	7	N	60	28	Ni		44	Ru	127	53	I	169	69	Tu	209	83	Bi
15	7	N	61	28	Ni	97	42	Mo	128	52	Te	170	68	Er	210	84	Po
16	8	O	62	28	Ni	98	42	Mo		54	Xe	171	70	Yb			(Ra F)
17	8	O	63	29	Cu		44	Ru	129	54	Xe	172	70	Yb	211	—	
18	8	O	64	30	Zn	99	44	Ru	130	52	Te	173	70	Yb	212	84	Th C'
19	9	F	65	29	Cu		(43 Ms?)	43	Xe	174	70	Yb	213	83	Ac C'		
20	10	Ne	66	30	Zn	100	42	Mo	131	54	Xe	175	71	Cp	214	84	Ra C'
21	10	Ne	67	30	Zn		44	Ru	132	54	Xe	176	70	Yb	215	—	
22	10	Ne	68	30	Zn	101	44	Ru	133	55	Cs	177	72	Hf	216	84	Th A
23	11	Na	69	31	Ga	102	44	Ru	134	54	Xe	177	72	Hf	217	84	Ac A
24	12	Mg	70	30	Zn		46	Pd		56	Ba	178	72	Hf	218	84	Ra A
25	12	Mg		32	Ge	103	45	Rh	135	56	Ba	179	72	Hf	219	—	
26	12	Mg	71	31	Ga	104	44	Ru	136	54	Xe	180	72	Hf	220	86	ThEm
27	13	Al	72	32	Ge		46	Pd		56	Ba	181	73	Ta	221	86	AcEm
28	14	Si	73	32	Ge	105	46	Pd	137	56	Ba	182	74	W	222	86	RaEm
29	14	Si	74	32	Ge	106	46	Pd	138	56	Ba	183	74	W	223	—	
30	14	Si		34	Se		48	Cd	139	57	La	184	74	W	224	88	Th X
31	15	P	75	33	As	107	47	Ag	140	58	Ce	185	75	Re	225	88	Ac X'
32	16	S	76	32	Ge	108	46	Pd	141	59	Pr	186	74	W	226	88	Ra
33	16	S		34	Se		48	Cd	142	58	Ce	187	76	Os	227	—	
34	16	S	77	34	Se	109	47	Ag		60	Nd	187	75	Re	228	90	RdTh
35	17	Cl	78	34	Se	110	48	Cd	143	60	Nd	188	76	Os	229	90	RdAc
36	18	A		36	Kr	111	48	Cd	144	60	Nd	189	76	Os	230	90	Io
37	17	Cl	79	35	Br	112	48	Cd		62	Sm	190	76	Os	231	—	
38	18	A	80	34	Se		50	Sn	145	60	Nd	191	77	Ir	232	90	Th
39	19	K		36	Kr	113	48	Cd	146	60	Nd	192	76	Os	233	91	Pa
40	18	A	81	35	Br		49	In		62	Sm	193	77	Ir	234	92	U II
41	20	Ca	82	34	Se	114	48	Cd	147	62	Sm	193	77	Pt	235	92	U?
42	19	K		36	Kr		50	Sn	148	62	Sm	194	78	Pt	236	—	
43	20	Ca	83	36	Kr	115	49	In	149	62	Sm	195	78	Pt	237	—	
44	20	Ca	84	36	Kr		50	Sn	150	62	Sm	196	78	Pt	238	92	U I
45	21	Sc		38	Sr	116	48	Cd	151	63	Eu		80	Hg			
46	22	Ti	85	37	Rb		50	Sn	152	62	Sm	197	79	Au			
47	22	Ti	86	36	Kr	117	50	Sn	153	63	Eu	198	78	Pt			
48	22	Ti		38	Sr	118	48	Cd	154	62	Sm		80	Hg			
49	22	Ti	87	37	Rb*		50	Sn	155	64	Gd	199	80	Hg			

Примечание. β -радиоактивные изотопы не были включены в таблицу, за исключением Rb^{87} , который, возможно, испускает β -частицы, и AcC , имеющего, кроме сильной α -активности, еще и очень слабую β -активность. Радиоактивные вещества, испускающие α -частицы, в таблицу включены.

Атомные веса встречающихся в природе элементов не зависят от того источника, из которого получены элементы. Это значит, что различные изотопы встречаются всегда приблизительно в одном и том же отношении. Исключениями из этого правила являются водород, свинец и в малой степени бор. Содержание тяжелого водорода H^2 (дейтерия) в H различных источников колеблется от одной части на 3500 до одной части на 5000. Это большое колебание обусловлено очень большой относительной разницей в атомных весах. Для бора отношение весов, конечно, гораздо меньше, чем для водорода, но больше, чем для большинства других элементов. Отношение $B^{10} : B^{11}$ колеблется (B^{29}) от 1 : 4 до 1 : $3\frac{3}{4}$. С другой стороны, свинец в урановых рудах получается при радиоактивном распаде урана и поэтому лишь в лучшем случае мы можем найти чистый изотоп Pb^{206} .

Так как каждый изотоп обладает своим особым ядром, разделение изотопов очень важно для физики ядра. Наиболее полное разделение достигается при помощи масс-спектрографа. Основное неудобство этого прибора состоит в том, что он требует очень больших токов или продолжительного времени, чтобы разделить заметное количество элемента на его изотопы. Легкий и тяжелый водород можно относительно просто разделить повторным электролизом воды. Для неона можно воспользоваться повторной диффузией. Повторные химические действия, дистилляции и т. д. также являются возможными методами, но ими удается получить лишь частичное разделение изотопов; исключение представляет лишь водород.

Теперь остается истолковать правило о (приблизительно) целочисленном значении атомных весов и (строго) целочисленном значении зарядов ядер. Очевидным объяснением может служить допущение, что ядра состоят из положительно заряженных и нейтральных частиц с атомным весом, равным единице. Действительно, мы знаем два ядра с атомным весом, равным единице, — протон и нейтрон (C^5). Одно имеет положительный заряд, а второе нейтрально; таким образом, мы приходим к гипотезе, что каждое ядро состоит из протонов и нейтронов⁽¹⁾ (H^7 , также H^2 , H^1). Полное число элементарных частиц, протонов и нейтронов вместе, равно тогда атомному весу ядра или, точнее, его массовому номеру A , т. е. наиболее близкому к атомному весу целому числу. Число протонов должно определяться зарядом ядра Z , откуда число нейтронов N равно:

$$N = A - Z \quad (1)$$

Так как для многих легких ядер число нейтронов приблизительно равно числу протонов, иногда полезно вводить „изотопический номер“ I (см. H^2), т. е. разность между числом нейтронов и протонов:

$$I = N - Z = A - 2Z. \quad (2)$$

⁽¹⁾ Эта гипотеза была впервые использована как основа теории ядер Гайзенбергом (H^7). Однако она была предложена раньше в качестве удобного способа описания изотопов Харкинсом (H^2) и Резерфордом.

§ 2. Энергия (A4, A5, B5, B13)

Масс-спектрограф показывает, что атомный вес каждого ядра приблизительно равен целому числу. Это служит основанием гипотезы устройства ядер из нейтронов и протонов. В то же время однако масс-спектрограф дает для атомных весов отдельных изотопов нестрогие целочисленные значения, например, $H^1 = 1,00807$; $Li^7 = 7,0164$; $Kr^{80} = 79,926$ и $Tl^{205} = 205,037$.

Мы видим, что наиболее легкие элементы обладают атомными весами несколько большими, средние (примерно от 20 до 200) — несколько меньшими и очень тяжелые — снова несколько большими, чем целые числа A .

Разность между точным атомным весом M и „массовым числом“, так называемый массовый дефект

$$-\Delta = A - M \quad (3)$$

лежит далеко за пределами ошибок наблюдений; для наиболее легких атомов он приблизительно в 100 раз, для тяжелых приблизительно в 10 раз превышает вероятную ошибку. С другой стороны, массовый дефект сам по себе слишком мал и слишком закономерно зависит от массового номера A , чтобы отбросить закон о целочисленных атомных весах и отказаться от нашей гипотезы об устройстве ядер. Поэтому следует заключить, что протоны и нейтроны, связанные в ядрах, обладают весом, отличным, точнее меньшим, чем то же число свободных протонов и нейтронов. Это можно объяснить при помощи закона Эйнштейна — эквивалентности массы и энергии, так как связь нейтронов и протонов в ядрах снижает их общую энергию. Таким образом, массовый дефект дает непосредственное указание об энергии и связи частиц в ядре.

Это указание⁽¹⁾ служит для определения полной энергии связи элементарных частиц путем сравнения их весов с весом соответствующего числа нейтронов и протонов, а также для определения энергии связи последних нейтрона, протона или α -частицы, путем сравнения веса ядра с весом другого ядра, обладающего меньшим на единицу числом протонов, нейтронов или α -частиц. Таким путем можно установить, стабильно ли данное ядро. Кроме того можно вывести, будет ли какая-либо ядерная реакция экзотермической или эндотермической и таким образом оказать большую помощь при экспериментальном исследовании ядерных превращений и т. д.

(1) Это единственный пункт, в котором наше знание свойств ядра стоит выше знания свойств атома. Общая энергия связи всех электронов в атоме, знание которой очень полезно, может быть найдена лишь измерением последовательных ионизационных потенциалов атома. Это измерение очень трудно произвести с тяжелыми атомами. Прямого пути определения энергии связи не существует. Причина, по которой ядерные энергии связи отражаются на атомных весах, в то время как энергия атомных электронов практически на них не влияет, лежит, понятно, в большой величине ядерных энергий связи, равной примерно нескольким миллионам вольт на одну ядерную частицу, в то время как все электроны урана обладают энергией связи в 300 000 V.

Как пример, возьмем ядро Li^6 . Его атомный вес (В13) равен 6,01614. Ядро состоит из трех нейтронов; атомный вес каждого равен 1,00845, и трех протонов (атомный вес водородного атома — 1,00807). Эти шесть частиц вместе в свободном состоянии обладают весом 6,04956, что на 0,03342 единицы больше, чем вес атома Li^6 . Энергия связи Li^6 , таким образом, составляет 0,03342 „массовых единиц“, причем одна массовая единица равна энергии, соответствующей согласно закону Эйнштейна $\frac{1}{16}$ массы кислородного атома. Чтобы перевести эту энергию в более удобные единицы, заметим, что согласно закону Эйнштейна энергия, соответствующая массе m , равна mc^2 , где c — скорость света. Таким образом,

одна массовая единица = $8,99 \cdot 10^{20} \cdot \frac{1}{16} \cdot M_0$ эрг = $1,49 \cdot 10^{-3}$ эрг,
 где $M_0 = 2,64 \cdot 10^{-22}$ грамм-масса кислородного атома O^{16} .

Более удобными единицами для измерения энергии ядер, чем эрг, являются электрон-вольты (eV), так как кинетическая энергия бомбардирующих частиц при ядерных распадах измеряется непосредственно в этих единицах. Пусть $10e$ обозначает заряд электрона в международных кулонах, так что eq есть заряд электрона в абсолютных электромагнитных единицах, где q — коэффициент перевода международных кулонов в абсолютные (1). Пусть дальше pq — множитель для перехода от международных в абсолютные вольты. Тогда энергия в международных электрон-вольтах, соответствующая одной массовой единице, равна:

$$M = \frac{c^2 M_0}{16 eq} \cdot \frac{10^{-8}}{pq} = \frac{10^{-9} c^2}{F pq^2}, \quad (4)$$

где $F = \frac{10e}{M_0/16}$ есть „фарадей“. При значениях постоянных, данных Берджем, найдем:

$$M = \frac{10^{-9} \cdot (2,99796 \pm 0,00004)^2 \cdot 10^{20}}{(96494 \pm 1) (1,00051 \pm 0,00002) (0,99995 \pm 0,00005)^2} \text{eV} = 931,05 \pm 0,15 \text{MV},$$

где MV обозначает миллионы электрон-вольт (2). (Наибольшая неточность обусловлена переходным множителем q).

При этом переходном множителе мы найдем, что энергия связи Li^6 по сравнению с энергией свободных частиц равна:

$$0,03342 \cdot 931,0 = 31,11 \text{MV}.$$

Чтобы стабильность Li^6 была обеспечена, этот последний должен быть также легче, чем, например, $\text{H}^3 + \text{He}^3$ или $\text{H}^2 + \text{He}^4$, или вообще легче, чем сумма любых двух ядер, которые содержат вместе столько же нейтронов и протонов, сколько Li^6 .

(1) Бердж, Rev. Mod. Phys., 1, 1 (1929).

(2) Нам кажется, что вновь введенное сокращение должно быть по возможности кратким. Нет нужды указывать в сокращении, что имеются в виду электрон-вольты, так как это следует из текста в каждом частном случае. С другой стороны, всегда принято обозначать вольты заглавными V, а также мега (миллион) заглавной M, в отличие от милли (что обычно обозначается m).

Для атомных весов мы найдем:

$\text{He}^4 = 4,00336$	$\text{He}^3 = 3,01699$
$\text{H}^2 = 2,01423$	$\text{H}^3 = 3,01610$
<hr/>	<hr/>
$6,01759$	$6,03309$
$\text{Li}^6 = 6,01614$	$\text{Li}^6 = 6,01614$
<hr/>	<hr/>

Энергия связи = 0,00145
 массовых единиц = 1,35 MV

0,01685 массовых единиц
 = 15,69 MV.

Мы видим, таким образом, что ядро Li^6 очень устойчиво в отношении спонтанного распада на ядра He^3 и H^3 , но гораздо менее устойчиво относительно распада на α -частицу и дейтерон.

Следует заметить, что мы дали *атомные* веса всех участвующих частиц, а не веса ядер. Атомный вес атома с зарядом ядра Z содержит, кроме веса ядра, также вес Z орбитальных электронов (атомный вес одного электрона равен 0,000548). В обычных ядерных превращениях ядерный заряд компенсирован так, что получающиеся при реакции атомы содержат столько же орбитальных электронов, сколько и исходные атомы. Таким образом, при определении энергетического баланса ядерной реакции не вносим ошибки, если мы берем атомные массы вместо масс ядер, так как число электронов, содержащееся в атомных массах, не меняется при реакции. Это остается верным и при рассмотрении устойчивости ядер, к которому мы перейдем дальше. Данное ядро должно всегда сравниваться с рядом других ядер, полный заряд которых равен заряду исходного ядра.

Даже в случае энергий, имеющих место при β -распаде, допустимо пользоваться не массами ядер, а атомными массами. Если ядро с зарядом Z преобразуется в ядро с зарядом $Z+1$ и отрицательный электрон, освобождающаяся энергия очевидно равна ⁽¹⁾ массе ядра Z минус сумма масс ядра $Z+1$ и одного электрона. Атомный вес атома Z содержит вес Z электронов, в то время как вес атома $Z+1$ содержит вес большего на единицу числа электронов. Таким образом, разница двух атомных весов равна разности ядерных весов минус масса одного электрона, что как раз и составляет освобождающуюся при β -распаде энергию. Масса нейтрино (см. § 39) предполагается равной нулю.

Только в случае позитронной радиоактивности разница весов исходного и конечного атома не дает непосредственно освобождающейся энергии. Допустим, что атом с зарядом ядра Z и атомным весом M_Z испускает позитрон и таким образом преобразуется в атом $Z-1$ с атомным весом M_{Z-1} . Обозначим массу электрона через m , массы двух ядер составляют: $M_Z - Zm$ и $M_{Z-1} - (Z-1)m$. Тогда энергия, освобождающаяся при реакциях (8), равна разности этих ядерных масс минус масса испускаемого позитрона:

$$E = (M_Z - Zm) - [M_{Z-1} - (Z-1)m] - m = M_Z - M_{Z-1} - 2m. \quad (5)$$

⁽¹⁾ Отбрасывая множитель c^2 ,

Освобождающаяся энергия, таким образом, эквивалентна разности атомных весов двух атомов минус удвоенную массу электрона или $0,00110$ массовых единицы. Фактор 2 входит потому, что, во-первых, образуется позитрон и, во-вторых, при ядре Z на один электрон содержится больше, чем при ядре M_{Z-1} .

Иногда полезно определять массовый дефект на одну элементарную частицу, содержащуюся в ядре, так называемый упаковочный множитель:

$$P = \frac{\Delta}{A} = \frac{M - A}{A}. \quad (6)$$

Фиг. 1 показывает ход этих упаковочных множителей в зависимости от массового номера. Упаковочные множители протона и нейтрона равны соответственно $+0,00807$ и $+0,00845$; упаковочные множители затем уменьшаются с повышением массового номера, что указывает на более прочную связь ядерных частиц. P достигает, по определению, нуля для O^{16} ; затем оно становится отрицательным и почти постоянным, равным $-0,001$ в большой области. Это указывает, что массовые дефекты, а также и энергии связи всех ядер от кислорода до ртути почти пропорциональны числу частиц в ядре, что является очень важной теоремой (см. § 7). Полная энергия связи какого-либо ядра в этой области равна:

$$\begin{aligned} Z\Delta_H + (A - Z)\Delta_n - \Delta_A &\approx A \left(\frac{P_H + P_n}{2} - P_A \right) = \\ &= 0,009 A \text{ масс. ед.} = 8 \frac{1}{2} A \text{ MV}, \end{aligned} \quad (7)$$

где Δ_H , Δ_n , Δ_A — „массовые избытки“ протона, нейтрона и атома, определенные в (6); $P_H = \Delta_H$, $P_n = \Delta_n$ и P_A — упаковочные множители. В (7) также принято в расчет, что число протонов атома A приблизительно равно числу нейтронов, т.е. $Z \approx A - Z \approx \frac{1}{2} A$. Величина энергии связи (7) мала по сравнению с энергией, соответствующей ядерной массе (см. § 4). Отсюда можно заключить, что скорости частиц в ядре малы по сравнению со скоростью света, т.е. что к этим частицам (нейтронам и протонам) можно применять нерелятивистскую квантовую механику.

§ 3. Размер (G2)

Радиусы ядер колеблются от 2 или $3 \cdot 10^{-13}$ см для α -частицы примерно до $9 \cdot 10^{-13}$ см для ядра урана. Повидимому, объем ядер приблизительно пропорционален их массовым номерам, так что объем, приходящийся на одну частицу, приблизительно один и тот же у различных ядер. Исключение из этого правила имеет место только для легчайших ядер.

Размер ядер был определен из взаимодействия ядер с протоном, нейтроном, дейтерием или α -частицей. Если ядро и положительно заряженная частица находятся на большом расстоянии друг от друга, между ними действуют кулоновские силы

отталкивания. Однако, когда две частицы подходят ближе друг к другу, наступает отклонение от закона Кулона, и наконец для совсем малых расстояний между ядром и внешней частицей наступает притяжение. О существовании этой силы притяжения можно заключить из того, что ядерные частицы могут притягиваться к возбужденному ядру, образуя при этом новое устойчивое ядро. Точка, в которой отталкивание переходит в притяжение, соответствует радиусу ядра. Повидимому, специфические ядерные силы между ядром и внешней частицей спадают очень быстро с расстоянием, когда расстояние становится больше радиуса ядра или, точнее, больше суммы радиусов ядра и частицы, так что кулоновский закон имеет место на расстояниях непосредственно больших, чем сумма радиусов. Таким образом, граница ядра вполне определена, во всяком случае лучше, чем граница атома.

Взаимодействие между нейтроном и ядром, понятно, равно нулю на больших расстояниях, так как нейтрон не подвержен действию электрических сил. В этом случае существует только „специфически ядерное“ взаимодействие, которое проявляется на расстояниях между частицами порядка радиуса ядра или меньше.

Наиболее точное определение радиусов ядер получается из продолжительности жизни радиоактивных ядер, испускающих α -частицы (см. гл. IX). Сведения о размерах легких ядер были получены из рассеяния α -частиц и протонов ядерными полями и из вероятности распада ядра как функции энергии бомбардирующего ядро частиц (гл. X). Аналогичные результаты могут быть получены из рассеяния быстрых нейтронов ядрами (гл. XII).

Размер ядер оказывается порядка величины, которую следовало бы ожидать из энергии связи ядерных частиц, если допустить, что ядро состоит из нейтронов и протонов. Длина волны протона или нейтрона (масса M) равна:

$$\lambda = \frac{2\pi h'}{Mv} = 2\pi h' (2ME_{кин})^{-1/2}, \quad (8)$$

где $2\pi h'$ — постоянная Планка, v — скорость и $E_{кин}$ — кинетическая энергия частицы. Можно принять, что $E_{кин}$ величина одного порядка с энергией связи ϵ частицы, которая согласно § 2 равна приблизительно $8\frac{1}{2} MV$ для атомов среднего атомного веса. Мы получаем поэтому ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda}{2\pi} = h' (2M\epsilon)^{-1/2} = \\ &= 1,04 \cdot 10^{-27} (2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 8,5 \cdot 10^6 \cdot 1,59 \cdot 10^{-12})^{-1/2} = 1,55 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \end{aligned}$$

Эта величина порядка радиуса ядра (несколько меньше). λ' в действительности должна быть несколько меньше, чем радиус

(1) Для различных оценок порядков величин λ' является гораздо более удобной величиной, чем длина волны λ .

ядра, потому что тяжелые ядра содержат много протонов и нейтронов, большинство из которых должно быть на высоких квантовых состояниях. Их волновые функции должны при этом иметь несколько узлов внутри ядра. Таким образом, наблюдаемый размер ядра также подтверждает гипотезу, что протоны и нейтроны являются элементарными составными частями ядра.

Если бы мы захотели написать соотношение, аналогичное уравнению (8) для электронов, то нам нужно было бы воспользоваться релятивистским соотношением между длиной волны и кинетической энергией:

$$\lambda' = \frac{h'}{p} = h'c [(2mc^2 + E_{\text{кин}}) E_{\text{кин}}]^{-1/2}, \quad (9)$$

где m — масса электрона, p — импульс. Радиус ядер средних размеров равен $5 \cdot 10^{-13}$, он гораздо больше, чем λ' электрона. Поэтому, если мы положим $\lambda' = 5 \cdot 10^{-13}$, то получим слишком малое значение размеров ядра, чтобы они соответствовали $E_{\text{кин}}$:

$$E_{\text{кин}} > \frac{2\pi h'c}{\lambda'} = \frac{1,05 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{-13}} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ эрг} = 40 \text{ MV}.$$

Это значение гораздо больше ядерных энергий связи, а действительное значение $E_{\text{кин}}$ должно было бы быть еще больше. Таким образом, большая величина $E_{\text{кин}}$ может рассматриваться как веский аргумент против допущения существования электронов в ядрах. Более строгое опровержение этого допущения дано в § 38.

§ 4. Статистика (E1)

Каждый сорт частиц в природе подчиняется или статистике Ферми Дирака или статистике Бозе Эйнштейна. В первом случае имеет место принцип Паули для рассматриваемых частиц, т. е. две частицы одного вида никогда не могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. Примерами таких частиц являются электроны (положительные и отрицательные), протоны и, как мы увидим, нейтроны и нейтрино (§ 39). Повидимому, каждая „элементарная“ частица подчиняется статистике Ферми.

Частицы, подчиняющиеся статистике Бозе, могут находиться в одном и том же квантовом состоянии. На самом деле, для них даже несколько предпочтительнее одно и то же состояние. Наиболее известным примером таких частиц являются фотоны. К этой же категории относятся дейтероны, α -частицы и большое число других ядер.

Наиболее строгое и плодотворное определение статистики основывается на свойствах волновой функции частиц данного сорта. Предположим, что у нас есть n одинаковых частиц 1, 2, 3, ..., i , ..., n ; волновая функция, описывающая их движение, будет некоторой функцией $\psi(x_1 \dots x_i \dots x_n)$ координат частиц (1). Если координаты двух частиц обменять местами, т. е. координаты

(1) x_i символизируют три координаты частицы i и, если частица обладает также спином, включаются и ее спиновые координаты.

нату x_j частицы j подставить вместо x_i , а x_i — вместо x_j , получается другая функция координат. Эта новая функция либо (а) идентична с исходной, если частицы подчиняются статистике Бозе, либо (б) также совпадает с исходной, за исключением знака, если частицы подчиняются статистике Ферми. Функции вида (а) называются симметричными относительно частиц, функции вида (б) — антисимметричными. Это можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n) &= + \psi(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) \text{ статистика Бозе} \\ \psi(x_1 \dots x_j \dots x_i \dots x_n) &= - \psi(x_1 \dots x_i \dots x_j \dots x_n) \text{ статистика Ферми} \end{aligned} \right\} (10)$$

Опытное определение статистики ядер основано на чередовании интенсивности в вращательных молекулярных спектрах. Наиболее удобны спектры двухатомных молекул. Теория такого определения дана в § 47. Было найдено, что протон подчиняется статистике Ферми, дейтерон, α -частица, ядра N^{14} , O^{16} и т. д. — статистике Бозе, ядро Li^7 — статистике Ферми. Из наблюдений можно установить общий закон — *все ядра с четным атомным весом подчиняются статистике Бозе, а с нечетным атомным весом — статистике Ферми*. Это согласуется с допущением, что все ядра построены из протонов и нейтронов и что нейтрон подчиняется статистике Ферми.

Чтобы доказать это утверждение, следует показать, что система, состоящая из подчиняющихся статистике Ферми частиц, подчиняется статистике Бозе или статистике Ферми, в зависимости от того, четно или нечетно число элементарных частиц. Рассмотрим две системы (ядра) — α и β , — каждая из которых содержит m элементарных частиц одного сорта (протонов) и n частиц другого сорта (нейтронов). Допустим, что первые m протонов и первые n нейтронов образуют ядро α , которое находится вблизи от точки r_α , вторые m протонов и n нейтронов образуют второе ядро β вблизи точки r_β . Такое положение будет описываться некоторой волновой функцией от координат всех частиц. Заменяем теперь один протон ядра α одним протоном ядра β ; тогда волновая функция всей системы умножается на -1 , потому что протоны подчиняются статистике Ферми. Обменяем затем другую пару частиц и будем продолжать этот процесс до тех пор, пока все m протонов и n нейтронов, вначале содержавшиеся в ядре α , будут перенесены в точку r_β , и наоборот. При каждом обмене волновая функция умножится на -1 , т. е. после обмена всех $m+n$ частиц ядра α на $m+n$ частиц ядра β волновая функция окажется умноженной на $(-1)^{m+n}$. С другой стороны, наш процесс соответствует обмену ядер α и β . Таким образом, волновая функция умножится на $(-1)^{m+n}$, если координаты двух наших ядер поменять местами, поэтому волновая функция симметрична или антисимметрична относительно координат двух ядер, в зависимости от четности или нечетности полного числа частиц $m+n$ каждого ядра. Это и требовалось доказать.

Приведенное доказательство однако не вполне строго, потому что нельзя построить волновую функцию, которая была бы антисимметричной относительно всех протонов и нейтронов и которая в то же время приписывала бы определенные частицы к определенному ядру. Строгое доказательство было дано Эренфестом и Оппенгеймером (E1). Следует заметить, что в то время, когда была написана статья Эренфеста и Оппенгеймера, нейтроны еще не были открыты и думали, что ядра состоят из протонов и электронов. Таким образом, слово „электрон“ в их статье надо везде заменить словом „нейтрон“. Если это сделать, исчезает противоречие между теоретическими и экспериментальными результатами, относящимися к ядру N^{14} .

Первое приложение нашей теоремы мы сделаем к определению статистики нейтронов, основываясь на экспериментальных данных о том, что протон подчиняется статистике Ферми, а дейтерон — статистике Бозе. Допуская, что дейтерон состоит из нейтрона и протона, мы должны заключить из нашей теоремы, что нейтрон подчиняется статистике Ферми. Зная статистику нейтрона, мы можем предсказать, что любое ядро с четным атомным весом должно подчиняться статистике Бозе, потому что полное число частиц — протонов и нейтронов вместе — равно атомному весу; мы видели, что статистика определяется именно этим числом. Аналогичным образом все ядра с нечетным атомным весом должны подчиняться статистике Ферми. Из этого правила не было найдено ни одного исключения. Исследованы были ядра H^1 , H^2 , He^4 , Li^7 , N^{14} , O^{16} , Na^{23} , P^{31} , S^{32} , Cl^{35} и K^{39} .

Старая теория ядер допускала, что ядра состоят из протонов и электронов. Число протонов надо было при этом предположить равным атомному весу A , потому что только протоны определяют вес, в то время как $A - Z$ электронов нейтрализует заряд протонов, в результате чего остается заряд, равный Z . Полное число частиц, таким образом, было $2A - Z$, т. е. было четным или нечетным, в зависимости от того, четный или нечетный заряд имеет ядро. В соответствии с этим все элементы с нечетными Z , например H и N , должны подчиняться статистике Ферми, независимо от их атомного веса. Это стояло в прямом противоречии с экспериментальными результатами относительно H^2 (1) и N^{14} (R7), и это противоречие является другим веским аргументом против существования электронов в ядре.

§ 5. Спин и магнитный момент

(см. главу VIII)

Собственный момент количества движения (спин) ядер можно определить из сверткой структуры, анализа молекулярного пучка, деполаризации резонансного излучения и чередования

(1) В действительности статистика дейтеронов была определена лишь после открытия нейтрона.

интенсивностей во вращательном спектре молекул. Эти методы, за исключением последнего, определяют также связанный со спином магнитный момент. Детальное описание методов и результатов будет дано в гл. VIII.

Наиболее важный результат для общей теории ядер заключается в том, что спин всех ядер с нечетным атомным весом кратен половине h' , в то время как спин ядер с четным атомным весом кратен целому числу h' , причем большинство из них имеет спин, равный нулю. Полный спин ядра является суммой всех моментов количества движения орбитального движения всех частиц внутри ядра и всех спинов ядерных частиц. Сумма должна определяться согласно правилам векторной модели квантовой теории. *Орбитальный* момент количества движения всегда кратен целому числу h' . Таким образом, наличие кратных половины h' значений полного спина некоторых ядер следует приписать кратным половине значения спина отдельных ядерных частиц.

Экспериментальное правило, связывающее атомный вес и ядерный спин, должно быть при этом истолковано как указывающее на то, что и нейтрон, и протон имеют половинные спины. В случае протонов опытным путем может быть показано, что спин их в точности равен половине. Спин нейтрона может на основании опытов считаться равным как $\frac{3}{2}$, так и $\frac{1}{2}$. Простота однако является серьезным доводом в пользу значения $\frac{1}{2}$, которое мы и примем в данной книге. Повидимому, общим правилом является то, что такое значение спина имеет место для всех элементарных частиц, т. е. для протона, нейтрона, электрона (положительного и отрицательного) и нейтрино (§ 39).

Если и протон и нейтрон имеют спин $\frac{1}{2}$, то суммарный спин A элементарных частиц — нейтронов и протонов — будет целочисленным или кратным половине, в зависимости от того, четный или нечетный атомный вес A имеет ядро. Это заключение из векторной модели квантовой теории согласуется со всеми имеющимися наблюдениями. Оно аналогично утверждению относительно статистики ядер, данному в предыдущем параграфе (ядра с целочисленным спином подчиняются статистике Бозе, а ядра со спином, кратным половине, подчиняются статистике Ферми). Эти два утверждения однако не зависят друг от друга, по крайней мере поскольку нам неизвестна связь между статистикой и спином частицы, которая, повидимому, существует, но до сих пор еще не объяснена.

Следует заметить, что старая теория ядер, считавшая ядра состоящими из протонов и электронов, сталкивалась с трудностью в отношении спина, аналогичной трудности в отношении статистики. Экспериментальное положение вещей с ядерным спином было даже хуже, потому что спины у многих ядер с четным ядерным зарядом и нечетным атомным весом оказались кратными $\frac{1}{2}h'$, что находится в противоречии с „электронной

теорией“ и подтверждает „нейтронную теорию“ ядер, в то время как статистика определена только для одного ядра с нечетным Z и четным A .

Магнитный момент протона был определен Штерном и Эстерманом (E4) и Раби, Келлогом и Захариасом (R2). Он не равен одному ядерному магнетону:

$$\mu_0 = \frac{h'e}{2Mc} = 5,02 \cdot 10 \text{ гаусс см}^2, \quad (11)$$

где M — масса протона, μ_0 — магнитный момент, которого следовало бы ожидать для протонов в случае применимости к ним теории Дирака. На самом деле наблюдаемое значение равно приблизительно $2,9 \mu_0^{(1)}$, т. е. гораздо больше, чем „теоретическое“ значение $\mu_0^{(2)}$. Попытки объяснить это расхождение даны в § 45. В последнее время было доказано Келлогом, Раби и Захариасом (K3), что магнитный момент протона направлен в ту же сторону, что и его спин; этого и следовало ожидать для положительного заряда (для электронов направление магнитного момента и спина противоположное).

Магнитный момент нейтрона едва ли допускает непосредственное измерение. Он был установлен из моментов других, более сложных ядер. Ядро дейтерона, которое состоит из одного протона и одного нейтрона, будет наиболее простым. Его спин был измерен и равен единице. Можно с достоверностью утверждать, что у дейтерона в его основном состоянии нет орбитального момента количества движения (§ 12). Таким образом, наблюдаемый момент количества движения 1 должен быть приписан *спинам* протона и нейтрона. Это значит, что в дейтероне спины протона и нейтрона параллельны. Таким образом, магнитный момент дейтерона равен сумме магнитных моментов протона и нейтрона.

Наиболее точное экспериментальное определение магнитного момента дейтерона произвели Камкар и Теллер (теория метода, K1) и Фаркаш, Фаркаш и Хайтек (опыт, F1). Эти опыты основаны на измерении скорости преобразования орто-водорода в пара-водород при действии парамагнитных газов. Скорость эта, в частности, пропорциональна квадрату магнитного момента водородных ядер. Путем измерения скорости преобразования легкого водорода (H_2) и тяжелого водорода (D_2) можно определить отношение магнитных моментов H и D. Результат равен:

$$\mu_D : \mu_H = 1 : 4 \quad (12)$$

(1) Новые измерения Раби, Келлога и Захариаса (частное сообщение).

(2) Несмотря на этот факт, магнитный момент протона, конечно, гораздо меньше магнетона Бора для электрона: $\mu_1 = \frac{h'e}{2me} = 1838 \mu_0$ (m = масса электрона).

с точностью до 5% (1). Магнитный момент дейтерона также направлен в сторону спина (R4), поэтому

$$\mu_{\text{нейтрона}} = \mu_D - \mu_H = -\frac{3}{4} \mu_H = -2,2 \mu_0. \quad (13)$$

Таким образом, магнитный момент нейтрона имеет то направление, которое следовало бы ожидать, если бы у него был отрицательный заряд. Его величина того же порядка, что и магнитный момент протона.

ГЛАВА II

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ДАННЫЕ О ЯДЕРНЫХ СИЛАХ

В теории строения атомов мы имеем дело с электрически заряженными частицами, т. е. ядрами и электронами, и поэтому нам известны действующие между ними силы. В задачи атомной физики не входит определение сил между частицами, потому что электроны взаимодействуют известным образом. Вопрос заключается в том, как движутся электроны, подчиняясь известным силам. Этот вопрос решен в теории квант.

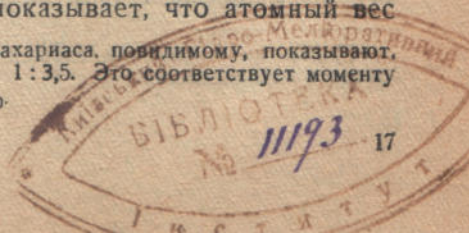
Мы предполагаем, что квантовая теория приложима к движению нейтронов и протонов в ядрах. Это подтверждается соотношением между размером и энергией связи ядер (см. § 3). Кроме того мы можем принять, что поправки теории относительности малы при тех энергиях связи, которые имеют место в ядре и которые малы по сравнению с энергией, соответствующей покоящейся массе нейтронов и протонов (конец § 2).

С другой стороны, мы не знаем сил между ядерными частицами, за исключением кулоновского отталкивания между протоном и ядром, играющего однако лишь роль поправки (§ 8). Основные силы притяжения безусловно неэлектрического происхождения, потому что они действуют на незаряженные нейтроны. Какова природа этих сил, как они зависят от расстояний между ядерными частицами, их спинов и, возможно, других величин, — надо определить из опытных данных. Мы сделаем это в настоящей главе качественным образом, а в следующей главе применим полученные результаты к частным случаям, которые дадут нам некоторые количественные данные о ядерных силах.

§ 6. Отношение атомного веса к заряду ядра (H7)

Когда была открыта периодическая система, о зарядах ядер ничего не было известно. Атомы были расположены согласно их атомным весам, что и привело к открытию периодической системы. Этот факт сам по себе показывает, что атомный вес

(1) Последние опыты Раби, Келлога и Захариаса, повидимому, показывают, что отношение моментов меньше — около 1:3,5. Это соответствует моменту дейтрона $0,85 \mu_0$ и нейтрона около $-2,0 \mu_0$.



непосредственно связан с зарядами ядра. Действительно, известные устойчивые изотопы любого элемента не отличаются сильно по атомному весу; колебания составляют лишь 10% даже для элементов с таким большим числом изотопов как олово. Таким образом, в первом приближении мы можем говорить об определенном соотношении между атомным весом и зарядом ядра.

Для легких элементов примерно до аргона эта связь очень проста. Атомные веса очень близки к удвоенным зарядам ядер, например, C^{12} , N^{14} , O^{16} и т. д. Поэтому число нейтронов $N = A - Z$ в любом из этих легких ядер приблизительно равно числу протонов Z .

Это экспериментальное правило следует истолковать как указание на то, что в ядре наиболее велики силы между нейтронами и протонами. Если бы этого не было, например, если бы два нейтрона притягивали бы друг друга сильнее, чем нейтрон и протон, наиболее устойчивыми ядрами очевидно были бы ядра, построенные исключительно из нейтронов. Мы не можем, понятно, заключить из нашего опытного правила, что между двумя нейтронами или двумя протонами ⁽¹⁾ совсем не существует сил, но если такие силы имеются, то они должны быть меньше, чем силы между протоном и нейтроном.

Наше правило $N = Z$ говорит дальше больше о силах между одинаковыми частицами (двумя протонами или двумя нейтронами). Если допустить, что такие силы существуют, они должны быть приблизительно одинаковы, т. е. силы между двумя нейтронами должны быть приблизительно равны силам между двумя протонами, если пренебречь электростатическим отталкиванием последних. Например, если бы притяжение между двумя протонами было больше, чем между двумя нейтронами, максимум стабильности проявлялся бы не при одинаковом числе нейтронов и протонов, а был бы смещен к относительно большему числу протонов в ядре. Точнее, если (nn) , (pp) , (np) обозначают соответственно энергию связи между двумя нейтронами, двумя протонами и одним нейтроном и одним протоном, энергия ядра, содержащего N нейтронов и Z протонов, была бы, пренебрегая единицей по сравнению с N и Z :

$$\frac{1}{2} N^2 (nn) + \frac{1}{2} Z^2 (pp) + NZ(np), \quad (14a)$$

что достигает максимума для данного атомного веса $A = N + Z$, когда

$$N - Z = (A - 2Z) = \frac{1}{2} A \frac{(nn) - (pp)}{(np) - \frac{1}{2} (nn) - \frac{1}{2} (pp)} \quad (14)$$

Экспериментальная разница $N - Z$ для большинства легких ядер не превышает 10% ядерного заряда $Z \approx \frac{1}{2} A$. Согласно (14)

⁽¹⁾ Мы имеем в виду здесь силы между двумя протонами *помимо* кулоновского отталкивания.

разность $(nn) - (pp)$ должна быть безусловно меньше, чем одна десятая $(np) - \frac{1}{2}(nn) - \frac{1}{2}(pp)$. Наиболее удовлетворительное допущение как с точки зрения симметрии, так и с точки зрения опытных данных состоит в том, что силы между двумя нейтронами и между двумя протонами точно равны, если не учитывать, понятно, кулоновской энергии между двумя протонами и считать, что между одинаковыми частицами вообще существует взаимодействие.

§ 7. Насыщение ядерных сил (Н7, М6)

Если бы каждая частица в ядре взаимодействовала с каждой другой частицей, энергия взаимодействия, а потому и энергия связи, удерживающая ядра вместе, должна была бы быть, грубо говоря, пропорциональна числу взаимодействующих пар, т. е. *квадрату* числа частиц в ядре. Если бы можно было ожидать какого-либо отклонения от этого правила, оно было бы в сторону более быстрого возрастания энергии связи с увеличением числа частиц, потому что при увеличении взаимодействия между ними, частицы соприкасались бы плотнее одна с другой, а это повело бы к увеличению взаимодействия между отдельными парами частиц и увеличению полной энергии, более быстрому чем A^2 (1).

В действительности экспериментально найдено, что массовые дефекты ядер, а потому и энергии связи, возрастают лишь линейно с возрастанием числа частиц (§ 2). Это обстоятельство можно сравнить с поведением жидкостей или твердого тела, содержащего много атомов, причем полная химическая энергия связи в основном пропорциональна существующему числу атомов.

Мы поэтому попробуем воспользоваться химической аналогией. Откуда возникает пропорциональность химической энергии связи числу атомов? Для этого есть, в основном, три причины соответственно трем возможным типам химической связи: полярной, гомополярной и Ван-дер-Ваальса (поляризационной).

Связь Ван-дер-Ваальсовского типа наиболее ясно проявляется в случае редких газов в жидком или в твердом состоянии. Между двумя атомами редкого газа существуют силы притяжения (силы Ван-дер-Ваальса), когда атомы находятся на расстояниях больших r_0 . Силы притяжения быстро спадают с расстоянием, приблизительно как r^{-7} . Для расстояния меньше r_0 действуют большие силы отталкивания, которые предохраняют атомы от взаимного проникновения друг в друга. В жидкости только близкие соседи взаимодействуют заметным образом вследствие быстрого спадания сил притяжения между атомами с увеличением расстояния между ними. Любой атом взаимодействует в результате только с маленьким числом соседей, как бы велико ни было общее число атомов. С другой стороны, силы отталкивания предохраняют от возрастания плотности, которая могла бы повести к увеличению количества атомов, взаимодействующих с каким-нибудь атомом. Таким образом, силы отталкивания,

(1) Указанные здесь условия действительно имеют место для атомных электронов. Полная энергия связи всех электронов в атоме возрастает, грубо говоря, как степень $1/3$ от числа электронов, т. е. более резко, чем Z^2 (см. например, ссылку S23).

предохраняющие от взаимного проникновения атомов, в этом случае являются главной причиной пропорциональности энергий связи числу атомов. Однако казалось бы неудовлетворительным перенести такой механизм на ядра; это допускало бы предположение о силах между элементарными частицами, т. е. протонами и нейтронами, которые были бы силами притяжения на больших расстояниях и силами отталкивания на малых расстояниях. Допущение это весьма нежелательно. (Для частиц с внутренней структурой, например, для атомов или α -частиц, допущение таких сил, конечно, ничему не противоречит, вытекая непосредственно из простого допущения о силах между элементарными частицами).

Полярная связь осуществляется в солях, например NaCl. Два неодинаковых атома (Na и Cl) притягивают друг друга силами, которые возрастают медленно с уменьшением расстояния; две одинаковые частицы отталкивают друг друга аналогичным образом. Взаимодействие этих двух сил удерживает энергию связи от квадратичного возрастания с числом частиц, несмотря на то, что существует заметное взаимодействие между достаточно удаленными друг от друга ионами. Допущение о силах отталкивания между одинаковыми частицами в ядре невозможно по соображениям, изложенным в § 10. Однако а fortiori можно предположить, что силы отталкивания равны по величине силам притяжения между нейтроном и протоном. Таким образом, аналогия с полярной связью также должна быть отброшена.

Гомополярная связь наиболее ясно представлена водородом. Между двумя водородными атомами существует сильное притяжение. Третий атом однако не присоединяется сильно к молекуле H_2 . Мы говорим, что молекула H_2 насыщена. Совокупность многих водородных атомов, например, капля жидкого водорода, обладает поэтому энергией, приблизительно равной сумме энергий водородных молекул, и поэтому пропорциональна числу атомов. В действительности, энергия связи водородной капельки несколько больше, чем энергия разделенных молекул, вследствие наличия действующих между молекулами сил Ван-дер-Ваальса, но они в свою очередь дают энергию, пропорциональную первой степени числа атомов.

Мы видим таким образом, что можно получить правильную энергию связи ядра в зависимости от числа ядерных частиц, если допустить, что силы между отдельными частицами в ядре обладают насыщением, аналогичным тому, которое существует для сил гомополярной химической связи. Непосредственно очевидно, что совокупность ядерных частиц, которая наиболее соответствует насыщенной молекуле, есть α -частица. Действительно, энергия связи α -частицы, как видно по ее массовому дефекту, равна 28 MV или 7 MV на элементарную частицу. Энергия связи ядер, обладающих наивысшими упаковочными множителями, т. е. ядер с Z около 30, равна $8\frac{1}{2}$ MV на элементарную частицу. Согласно нашей аналогии это означает, что 7 MV из этих $8\frac{1}{2}$ обусловлены „энергией связи“ молекулы He^4 и только $1\frac{1}{2}$ MV следует приписать „Ван-дер-Ваальсовым“ силам между α -частицами.

„Силы Ван-дер-Ваальса“ между частицами можно принять аналогичными силам между атомами редких газов или молекулами, т. е. притяжению на больших расстояниях, переходящему в сильное отталкивание на малых расстояниях, которое сообщает взаимную непроницаемость α -частицам. Сила этого типа

действительно была выведена Гейзенбергом (§ 31). Допущения, понятно, приводят к приблизительной пропорциональности энергии связи между α -частицами числу α -частиц в ядре.

α -частица состоит из двух нейтронов и двух протонов. Силы между нейтронами и протонами должны поэтому быть такими, чтобы насыщение наступало при наличии двух нейтронов и двух протонов и чтобы третий нейтрон или протон практически не мог присоединиться.

Согласно принципу Паули, два нейтрона и два протона могут находиться в одном квантовом состоянии относительно их пространственного движения вследствие возможности двух состояний спинов для каждой из пары частиц. Мы поэтому примем, что *протоны и нейтроны оказывают сильное взаимодействие друг на друга только в том случае, если они находятся в одном или приблизительно одном квантовом состоянии в отношении их пространственного движения*, т. е. если их волновая функция зависит приблизительно одинаковым образом от пространственных координат.

Однако мы не должны допускать, что силы существенно зависят от относительных спинов двух частиц. Если бы мы сделали такое допущение, то должны были бы принять, что протон и нейтрон сильно взаимодействуют только при параллельных спинах; тогда ядерные силы были бы насыщены уже в дейтероне (протон плюс нейтрон с параллельными спинами). В действительности энергия связи дейтерона лишь слегка превышает 2 MV, т. е. гораздо меньше 28 MV α -частицы. Это указывает, что дейтрон безусловно нельзя считать насыщенным. *Силы между протоном и нейтроном могут поэтому зависеть лишь незначительно или совсем не зависеть от относительных направлений спина двух частиц* (1).

Возвращаясь к математическому представлению взаимодействия, мы можем и дальше руководствоваться химической аналогией. Силы гомеопольярной связи — „обменные“ силы, связанные с изменением мест электронов атомов в молекуле. Из химической аналогии мы знаем, что такие силы обменного характера дают насыщение. *Поэтому мы предполагаем, что ядерные силы также имеют характер обменных сил между протоном и нейтроном*. Точно так же, как и в случае молекул, но, понятно, вследствие другого механизма, электрон (2) переходит от нейтрона к протону так, что нейтрон преобразуется в протон и обратно. Это можно

(1) Гейзенберг (H7) первоначально предположил наличие притяжения при параллельных спинах и отталкивания при антипараллельных. Согласно только что сказанному, при таком взаимодействии дейтрон оказался бы насыщенной системой. Это отметил Майорана (M6), изменив соответственно взаимодействие.

(2) Вместе с электроном должен переходить и нейтрино. Этот „переход“, понятно, не следует понимать буквально в том смысле, что электрон и нейтрино *связаны* в нейтроне и затем переходят к протону. Мы могли бы вместо этого принять, что электрон и нейтрино „образуются“ на очень короткое время — порядка $e^2/mc^3 = 10^{-24}$ сек. — и затем снова поглощаются. Подробнее см. в § 44.

рассматривать, как переход координат нейтрона в координаты протона. Таким образом „обменные“ силы обозначают, что нейтрон и протон меняются местами во время их взаимодействия. Математическая формулировка этого дана в § 11.

Так как этот параграф содержит основу всей теории ядер, мы резюмируем его. Пропорциональность энергии связи ядер числу частиц требует допущения обменных сил между ядерными частицами, сил, дающих насыщение. Высокая энергия связи α -частицы по сравнению с энергией связи дейтерона требует, чтобы эти силы не были насыщенными в случае дейтерона, а также чтобы они не зависели существенно от относительного направления спинов взаимодействующих частиц.

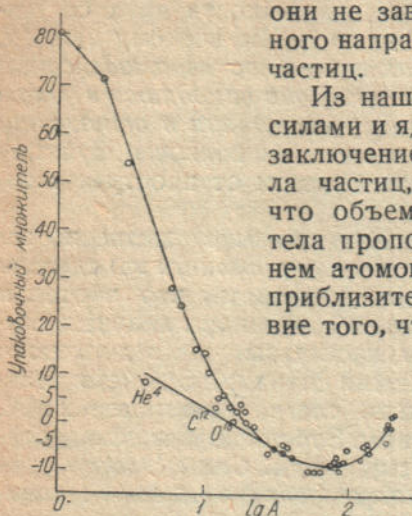
Из нашей аналогии между химическими силами и ядерными силами мы можем сделать заключение о размерах ядер как функции числа частиц, содержащихся в них. Мы знаем, что объем капельки жидкости или твердого тела пропорционален числу содержащихся в нем атомов, причем каждый атом занимает приблизительно одинаковый объем. Вследствие того, что ядра удерживаются силами, ана-

логичными химическим силам, мы можем ожидать, что объемы ядер также пропорциональны числу заключенных в ядрах частиц. Это находится в согласии с опытными данными, приведенными в § 3.

Остается сказать, что точной пропорциональности между энергией связи и числом частиц нельзя ожидать. Должны существовать колебания, зависящие от структуры ядра, а также общая тенденция к небольшому повышению энергии связи на частицу

при увеличении размера ядра. Этот эффект аналогичен поверхностному натяжению капельки жидкости. Атомы на поверхности капельки не испытывают полного притяжения, как это имеет место для находящихся в объеме атомов, и поэтому слабее участвуют в общей энергии связи. То же самое справедливо и для частиц на поверхности ядра.

Так как число частиц на поверхности в зависимости от общего числа частиц уменьшается при увеличении общего числа частиц, мы должны ожидать небольшого увеличения энергии связи на частицу при увеличении атомного веса. Это в действительности имеет место — см. фиг. 1, где показаны упаковочные множители как функция A .



Фиг. 1. Упаковочный множитель как функция атомного веса

Чтобы представить легкие и тяжелые атомы на одной диаграмме, выбрана логарифмическая шкала для оси абсцисс. Легко видеть, что среди легких ядер α -частица и ядра C^{12} , O^{16} имеют значительно меньшие упаковочные множители, чем другие ядра. (Упаковочные множители даны в десяти тысячных массовой единицы)

§ 8. Электростатическое отталкивание протонов. Устойчивость относительно α -распада (H7, W2)

Два предыдущих параграфа привели нас к заключению: 1) что энергия связи ядер приблизительно пропорциональна числу частиц в ядре, 2) что энергия связи для данного полного числа частиц максимальна, когда количество нейтронов и протонов одинаково. Это можно выразить приближенной формулой:

$$E_n = (Z + N) \varepsilon \left[1 - \alpha \frac{(N - Z)^2}{(N + Z)^2} \right], \quad (15)$$

где ε — энергия связи на частицу для ядра, содержащего одинаковое количество протонов и нейтронов, а α — постоянная, измеряющая зависимость энергии связи от „изотопического номера“ $I = N - Z$.

Принципиально α может также зависеть от полного числа частиц A . Однако этого не будет, если мы примем энергию связи пропорциональной (14а) для заданного значения A . Правда, формула (14а) была выведена в предположении, что каждая частица в ядре взаимодействует с каждой другой частицей, чего не может быть, если силы дают насыщение. С другой стороны, насыщение вызовет в первую очередь зависимость энергии связи от общего числа частиц, а не от отношений числа нейтронов и протонов. Мы поэтому принимаем (15) как некоторое предварительное выражение, оставляя более точное рассмотрение до главы V.

В наших рассуждениях мы до сих пор пренебрегали электростатическими силами между протонами. Принимая взаимное расстояние двух протонов r приблизительно равным радиусу ядра (см. § 3), т. е. около $5 \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx \frac{2e^2}{mc^2}$, мы найдем, что электростатическая потенциальная энергия равна $\frac{e^2}{r} \approx \frac{1}{2} mc^2 = \frac{1}{4} \text{ MV}$ (m — масса электрона). Мы видим, что она очень мала по сравнению со средней энергией связи на частицу, т. е. 8,5 MV (см. § 2).

Однако вследствие насыщенности специфических ядерных сил кулоновское отталкивание протонов становится важным в случае тяжелых ядер, несмотря на его незначительность для пары протонов. Кулоновская сила не дает, понятно, никакого насыщения. Поэтому полная энергия кулоновского взаимодействия равна числу пар протонов в ядре, т. е. $\frac{1}{2} Z(Z-1)$, помноженному на потенциальную энергию одной пары протонов. Последняя в среднем равна $\frac{6}{5} \frac{e^2}{R}$, где R — радиус ядра, если протоны считать распределенными однородно по всему ядру (сноска см. на стр. 24). Таким образом, полная электростатическая энергия протонов составляет:

$$E_{el} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R}, \quad (16)$$

если пренебречь 1 по сравнению с Z . Так как R пропорциональна кубическому корню из атомного веса (см. § 3 и конец § 7) и Z

пропорционально атомному весу, электростатическая энергия пропорциональна $A^{2/3}$. С другой стороны, энергия связи E_n , вызванная специфическими ядерными силами, пропорциональна только первой степени атомного веса A . Таким образом, относительная роль электростатических сил растет с увеличением атомного веса, приблизительно как $A^{1/3}$.

Следствие этого проявляется в двух отношениях. Во-первых, для тяжелых ядер мы получаем более резкое отклонение от закона $N=Z$ в том смысле, что устойчивые ядра содержат меньше протонов, чем нейтронов, потому что замена протона нейтроном уменьшает электростатическое отталкивание и полную энергию ядра. Этот эффект хорошо известен из опыта — отношение $\frac{N}{Z}$ т. е. отношение числа нейтронов к числу протонов, увеличивается от единицы для легких ядер постепенно до 1,6 для урана.

Во-вторых, энергия связи на одну частицу уменьшается с увеличением атомного веса за счет электростатических сил. Этот эффект действует в направлении обратном „поверхностному натяжению“, рассмотренному в конце § 7. Поверхностное натяжение более важно для малых ядер; поэтому мы получаем уменьшение упаковочного множителя с увеличением атомного веса в этой области. С другой стороны, для тяжелых ядер становится более важным электростатическое отталкивание между протонами, и упаковочный множитель к концу периодической системы снова возрастает. Это действительно наблюдается на опыте (см. фиг. 1). Для очень тяжелых ядер это увеличение становится настолько существенным, что ядра делаются неустойчивыми относительно α -распада.

Полная энергия связи ядра равна разности энергии связи, даваемой (15), и энергии кулоновского отталкивания (16). Перепишем эту последнюю в более удобной форме, положив

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (17)$$

где r_0 может быть определено из известных радиусов радиоактивных ядер. Средняя величина этих радиусов, определенная из

(1) Если $v = \frac{4\pi R^3}{3}$ есть объем ядра, $\frac{1}{v}$ равно плотности заряда, обусловленного равномерно распределенным по объему протоном. Электростатический потенциал, обусловленный этой плотностью заряда, на расстоянии r от центра ядра, согласно обычной электростатике, равен:

$$V(r) = e \frac{4\pi}{v} \left(\int_0^r \frac{\rho^2 d\rho}{r} + \int_r^R \frac{\rho^2 d\rho}{\rho} \right) = \frac{4\pi e}{v} \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{6} r^2 \right).$$

Энергия второго протона, равномерно распределенного по ядру, в поле $V(r)$ равна:

$$w = \frac{e}{v} \int_0^R 4\pi r^2 dr V(r) = \left(\frac{4\pi e}{v} \right)^2 \left(\frac{1}{2} R^2 \frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} R^5 \right) = \left(\frac{3e}{R^3} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} R^5 = \frac{6}{5} \frac{e^2}{R}.$$

продолжительности жизни испускающих α -частицы ядер, равна $9 \cdot 10^{-13}$ см. Средний атомный вес ядер равен 222, поэтому

$$r_0 = 9 \cdot 10^{-13} \cdot 222^{-1/3} = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (17a)$$

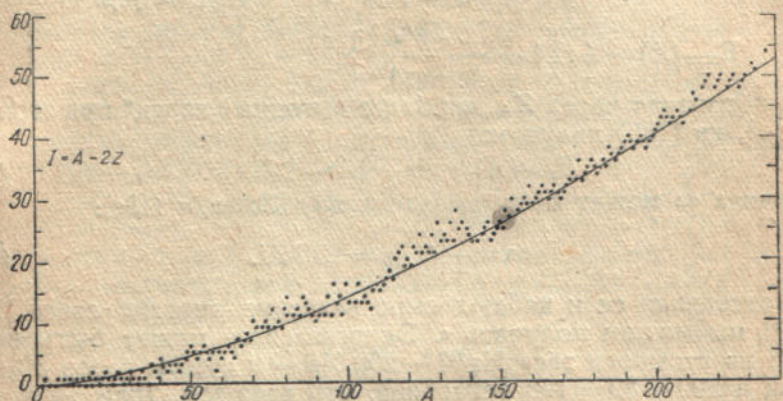
и

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{c^2}{r_0} = 0,60 \cdot mc^2 \cdot \frac{e^2}{mc^2} \cdot \frac{1}{r_0} = 0,307 \frac{2,80 \cdot 10^{-13}}{1,48 \cdot 10^{-13}} \text{ MV} = 0,58 \text{ MV} \quad (17b)$$

сокращенно мы обозначим это выражение буквой γ .

Подставляя (17) и (17b) в (15) и (16), мы получим для энергии связи:

$$E = A\epsilon - \alpha\epsilon \frac{(A-2Z)^2}{A} - \gamma A^{-1/3} Z^2 \quad (18)$$



Фиг. 2. Существующие изотопы (изобары не указаны)

По оси абсцисс отложено массовое число, по оси ординат — изотопический номер. Каждая точка представляет известный изотоп (см. табл. 1). Линией указано эмпирическое соотношение между средним изотопическим номером и атомным весом. Хорошо видны флюктуации изотопического номера вокруг сплошной линии

Максимум этого выражения для заданного A достигается при

$$2\alpha\epsilon \frac{(A-2Z)}{A} - \gamma A^{-1/3} Z = 0$$

или

$$\frac{I}{Z} = \frac{N-Z}{Z} = \frac{A-2Z}{Z} = \frac{\gamma}{2\alpha\epsilon} A^{2/3}; \quad (18a)$$

$$\frac{I}{A} = \frac{\gamma A^{2/3}}{4\alpha\epsilon + \gamma A^{2/3}} \quad (18b)$$

Отношение изотопического номера $I = N - Z$ к заряду ядра Z , таким образом, пропорционально степени две трети от атомного веса. Это соотношение иллюстрируется фиг. 2, где $(A - 2Z)$ отложены в зависимости от A для всех известных устойчивых ядер. Из фиг. 2 видно, что точки лежат вблизи кривой по обе стороны от нее⁽¹⁾. Кривая представляет соотношение (18b), причем

$$\frac{\gamma}{2\alpha\epsilon} = 0,0146. \quad (18c)$$

(1) Относительно периодических отклонений от этой линии см. § 34.

Величина (18с) выбрана так, что линия проходит через Hg^{200} , для которой $A = 200$, $Z = 80$ и поэтому $\frac{A-2Z}{Z} = 0,50$ и

$$\frac{\gamma}{2\alpha\varepsilon} = \frac{0,50}{(200)^{2/3}} = 0,0146. \quad (18d)$$

Теперь мы можем вычислить полную энергию связи ядра, заряд которого „наиболее выгоден“ при данной массе ядра. Чтобы сделать это, подставим значение (18b) для $\left(\frac{A-2Z}{A}\right)$ в (18) и найдем:

$$\left. \begin{aligned} E_{\max}(A) &= A\varepsilon - A\alpha\varepsilon \left[\frac{\gamma A^{2/3}}{4\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3}} \right]^2 - \gamma A^{2/3} \left[\frac{2\alpha\varepsilon}{4\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3}} \right]^2 \\ E_{\max}(A) &= A\varepsilon \left[1 - \frac{\alpha\gamma A^{2/3}}{4\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

или, обозначая через Z_A „наиболее выгодный заряд“ при атомном весе A , из (18b) получим:

$$E_{\max}(A) = A\varepsilon - (A - 2Z_A)\alpha\varepsilon. \quad (19a)$$

Величина $\alpha\varepsilon$ может быть выведена из (17b) или (18с):

$$\alpha\varepsilon = \frac{0,58}{2 \cdot 0,0146} = 20 \text{ MV}. \quad (19b)$$

Подставляя ее и наблюдаемое значение энергии связи Hg^{200} в (19), мы можем получить ε . Энергия связи может быть вычислена из атомного веса $\text{Hg}^{200} = 200,016$ — и суммы весов 80 протонов и $200 - 80 = 120$ нейтронов, что дает (см. 75а):

$$\begin{aligned} E(\text{Hg}^{200}) &= 120 \cdot 1,00846 + 80 \cdot 1,00807 - 200,016 = 1,645 \text{ [масс. ед.} \\ &= 931 \cdot 1,645 \text{ MV} = 1530 \text{ MV}, \end{aligned} \quad (19c)$$

поэтому из (19a) и (19b)

$$\varepsilon = \frac{1530 + 40 \cdot 20}{200} = 11,6_5 \text{ MV}. \quad (19d)$$

Эта величина значительно больше, чем энергия связи на частицу у ядер средних размеров (8,5 MV). Причина состоит в том, что действительная энергия связи уменьшается вследствие поверхностного натяжения и электростатического отталкивания протонов и уже для ядер средних размеров оба эти фактора достаточны для того, чтобы изменить грубо приближенную величину энергии связи, которая была бы равной 11,6 MV, больше чем на 25%. Для ртути наблюдаемая энергия связи на частицу составляет только $\frac{1530}{200} = 7,6_5 \text{ MV}$, что отличается на 35% от энергии связи, которая соответствовала бы отсутствию электростатических сил. Таким образом, электростатические силы для ртути составляют 35% специфических ядерных сил.

Из (19b) и (19с) мы находим кроме того:

$$\alpha = \frac{20}{11,6_5} = 1,72,$$

что вполне приемлемо (см. § 30, ур. 185).

Наиболее интересный вопрос, на который можно приближенно ответить при помощи наших формул, есть вопрос о вероятной энергии α -частиц, испускаемых радиоактивными атомами. Мы можем, понятно, дать лишь „среднее“ значение этой энергии, плавно меняющееся с изменением атомного веса, в действительности же эта энергия меняется неравномерно от одного до другого случая α -распада. Эти изменения подлежат рассмотрению более точной теории. Предположим, что ядро, испускающее α -частицы, обладает „наиболее выгодным“ зарядом при своем атомном весе. Его энергия при этом определяется (19а). Ядро, получающееся после испускания α -частицы должно обладать слегка отличным зарядом от наиболее выгодного заряда при своем весе (меньшим). Но так как энергия связи для данного A имеет максимум при $Z = Z_A$, она меняется лишь квадратично с разностью $Z - Z_A$. Таким образом, мы можем принять, что (19а) весьма близка к истине для получающегося после α -распада ядра. Поэтому:

(1) энергия связи ядра, испускающего α -частицу (атомный вес A , заряд ядра Z_A):

$$E_1 = A\varepsilon - (A - 2Z_A)\alpha\varepsilon;$$

(2) энергия связи ядра, получающегося после α -распада (атомный вес $A - 4$, заряд ядра приблизительно Z_{A-4}):

$$\begin{aligned} E_2 &= (A - 4)\varepsilon - (A - 4 - 2Z_{A-4})\alpha\varepsilon = \\ &= E_1 - 4\varepsilon + 4\alpha\varepsilon \frac{d}{dA}(A - 2Z_A) = \\ &= E_1 - 4\varepsilon + 4\alpha\varepsilon \gamma A^{2/3} \frac{20}{3} \frac{\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3}}{(4\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3})^2}; \end{aligned} \quad (20a)$$

(3) энергия связи α -частицы:

$$E_3 = 4\varepsilon',$$

где

$$\varepsilon' = 6,9 \text{ MV.}$$

Поэтому энергия испускаемой α -частицы должна быть равной:

$$E_\alpha = E_2 + E_3 - E_1 = -4(\varepsilon - \varepsilon') + 4\alpha\varepsilon \gamma A^{2/3} \frac{20}{3} \frac{\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3}}{(4\alpha\varepsilon + \gamma A^{2/3})^2}. \quad (20)$$

Для $A = 222$ (радон; этот атомный вес соответствует приблизительно среднему для всех радиоактивных элементов) мы имеем при значениях (17b), (19d), (19b), (20a) для γ , α , ε , ε' :

$$E_\alpha = -4 \cdot 4,7_\varepsilon + 80 \cdot 0,58 \cdot 222^{2/3} \frac{133 + 0,58 \cdot 222^{2/3}}{(80 + 0,58 \cdot 222^{2/3})^2} = 6,6 \text{ MV.} \quad (20b)$$

Эта величина очень близка к средней, но несколько превышает среднюю кинетическую энергию испускаемых радиоактивными веществами α -частиц. Поверхностный эффект, который будет рассмотрен в § 29 и § 30, уменьшает теоретическое значение (20b) до 3,8 MV.

Из (20) очевидно, что α -распад, вообще говоря, возможен только, если атомный вес превышает некоторое критическое значение A_0 , которое определяется из $E_\alpha(A) = 0$, или

$$\frac{x\left(\frac{5}{3} + x\right)}{(1+x)^2} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{ae} = \frac{4,75}{20} = 0,275$$

при $x = \gamma \frac{A_0^{2/3}}{4ae}$. Решение равно: $x = 0,176$, или

$$A_0 = 119. \quad (20c)$$

Таким образом, ядра с атомным весом, превышающим 120, должны были бы в среднем быть неустойчивыми относительно α -распада. „В среднем“ обозначает, что энергия связи α -частиц в ядре с атомным весом приблизительно 120 должна быть положительной примерно в таком же количестве случаев, в каком она должна быть отрицательной. Предел устойчивости слегка смещается к более тяжелым атомным весам, если принять в расчет „поверхностное натяжение“ (§ 30), но только до 147. Почему же в действительности α -распад найден только для гораздо больших атомных весов (наиболее низкий атомный вес $A = 210$ — вес полония)? Ответ состоит в том, что продолжительность жизни испускающих α -частицы ядер становится исключительно большой при уменьшении кинетической энергии испускаемых α -частиц (гл. IX). Таким образом ядра практически устойчивы относительно α -распада, если энергия распада не очень велика. На самом деле, мы не знаем ни одного случая распада с вылетом α -частиц, обладающих энергией меньше 2 МВ.

Этим объясняется, почему в действительности заметную α -радиоактивность дают только ядра с весом больше 200. Исключение представляет изотоп самария с атомным весом около 140; в этом случае мы имеем, повидимому, очень большое отклонение энергии связи от средней энергии связи, существующей в области атомных весов около самария.

§ 9. Дейтерон и α -частица. Вид потенциальной функции

Экспериментально известно, что массовый дефект α -частицы приблизительно в 13 раз больше, чем массовый дефект дейтерона; он равен для α -частицы 27,7 МВ и 2,14 МВ для дейтерона. С другой стороны, в § 6 мы доказали, что силы, действующие между одинаковыми частицами, если такие силы вообще существуют, должны быть меньше сил между протоном и нейтроном. (В § 21 мы покажем, что отношение этих двух видов сил приблизительно равно 2:3). Таким образом, из простых представлений мы должны были бы ожидать, что энергия связи α -частицы может быть только в 4 раза больше, чем энергия связи дейтерона, и никак не может превышать энергию связи дейтерона больше, чем в 6 раз. Действительно, в дейтероне мы имеем одну пару взаимодействующих частиц, в α -частице каждый из

двух нейтронов взаимодействует с каждым из двух протонов, что дает четырехкратное взаимодействие дейтерона.

Решение этого вопроса было дано Вигнером (W12). Следует допустить, что силы между нейтроном и протоном очень велики, когда две частицы находятся близко одна от другой, но весьма быстро спадают при расстоянии, превышающем некоторую малую величину a . Мы допускаем, таким образом, наличие больших сил, действующих на малых расстояниях.

Чтобы полностью использовать действующие на малых расстояниях силы, ядерные частицы должны находиться на малых расстояниях друг от друга, точнее, они должны быть внутри области действия сил. Если их волновая функция лежит в этой области, ее длина волны должна быть порядка области действия сил, т. е. очень мала. Следовательно, момент и кинетическая энергия движения частиц должны быть тем больше, чем меньше область действия сил. Кинетическая энергия частиц дейтерона может таким путем сделаться даже больше потенциальной энергии на малых расстояниях. Если это так, то две частицы не смогут уместиться в области действия сил между ними; в действительности, частицы будут двигаться по большему пространству; таким путем их кинетическая энергия может быть снижена. Но когда это имеет место, время, в течение которого частицы достаточно близки, чтобы испытывать большое притяжение, также мало, и таким образом энергия связи может сделаться очень малой по сравнению с потенциальной энергией частиц.

Если мы возьмем α -частицу, для нее силы притяжения могут в четыре или пять раз превышать силы, существующие в дейтероне, в то время как число частиц лишь в два раза больше, чем число частиц в дейтероне. Таким образом, в этом случае силы притяжения могут оказаться достаточными, чтобы преодолеть кинетическую энергию и заставить частицы находиться в области действия сил между ними. При этом большое взаимодействие может быть использовано гораздо полнее, чем в случае дейтерона, и энергия связи может оказаться одного порядка с потенциальной энергией.

Это показывает, что при глубокой и узкой потенциальной яме, представляющей потенциальную энергию между протоном и нейтроном, энергия связи (массовый дефект) α -частицы может оказаться гораздо больше энергии связи дейтерона. Томас (T2) в действительности показал, что отношение массовых дефектов H^3 и H^2 становится бесконечно большим, если область действия сил сводится к нулю, и в то же время величина потенциальной энергии увеличивается так, что она удовлетворяет наблюдаемой энергии связи дейтерона (§ 19). Если энергия связи H^3 стремится к бесконечности, то то же, безусловно, имеет место и для α -частицы. Таким образом, вычисление Томаса показывает, что для отношения массового дефекта α -частицы и дейтерона можно получить любую величину путем соответствующего выбора области действия сил.

Действительное определение области действия сил из данных массовых дефектов, понятно, требует решения уравнения Шредингера для α -частицы и дейтерона. При этом должна быть принята соответствующая форма энергии взаимодействия между нейтроном и протоном в зависимости от расстояния; в этой зависимости два параметра, определяющие ширину и глубину потенциальной ямы, остаются неопределенными (протяженность силы и ее величина). Тогда уравнения Шредингера для H^2 и He^4 могут быть решены при этой потенциальной энергии. Первое уравнение — уравнение дейтерона — легко решить точно (гл. III). Уравнение для α -частицы может быть решено приближенными методами, например, методом Ритца, основанным на вариационном принципе. К сожалению, этот метод дает очень медленную сходимость, так что получающиеся при нем результаты не особенно точны, несмотря на большую работу, затрачиваемую при решении задачи (F 2, F 3). Из вычислений область действия сил получается равной приблизительно $2 \cdot 10^{-13}$ см, т. е. равной радиусу шара с объемом, равным объему, приходящемуся на одну частицу в тяжелых ядрах, и значительно меньшему, чем радиус дейтерона $4,36 \cdot 10^{-13}$ (§ 12). Детали вычислений будут даны в гл. IV.

Определение аналитической формы зависимости ядерных сил от расстояния между частицами в настоящее время совсем безнадежно. Любая быстро спадающая функция, например e^{-ar^2} , e^{-br} , прямоугольная потенциальная яма или более сложная функция, обладающая таким же поведением, может удовлетворить экспериментальным данным по той же причине, что особенно точного решения вообще не может быть получено. Было предположено (см. § 44), что потенциальная энергия должна быть пропорциональной на больших расстояниях некоторой высокой степени r и должна быть приблизительно постоянной для малых r . В настоящее время потенциальная энергия может быть представлена любой функцией, наиболее удобной для решения уравнения Шредингера, причем ошибка получается от этого меньше, чем ошибка от применения приближенных методов решения уравнения.

§ 10. Силы, действующие между одинаковыми частицами.

Четные и нечетные изотопы (Y1)

Рассуждения, приведенные в §§ 6—8, дают общие указания о зависимости энергии связи ядер от атомного веса и заряда. Экспериментальные данные об этой зависимости позволяют определить некоторые постоянные, входящие в принимаемое выражение для энергии связи. До сих пор однако мы не дали никаких указаний относительно распределения известных изотопов.

Существует одна замечательная деталь, которая сразу бросается в глаза при взгляде на таблицу изотопов (табл. 1): известно 154 изотопа⁽¹⁾ с четным зарядом ядер и четным атомным

(1) Вещества, распадающиеся с испусканием β -частиц, нами исключены. Число 148 включает 16 ядер, распадающихся с вылетом α -частиц.

весом, и только 4 изотопа с нечетным зарядом ядер и четным весом, причем все последние имеют атомный вес меньший 14. В остальной части периодической системы от $A=14$ до 238 нет ни одного устойчивого изотопа с нечетным зарядом и четным весом. Изотопы с нечетным весом занимают, если говорить о их числе, промежуточное положение. Таких изотопов, хорошо установленных, известно 106, причем 55 из них обладают четным зарядом ядра и 52 — нечетным (известно также еще 7 ядер, испускающих α -частицы и обладающих нечетным атомным весом).

В чем причина резкого различия между ядрами с четным весом и четным зарядом и ядрами с четным весом и нечетным зарядом? Чтобы объяснить это различие, т. е. построить теорию устойчивости ядер, нужно знать условия, необходимые для устойчивости. Если мы приняли бы необходимое условие, что удаление какого-либо нейтрона или протона из ядра требует энергии, то практически любая пара значений A, Z привела бы к устойчивому ядру. Более жестко условие устойчивости относительно α -распада (см. § 9), но и оно допускает широкое колебание зарядов ядра при данном атомном весе. Наиболее важным условием устойчивости является условие устойчивости относительно β -распада, т. е. относительно испускания или поглощения электронов.

Испускание электронов ядром приводит к новому ядру, массовое число которого равно массовому числу начального ядра и заряд которого на единицу выше. Энергетически β -распад может иметь место, если энергия исходного ядра выше, чем энергия получающегося ядра плюс mc^2 , где m — масса электрона, другими словами, если точный атомный вес исходного ядра выше атомного веса ядра, получающегося при β -распаде (см. § 2). При формулировке этого условия масса нейтрино предположена равной нулю (см. § 39). Экспериментальные данные относительно β -распада, повидимому, показывают, что когда β -распад энергетически возможен, распад происходит практически всегда за короткое время, колеблющееся от долей секунды до нескольких лет. Имеющиеся несколько исключений, в первую очередь радиоактивные калий и рубидий, которые имеют времена жизни порядка 10^8 лет, могут быть объяснены без особых трудностей (§ 43). Мы примем поэтому, что вообще любое энергетически нестабильное относительно β -распада вещество должно распадаться за весьма короткое время по сравнению со временем жизни земли, и поэтому такие вещества не должны существовать среди обнаруженных в природе изотопов. (Объяснение исключений и условий для их наличия даны в § 43).

С точки зрения теории ядер, ядро, дающее β -частицы, отличается от получающегося ядра тем, что оно содержит на 1 протон меньше и на 1 нейтрон больше последнего. Таким образом, мы получаем правило: *ядро не стабильно относительно β -распада, если замена нейтрона в ядре протоном уменьшает энергию соответствующего атома.*

Аналогичное правило справедливо для замены протона нейтроном. Эта замена имеет место, когда ядро поглощает электрон, например, один из орбитальных электронов своего атома. То, что такое поглощение внешнего электрона ядром возможно практически, с достоверностью вытекает из наличия большого числа ядер, распадающихся с испусканием позитронов. Испускание позитронов, согласно теории Дирака, можно рассматривать как поглощение электрона, находившегося в состоянии с отрицательной энергией. Если такой процесс возможен, нет никаких оснований считать, что электрон с положительной энергией не может быть захвачен ядром. Энергетическим условием для такого захвата, очевидно, является превышение энергий поглощающего ядра плюс энергия mc^2 поглощаемого электрона над энергией ядра, получающегося после поглощения. Таким образом, *ядро не стабильно относительно поглощения электронов, если атомный вес уменьшается при замене протона в ядре нейтроном.*

Для полной устойчивости ядра оно должно поэтому быть легче, чем оба соседних изобара, т. е. чем оба ядра с тем же массовым числом, заряды которых на одну единицу больше или меньше заряда данного ядра.

Таким образом, мы заключаем, что *энергия любого ядра с четным атомным весом и нечетным зарядом больше, чем энергия по меньшей мере одного из его двух соседних изобар, которые имели бы четную массу и четный заряд.* В результате доказательства этой теоремы непосредственно следовало бы, что все устойчивые ядра с четной массой должны иметь четный заряд, что согласуется с опытом. (Конечно следует также доказать, почему четыре легких ядра — H^2 , Li^6 , B^{10} и N^{14} являются исключениями из этого правила).

Ядра, имеющие четную массу и четный заряд, очевидно, содержат четные числа нейтронов и протонов. Для четной массы и нечетного заряда должно быть нечетное число нейтронов и нечетное число протонов. Таким образом, наше эмпирическое правило можно выразить, сказав, что четные числа нейтронов и протонов приводят к более низкой полной энергии ядра, чем нечетные числа, другими словами, что пара нейтронов или протонов имеет то же значение в физике ядра, что и замкнутые оболочки в атомной физике, так как она приводит к особенно низкому значению энергии системы. Что два нейтрона (или протона) могут образовать „замкнутую оболочку“, весьма вероятно по той причине, что две частицы с противоположным спином могут находиться в одном квантовом состоянии относительно их орбитального движения. Третий нейтрон должен был бы расположиться на более высоком квантовом уровне и поэтому быть слабее связан. Правда, это правило существенно отличается от правила атомной физики, где существуют группы из $2(2l+1)$ электронов с тем же самым n и l (главное и азимитальное квантовые числа), имеющих в основном одну энергию. Разница, повидимому, обусловлена тем, что в атоме су-

существует практически центральное поле, которого нет в ядрах. Этот вопрос будет рассмотрен подробнее в главе VI, где мы увидим также, что существуют некоторые данные для периодичности ядер, с периодами большими, чем два, больше похожими на периоды электронных оболочек в атомах.

Пока мы просто допустим, что каждое устойчивое состояние орбитального движения протона или нейтрона имеет свою собственную энергию, отличную от энергии всех других состояний, так что два нейтрона или два протона образуют „замкнутую оболочку“. При этом допущении очень легко доказать, что ни одно из ядер, содержащих нечетное число протонов и нейтронов, не может быть устойчивым, за исключением ядер, расположенных в самом начале периодической системы.

Пусть какое-нибудь ядро обладает четным атомным весом A и четным зарядом ядра Z . Назовем это ядро стандартным ядром; для этой цели можно было бы выбрать, например, ядро Ni^{60} . В поле этого стандартного ядра должны иметь место определенные энергетические уровни для нейтронов и другие уровни для протонов. Под словом „уровень“ или „состояние“ мы здесь понимаем только состояние орбитального движения, так что в каждом состоянии могут находиться две частицы $\frac{1}{2} Z$ наиболее низких состояний протонов и $\frac{1}{2} N$ наиболее низких

состояний нейтронов в стандартном ядре заняты. Из пустых состояний наиболее низкое состояние протонов или наиболее низкое состояние нейтронов должны лежать ниже друг друга. Если мы строим ядро атомного веса $A+1$, это ядро должно иметь $Z+1$ протонов и N нейтронов, если состояние протонов наиболее низкое из двух, или Z протонов и $N+1$ нейтронов, если ниже лежит состояние нейтронов. Оба случая должны проявляться примерно с одинаковой вероятностью; поэтому мы должны ожидать, что при нечетных атомных весах ядра с четным зарядом должны встречаться приблизительно также часто, как ядра с нечетным зарядом. Это в действительности имеет место; вышеприведенные числа указывали на 52 ядра с нечетным весом и нечетным зарядом и 55 устойчивых ядер с нечетным весом и четным зарядом. В случае нашего „стандартного“ ядра Ni^{60} добавление нейтрона приводит к устойчивому ядру Ni^{61} . Прибавим теперь вторую частицу к нашему стандартному ядру. Если первое незанятое состояние нейтрона стандартного ядра лежит ниже первого незанятого уровня протона, наиболее устойчивое ядро веса $A+2$ получится путем добавления двух нейтронов к стандартному ядру, причем заряд останется равным Z . Добавление нейтрона и протона приведет к менее устойчивому ядру с зарядом $Z+1$, потому что уровень протона лежит выше. Добавление двух протонов даст ядро с зарядом $Z+2$, которое будет еще менее стабильным. Обратное, если уровень протона наиболее низок из двух уровней, наиболее устойчивое ядро

можно получить добавлением двух протонов, менее устойчивое добавлением протона и нейтрона и наименее устойчивое добавлением двух нейтронов. Таким образом, *в обоих случаях наиболее устойчивое ядро с атомным весом $A+2$ имеет четный заряд ядра*: в одном случае при неизменном заряде Z „стандартного“ ядра, в другом случае — при заряде $Z+2$. Ни в одном случае ядро с зарядом $Z+1$ не будет наиболее устойчивым. (В нашем случае Ni^{60} мы знаем из первой ступени добавления одной частицы, что уровень нейтрона лежит ниже. Таким образом, мы ожидаем, что устойчивым ядром с атомным весом 62 будет снова никель, что в действительности и имеет место).

Мы доказали, таким образом, нашу теорему путем простого рассмотрения уровней нейтронов и протонов. Мы знаем однако, что во многих случаях существуют *изобары*, т. е. несколько устойчивых ядер с одинаковым атомным весом, заряд которых отличается обычно на 2 единицы. Это обозначает, что, исходя из нашего „стандартного ядра“ с весом A и зарядом Z , мы можем получить стабильные ядра добавлением двух нейтронов или добавлением двух протонов, причем добавление одного протона и одного нейтрона никогда не приводит к стабильным ядрам. С точки зрения наших предыдущих рассуждений это необъяснимо, так как раньше мы пришли к заключению, что энергия ядра с атомным весом $A+2$ и зарядом $Z+1$ должна лежать всегда между энергиями его изобар с зарядами Z и $Z+2$.

В действительности, оба ядра Z и $Z+2$ могут иметь энергии ниже энергии промежуточного ядра $Z+1$, и это требует специального объяснения. Мы должны, очевидно, допустить, что *существует некоторое притяжение между двумя нейтронами или двумя протонами*, добавляемыми к „стандартному“ ядру. При таком притяжении энергии ядер Z и $Z+2$ оказываются ниже значения, которые можно было бы ожидать на основании предыдущих рассуждений, не учитывающих возможной связи добавляемых частиц друг с другом. Притяжение между частицами одинакового рода допускает поэтому существование двух стабильных изобар с четным зарядом, отличающимся на две единицы, причем промежуточное ядро с нечетным зарядом не стабильно.

Может возникнуть возражение, что нейтрон и протон, добавляемые к стандартному ядру для получения ядра $(A+2, Z+1)$, также могут взаимодействовать. Действительно, мы даже показали (§ 6), что взаимодействие между нейтроном и протоном должно быть большим, чем взаимодействие между парой нейтронов и парой протонов. Это означало бы, что энергия ядра $(A+2, Z+1)$ должна быть меньшей, чем энергия ядер $(A+2, Z)$ или $(A+2, Z+2)$. По этой причине мы должны были бы заключить, что *нечетный заряд и четный вес $(A+2, Z+1)$ приводят к устойчивым ядрам, а четный заряд и четный вес $(A+2, Z)$ и $(A+2, Z+2)$ приводят к неустойчивым, что противоречит опыту.*

Несостоятельность этого соображения заключается в том, что нейтрон и протон сильно взаимодействуют друг с другом только в том случае, когда они находятся приблизительно в одном квантовом состоянии, так как силы между ними являются „силами насыщения“ (§ 7). Мы знаем однако, что первое пустое нейтронное состояние в поле нашего стандартного ядра отлично от первого пустого состояния протона. Если мы добавим нейтрон и протон, они не будут поэтому испытывать практически никакого взаимодействия. С другой стороны, два добавочных нейтрона (или два протона) должны двигаться по той же орбите и испытывать полное взаимодействие, независимо от наших допущений относительно сил между одинаковыми частицами, т. е. независимо от того, действуют ли они только между частицами в одном квантовом состоянии или между любой парой легких частиц (см. § 24). Таким образом мы объяснили правило, что все стабильные изотопы с четным весом имеют четный заряд, а также объяснили наличие изобар этого типа.

Наша аргументация показывает однако также причины возможных исключений из общего правила. Если добавленный протон и нейтрон будут двигаться в том же квантовом состоянии, между ними будет существовать сильное взаимодействие и поэтому атом с четным весом и *нечетным зарядом* может оказаться устойчивым. Условием для этого, очевидно, является одинаковое количество занятых мест протонов и нейтронов в стандартном ядре, другими словами, стандартное ядро должно содержать в точности одинаковое число нейтронов и протонов. Это тогда справедливо также и для ядра, которое мы получаем добавлением нейтрона и протона к стандартному ядру. Поэтому *ядра с четным весом и нечетным зарядом будут устойчивы только, если они содержат одинаковое количество протонов и нейтронов*. Это справедливо для всех четырех стабильных ядер, рассматриваемого типа, а именно: H^2 , Li^6 , B^{10} , N^{14} . Все это очень легкие ядра — они легче всех других возможных ядер такого типа. Только для легких ядер число нейтронов может быть точно равным числу протонов. Как только ядро становится тяжелее, начинает иметь существенное значение кулоновское отталкивание между протонами и число нейтронов становится больше числа протонов. Существование ядер с четным весом и нечетным зарядом становится при этом невозможным. Это справедливо уже для атомного веса 18, для которого к устойчивому ядру приводит заряд ядра 8, а не 9 (O^{18} , но не F^{18}).

Наглядным способом резюмирования результатов этого параграфа является нанесение энергии изобар (стабильных и нестабильных) как функции их заряда ядра. Если мы сделаем это для нечетных атомных весов, мы получим плавную кривую. Ядра, наиболее близкие к минимуму этой кривой, будут устойчивыми при заданном атомном весе. Наличие устойчивых изобар с четным или нечетным зарядом одинаково вероятно.

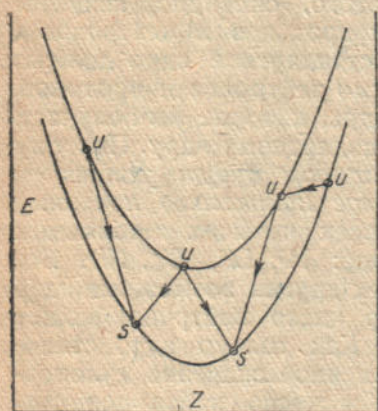
Для четного атомного веса, с другой стороны, мы получим две отдельные кривые для ядер с нечетным и четным зарядами. Мы можем принять, что каждая из этих кривых монотонна. На нижней кривой (четный заряд) мы всегда найдем не меньше одного устойчивого ядра, т. е. ядра, обладающего меньшей энергией, чем оба его соседа (фиг. 3).

Можно попытаться из статистики изобар определить величину сил, действующих между одинаковыми частицами. Правдоподобно принять, что две кривые, представляющие энергии изобар с четным и нечетным зарядом, являются параболами, смещенными в вертикальном направлении на величину δ . Минимум этих парабол будет лежать вообще при некотором дробном значении заряда ядра Z_A . Обозначим через β разность между Z_A и наиболее близким нечетным числом; β , очевидно, может быть любым числом между -1 и $+1$. Кривизна параболы может быть определена из нашей общей формулы (18) для энергий ядер:

$$k_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} = \frac{4\alpha e + \gamma A^{2/3}}{A}. \quad (21)$$

Мы имеем при этом для энергий ядер с весом A и зарядом Z :

$$\begin{cases} E = E(Z_A) + k_1(Z - Z_A)^2, & \text{если } Z \text{ четно;} \\ E = E(Z_A) + \delta + k_1(Z - Z_A)^2; & \text{если } Z \text{ нечетно;} \end{cases} \quad (21a)$$



Фиг. 3. Схема энергии изобар с четным атомным весом в зависимости от заряда ядра Z

Верхняя парабола содержит ядра с нечетным зарядом, нижняя с четным зарядом. Стрелками обозначены возможные β -переходы. Два четных ядра S устойчивы, все другие — неустойчивы

например, для нечетных ядер, заряд которых наиболее близок к Z_A :

$$E_{\text{нечетн}} = E(Z_A) + \delta + k_1\beta^2; \quad (21b)$$

для двух четных ядер, наиболее близких к Z_A :

$$\begin{cases} E_{\text{четн}}^+ = E(Z_A) + k_1(1 + \beta)^2; \\ E_{\text{четн}}^- = E(Z_A) + k_1(1 - \beta)^2. \end{cases} \quad (21c)$$

Условия, что оба четных ядра устойчивы, поэтому запишутся:

$$\delta > k_1(1 + 2\beta)$$

и
$$\delta > k_1(1 - 2\beta),$$

или оба условия в одном:

$$\delta > k_1(1 + 2|\beta|). \quad (21d)$$

Чтобы найти смысл δ , будем иметь в виду, что энергия „нечетных“ ядер должна лежать в промежутке между энергиями четных ядер, если между одинаковыми

частицами не действует никаких сил. В этом случае было бы:

$$E'_{\text{нечетн}} = E(Z_A) + k_1(1 + \beta^2),$$

так что в отсутствии сил между одинаковыми частицами $\delta' = k_1$.

Поэтому действие сил между одинаковыми частицами задается:

$$\delta'' = \delta - \delta' = \delta - k_1 \quad (21e)$$

и, в согласии с (21d), мы имеем два устойчивых изобара, если

$$\delta'' > 2k_1 |\beta| \quad (21f)$$

и только один устойчивый элемент с атомным весом A , если

$$\delta'' < 2k_1 |\beta|. \quad (21g)$$

Чтобы определить критическое значение $|\beta|$, выше которого существование изобар становится невозможным, мы воспользуемся статистикой известных изотопов с атомным весом между 110 и 140. Причиной выбора этой области является то, что элементы с большим атомным весом мало изучены в отношении их изотопического строения; этими элементами являются редкие земли. Среди элементов же с меньшим весом найдено слишком мало изобар. Из 15 четных массовых чисел от 112 до 140 — десять заняты двумя изобарами⁽¹⁾, пять имеют по одному ядру. Таким образом мы заключаем, что

$$\beta_0 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

есть критическая величина $|\beta|$; так что при $|\beta| > \beta_0$ устойчиво только одно ядро веса A , в то время как при $|\beta| < \beta_0$ существуют две устойчивые изобары.

Подставляя $A = 125$ в (21), имеем (см. 19b):

$$k_1 = \frac{4 \cdot 20 + 0,58 \cdot 25}{125} = \frac{80 + 15}{125} = 0,76 \text{ MV}$$

и

$$\delta'' = 2\beta_0 k_1 = 1,01 \text{ MV}. \quad (22)$$

Из формулы (21f) можно заключить, что существование изобар тем более вероятно, чем меньше k_1 . Согласно (21), k_1 уменьшается с увеличением атомного веса. Таким образом, можно ожидать тем больше изобар, чем тяжелее ядра. Это в действительности справедливо, по меньшей мере до $A \approx 150$. В области редких земель, вероятно, существует большое число пар пока неизвестных изобар. Для еще больших атомных весов имеет значение устойчивость относительно α -распада, так что наше правило становится неприменимым.

Существует другое указание на силы между одинаковыми частицами — его дает рассеяние протонов протонами (§ 18). Это рассеяние не находится в согласии с ожидаемым рассеянием на основании электростатического взаимодействия между протонами. Всякие данные относительно сил между одинаковыми частицами получаются также из количественного исчисления энергий связи H^3 и He^4 (§ 21).

⁽¹⁾ Одно массовое число (124) занято тремя изобарами,

ТЕОРИЯ ДЕЙТЕРОНА

§ 11. Волновые уравнения Гейзенберга, Вигнера и Майорана (H7, W12, M6, B16)

В § 7 мы показали, что силы между нейтронами и протонами должны быть обменными и не должны зависеть от относительного направления спина двух частиц. Силы такого типа впервые были предложены Майорана (M6). Еще ранее Гейзенберг предложил обменные силы, зависящие от относительного направления спина (H7) и Вигнер — обычные силы, не дающие насыщения (W12)⁽¹⁾.

Несмотря на то, что мы привели достаточно данных в пользу сил Майорана, мы ниже напишем также волновые уравнения для двух других типов сил. Этим самым мы, с одной стороны, облегчим сравнение одних сил с другими и, с другой стороны (что представляется более важным), внутри ядра, наряду с основными силами типа Майорана, повидимому, частично действуют силы типа Гейзенберга (см. § 14).

Чтобы записать волновое уравнение, рассмотрим снова химическую аналогию. Система, наиболее близкая к системе „нейтрон и протон“ есть ион молекулы водорода H_2^+ ⁽²⁾. Волновая функция его является произведением электронной волновой функции φ и волновой функции ψ , описывающей движение двух ядер. φ зависит от расстояний ρ_α и ρ_β электрона от двух протонов α и β в ионе H_2^+ . φ может быть симметричной или антисимметричной функцией относительно ρ_α и ρ_β или относительно координат двух протонов.

Так как протоны подчиняются статистике Ферми, ψ должна быть антисимметричной относительно двух протонов, если φ симметрична, и наоборот. Мы рассмотрим в частности те электронные состояния H_2^+ , которые переходят в водородный атом, в основном состоянии, плюс протон. Существует два состояния этого типа: одно — с волновой функцией φ , симметричной относительно координат двух протонов, и одно — антисимметричное состояние. Только последнее соответствует связи. Электронная энергия системы может быть записана в форме:

$$V(r) = -C(r) \mp A(r), \quad (23)$$

где $C(r)$ есть кулоновское взаимодействие между атомом водорода в основном состоянии и протоном на расстоянии r от ядра водородного атома, а $A(r)$ есть „обменный интеграл“, определяющий частоту перехода электрона от одного протона к другому. Верхний знак в (23) относится к симметричной электронной волновой функции φ , нижний знак — к антисимметричной.

Энергия электрона для фиксированного расстояния r , как хорошо известно, может рассматриваться как потенциальная энергия для движения ядер молекулы. Движение это описывается волновой функцией ψ . Для антисимметричной ψ следует взять верхний знак (23), для симметричной ψ — нижний. Таким образом, мы имеем два различных уравнения Шредингера для ψ , в зависимости

⁽¹⁾ В последнее время Бартлетт отметил (B10), что существует еще один возможный вид сил — „обычные“ силы, зависящие от направления спина. Эти силы привели бы одновременно к трудностям теорий Вигнера и Майорана, т. е., к насыщению при H^2 и слишком большой энергии связи тяжелых ядер.

⁽²⁾ См. Handbuch der Physik, том 24/1, стр. 524.

от симметрии функции ψ . Формально мы можем однако записать оба уравнения в одном, используя то обстоятельство, что

$$\begin{cases} \psi(r_\beta r_\alpha) = +\psi(r_\alpha r_\beta) & \text{для симметричной } \psi, \\ \psi(r_\beta r_\alpha) = -\psi(r_\alpha r_\beta) & \text{для антисимметричной } \psi, \end{cases} \quad (23a)$$

согласно определению симметрии и антисимметрии ($r_\alpha r_\beta$ — координаты двух ядер с учетом спина). Таким образом, уравнение Шредингера можно записать:

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_\alpha + \Delta_\beta) \psi(r_\alpha r_\beta) + E \psi(r_\alpha r_\beta) = -C(r) \psi(r_\alpha r_\beta) + A(r) \psi(r_\beta r_\alpha). \quad (23b)$$

Во втором члене с правой стороны равенства переставлены координаты двух ядер. Этот член равен $+A(r)\psi(r_\alpha r_\beta)$, если ψ симметрична, и $-A(r)\psi(r_\alpha r_\beta)$, если ψ антисимметрична. Всякая связь с электроном из (23b) исключена; поэтому мы можем непосредственно перенести уравнение (23b) в теорию ядер.

Следует отметить, что аналогия с молекулой водорода не должна рассматриваться как вывод или оправдание волнового уравнения дейтерона. Силы между нейтроном и протоном являются совсем новыми, никаким образом не связанными с силами, известными из атомной физики. Поэтому выбранный частный вид взаимодействия между нейтроном и протоном может быть оправдан только сравнением результатов теории с экспериментальными данными о ядрах. Теория иона водородной молекулы служит только для указания возможного вида взаимодействия, которое приводит к силам насыщения. Аналогия с H_2^+ была введена не потому, что мы считаем нейтрон сравнимым с водородным атомом, а только на основании того, что мы знаем из качественных данных о насыщенности ядерных сил.

Запишем теперь волновое уравнение для нейтрона и протона, взаимодействующих друг с другом, по аналогии с (23b):

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_x + \Delta_\xi) \psi(xs, \xi\sigma) + E \psi(xs, \xi\sigma) = J(r) \psi(\xi\sigma, xs). \quad (24)$$

M — масса протона, которая почти равна массе нейтрона. Первые два аргумента (x, s) волновой функции обозначают координату положения и координату спина протона (¹), последние два аргумента (ξ, σ) относятся к положению и спину нейтрона. $|\psi(xs, \xi\sigma)|^2$ обозначает, таким образом, вероятность того, что протон находится в точке x (x , понятно, есть вектор) со спином s , в то время как нейтрон находится в точке ξ и имеет спин σ . Δ_x и Δ_ξ — операторы Лапласа относительно координат нейтрона и протона. E — полная энергия и $J(r)$ — потенциальная энергия, как функция расстояния $r = |x - \xi|$ между протоном и нейтроном. [Из сравнения (24) и (23b) можно заметить, что мы не приняли никакого „обычного“ взаимодействия $C(r)$ между протоном и нейтроном и учли только „обменное“ взаимодействие $A(r) = J(r)$]. Уравнение (24) первоначально было предложено Гейзенбергом. Оно дает насыщение (см. § 7), но оно соответствует взаимодействию, которое зависит от относительных направлений спинов протона и нейтрона. Чтобы обнаружить это, запишем волновую функцию ψ как произведение функции, зависящей от положения двух частиц, и функции, зависящей только от спина:

$$\psi(xs, \xi\sigma) = \varphi(x\xi) \chi(s\sigma). \quad (24a)$$

¹ В качестве последней можно выбрать проекцию спина на данное направление z , которая может принимать одно из двух значений: $+\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$.

Если спины протона и нейтрона параллельны, спиновая волновая функция χ симметрична⁽¹⁾ относительно двух координат спина s и σ , т. е.

$$\chi(\sigma, s) = \chi(s, \sigma); \quad (24b)$$

если спины антипараллельны, χ антисимметрична, т. е.

$$\chi(\sigma, s) = -\chi(s, \sigma). \quad (24c)$$

Поэтому (24) переходит в уравнение, содержащее только „пространственную“ волновую функцию φ :

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_x + \Delta_\xi) \varphi(x, \xi) + E\varphi(x\xi) = \pm J(r)\varphi(\xi x). \quad (25)$$

Верхний знак имеет место для параллельных спинов нейтрона и протона, нижний — для антипараллельных. Таким образом, если $J(r)$ отрицательна, мы получим притяжение между нейтроном и протоном с параллельными спинами и отталкивание при антипараллельных спинах. Если $J(r)$ положительна, имеет место обратное. И в том, и в другом случае силы между двумя частицами зависят от относительного направления спина, и насыщение получается, когда нейтрон связан с протоном при спине нейтрона, параллельном или антипараллельном спину протона, в зависимости от знака J . Второй нейтрон не должен связываться с протоном; наоборот, он должен испытывать отталкивание. Дейтерон при этом был бы „насыщенным“ ядром. Мы знаем из опыта, что насыщенным ядром является α -частица, так что это противоречило бы опыту.

Указанное затруднение исключается в волновом уравнении Майорана (M6)⁽²⁾.

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_x + \Delta_\xi) \psi(xs, \xi\sigma) + E\psi(xs, \xi\sigma) = J(r)\psi(\xi s, x\sigma). \quad (26)$$

Оно отличается от уравнения Гейзенберга членом взаимодействия с правой стороны от знака равенства — в то время как в уравнении Гейзенберга обмениваются в членах взаимодействия и пространственные координаты и спины нейтрона и протона, в уравнении Майорана обмениваются только пространственные координаты. Спин протона s в члене взаимодействия (26) такой же, как и с левой стороны уравнения, спин нейтрона равен σ в обеих сторонах равенства. Поэтому, если мы снова запишем волновую функцию в виде (24a), мы получим:

$$\begin{aligned} \psi(\xi s, x\sigma) &= \varphi(\xi x) \chi(s\sigma); \\ \psi(xs, \xi\sigma) &= \varphi(x\xi) \chi(s\sigma). \end{aligned} \quad (26a)$$

Другими словами, одна функция спина входит в обе стороны уравнения (26). Независимо от относительного направления спина уравнение (26) сводится поэтому к

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_x + \Delta_\xi) \varphi(x\xi) + E\varphi(x\xi) = J(r)\varphi(\xi x). \quad (27)$$

(1) См., например, Handbuch der Physik, том 24/1, стр. 235.

(2) Относительно некоторых трудностей, связанных с различием масс нейтрона и протона, см. (B27), стр. 6.

Отрицательный потенциал взаимодействия J приводит к связи для любого направления спинов.

Как уравнение Майорана, так и уравнение Гейзенберга допускают „обменные“ силы, что необходимо для объяснения „насыщения“ ядерных сил (§ 7). Силы обычного типа (понятие „обычной силы“ употребляется в отличие от обменных сил) были приняты Вигнером (W12). Уравнение Вигнера для дейтерона записывается в виде:

$$\frac{\hbar'^2}{2M}(\Delta_x + \Delta_\xi)\psi(x_s, \xi\sigma) + E\psi(x_s, \xi\sigma) = J(r)\psi(x_s, \xi\sigma), \quad (28)$$

или после отделения спинов:

$$\frac{\hbar'^2}{2M}(\Delta_x + \Delta_\xi)\varphi(x\xi) + E\varphi(x\xi) = J(r)\varphi(x\xi). \quad (28a)$$

Обобщение уравнений (24), (26), (28) на случай числа частиц, большего, чем две, очевидно. С правой стороны появятся при этом члены взаимодействия для каждой пары частиц, аналогичные входящим в (24), (26) и (28). Для ядра, содержащего N нейтронов и Z протонов, мы имеем:

$$\frac{\hbar'^2}{2M} \left(\sum_{i=1}^Z \Delta_{xi} + \sum_{k=1}^N \Delta_{\xi k} \right) \psi(x_1 s_1 \dots x_i s_i \dots \xi_k \sigma_k \dots \xi_n \sigma_n) + E\psi(\dots x_i s_i \dots \xi_k \sigma_k \dots) =$$

$$= \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N J(r_{ik}) \psi(x_1 s_1 \dots \xi_k \sigma_k \dots x_i s_i \dots \xi_n \sigma_n) \quad (\text{Гейзенберг}), \quad (29a)$$

$$= \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N J(r_{ik}) \psi(x_1 s_1 \dots \xi_k s_i \dots x_i \sigma_k \dots \xi_n \sigma_n) \quad (\text{Майорана}), \quad (29b)$$

$$= \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N J(r_{ik}) \psi(x_1 s_1 \dots x_i s_i \dots \xi_k \sigma_k \dots \xi_n \sigma_n) \quad (\text{Вигнер}), \quad (29c)$$

Для применения к дейтерону удобно отделить движение центра тяжести дейтерона от относительного движения двух частиц дейтерона. Нас интересует только последнее. Мы опишем его волновой функцией u , зависящей только от относительной координаты $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi$ протона по отношению к нейтрону. Переставляя координаты двух частиц, мы заменяем \mathbf{r} через $\xi - \mathbf{x} = -\mathbf{r}$, другими словами, меняем знак относительных координат. Уравнение для u запишется при этом

$$\frac{\hbar'^2}{M} \Delta u(\mathbf{r}) + Eu(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pm J(r) u(-\mathbf{r}) & (\text{Гейзенберг}); \\ J(r) u(-\mathbf{r}) & (\text{Майорана}); \\ J(r) u(\dot{\mathbf{r}}) & (\text{Вигнер}). \end{cases} \quad \begin{matrix} (30a) \\ (30b) \\ (30c) \end{matrix}$$

u зависит только от трех относительных координат r , и Δ поэтому есть обычный трехмерный оператор Лапласа. Масса протона M , входящая в уравнения от (24) до (29), заменена (приведенной) массой $\frac{1}{2}M$, так как мы имеем дело с относительным движением. Знак (+) в (30a) относится к параллельному и (-) — к антипараллельному расположению спинов протона и нейтрона.

§ 12. Основное состояние дейтерона (B16)

Дейтерон играет в физике ядра ту же роль, что и атом водорода в атомной физике. Он состоит из двух элементарных частиц — протона и нейтрона. Хорошо известно, что любая задача двух тел может быть явно проинтегрирована, если известна сила между частицами в зависимости от расстояния между ними. Таким образом, теоретические результаты относительно дейтерона свободны от приближений, которые для более сложных ядер приходится делать при решении задачи. Как мы увидим, они также в значительной мере не зависят от деталей наших допущений относительно силы, действующей между нейтроном и протоном, т. е. относительно функции $J(r)$ (30). Теория дейтерона, таким образом, наиболее удобна для количественных сопоставлений с опытом и для проверки наших представлений относительно строения ядра.

Пользуясь предположением Майорана о силах между нейтроном и протоном, мы получили волновое уравнение:

$$\frac{\hbar^2}{M} \Delta U(\mathbf{r}) + EU(\mathbf{r}) = J(r) \cdot U(-\mathbf{r}), \quad (30b)$$

где \mathbf{r} — относительная координата протона относительно нейтрона, M — масса протона или нейтрона и E — энергия системы. Если E отрицательна, $\varepsilon = -E$ есть энергия связи дейтерона.

Потенциальная энергия $J(r)$ обладает центральной симметрией. Поэтому в (30b) можно разделить переменные в сферических координатах r, θ, φ , положив

$$U(\mathbf{r}) = \frac{u_l(r)}{r} P_{lm}(\theta) e^{im\varphi}, \quad (31)$$

где P_{lm} — шаровая функция, которую (если это особо не оговорено) мы считаем всегда нормированной. В (30b) наряду с функцией $U(\mathbf{r})$ входит функция $U(-\mathbf{r})$. Если сферические координаты точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$ есть r, θ, φ , то для точки $-\mathbf{r} = (-x, -y, -z)$ они будут $r, \pi - \theta, \pi + \varphi$. Легко показать, что ⁽¹⁾

$$P_{lm}(\pi - \theta) e^{im(\pi + \varphi)} = (-1)^l P_{lm}(\theta) e^{im\varphi}. \quad (31a)$$

Поэтому волновое уравнение для u принимает вид ⁽²⁾:

$$\frac{\hbar^2}{M} \left(\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + E u_l = (-1)^l J(r) u_l. \quad (32)$$

Если считать $J(r)$ отрицательной, мы видим, что правая сторона (32) соответствует притяжению, если l четно, и отталкиванию — если l нечетно. Эта перемена знака силы для четных и нечетных l характерна для обменных сил и принципиально ее

⁽¹⁾ $P_{lm}(\theta)$ — четная или нечетная функция $\cos \theta$, в зависимости от того, четная или нечетная разность $l - m$ (см., например, Янке-Эмде, таблица функций, стр. 173). Так как $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, имеем: $P_{lm}(\pi - \theta) = (-1)^{l-m} P_{lm}(\theta)$. Кроме того, $e^{im(\pi + \varphi)} = (-1)^m e^{im\varphi}$.

⁽²⁾ Относительно алгебраических выкладок, нужных для разделения уравнения Шредингера в полярных координатах, см., например, Handbuch der Physik, том 24, 1, стр. 275.

можно было бы использовать для определения того, являются ли силы между нейтроном и протоном обменными силами (§ 14 и W9).

Наиболее низкое квантовое состояние получается при $l=0$, если считать $J(r)$ отрицательной. Его функция подчиняется волновому уравнению

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = \frac{M}{\hbar^2} [J(r) - E] u_0, \quad (33)$$

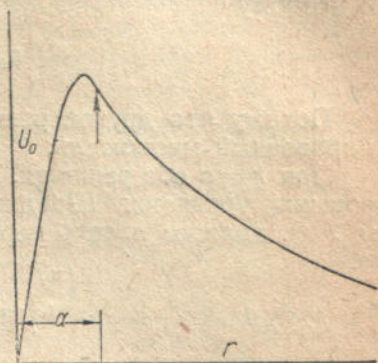
причем на u_0 наложено условие, что оно стремится к нулю для малых r как r , потому что в противном случае, согласно (31), $U(r)$ стало бы бесконечным при малых расстояниях r . Кроме того u_0 не должно обращаться в бесконечность для больших r .

Рассмотрим сперва поведение u_0 качественно, делая самые общие допущения относительно потенциала взаимодействия $J(r)$. Из отношения энергий связи α -частицы и дейтерона (§ 9) мы знаем, что $J(r)$ должно быть очень большим для малых r и должно быстро спадать при увеличении r . Поэтому можно определить область a действия сил таким образом, что при $a > r |J(r)|$ очень мало по сравнению с E . Если r меньше a , $|J(r)|$ должно быть большим по сравнению с E . Поведение u_0 вплоть до $r=a$ определяется поэтому почти исключительно $J(r)$ и в значительной мере не зависит от E . С другой стороны, при $r > a$, u_0 определяется исключительно величиной E .

Ввиду того, что $J(r)$ отрицательна и для большей части области $r < a$ по абсолютной величине больше E , правая сторона (33) отрицательна в этой области и поэтому u_0 вогнуто по отношению к оси r (см. фиг. 4). Интегрируя (33) до $r=a$, мы можем определить u_0 и ее первую производную u_0' в точке $r=a$. Положим

$$\left(\frac{u_0'}{u_0} \right)_{r=a} = -\alpha, \quad (34)$$

где α — обратная длина, характерная для потенциала $J(r)$. Согласно предыдущему, α не зависит существенно от энергии E . Понятно, знак α , так же как и абсолютная величина α , зависит от величины сил. Если, например, $J(r)$ очень мало, кривизна u_0 будет очень мала и u_0 будет возрастать вплоть до $r=a$ для любого отрицательного значения E . В этом случае $\frac{u_0'}{u_0}$ должно



Фиг. 4. Волновая функция основного состояния дейтерона

По оси ординат нанесена волновая функция, помноженная на r . Простая потенциальная яма имеет ширину a

быть положительной и поэтому α отрицательной. При этом, как мы увидим, невозможно ни одно устойчивое состояние ($E < 0$) дейтерона.

Для $r > a$ потенциальная энергия $J(r)$ предполагается очень малой. Поэтому можно непосредственно решить уравнение (33). Считая E отрицательной:

$$E = -\epsilon, \quad (35a)$$

имеем

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = \frac{M\epsilon}{\hbar'^2} u_0, \quad (35)$$

и поэтому

$$u_0 = ce^{-\frac{(M\epsilon)^{1/2}r}{\hbar'}}. \quad (36)$$

Потому что другое решение $e^{+\frac{(M\epsilon)^{1/2}r}{\hbar'}}$ исключается. C — нормировочный множитель.

При $r = a$ оба решения, получающиеся в результате интегрирования уравнения Шредингера „внутри“ ($r < a$) и „снаружи“ ($r > a$), должны плавно переходить друг в друга, т. е.

$$\left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{\text{снаружи}} = \left(\frac{u_0'}{u_0}\right)_{\text{внутри}}. \quad (36a)$$

(34) дает „внутреннее“ значение $\frac{u_0'}{u_0}$, в то время как внешнее значение получается путем дифференцирования (36). Поэтому мы имеем:

$$\frac{(M\epsilon)^{1/2}}{\hbar'} = \alpha. \quad (37)$$

Таким образом, постоянная α , которая непосредственно связана с полем, определяет энергию связи ϵ . Наоборот, можно использовать наблюдаемое значение ϵ для определения α и таким образом найти постоянные величины, характеризующие силу, действующую между нейтроном и протоном.

Если α отрицательна, т. е. если сила слишком слаба (см. выше), внутренняя волновая функция не может соединиться плавно с экспоненциально спадающей внешней волновой функцией: она могла бы соединиться только с экспоненциально растущей функцией. Возможность такой функции однако исключена, так как при $r = \infty$ она обращается в бесконечность, и мы видим, что при отрицательной α не может быть ни одного решения с положительной энергией связи ϵ . (Для положительной энергии E , конечно, всегда есть решение, которое ведет себя при $r > a$, как $\sin \frac{(ME)^{1/2}r}{\hbar'}$ или $\cos \frac{(ME)^{1/2}r}{\hbar'}$, а не экспоненциально). Из факта существования дейтерона мы можем заключить поэтому, что сила между нейтроном и протоном должна быть достаточно большой, чтобы α могла быть положительной, т. е. чтобы кривизна $u_0(r)$ была достаточной и $u_0(r)$ уменьшалось с увеличением r .

Из этого условия мы можем также заключить о некоторых количественных данных относительно $J(r)$. Мы имеем:

$$u_0'' = \left(\frac{M}{\hbar'^2}\right) (J(r) u_0 + \varepsilon u_0). \quad (37a)$$

Интегрируя по r от 0 до a , находим:

$$(u_0')_{r=a} - (u_0')_{r=0} = M\hbar'^{-2} \int_0^a J(r) u_0 dr + M\hbar'^{-2} \varepsilon \int_0^a u_0 dr. \quad (37b)$$

$(u_0')_{r=0} = 1$, если u_0 соответствующим образом нормировано. Для малых r , u_0 пропорционально r (см. текст после ур. 33). Это правило недействительно для $r = a$, оно становится приближенным. При этом $(u_0')_{r=a} \approx -\alpha a$ гораздо меньше единицы, так как область действия сил a предполагается малой по сравнению с (известной) величиной $\frac{1}{\alpha}$ (см. 44a). Кроме того последний член (37b) мал по сравнению с единицей и им можно пренебречь; приблизительно он равен $\frac{1}{2} \frac{M\varepsilon a^2}{\hbar'^2} \sim \frac{1}{2} a^2 \alpha^2 \ll 1$. Приближенно мы получаем таким образом:

$$\int_0^a J(r) r dr = -\frac{\hbar'^2}{M}. \quad (37c)$$

На самом деле следовало бы ожидать несколько большего абсолютного значения интеграла в левой части выражения (37c), так как $u_0 < r$. [В частном случае прямоугольной потенциальной ямы мы имеем, согласно (40),

$$\int_0^a J(r) r dr = -\frac{1}{2} V_0 a^2 = -\frac{\pi^2 \hbar'^2}{8M},$$

что близко к (37c)].

Рассмотрим теперь решения для нескольких простых видов потенциальной функции $J(r)$.

(а) *Прямоугольная потенциальная яма:*

$$\left. \begin{aligned} J(r) &= -V_0 \text{ для } r < a, \\ J(r) &= 0 \text{ для } r > a. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Решение:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= b \sin \left[\frac{M^{1/2} (V_0 - \varepsilon)^{1/2}}{\hbar'} r \right] && \text{при } r < a, \\ u_0 &= c e^{-\frac{(M\varepsilon)^{1/2} (r-a)}{\hbar'}} && \text{при } r > a. \end{aligned} \right\} \quad (38a)$$

Связывая решения, имеем:

$$\left(\frac{u_0'}{u_0} \right)_{\text{внутри}} = \frac{M^{1/2} (V_0 - \varepsilon)^{1/2}}{\hbar'} \cdot \operatorname{ctg} \frac{M^{1/2} (V_0 - \varepsilon)^{1/2} a}{\hbar'};$$

$$\left(\frac{u_0'}{u_0} \right)_{\text{снаружи}} = -\frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{\hbar'};$$

поэтому

$$\operatorname{ctg} \frac{M^{1/2} (V_0 - \varepsilon)^{1/2} a}{\hbar'} = -\left(\frac{\varepsilon}{V_0 - \varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (39)$$

Так как $V_0 \gg \varepsilon$ (см. § 9), правая сторона (39) мала. Поэтому в первом приближении:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} \alpha}{h'} &= \frac{1}{2} \pi + \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^{1/2} + 0 \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^{3/2}, \\ V_0 &= \frac{h'^2}{Ma^2} \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{V_0}\right)^{1/2} \right]^2 + \varepsilon + 0 \left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{V_0^{3/2}}\right), \end{aligned} \right\} \quad (39a)$$

$$V_0 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{h'^2}{Ma^2} + 2 \left(\frac{h'}{Ma^2} \varepsilon\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) \varepsilon + 0 \left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{(h'/Ma^2)^{1/2}}\right). \quad (39b)$$

В очень грубом приближении можно записать:

$$V_0 a^2 = \frac{\pi^2 h'^2}{4M}. \quad (40)$$

Это значит, что произведение глубины на квадрат ширины потенциальной ямы может быть определено просто из факта существования дейтерона. Для определения в отдельности глубины и ширины необходимо рассмотреть также энергию связи других ядер, например, α -частицы. Однако независимо от значений a и V_0 произведение $V_0 a^2$ не должно отличаться существенно от (40), являющейся универсальной постоянной. Меньшая величина a сил связана с большей глубиной.

Нормирование волновой функции. Из (38a) и (39) мы имеем:

$$b = \frac{c}{\sin \frac{M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} a}{h'}} = c \left(\frac{V_0}{V_0 - \varepsilon}\right)^{1/2}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u_0^2 dr &= b^2 \int_0^a \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} r}{h'} \right] dr + c^2 \int_a^\infty e^{-\frac{2M^{1/2} \varepsilon^{1/2} (r-a)}{h'}} dr = \\ &= b^2 \left[\frac{1}{2} a - \frac{h'}{4M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2}} \sin 2 \frac{M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} a}{h'} \right] + \\ &+ \frac{c^2 h'}{2(M\varepsilon)^{1/2}} = \frac{1}{2} c^2 \frac{V_0}{V_0 - \varepsilon} \left[\frac{h'}{(M\varepsilon)^{1/2}} + a \right]. \end{aligned} \quad (41a)$$

Нормируя на единицу, имеем (см. 37):

$$c = \left[\frac{2(V_0 - \varepsilon)}{V_0} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{h'}{(M\varepsilon)^{1/2}} + a \right] = \left[\frac{2(V_0 - \varepsilon) \alpha}{V_0(1 + \alpha a)} \right]^{1/2} \quad (41b)$$

и согласно (31), (38a) и (41):

$$U(r) = \frac{U_0}{(4\pi)^{1/2} r} \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\alpha}{2\pi(1 + \alpha a)}\right)^{1/2} \frac{\sin [M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} / h']}{r}, \\ &\left(\frac{\alpha}{2\pi(1 + \alpha a)}\right)^{1/2} \left(\frac{V_0 - \varepsilon}{V_0}\right)^{1/2} e^{-\alpha(r-a)}. \end{aligned} \right\} \quad (41c)$$

(в) *Экспоненциальная потенциальная яма:*

$$J(r) = -V_0 e^{-\frac{r}{a}}, \quad (42)$$

Введем независимую переменную

$$x = e^{-\frac{r}{a}}, \quad (42a)$$

так что

$$\begin{aligned}x &= 1 & \text{при } r &= 0 \\x &= 1/e & \text{при } r &= a \\x &= 0 & \text{при } r &= \infty\end{aligned}$$

и

$$\frac{d}{dr} = -\frac{x}{a} \frac{d}{dx}.$$

Тогда уравнение Шредингера (33) принимает вид:

$$\begin{aligned}x \frac{d}{dx} \left(x \frac{du_0}{dx} \right) - \frac{Ma^2}{h'^2} (-V_0 x + \varepsilon) u_0 &= 0; \\ \frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dn_0}{dx} + \left(\frac{Ma^2 V_0}{h'^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{Ma^2 \varepsilon}{h'^2} \cdot \frac{1}{x^2} \right) u_0 &= 0.\end{aligned}\quad (42b)$$

Это — дифференциальное уравнение для функций Бесселя (см. Янке-Эмде, стр. 214); его решение:

$$u_0 = c J_p (2M^{1/2} V_0^{1/2} a h'^{-1} x^{1/2}) = c J_p (2M^{1/2} V_0^{1/2} a h'^{-1} e^{-\frac{r}{2a}}), \quad (42c)$$

где

$$p = \frac{2a (M\varepsilon)^{1/2}}{h'} \quad (42d)$$

есть порядок функции Бесселя. При больших расстояниях r аргумент функции Бесселя мал, так что первый член обычного разложения J в степенной ряд вполне достаточен. Мы имеем тогда:

$$u_0 = \frac{c}{p!} \left[\frac{2(MV_0)^{1/2} a}{h'} \right]^p e^{-\frac{(M\varepsilon)^{1/2} r}{h'}} \quad (r \gg a), \quad (42e)$$

что с точностью до постоянного множителя совпадает с (38a). Собственное значение ε определяется условием, что $u_0(r=0)$ должно исчезать. Для данного V_0 мы найдем p из условия:

$$J_p \left(\frac{2(MV_0)^{1/2} a}{h'} \right) = 0, \quad (42f)$$

и мы должны вычислить ε из p с помощью (42d). Для того, чтобы (42f) было решением p , необходимо, чтобы v_0 было больше некоторой определенной величины. Эта предельная величина выводится из условия передвижения первого нуля x_p функции $J_p(x)$ к малым значениям x при увеличении p . Поэтому, понятно, $x_p > x_0$. Первый нуль функции Бесселя порядка 0 есть $x_0 = 2,4048$. Поэтому (42f) имеет решение p только, если

$$\frac{2(MV_0)^{1/2} a}{h'} > 2,4048; \quad V_0 > \left(\frac{h'^2}{Ma^2} \right) \cdot 1,4457. \quad (42g)$$

Если $V_0 = \frac{1,4457 h'^2}{Ma^2}$, решение (42f) будет $p=0$, и поэтому $\varepsilon=0$, т. е. не будет никакой энергии связи. Если энергия мала по сравнению с v_0 , следует допустить (см. § 9), что V_0 должно быть несколько больше значения (42g).

В таблице II приведены величины $MV_0 a^2 h'^{-2}$ для различных областей a действия силы.

(с) Потенциальная энергия в виде кривой ошибок Гаусса:

$$J(r) = -Ve^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (43)$$

Решение u_0 можно получить численным интегрированием дифференциального уравнения. В случаях (а) и (б) как и в предыдущем качественном рассмотрении, Va^2 должно быть больше некоторой универсальной постоянной, в нашем случае $\frac{2.65h^2}{M}$, чтобы вообще получилась какая-нибудь энергия связи. В таблице III дана связь между $\frac{MVa^2}{h^2}$ и областью a согласно Финбергу (F_2, F_3). Эта таблица позволяет определить Va^2 , если известно a . Va^2 меняется лишь слегка при изменении области действия силы a .

Все наши результаты относительного основного состояния дейтерона остаются неизменными, если мы примем взаимодействие Вигнера или Гейзенберга между нейтроном и протоном, вместо силы Майорана. Для основного состояния и для всякого S -состояния $U(-r) = U(r)$, [см. (31), (31a)], так что уравнения

Таблица II

Соотношение между шириной a и глубиной V_0 экспоненциальной силы

$$V_0 e^{-\frac{r}{a}} \quad (\text{энергия связи дейтерона равна } 2,15 \text{ MV})$$

$a = 0$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	10-13 см
$p = 0$	0,228	0,456	1,684	0,912	1,140	1,368	знак функции Бесселя
$MVa^2h^{-2} = 1,446$	1,888	2,370	2,890	3,466	4,039	4,664	—
$V_0 = 59,5a^{-1}$	310	97	53	35,4	26,5	21,3	MV

Таблица III

Соотношение между шириной a и глубиной V при „Гауссовой“

$$\text{потенциальной энергии } Ve^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (\text{энергия связи дейтерона } 2,15 \text{ MV})$$

a ($b \cdot 10^{-13}$ см)	0	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,25
$T = h^2/Ma^2$ (MV)	∞	64,3	41	28,5	20,9	16,1	12,7	10,25	8,10
B/T (отвлеченное число)	2,70	3,22	3,37	3,53	3,68	3,84	4,01	4,18	4,40
V (MV)	—	207	138	100,5	74,8	61,8	51,0	42,8	35,6
\bar{V}/T (1)	2,70	3,09	3,20	3,32	3,43	3,55	3,68	3,81	3,97
a	2,5	2,75	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
T	6,56	5,43	4,55	3,35	2,56	2,02	1,64	1,35	1,14
B/T	4,62	4,85	5,08	5,55	6,04	6,56	7,13	7,70	8,28
V	30,3	26,3	23,1	18,6	15,45	13,2	11,7	10,4	9,4
\bar{V}/T (1)	4,14	4,31	4,48	4,84	5,20	5,59	6,02	6,45	6,88

(1) \bar{V} представляет действующую между нейтроном и протоном силу Майорана плюс половина силы Гейзенберга (см. § 14, конец). Эта комбинация входит в теорию H_1^3 H_e^4 и других более тяжелых ядер (§ 20).

Вигнера (30с) и уравнение Майорана совпадают. Только для нечетных азимутальных квантовых чисел l существует разница между теорией Вигнера и теорией Майорана (см. 32). Теория Гейзенберга также становится идентичной теории Майорана, если мы ограничимся состояниями, в которых спины нейтрона и протона параллельны, как это имеет место в основном состоянии дейтерона (экспериментальное значение спина дейтерона равно единице).

В заключение отметим, что собственная функция основного состояния вне области действия сил для $r > a$ вполне определяется энергией связи ε дейтерона, как показано уравнением (36). При наблюдающемся значении энергии связи, т. е.

$$\varepsilon = 2,15 \text{ MV} \quad (44)$$

имеем:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar^2}{(M\varepsilon)^{1/2}} = \frac{1,042 \cdot 10^{-27}}{(1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 2,15 \cdot 1,59 \cdot 10^{-6})^{1/2}} = 4,36 \cdot 10^{-13} \text{ см} \quad (44a)$$

$\frac{1}{\alpha}$ можно рассматривать как „радиус“ дейтерона [см. волновую функцию (36)]. Область действия сил a , вероятно, около $2 \cdot 10^{-13}$ см, что значительно меньше радиуса дейтерона. Мы можем сказать поэтому, что решение (36) представляет собственную функцию основного состояния дейтерона в большей части пространства. По этой причине матричные элементы, интегралы нормировки и т. д. могут быть вычислены с хорошей точностью, допуская, что (36) справедливо при всех значениях r . Нормировочный интеграл становится при этом

$$\int u_0^2 dr = c^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} \cdot dr = \frac{c^2}{2\alpha} = 1$$

или

$$u_0 = (2\alpha)^{1/2} e^{-\alpha r}; \quad (44b)$$

$$U(r) = \frac{u_0}{(4\pi)^{1/2} r} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (44c)$$

независимо от вида потенциальной энергии $J(r)$.

В (41с) мы нашли точный нормировочный множитель в частном случае прямоугольной потенциальной ямы. Он отличается от (41с) множителем

$$\left(\frac{V_0 - \varepsilon}{V_0}\right)^{1/2} \frac{e^{\alpha a}}{(1 + \alpha a)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha a - O(\alpha a)^2 \quad (44d)$$

$\left(\frac{V_0 - \varepsilon}{V_0}\right)^{1/2}$ должно быть порядка $(\alpha a)^2$. Таким образом (44с) соответствует допущению о равенстве нулю области действия сил.

§ 13. Возбужденные состояния дейтерона

Легко показать, что если отвлечься от спина и принять допущение о силах, приведенных в предыдущем параграфе, у дейтерона вообще не может существовать устойчивых возбужден-

ных состояний. Для простоты примем прямоугольную яму с потенциальной энергией.

А priori могут существовать следующие возбужденные состояния: p -состояние ($l=1$), d -состояние ($l=2$) и т. д. или более высокие s -состояния ($l=0$).

(а) p -состояния. В теории Майорана между протоном и нейтроном должно существовать отталкивание, если их момент количества движения $l=1$. Для сил Вигнера и сил Гейзенберга в случае антипараллельных спинов двух частиц должны действовать силы притяжения. Таким образом, в теории Майорана, которую мы приняли, стабильные p -состояния вообще невозможны, но из теории Вигнера о их невозможности можно заключить на основании энергии связи основного состояния. Для p -состояний мы имеем волновое уравнение:

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} - \frac{2}{r^2} u_1 = \frac{M}{\hbar^2} \begin{cases} (-V_0 + \varepsilon) u_1 & \text{при } r < a, \\ \varepsilon u_1 & \text{при } r > a, \end{cases} \quad (45)$$

с решением

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= b \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right); \quad c k = \frac{M^{1/2} (V_0 - \varepsilon)^{1/2}}{\hbar} \quad r < a \\ u_1 &= c e^{-\alpha(r-a)} \left(1 + \frac{1}{\alpha r} \right); \quad c \alpha = \frac{(M\varepsilon)^{1/2}}{\hbar} \quad r > a \end{aligned} \right\} \quad (45a)$$

приравняем выражения для $\frac{u_1'}{u_1}$, полученные из этих двух соотношений, при $r = a$:

$$k \frac{\frac{\cos ka}{ka} + \sin ka [1 - (ka)^{-2}]}{\frac{\sin ka}{ka} - \cos ka} = -\alpha \frac{1 + (\alpha a)^{-1} + (\alpha a)^{-2}}{1 + (\alpha a)^{-1}} \quad (45b)$$

Отсюда можно с достоверностью найти минимальное значение V_0 , необходимое для того, чтобы p -состояние было связанным, полагая энергию связи ε равной нулю и поэтому $\alpha = 0$. Произведя это с правой стороны (45b), получим $-\frac{1}{a}$. Полагая $ka = x$,

$$\cos x + \sin x \left(x - \frac{1}{x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad (45c)$$

$$ka = x = \pi; \quad V_0 a^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{M}. \quad (45d)$$

Это значение несовместимо с нашим предыдущим заключением (см. 40) о том, что $V_0 a^2$ лишь слегка превышает $\frac{\pi^2 \hbar^2}{4M}$, что следует из того обстоятельства, что V_0 велико по сравнению с энергией связи дейтерона. (Из теории α -частиц можно заключить, что величина $V_0 a^2$ приблизительно равна $\frac{4 \hbar^2}{M}$ (см. § 21). Поэтому необходимо заключить, что, если мы примем силы Вигнера, у дейтерона также не окажется ни одного устойчивого p -состояния.

(б) d -состояния. Для сил Вигнера s -, p - и d -состояния образуют монотонную последовательность с увеличивающейся центробежной силой $\frac{l(l+1)}{r^2}$. Поэтому, если не существует для сил Вигнера p -состояния, не должно существовать также и d -состояния. Так как уравнения Майорана и Вигнера идентичны для d -состояний ($l=2$), в случае сил Майорана также не должно быть устойчивых d -состояний.

(с) Более высокие s -состояния. Из (39) вытекает, что одно стабильное s -со-

стояние может существовать для $M^{1/2}(V_0 - \varepsilon)^{1/2} \frac{a}{h'}$ между $\frac{\pi}{2}$ и π и другое между $\frac{3}{2}\pi$ и 2π . Если второе s -состояние существует, мы должны, безусловно, иметь:

$$\frac{(MV_0)^{1/2} a}{h'} > \frac{3\pi}{2}, \quad V_0 a^2 > \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{h'^2}{M}, \quad (45e)$$

что невозможно по той же причине, как и для возбужденных p -состояний.

По вышеуказанным причинам у дейтерона не может существовать ни одного возбужденного состояния, отличного от основного состояния в отношении орбитального движения.

Следовало бы однако ожидать второго состояния дейтерона, отличающегося от основного состояния полным спином. В основном состоянии спин дейтерона равен единице, т. е. спины протона и нейтрона параллельны. Можно ожидать другого состояния с антипараллельными спинами двух частиц и равным нулю полным спином $s=0$. Это второе состояние должно быть синглетным состоянием по спектроскопической номенклатуре (не вырожденное состояние, статистический вес 1), в то время как основное состояние — триплетное состояние (трижды вырожденное, так как существует три возможных ориентации спина дейтерона в магнитном поле).

Если мы примем чисто Майорановское взаимодействие, энергии синглетного и триплетного состояний в первом приближении равны. Разница между ними возникает только вследствие магнитного взаимодействия двух спинов. Допустим классическое взаимодействие между магнитными моментами

$$W = \frac{\mu_n \mu_p [(\sigma_n \sigma_p) r^2 - 3(\sigma_n r)(\sigma_p r)]}{r^5}, \quad (46a)$$

где μ_n и μ_p — магнитные моменты нейтрона и протона, σ_n и σ_p — соответствующие операторы спина, а r — относительная координата протона и нейтрона. В явной форме мы можем записать:

$$W = \mu_n \mu_p [\sigma_{nz} \sigma_{pz} r^{-3} (1 - 3 \cos^2 \theta) + \dots]. \quad (46b)$$

Диагональный матричный элемент W относительно s -состояния равен нулю вследствие зависимости W от угловых координат θ, φ в точке r . Расщепление δE s -состояния вследствие взаимодействия спина является поэтому эффектом второго порядка. По обычной теории возмущений Шредингера можно показать, что порядок величины расщепления равен:

$$\delta E \approx \frac{W^2(a)}{V_0}, \quad (46c)$$

где $W(a)$ есть некоторая средняя величина магнитного взаимодействия, если частицы находятся на расстоянии a друг от друга:

$$W(a) \approx \mu_n \mu_p a^{-3} = 2,9 \cdot 2,0 \left(\frac{eh'}{2Mc} \right)^2 a^{-3} = 1,5 \left(\frac{h'}{Mca} \right)^2 \frac{e^2}{a}.$$

При $\frac{h'}{Mc} = 0,21 \cdot 10^{-13}$, $a = 10^{-13}$ и $\frac{e^2}{mc^2} = 2,80 \cdot 10^{-13}$ (m — масса электрона) мы имеем

$$W(a) = 1,5 mc^2 (0,21)^2 \cdot 2,80 = 0,10 MV, \quad (46d)$$

$$V_0 = \frac{\pi^2 h'^2}{4Ma^2} = 100 MV, \quad (46e)$$

$$\delta E = 100 V.$$

В действительности область действия сил значительно больше, чем $1 \cdot 10^{-13}$ см, что делает δE еще меньше.

Мы должны поэтому ожидать разности энергий порядка 1000 V между синглетным и триплетным состоянием дейтерона, если допустить, что это расщепление обусловлено лишь магнитным взаимодействием спинов, и воспользоваться классической формулой для этого взаимодействия. На основании опытов можно думать, что синглетное состояние лежит примерно на 2 000 000 V выше триплетного (§ 14). Это не может быть объяснено магнитным взаимодействием. Мы можем однако допустить, что сами ядерные силы зависят до некоторой степени от относительных направлений спина взаимодействующих протонов и нейтронов. Другими словами, можно предположить наличие небольших сил Гейзенберга, налагающихся на главные силы Майорана.

Если $J(r)$ есть потенциал Майорана и $K(r)$ — потенциал Гейзенберга, мы имеем согласно (30):

$$\frac{\hbar^2}{M} \Delta U(r) + EU(r) = [J(r) \pm K(r)] U(-r) \quad (47)$$

причем верхний знак относится к триплетному, а нижний к синглетному состоянию. Чтобы объяснить, что триплетное состояние дейтерона расположено ниже синглетного, следует считать K отрицательным, так же как и J . Величина K может быть определена из допущения, что K представляется прямоугольной потенциальной ямой такой же ширины, как и J , так что

$$\left. \begin{aligned} K(r) &= -V_1 \text{ при } r < a \\ K(r) &= 0 \text{ при } r > a \end{aligned} \right\} \quad (47a)$$

По аналогии с (39) мы имеем тогда:

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg} \left[\frac{M^{1/2} (V_0 + V_1 - \varepsilon_t)^{1/2} a}{\hbar'} \right] &= - \left(\frac{\varepsilon_t}{V_0 - V_1 - \varepsilon_t} \right)^{1/2} \text{ триплетное состояние} \\ \text{ctg} \left[\frac{M^{1/2} (V_0 - V_1 - \varepsilon_s)^{1/2} a}{\hbar'} \right] &= - \left(\frac{\varepsilon_s}{V_0 + V_1 - \varepsilon_s} \right)^{1/2} \text{ синглетное состояние} \end{aligned} \right\} \quad (47b)$$

Чтобы вывести числовое значение V_1 , используем результат опытов с рассеянием (§ 14), из которых следует, что ε_s очень близок к нулю; $\varepsilon_s \approx 40\,000$ V. Поэтому ε_s можно полностью пренебречь по сравнению с ε_t (2,15 MV). По аналогии с (30в) мы имеем тогда:

$$\left. \begin{aligned} V_0 - V_1 &= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\hbar^2}{Ma^2} \\ V_0 + V_1 &= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\hbar^2}{Ma^2} + 2\varepsilon_t^{1/2} \left(\frac{\hbar'}{Ma^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (47c)$$

или

$$V_1 = \left(\frac{\varepsilon_t \hbar'}{Ma^2} \right)^{1/2} = \frac{2}{\pi} (V_0 \varepsilon)^{1/2} \quad (48)$$

Наиболее вероятная величина V_0 составляет около (37 MV) (§ 21) и $\varepsilon = 2,15$ MV, мы имеем:

$$V_1 \approx 5 \text{ MV} \quad (48c)$$

Величина силы Гейзенберга — порядка среднего геометрического между потенциалом Майорана и энергией связи дейтерона.

§ 14. Эффективный поперечник рассеяния нейтронов протонами (W13, B18, M8, T1)

Рассеяние нейтронов протонами непосредственно связано с проблемой дейтерона. Здесь также существуют две взаимодействующие частицы — протон и нейтрон — и разница состоит только в том, что система обладает *положительной* энергией E . Так как все наши вычисления относятся к относительному движению двух частиц, E есть кинетическая энергия двух частиц в системе координат, где центр тяжести двух частиц покоится (C -система). Если v относительная скорость частиц, то в системе C скорость каждой частицы равна $\frac{1}{2} v$, и поэтому

$$E = \frac{1}{4} Mv^2. \quad (49)$$

Обычно экспериментальные установки таковы, что нейтроны с заданной скоростью v ударяются о покоящиеся протоны. Кинетическая энергия нейтронов в координатной системе, в которой протоны покоятся (R -система), равна тогда

$$E_0 = \frac{1}{2} Mv^2 = 2E. \quad (49a)$$

Скорость центра тяжести в R -системе равна $\frac{1}{2} v$.

В процессе рассеяния нейтрон может отклониться на угол θ в C -системе. Тогда составляющая скорости на начальное направление движения будет $\frac{1}{2} v \cos \theta$ в C -системе или $\frac{1}{2} v (1 + \cos \theta)$ в R -системе. Скорость протонов в C -системе должна быть противоположна и равна скорости нейтронов; ее составляющие поэтому равны $-\frac{1}{2} v \cos \theta$, $\frac{1}{2} v \sin \theta$ на направления, параллельные и перпендикулярные направлению движения нейтронов. Скорость протона в R -системе обладает поэтому составляющими:

$$\left. \begin{aligned} v_{\parallel}' &= \frac{1}{2} v (1 - \cos \theta) = v \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \\ v_{\perp}' &= \frac{1}{2} v \sin \theta = v \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (49b)$$

Угол между направлением движения протона после столкновения и нейтрона до столкновения определяется

$$\varphi = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \theta. \quad (49c)$$

Если нейтрон испытывает небольшое отклонение θ , протон движется под прямыми углами. Протон, испускаемый в направлении падающих нейтронов, соответствует обмену движения нейтрона в системе C ($\theta = 180^\circ$). Энергия протона отдачи равна

$$E' = \frac{1}{2} Mv'^2 = \frac{1}{2} Mv^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta = E_0 \cos^2 \varphi; \quad (49d)$$

поэтому энергия нейтрона после столкновения

$$E'' = E_0 \sin^2 \varphi. \quad (49e)$$

При лобовом столкновении ($\varphi = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$) вся энергия передается протону. При слабом столкновении ($\varphi \cong 90^\circ$) нейтрон практически не теряет энергии.

Волновая функция двух частиц, взаимодействующих с центральной симметричной силой, всегда выражается в виде ряда по шаровым функциям:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_l c_l \left[\frac{u_l(r)}{r} \right] P_l(\cos \theta). \quad (50)$$

Выберем за направление движения падающего нейтрона ось сферической системы координат. Волновая функция, представляющая рассеяние двух частиц, очевидно, будет обладать осевой симметрией относительно этого направления и поэтому (50) содержит только обычные полиномы Лежандра $P_l(\theta)$, а не шаровые функции $P_{lm}(\theta) e^{im\varphi}$. Радиальные функции u_l удовлетворяют уравнению

$$\frac{\hbar'^2}{M} \left(\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + [E - (-1)^l J(r)] u_l = 0, \quad (32)$$

если принять теорию Майорана.

Асимптотически для больших r мы можем пренебречь членами $\frac{l(l+1)}{r^2}$ и $J(r)$ в (32), так что решение (32) равно

$$u_l = c \sin \left(kr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l \right), \quad (51)$$

где

$$k = \frac{(ME)^{1/2}}{\hbar'} = \frac{M\sigma}{2\hbar'} = \frac{\left(\frac{1}{2} ME_0 \right)^{1/2}}{\hbar'} \quad (52)$$

„Фаза“ δ_l есть постоянная, которую следует определить интегрированием (32). Если $J(r) = 0$, т. е. если между двумя частицами не действует никакой силы, все δ_l обращаются в нуль. Знания δ_l достаточно для определения эффективного поперечника рассеяния для данного угла θ (см. Мот и Месси — Атомные столкновения):

$$d\sigma = \frac{\pi}{2k^2} \left| \sum_l (2l+1) P_l(\theta) (e^{2i\delta_l} - 1) \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (53)$$

Эффективный поперечник $d\sigma$ определяется как число нейтронов, рассеянных в единицу времени под углом между θ и $\theta + d\theta$, если в потоке нейтронов на единицу площади за единицу времени падает один нейтрон.

Мы знаем (§ 9, 12), что силы между протоном и нейтроном сосредоточены в очень малой области a порядка $2 \cdot 10^{-13}$ см. Эта область значительно меньше, чем длина волны всех нейтронов, которыми пользуются в опытах с рассеянием; наиболее быстрые нейтроны, до сих пор использованные для таких опытов, обладают энергией около $E_0 = 4$ MV. Длина волны нейтрона определяется

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} = \frac{\hbar'}{\left(\frac{1}{2} ME_0 \right)^{1/2}} = \frac{1,04 \cdot 10^{-27}}{\left(\frac{1}{2} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 1,59 \cdot 10^{-6} E_0^{\text{MV}} \right)^{1/2}} = \frac{9,05 \cdot 10^{-13}}{(E_0^{\text{MV}})^{1/2}} \text{ см} \quad (54)$$

в системе, где центр тяжести нейтрона и протона покоятся. E_0^{MV} — кинетическая энергия нейтрона, выраженная в MV. Для $E_0 = 4 MV$ мы имеем:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2\pi} = 4,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (54a)$$

что более, чем в два раза, превышает область действия сил. (Мы вычисляем $\lambda' = \frac{\lambda}{2\pi}$, а не λ потому, что λ' есть величина, входящая непосредственно в дальнейшие рассуждения относительно величины δ_l).

Из того обстоятельства, что $a \ll \lambda'$, легко вывести, что все фазы, кроме δ_0 , малы. Чтобы убедиться в этом, докажем сперва, что любая волновая функция u_l становится малой, если r мало по сравнению с „классическим параметром столкновения“

$$r_l = \lambda' l = \frac{lh'}{\frac{1}{2} Mv},$$

стоянию от частицы до ядра, если частица обладает угловым моментом lh' и линейным моментом количества движения $\frac{1}{2} Mv$ и проходит без взаимодействия около рассеивающего ядра ($\frac{1}{2} M$ — приведенная масса).

В квантовой механике r_l отмечает изменение поведения волновой функции u_l . Для $r > r_l$ u_l имеет характер волны, т. е. она вогнута в направлении оси r , в то время как для $r < r_l$ u_l имеет экспоненциальный характер и выпукла (см. фиг. 5). Это вытекает непосредственно из (32). Пренебрежем $J(r)$, что всегда можно сделать при $r > a$ и заведемо для $r = \rho \lambda'$, если $l \neq 0$, из остающихся членов наибольшей величины оказывается член $-\frac{h^2 l(l+1) u_l}{Mr^2}$ в (32) (больше чем Eu_l), если

$$r^2 < \frac{l(l+1) h^2}{ME} = l(l+1) \lambda'^2. \quad (54b)$$

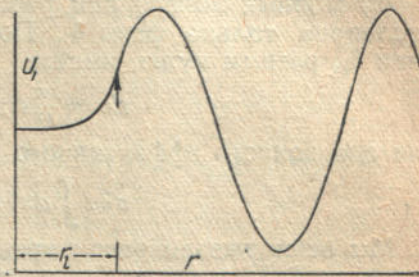
Это, безусловно, выполняется при $r < r_l = \rho \lambda'$. Пренебрегая Eu_l и Ju_l , имеем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l = 0 \quad \text{при } r < r_l = \rho \lambda', \quad (54c)$$

решение которого равно

$$u_l = cr^{l+1} \quad \text{при } r < r_l, \quad (54d)$$

где c — постоянная. Таким образом, u_l быстро убывает с уменьшением r , если r меньше, чем $\rho \lambda'$. Так как область действия a потенциальной энергии $J(r)$ предполагается малой в сравнении с λ' , эти рассуждения, безусловно, применимы при $r = a$, если только l отлично от нуля, т. е. u_l ($l \neq 0$) будет очень малой в области, где действует сила $J(r)$, что уменьшает действие потенциала $J(r)$ на волновую функцию. Так как δ_l измеряет эффект, δ_l должно быть мало. Случай $l = 0$ представляет исключение, потому что здесь „критическое расстояние“ r_l есть нуль, так что наши аргументы неприменимы. (Количественное доказательство см. в § 15).



Фиг. 5. Волновая функция частицы с высоким моментом количества движения ($l = 4$) в потенциальной яме

Функция вогнута к U_l для $r > r_l$, выпукла и очень мала — при $r < r_l$. (Ось $U_l = 0$ на фигуре не показана; она является продолжением начала кривой)

В эффективном поперечнике рассеяния (53) важен поэтому только член $l=0$. Из этого результата, основанного исключительно на том обстоятельстве, что силы между протоном и нейтроном имеют очень малую область действия — меньшую, чем длина волны нейтрона, — вытекает два важных заключения.

(1) Поперечник рассеяния не зависит от угла θ , другими словами, *рассеяние обладает сферической симметрией в системе С, т. е. в системе, в которой центр тяжести нейтрона и протона покоится.*

(2) Полный поперечник рассеяния может быть получен вычислением только фазы δ_0 . Полагая все δ_l в (53), за исключением δ_0 , равным нулю, имеем:

$$d\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \cdot \sin \theta d\theta \quad (55)$$

или для полного эффективного поперечника

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0. \quad (55a)$$

Мы откладываем рассмотрение распределения нейтронов по углам до § 15 и вычислим пока δ_0 , исходя из нашего представления об основном состоянии дейтерона. Известно, что для основного состояния, т. е. для энергии $-\varepsilon$, наклон волновой функции $l=0$ определяется

$$\left[\frac{1}{u_0} \cdot \frac{du_0}{dr} \right]_{r=0} = -\alpha \text{ при } E = -\varepsilon. \quad (34)$$

Покажем сперва, что это соотношение справедливо приближенно для очень больших *положительных* значений E порядка ε , независимо от того, какие силы действуют между нейтроном и протоном. Чтобы убедиться в этом, выпишем волновое уравнение для функций u_0^E и $u_0^{-\varepsilon}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_0^E}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} [E - J(r)] u_0^E &= 0, \\ \frac{d^2 u_0^{-\varepsilon}}{dr^2} + \frac{M}{\hbar^2} [-\varepsilon - J(r)] u_0^{-\varepsilon} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55b)$$

Умножая первое уравнение на $u_0^{-\varepsilon}$ и второе на u_0^{-E} и вычитая, имеем:

$$u_0^{-\varepsilon} \frac{d^2 u_0^E}{dr^2} - u_0^E \frac{d^2 u_0^{-\varepsilon}}{dr^2} = -\frac{M}{\hbar^2} (E + \varepsilon) u_0^E u_0^{-\varepsilon}, \quad (55c)$$

или интегрируя от нуля до a :

$$\left| u_0^{-\varepsilon} \frac{du_0^E}{dr} - u_0^E \frac{du_0^{-\varepsilon}}{dr} \right|_0^{r=a} = -\frac{M}{\hbar^2} (E + \varepsilon) \int_0^a u_0^E u_0^{-\varepsilon} dr. \quad (55d)$$

Выражение с левой стороны знака равенства равно нулю для $r=0$, поэтому что $u_0^{-\varepsilon}$, так же как и u_0^E пропадает при $r=0$ [см. примечание после уравнения (33)]. Деля на $u_0^{-\varepsilon}(a) u_0^E(a)$, получим поэтому:

$$\left(\frac{1}{u_0^E} \cdot \frac{du_0^E}{dr} \right)_{r=a} - \left(\frac{1}{u_0^{-\varepsilon}} \cdot \frac{du_0^{-\varepsilon}}{dr} \right)_{r=a} = -\frac{M}{\hbar^2} \cdot \frac{E + \varepsilon}{u_0^E(a) u_0^{-\varepsilon}(a)} \int_0^a u_0^E u_0^{-\varepsilon} dr. \quad (56)$$

Интеграл с правой стороны — порядка $a u_0^E(\rho) u_0^{-\varepsilon}(a)$. В действительности он несколько меньше, потому что $u_0^{-\varepsilon}$ и u_0^E исчезает при $r=0$, и их значения при $r=a$ практически равны максимальным [см. волновую функцию (38a) для $r < a$]. Положим поэтому

$$\int_0^a u_0^E u_0^{-\varepsilon} dr = \gamma a u_0^E(a) u_0^{-\varepsilon}(a). \quad (56a)$$

Для частного случая прямоугольной потенциальной ямы $\gamma = \frac{1}{2}$ (см. ниже).

Подставляя значение (34) для $\frac{1}{u_0^{-\varepsilon}} \cdot \frac{du_0^{-\varepsilon}}{dr}$, имеем при этом:

$$\left(\frac{1}{u_0^E} \frac{du_0^E}{dr} \right)_{r=a} = -\alpha - \frac{\gamma Ma}{h'^2} (E + \varepsilon). \quad (57)$$

С правой стороны (57) имеет величину -2α , когда E имеет значение:

$$E' \approx \frac{h'^2 \alpha}{Ma \gamma} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{h'^2}{Ma^2} \varepsilon \right)^{1/2}. \quad (58)$$

если иметь в виду (37). В случае прямоугольного потенциального барьера мы получим, пользуясь (40) и $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$E' = \frac{4}{\pi} (V_0 \varepsilon)^{1/2}. \quad (58a)$$

Если допустить, что $V_0 = 30$ MV (§ 21), и принять наблюдаемое значение $\varepsilon = 2,15$ MV, находим $E' = 10$ MV. Для энергий $E \ll E'$ величина $\frac{1}{u_0} \cdot \frac{du_0}{dr}$ приблизительно равна $-\alpha$.

Так как E равно только половине кинетической энергии E_0 нейтрона, можно положить

$$\frac{1}{u_0} \cdot \frac{du_0}{dr} = -\alpha \quad (57a)$$

для всех нейтронов с энергией E_0 мало по сравнению с $2E' = 20$ MV, т. е. для всех энергий нейтронов, с которыми до сих пор экспериментировали.

Допуская теперь, что (57a) справедливо, можно просто вычислить δ_0 . Для $r > a$ $J(r)$ равно нулю, так что

$$\frac{d^2 u_0}{dr^2} = -\frac{ME}{h'^2} u_0 = -k^2 u_0$$

[см. (52)]. Поэтому

$$u_0 = c \sin(kr + \delta_0), \quad (51)$$

где c — постоянная. Соединяя это решение с решением для $r < a$, имеем:

$$\left[\frac{1}{u_0} \cdot \frac{du_0}{dr} \right]_{r=a} = k \operatorname{ctg}(ka + \delta_0) = -\alpha, \quad (59)$$

что приводит к

$$\delta_0 = \frac{1}{2} \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{k} \right) - ka. \quad (59a)$$

До сих пор в этом параграфе мы повсюду принимали, что область a действия сил мала по сравнению с $\lambda' = \frac{1}{k}$. Пренебрежем поэтому ka в (59а); тогда получим:

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = \frac{\alpha}{k}. \quad (59b)$$

Подставляя это выражение в (55а), для полного поперечника получим:

$$\sigma = \frac{4\pi}{a^2 + k^2}, \quad (60)$$

или, заменяя α и k их значениями из (37) и (52):

$$\sigma = \frac{4\pi h'^2}{M(\epsilon + \frac{1}{2}E_0)}, \quad (61)$$

что дает при $\epsilon = 2,15 \text{ MV}$:

$$\sigma = \frac{2,39 \cdot 10^{-24} \epsilon}{\epsilon + \frac{1}{2}E_0} \text{ см}^2. \quad (61a)$$

Это значение эффективного поперечника находится в полном согласии с опытными данными для рассеяния быстрых нейтронов, если учесть трудность опытов, которая состоит главным образом в получении пучка нейтронов с хорошо определенной энергией. Для $E_0 = 4,3 \text{ MV}$ Чэдвик (С6) нашел эффективный поперечник между $0,5$ и $0,8 \cdot 10^{-24}$, в то время как теоретическое значение равно $1,2 \cdot 10^{-24}$; для $E = 2,1 \text{ MV}$ совпадение еще лучше, а именно экспериментальная величина равна от $1,1$ до $1,5 \cdot 10^{-24}$ и теоретическое значение равно $1,6 \cdot 10^{-24} \text{ MV}$.

Для медленных нейтронов однако наша формула совсем непригодна. Экспериментальное значение эффективного поперечника, полученное Давингом, Пэграмом, Финком и Митчелем (Д4) (1), приблизительно равно $35 \cdot 10^{-24} \text{ см}$, т. е. больше чем в 14 раз превышает теоретическое значение для $E_0 \ll \epsilon$ (61а). Так как теоретическое значение зависит только от энергии связи ϵ , а не от деталей взаимодействия нейтрона и протона, на первый взгляд это расхождение кажется очень существенным. Это тем более справедливо, что наше допущение состоит лишь в том, что силы действуют на расстояниях, меньших длины волны нейтрона, и это допущение, безусловно, верно для медленных нейтронов.

Для решения этой трудности Вигнер предложил (частное сообщение) считать, что наблюдаемая энергия связи дейтерона относится к связи протона и нейтрона с параллельными спинами, в то время как о взаимодействии протона и нейтрона с антипараллельными спинами из нее ничего нельзя заключить. Энергия связи ϵ' дейтерона в синглетном состоянии, т. е. с антипараллель-

(1) Последние измерения Амальди и Ферми дают большее значение поперечника — около $80 \cdot 10^{-24} \text{ см}$. Причина такого расхождения неясна.

ными спинами, должна быть очень мала. Этого допущения достаточно для того, чтобы вероятность рассеяния медленных нейтронов протонами согласно (61) была очень велика.

Принимая это объяснение, можно использовать экспериментальную величину поперечника сечения, чтобы определить энергию связи дейтерона в его синглетном состоянии. Эффективный поперечник рассеяния нейтрона протоном при параллельных спинах дается выражением (61); эффективный поперечник при антипараллельных спинах такой же, лишь вместо ϵ следует подставить ϵ' . Вероятность параллельных спинов в три раза больше вероятности антипараллельных⁽¹⁾. Поэтому средний эффективный поперечник рассеяния нейтронов протонами, усредненный по всем направлениям спинов, равен:

$$\sigma^a = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\epsilon' + \frac{1}{2}E_0} + \frac{3}{4} \frac{1}{\epsilon + \frac{1}{2}E_0} \right]. \quad (62)$$

Из наблюдаемого эффективного поперечника для $E_0 = 0$, т. е. $35 \cdot 10^{-24}$, и известной величины $\epsilon = 2,15$ MV получаем

$$\epsilon' = 40\,000 \text{ eV}. \quad (62a)$$

Энергия связи синглетного состояния дейтерона должна поэтому быть очень малой в сравнении с энергией связи основного (триплетного) состояния⁽²⁾.

Фиг. 6 показывает ход эффективного поперечника (62) в зависимости от энергии нейтронов E_0 . Для высоких значений энергии разница между (62) и (61) почти незаметна, потому что энергиями связи ϵ и ϵ' можно пренебречь по сравнению с E_0 . Этим объясняется, почему формула (61) находится в согласии с опытами по рассеянию быстрых нейтронов.

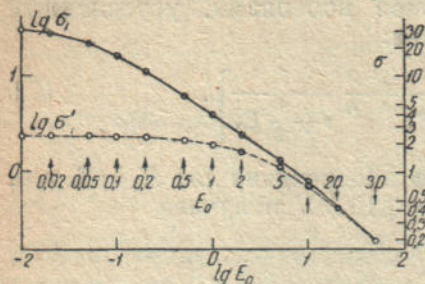
(1) Если спины параллельны, полный спин системы протон + нейтрон равен единице. Этот полный спин может ориентироваться тремя различными способами относительно данного направления, например, направления внешнего поля, причем компоненты спина равны соответственно +1, 0, -1. Поэтому существует три возможных состояния спина, если два спина параллельны. В случае антипараллельных спинов, полный спин равен нулю, и существует только одно квантовое состояние.

(2) Оценивая формулу (62), необходимо прежде всего правильно найти энергию ϵ . При определении этой энергии из эффективного поперечника рассеяния тепловых нейтронов, Бете и Бечер не учитывают того, что тепловые нейтроны обладают меньшей энергией, чем возбуждение колебательных состояний атомов водорода в молекуле парафина. В результате учета этого обстоятельства, как вытекает из применения к рассеянию нейтронов неподвижными протонами метода Борна (см. Fermi, La Ricerca scientifica, II, стр. 13, 1936), поперечник рассеяния нейтронов свободными протонами оказывается в четыре раза меньше поперечника рассеяния нейтронов протонами, не способными двигаться.

При рассеянии нейтронов с энергией порядка вольт и выше протоны ведут себя как свободные, при рассеянии же тепловых нейтронов они ведут себя как почти неспособные двигаться. В результате правильного учета этого обстоятельства a оказывается равной 120 kV (см. Amaldi и Fermi, Phys. Rev., 50, 1936). *Ред.*

При $E_0 = 2$ MV действительный эффективный поперечник (62) станет больше эффективного поперечника (61), который мы должны были бы ожидать, если бы синглетное и триплетное состояния имели одну и ту же энергию связи. Эффективный поперечник возрастает затем быстро с уменьшением энергии нейтрона, достигая половины значения для медленных нейтронов при $E_0 = 100\,000$ V.

Основание для большой разницы между энергиями связи синглетного и триплетного состояний дейтерона, лежащее в ядерных силах, было рассмотрено в § 13. Здесь мы укажем только на невозможность установить из эффективного попереч-



Фиг. 6. Рассеяние нейтронов протонами

По оси абсцисс дана энергия в MV, по оси ординат — эффективный поперечник, обе величины — в логарифмической шкале. Сплошная кривая представляет действительную теоретическую величину поперечника, пунктирная — теоретическую кривую для случая, когда взаимодействие не зависит от относительного положения спинов частиц

ника рассеяния, действительно ли устойчиво синглетное состояние дейтерона. Формула (60) для эффективного поперечника содержит только α^2 или, точнее, соответствующую величину для синглетного состояния, которую мы можем назвать β^2 . Мы можем поэтому найти только величину β из рассеяния, но не ее знак. Лишь положительным β соответствует устойчивое синглетное состояние, для отрицательных β синглетное состояние должно быть неустойчиво. Какая из двух возможностей верна, неважно для приведенных в § 13 заключений относительно Гейзенберговских

сил, поэтому мы воспользовались лишь соотношением $|\beta| \ll \alpha$. Существует однако некоторая разница в вероятности захвата медленных нейтронов протонами (§ 17), и этот эффект может служить для ответа на вопрос о том, устойчиво ли синглетное состояние.

Другой способ определения знака энергии синглетного уровня и одновременно испытания теории в целом был указан Теллером (Т1). Мы предположили, что интенсивность рассеяния нейтронов протонами зависит сильно от относительных направлений их спинов. Это делает рассеяние медленных нейтронов параводородными молекулами, совершенно отличными от рассеивания ортоводородом. В последнем случае оба протона в молекуле имеют спины, параллельные друг другу; поэтому нейтрон будет рассеян обоими протонами сильно или слабо; в каждом случае интенсивность рассеяния должна быть одинаковой для обоих протонов. Следовательно, здесь должны быть сильные интерференционные эффекты, если длина волны нейтронов будет того же порядка, как и расстояние протонов в молекуле H_2 , что имеет место в действительности для нейтронов тепловых скоростей. Рассеянные нейтроны будут иметь такое же распределение по

углам, как и распределение рентгеновских лучей с той же длиной волны, рассеянных двухатомной молекулой.

Рассеяние параводородом должно быть совершенно отличным — здесь мы имеем в каждой молекуле один протон, спин которого параллелен спину падающего нейтрона, в то время как спин другого протона противоположен. В первом приближении только *второй* протон будет рассеивать, так что мы не получим интерференционных эффектов. Наличие интерференции в рассеянии нейтронов ортоводородом и отсутствие при рассеянии параводородом должно быть непосредственным испытанием нашего предположения относительно зависимости рассеяния от направления спинов.

Рассмотрим теперь случай параводорода во втором приближении. Здесь должно быть некоторое рассеяние от протона, имеющего спин, *параллельный* нейтрону. Отношение амплитуд рассеянных волн при „параллельном“ и „антипараллельном“ спине протона для малой энергии нейтрона равно:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{e^{i\pi/2}}{e^{-i\pi/2}} = \frac{1}{i} \text{ приблизительно. } (62b)$$

Теперь, если синглетное состояние является действительным связанным состоянием, фазы рассеянных двумя протонами волн должны быть одинаковы, между тем как они должны быть противоположны, если синглетное состояние виртуально. В первом случае амплитуда нейтронной волны, рассеянной параводородной молекулой в направлении вперед (т. е. в очень малом угле), будет в $\frac{8}{7}$ раз больше, чем рассеяние изолированным протоном, имеющим спин, направленный противоположно нейтрону; во втором случае амплитуда должна быть только $\frac{6}{7}$. Отношение интенсивностей в этих двух случаях должно быть поэтому

$$\frac{\text{действ. сингл. сост.}}{\text{вирт. сост.}} = \left(\frac{8}{6}\right)^2 \approx 1,8. \quad (62c)$$

С другой стороны, если бы мы могли наблюдать рассеяние под такими углами, что разница в пути нейтронов, рассеиваемых двумя протонами молекулы, была бы равна половине длины волны, отношение рассеянных интенсивностей должно было бы быть обратным. В действительности подобный угол не может быть найден, потому что молекула вращается в пространстве. В результате рассеяние под большими углами должно быть почти равным в обоих случаях (действительного и виртуального синглетного состояния).

Обсудим теперь точность наших формул. Мы сделали два пренебрежения, которые в общем счете предполагают область a действия сил равной нулю. С одной стороны, мы пренебрегли ka в (59a), с другой стороны, $\frac{\gamma Ma(E + \epsilon)}{\hbar^2 a}$ в (57a). Вычислим необходимые поправки к нашим формулам, воспользовавшись

(¹) Формулу (62b) следует также исправить в соответствии с примечанием на 59 странице. *Ред.*

простой прямоугольной потенциальной ямой. Мы имеем тогда следующее выражение для волновой функции:

$$\begin{cases} \psi = b \sin k_1 r & \text{для } r < a, \\ \psi = c \sin (kr + \delta_0) & \text{для } r > a \end{cases} \quad (63a)$$

c

$$k_1 = \frac{M^{1/2}(V_0 + E)^{1/2}}{h'}, \quad k = \frac{(ME)^{1/2}}{h'}. \quad (63a)$$

Соединяя функции при $r = a$, получим:

$$\text{ctg}(ka + \delta_0) = \frac{k_1}{k} \text{ctg} k_1 a. \quad (63b)$$

Используем теперь то обстоятельство, что для основного состояния дейтрона [см. (39) и (37)]:

$$k_{10} \text{ctg} k_0 a = -\alpha, \quad (63c)$$

где

$$k_{10} = \frac{M^{1/2}(V_0 - \epsilon)^{1/2}}{h'}; \quad \alpha = \frac{(M\epsilon)^{1/2}}{h'}. \quad (63d)$$

Разлагая по степеням k , имеем:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{10} + \frac{a^2 + k^2}{2k_{10}}, \\ k_1 \text{ctg} k_1 a &= k_{10} \text{ctg} k_{10} a + \frac{1}{2} \frac{a^2 + k^2}{k_{10}} (\text{ctg} k_{10} a - k_{10} a \sin^{-2} k_{10} a). \end{aligned} \quad (63e)$$

Теперь $\text{ctg} k_{10} a$ очень мал по сравнению с единицей, и им можно поэтому пренебречь во втором члене (63e), в то время как $\sin^{-2} k_{10} a$ есть практически 1. Таким образом:

$$k_1 \text{ctg} k_1 a = -\alpha - \frac{1}{2} (a^2 + k^2) a. \quad (63f)$$

Используя определения α и k , мы видим, что это выражение совпадает с (57), если γ положить равным $1/2$. Подставляя (63f) в (63b) и разлагая левую сторону, имеем:

$$\text{ctg} \delta_0 - \frac{ka}{\sin^2 \delta_0} = -\frac{\alpha}{k} - \frac{(a^2 + k^2) a}{2k}. \quad (63g)$$

Во втором члене слева можно подставить вместо $\text{ctg} \delta_0$ приблизительно его значение $-\frac{\alpha}{k}$. Тогда

$$\text{ctg} \delta_0 = -\frac{\alpha}{k} + ka \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) - \frac{(a^2 + k^2) a}{2k} = -\frac{\alpha}{k} + \frac{(a^2 + k^2) a}{2k} \quad (63h)$$

и для эффективного поперечника

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = \frac{4\pi}{k^2 (1 + \text{ctg}^2 \delta_0)} = \frac{4\pi}{k^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2 - \frac{aa(a^2 + k^2)}{k^2}\right]} \approx \frac{4\pi(1 + aa)}{\alpha^2 + k^2}. \quad (63i)$$

пренебрегая высшими степенями aa , чем первый. Таким образом мы видим, что эффективный поперечник просто множится на постоянную величину $1 + aa$. В согласии с теорией H^3 и He^4 (§ 21) мы предположим область a около $2 \cdot 10^{-13}$ см. При экспериментальном значении $\frac{1}{\alpha} = 4,36 \cdot 10^{-13}$ см мы получим тогда $1 + aa = \frac{3}{2}$ для рассеяния нейтронов протонами с параллельными спинами. Для противоположных спинов поправочный множитель должен быть только $1 + \beta a$, где $\beta^2 = \frac{M\epsilon'}{h'^2}$ с $\epsilon' = 40\,000$ В. Это дает:

$$\frac{1}{\beta} = 32 \cdot 10^{-13} \quad (63k)$$

и $1 + \beta a = 1,06$. Поправка, таким образом, мала для большей части эффективного поперечника.

Для чрезвычайно больших энергий разложение по степеням $\frac{E}{V_0}$ является, конечно, незаконным. Если $E \gg V_0$, мы можем разложить по степеням $\frac{V_0}{E}$, вместо $\frac{E}{V_0} \cdot C$.

$$\gamma = \frac{(MV_0)^2}{h'}. \quad (64a)$$

Мы имеем при этом:

$$k_1 = k + \frac{\gamma^2}{2k}, \quad \left(\frac{k_1}{k}\right) \operatorname{ctg} k_1 a = \operatorname{ctg} ka + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 (\operatorname{ctg} ka - ka \sin^{-2} ka). \quad (64b)$$

Поэтому из (63b):

$$\delta_0 = -\frac{1}{2} \sin^2 ka \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 (\operatorname{ctg} ka - ka \sin^{-2} ka) = \left(\frac{\gamma}{2k}\right) \gamma a \left(\frac{1 - \sin 2ka}{2ka}\right). \quad (64c)$$

Последним членом можно пренебречь для больших ka_1 и γa можно положить равным $\frac{\pi}{2}$, согласно (40). Таким образом, мы найдем:

$$\delta_0 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\gamma}{k} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{V_0}{E}\right)^{1/2}. \quad (64d)$$

Поэтому

$$\sigma_0 = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{\gamma^2}{k^4} = \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{h'^2 V_0}{M E^2}. \quad (64)$$

Однако в этом случае заметно рассеиваются также и волны с исчезающим угловым моментом (§ 15, конец).

§ 15. Угловое распределение при рассеянии нейтронов протонами (W12, W9, B18)

Мы уже показали в предыдущем параграфе, что распределение по углам нейтронов, рассеянных протонами, должно иметь практически сферическую симметрию в координатной системе, в которой центр тяжести двух частиц покоится. Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии. Для этого мы вычислим фазы δ_e в формуле рассеяния (53) для $l \neq 0$.

Так как мы уже знаем, что эти фазы малы, можно для их вычисления применить метод возмущений. Мы сделаем это для частного случая $l=1$. Пусть v_1 обозначает волновую функцию для $l=1$ в случае равной нулю потенциальной энергии $J(r)$, т. е. v_1 есть решение уравнения:

$$\frac{h'^2}{M} \left(\frac{d^2 v_1}{dr^2} - \frac{2}{r^2} v_1 \right) + E v_1 = 0. \quad (65)$$

Умножая (65) на u_1 , т. е. на волновую функцию для исчезающего J , и уравнение (32) для $l=1$ на v_1 и вычитая, мы получим:

$$v_1 \frac{d^2 u_1}{dr^2} - u_1 \frac{d^2 v_1}{dr^2} = -\frac{M}{h'^2} J(r) u_1 v_1. \quad (65a)$$

Интегрируя от нуля до очень большого радиуса R , помня, что для нижнего предела $r=0$ обе функции u_1 в v_1 исчезают [см. (55d)] и деля на $u_1(R) v_1(R)$, имеем:

$$\left(\frac{1}{u_1} \cdot \frac{du_1}{dr} \right)_{r=R} - \left(\frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{dr} \right)_{r=R} = -\frac{M}{h'^2} \cdot \frac{\int_0^R J(r) u_1 v_1 dr}{u_1(R) v_1(R)}. \quad (65b)$$

На больших расстояниях как u_1 , так и v_1 ведут себя, как синусоидальные волны; мы положим (см. 51):

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos kr \\ u_1 &= -\cos(kr + \delta). \end{aligned} \quad (65c)$$

Амплитуды предположены равными единице в обоих случаях, что можно всегда выполнить при соответствующей нормировке u_1 и v_1 . Применим (65b) к точке, где v_1 имеет один максимум, т. е. где kR является кратно 2π . Тогда

$$\left[\frac{1}{u_1} \cdot \frac{du_1}{dr}\right]_{r=R} = -k \operatorname{tg}(kR + \delta) = -k \operatorname{tg} \delta; \quad \left[\frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{dr}\right]_{r=R} = 0, \quad u_1 v_1 \approx 1. \quad (65d)$$

Тогда из (65b) следует

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{M \int_0^R J(r) u_1 v_1 dr}{h'^2 k}. \quad (66)$$

Потенциал J имеет большое значение только при $r < a$. Мы знаем однако, что в этой области волновые функции u_1 и v_1 малы [см. обсуждение после ур. (54)]. Отсюда видно, что δ должно быть малым. Количественная оценка может быть получена, если положить u_1 под знаком интеграла равной v_1 . Последняя функция, т. е. решение волнового уравнения (65) для свободной частицы с единичным угловым моментом, хорошо известна. Она равна:

$$v_1 = -\cos kr + \frac{\sin kr}{kr}. \quad (66a)$$

Для $kr \ll 1$ найдем, разлагая в ряд:

$$v_1 = \frac{1}{3}(kr)^2. \quad (66b)$$

Подставляя это выражение в (66), имеем:

$$\delta_1 = \frac{1}{9} \cdot \frac{M k^3 \int_0^a J(r) r^4 dr}{h'^2}. \quad (66c)$$

Интеграл может быть оценен с помощью уравнения (37c), основанного на наличии устойчивого состояния дейтерона со сравнительно низкой энергией связи. Мы можем приблизительно положить, что

$$\int_0^a J(r) \cdot r^4 dr = \frac{1}{2} \mu a^3 \int_0^a J(r) r dr = -\frac{1}{2} \mu a^3 \frac{h'^2}{M}, \quad (66d)$$

где μ — постоянная порядка единицы.

В частном случае прямоугольной потенциальной ямы μ может быть определено простым решением волнового уравнения и получается равной

$$\mu = 6 \left(1 + \frac{12}{\pi^2}\right) - \frac{36}{\pi} \cdot \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = 0,89. \quad (66e)$$

Подставляя (66d) в (66c), находим:

$$\delta_1 = -\frac{1}{18} \mu (ka)^3. \quad (67)$$

δ_1 , следовательно, очень мала в сравнении с единицей, поскольку длина волны $\frac{1}{k}$ нейтрона велика в сравнении с областью сил a , т. е. поскольку энергия нейтрона мала в сравнении с глубиной V_0 потенциальной ямы [см. (40), (52)]. Это правильно для

всех до сих пор имеющих в распоряжении нейтронов, так как V_0 — порядка 30 MV. Более высокие δ_l (для $l > 1$), конечно, еще меньше, чем δ_1 . Вычисление, аналогичное вышеприведенным, дает:

$$\delta_l \approx \frac{(-1)^l}{1^2 \cdot 3^2 \dots (2l+1)^2} \mu_l (ka)^{2l+1}, \quad (67a)$$

где μ_l — постоянная, меньшая единицы.

При вычислении углового распределения рассеянных нейтронов для имеющих в распоряжении скоростей, мы можем, следовательно, пренебречь всеми членами l , большими единицы, а также и δ_1^2 . Тогда из (53):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\pi}{2k^2} |\cos 2\delta_0 - 1 + i \sin 2\delta_0 + 6i\delta_1 \cos \theta|^2 \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\pi}{2k^2} [4 \sin^2 \delta_0 + 12\delta_1 \sin 2\delta_0 \cos \theta] \sin \theta d\theta, \quad (68) \\ d\sigma &= \frac{2\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 (1 + 6\delta_1 \operatorname{ctg} \delta_0 \cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Скобки определяется отклонение рассеяния от сферической симметрии. Согласно (67) δ_1 отрицательно. Таким образом, рассеяние назад $\theta > 90^\circ$ больше, чем рассеяние вперед $\theta < 90^\circ$, при условии, что $\operatorname{ctg} \delta_0$ положителен. Если $\operatorname{ctg} \delta_0$ отрицателен, справедливо обратное. Но $\operatorname{ctg} \delta_0$ вычислен в (63h). Он, очевидно, отрицателен для малых энергий нейтронов и положителен — для больших энергий. $\operatorname{ctg} \delta_0$ равен нулю, когда

$$a^2 + k^2 = \frac{2\alpha}{a}. \quad (69)$$

или, вводя энергию согласно (37), (40), (52)⁽¹⁾:

$$\frac{1}{2} E_s^0 + \varepsilon = 2 \left(\frac{\varepsilon h^2}{Ma^2} \right)^{1/2} = \frac{4}{\pi} (\varepsilon V_0)^{1/2}. \quad (69a)$$

Если нейтрон и протон имеют параллельные спины, мы можем подставить $\varepsilon = 2,15$ MV и V_0 — около 30 MV, так что

$$E_s^0 = 20 \text{ MV}. \quad (69b)$$

Для противоположных спинов асимметрия ничтожна. Нейтроны с энергией, меньшей примерно 20 MV, поэтому могут считаться „медленными“ в отношении знака отклонения от сферической симметрии рассеивания.

Чтобы явно вычислить отклонение от сферической симметрии, мы должны сложить эффективные поперечники для параллельных и антипараллельных спинов. Из (60), (62), (63) и (63h) имеем:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{3}{4} \frac{2\pi}{k^2 + \alpha^2} \left\{ 1 - \frac{6\delta_1 \cos \theta}{k} \cdot \left[\alpha - \frac{1}{2} \alpha (a^2 + k^2) \right] \right\} \sin \theta d\theta + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{2\pi}{k^2 + \beta^2} \left\{ 1 - \frac{6\delta_1 \cos \theta}{k} \left[\beta - \frac{1}{2} \alpha (\beta^2 + k^2) \right] \right\} \sin \theta d\theta. \quad (70) \end{aligned}$$

(1) Мы вводим действительную кинетическую энергию E_0 нейтрона, а не его кинетическую энергию в системе координат, в которой центр инерции покоится.

Подставляя δ_1 из (67), мы видим, что асимметрия может быть заметна только для сравнительно высоких энергий. Пренебрежем поэтому в (70) членами порядка $\left(\frac{a}{k}\right)^4$. Пренебрегая также β в сравнении с α , мы найдем, что относительная асимметрия

$$A = \frac{\sigma(\theta=0) - \sigma(\theta=\pi)}{\sigma\left(\theta = \frac{1}{2}\pi\right)} \quad (70a)$$

имеет максимум для

$$k_0^2 = \frac{3\alpha}{4a} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha x\right), \quad (70b)$$

что соответствует энергии около 3 MV.

Для этой энергии асимметрия становится

$$A_{\max} = \frac{9}{48} \mu (a\alpha)^2 \left[1 - \frac{5}{3} a\alpha\right] = 0,85\%, \quad (71)$$

если мы положим $a = 2 \cdot 10^{-13}$ см и $\frac{1}{\alpha} = 4,4 \cdot 10^{-13}$ см.

Таким образом, асимметрия рассеяния даже в своем максимуме не достигает одного процента. Такой малой асимметрии невозможно обнаружить существующими методами наблюдения.

Заметная асимметрия в рассеянии должна иметь место только для нейтронов с энергией выше 20 MV (см. 69b). Такими нейтронами мы в настоящее время не располагаем. Нейтроны с этими очень высокими энергиями должны предпочтительно рассеиваться протонами назад [см. ур. (68)], в противоположность другим рассеивающим процессам. Это необыкновенное поведение обусловлено обменным типом сил между протоном и нейтроном. Процессы рассеяния могут быть интерпретованы тем, что падающая частица в действительности отклоняется только на малый угол, но в процессе рассеяния изменяет свою роль, так что, если до столкновения она была нейтроном, то после столкновения становится протоном.

Впервые было указано Виком, что, наблюдая асимметрию рассеяния нейтронов протонами, можно решить, являются ли силы между частицами „обычными“ или „обменного“ типа. Например, при высоких энергиях, если действуют обычные силы, следует ожидать, что нейтроны будут рассеиваться предпочтительно вперед, в направлении движения, в то время как мы видели, что они должны рассеиваться преимущественно назад при обменных силах. При низких энергиях, благодаря отрицательному знаку $\text{ctg } \delta_0$ в (68), должно иметь место обратное. К сожалению, асимметрия рассеяния слишком мала для энергий нейтронов, имеющихся в нашем распоряжении, чтобы таким путем можно было выяснить вопрос относительно сил, действующих между нейтроном и протоном.

Наш основной результат таким образом состоит в том, что рассеяние нейтронов протонами теоретически должно иметь сферическую симметрию в координатной системе, в которой центр

тяжести нейтрона и протона покоится. В „обычной“ координатной системе, в которой протон первоначально покоился, распределение должно быть:

$$d\sigma = \text{const} \cdot \sin \theta d\theta = 2 \text{const} \cdot \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad (72)$$

т. е. число рассеянных протонов на единицу телесного угла $\sin \varphi d\varphi$ должно иметь нерезкий максимум в направлении движения $\varphi = 0$. Экспериментальные результаты чрезвычайно противоречивы. В то время как Чэдвик (С6), Монод-Герцен (М15), Кюри (К15) и Бартон, Мюллер и Лампсон (неопубликованный предварительный результат опытов с фотографической эмульсией) нашли сферическую симметрию в пределах экспериментальных ошибок их опытов, что согласуется с теорией, — Гаркинс, Гапс, Кэмен и Ньюсон (Н3) нашли большее число протонов в малых углах φ относительно падающего нейтрона, чем в больших углах. Это должно означать, что большие отклонения θ нейтронов более вероятны, чем малые, что совершенно несовместимо с нашими соображениями. До сих пор вероятная экспериментальная ошибка еще очень велика. Если однако опыты Гаркинса и других подтвердились бы более точными исследованиями, наши предположения относительно сил между протоном и нейтроном, действующих на близких расстояниях, стали бы совершенно несостоятельными. Возникло бы также очень серьезное затруднение относительно большого массового дефекта α -частицы по сравнению с массовым дефектом дейтерона.

Прежде, чем закончить этот параграф, вычислим эффективный поперечник рассеяния для нейтронов с очень большой энергией $E \gg V_0$. В этом случае можно пользоваться приближенным методом Борна для определения эффективного поперечника рассеяния, который дает:

$$d\sigma = \frac{(1/2 M)^2}{2\pi h^4} \left| \int U'^*(\mathbf{r}) J(\mathbf{r}) U(-\mathbf{r}) d\tau \right|^2 \sin \theta d\theta, \quad (73)$$

где $U(\mathbf{r})$ и $U'(\mathbf{r})$ — волновые функции падающего и рассеянного нейтрона в нулевом приближении. Следует заметить, что в (73), благодаря обменной природе сил, входит $U(-\mathbf{r})$, вместо $U(\mathbf{r})$. Обозначая волновой вектор падающего и рассеянного нейтрона через \mathbf{k} и \mathbf{k}' , имеем:

$$U(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad U'(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{r})}$$

$$d\sigma = \frac{M^2}{8\pi h^4} \left| \int J(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\tau \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (73a)$$

Предположим, что $J(\mathbf{r})$ зависит экспоненциально от r , как ⁽¹⁾, именно

$$J(\mathbf{r}) = -V_0 e^{-\frac{r}{a}}. \quad (73b)$$

⁽¹⁾ Прямоугольная потенциальная яма дает для $d\sigma$ выражение, являющееся быстро осциллирующей функцией $(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$.

Элементарное вычисление дает тогда

$$d\sigma = \frac{2\pi M^2 V_0^2 \sin \theta d\theta}{h^2 a^2 [(k+k')^2 + a^{-2}]^2}. \quad (73c)$$

Примем во внимание теперь, что (см. таблица II)

$$\left. \begin{aligned} (k+k')^2 &= 2k^2(1+\cos\theta), \quad \frac{2h^2 k^2}{M} = E_0, \\ V_0 &= \frac{Ah^2}{Ma^2}, \quad \text{где } A \approx \sqrt{8} \end{aligned} \right\} \quad (73d)$$

Имеем, за исключением малых значений $1 + \cos \theta$ (порядка $\frac{V_0}{E_0}$):

$$d\sigma \approx \frac{\pi}{4} a^2 \left(\frac{V_0}{E_0}\right)^4 (1 + \cos \theta)^{-4} \sin \theta d\theta, \quad (74)$$

или, вводя угол φ между протоном отдачи и падающим нейтроном ($\varphi = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$):

$$d\sigma = \frac{\pi}{64} a^2 \left(\frac{V_0}{E_0}\right)^4 \sin^{-8} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi. \quad (74a)$$

Полный эффективный поперечник, если пренебрежем высокими степенями $\frac{V_0}{E_0}$, равен:

$$\sigma = \frac{\pi}{3k^2} \left(\frac{MV_0 a^2}{h^2}\right)^2 \sim \frac{\pi A^2}{3k^2} = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{ME_0}. \quad (74)$$

Для нейтронов с энергией порядка 10^9 V это дает довольно большой эффективный поперечник рассеяния порядка $0,68 \cdot 10^{-26}$ см².

Баба (B19) впервые указал, что столкновение между протонами и нейтронами очень большой энергии имеет важное приложение к космическим лучам. Предположим, что в космических лучах находятся протоны с энергией 10^9 V. Подобные протоны имеют большую вероятность выбить нейтрон из ядра, с которым они столкнутся. Вследствие обменного характера сил, выбитый нейтрон должен иметь почти полную энергию протона. Эффективный поперечник для этих процессов при столкновениях между протонами и, например, ядрами азота, можно положить заведомо в 7 раз большим, чем эффективный поперечник протонов и свободных нейтронов, потому что энергия связи ядра мала в сравнении с кинетической энергией протона. Эффективный поперечник равен, таким образом $\frac{1}{2} \cdot 10^{-25}$ см² для N, что означает, что процесс должен происходить примерно 1 раз на 5 м водян. эквивалента атмосферы. Протоны космических лучей должны, таким путем, „сделаться“ нейтронами после прохождения сравнительно малого количества воздуха и сделаться вновь протонами после прохождения большего слоя воздуха. Падающая протонная радиация должна состоять поэтому наполовину из протонов и наполовину из нейтронов, когда она достигает уровня моря. Кроме того плотность вещества, необходимая для остановки протонов данной энергии, должна быть удвоена этими процессами, так как нейтроны не испытывают заметных потерь энергии.

§ 16. Фотоэлектрическая дезинтеграция дейтерона (С7, С8, В16, F8, Н1).

Чэдвик и Гольдгабер (С7, С8) наблюдали дезинтеграцию дейтерона на нейтрон и протон γ -квантами из ThC' , имеющими энергию $h\nu = 2,62 \text{ MV}$. Эти эксперименты, помимо того, что они сами по себе имеют большой интерес, дают в то же время наиболее точное определение энергии связи дейтерона.

С этой целью Чэдвик и Гольдгабер определили число ионов, которые образуются протоном, получаемым при дезинтеграции. Это число примерно равно 7200 с точностью до $\pm 20\%$. Средняя энергия, затрачиваемая протоном при образовании одного иона в воздухе, близка к 33 V. Это число также имеет место для ионизации α -частицами и электронами.

Кинетическая энергия протона есть, следовательно, $33 \cdot 7200 = 240\,000 \text{ eV} \pm 20\%$. Нейтрон, образованный при дезинтеграции, должен вследствие сохранения момента получить ту же энергию, что и протон, и идти в сторону, противоположную протону, так как импульсом γ -кванта можно пренебречь в сравнении с импульсом протона и нейтрона⁽¹⁾.

Кинетическая энергия протона и нейтрона будет равна $2 \cdot 0,24 \text{ MV} = 0,48 \text{ MV}$ с точностью $\pm 20\% = \pm 0,10 \text{ MV}$ ⁽²⁾. Следовательно, энергия связи дейтерона будет:

$$\epsilon = 2,62 - 0,48 \pm 0,1 = 2,14 \pm 0,10 \text{ MV}. \quad (75)$$

Этим значением мы неоднократно пользовались.

Из найденной энергии связи дейтерона мы можем также определить массу нейтрона, так как масса протона и дейтерона известны из масс-спектроскопических определений.

Принимая значения, предположенные Бете (В13), имеем:

$$\begin{aligned} H^2 &= 2,01423 \pm 0,0002, \\ H^1 &= 1,00807, \end{aligned}$$

(1) Простое рассмотрение импульсов показывает, что энергия протона будет меняться от 0,21 MV, если он излучается в направлении, противоположном направлению падающего γ -кванта, до 0,27 MV, если он имеет то же самое направление. Средняя энергия протона равна 0,24 MV.

(2) Фитер [Natur 136, 467 (1935)] измерил пробег протонов и на основании его нашел кинетическую энергию протонов равной 0,18 MV. Соотношение между пробегом и энергией, употребляющееся теперь, повидимому, дает слишком низкие значения для энергии (глава XV), так что правильная величина энергии составляет около 0,20 MV. Это повышает ϵ до 2,22 MV, вес нейтрона — до 1,00855 и снижает $\frac{1}{\alpha}$ (см. 44а) до $4,29 \cdot 10^{-13}$, числовой множитель в (61а) — до $2,31 \cdot 10^{-24}$ и в (80) — до $1,12 \cdot 10^{-26}$. Кроме того в (80b) $\gamma - 1$ должно было бы быть равным 0,178 и $\sigma = 5,3 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$, что находится в прекрасном согласии с наблюдающимся значением $5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$. Однако конечная область действия сил (см. ниже, 80b) и учет фотомангнитного эффекта (81) должны опять теоретически поднять значение эффективного поперечника дезинтеграции дейтерона до величины, примерно вдвое превышающей экспериментальное значение, что еще остается в пределах экспериментальной ошибки.

$$\varepsilon = \frac{(2,14 \pm 0,10)}{931} = 0,00230 \pm 0,00010 \text{ массовых ед.}, \quad (75a)$$

$$n^1 = N^2 + \varepsilon - N^1 = 1,00846 \pm 0,0002.$$

Таким образом масса нейтрона оказывается на $0,00039$ массовых единицы $= 0,36 \pm 0,20$ MV больше массы атома водорода. Этот результат выведен только из соотношения атомных весов тяжелого и легкого водорода, определенных Бэйнбриджем (B5), и не зависит от абсолютного значения атомного веса дейтерона в сравнении с кислородом. Единственной ошибкой, которая может существенно влиять на разницу между атомным весом нейтрона и протона, является ошибка Бэйнбриджа в измерениях масс легкого и тяжелого водорода. Для того чтобы не было разницы в массах протона и нейтрона, эта ошибка должна была бы на много превышать ошибку, выведенную на основании условий его опытов (1). В настоящее время кажется более вероятным, что результат (75a) является правильным, т. е. что нейтрон действительно тяжелее, чем атом водорода. Свободный нейтрон поэтому должен спонтанно распадаться на протон плюс электрон (§ 43), с периодом распада порядка месяца.

Возвращаясь к дезинтеграции дейтерона γ -квантами, заметим, что этот эффект аналогичен фотоэлектрическому эффекту в атомах. Электрическое поле γ -кванта вызывает оптический переход дейтерона из основного состояния в состояние с положительной энергией:

$$E = h\nu - \varepsilon, \quad (76)$$

где E — сумма кинетических энергий протона и нейтрона, получающихся при распаде. Эффективный поперечник для фотоэлектрического эффекта определяется хорошо известной формулой

$$\sigma = \frac{8\pi^3\nu}{c} |M_{0E^{el}}|^2, \quad (77)$$

где M_{0E} есть матричный элемент электрического момента дейтерона относительно его центра тяжести в направлении поляризации γ -луча. Матричный элемент относится к переходу из основного состояния в состояние с энергией E . (Переход также может быть произведен магнитным моментом; но этот „магнитный дипольный“ фотоэффект однако всегда мал в сравнении с „электрическим дипольным“ эффектом, рассмотренным здесь, за исключением очень низких энергий E (смотри конец этого параграфа и § 17). Так как только протон имеет заряд e и так как его координата относительно центра тяжести дейтерона есть $\frac{1}{2}r$, мы имеем:

$$M_{0E^{el}} = \frac{1}{2} e \int U_0 z U_E d\tau, \quad (77a)$$

если γ -квант поляризован в направлении z . Здесь U_0 есть волновая функция основного состояния дейтерона, данная в (44c).

(1) Если воспользоваться последним „предварительным“ измерением отношения $D:H$ (A5), произведенным Астоном, то масса нейтрона окажется равной $1,0090$, т. е. на $0,9$ MV больше массы атома водорода.

и U_E — волновая функция конечного состояния, нормированные на единицу энергии.

Из обычного правила отбора для момента количества движения мы вывели, что конечное состояние U_E должно иметь угловой момент $l=1$, т. е. в спектроскопических обозначениях оно должно быть P -состоянием⁽¹⁾. Мы знаем однако из §§ 13 и 15, что в P -состоянии практически не действуют силы между нейтроном и протоном при условии, что область a мала в сравнении с длиной волны $\lambda' = \frac{h'}{ME}^{1/2}$, соответствующей состоянию E . Указанное условие хорошо выполняется для нашего случая ($E=0,5$ MV, $\lambda' = 9 \cdot 10^{-13}$ см $= 4a$). Поэтому волновая функция для P -состояния будет иметь такой вид, как если бы нейтрон и протон были свободны, т. е.

$$U_E = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{dk}{dE}\right)^{1/2} \cdot \frac{(-\cos kr + \frac{\sin kr}{kr})}{r}. \quad (77b)$$

Здесь $\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \theta$ представляет (нормированную) первую шаровую функцию. В скобках заключена радиальная волновая функция, как она дана в (66a). Множитель $1/r$ был введен в (50). $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ нормирует радиальную волновую функцию „на единицу волнового числа dk “⁽²⁾, в то время как фактор

$$\left(\frac{dk}{dE}\right)^{1/2} = \left(\frac{M}{2h^2k}\right)^{1/2} \quad (77c)$$

превращает эту нормировку в нормировку на единицу энергии. Перепишем (77b) в виде:

$$U_E = \frac{3^{1/2}}{2\pi h'} \cos \theta \left(\frac{M}{k}\right)^{1/2} \frac{1}{kr^2} \operatorname{Re} [e^{ikr} (-i - kr)], \quad (77d)$$

где Re обозначает вещественную часть. Пусть ось нашей сферической координатной системы параллельна z , так что

$$z = r \cos \theta. \quad (77e)$$

Воспользуемся кроме того тем обстоятельством, что волновая функция основного состояния в большей части пространства имеет вид (44c). Тогда из (77a) получим:

$$M_{0E}^{el} = \frac{1}{2} e \frac{3^{1/2}}{(2\pi)^{1/2} h'} \left(\frac{\alpha M}{k}\right)^{1/2} \int 4\pi r^3 dr \cos^2 \theta \frac{1}{kr^2} \operatorname{Re} [(-i - kr) e^{-\alpha r + ikr}]. \quad (78)$$

$\cos^2 \theta$ есть среднее значение $\cos^2 \theta$ по всем направлениям в пространстве, равное $\frac{1}{3}$. Производя интегрирование, получаем:

$$\begin{aligned} M_{0E}^{el} &= \frac{e}{(6\pi)^{1/2} h'} \left(\frac{\alpha M}{k}\right)^{1/2} \cdot \operatorname{Re} \left(-\frac{i}{k(\alpha - ik)} - \frac{1}{(\alpha - ik)^2} \right) = \\ &= \frac{e}{(6\pi)^{1/2} h'} \left(\frac{\alpha M}{k}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{\alpha^2 + k^2} - \frac{\alpha^2 - k^2}{(\alpha^2 + k^2)^2} \right] = \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/2} \frac{e}{h'} (\alpha M)^{1/2} \frac{k^{3/2}}{(\alpha^2 + k^2)^2}. \quad (78a) \end{aligned}$$

(1) Вернее оно будет 3P -состоянием, так как спин остается неизменным при фотоэлектрическом переходе и так как основное состояние — триплетное состояние.

(2) См. Handbuch der Physik, том 24, стр. 292, уравнение (4.18)

Подставляя это выражение в (77), найдем для эффективного поперечника:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{2\pi\nu}{c} \cdot \frac{e^2 M}{h'^2} \frac{\alpha k^3}{(\alpha^2 + k^2)^4}. \quad (78b)$$

Пользуясь (76)

$$h'\omega = 2\pi h'\nu = E + \varepsilon = \frac{h'^2(\alpha^2 + k^2)}{M} \quad (78c)$$

и, выражая α и k через ε и E [см. (37) и (52)], имеем:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2}{h'c} \cdot \frac{h'^2}{M} \cdot \frac{\varepsilon^{1/2} E^{3/2}}{(E + \varepsilon)^3}. \quad (79)$$

Вводя отношение энергии γ -кванта к энергии связи дейтерона, именно:

$$\gamma = \frac{h\nu}{\varepsilon} = \frac{E + \varepsilon}{\varepsilon}, \quad (79a)$$

получим, пользуясь (44a):

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{(\gamma - 1)^{3/2}}{\gamma^3} = 1,16 \cdot 10^{-26} (\gamma - 1)^{3/2} \gamma^{-3} \text{ см}^2. \quad (80)$$

Эффективный поперечник равен нулю для $\gamma = 1$, т. е. при энергии γ -луча как раз достаточной, чтобы произвести дезинтеграцию. С возрастанием энергии γ -кванта σ медленно возрастает и достигает максимума для $\gamma = 2$, т. е. при кинетической энергии продуктов дезинтеграции E , равной энергии связи ε дейтерона. Этот максимум согласно (80) равен:

$$\sigma_{\max} = 14,5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \quad (80a)$$

Для еще больших энергий γ -кванта эффективный поперечник снова уменьшается.

Для γ -квантов ThC' мы имеем (смотри выше) $E = 0,48 \text{ MV}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma - 1 &= \frac{E}{\varepsilon} = 0,224, \\ \sigma &= 6,7 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2. \end{aligned} \quad (80)$$

Эксперименты Чэдвика и Гольдгабера дали эффективный поперечник $5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^2$. Неточность при этом такова, что он может быть вдвое больше или меньше. Следовательно, полученное согласие между теорией и экспериментом является удовлетворительным.

Следует вновь подчеркнуть, что теоретическая формула не содержит никаких предположений, за исключением наших обычных о том, что область a действия сил между нейтроном и протоном мала в сравнении с радиусом дейтерона. Ошибка, вводимая этим предположением, обуславливается главным образом нормировочным множителем собственной функции основного состояния, которая должна была бы согласно (44 d) быть умножена на фактор $1 + \frac{1}{2} \alpha a$, что дало бы для эффективного поперечника увеличение в $1 + \alpha a \approx 1,4$ (см. II) [поправка, необходимая в вычислении самого матричного элемента M_{0E} , а не нормировочного

множителя, очень мала, потому что доля области $r < a$, для которой выражения (44 с) и (77 d) не имеют силы, в величине матричного элемента составляет лишь $(ka)^3$, т. е. около $\frac{1}{2}$ процента]. Теоретический эффективный поперечник должен быть, таким образом, несколько больше, чем (80).

Кроме того мы пренебрегли возможностью „фотоманнитного“ эффекта, т. е. переходом, обусловленным магнитным дипольным моментом (F8). В следующем параграфе мы вычислим соответствующий дипольный момент $M_{0E\text{магн}}$ (см. 34). Отношение вероятности фотоманнитного и фотоэлектрического эффектов равно (см. 78 а, 37, 52, 78 с, 94):

$$\tau = \frac{1}{3} \left(\frac{M_{0E\text{магн}}}{M_{0E\text{эл}}} \right)^2 = \frac{(\mu_p - \mu_n)^2}{4} \cdot \frac{(E + \varepsilon)^2}{E + \varepsilon'} \cdot \frac{(\varepsilon^{1/2} \mp \varepsilon'^{1/2})^2}{EMc^2}. \quad (81)$$

Коэффициент $\frac{1}{3}$ обусловлен тем, что каждое из трех магнитных подсостояний основного состояния дейтерона может быть дезинтегрировано квантом данной поляризации в фотоэлектрическом эффекте, между тем как только одно из трех подсостояний может быть дезинтегрировано фотоманнитно [см. замечание после (92 b)]. Для $\mu_p - \mu_n = 4,9$ (см. § 5), $E = 0,48$, $\varepsilon = 2,14$, $\varepsilon' = 0,040$ и $Mc^2 = 931$ MV (81) дает 0,31 или 0,56, в зависимости от знака в числителе. [Отрицательный знак берется, если синглетное состояние дейтерона устойчиво (см. §§ 13, 15, 17), положительный знак — если устойчивого синглетного состояния нет]. Для γ -квантов Th C' мы должны поэтому прибавить около 31 процента (или 56%) к эффективному поперечнику (80 b) для фотоэлектрической дезинтеграции. Для γ -квантов меньшей энергии, но все же способных произвести дезинтеграцию, отношение (81) должно быть выше, достигая $\tau = 1$ для $E_c = 210\,000$ или $300\,000$ V соответственно, в зависимости от знака, стоящего в (81). Если продукты дезинтеграции получают меньше энергии, чем E_c , тогда будет преобладать магнитный эффект, что обусловит замедленное спадание эффективного поперечника к нулю с уменьшением E . Полная формула для эффекта, включая электрический и магнитный эффект, записывается:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{e^2}{\hbar^2 c} \cdot \frac{\hbar^2}{M} \left[\frac{\varepsilon^{1/2} E^{3/2}}{(E + \varepsilon)^3} + \frac{(\mu_p - \mu_n)^2}{4} \cdot \frac{E^{1/2} \varepsilon^{1/2} (\varepsilon^{1/2} \pm \varepsilon'^{1/2})^2}{(E + \varepsilon)(E + \varepsilon') Mc^2} \right], \quad (81 \text{ а})$$

причем знак минус или плюс ставится соответственно тому, устойчиво синглетное состояние дейтерона или нет.

Наиболее важное влияние имеет фотоманнитный эффект на *угловое распределение* протонов и нейтронов, производимых при дезинтеграции дейтерона. Как мы видели, фотоэлектрический эффект ведет к P -состоянию в непрерывном спектре, более точно, к такому P -состоянию, которое не имеет момента количества движения вокруг направления поляризации падающего γ -кванта.

В этом случае число протонов (или нейтронов), отнесенных к единице телесного угла, должно быть пропорционально $\cos^2 \theta$, где θ — угол между направлением протона и поляризацией γ -кванта. Усредняя по всем направлениям поляризации γ -квантов, мы получим распределение, пропорциональное $\sin^2 \theta$, где θ — угол между направлением распространения γ -луча и направлением движения протона. С другой стороны, магнитный эффект ведет (см. § 17) к 1S -состоянию в непрерывном спектре дейтерона, т. е. к равномерному распределению протонов по углам. Если отношение вероятности магнитного эффекта к электрическому равно τ , число протонов, вырываемых в телесном угле $\sin \theta d\theta$, должно быть пропорционально

$$\sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \left(\sin^2 \theta + \frac{2}{3} \tau \right) \sin \theta d\theta. \quad (82)$$

Магнитный эффект может быть поэтому проверен наблюдением числа протонов (или нейтронов), испускаемых в направлении распределения γ -луча. Это число должно равняться нулю, если магнитный эффект отсутствует. Измеряя это число как в направлении движения ($\theta = 0^\circ$), так и в перпендикулярном направлении к γ -лучу ($\theta = 90^\circ$), можно определить коэффициент τ количественно. Подставляя τ в (81), можно затем решить, какой знак в (81) соответствует действительности, другими словами, существует ли устойчивое синглетное состояние дейтерона или нет.

Дезинтеграция дейтерона может быть также получена электронной бомбардировкой дейтерия. Можно показать (B16), что электрическое поле электрона примерно в 137 раз менее эффективно, чем поле кванта. Если энергия электрона велика в сравнении с энергией связи дейтерона, эффективный поперечник будет (B16, ур. 28):

$$\sigma_E = \frac{2\pi}{3x^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\log \frac{W^2}{\epsilon m c^2} - 1,432 \right) = 2,1 \cdot 10^{-29} \left(\log \frac{W^2}{\epsilon m c^2} - 1,432 \right) \text{ см}^2, \quad (83)$$

где m — масса электрона и \log обозначает натуральный логарифм. Повидимому, не невозможно наблюдать этот эффект. Фактически дезинтеграция бериллиевых ядер была впервые проведена электронной бомбардировкой (B21). Однако необходимо помнить, что быстрые электроны в большом числе производят рентгеновские лучи (непрерывный спектр рентгеновских лучей). Эти вторичные рентгеновские лучи могут быть более эффективны в производстве ядерных дезинтеграций, чем первичные электроны.

Было подсчитано рассеяние света дейтерием (B16). Оно меньше, чем рассеяние свободным протоном и, таким образом, трудно наблюдаемо.

§ 17. Захват нейтронов протонами (F8, W3, D4)

Нейтроны могут быть захвачены протонами с испусканием γ -кванта, который уносит избыток энергии.

$$h\nu = E + \epsilon = \frac{1}{2} E_0 + \epsilon \quad (76a)$$

[E_0 — кинетическая энергия нейтрона в „обычной“ координатной системе (R -система, § 14), E — кинетическая энергия в системе, в которой центр тяжести протона и нейтрона покоится (C -система, § 14)]. Этот процесс обратен фотоэлектрической дезинтеграции, рассмотренной в предыдущем параграфе; следовательно, вероятности этих двух процессов связаны термодинамическими соотношениями.

В каждом из этих двух процессов мы имеем в начальном состоянии падающую частицу, которой в одном случае является нейтрон, а в другом случае — световой квант. Эффективное сечение какого-нибудь процесса обычно определяется числом процессов, имеющих место в секунду, деленным на поток частиц. Число процессов в секунду пропорционально квадрату матричного элемента и числу состояний конечной системы на единицу энергии. Пусть мы имеем в конечном состоянии в качестве вылетающей частицы или световой квант, или нейтрон. Число возможных состояний частицы с импульсом p и энергией E на единицу объема и на dE есть:

$$\frac{4\pi p^2}{h^3} \cdot \frac{dp}{dE}. \quad (84)$$

Если воспользоваться соотношением

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4, \quad (84a)$$

где E — энергия, включающая и энергию „покоя“ mc^2 , то (84) переходит в

$$\frac{4\pi p E}{h^3 c^2}. \quad (84b)$$

Если поэтому индекс 1 отнести к падающей частице, индекс 2 — к частице образованной, эффективное сечение равно:

$$\sigma_{12} \propto \frac{p_2 E_2}{c^2 v_1} |M|^2, \quad (85)$$

где M — матричный элемент на единицу плотности обеих частиц и v_1 — скорость первой частицы. Эффективное сечение для обратного процесса равно:

$$\sigma_{21} \propto \frac{p_1 E_1}{c^2 v_2} |M|^2. \quad (85a)$$

Матричные элементы в обоих случаях одинаковы, мы поэтому имеем:

$$\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{12}} = \frac{p_1 E_1 v_1}{p_2 E_2 v_2}. \quad (86)$$

Пользуясь релятивистской формулой

$$Ev = pc^2, \quad (86a)$$

получим:

$$\frac{\sigma_{21}}{\sigma_{12}} = \frac{p_1^2}{p_2^2}. \quad (87)$$

Эффективные сечения пропорциональны квадрату импульса частиц, образованных в соответствующих реакциях.

Однако формула (84) дает только число возможных состояний движения образованной частицы. В случае световых квантов мы должны умножить его на 2, потому что возможны два направления поляризации квантов. Кроме того мы должны умножить эффективное сечение для процесса захвата на вероятность того, что спин падающего нейтрона направлен подходящим для захвата образом. Обозначая эту вероятность g_0 , имеем:

$$\frac{\sigma_{\text{захват}}}{\sigma_{\text{дезинтегр}}} = 2g_0 \left(\frac{p_{\text{квант.}}}{p_{\text{нейтр.}}} \right)^2 = 2g_0 \left(\frac{h\nu}{h'k} \right)^2 = 2g_0 \left(\frac{\omega}{kc} \right)^2, \quad (88)$$

где $\omega = 2\pi\nu$. Пользуясь выражением (77) для $\sigma_{\text{дезинтегр}}$ распада, мы получим:

$$\sigma_{\text{захват}} = 8\pi g_0 \omega^3 k^{-2} c^{-3} |M_{0E}|^2. \quad (89)$$

[Следует отметить, что в (89) M_{0E} есть матричный элемент электрического момента в *одном* направлении в согласии с (77)]. Обращение фотоэлектрического эффекта может иметь место, если спин падающего нейтрона параллелен спину захватывающего протона, потому что это соответствует основному состоянию дейтерона. Следовательно,

$$g_0 = \frac{3}{4},$$

пользуясь (78 b), получим:

$$\sigma_3 = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{kc} \right)^2 \sigma = 4\pi \frac{\omega^3}{c^3} \cdot \frac{Me^2}{h'^2} \frac{ak}{(a^2 + k^2)^4}. \quad (89a)$$

При помощи (78 c) это приводится к

$$\sigma_3 = 4\pi \frac{e^2}{Mc^2} \cdot \frac{h'}{Mc} \cdot \frac{(E\varepsilon)^{1/2}}{E + \varepsilon}. \quad (90)$$

Формула (90) для эффективного сечения захвата содержит длину волны протона:

$$\frac{h'}{Mc} = 2,09 \cdot 10^{-14} \text{ см} \quad (90a)$$

и „классический радиус протона“:

$$\frac{e^2}{Mc^2} = \frac{1}{137} \cdot \frac{h'}{Mc} = 1,52_5 \cdot 10^{-16} \text{ см}. \quad (90b)$$

Максимум эффективного сечения, как функции энергии E , имеет место при $E = \varepsilon$ и равен:

$$\sigma_3^{\text{max}} = 2\pi \frac{e^2}{Mc^2} \cdot \frac{h'}{Mc} = 2,00 \cdot 10^{-29} \text{ см}^2, \quad (90c)$$

т. е. чрезвычайно мал. Для медленных нейтронов ($E \ll \varepsilon$) эффективное сечение должно быть еще меньше.

С другой стороны, различными авторами (W3, D4) было наблюдено поглощение медленных нейтронов веществами, содержащими водород, например, водой и парафином. Поэтому должен существовать другой механизм захвата, с большим выходом, чем

выход, обусловленный электрическими дипольными переходами, особенно эффективный при малых скоростях нейтронов.

Последнее обстоятельство дает нам важное указание. Уменьшение энергии нейтрона E обусловлено малой амплитудой p волновой функции медленного нейтрона на малых расстояниях r между нейтроном и протоном. Другими словами, медленный нейтрон с моментом количества движения $l=1$ имеет небольшой шанс быть достаточно близко к протону, чтобы быть захваченным. Совсем иначе обстоит дело, если падающий нейтрон имеет нулевой момент (см. §§ 14 и 15), т. е. для „ s -нейтронов“. В этом случае, особенно если спины нейтрона и протона противоположны, мы знаем, что вероятность достаточно близкого прохождения нейтрона очень велика, что видно из очень большого эффективного сечения рассеяния (§ 14, конец). Поэтому можно ожидать и очень большого эффективного сечения захвата, если существуют какие-нибудь процессы, ведущие к захвату нейтрона протоном, имеющим противоположный спин. Подобный захват должен соответствовать переходу системы, состоящей из протона и нейтрона, из 1S -состояния в 3S -состояние (основное состояние дейтерона), в то время как процессы захвата, рассмотренные в (90), соответствуют переходу из 3P -состояния в 3S -состояние.

Необходимый механизм, способный дать переходы $^1S \rightarrow ^3S$, состоит в магнитном дипольном излучении. В случае перехода из синглетного состояния в триплетное состояние спин протона или нейтрона должен изменить свое направление. Магнитные моменты нейтрона и протона будут поэтому иметь матричные элементы, относящиеся к такому переходу, и этот магнитный дипольный момент вызывает излучение.

Чтобы вычислить вероятность перехода, надо просто заметить матричный элемент электрического дипольного момента $M_{0E_{эл}}$ (см. 78 а) матричным элементом магнитного дипольного момента. Обозначим μ_n и μ_p магнитные моменты нейтрона и протона, в единицах „ядерного магнетона“

$$\mu_0 = \frac{eh'}{Mc} \quad (91)$$

Тогда, согласно § 5, $\mu_p = 2,9$ и $\mu_n = -2,0$. Кроме того введем операторы спина σ_p и σ_n протона и нейтрона, так что $\mu_0 \mu_p \sigma_p$ должно быть как по величине, так и по направлению магнитным моментом протона. Наконец, введем спиновую волновую функцию χ_0 и χ_E для основного состояния и возбужденного состояния, соответственно; тогда мы получим:

$$M_{0E_{магн}} = \mu_0 \int \sum_{\sigma} U_0 \chi_0 (\mu_p \sigma_p + \mu_n \sigma_n) U_E \chi_E d\tau, \quad (92)$$

где \sum_{σ} обозначает суммирование по координатам спина протона и нейтрона.

Если возбужденное состояние — синглетное состояние, то для его функции спина имеем (1):

$$\chi_E = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(p) \beta(n) - \alpha(n) \beta(p)], \quad (92 \text{ a})$$

где p и n — соответственно координаты спина протона и нейтрона, α обозначает, что спин параллелен данному направлению z и β — что спин противоположен направлению z . Основное состояние имеет три подсостояния (триплет) в соответствии с компонентами спина в направлении z : $m = +1, 0$ и -1 . z -ые компоненты операторов спина σ_p и σ_n в (92) будут вызывать переходы из состояния U_E в подсостояние $M = 0$ основного состояния, x - и y -компоненты магнитного момента соответствуют переходу в подсостояния $M = \pm 1$. Вычислим переход, вызываемый σ_p^x и σ_n^x и поэтому для спиновой волновой функции основного состояния имеем:

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(p) \beta(n) + \alpha(n) \beta(p)]. \quad (92 \text{ b})$$

Согласно примечанию после уравнения (89) следует вычислить только вероятность, обусловленную магнитным моментом в *одном* направлении.

Из определения спиновых волновых функций вытекает, что

$$\sigma_p^z \alpha(p) = \alpha(p), \quad \sigma_n^z \beta(n) = -\beta(n) \text{ и т. д.}, \quad (92 \text{ c})$$

поэтому:

$$\begin{aligned} & \chi_0 (\mu_p \sigma_p + \mu_n \sigma_n) \chi_E = \\ & = \frac{1}{2} [\alpha(p) \beta(n) + \alpha(n) \beta(p)] (\mu_p - \mu_n) [\alpha(p) \beta(n) + \alpha(n) \beta(p)]. \end{aligned} \quad (92 \text{ d})$$

При суммировании по координатам спина нужно помнить, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_p \alpha^2(p) \beta^2(n) &= \sum_p \beta^2(p) \alpha^2(n) = 1, \\ \sum_p \alpha(p) \beta(p) \alpha(n) \beta(n) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (92 \text{ e})$$

при этом получаем:

$$\chi_0 (\mu_p \sigma_p + \mu_n \sigma_n) \chi_E = (\mu_p - \mu_n) \quad (92 \text{ f})$$

$$M_{0E \text{ магн}} = \frac{eh'}{2Mc} (\mu_p - \mu_n) \int U_0 U_E d\tau. \quad (93)$$

Для волновой функции основного состояния выражение (44 c) справедливо при $r > a$. Для U_E следует подставить волновую функцию, соответствующую энергии E , моменту $l = 0$ и противоположному спину протона и нейтрона, нормированную на единицу энергии. Согласно (50) и (51) эта функция равна:

$$U_E = \frac{U_0}{r} = \left(\frac{M}{k}\right)^{1/2} \frac{\sin(kr + \delta'_0)}{2\pi h' r}, \quad (93 \text{ a})$$

где δ'_0 нужно вычислить из формулы, аналогичной формуле (59 a), только вместо α необходимо поставить β , так как мы имеем дело с синглетным состоянием (см. конец § 14). Нормирование идентично с (77 d). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \int U_0 U_E d\tau &= \frac{(\alpha M)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2} h' k^{1/2}} \int 4\pi r^2 dr \frac{e^{-\alpha r}}{r} \cdot \frac{1}{r} \sin(kr + \delta'_0) = \\ &= \frac{(2\alpha M)^{1/2}}{\pi^{1/2} h' k^{1/2}} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\delta'_0}}{\alpha - ik} \right) = \frac{(2\alpha M)^{1/2}}{\pi^{1/2} h' k^{1/2}} \cdot \frac{k \cos \delta'_0 + \alpha \sin \delta'_0}{\alpha^2 + k^2} \end{aligned} \quad (93 \text{ b})$$

(1) См. Handbuch der Physik, т. 24, 1, стр. 372.

где Im обозначает мнимую часть. δ'_0 определяется (59 б), где однако α надо заменить на β (синглетное состояние). Поэтому мы имеем:

$$\int U_0 U_E dt = \frac{(2\alpha M k)^{1/2}}{\pi^{1/2} \hbar} \cdot \frac{\alpha - \beta}{(\alpha^2 + \beta^2)(\beta^2 + k^2)^{1/2}} \quad (93 \text{ c})$$

Следует заметить, что это выражение отлично от нуля только потому, что $\alpha \neq \beta$, т. е. потому, что силы между протоном и нейтроном существенно различны в зависимости от того, параллельны или антипараллельны спины протона и нейтрона (см. § 13 и § 14). Это обстоятельство делает различными уравнения Шредингера для U_0 и U_E , если бы этого не было, U_0 и U_E были бы ортогональны и интеграл $\int U_0 U_E dt$ был бы равен нулю. Захват нейтронов протонами при нашем механизме поэтому обусловлен только зависимостью силы между протоном и нейтроном от спина.

Подставляя (93 с) в (93), имеем:

$$M_0 \text{ магн} = \frac{e}{c} \left(\frac{\alpha k}{2\pi M} \right)^{1/2} \frac{\alpha - \beta}{(\alpha^2 + k^2)(\beta^2 + k^2)^{1/2}} (\mu_p - \mu_n). \quad (94)$$

Подставляя это выражение в (89) и учитывая, что только один из каждых четырех нейтронов обладает спином, противоположным спину протона, т. е. что $g_\sigma = \frac{1}{4}$. Найдем:

$$\sigma_c = \pi \frac{e^2 \omega^3}{M c^5} \cdot \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{(\alpha - \beta)^2 (\mu_p - \mu_n)^2}{(\alpha^2 + k^2)^2 (\beta^2 + k^2)}. \quad (94a)$$

Пользуясь снова (78с) и выражая α , β , k в энергиях ε , ε' , $E_0 = \frac{1}{2} E$, приведем это выражение к

$$\sigma_c = \pi \frac{e^2}{M c^2} \cdot \frac{\hbar'}{M c} \left(\frac{2\varepsilon}{E_0} \right)^{1/2} \cdot \frac{(\varepsilon^{1/2} \mp \varepsilon'^{1/2})^2 \cdot \left(\varepsilon + \frac{1}{2} E_0 \right)}{\left(\varepsilon' + \frac{1}{2} E_0 \right) M c^2} (\mu_p - \mu_n)^2. \quad (95)$$

Знак \mp стоит в зависимости от того, устойчиво или виртуально синглетное состояние дейтерона.

Следует заметить, что поперечник захвата *растет* с уменьшением кинетической энергии E_0 нейтрона. Поэтому практический интерес представляет эффективный поперечник для очень малых E_0 , именно $E_0 \ll \varepsilon'$. Для этого случая мы сравним поперечник захвата с поперечником упругого рассеяния (62).

Мы имеем:

$$k_1 = \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_p} \right)_{E_0 \ll \varepsilon'} = \left(\frac{\varepsilon}{8E_0} \right)^{1/2} \frac{e^2}{\hbar' c} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\frac{1}{4} \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon'} \cdot \frac{(\varepsilon^{1/2} \mp \varepsilon'^{1/2})^2}{(M c^2)^2} (\mu_p - \mu_n)^2. \quad (95a)$$

Подставим числовые значения $\mu_p = 2,9$, $\mu_n = 2,0$, $\frac{e^2}{\hbar' c} = \frac{1}{137}$, $M c^2 = 931 \text{ MV}$, $\varepsilon = 2,15 \text{ MV}$, $\varepsilon' = 0,040 \text{ MV}$ и выражая E_0 в вольтах, найдем:

$$k_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_p} = \left(\frac{2,15 \cdot 10^6}{8E_0} \right)^{1/2} \frac{(4,9)^2}{137} \cdot \frac{2,15^2 (V \sqrt{2,15} \mp V \sqrt{0,040})^2}{\left(\frac{1}{4} 2,15 + \frac{3}{4} \cdot 0,040 \right) 931^2} = \begin{cases} 0,00138 E_0^{-1/2} \\ 0,00227 E_0^{-1/2} \end{cases} \quad (96)$$

Верхняя величина справедлива, если синглетное состояние дейтерона устойчиво, нижняя — если оно не устойчиво. Практически мы можем вычислить отношение k_1 для случая, когда нейтроны находятся в тепловом равновесии с протонами, что может быть достигнуто многократным рассеянием (гл. XII, сноска С12). Тогда в среднем $E_0 = kT$, что составляет $1/40$ вольта при комнатной температуре ($T = 290^\circ$).

В этом случае

$$k_1 = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{118}, \text{ если устойчиво синглетное состояние} \\ \text{дейтерона.} \\ \frac{1}{71}, \text{ если синглетное состояние неустойчиво.} \end{array} \right\} \quad (96a)$$

Это обозначает, что нейтроны с тепловой скоростью должны в среднем совершить 71 или 118 упругих столкновений с протонами до того, как они будут захвачены. Вероятность захвата, таким образом, довольно велика. Эффективный поперечник захвата соответственно в двух случаях равен $0,5 \cdot 10^{-24}$ см или $0,3 \cdot 10^{-24}$ см.

Время жизни τ нейтрона в веществе, содержащем водород, например в воде, легко вычислить. „Число захватов в секунду“ согласно определению равно:

$$\frac{1}{\tau} = N\sigma_3 v, \quad (97)$$

где $v = \left(\frac{2E_0}{M}\right)^{1/2}$ — скорость нейтронов и N — число водородных атомов в кубическом сантиметре, равно:

$$N = 6,73 \cdot 10^{23} \text{ для } \text{H}_2\text{O}.$$

Из (95) и (97) имеем:

$$\tau = \left\{ \begin{array}{l} 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ сек, если устойчиво синглетное состоя-} \\ \text{ние дейтерона;} \\ 1,63 \cdot 10^{-4} \text{ сек, если синглетное состояние не-} \\ \text{устойчиво.} \end{array} \right\} \quad (97a)$$

Теория, повидимому, находится в достаточном согласии с опытами Амальди и Ферми (F10). Эти авторы исследовали диффузию медленных нейтронов (поглощающихся кадмием с энергией, вероятно, порядка kT) в парафине. Они помещали кадмиевые поглотители в парафиновый блок на различных расстояниях от родиевого детектора и наблюдали уменьшение активности детектора в зависимости от этого расстояния. Таким образом, Ферми и Амальди смогли определить среднее расстояние, которое нейтроны проходили бы, если бы они не захватывались кадмием. Расстояние было найдено равным 2 см. Теоретически это расстояние (F10) равно $\lambda(3k_1)^{-1/2}$, где λ — средняя длина пробега при упругих столкновениях. При величине эффективного

поперечника столкновения $\sigma = 35 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, имеем $\lambda = 0,35 \text{ см}$ и поэтому $k_1 = 100$.

Поправка наших результатов на конечную область действия сил между нейтроном и протоном может проявиться в увеличении поперечника захвата для упругих и неупругих столкновений (конец § 14). Она лишь очень мало может изменить отношение эффективных поперечников, — изменив его в (96а) примерно до $\frac{1}{113}$ и $\frac{1}{15}$ соответственно.

В заключение следует заметить, что может происходить также захват нейтронов протонами при *параллельных* спинах, если синглетное состояние дейтерона устойчиво. Эффективный поперечник для этого захвата, при котором имеет место переход $^3S \rightarrow ^1S$, однако очень мал. Его можно получить, поменяв e на e' в (95), и поэтому при небольших энергиях E_0 он будет приблизительно в $\left(\frac{e'}{e}\right)^{1/2} = \frac{1}{15000}$ менее вероятен, чем захват основным состоянием дейтерона.

§ 18. Рассеяние протонов протонами (W8, T11, P7) (1).

Если между парой протонов нет никаких сил, кроме кулоновского отталкивания, эффективный поперечник рассеяния определяется формулой Резерфорда, измененной Моттом, который учел возможность обмена протонов. Поперечник рассеяния для отклонения на угол между θ и $\theta + d\theta$ равен (2):

$$2\pi\sigma_0(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{e^4}{M^2v^4} \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{\cos\left(\frac{e^2}{\hbar'v} \log \operatorname{tg}^2 \theta\right)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right] 2\pi \sin 2\theta d2\theta \quad (99)$$

2θ есть отклонение падающего протона в системе координат, в которой центр тяжести протонов покоится (*C*-система, см. начало § 14). Поэтому элемент телесного угла в этой системе равен $2\pi \sin 2\theta \cdot d2\theta = 8\pi \cos \theta \sin \theta d\theta$. Первый член в скобках формулы (99) дает число падающих протонов, отклоненных на угол θ (или 2θ в *C*-системе) в соответствии с формулой Резерфорда (см. Мотт и Мессис, стр. 36). Заметим, что в эту формулу подставляется приведенная масса $\frac{1}{2} M'$). Второй член дает число падающих протонов, отклоненных на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$. Каждый из них сопровождается протоном отдачи, вылетающим под прямым углом к его движению (см. § 14), т. е. образующим угол θ с направлением падения. Эти протоны отдачи также учитываются наряду с протонами, рассеянными под углом θ . Последний

(1) Кроме приведенного ниже материала, по вопросу о рассеянии протонов протонами см. также прекрасную работу Хавстэда и Тюва в *Phys Rev*, 50, 1936, подтверждающую высказанное здесь Бете и Бечером на основании незаконченных экспериментов заключение. *Ред.*

(2) См. Мотт и Мессис — Теория атомных столкновений, стр. 75, 76, уравнения (25), (26).

член в скобках учитывает эффект обмена между падающим и рассеянным протоном. Практически интерес представляют быстрые протоны, обладающие энергиями порядка $\frac{1}{12}$ скорости света (энергия порядка 1 MV). Для этих нейтронов $\frac{e^2}{h'v} \ll 1$ и

$$\cos\left(\frac{e^2}{h'v} \log \operatorname{tg}^2 \theta\right) \approx 1, \quad (99a)$$

если θ не очень близко к $\frac{\pi}{2}$. При $E_0 = \frac{1}{2} Mv^2$ мы имеем поэтому:

$$\sigma_0(\theta) = \pi \frac{e^4}{E_0^2} \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right] \cos \theta. \quad (99b)$$

Опыты Уайта (W8), Тюва, Хейденбурга и Хавстеда не согласуются с этой формулой. Они дают значительно большее число протонов под углом в 45° , чем следовало бы ожидать по формуле (99b). Это значит, что, кроме кулоновской силы, существует другая сила, действующая между протонами. Мы уже вывели существование силы между двумя протонами, точнее, силы притяжения, из существования изобар с четным атомным весом и зарядом (§ 10). Повидимому, следует допустить, что эта сила того же характера, что и сила между нейтроном и протоном, так как она должна иметь то же происхождение; нет никакого сомнения в том, что эта сила также ограничена малой областью a и только в этой области велика. Мы можем при этом по аналогии с рассеянием нейтронов заключить, что „ядерные силы“, действующие между протонами, существенно влияют только на волновую функцию с $l=0$.

Чтобы установить рассеяние, обусловленное этой силой, следует вычислить волновую функцию относительного движения двух протонов. Следует различать два случая: спины протонов параллельны или антипараллельны. В первом случае волновая функция системы симметрична относительно двух спинов и поэтому она должна быть антисимметричной относительно пространственных координат протона, так как протоны подчиняются статистике Ферми, т. е. волновая функция системы двух протонов меняет знак, если поменять местами пространственные и спиновые координаты у протонов. Если спины двух протонов антипараллельны, то пространственная волновая функция симметрична.

В § 14 (уравнение 32) мы видели, что волновая функция U описывающая относительное движение двух частиц, имеющая вид:

$$\psi = u_l(r) P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

симметрична в координатах двух частиц, если l четно, и антисимметрична, если l нечетно. Поэтому для параллельных спинов протонов волновая функция содержит нечетные азимутальные квантовые числа l и не меняется существенно от сил, не действующих на больших расстояниях. Но при противоположных спинах двух протонов, т. е. только в $1/4$ всех случаев, ядер-

ные силы между протонами будут влиять на рассеяние, так как в этом случае волновая функция содержит член $l=0$, который существенно влияет на величину ядерной силы. Мы можем вычислить полную волновую функцию, включающую ядерные силы, следующим путем: вычисляем полную волновую функцию без ядерных сил, затем вычитаем из нее часть, соответствующую $l=0$ без ядерных сил и добавляем волновую функцию для $l=0$, включающую ядерные силы.

Выпишем прежде всего волновую функцию, симметричную в пространственных координатах протона, для двух протонов при кулоновском взаимодействии между ними. Согласно Мотту и Мессу (стр. 35, ур. (16) и стр. 72) несимметричная волновая функция будет:

$$\psi = e^{ikz} + ia \lg k(r-a) + \frac{e^2}{Mv^2 r \sin^2 \frac{1}{2} \theta} e^{i(kr - \alpha \log 2kr - ia \log \sin^2 \frac{1}{2} \theta + i\pi + 2i\eta_0)} \quad (100)$$

где

$$\alpha = \frac{e^2}{h^2 v}, \quad k = \frac{Mv}{2h}, \quad (100a)$$

r — расстояние между двумя протонами, z — разность их, z — координат $\cos \theta = \frac{z}{r}$, $e^{i\eta_0} = \frac{\Gamma(1+ia)}{|\Gamma(1+ia)|}$. Первый член в (100) представляет падающую волну (плоская волна, движущаяся в направлении z , исправлена на малое фазовое смещение, обусловленное кулоновским полем). Второй член есть рассеянная шаровая волна. Симметричная волновая функция равна:

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \psi(-x, -y, -z), \quad (100b)$$

так как изменение знака всех относительных координат $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$, $z = z_1 - z_2$ первого протона относительно второго соответствует обмену координат двух протонов. В (100) явно входит только координата z , поэтому следует z заменить на $-z$, $\cos \theta$ на $-\cos \theta$ и $\sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ на $\frac{1}{2}(1 + \cos \theta) = \cos^2 \frac{1}{2} \theta$ и затем добавить таким образом полученную функцию к (100). Получающаяся в результате функция будет представлять два потока протонов, движущихся в положительном и отрицательном направлении z , причем каждый содержит один протон на cm^3 .

Рассмотрим дальше часть волновой функции (100b), соответствующую $l=0$. Если мы положим, как обычно $\psi_0 = \frac{v_0}{r}$, то функция v_0 будет решением радиального уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{M}{h^2} \left(\frac{1}{2} E_0 - \frac{e^2}{r} \right) v_0 = 0, \quad (101)$$

которое для больших расстояний r имеет асимптотическую форму (см. Мотт и Мессу, стр. 33, ур. (7) для $n=0$):

$$v_0 = \frac{2e^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 - \alpha \log 2kr)}{kr} = \frac{i}{kr} [e^{-i(kr - \alpha \log 2kr)} + e^{i(kr + \pi + 2\eta_0 - \alpha \log 2kr)}] \quad (101a)$$

согласно (86) правильно нормирована, т. е. нормирована таким образом, что первый член (101a) является первым членом (не зависящим от угла) разложения функции (100b) по шаровым функциям.

Если сила действует между двумя протонами на малых расстояниях, фаза волновой функции будет смещена на некоторую величину δ_0 , аналогично тому,

как это имеет место при рассеянии нейтронов протонами. Таким образом, новая функция должна быть заменена через

$$u_0 = \frac{2c}{kr} e^{i\eta_0} \sin(kr + \eta_0 - \alpha \log 2kr + \delta_0). \quad (101b)$$

Постоянная c должна определяться так, чтобы член, содержащий e^{-ikr} , совпадал с (101a), так что $u_0 - v_0$ содержит лишь удаляющуюся шаровую волну, т. е. пропорционален e^{+ikr} , что представляет рассеяние. Этого можно достигнуть, положив $c = e^{i\delta_0}$, так что

$$u_0 = \frac{i}{kr} [e^{-i(kr - \alpha \log 2kr)} + e^{i(kr + \pi + 2\eta_0 + 2\delta_0 - \alpha \log 2kr)}] \quad (101c)$$

Для получения эффекта силы между двумя протонами следует заменить функцию v_0 (справедливой при отсутствии силы) через u_0 (чем принимается в расчет сила), т. е. добавить $u_0 - v_0$ к невозмущенной волновой функции (100b).

$$\begin{aligned} \Psi' = \Psi + u_0 - v_0 = & e^{ikr} + i\alpha \log k(r-z) + e^{-ikr} - i\alpha \log k(r-z) + \\ & + \frac{1}{r} e^{ikr - i\alpha \log 2kr + i\pi + 2i\eta_0} \cdot \left[\frac{e^2}{Mv^2} \left(\frac{e^{-i\alpha \log \sin^2 \frac{1}{2} \theta}}{\sin^2 \frac{1}{2} \theta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-i\alpha \log \cos^2 \frac{1}{2} \theta}}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta} \right) + \frac{1}{k} (e^{2i\delta_0} - 1) \right] \quad (102) \end{aligned}$$

Эффективный поперечник рассеяния на единицу телесного угла в системе C для данного угла θ равен квадрату абсолютной величины скобок. Подставляя $k = \frac{Mv}{\hbar}$ и пренебрегая $\alpha \log \sin^2 \frac{1}{2} \theta$, так как $\alpha = \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1$, имеем:

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2} \theta} + \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta} - \frac{2\hbar v}{e^2} \sin 2\delta_0 \right) + \left(\frac{2\hbar v}{e^2} \right) (1 - \cos 2\delta_0)^2 \right] \quad (103a)$$

Если бы было только кулоновское поле, эффективный поперечник $\sigma_0(\theta)$ получился бы, полагая $\delta_0 = 0$. Поэтому мы имеем при $\frac{1}{2} \theta = \theta$:

$$\sigma(\theta) - \sigma_0(\theta) = \left(\frac{e^2}{Mv^2} \right)^2 \left[\left(\frac{4\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 - \frac{8\hbar v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) \right] \quad (103b)$$

Учтем теперь то обстоятельство, что лишь $\frac{1}{4}$ всех пар протонов обладает противоположным спином, и поэтому добавочный поперечник сечения должен учитываться лишь в $\frac{1}{4}$ всех случаев. В среднем следует прибавить $\frac{1}{4}$ от (103b). Кроме того, вычислим поперечник на единицу телесного угла в обычной системе координат, помножив (103b) на $4 \cos \theta$.

Таким образом, для полного поперечника сечения мы получаем:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) = \sigma_0(\theta) + [\sigma(\theta) - \sigma_0(\theta)] \cos \theta, \\ \sigma(\theta) = \frac{e^4}{E^2} \cos \theta \left[\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} - \frac{2\hbar v}{e^2} \cdot \frac{\sin \delta_0 \cos \delta_0}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\hbar v}{e^2} \right)^2 \sin^2 \delta_0 \right] \quad (103) \end{aligned}$$

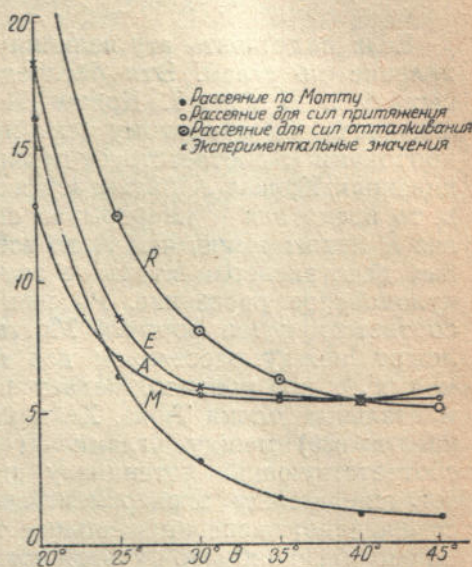
Действительная величина этого выражения зависит, понятно, от δ_0 . Это фазовое смещение может быть очень малым. Однако,

даже если оно очень мало, оно является существенным в (103), потому что $\sin^2 \delta_0$ множит на очень большую величину $\left(\frac{2h'v}{e^2}\right)^2$, равную 160 для протонов с энергией 1 MV. Поэтому рассеяние протонов протонами очень чувствительно к наличию не кулоновской силы, действующей между протонами. Это в особенности верно для угла θ вблизи 45° , где как косинус, так и синус относительно велики. Хорошим способом измерить эффект ядерных сил между протоном и протоном является поэтому измерение рассеяния под углом 45° и сравнение этого рассеяния с формулой Мотта (99). Это отношение равно для $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_0(\theta)} = \left(\frac{h'v}{e^2} \sin \delta_0\right)^2 - 2\frac{h'v}{e^2} \sin \delta_0 \cos \delta_0 + 1. \quad (104)$$

Первые опыты по рассеянию протонов протонами были произведены Уайтом (W8). Протоны ускорялись в циклотроне и их пути наблюдались в наполненной водородом камере Вильсона. Так как рассеяние под большими углами встречается редко, и экспериментальная установка не допускает больших интенсивностей пучка протонов, число больших отклонений, наблюдаемых Уайтом, очень мало. Были наблюдаемы только 5 протонов, отклонившихся больше чем на 40° . Однако даже при этом опыты показывают, что рассеяние на 45° во много раз более вероятно, чем следовало бы ожидать, исходя из формулы (99b). Отношение наблюдаемого рассеяния к теоретическому рассеянию в кулоновском поле под углом в 45° на основании опытов Уайта равно 9 при средней энергии протона, около 750 kv (1). Распределение по углам хорошо не совпадает с (104) (см. 97 и вычисления Сербера, на которые ссылается Уайт), что, по видимому, обусловлено очень малым числом полученных Уайтом точек.

(1) Уайт дает 675 kv, однако величина преуменьшена, так как он пользовался соотношением между пробегами и энергией, принятым в Кэвендишской лаборатории. Это соотношение дает преуменьшенную энергию протонов.



Фиг. 7. Рассеяние протонов протонами. По оси абсцисс — угол отклонения, по оси ординат — число частиц, рассеянных в промежутке от θ до $\theta + d\theta$, деленное на $\sin^2 \theta d\theta$. Масштаб оси ординат выбран таким, что рассеяние по Мотту только в кулоновском поле имеет значение 1 для угла 45° . Теоретические кривые проверены так, чтобы было совпадение их с опытными данными для угла 40° . Энергия протонов составляет 920 kv

Гораздо более исчерпывающие опыты были произведены Тювом, Хейденбургом и Хавстедом. При 920 kv они нашли отношение числа рассеянных протонов к числу, соответствующему кулоновскому взаимодействию, равным 4,65 при 40°. Энергия 920 kv соответствует скорости $v = 0,0445 c$ (c — скорость света), так что $\frac{h'v}{e^2} = 137 \cdot 0,0445 = 6,09$. Подставляя это значение и наблюдаемое отношение 4,65 в (103), мы имеем:

$$\delta_0 = 30,8^\circ \text{ (104a) или } \delta_0 = -12,2^\circ. \text{ (104b)}$$

Если подставить эту величину в (103), можно найти распределение по углам. Эти распределения по углам даны на кривых A и R фиг. 7. Кривая A соответствует положительным значениям δ_0 , и поэтому (см. ниже) сила притяжения между протонами R соответствует отрицательному δ_0 (потенциал отталкивания). Кривая A оказывается очень плоской между 30 и 40°, в то время как R непрерывно спадает при увеличении θ . Кривая R лежит выше, чем A , во всех углах, кроме 45°, где обе кривые дают экспериментальное значение, превышающее в 4,65 раза кулоновское рассеяние. Рассеяние в чисто кулоновском поле, соответствующее формуле Мотта (99b), дано на кривой M ; оно лежит между рассеянием для притяжения и отталкивания при малых θ , но, конечно, падает ниже для больших θ . Экспериментальные точки Тюва, Хейденбурга и Хавстеда (отмеченные крестиками) между углами 30 и 45° лежат ближе к кривой, соответствующей потенциалу притяжения. При малых углах согласие между экспериментальными точками и кривой A не совершенно; экспериментальные точки слишком высоки. Однако можно безошибочно утверждать, что кривая A согласуется с опытными данными гораздо лучше, чем кривая R , и что рассеяние по кривой M Мотта вообще не может входить в рассмотрение.

Таким образом, рассеяние протонов протонами показывает с достоверностью:

- (1) что между протонами, кроме кулоновской силы, должны существовать другие силы;
- (2) эти силы должны быть силами притяжения;
- (3) хорошее согласие с опытами получается, если допустить малую область действия этих сил.

Мы уже пришли к заключениям (1) и (2) в § 10, когда рассматривали правила четности и нечетности изотопов. Более того, существование силы притяжения между двумя протонами доказывается вычислениями энергий связи H^3 , He^3 и He^4 (§ 21). Мы нашли даже некоторые количественные данные о величине этих сил из вычисления энергий связи H^3 , He^3 , He^4 и из рассеяния протонов протонами, причем эти данные хорошо согласуются друг с другом [см. (107) и (128)].

Существование силы между протонами вызывает необходимость допущения, что сила между двумя *нейтронами* практи-

чески должна быть той же величины. На это указывает то обстоятельство, что число протонов в легких ядрах равно числу нейтронов (§ 6); еще более точно об этом говорят энергии связи H^3 и He^3 (§ 22). Из (104a) можно вычислить величину γ , которая аналогична величинам α и β для рассеяния нейтронов протонами [см. (34)]. Другими словами, γ определяется

$$\gamma = - \left(\frac{1}{u_0} \right) \left(\frac{du_0}{dr} \right)_{r=a}, \quad (105a)$$

где u_0 — волновая функция для $l=0$ и a — область действия сил. Мы имеем [см. (59b)]:

$$k \operatorname{ctg} (kr_0 + \delta_0) = -\gamma. \quad (105b)$$

Предполагая, что r_0 очень мало, можно пренебречь kr_0 по сравнению с δ_0 . Для $E_0 = 920$ kv имеем (см. 54): $k = 1,06 \cdot 10^{12}$ см⁻¹. При δ_0 , определяющейся (104a), имеем поэтому:

$$\gamma = -1,06 \cdot 10^{12} \operatorname{ctg} 30,8^\circ = -1,78 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad (105)$$

или

$$\frac{1}{\gamma} = 5,6 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (105c)$$

$$T = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{M} = 1,30 \text{ MV}. \quad (105d)$$

γ отрицательна, что указывает на отсутствие устойчивого энергетического уровня „ди-протона“. (Из соображений симметрии мы можем заключить, что не существует также и устойчивого „ди-нейтрона“). В противоположность рассеянию *нейтронов* протонами из рассеяния протонов протонами можно определить знак γ . Причина заключается в интерференции между рассеянием, обусловленным кулоновским полем, и рассеянием, обусловленным специфически ядерными силами. Получающееся распределение по углам зависит поэтому от знака δ_0 (см. кривые A и K , фиг. 7).

„Виртуальный энергетический уровень“ системы двух протонов лежит, согласно (105d), при 1·15 MV кинетической энергии, т. е. значительно выше синглетного уровня дейтерона (около нуля, см. 62a), но в той же общей области. Сила между двумя протонами поэтому меньше, чем сила между нейтроном и протоном (см. § 44).

Из (105) и (105b) мы можем заключить о величине δ_0 для других значений энергий. Пренебрегая kr_0 , находим:

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = \frac{\gamma}{k}. \quad (105e)$$

Подставляя это значение в (104), имеем:

$$R = \frac{\sigma(45^\circ) - \sigma_0(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} = \frac{E_0}{C \left(T + \frac{1}{2} E_0 \right)} [E_0 - 2(TC)^{1/2}], \quad (106)$$

где

$$C = \frac{Me^4}{h'^2} = 49 \cdot 800 \text{ V.} \quad (106a)$$

Из формулы (106) легко видеть, что отношение R „избыточного рассеяния“ к кулоновскому рассеянию под углом в 45° быстро растет с возрастанием энергии E_0 ; для высоких энергий ($E_0 \gg T$) оно пропорционально E_0 и для $E_0 \ll T$ пропорционально E_0^2 . Это возрастание k обусловлено тем, что кулоновское поле, особенно для больших энергий, дает малое рассеяние под углом в 45° , возрастающее почти при всяком возмущении кулоновского поля. При очень низких энергиях (106) отрицательно в соответствии с меньшим рассеянием под углом в 45° по сравнению с кулоновским рассеянием. Обращение знака имеет место при

$$E_0 = 2(TC)^{1/2} = 510\,000 \text{ V} \quad (106b)$$

с нашими значениями (105d), (106a) для T и C . Наименьшая величина R получается при $240\,000 \text{ V}$; в этом случае

$$\left(\frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)}\right)_{E_0=0,23 \text{ MV}} = 0,09, \quad (106c)$$

т. е. рассеяние под углом в 45° должно составлять лишь $\frac{1}{11}$ кулоновского рассеяния. Для $E_0 = 0,74 \text{ MV}$ имеем:

$$R = 2,0 \frac{\sigma(45^\circ)}{\sigma_0(45^\circ)} = 3,0, \quad (106d)$$

что значительно больше результатов Тюве, Хейденбурга и Харстеда ($R = 0,65$).

Вышеприведенные вычисления должны быть исправлены в двух отношениях: во-первых, волновая функция в кулоновском поле не есть плоская волна. Поэтому (105b) и (105e) справедливы лишь приближенно. Особенно это верно для малых энергий протонов. Результат этой поправки сводится к еще более быстрому уменьшению R с уменьшением энергии E_0 .

Во-вторых, область действия ядерных сил не равна нулю. Это обстоятельство влияет в обратную сторону на изменение R с уменьшением энергии. Если мы возьмем для области действия сил выведенное в (128) значение

$$a = 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (107a)$$

то имеем $kr_0 = 0,244 = 14,0^\circ$, и поэтому, вместо (105),

$$\gamma = -1,06 \cdot 10^{12} \text{ ctg } 44,8^\circ = -1,09 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad (107b)$$

$$T = 0,49 \text{ MV}, \quad (107c)$$

т. е. виртуальный уровень лежит гораздо ближе к нулю. Если допустить обычную потенциальную яму шириной a и глубиной

$$V_0 = \frac{h'^2 k_1^2}{M}, \quad (107d)$$

то k_1 можно определить из условия (см. 39):

$$(k_1^2 + k^2)^{1/2} \operatorname{ctg} [(k_1^2 + k^2)^{1/2} r_0] = -\gamma, \quad (107e)$$

что дает:

$$k_1 = 5,94 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}, \quad (107i)$$

$$V_0 = 14,5 \text{ MV}. \quad (107)$$

Эту глубину можно сравнить с глубиной потенциальной ямы для протона и нейтрона с противоположными спинами $V_0 = 18,7 \text{ MV}$ (эта глубина необходима, чтобы получить квантованное состояние при нулевой энергии). Потенциальная энергия между двумя протонами составляет поэтому около 80% потенциальной энергии протона и нейтрона с противоположными спинами, т. е. около 55% взаимодействия между нейтроном и протоном с параллельными спинами. Это удовлетворительно согласуется с результатами теории H^3 и He^4 . [ур. (128).]

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ H^3 , He^3 и He^4

§ 19. Доказательство Томаса конечной протяженности ядерных сил (T2)

При обсуждении проблемы дейтерона, мы показали, что энергия связи и физические свойства этого ядра зависят существенно только от определенной комбинации глубины V_0 и ширины a потенциальной ямы, представляющей взаимодействие между нейтроном и протоном. Эта комбинация, входящая в описание свойств дейтерона, приблизительно $V_0 a^2$ (см. § 12), причем одни и те же свойства дейтерона могут быть получены с глубокой и узкой ямой или мелкой и широкой. Чтобы определить отдельно глубину и ширину, необходимо поэтому использовать свойства других ядер. Наиболее подходят для этой цели ядра, непосредственно следующие за дейтроном по своей сложности, т. е. ядра с массой три H^3 и He^3 и α -частица He^4 .

В § 9 мы уже отметили, что массовые дефекты этих ядер гораздо больше массового дефекта дейтерона и что это обстоятельство можно объяснить, допуская глубокую и узкую потенциальную яму (Вигнер, W12). Однако при этом не может быть дано никаких указаний о том, как глубока и узка должна быть яма, чтобы объяснить наблюдаемые массовые дефекты. Действительно, мы не можем даже сказать, достаточно ли *какая-нибудь* конечная глубина и ширина ямы для объяснения очень большого массового дефекта α -частицы, превышающего в 14 раз массовый дефект дейтерона. Возможно, что для этого необходимо допустить бесконечно узкую и глубокую яму. Этот пункт был выяснен Томасом (T1), пришедшим к заключению о *конечной* глубине и ширине ямы. Томас показал, что если допустить постоянство $V_0 a^2$, необходимое для сохранения наблюдаемой вели-

чины энергии связи дейтерона, и одновременно яму предположить бесконечно глубокой и узкой, получится бесконечная энергия связи для H^3 . Из своих вычислений Томас оценивает протяженность a сил не меньше $10 \cdot 10^{-13}$ см. Доказательство Томаса удовлетворительно, поскольку до сих пор мы не располагаем методом непосредственного вычисления энергий связи H^3 и He^4 , который был бы одновременно и строгим и способным довести до результата, сравнимого с наблюдаемыми значениями.

Допущения Томаса очень общи. Считается, что между двумя нейтронами не действует никаких сил. Поэтому это доказательство а fortiori будет справедливым, когда между одинаковыми частицами будут существовать силы притяжения, что подтверждается правилом четности и нечетности изотопов (§ 10) и рассеянием протонов протонами (§ 18), потому что такие силы будут еще дальше снижать энергию H^3 . Согласно рассуждениям § 10, силы отталкивания между одинаковыми частицами должны быть исключены, но небольшие силы этого вида ничего не изменили бы в заключениях Томаса. Наконец, силы между протонами и нейтронами могут быть или обычными (Вигнер) силами или силами обменного характера (Майорана).

Принятый Томасом метод основан на вариационном принципе Шредингера. Собственные функции, подставляемые в интеграл, варьируемый для вычисления энергии, выбираются симметричными относительно протона и нейтрона, когда эти частицы достаточно сближены, чтобы взаимодействовать. При этом нет разницы в зависимости от того, выбраны ли силы типа Вигнера или типа Майорана. Для простоты поэтому в дальнейшем мы будем говорить об обычных силах.

Взаимодействие между протоном и нейтроном будем считать исчезающим, если расстояние между ними больше некоторой величины a . Для $r < a$ мы предполагаем потенциальную энергию:

$$V(r) = -a^{-2} f\left(\frac{r}{a}\right) + O(a^{-1}) \quad \text{при } r < a, \quad (108)$$

где $f\left(\frac{r}{a}\right)$ — произвольная функция своего аргумента, удовлетворяющая лишь требованию давать правильную энергию связи дейтерона. (108) было выбрано таким образом, что Va^2 остается приблизительно постоянной, когда меняется a , что необходимо для независимости энергии связи дейтерона от a (см. теорию дейтерона, § 12).

Решение волнового уравнения для дейтерона при потенциале (108) будет (см. § 12):

$$\psi = \varphi(r), \quad (108a)$$

где

$$\varphi(r) = A \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad \text{при } r > a, \quad (108b)$$

причем

$$\alpha^2 = \frac{M\varepsilon}{\hbar^2}, \quad (108c)$$

где ϵ — энергия связи дейтерона. Собственная функция φ , понятно, предполагается нормированной.

В дальнейшем нам потребуется участие внутренней области ($r < a$) в „кинетической энергии“ дейтерона, т. е.

$$T = 4\pi \int_0^a \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 r^2 dr. \quad (108d)$$

При уменьшении протяженности сил нормирующий множитель A в (108b) остается почти постоянным, потому что нормировка определяется главным образом „внешней“ частью волновой функции (см. § 12). Поэтому $\varphi(a)$ растет, примерно, как $\frac{1}{a}$ и так же растет и волновая функция для $r < a$. Из нашего допущения о том, что V сохраняет свое очертание, становясь лишь пропорционально больше с уменьшающимся a , то же будет следовать и для φ , так что мы можем положить:

$$\varphi(r) = a^{-1} \chi\left(\frac{r}{a}\right) \quad (r < a), \quad (108e)$$

что приводит к

$$T = \frac{K}{a}, \quad (108f)$$

где

$$K = 4\pi \int_0^1 \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 x^2 dx \quad (108g)$$

есть функция, зависящая лишь от очертания потенциальной ямы. Для прямоугольной ямы

$$K = \frac{\alpha\pi^2}{4}. \quad (108h)$$

Ядро H^3 состоит из одного протона (координата r_3) и двух нейтронов (координаты r_1, r_2). Волновое уравнение H^3 :

$$\frac{\hbar^2}{2M} (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \psi + [E - V(r_{13}) - V(r_{23})] \psi = 0. \quad (109)$$

Введем относительные координаты

$$s_1 = r_{12} = r_1 - r_2, \quad s_2 = r_2 - r_3 \quad (109a)$$

и предположим, что ψ зависит только от них, т. е. отбросим движение центра инерции. Тогда (109) перейдет в

$$\frac{\hbar^2}{M} (\Delta_1 \psi + \text{div}_1 \text{grad}_2 \psi + \Delta_2 \psi) + [E - V(s_1) - V(s_2)] \psi = 0, \quad (109b)$$

где Δ_1 и Δ_2 теперь относятся к дифференцированию по s_1 и s_2 . Вариационный принцип Шредингера эквивалентный (109b), есть:

$$E < \frac{1}{\int d\tau_1 d\tau_2 \psi^2} \cdot \int d\tau_1 d\tau_2 \left\{ \frac{\hbar^2}{M} [(\text{grad}_1 \psi)^2 + (\text{grad}_1 \psi \text{grad}_2 \psi) + (\text{grad}_2 \psi)^2] + [V(s_1) + V(s_2)] \psi^2 \right\}. \quad (110)$$

Это неравенство справедливо, если ψ какая угодно непрерывная функция s_1, s_2 . В том случае, если бы ψ было правильной собственной функцией, вместо знака $<$, надо было бы поставить знак равенства.

Успех вариационного метода зависит от хорошего выбора приближенной волновой функции ψ в (110). Мы найдем прежде всего точное решение волнового уравнения (109b) для области, где потенциальная энергия равна нулю, т. е. для больших расстояний между частицами („внешняя волновая функция“, область I). Затем мы построим волновую функцию для малых расстояний s_1 между первым нейтроном и протоном и больших расстояний s_2 второго нейтрона от протона (область II), которая весьма подобна волновой функции дейтерона, и соединим ее с „внешней“ волновой функцией. Аналогичная функция будет верна и для малых s_2 при больших s_1 (область III). В области IV оба нейтрона близки к протону.

Область I. Допустим, что как s_1 , так и s_2 больше протяженности a сил. Тогда потенциальные энергии $V(s_1)$ и $V(s_2)$ исчезают и (109b) сводится к

$$\Delta_1 \psi + \text{div}_1 \text{grad}_2 \psi + \Delta_2 \psi = \mu^2 \psi, \quad (111)$$

причем

$$\mu^2 = -\frac{ME}{\hbar^2}. \quad (111a)$$

Решение (III) есть

$$\psi = 3^{1/2} K_0(\mu s) \left[\frac{\arccos \left(\frac{s_1}{s} \right)}{s_1 (s^2 - s_1^2)^{1/2}} + \frac{\arccos \left(\frac{s_2}{s} \right)}{s_2 (s^2 - s_2^2)^{1/2}} \right], \quad (111b)$$

где

$$s^2 = \frac{2}{3} (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2) = \frac{4}{3} [s_1^2 - (s_1 s_2) + s_2^2] \quad (111c)$$

есть, за исключением множителя $\frac{2}{3}$, сумма квадратов трех сторон треугольника, образованного тремя частицами, и $K_0(x)$ — Ганкелева функция нулевого порядка от мнимой переменной, стремящаяся к нулю экспоненциально для больших аргументов, т. е. (1):

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \pi i H_0^{(1)}(ix). \quad (111d)$$

Доказательство того, что (111b) есть решение (111), можно найти в статье Томаса. Мы могли бы повсюду пользоваться функцией (111b), если $s_1 > a$ и $s_2 > a$. Однако область, определенная таким образом, неудобна для интегрирования вариационного интеграла (110). Мы поэтому будем пользоваться (111) только в тех случаях, если, кроме условия $s_1 > a$ и $s_2 > a$, выполнено еще и условие $s > l$, где l — вспомогательная длина,

(1) См. Янке-Эмде — таблицы функций, стр. 199. Функция K_0 известна также как Макдональдова Бесселева функция (см. Ватсон — Теория функций Бесселя, стр. 78).

большая по сравнению с a , но малая по сравнению с $\frac{1}{\mu}$, т. е. с „радиусом H^3 “ (определение области I).

Область II. Допустим, что $s_1 < a$, но $s > l$. В этой области положим:

$$\psi = K_0(\mu s) \left[c(s) \varphi(s_1) + 3^{1/2} \frac{\arccos \left(\frac{s_2}{s} \right)}{s_2 (s^2 - s_2^2)^{1/2}} - \frac{2\pi}{3^{1/2} s^2} \right], \quad (112)$$

где $c(s)$ определяется

$$c(s) \varphi(a) = 3^{1/2} \frac{\arccos \left(\frac{a}{s} \right)}{a (s^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{2\pi}{3^{1/2} s^2} \quad (112a)$$

и φ — решение волнового уравнения дейтерона (см. 108a). Этот выбор обеспечивает, что ψ есть приближенно решение волнового уравнения (109b) в области II. Больше того, (112) выбрано так, что оно связывается плавно с решением (III) при $s_1 = a$.

Область III. $s_2 < a$, $s > l$ — аналогична области II.

Область IV. $s < l$. Положим

$$\psi(s_1 s_2) = \frac{s}{l} \psi \left[\frac{l}{s} s_1, \frac{l}{s} s_2 \right]. \quad (112b)$$

Это допущение служит только для того, чтобы волновая функция была мала в области IV.

Интеграл (110) может теперь быть взят. Довольно длинные вычисления можно найти в статье Томаса. Доля области I (внешней) может быть сведена к интегралу по поверхностям, отделяющим область I от II, III и IV. Доля области IV включает кинетическую энергию частиц, когда они близки друг к другу, и поэтому пропорциональна K (108f); области II и III дают, конечно, каждая поровну. Их доля частично уничтожает поверхностные интегралы по поверхностям между II или III и I, появляющиеся от внешней области I. Чистый результат для отношения энергии связи H^3 и H^2 есть:

$$\frac{|E|}{\varepsilon} > \frac{24(2\pi \cdot 3^{-3/2} - 1) \mu^2}{\pi \alpha^2} |\log \mu l|^2 \cdot \left[1 + 0 \left(\frac{K}{\left(\frac{a}{l} \right) |\log \mu l|} \right) + 0 \left(\frac{a}{l} \right) \right]. \quad (113)$$

Знак и величина второго и третьего числа неизвестны, так что необходимо их сделать малыми. Это всегда возможно. Следует только выбрать:

$$\frac{a}{l} = \delta \ll 1; \quad \mu l = e^{-\frac{1}{k\delta^2}}. \quad (113a)$$

Тогда

$$\frac{|E|}{\varepsilon} > 1,6 (a\alpha)^{-2} e^{-\frac{2}{k\delta^2}} \cdot K^{-3} \delta^{-4} [1 + 0(\delta)]. \quad (113b)$$

Множитель $e^{-\frac{2}{k\delta^2}} K^{-3} \delta^{-4}$ может быть скорее мал, если второй и третий члены в (113) велики и требуют выбора малых δ . Однако δ и K оба *независимы* от a . Поэтому всегда можно сделать (113b) произвольно большим, выбрав очень малой величину a . Это показывает, что бесконечно малая протяженность a сил приведет к бесконечной энергии связи ядра H^3 . По указанной причине протяженность сил между нейтроном и протоном должна быть конечной, хотя, возможно, и очень малой. Кроме того каждому экспериментальному значению энергии связи H^3 и H^2 должно соответствовать определенное значение a , если мы допустим очертание потенциальной функции $V(r)$.

Томас показал также, что невозможно допустить „ δ -образный“ ход потенциальной энергии. Такое допущение обозначало бы, что волновая функция нейтрона и протона должны иметь особую точку при совпадении двух частиц; волновая функция при этом вела бы себя, примерно, как

$$\psi(r_1 r_2) = A(r_1 + r_2) \left(\frac{1}{r_{12}} - \lambda \right) + 0(r_{12}). \quad (114)$$

Доказательство в значительной степени аналогично доказательству для потенциальной энергии с конечной, но небольшой протяженностью сил.

Аргументация не изменится, если часть энергии связи дейтерона приписать силе Гейзенберга (§ 14). Как мы покажем в следующем параграфе, только *половина* такой силы Гейзенберга действовала бы при связи ядра H^3 , в то время как для дейтерона действует полная сила. Это привело бы к относительно меньшей стабильности ядра H^3 . Однако для доказательства Томаса нужно лишь допущение о существовании стабильного состояния дейтерона в том случае, если сила между нейтроном и протоном в дейтероне та же, что и средняя сила между протоном и каждым нейтроном в H^3 . Это действительно имеет место. Из рассеяния медленных нейтронов протонами (§ 15) вытекает, что дейтерон практически не обладал бы *никакой* энергией связи, если действующая сила была бы силой Майорана *минус* сила Гейзенберга, в то время как сила Майорана *плюс* сила Гейзенберга приводит к экспериментальной энергии связи. Сила Майорана *плюс* половина силы Гейзенберга дала бы поэтому энергию связи где-нибудь в промежутке, около 50—65% наблюдаемой энергии связи дейтерона. Этого вполне достаточно для справедливости приведенного здесь доказательства Томаса.

§ 20. Вычисление энергии H^3 , He^3 и He^4 из вариационного принципа (F2, F3, P8, M9, W1)

Энергия связи легких ядер H^2 , H^3 , He^4 являются наиболее удобными величинами для определения ядерных сил. Это определение, понятно, не может быть сделано непосредственно.

Предполагается закон взаимодействия, в котором один или больше параметров оставляются произвольными. Энергии связи легких ядер вычисляются как функции параметров сил взаимодействия, а сами параметры затем подбираются так, чтобы вычисленные значения энергии связи совпали с наблюдаемыми.

Энергий связи H^2 , H^3 , He^3 , He^4 достаточно для того, чтобы определить *три* параметра в законе ядерного взаимодействия. Может показаться, что из четырех известных энергий связи ядер можно найти четыре параметра. Однако энергии связи двух ядер — H^3 и He^3 — имеют непосредственное отношение друг к другу. H^3 состоит из двух нейтронов и одного протона, He^3 — из одного нейтрона и двух протонов. Мы приняли повсюду в этой работе, что ядерные силы симметричны относительно нейтронов и протонов, т. е. что силы между двумя протонами в точности те же, что и между двумя нейтронами ⁽¹⁾, за исключением кулоновского отталкивания. Это обозначает, что энергия He^3 должна отличаться от энергии H^3 как раз на кулоновское отталкивание двух протонов. Несмотря на некоторые противоречия в эксперименте (см. § 22), приведенное соображение, по-видимому, верно. Таким образом, He^3 обеспечивает проверку нашего допущения о симметрии ядерных сил относительно протонов и нейтронов.

Остается в результате три ядра — H^2 , H^3 и He^4 — для определения ядерных сил. Поэтому было бы бесполезным допускать силы, содержащие больше трех параметров. В соответствии с этим мы допустим, что область действия сил между одинаковыми частицами та же, что и между нейтронами и протонами, и лишь их величина отлична. Допустим для взаимной потенциальной энергии нейтрона и протона

$$J(r) = -Be^{-\frac{r}{a}} \quad (115)$$

и для энергии взаимодействия двух одинаковых частиц

$$K(r) = -Ce^{-\frac{r}{a}}. \quad (115a)$$

Нам нужно найти при этом подходящую область действия сил a и величины их B и C соответственно для двух видов взаимодействия.

Допустим, что взаимодействие нейтрона и протона обменного характера Майорана. Природа взаимодействия между одинаковыми частицами будет рассмотрена более детально в § 24. Пока мы можем принять, что это — „обычные“ силы; сила, предположенная в § 24 для всех ядер до He^4 , дала бы тот же результат.

При потенциалах (115) и (115a) энергия всех ядер принципиально могла бы вычисляться точно из уравнения Шредингера. В действительности вычисление непосредственно может быть

⁽¹⁾ Случай равенства нулю сил, действующих между этими частицами, также находился бы в согласии с этим допущением.

произведено лишь для дейтерона (§ 12). Так как дейтрон состоит из одного нейтрона и одного протона, его энергия дает нам одно соотношение между двумя постоянными B и a , определяющими взаимодействие нейтрона и протона. Это соотношение приведено в таблице III для двух случаев: (а) если вся энергия связи дейтерона обусловлена „силами Майорана“ (115) и (б) если часть энергии связи обязана „силам Гейзенберга“, зависящим от относительного расположения спинов протона и нейтрона, как, повидимому, следует из рассеяния медленных нейтронов протонами (§ 14).

В последнем случае дается „эффективная“ сила \bar{B} , равная напряженности \bar{B} силы Майорана плюс половина напряженности силы Гейзенберга. Это — то значение \bar{B} , которое входит в энергию ядер, содержащих четное число нейтронов или протонов или четное число тех и других, по крайней мере, в первом приближении, т. е. если сила Гейзенберга мала по сравнению с силой Майорана.

В этом случае полная волновая функция ядра H^2 может быть записана:

$$\varphi(1, 2, 3) = \psi(x_1, x_2, x_3) \alpha(1) \cdot 2^{-1/2} [\alpha(2) \beta(3) - \beta(2) \alpha(3)]. \quad (116)$$

Первый множитель представляет здесь волновую функцию координат положения. Второй множитель есть волновая функция спина протона (частица 1), который предполагается параллельным оси z . (Спиновая функция α обозначает спин, параллельный оси z , β — спин антипараллельный оси z — см. 92а). Последний множитель есть волновая функция спина двух нейтронов (частицы 2, 3), спины которых, понятно, направлены противоположно друг к другу. Множитель $2^{-1/2}$ стоит для нормировки.

Рассмотрим теперь случай, когда между протоном и нейтроном 2 действуют потенциал Майорана V_M и потенциал Гейзенберга V_H . Оператор потенциальной энергии, действуя на (116), дает тогда:

$$(V_H + M_M) \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x_2, x_1, x_3) \{ J_M(r_{12}) \alpha(1) [\alpha(2) \beta(3) - \beta(2) \alpha(3)] + J_H(r_{12}) \alpha(2) [\alpha(1) \beta(3) - \beta(1) \alpha(3)] \}, \quad (116a)$$

где J_H и J_M представляют потенциалы Гейзенберга и Майорана как функции расстояния r_{12} . Средняя величина потенциальной энергии равна:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \int \varphi (V_M + V_H) \varphi d\tau &= \int d\tau \psi(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2, x_1, x_3) J_M(r_{12}) \cdot \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \alpha^2(1) \times \\ &\times [\alpha(2) \beta(3) - \beta(2) \alpha(3)]^2 + \int d\tau \psi(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2, x_1, x_3) J_H(r_{12}) \cdot \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \times \\ &\times [\alpha^2(1) \alpha^2(2) \beta^2(3) - \alpha^2(1) \alpha \beta(2) \alpha \beta(3) - \alpha \beta(1) \alpha^2(2) \alpha \beta(3) - \alpha \beta(1) \alpha \beta(2) \alpha^2(3)]. \quad (116b) \end{aligned}$$

Если произвести суммирование по спину всех трех частиц, то мы найдем, что два члена дают по единице в первой сумме и только один дает единицу во второй, причем все другие члены равны нулю (см. 92е). Поэтому (116b) сводится к

$$\sum_{\sigma} \int \varphi (V_M + V_H) \varphi d\tau = \int d\tau \psi(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2, x_1, x_3) \left(J_M + \frac{1}{2} \cdot J_H \right), \quad (116c)$$

что показывает, что к полному взаимодействию Майорана следует прибавить половину взаимодействия Гейзенберга.

Можно было бы ожидать, что сила Гейзенберга вообще не будет принимать участия в энергии связи ядер, содержащих только пары нейтронов. Действительно, можно было бы думать, что из двух нейтронов, один должен иметь спин, параллельный спину протона, и другой — антипараллельный спину

протона, так что участие силы Гейзенберга, обусловленное двумя нейтронами, компенсировалось бы. Несостоятельность этого рассуждения вызвана неправильным употреблением слова антипараллельный; два спина антипараллельны только тогда, если их волновые функции антисимметричны относительно координат спинов. В волновой функции $\alpha(1)\beta(2)$ однако z — компоненты спинов 1 и 2 антипараллельны, спины же сами могут быть как параллельны, так и антипараллельны, поэтому мы можем образовать любую из двух волновых функций:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)], \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)], \end{aligned} \right\} \quad (116d)$$

причем первая соответствует параллельным, а вторая — антипараллельным спинам. Правильным поэтому было бы такой способ рассуждения: если компоненты двух спинов с данным направлением параллельны, спины, безусловно, параллельны; если компоненты противоположны, может быть случай параллельных, а также и антипараллельных спинов. Таким образом, нейтрон, спин которого параллелен протону, будет взаимодействовать по Гейзенбергу с последним, в то время как нейтрон с противоположным спином вообще не будет проявлять Гейзенберговского взаимодействия. Поэтому мы получим два взаимодействия Майорана и одно взаимодействие Гейзенберга для ядра H^3 или одно взаимодействие Майорана и половину Гейзенберга на один нейтрон, как и найдено в (116с).

Величина \bar{B} в таблице III, следовательно, может быть использована для определения энергий H^3 и He^4 .

Вернемся к вопросу об определении энергии связи из данной силы. В то время как уравнение Шредингера для дейтерона может быть проинтегрировано точно, для ядер H^3 и He^4 этого сделать нельзя. В этих случаях приходится пользоваться приближенными методами. Наиболее часто при решении аналогичных вопросов пользуются методом Ритца (1). Он дает определенный верхний предел энергии связи для любого состояния квантово-механической системы, но этот верхний предел иногда очень медленно сходится к действительному значению энергии. К сожалению, для энергии ядер имеет место эта медленная сходимость. Причиной медленной сходимости является очень малая область действия ядерных сил. Из теории дейтерона (§ 12) мы знаем, что правильная волновая функция (см. 38а) очень быстро меняется, когда расстояние между частицами меньше области a их взаимодействия, в то время как при расстояниях $r \gg a$ волновая функция меняется очень медленно. То же самое справедливо и для точной волновой функции более сложных ядер. Мы находим сравнительно медленное изменение волновой функции вообще, налагающееся на быстрое изменение, имеющее место всегда, когда две ядерные частицы находятся на близком расстоянии. Такая комбинация быстро и медленно меняющихся функций аналитически не может быть просто представлена. Действительно, довольно сложная волновая функция была выбрана Томасом (§ 19) для того, чтобы показать стремление энергии ядра H^3 к бесконечности, когда область действия сил

(1) См., например, Handbuch der Physik, том 24, часть 1, стр. 353.

стремится к нулю. Пользование волновой функцией, аналогичной сложности для *количественных* выводов об энергии связи при конечной области действия сил, исключительно кропотливо, особенно для ядер более сложных чем H^8 . С другой стороны, любая разумная *простая* аналитическая функция должна быть очень плохим приближением к действительной волновой функции, потому что аналитическое выражение должно меняться слишком быстро, когда частицы, образующие ядро, находятся далеко друг от друга и слишком медленно при малом расстоянии между ними. Это в особенности справедливо при малой области действия сил. Поэтому мы не можем ожидать хорошего согласия между результатами вариационного метода Ритца и экспериментальными энергиями связи, причем следует ожидать больших расхождений при уменьшении области действия сил (см. ниже в особенности таблицу IV).

Первое, что необходимо сделать при применении вариационного метода,— это выбрать приближенную волновую функцию системы. Достаточно простой функцией для ядра H^8 является:

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\nu(r_{12}^2 + r_{13}^2) - \frac{1}{2}\mu r_{23}^2}, \quad (117)$$

где индекс 1 обозначает протон, 2 и 3 — два нейтрона, так что r_{12} есть расстояние первого нейтрона от протона и r_{23} — расстояние между двумя нейтронами. Функция $e^{-\frac{1}{2}\nu r^2}$ „соединяет вместе“ две неодинаковые частицы, функция $e^{-\frac{1}{2}\mu r^2}$ — две одинаковые частицы. Так как силы между неодинаковыми частицами велики, следует ожидать, что ν больше, чем μ . Для α -частицы выбираем аналогично:

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\nu(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{34}^2) - \frac{1}{2}\mu(r_{12}^2 + r_{34}^2)}, \quad (117a)$$

где 1 и 2 относятся к протонам, 3 и 4 — к нейтронам.

При помощи волновых функций (117) и (117a) все интегралы, входящие в вариационный метод, могут быть взяты элементарно, например, для кинетической энергии H^8 имеем:

$$E_{\text{кин}} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\int \psi (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \psi d\tau_2 d\tau_3}{\int \psi^2 d\tau_2 d\tau_3} = \frac{3\hbar^2}{2M(\mu + 2\nu)}, \quad (117b)$$

где Δ_1 — оператор Лапласа относительно координат первой частицы и интегралы распространяются по всем положениям второй и третьей частицы относительно первой. Потенциальная энергия равна:

$$E_{\text{пот}} = -2\bar{B} \frac{\int e^{-\frac{r_{12}^2}{a^2} - \nu r_{12}^2 - \frac{1}{2}(\mu + \nu)(r_{13}^2 + r_{23}^2)} d\tau_2 d\tau_3}{\int e^{-\nu(r_{12}^2 + r_{13}^2) - \mu r_{23}^2} d\tau_2 d\tau_3} - C \frac{\int e^{-\frac{r_{34}^2}{a^2} - \mu r_{34}^2 - \nu(r_{12}^2 + r_{13}^2)} d\tau_2 d\tau_3}{\int e^{-\nu(r_{12}^2 + r_{13}^2) - \mu r_{23}^2} d\tau_2 d\tau_3} \quad (117c)$$

$$E_{\text{пот}} = -16\bar{B} \left[\frac{\nu(\nu+2\mu)}{(\nu+\mu)(5\nu+\mu+4a^{-2})} \right]^{3/2} - C \left[\frac{\nu+2\mu}{\nu+2\mu+2a^{-2}} \right]^{3/2} \quad (117d)$$

Вид интеграла в первом члене числителя в (117с) обусловлен силами Майорана — предполагается взаимодействие между частицами 1 и 2, и поэтому волновую функцию (117) следует помножить на волновую функцию, получающуюся в результате обмена частиц 1 и 2 в (117), вместо того, чтобы брать квадрат (117). Множитель 2 в первом члене (117с) обусловлен тем, что два нейтрона взаимодействуют с одним протоном.

Выражения (117b) и (117d) можно упростить, вводя сокращения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4} (5\nu + \mu) a^2, & p &= \frac{2\nu + 4\mu}{5\nu + \mu}, \\ T &= \frac{\hbar^2}{Ma^2}. \end{aligned} \right\} \quad (118a)$$

При этом верхний предел для энергии H^3 равен:

$$E^0(\text{H}^3) = (2+p)\sigma T - 2\bar{B} \left(\frac{p(4-p)}{1+2p} \right)^{3/2} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2} - C \left(\frac{p\sigma}{p\sigma+1} \right)^{3/2}. \quad (118)$$

Аналогично находим для α -частицы:

$$E^0(\text{He}^4) = \frac{3}{2}(2+p)\sigma T - 4\bar{B} \frac{[p(2-p)]^{3/2}}{\left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2}} - 2C \left(\frac{p\sigma}{p\sigma+1} \right)^{3/2}, \quad (119)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2} (3\nu + \mu) a^2, \quad p = \frac{2\nu + 2\mu}{3\nu + \mu}. \quad (119a)$$

(118) и (119) следует уменьшить до минимума, варьируя параметры p и σ .

Произведем вычисления первого выражения без допущения наличия сил между одинаковыми частицами, чтобы получить представление о степени того приближения, которое дается (118) и (119). Из предыдущего параграфа мы знаем, что волновая функция H^3 должна стремиться к минус бесконечности, если область a действия сил стремится к нулю, т. е. если B и T в (118) стремятся к бесконечности и в то же время соотношение между B и T , полученное для энергии связи дейтерона, остается неизменным. Это должно быть справедливо, а fortiori для He^4 . Мы можем ожидать, что энергия связи обоих ядер монотонно уменьшается с уменьшением a . Для очень больших областей действия сил энергия связи H^3 будет как раз в два раза больше, для He^4 — как раз в четыре раза больше энергии связи дейтерона.

Действительно, минимум выражения (118) и в меньшей степени минимум (119) ведут себя совсем не в соответствии с этими ожиданиями. В то время как в большой области действия сил результат удовлетворителен, минимум $E^0(\text{He}^4)$ уменьшается очень медленно с уменьшением области действия сил, а $E^0(\text{H}^3)$ даже увеличивается при уменьшении a . Это показывает, что вариационный метод становится все хуже с уменьшением области действия сил, чего и следовало ожидать (см. выше).

Для определения минимума (118) и (119) можно поступить следующим образом. Прежде всего определить минимум относительно p . Положение этого минимума зависит лишь слегка от величины σ , а зависимость минимальной энергии от p совсем ничтожна⁽¹⁾. Минимум лежит при

$$p_0 = 0,75, \text{ соответственно } \mu = 0,54 \nu \text{ для } \text{H}^3 \quad (118b)$$

$$p_0 = 0,92, \text{ соответственно } \mu = 0,7 \nu \text{ для } \text{He}^4. \quad (119b)$$

Подставляя эти значения, приводим (118) и (119) к

$$E^0(\text{H}^3) = 2,750 T\sigma - 1,925 \bar{B} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2}, \quad (118c)$$

$$E^0(\text{He}^4) = 4,378 T\sigma - 3,961 \bar{B} \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2}. \quad (119c)$$

Минимум этих выражений в зависимости от σ определяется

$$\frac{(\sigma+1)^{5/2}}{\sigma^{1/2}} = \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot \frac{1,925}{2,750} \cdot \frac{\bar{B}}{T} \text{ для } \text{H}^3, & (118d) \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{3,961}{4,378} \cdot \frac{\bar{B}}{T} \text{ для } \text{He}^4. & (119d) \end{cases}$$

Из полученных выражений легко определить σ_0 для любых данных отношений:

$$\lambda = \frac{\bar{B}}{T} = \frac{M\bar{B}a^2}{h^2}, \quad (118e)$$

σ_0 затем следует подставить в (118с, 119с) и вычислить E^0 .

Результат приведен в таблице IV.

Таблица IV

Энергии H^3 и He^4 в зависимости от области действия сил между нейтроном и протоном

(все энергии в MV, a — в 10^{-13} см)

T	a	\bar{B}	$\text{H}^3 (E_{\text{набл}} = -8,3)$			$\text{He}^4 (E_{\text{набл}} = -27,6)$				
			σ_0	E_0	E_F	σ_0	$E_{\text{кин}}$	$E_{\text{пот}}$	E^0	E_F
5	2,86	22,05	0,740	- 1,60	-	1,080	23,65	32,7	- 9,05	-
10	2,02	38,4	0,551	- 0,44	- 2,8	0,891	38,95	49,15	- 10,2	- 15,6
20	1,43	69,4	0,389	+ 1,67	+ 1,0	0,760	66,5	77,9	- 11,4	- 17,4
40	1,01	129,2	(0,25) ^(*)	+ 5,30	+ 4,0	0,666	116,5	129,5	- 13,0	- 19,3
80	0,715	245,0	(0,25) ^(*)	+ 12,90	-	0,593	207,5	220,0	- 12,5	-

Для пяти различных областей действия сил (графа 2) даны величины сил, т. е. значение \bar{B} (графа 3), полученные из теории дейтерона (табл. III, § 12), причем принят в расчет член, возни-

(¹) Когда отношение потенциальной энергии H^3 к его кинетической энергии меняется от 1,0 до 1,2, p_0 меняется от 0,735 до 0,765; коэффициент T в (117с) — от 2,735 до 2,765, т. е. приблизительно на 1,1%; коэффициент B возрастает на 1%. Отношение коэффициентов, наиболее важное при определении энергии связи, растет на 0,12%; этим можно полностью пренебречь.

(*) Выражение (118с) не имеет минимума для этих значений T 0,25 есть положение минимума, когда T почти исчезает.

кающий от сил Гейзенберга (см. выше и § 14). Для каждой пары a, \bar{B} (или T, \bar{B}) σ_0 и полная энергия вычислены для H^3 и He^4 . В дополнение даны значения энергий, полученные Финбергом (F2); они отличны от наших, потому что он считал, что энергия связи дейтерона обусловлена только силами Майорана⁽¹⁾. Кроме того для α -частицы отдельно даны кинетическая и потенциальная энергии, чтобы показать, что обе эти величины быстро возрастают, когда силы становятся больше и область их действия уменьшается.

Результаты никак нельзя признать удовлетворительными. Даже для α -частицы наименьшее значение энергии равно — 13,0 MV, т. е. составляет только половину наблюдаемой энергии связи, равной 28 MV. (Значения Финберга несколько лучше, потому что он допускает большие силы для любого a по вышеуказанной причине). Для H^3 энергия связи полностью исчезает при областях действия сил меньших $2,6 \cdot 10^{-13}$ см. Причиной такого неудовлетворительного результата, понятно, является большое отклонение наших волновых функций (117) и (117a) от точной при малой области a действия сил.

Финберг попробовал дать лучшее приближение, подбирая лучше волновые функции. Наилучшее приближение было получено с волновой функцией:

$$\psi = \psi_0 + \lambda H \psi_0, \quad (120)$$

где λ — параметр, который следует варьировать, ψ_0 — волновая функция (117) и H — оператор энергии, т. е. сумма операторов кинетической и потенциальной энергии. Волновые функции типа (120) впервые были введены для использования в вариационном методе Хассе (H6). Они часто исправляют исходную волновую функцию ψ_0 , приближая ее к точной. В нашем случае (120) дает энергию около $E^0 + 0,6(E^1 - E^0)$, где E^0 — энергия, вычисленная из (117c) и E^1 — энергия, вытекающая из Финберговского метода эквивалентной задачи двух тел (см. § 21).

Еще лучший результат для H^3 был получен при помощи вариационного метода Презентом (P8). Он выбрал простой экспоненциальный потенциал $V_0 e^{-\frac{r}{a}}$ между нейтронами и протонами с $a = 10^{-13}$ см и $V_0 = 97$ MV. Эта величина V_0 вытекает из теории дейтерона (табл. III); она не исправлена на силы Гейзенберга. Считается, что между двумя нейтронами никакие силы не действуют. Презент кроме того допустил, что взаимодействие является обычным Вигнеровским взаимодействием, а не взаимодействием обменного типа Майорана (это упрощает вычисление и должно давать несколько преувеличенный результат для энергий связи). Для волновой функции Презент выбрал простую экспоненциальную функцию, помноженную на степенной ряд от расстояния между частицами, причем он варьировал коэффициенты

(1) В свои дальнейшие вычисления Финберг внес поправку на силы Гейзенберга.

членов ряда. При восьми членах ряда он получил для ядра H^3 энергию связи в 4,85 MV. Результаты для энергии связи, получающиеся при повышении числа членов волновой функции, показывают быструю сходимость. Он заключает поэтому, что правильная энергия связи равна $4,9 \pm 0,05$ MV. Аналогичная величина (около 4,7 MV для $a = 10^{-13}$ см, или в его обозначениях $\mu = 0,5 \cdot 10^{13}$ см⁻¹) была получена Мессе и Мором (M9), использовавшими при вариационных вычислениях другие приближенные волновые функции. Финберговский метод эквивалентной задачи двух тел, который мы опишем в следующем параграфе, дает, согласно Презенту, 4,5 MV, т. е. почти ту же энергию связи.

Обсуждая эти данные, нужно иметь в виду, что для H^3 даже в наиболее неблагоприятном случае, т. е. для бесконечно большой области действия сил, следует ожидать энергию связи, равную удвоенной энергии связи дейтерона, т. е. 4,3 MV. Действительно найденные результаты лишь слегка превышают эту величину, в лучшем случае примерно на 15%. С другой стороны, *наблюденная* энергия связи 8,3 MV приблизительно вдвое больше „элементарной“ величины 4,3 MV. Это показывает, повидимому, что для того, чтобы объяснить наблюдаемый массовый дефект H^3 , необходимо выбрать силы, гораздо менее протяженные, чем было принято до сих пор, если мы допустим существование только сил между нейтронами и протонами и никаких сил между двумя нейтронами. С другой стороны, повидимому, никакие силы, имеющие область действия, меньшую, чем $1 \cdot 10^{-13}$ см, повидимому, несовместимы с энергией связи α -частицы и H^2 (табл. V, § 21). Поэтому мы должны заключить, что все же между двумя нейтронами должны существовать силы притяжения, чтобы объяснить наблюдаемые массовые дефекты H^2 , H^3 , He^4 .

Необходимость этого заключения еще усиливается тем обстоятельством, что Презент сделал некоторые пренебрежения в вычислениях, которые увеличивают энергию связи. Во-первых, он принял силы Вигнера, вместо сил Майорана. Во-вторых, он не принял в расчет того обстоятельства, что часть энергии связи H^2 обусловлена силами Гейзенберга, что дает соответственно меньшую энергию связи H^3 (см. выше). В-третьих, область действия сил $1 \cdot 10^{-13}$ см, повидимому, несколько короче, чем та, которую можно совместить с теорией α -частицы (таблица V). Заключение Презента о силах между нейтронами подтверждается более подробными вычислениями, приведенными в следующем параграфе.

Противоположное заключение получено Дольфом также на основании вариационных вычислений (см. Вейцекер, W1). Деталей вычислений Дольфа еще нет — даны только некоторые кривые, представляющие величины B и a в выражении (115), необходимые, чтобы получить правильную энергию связи H^2 , H^3 и He^4 соответственно (фиг. 1 в статье Вейцекера). Повидимому, данные для H^2 не были получены из точного решения уравнения Шредингера, а лишь из приближенного выражения. В чем состоял этот приближенный метод, неизвестно. Повидимому, на основании опубликованных данных, волновые функции были хуже волновых функций (121); например, для $a = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см, волновая

функция (121) дает согласно (121a) правильную энергию связи для дейтерона, если B равно 87 MV. Величина, полученная из вычислений Дольфа для $a = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см ($b = 2,0$ в обозначениях Вейцекера), составляет 0,100 массовых единиц или 93 MV, т. е. больше, чем получающаяся из (121) (1). Так как необходимая из совпадений с опытными данными величина B больше, чем вытекающая из вычислений Дольфа, его волновая функция дает более плохое приближение к волновой функции дейтерона, чем даже простая функция (121). С другой стороны, его результаты для H^3 и He^4 , повидимому, являются лучшими приближениями, чем приведенные в таблице IV и полученные на основании (117) и (117a). Не следует сравнивать относительно хороших приближений для H^3 и He^4 с очень плохими приближениями для H^2 . По этой причине мы не можем согласиться с выводами Вейцекера и Дольфа, сделанными на основании вычислений Дольфа, что нет необходимости предполагать существующими силы между одинаковыми частицами, чтобы объяснить массовые дефекты H^2 , H^3 и He^4 . Кроме того, если вычисления Дольфа исправить, учтя силы Гейзенберга, становится еще более необходимым допустить силы между одинаковыми частицами).

Из вариационных вычислений Презента и Месси и Мора мы можем также заключить, что метод эквивалентной задачи двух тел Финберга (§ 21) дает наиболее правильный результат для энергий связи H^3 (4,5 MV, по сравнению с 4,9 MV, получающимися согласно наилучшим вариационным вычислениям Презента). Мы применим поэтому указанный метод к H^3 и He^4 в следующем параграфе.

§ 21. Эквивалентная задача двух тел Финберга (F_2 , F_3)

Так как вариационный метод дает, по крайней мере с простыми приближенными волновыми функциями, очень плохие результаты для энергии связи H^3 и He^4 , этот метод не может быть использован для определения ядерных сил и постоянных ядерных сил из наблюдаемых энергий связи. Следует найти лучший метод. Такой метод был предложен Финбергом. Аналогичный способ был использован также Вигнером при его первых вычислениях энергии связи He^2 (W12).

Метод эквивалентной задачи двух тел не может быть строго обоснован. Но, повидимому, одинаково вероятно, что он может дать и несколько преувеличенный и несколько преуменьшенный результат для энергий связи при заданных силах. Кроме того, Презент показал, что для H^3 пользование лучшими приближенными волновыми функциями в вариационном методе дает энергию связи, весьма близкую к получающейся по эквивалентной задаче двух тел (2).

Метод состоит в следующем. Вариационный метод применяется к дейтерону с того же типа волновой функцией, как и волновая функция, использованная для H^3 и He^4 (см. 121). Энергия Дейтерона (см. 121a), получающаяся из вариационного принципа, имеет вид, вполне аналогичный найденному для энер-

(1) За это указание мы благодарны д-ру Финбергу.

(2) Отклонение результата эквивалентной задачи двух тел от последних вариационных вычислений Презента составляет всего 6% разницы между результатами простого вариационного метода и вычислениями Презента.

гий ядер H^3 и He^4 (см. 118с и 119с), только коэффициенты слегка отличаются. „Вариационная энергия“ H^2 будет поэтому иметь то же значение, что и для H^3 , если постоянные T и B , определяющие силы, заменить другими постоянными: T' и B' , кратными T и B и выбранными таким образом, чтобы получить требующуюся разницу в коэффициентах формул (118с и 121а). Далее, точное волновое уравнение дейтерона решается при новых постоянных T' и B' , которые можно назвать „эквивалентными силовыми постоянными“ для ядра H^3 . Результат решения уравнения дейтерона с силовыми постоянными $T'B'$ („эквивалентная задача двух тел“) считается правильной энергией ядра H^3 .

Волновая функция, выбранная для дейтерона, равна

$$\psi = e^{-\frac{1}{2} \sigma r^2}, \quad (121)$$

где r — расстояние между протоном и нейтроном. При этой волновой функции энергия дейтерона, получающаяся из вариационного принципа, равна:

$$E^0(H^2) = \frac{3}{2} T \sigma - B \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2}, \quad (121a)$$

$$\text{где} \quad \sigma = \nu a^2. \quad (121b)$$

Энергию (117с) H^3 можно записать в форме, аналогичной (121а), т. е.

$$E^0(H^3) = \frac{3}{2} T' \sigma - B' \left(\frac{\sigma}{\sigma+1} \right)^{3/2}, \quad (122)$$

если положить

$$T' = 1,833 T, \quad B' = 1,925 \bar{B}. \quad (122a)$$

Метод эквивалентной задачи двух тел предполагает, что энергия ядра H^3 равна собственному значению энергии E' в волновом уравнении (эквивалентная задача двух тел):

$$\frac{\hbar^2}{M} \Delta \psi + \left(E' + B' e^{-\frac{r^2}{a'^2}} \right) \psi = 0, \quad (122b)$$

где (см. 118а)

$$a'^2 = \frac{\hbar^2}{MT'}. \quad (122c)$$

Собственное значение E' (122b) может быть получено без дальнейших вычислений из таблицы III в § 12. Предположим, что мы имеем два волновых уравнения типа (122b), одно из которых содержит постоянные E' , B' , a' , T' и другое — постоянные E'' , B'' , a'' , T'' . Предположим кроме того, что

$$\frac{B'}{T'} = \frac{B''}{T''}, \quad (123)$$

или, другими словами,

$$B' a'^2 = B'' a''^2. \quad (123a)$$

тогда отношение энергий равно отношению потенциалов, т. е.

$$\frac{E'}{B'} = \frac{E''}{B''}. \quad (123b)$$

Чтобы убедиться в этом, введем в (122b) новые координаты, которые в $\frac{a'}{a''}$ раз больше старых, т. е.

$$r'' = \frac{r a''}{a'}, \quad \Delta'' = \left(\frac{a'}{a''} \right)^2 \Delta, \quad (123c)$$

где Δ'' обозначает оператор Лапласа относительно новых координат. Умножая получающееся уравнение на $\left(\frac{a'}{a''}\right)^2$, находим:

$$\frac{\hbar'^2}{M} \Delta'' \psi + \left[E' \left(\frac{a'}{a''}\right)^2 + B \left(\frac{a'}{a''}\right)^2 e^{-\frac{r''^2}{a''^2}} \right] \psi = 0, \quad (123d)$$

что эквивалентно при (123a) и (123b)

$$\frac{\hbar'^2}{M} \Delta'' \psi + \left(E'' + B'' e^{-\frac{r''^2}{a''^2}} \right) \psi = 0. \quad (123e)$$

Отсюда мы видим, что $E'' = E' \frac{B''}{B}$ есть собственное значение, соответствующее силовому полю $B''T''$, если E' есть собственное значение энергии, соответствующее силовому полю $B'T'$. Таблица III дает пары величин $B''T''$, которые приводят к энергии связи $E'' = -2,14$ MV. Из них мы можем легко найти собственное значение, соответствующее данной паре постоянных $B'T'$, используя (123b).

В качестве иллюстрации найдем энергию H^3 для случая $T = 10$ MV. Таблица III дает нам величину \bar{B} , соответствующую согласно теории дейтерона этому значению T ; $\bar{B} = 38,4$ MV. Из (121a) мы находим для силовых постоянных задачи двух тел, эквивалентной проблеме H^3 , $T' = 18,33$ MV, $B' = 73,9$ MV.

Отношение их $\frac{B'}{T'} = 4,03$. Подставляя в таблицу III это частное значение $\frac{B''}{T''}$ и находя указанное выше значение, имеем $T'' = 12,5$ MV. Эта величина T'' дает энергию связи $-E'' = 2,14$ MV. Энергия связи H^3 поэтому равна $-E' = -\frac{E''T'}{T''} = \frac{2,14 \cdot 18,3}{12,5} = 3,13$ MV.

Аналогичные вычисления могут быть произведены и для He^4 , только соотношение между эквивалентными силовыми постоянными $B'T'$ и данными константами действительной силы $-\bar{B}T$ будет изменено согласно (119c), (121a)

$$T'(\text{He}^4) = 2,919 T, \quad B'(\text{He}^4) = 3,961 \bar{B}. \quad (124)$$

Таблица V

Энергии H^3 и He^4 по методу эквивалентной задачи двух тел в зависимости от области действия сил

(между одинаковыми частицами никакие силы не действуют, все энергии выражены в MV и a в 10 см; величины в скобках оценены)

T	a	B	H^3 наблюдаемая $E = -8,3$		He^4 наблюдаемая $E = -27,6$			
			$-E'$	$-E_{\text{фин}}$	$-E'$	C	$-E$	$-E_{\text{фин}}$
5	2,84	22,05	2,82	(4,2)	11,05	0,56	10,5	(18,2)
10	2,02	38,4	3,00	4,5	14,05	0,72	13,3	24,3
15	1,65	54,0	3,12	4,7	16,70	0,83	15,9	26,8
20	1,43	69,4	3,29	4,9	19,15	0,93	18,2	29,0
30	1,16	99,3	3,46	5,2	28,65	1,10	22,55	(33,2)
40	1,01	129,2	3,70	5,4	28,25	1,24	27,0	—
50	1,905	158,3	3,86	—	32,55	1,35	31,2	—
60	0,825	187,0	4,02	—	36,50	1,45	35,05	—
80	0,715	245,0	4,30	—	44,30	1,63	42,7	—

В таблице V приведены результаты вычислений для H^3 и He^4 для различных областей a действия силы. Силы между одинаковыми частицами попрежнему считаются равными нулю. E' есть энергия, определяемая из „эквивалентной задачи двух тел“. C — представляет поправку на кулоновское отталкивание двух протонов в α -частице (см. § 22). $E = E' + C$ есть полная вычисленная энергия. В таблицу включены энергии, вычисленные Финбергом, причем разность обусловлена тем, что Финберг снова определяет силовую постоянную B для каждой области a действия сил, так что полная энергия связи дейтерона обусловлена силой Майорана, в то время как мы считали часть ее обусловленной силами Гейзенберга. Разница, как видно, довольно велика, и Финберговские энергии связи, конечно, больше для любых областей a действия сил.

Мы видим, что энергия связи α -частицы быстро возрастает с уменьшением области действия силы, причем экспериментальная величина 27,6 MV получается для

$$T = 41,5 \text{ MV}, a = 0,99 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \bar{B} = 133 \text{ MV}. \quad (125)$$

При Финберговских допущениях о природе энергии связи дейтерона потенциальная яма должна быть значительно менее глубокой и менее узкой:

$$T = 16,8 \text{ MV}, a = 1,56 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \bar{B} = 60 \text{ MV}. \quad (125F)$$

Полученная энергия связи ядра H^3 значительно меньше чем наблюдаемая (8,3 MV), и она растет очень медленно с уменьшением области действия сил. Для области действия, достигающей значения, получающегося из энергии связи α -частицы ($T = 41,5 \text{ MV}$), энергия связи H^3 равна только 3,7 MV, т. е. составляет 45% наблюдаемого значения. (При Финберговских допущениях она была бы значительно лучше, а именно: 4,8 MV при $T = 17 \text{ MV}$, что однако все же неудовлетворительно). Мы должны поэтому заключить: (а) что метод эквивалентной задачи двух тел, будучи удовлетворительным для α -частиц, дает слишком малую энергию связи H^3 или (б) что существуют добавочные силы, понижающие энергию связи H^3 относительно более сильно, чем они понижают энергию связи α -частицы.

Первая возможность должна быть исключена почти с достоверностью на основе вариационных вычислений Презента (см. конец § 20). Поэтому мы принимаем возможность (б). Добавочные силы мы считаем силами притяжения, действующими между одинаковыми частицами. Это допущение следует предпочесть допущению (а), так как мы уже нашли другие основания для наличия сил между одинаковыми частицами (§§ 10 и 18).

Энергия H^3 и He^4 , получающаяся из вариационного метода и включающая силы между одинаковыми частицами, дана в (118) и (119). Эти два выражения не совпадают в точности с видом вариационной энергии H^3 , даваемой в (121a). Последний член (118), как и (119), содержит $\left(\frac{p\sigma}{p\sigma+1}\right)^{3/2}$, вместо $\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^{3/2}$. Поэтому

метод эквивалентной задачи двух тел не может быть непосредственно применен.

Два способа решения напрашиваются сами собой:

(а) полагаем просто $p = 1$. Таким образом, мы отбрасываем один параметр в вариационном принципе и поэтому несколько ухудшаем результат. Ошибка однако не может быть существенной, потому что введение сил между одинаковыми частицами стремится уравнивать постоянные μ и ν в волновой функции и поэтому приблизить p к единице. Если бы силы между одинаковыми частицами были равны силам между неодинаковыми частицами, мы имели бы точно $\mu = \nu$ и $p = 1$. Для выведенного ниже отношения сил (см. уравнение 128) находим $p = 0,94$ для H^3 и $p = 0,985$ для He^4 при значениях, дающих минимум энергии.

(b) Введем новый параметр σ' , положив

$$\sigma = \sigma' [1 + c(1 - p)]. \quad (126)$$

c может тогда определиться таким образом, что сумма второго и третьего членов в (118) имеет вид $[2Bf(p) + C] \left(\frac{\sigma'}{\sigma' + 1} \right)^{3/2}$. Это получается, полагая приближенно

$$c = \frac{C}{(2B + C)}. \quad (126a)$$

Минимум выражения (118) относительно p имеет место приблизительно при

$$p = 1 - \frac{B - C}{2(2B + C)} \quad (126b)$$

и (118) сводится к

$$E(\text{H}^3) = \left[3 - \left(\frac{B - C}{2B + C} \right)^2 \right] T\sigma' + \left[2B + C - \frac{1}{4} B \left(\frac{B - C}{2B + C} \right)^2 \right] \left(\frac{\sigma'}{\sigma' + 1} \right)^{3/2} \quad (126c)$$

Полученные из этого уравнения результаты почти совпадают с результатами метода (а). Постоянная C , определенная описанным ниже способом из энергий связи H^3 , оказывается на $0,15 \text{ MV}$ меньше при определении по методу (b), чем она получилась бы при определении по методу (а), если принять окончательно выбранную область действия сил ($T = 8 \text{ MV}$). Для более короткой области действия сил поправка больше — она равна $0,9 \text{ MV}$ для $T = 20$ и $1,7 \text{ MV}$ — для $T = 30$. Но эти различия, понятно, очень малы в сравнении с точностью метода. Для α -частицы эффект применения метода (b) должен быть еще меньше. Мы применили метод (b) в окончательных вычислениях. Опишем применение метода (а).

Полагая $p = 1$ в (118) и (119) и сравнивая результат с (121a) получим для параметров эквивалентной задачи двух тел:

$$\text{для } \text{H}^3: T' = 2T, \quad B' = 2B + C, \quad (127)$$

$$\text{для } \text{He}^4: T' = 3T, \quad B' = 2(2B + C). \quad (127a)$$

Так как мы хотим определить три постоянных B , C и T (T — эквивалентно области действия сил a), мы должны использовать точные энергии связи всех трех ядер — H^2 , H^3 и He^4 . Поэтому выберем следующий образ действия. Примем данное значение T . Величина \bar{B} , соответствующая ему, может быть определена непосредственно из таблицы III, основанной на теории дейтерона. C может быть затем определено из наблюдаемой

энергии связи ядра H^3 , т. е. $E' = 8,28 \text{ MV}$ в 3,87 раза превышает энергию связи дейтерона. Метод определения совпадает с описанными уравнениями от (123) до (123e). Нам известно, что величина $T' = 2T$ вместе с неизвестным значением B' должны определяться энергией связи $E' = 3,87E_0$. Поэтому силовые постоянные $T'' = \frac{T'}{3,87}$ и $B'' = \frac{B'}{3,87}$ дали бы точно энергию связи дейтерона. Следует лишь найти в таблице III величину $T'' = \frac{T'}{3,87} = \frac{2T}{3,87}$ и затем найти из таблицы соответствующее значение $\frac{B''}{T''}$. Это значение $\frac{B''}{T''}$, помноженное на данное $T' = 2T$,

дает требуемое значение B' для ядра H^3 . Вычитая $2\bar{B}$ из B' , находим ту величину C , которая определяет правильную энергию H^3 и (H^2) для данного значения T . Мы можем назвать ее $C(H^3, T)$.

Та же самая операция затем производится и для α -частицы. В этом случае сперва производится поправка наблюдаемой энергии связи на кулоновское отталкивание двух протонов [е определение см. (129b)]. В результате вычисления получается другое значение для C , т. е. $C(He^4, T)$, которое необходимо для получения правильной энергии связи He^4 и H^2 .

Таблица VI

Величина силы, действующей между одинаковыми частицами, необходимая для того, чтобы объяснить энергии связи H^3 и He^4

(эквивалентная задача двух тел, энергии — в MV, a — в 10^{-13} см)

T	a	\bar{B}	H^3		He^4		
			B'	C	Кул. (1)	$\frac{1}{2} B'$	C
5	2,86	22,05	62,15	18,05	0,70	64,7	20,6
7,5	2,33	30,4	81,75	20,95	0,79	81,85	21,05
10	2,02	38,4	100,3	23,5	0,86	97,5	20,7
15	1,65	54,0	135,8	27,8	0,96	127,7	19,7
20	1,43	69,4	169,3	30,5	1,05	156,7	17,9
30	1,165	99,3	233,8	35,2	1,18	211,4	12,8

Из таблицы VI мы видим, что $C(H^3, T)$ быстро возрастает с уменьшением области действия сил, в то время как $C(He^4, T)$ остается постоянным вплоть до области действия $1,5 \cdot 10^{-13}$ см и затем уменьшается. Это обусловлено тем, что энергия связи α -частицы может быть объяснена без привлечения сил между одинаковыми частицами простым допущением $a = 1,00 \cdot 10^{-13}$ см, в то время как соответствующие вычисления для H^3 (табл. V) не дают удовлетворительного результата.

Найдем теперь точку, в которой кривые $C(H^3, T)$ и $C(He^4, T)$ пересекаются. Постоянные силы в этой точке равны:

$$T = 7,6 \text{ MV}, \bar{B} = 30,7 \text{ MV}, C = 21,0 \text{ MV}, a = 2,32 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (128)$$

(1) Кулоновская энергия взаимодействия двух протонов.

Эти постоянные дают, согласно нашему методу, правильные энергии связи трех легких ядер H^2 , H^3 и He^4 .

Финберг получил несколько отличные постоянные, допуская в первой части своих вычислений, что сил Гейзенберга не существует, и затем исправляя результаты. Его значения равны:

$$\bar{B} = 34 \text{ MV}, C = 21 \text{ MV}, a = 2,17 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (128F)$$

Разница обусловлена несколько отличными экспериментальными значениями для энергий связи H^2 , H^3 и He^4 .

Следует иметь в виду, что результат (128) нельзя рассматривать как точный. Не существует способа оценить ошибку метода эквивалентной задачи двух тел. Повидимому, величина C (величина силы между одинаковыми частицами) не так чувствительна к ошибкам, как величина B (сила между протоном и нейтроном) и a (область действия сил). Предположим, например, что значение C для α -частицы меньше правильного на 2 MV и для H^3 больше правильного на ту же величину. Тогда „точка пересечения“ сместится к $T = 11,2 \text{ MV}$, $\bar{B} = 42 \text{ MV}$, $C = 22,5 \text{ MV}$, $a = 1,91 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, т.е. \bar{B} возрастет почти на 40%, а a уменьшится на 20%, в то время как C изменилось только на 7%. Наше определение поэтому не следует рассматривать как окончательное. Однако, существование сил между одинаковыми частицами надо считать почти достоверным, и величина этих сил не может существенно отличаться от (128).

Кроме того силы между одинаковыми частицами, полученные по нашей теории, почти полностью совпадают с силами, вытекающими из рассеяния протонов протонами (§ 18). Это согласие следует считать очень удовлетворительным, и в настоящее время оно представляет единственную непосредственную проверку наших основных допущений о ядерных силах. Что это так, можно видеть из следующего. У нас есть пять точных экспериментальных данных для определения постоянных теории ядер, а именно: энергии связи H^2 , H^3 , He^4 , рассеяние медленных нейтронов протонами и рассеяние протонов протонами. Первые четыре необходимы для определения четырех постоянных: области действия сил, напряженности сил Майорана и сил Гейзенберга между нейтроном и протоном и сил между двумя протонами. Только пятый экспериментальный результат поэтому может служить для проверки наших допущений.

§ 22. Сравнение H^3 и He^3

До сих пор мы всюду принимали, что ядерные силы симметричны относительно нейтронов и протонов (§ 6), т.е. что сила между двумя нейтронами равна силе между двумя протонами, если отбросить кулоновское отталкивание последних. С этой точки зрения разница между энергиями связи H^3 и He^3 должна приписываться исключительно кулоновскому отталкиванию двух протонов в He^3 . Подсчет этого эффекта может дать

наиболее прямую проверку допущения о симметрии ядерных сил относительно нейтронов и протонов. В то же время мы можем определить кулоновскую энергию для α -частицы, что необходимо для поправки вычислений предыдущего параграфа (таблицы V и VI).

Кулоновская энергия может быть очень просто вычислена из волновой функции (117); результат для He^3 :

$$E_{\text{кул}} = e^2 \left[\frac{2(\nu + 2\mu)}{\pi} \right]^{1/2} \quad (129)$$

Аналогично получаем для α -частицы:

$$E_{\text{кул}} = e^2 \left[\frac{4(\nu + \mu)}{\pi} \right]^{1/2}. \quad (129a)$$

Чтобы оценить эти выражения, надо вычислить ν и μ . Повидимому, достаточно положить $\nu = \mu$, что приблизительно верно для нашего случая (см. выше). Тогда мы можем использовать (118a) и (119a), заменив $\nu = \mu$ на σ , что дает:

$$E_{\text{кул}} = 2 \left(\frac{e^2}{a} \right) \left(\frac{\sigma}{\pi} \right)^{1/2} \quad (129b)$$

как для H^3 , так и для He^4 . Теперь σ можно определить приближенно, варьируя энергии H^3 и He^4 к минимуму. Для H^3 и $\nu = \mu$ эта вариационная энергия равна [см. (118), положив $p = 1$]:

$$E = 3T\sigma - (2B + C) \left(\frac{\sigma}{\sigma + 1} \right)^{3/2}. \quad (129c)$$

Минимум имеет место для

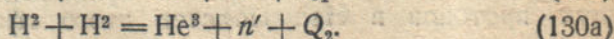
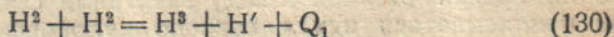
$$\frac{(\sigma + 1)^3}{\sigma} = \left[\frac{2B + C}{2T} \right]^2. \quad (129d)$$

Для наших значений постоянных (128) это выражение имеет величину 29,0, что дает:

$$\sigma = 0,934, \quad (129e)$$

$$E_{\text{кул}} = 0,68 \text{ MV}. \quad (129f)$$

Можно ожидать несколько большего значения кулоновской энергии по той причине, что два протона должны находиться более часто вблизи друг от друга, чем следовало бы ожидать по волновой функции (117), потому что на близких расстояниях между ними действует сильное притяжение. Однако эта поправка не может быть очень большой. Поэтому (129) должно быть приблизительно равным наблюдаемой разнице между энергиями связи H^3 и He^3 , причем He^3 будет более тяжелым ядром. Эта разница экспериментально получается непосредственно из разности энергий двух реакций:



Мы можем написать:

Энергия связи H^3 равна массе двух нейтронов плюс масса одного протона минус H^3 :

$$\text{Энергия связи } H^3 = 2n' + 2H' - (H^3 + H').$$

$$\text{Энергия связи } He^3 = n' + 2H' - He^3 = 2n' + 2H' - (He^3 + n').$$

Поэтому разница в энергиях связи равна

$$(He^3 + n^1) - (H^3 + H^1) = Q_1 - Q_2. \quad (130b)$$

Энергия реакции Q_1 очень хорошо известна из опытов Олифанта, Кемптона и Резерфорда; она равна:

$$Q_1 = 3,97 \pm 0,01_5 \text{ MV}. \quad (130c)$$

Q_2 было измерено Бонером и Брубакером (B20), а также Ди и Волтоном (D1). Последние авторы использовали пробег ядер отдачи He^4 , получающихся от нейтронов, чтобы определить энергию нейтронов; величина Q_2 , полученная из их измерений, равна приблизительно 2,95 MV (глава XVI). Эта величина несколько неточна, потому что пробеги α -частиц отдачи очень коротки и лежат в области, где соотношение между пробегом и энергией не особенно хорошо известно. Бонер и Брубакер использовали протоны отдачи, пробег которых гораздо больше и лежит в области, где связь между пробегом и энергией хорошо известна. Они нашли:

$$Q_2 = 3,21 \pm 0,13 \text{ MV}. \quad (130d)$$

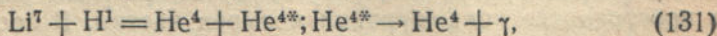
Если мы остановимся на этой величине, разница между энергиями связи оказывается равной:

$$(He^3) - (H^3) = Q_2 - Q_1 = 0,76 \pm 0,14 \text{ MV} \quad (130e)$$

в хорошем согласии с вычисленной величиной (129f).

§ 23. Возбужденные состояния α -частицы (F4, C17)

Креном и Лоуритсенем (C17) получены опытные данные, указывающие на наличие возбужденных состояний α -частицы. Эти опытные данные основаны на том, что при обстреле ядра Li^7 протонами испускаются γ -лучи. Реакция, имеющая при этом место, вероятно, следующая (см. главу XVI):



где He^{4*} обозначает возбужденную α -частицу, которая испускает γ -лучи, теряя свою энергию после реакции (см. в главе XIII аргументы против возможности испускания γ -лучей при самом превращении).

Спектр γ -лучей реакции (131), повидимому, сложен. Максимум энергии γ -лучей равен 16 MV, т. е. составляет примерно всю энергию реакции (17 MV). Дополнительно существуют γ -лучи меньших энергий. Удовлетворительное объяснение этого получается при допущении одного возбужденного уровня α -частицы, лежащего на 16 MV выше основного состояния и одного

или двух более возбужденных состояний с меньшей энергией, причем наименьшая энергия возможно лежит на 10 MV выше основного состояния. γ -лучи малой энергии при этом могут получаться в результате перехода между высоко возбужденными уровнями, в то время как интенсивные γ -лучи соответствуют переходам из одного из возбужденных состояний в основное.

α -частица с энергией возбуждения в 16 MV была бы вполне устойчивой относительно распада. Для распада требовалась бы по меньшей мере энергия перехода в $H^3 + H^1$, а этот процесс требует 19,4 MV, что можно вычислить из масс H^1 , H^3 и He^4 .

Ответим теперь на вопрос, следует ли ожидать наличия (одного или нескольких) возбужденных состояний α -частицы. Финберг (F4) показал, что ответ должен быть положительным, если величины силовых постоянных, выведенных в предыдущем параграфе, хотя бы приблизительно верны. Вероятно, существует два или три устойчивых возбужденных состояния, лежащих не очень далеко друг от друга.

Можно было бы попытаться вычислить энергию возбужденных состояний при помощи вариационного метода. Этот метод однако очень сложен для возбужденных состояний ⁽¹⁾, потому что волновые функции возбужденных состояний должны выбираться ортогональными к функциям основного состояния. Кроме того вариационный метод не дает особенно хороших результатов даже для основного состояния. Финберг поэтому выбрал другой метод для рассмотрения возбужденных уровней α -частицы ⁽²⁾.

Метод основан на так называемом правиле суммирования матричных элементов координат. Введем следующие координаты:

$$\left. \begin{aligned} u &= r_1 + r_2 - r_3 - r_4, & v &= r_1 - r_2, \\ w &= r_3 - r_4, & S &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4), \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

где r_1 и r_2 — положения протонов и r_3 , r_4 — положения нейтронов. $\frac{1}{2}u$ — вектор из центра тяжести двух нейтронов, проведенный в центр тяжести двух протонов, v — вектор от одного протона к другому, w — соответствующий вектор между нейтронами и S — положение центра тяжести α -частицы. 12 декартовых компонент этих четырех векторов образуют ортогональный ряд координат в пространстве конфигурации четырех частиц. В соответствии с этим оператор Лапласа (кинетическая энергия) преобразуется в сумму операторов Лапласа относительно координат (132) без пересекающихся членов, т. е.

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 4\Delta_u + 2\Delta_v + 2\Delta_w + \frac{1}{4}\Delta_s. \quad (132a)$$

⁽¹⁾ См. соответствующие вычисления для атома гелия в Handbuch der Physik, том 24, 1, стр. 364.

⁽²⁾ В действительности Финберг проделал также и вариационные вычисления для возбужденных состояний. Однако эти вычисления были произведены не для обменных, а для обычных сил. Кроме того получающееся значение энергии лишь немного ниже верхнего предела, найденного из правила суммирования.

Подставим это выражение в волновое уравнение и затем выведем правило сумм для асцилляторных интенсивностей обычным способом⁽¹⁾. Если u' обозначает любую декартову компоненту вектора \mathbf{u} и u'_{mn} — ее матричный элемент относительно двух состояний α -частицы, имеем для какого-нибудь состояния m :

$$\sum_n (E_n - E_m) |u'_{mn}|^2 = \frac{2\hbar'^2}{M}, \quad (133)$$

$$\sum_n (E_n - E_m) |v'_{mn}|^2 = \sum_n (E_n - E_m) |w'_{mn}|^2 = \frac{\hbar'^2}{M}. \quad (133a)$$

Суммы включают, понятно, интегрирование по непрерывному спектру. Применим (133) в частности к основному состоянию $m=0$. Обозначим через E_1 энергию наиболее низкого возбужденного состояния, для которого матричный элемент u'_{0n} не пропадает. Тогда мы имеем из (133):

$$(E_1 - E_0) \sum_n |u'_{0n}|^2 < \frac{2\hbar'^2}{M}. \quad (133b)$$

Стоящая в этом выражении сумма может быть непосредственно найдена:

$$\sum |u'_{0n}|^2 = (u'^2)_{00}, \quad (133c)$$

где $(u'^2)_{00}$ средняя u'^2 по функциям основного состояния. Поэтому мы получаем:

$$E_1 - E_0 < \frac{2\hbar'^2}{M} (u'^2)_{00} \quad (134)$$

(134) дает верхний предел для энергий первого возбужденного состояния, причем надо знать только волновую функцию основного состояния. Примем волновую функцию (117a), которая может быть переписана в форме:

$$\psi_0 = e^{-1/2 \nu u^2 - 1/2 (\nu + \nu') (v^2 + w^2)}, \quad (134a)$$

где u — длина вектора \mathbf{u} . Тогда легко находим:

$$(u'^2)_{00} = \frac{\int e^{-\nu u'^2} \cdot u'^2 du'}{\int e^{-\nu u'^2} \cdot du'} = \frac{1}{2\nu}. \quad (134b)$$

Из (119a) имеем: $\nu = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{a^2}$, если положить $p=1$ [действительное значение $p=0,985$; см. § 21, текст над (126)], так что

$$E_1 - E_0 < \frac{2\hbar'^2 \sigma}{Ma^2} = 2T\sigma \quad (134c)$$

(1) Финберг показал, что правила сумм (133), (133a) справедливы только для обычных сил. Для сил Майорана, повидимому, верхний предел энергии значительно ниже (135). Это делало бы достоверным существование устойчивых возбужденных состояний.

(см. 118а) σ можно определить, полагая вариационную энергию основного состояния α -частицы (см. 119) с $p = 1$:

$$4\frac{1}{2} T\sigma - 2(2B + C) \left(\frac{\sigma}{\sigma + 1} \right), \quad (134d)$$

стремящейся к минимуму. Подставляя величины постоянных (128), получаем отсюда:

$$\sigma = 1,32, \quad (134e)$$

$$E_1 - E_0 < 20,1 \text{ MV}. \quad (135)$$

Так как условие устойчивости относительно распада на H^3 и H' есть:

$$E_1 - E_0 < 19,4 \text{ MV}, \quad (135a)$$

уровень E_1 должен быть лишь несколько ниже верхнего предела (135), чтобы он был устойчивым. Таким образом, устойчивость состояния почти достоверна.

Свойства уровня E_1 можно вывести из того обстоятельства, что координата u имеет неисчезающий матричный элемент между основным состоянием (вполне симметричная волновая функция) и E_1 . Отсюда вытекает: во-первых, волновая функция состояния E_1 должна быть симметричной относительно пространственных координат протонов и нейтронов, что дает синглетное состояние; во-вторых, функция должна менять знак, если два нейтрона заменяются двумя протонами, и наоборот, что указывает на наличие узловой плоскости; поэтому это есть P -функция. Следовательно, состояние E_1 есть 1P -состояние.

Два 3P -уровня получаем, полагая собственные функции антисимметричными в пространстве координат двух протонов или двух нейтронов. Назовем эти состояния 3P уровнями E_2 и E_3 ; матричные элементы v'_{02} и w'_{03} соответственно отличны от нуля. Верхняя граница энергий E_2 и E_3 может быть получена таким же путем, как и граница E_1 :

$$E_2 - E_0 < \frac{\hbar'^2}{M} (v'^2)_{00}, \quad (135b)$$

$$(v'^2)_{00} = \frac{1}{2\mu + 2\nu}. \quad (135c)$$

При $\mu = 0$ верхние пределы E_2 и E_3 совпадают с пределом E_1 . Из этого факта можно заключить, что оба уровня E_2 и E_3 могут быть устойчивыми. Однако, так как оба уровня обладают одинаковыми свойствами симметрии, между ними должно существовать некоторое „взаимодействие“, в результате которого один из уровней должен быть снижен, а другой повышен, возможно за пределы устойчивости. Мы можем, следовательно, пытаться дать такую картину возбужденных состояний α -частицы. Существует 1P -уровень, нечетный в координатах u и четный в координатах v и w , отстоящий меньше, чем на 20 MV от нормального состояния. Далее, существует уровень 3P четный относительно u и нечетный относительно v и w , который, как можно ожидать,

лежит ниже 1P -состояния, вследствие взаимодействия с другим 3P -уровнем. Этот другой 3P -уровень, вследствие того же взаимодействия, вероятно, лежит выше 1P -состояния и, возможно, вообще неустойчив.

Мы предлагаем отождествить 1P -уровень с наблюдаемым уровнем 16 MV, нижнее 3P -состояние с нижним уровнем, лежащим, по видимому, около 10 MV. Этот выбор оправдывается с точки зрения правил отбора, только координата u имеет связанный с ним электрический момент. Разрешенные оптические переходы должны привести поэтому из состояния, нечетного относительно u , в состояние, четное относительно u , и наоборот. Оба перехода из 1P и 1S и в 3P поэтому разрешены. То обстоятельство, что последний переход есть „интеркомбинация“ лишь слегка меняет интенсивность, потому что достаточно большие силы Гейзенберга (§ 14) не делают спин α -частицы настоящим квантовым числом. Переход $^3P \rightarrow ^1S$ также должен иметь место, потому что только таким путем α -частицы при 3P -состоянии могут отдать свою энергию. Поэтому можно ожидать существования трех линий, соответствующих переходам $^1P \rightarrow ^1S$ (около 16 MV)⁽¹⁾, $^1P \rightarrow ^3P$ (приблизительно 6 MV) и $^3P \rightarrow ^1S$ (приблизительно 10 MV). По видимому, это совпадает с опытом, однако сделано еще очень малое количество наблюдений и поэтому опытный материал содержит большие неточности.

ГЛАВА V

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЯДЕР

§ 24. Метод Хартри

В этой и в следующей главах мы воспользуемся приближением, в котором каждая ядерная частица в первом приближении предполагается движущейся независимо от других. Этот метод был введен в атомной физике Хартри (H4) и использован в ней весьма широко.

В приближении Хартри мы допускаем известные волновые функции $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_Z$ для каждого отдельного протона и $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ для нейтронов. Каждая из этих волновых функций предполагается функцией как положения, так и спина соответствующих частиц: p_i и n_i означают все координаты (положения и спина) протона и нейтрона соответственно. Тогда волновая функция ядра как целого, удовлетворяющая принципу Паули (см. например, S 22), будет:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \psi_1(p_1) & \psi_2(p_1) & \dots & \psi_Z(p_1) \\ \psi_1(p_2) & \psi_2(p_2) & \dots & \psi_Z(p_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(p_Z) & \psi_2(p_Z) & \dots & \psi_Z(p_Z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(n_1) & \varphi_2(n_1) & \dots & \varphi_N(n_1) \\ \varphi_1(n_2) & \varphi_2(n_2) & \dots & \varphi_N(n_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(n_N) & \varphi_2(n_N) & \dots & \varphi_N(n_N) \end{vmatrix} \quad (136)$$

⁽¹⁾ Понятно, теоретически эти величины не обоснованы. Они подобраны так, чтобы наилучшим образом соответствовать опытному материалу.

Полная энергия ядра в первом приближении определяется

$$E = \frac{\int \Psi^* \left[V - \frac{\hbar^2}{2M} \left(\sum_{i=1}^N \Delta_{ni} + \sum_{i=1}^Z \Delta_{pi} \right) \right] \Psi d\tau}{\int |\Psi|^2 d\tau}, \quad (137)$$

где V — полная потенциальная энергия как функция координат, Δ_{ni} и Δ_{pi} — операторы Лапласа относительно координат i -го нейтрона и протона, и интеграл распространяется по всем координатам всех частиц.

Выражение (137) в действительности представляет верхний предел для энергии системы, так как известно, что правая сторона (137) принимает абсолютно минимальное значение при подстановке, вместо Ψ , правильной волновой функции Ψ_0 (вариационный принцип Шредингера). Понятно, если Ψ_0 подставить в (137), уравнение должно дать правильную энергию E_0 . Таким образом, правильная энергия всегда лежит ниже вычисленной из (137) с приближенной функцией Ψ энергии E . Отсюда вытекают очень важные следствия. Если Ψ содержит один или больше параметров, считающихся произвольными в начальных стадиях вычисления, значение этих параметров впоследствии должны определяться таким образом, чтобы (137) было возможно меньше. Этим Ψ и E оказываются близкими к правильной волновой функции и энергии настолько, насколько это возможно при принятой волновой функции (метод Ритца). Параметр, который обычно вводится в волновую функцию и затем определяется из условий минимума, есть радиус ядра; иногда однако вводится также большее число параметров.

Прежде, чем вычислить (137), скажем несколько слов относительно приближения Хартри в ядерной физике. Сразу же можно заметить, что это приближение не может быть так последовательным в ядерной теории, как в теории атомов. Основной причиной этому является характер ядерных сил, дающих насыщение. Каждая из ядерных частиц взаимодействует в основном только с двумя частицами различного рода (§ 7). Поэтому сила между данной парой частиц будет того же порядка величины, как и сила, действующая от всего ядра на одну частицу. Это противоречит допущениям теории Хартри. Допущения Хартри состоят в том, что в первом приближении полное действие ядра на одну частицу может быть заменено средним полем, соответствующим среднему распределению всех других частиц в ядре. Предполагается, что поправки для различных частиц, т. е. поправки на движение частиц под влиянием мгновенных положений других частиц, вызывают лишь небольшие возмущения по теории Хартри. Эти допущения в теории Хартри хорошо выполняются в атомных проблемах, где силы, обусловленные ядром, и силы, соответствующие среднему заряду электронов, значительно более велики, чем флуктуация силы, вызываемой, например, близким приближением какого-либо электрона к рас-

смаатриваемому электрону. В ядерной физике сила, действующая на нейтрон, меняется на 100% или больше в зависимости от того, находится ли вблизи протон или нет. Поэтому взаимное расположение ядерных частиц должно быть исключительно важным для любого удовлетворительного вычисления энергии ядра, и метод Хартри должен давать лишь грубое приближение. Несмотря на эти серьезные возражения против метода Хартри, мы вынуждены пользоваться им, потому что в настоящее время лучшего метода практически не существует.

Произведем теперь вычисление энергии (137). Для этого полезно считать функции отдельных частиц ортогональными и нормированными. Это проще всего достигается допущением, что ψ и φ являются решениями волновых уравнений для одной частицы, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi_i + (E_i - V_p) \psi_i &= 0, \\ \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi_i + (W_i - V_n) \varphi_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

где V_p и V_n — некоторые вспомогательные потенциалы, которые могут быть выбраны так, чтобы обратить энергию (137) в минимум.

Допустим теперь, что полная потенциальная энергия V в (137) состоит из ряда членов, соответствующих взаимодействию пар частиц:

$$V = \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N V_{ik}(p_i, n_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z \sum_{k \neq i}^Z P_{ik}(p_i, p_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N N_{ik}(n_i, n_k), \quad (139)$$

где V_{ik} представляет взаимодействие протонов и нейтронов, P_{ik} взаимодействие между двумя протонами и N_{ik} — взаимодействие между двумя нейтронами. Множители $\frac{1}{2}$ введены с целью лишь один раз учитывать взаимодействие каждой пары.

Вычисление (137) при этом производится по аналогии с теорией сложных атомов (С 13). Результат равен:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^Z E_i + \sum_{i=1}^N W_i - \sum_{i=1}^Z \int |\psi_i|^2 V_p d\tau - \sum_{i=1}^N \int |\varphi_i|^2 V_n d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N \int \psi_i^*(p) \varphi_k^*(n) V(p, n) \psi_i(p) \varphi_k(n) d\tau_p d\tau_n + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^Z \sum_{k \neq i}^Z \left[\int |\psi_i(1)|^2 \cdot |\psi_k(2)|^2 P(1, 2) d\tau_1 d\tau_2 - \right. \\ &\left. - \int \psi_k^*(1) \psi_i^*(2) \psi_i(1) \psi_k(2) P(1, 2) d\tau_1 d\tau_2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i}^N \left[\int |\varphi_i(1)|^2 \cdot |\varphi_k(2)|^2 N(1, 2) d\tau_1 d\tau_2 - \right. \\ &\left. - \int \varphi_k^*(1) \varphi_i^*(2) \varphi_i(1) \varphi_k(2) N(1, 2) d\tau_1 d\tau_2 \right]. \end{aligned} \quad (140)$$

Первая строка содержит кинетическую энергию частиц. Вторая представляет взаимодействие между разными частицами, а следующие две и последние две строки — взаимодействие протонов и нейтронов, соответственно. Очевидно, члены обменного взаимодействия появляются только в четырех последних строках, относящихся к взаимодействию между одинаковыми частицами, потому что эти члены возникают из антисимметрии волновой функции относительно частиц одного рода.

Допустим теперь, что $V(p, n)$ есть взаимодействие типа Майорана. Другими словами, если x_s обозначает положение и спин протона, а σ — те же величины нейтрона, то

$$V(p, n) \psi_i(x_s) \varphi_k(\xi\sigma) = J(x - \xi) \psi_i(\xi s) \varphi_k(x\sigma), \quad (141)$$

где J обычная функция расстояния между частицами, как это было рассмотрено в главе III.

Интегралы в (140) подразумевают, понятно, также суммирование по координатам спина. Это суммирование может быть произведено, если мы допустим, что каждая из функций ψ и φ есть произведение функции, зависящей только от координат положения, и функции, зависящей только от спина, что всегда можно делать, если потенциалы V_p и V_n (см. 139) не зависят от спина. Тогда часть, зависящая от взаимодействия между протоном i и нейтроном k из (140), становится равной:

$$V_{ik} = \int \psi_i^*(x) \varphi_k^*(\xi) \psi_i(\xi) \varphi_k(x) J(x - \xi) dx d\xi, \quad (141a)$$

причем интеграл здесь распространяется только на пространственные координаты.

Взаимодействие между протонами содержит кулоновское взаимодействие и специфическое взаимодействие между одинаковыми частицами, рассмотренное в §§ 10, 18 и 21. Ничего определенного относительно типа этих сил мы не знаем. Здесь могут иметь место два случая: взаимодействие может зависеть или не зависеть от относительного расположения спинов частиц ⁽¹⁾. Мы склоняемся к первой возможности, потому что независящее от спинов взаимодействие в основном должно совпадать с взаимодействием Вигнера, что приводит к трудностям, давая избыток энергии связи в случае тяжелых ядер ⁽²⁾ (§ 28, VI). Примем поэтому

$$\left. \begin{aligned} N(1, 2) &= -\frac{1}{3} K(r_{12}) (\sigma_1 \cdot \sigma_2), \\ P(1, 2) &= -\frac{1}{3} K(r_{12}) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) + \frac{e^2}{r_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (142)$$

¹⁾ Силы Майорана и Гейзенберга могут быть выражены через силы этих двух видов вследствие антисимметрии волновой функции относительно одинаковых частиц; см. VI.

²⁾ Лнейная комбинация большой силы, зависящей от спина, и малой силы, не зависящей от спина, не может быть исключена.

Силы между двумя нейтронами и двумя протонами предположены равными друг другу, если отвлечься от кулоновского отталкивания (см. § 6, 22). σ обозначает спиновый оператор Паули.

Множитель $\frac{1}{3}$ введен с целью сделать взаимодействие между двумя нейтронами (или протонами) с противоположными спинами равным $+K$; для таких нейтронов мы имеем (при $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, обозначающей результирующую двух спинов, которая равна нулю ⁽¹⁾):

$$2\sigma_1\sigma_2 = \sigma^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = -6. \quad (142a)$$

K , таким образом, совпадает с величиной, обозначенной через K в (115a).

Чтобы вычислить взаимодействие между двумя нейтронами в (140), мы прежде всего добавим формально член $k=i$, относящийся к взаимодействию нейтрона с самим собой. Это не меняет выражений, потому что „обменный“ и „обычный“ члены точно сокращаются для $k=i$. Затем, каждую волновую функцию φ_i мы запишем в виде произведения пространственной волновой функции u_i и спиновой волновой функции, равной α или β , в зависимости от того, направлены ли составляющие спинов в направлении z или в противоположном направлении. Возьмем затем частное состояние $\varphi_i = u_i \alpha$ и рассмотрим его взаимодействие с двумя состояниями: $\varphi_{k1} = u_k \alpha$ и $\varphi_{k2} = u_k \beta$ (u_k может быть равно или не равно u_i), тогда для „прямой“ части взаимодействия (первый интеграл последней строки 140) имеем:

$$-\frac{1}{3} \int |u_i(1)|^2 |u_k(2)|^2 K(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2 \sum_{s_1, s_2} \alpha(s_1) \alpha(s_2) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \alpha(s_1) \alpha(s_2) \quad (142b)$$

$$\text{и} \quad -\frac{1}{3} \int |u_i(1)|^2 |u_k(2)|^2 K(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2 \sum_{s_1, s_2} \alpha(s_1) \beta(s_2) (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \alpha(s_1) \beta(s_2), \quad (142c)$$

соответственно двум состояниям φ_{k1} и φ_{k2} . Спиновые волновые функции подчиняются соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_z \alpha &= \alpha, \quad \sigma_z \beta = -\beta, \quad \sigma_x \alpha = \beta, \quad \sigma_x \beta = \alpha, \\ \sigma_y \alpha &= i\beta, \quad \sigma_y \beta = -i\alpha; \end{aligned} \quad (142d)$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \alpha(1) \alpha(2) &= \alpha(1) \alpha(2), \\ (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \alpha(1) \beta(2) &= -\alpha(1) \beta(2) + 2\beta(1) \alpha(2). \end{aligned} \right\} \quad (142e)$$

Таким образом, сумма по спиновым координатам $s_1 s_2$ дает в (142b) $+1$ и в (142c) -1 . Два выражения (142b) и (142c) равны

⁽¹⁾ σ_1 есть удвоенный спин частицы 1 в единицах \hbar . Собственное значение квадрата момента количества движения есть $s(s+1)$, где $s = \frac{1}{2}$. Поэтому $\sigma_1^2 = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$.

и противоположны; поэтому обычная часть взаимодействия между нейтронами исчезает, если мы примем потенциал взаимодействия в виде (142) ⁽¹⁾.

Обменная часть (второй интеграл в последней строке 140) становится:

$$+\frac{1}{3} K_{ik} \sum_{s_1, s_2} \alpha(s_1) \alpha(s_2) \cdot \alpha(s_1) \alpha(s_2) \quad (143)$$

и

$$+\frac{1}{3} K_{ik} \sum_{s_1, s_2} \beta(s_1) \alpha(s_2) \cdot [-\alpha(s_1) \beta(s_2) + 2\beta(s_1) \alpha(s_2)] \quad (143a)$$

для взаимодействия φ_i с φ_{k1} и φ_{k2} , соответственно.

K_{ik} есть интеграл

$$K_{ik} = \int u_k^*(r_1) u_i^*(r_2) u_i(r_1) u_k(r_2) \cdot K(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2. \quad (143b)$$

Суммирование по $s_1 s_2$ дает 1 и 2, соответственно в (143) и (143a), так что оба члена вместе точно равны K_{ik} . Таким образом, K_{ik} есть взаимодействие между нейтроном i и парой нейтронов k с противоположным спином; $\frac{1}{2} K_{ik}$ — среднее взаимодействие между двумя нейтронами ik . Поэтому полное взаимодействие всех нейтронов равно $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N K_{ik}$, так как другой множитель $\frac{1}{2}$ получается из (140).

Для протонов справедлив тот же результат; здесь следует добавить лишь кулоновское отталкивание, которое дает „прямые“ и не дает „обменных“ членов.

Суммируя полученные члены, можно теперь переписать (140):

$$E = T + V + C - A + F, \quad (144)$$

где T — кинетическая энергия, V — часть, обусловленная взаимодействием между протонами и нейтронами, C — прямое кулоновское взаимодействие между протонами, A — поправка на кулоновское взаимодействие, обусловленная наличием протонного обмена, и F — часть, обусловленная ядерными силами, действующими между одинаковыми частицами. В явной форме имеем:

$$T = \sum_{i=1}^Z (E_i - \int |\psi_i|^2 V_p d\tau) + \sum_{i=1}^N (W_i - \int |\varphi_i|^2 V_n d\tau), \quad (144a)$$

$$V = \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N \int \psi_i^*(x_1) \psi_i(x_2) \varphi_k^*(x_2) \varphi_k(x_1) J(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2, \quad (144b)$$

$$C = \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^Z \int |\psi_i(x_1)|^2 |\psi_k(x_2)|^2 \frac{e^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2, \quad (144c)$$

⁽¹⁾ Это обстоятельство мешает взаимодействию нейтронов дать избыток в энергии связи тяжелых ядер. В этом заключается причина выбора потенциала взаимодействия в виде (142).

$$A = \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^Z \int \psi_i^*(x_1) \psi_i(x_2) \psi_k^*(x_2) \psi_k(x_1) \frac{e^2}{r_{12}} d\tau_1 d\tau_2, \quad (144d)$$

$$F = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^Z \int \psi_i^*(x_1) \psi_i(x_2) \psi_k^*(x_2) \psi_k(x_1) K(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \int \varphi_i^*(x_1) \varphi_i(x_2) \varphi_k^*(x_2) \varphi_k(x_1) K(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2. \quad (144e)$$

Можно достигнуть формального упрощения этих уравнений, введя общую плотность протонов и нейтронов:

$$\rho_p(x) = \sum_{i=1}^Z |\psi_i(x)|^2, \quad \rho_n(x) = \sum_{i=1}^N |\varphi_i(x)|^2 \quad (145)$$

и „смешанные плотности“ Дирака:

$$\left. \begin{aligned} \rho_p(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^Z \psi_i^*(x_1) \psi_i(x_2), \\ \rho_n(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^N \varphi_i^*(x_1) \varphi_i(x_2), \end{aligned} \right\} \quad (145a)$$

Очевидно,

$$\rho_p(x_2, x_1) = \rho_p^*(x_1, x_2), \quad \rho_p(x) = \rho_p(x, x).$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в выражениях от (144a) до (144e), имеем:

$$T = \sum_{i=1}^Z E_i + \sum_{i=1}^N W_i - \int (V_p \rho_p + V_n \rho_n) d\tau, \quad (146a)$$

$$V = \int J(r_{12}) \rho_p(x_1 x_2) \rho_n^*(x_1 x_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (146b)$$

$$C = \frac{1}{2} \int \frac{e^2}{r_{12}} \rho_p(x_1) \rho_p(x_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (146c)$$

$$A = \frac{1}{4} \int \frac{e^2}{r_{12}} |\rho_p(x_1 x_2)|^2 d\tau_1 d\tau_2, \quad (146d)$$

$$F = \frac{1}{4} \int K(r_{12}) [|\rho_p(x_1 x_2)|^2 + |\rho_n(x_1 x_2)|^2] d\tau_1 d\tau_2. \quad (146e)$$

§ 25. Статистическая модель. Качественные выводы (М6)

В статистической модели функции каждого отдельного протона или нейтрона предполагаются функциями свободных частиц, т. е. плоскими волнами. Эти функции подставляются в (146), и вычисляются энергии ядра.

В соответствии с этим вспомогательные потенциалы V_p и V_n предполагаются имеющими некоторое постоянное отрицательное значение внутри шара радиуса R (радиус ядра) и равными нулю

вне этого шара. Радиус R является произвольным параметром, который следует определить таким образом, чтобы энергия ядра была минимальной (см. § 24, начало). Величина потенциалов V_p и V_n внутри ядра не существенно влияет на энергию ядра, потому что в формулу (146) входят только кинетическая энергия частиц и вид волновой функции, не зависящие от величины потенциалов с точностью до поверхностных эффектов (§ 29).

Для простоты волновых функций можно заменить сферический «ящик» для ядерных частиц кубическим, имеющим тот же объем. Обозначая ребро куба через l , имеем:

$$l^3 = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad l = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} R. \quad (147)$$

Волновые функции в таком ящике являются плоскими волнами:

$$\psi_i = l^{-3/2} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}), \quad \varphi_i = l^{-3/2} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}). \quad (147a)$$

Множитель $l^{-3/2}$ служит для нормировки функций.

Компоненты волновых векторов \mathbf{k}_i определяются условиями на границе куба для волновых функций. Отбрасывая детали поверхностных эффектов, можно принять обычные условия:

$$k_{ix} = \frac{2\pi k_{ix}}{l}, \quad k_{iy} = \frac{2\pi k_{iy}}{l}, \quad k_{iz} = \frac{2\pi k_{iz}}{l}, \quad (148)$$

где k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} — три целых числа. Для каждых трех чисел k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} существует одно состояние протона и одно состояние нейтрона с произвольным направлением спина, так что полное число нейтронов (или протонов), имеющих компоненты волнового вектора между k_x и $k_x + dk_x$, k_y и $k_y + dk_y$, k_z и $k_z + dk_z$, равно:

$$ndk_x dk_y dk_z = 2 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z, \quad (148a)$$

где множитель 2 соответствует двум возможным направлениям спина. Число состояний, для которых абсолютная величина волнового вектора лежит между k и $k + dk$, равно (см. 147):

$$2 \left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk = \frac{4}{3\pi} R^3 k^2 dk. \quad (148b)$$

Кинетическая энергия частицы с волновым номером k равна:

$$T(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \quad (149)$$

так что число нейтронов с кинетической энергией между T и $T + dT$ равно:

$$N(T) dT = \frac{2^{5/2}}{3\pi} M^{3/2} \hbar^{-3} R^3 T^{3/2} dT. \quad (149a)$$

Состояниям наивысшей энергии соответствует наименьшая кинетическая энергия и поэтому наименьшее волновое число. Число нейтронов в состояниях, имеющих волновые числа ниже k_0 или же кинетическую энергию ниже T_0 , равно:

$$N = \frac{4}{3\pi} R^3 \int_0^{k_0} k^2 dk = \frac{4}{9\pi} R^3 k_0^3, \quad (150)$$

$$N = \frac{2^{7/2}}{9\pi} M^{3/2} \hbar^{-3} R^3 T_0^{3/2}. \quad (150a)$$

Из этих уравнений можно найти максимальное волновое число и кинетическую энергию нейтронов, заключенных в ядре, если полное число нейтронов равно N :

$$k_0 = \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{1/3} R^{-1}, \quad (150b)$$

$$T_0 = \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2MR^2}. \quad (150c)$$

Средняя кинетическая энергия на один нейтрон, как это вытекает из (149a), равна:

$$\bar{T} = \frac{\int N(T) \cdot T \cdot dT}{\int N(T) dT} = \frac{3}{5} T_0. \quad (150d)$$

\bar{T} , таким образом, пропорционально степени $2/3$ от числа нейтронов, так же как и T_0 . Полная кинетическая энергия пропорциональна $N\bar{T} \propto \frac{N^{5/3}}{R^2}$. Все эти формулы известны из статистики Ферми. Они применимы как к нейтронам, так и к протонам, причем только N заменяется через Z .

Вычислим теперь взаимодействие нейтронов и протонов (146b), используя волновые функции свободных частиц (147a). Прежде всего надо вычислить смешанную плотность:

$$\begin{aligned} \rho(r_1 r_2) &= \sum_{i=1}^N \Psi_i^k(r_1) \Psi_i(r_2) = l^{-3} \sum_{i=1}^N e^{i k_i (r_2 - r_1)} = \\ &= e^{-3} \left(\frac{e^3}{4\pi^3} \right) \int_0^{k_0} dk_0 dk_1 dk_2 e^{i(k \cdot r)}, \end{aligned} \quad (151)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Вводя сферическую систему координат в k -пространстве с осью, параллельной r , и воспользовавшись снова (147), имеем:

$$\begin{aligned} \rho(r_1 r_2) &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{k_0} 2\pi \sin \theta d\theta k^2 dk \cdot e^{i k r \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{\pi^2 r} \int_0^{k_0} k dk \sin kr = \frac{\sin k_0 r \cos k_0 r}{\pi^2 r^3}. \end{aligned} \quad (151a)$$

Эта функция имеет максимум при $r = \theta$, т. е.

$$\rho(r_1 r_1) = \frac{k_0^3}{3\pi^2} = \frac{3N}{4\pi R^3} \quad (151b)$$

[см. (150)]. $\rho(r_1 r_2)$ быстро падает, когда $k_0 r$ становится больше единицы. Это обозначает, что практически нет никакой связи между волновыми функциями в двух точках, расстояние между которыми существенно больше, чем $\frac{1}{k_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi}$, где λ_0 — наиболее короткая длина волны какого-либо нейтрона в ядре. Согласно формуле (150), $\frac{1}{k_0} \approx RN^{-1/3}$, что мало по сравнению с радиусом ядра, если N велико. Смешанная плотность поэтому велика, если две точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ находятся очень близко друг к другу по ра-

внению с радиусом ядра. Это очень существенно для справедливости статистической модели; можно надеяться, что действительные волновые функции частиц ядра представляют плоские волны, по крайней мере в ограниченной области ядра, даже если они сильно отличаются от плоских волн, если их рассматривать для всего ядра.

Ряд важных заключений можно получить, подставляя (151a) в (146b), даже без допущения о частном виде потенциала взаимодействия $J(r_{12})$. Для простоты мы введем только некоторую длину a , определяющую ширину потенциальной ямы J , и положим:

$$J(r) = -V_0 f\left(\frac{r}{a}\right), \quad (152)$$

где V_0 — постоянная, определяющая силу взаимодействия; f может быть произвольной функцией, например, можно принять любую из следующих:

прямоугольная яма: $f(x) = 1$ при $x < 1$, $f(x) = 0$ при $x > 1$,

экспоненциальная функция: $f(x) = e^{-x}$,

функция Гаусса: $f(x) = e_1^{-x^2}$

или более сложную функцию. Единственное допущение, которое мы делаем:

(1) $J(r)$ исчезает на бесконечности достаточно быстро;

(2) $J(r)$ не становится равной бесконечности при $r=0$ более быстро,

чем $\frac{1}{r}$;

(3) a выбрано таким образом, что основная часть спадания функции $f(x)$ находилась вблизи $x = 1$.

Полная потенциальная энергия взаимодействия нейтронов с протонами, согласно (146b) и (151a), равна:

$$V = -\frac{4\pi}{3} R^3 V_0 \int_0^{\infty} 4\pi r_{12}^2 dr_{12} f\left(\frac{r_{12}}{a}\right) \cdot \frac{\sin k_N r_{12} - k_N r_{12} \cos k_N r_{12}}{\pi^2 r_{12}^3} \times \\ \times \frac{\sin k_P r_{12} - k_P r_{12} \cos k_P r_{12}}{\pi^2 r_{12}^3}, \quad (152a)$$

где k_N и k_P — максимальные волновые числа для нейтронов и протонов, определяющиеся (150b). [В случае k_P следует заметить N в (150b) через Z]. Интегрирование по $d\tau_1 d\tau_2$ (146b) надо заменить интегрированием по $d\tau_1 d\tau_{12}$, т. е. мы интегрируем сперва по координатам частицы 2, считая положение частицы 1 постоянным, что соответствует интегрированию по относительной координате r_{12} (элемент объема $4\pi r_{12}^2 dr_{12}$). Так как подинтегральная величина быстро уменьшается для больших расстояний r_{12} , результат этого первого интегрирования не меняется существенно, если мы пределы интегрирования по r_{12} продолжим до бесконечности. Это распространение пределов соответствует пренебрежению поверхностными эффектами. Тогда, очевидно,

результат не будет зависеть от положения первой частицы, так что интегрирование по $d\tau_1$ дает просто множитель, равный объему ядра, $\frac{4\pi}{3} R^3$.

Удобно ввести радиус сферы, соответствующий объему, занимаемому одной частицей, т. е.

$$r_0 = \frac{R}{(N+Z)^{1/3}} \quad (153)$$

и положить соответственно:

$$r_{12} = r_0 \rho; \quad \frac{r_0}{a} = \alpha \quad (153a)$$

$$\left. \begin{aligned} k_N r_{12} &= k_N \rho, \\ k_P r_{12} &= k_P \rho, \end{aligned} \right\} \quad (153b)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_P &= \left[\frac{9\pi Z}{4(N+Z)} \right]^{1/3}, \\ k_N &= \left[\frac{9\pi N}{4(N+Z)} \right]^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (153c)$$

Тогда ρ есть наша новая переменная интегрирования и α — параметр, определяющий радиус ядра. α следует варьировать так, чтобы полная энергия была минимальной. (152a) можно теперь переписать:

$$V = -\frac{16}{3}(N+Z) V_0 \pi^{-2} \int_0^{\infty} f(\alpha \rho) \cdot (\sin k_{NP} - k_{NP} \cos k_{NP}) \times \\ \times (\sin k_{P\rho} \cos k_{P\rho}) \rho^{-4} d\rho. \quad (154)$$

Ввиду того, что k_N и k_P зависит только от отношения $\frac{N}{Z}$, а не от самой величины N или Z , интеграл есть функция только α и $\frac{N}{Z}$. Аналогичным образом, если ввести обозначения (153) и т. д. в (150 с, d), имеем:

$$T = T_N + T_P = \frac{3}{5} \cdot \frac{h^2}{2M} (Nk_N^2 + Zk_P^2) = \\ = \frac{3}{5} \cdot \frac{h^2}{2Ma^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} (N+Z) \frac{N^{2/3} + Z^{2/3}}{(N+Z)^{2/3} \alpha^2}. \quad (154a)$$

В этой формуле кинетическая энергия записана как число частиц $(N+Z)$, помноженное на функцию только от $\frac{N}{Z}$ и α . Поэтому из (154) и (154a):

$$E = T + V = (N+Z) F\left(\frac{N}{Z}, \alpha\right), \quad (155)$$

где функция F может быть определена, если дан потенциал взаимодействия J , т. е. дана функция f .

Обращая (155) в минимум путем варьирования α , мы видим, что: (1) величина α , соответствующая минимуму, зависит только от отношения $\frac{N}{Z}$, но не от числа частиц $N+Z$. Это значит, согласно (153, 153а), что радиус ядра R для данного отношения $\frac{N}{Z}$ пропорционален $(N+Z)^{1/2}$, другими словами, что объем ядра для заданного отношения $\frac{N}{Z}$ пропорционален числу частиц, содержащихся в нем; (2) энергия связи — E ядра для данного отношения $\frac{N}{Z}$ пропорциональна числу частиц, содержащихся в ядре.

Эти два заключения находятся в согласии с опытом. Действительно, мы приняли, что обменные силы действуют между нейтронами и протонами как раз для того, чтобы учесть два указанных экспериментальных факта (§ 7). Таким образом, наше вычисление лишь показывает, что обменные силы действительно подходят для получения нужного результата.

Утверждая это, следует иметь в виду, что в действительности мы лишь показали, что статистическая модель, примененная к ядру, связанному с обменными силами, приводит к энергии связи, пропорциональной числу частиц. Кроме пренебрежения поверхностными эффектами, мы сделали два допущения:

(а) „вспомогательная потенциальная энергия“ V_N и V_P считались постоянными внутри ядра; это привело к постоянной плотности частиц (см. 151b);

(б) волновые функции предполагались плоскими волнами в области порядка одной длины волны [см. замечание после (151b)].

Первое допущение очень правдоподобно. Не существует никаких сил, связывающих положения частиц с какой-либо фиксированной точкой в противоположность случаю атомных электронов. Не существует также сил, действующих на большие расстояния между частицами, которые могли бы создать разность плотностей в разных точках. Сила, действующая на одну частицу, действительно зависит только от плотности, имеющейся непосредственно вблизи от нее; одно определенное значение плотности приводит к минимуму энергии. Любые флуктуации плотности от точки к точке внутри ядра, очевидно, должны привести к увеличению энергии. Математическое доказательство постоянства плотности для частного случая дал Майорана (М6).

Второй пункт, понятно, не будет непременно выполнен вследствие корреляции между различными частицами (§ 24). Однако, путем ряда теоретических аргументов можно показать, что даже при совсем общих допущениях относительно вида волновых функций полная энергия ядра пропорциональна числу частиц, если принять обменные силы (1).

Рассмотрим теперь количественные выводы из (154), (154а) и (155). Поведение интеграла в (154) можно легко определить для

(1) Мы благодарны проф. Вигнеру за это сообщение.

двух предельных случаев $\alpha \ll 1$ и $\alpha \gg 1$. В первом случае можно аменить $f(\alpha\rho)$ через $f(0)$. Тогда интеграл берется элементарным образом, что дает:

$$V = \begin{cases} -2J(0)Z, & \text{если } Z < N, \\ -2J(0)N, & \text{если } Z > N, \end{cases} \quad \alpha \ll 1. \quad (156)$$

Поэтому, если радиус ядра так мал, что среднее расстояние между соседними частицами r_0 мало по сравнению с областью a действия силы, полная потенциальная энергия может считаться обусловленной взаимодействием каждой частицы одного сорта — того сорта, число частиц которого меньше в ядре, — с двумя частицами другого сорта (с противоположными спинами)⁽¹⁾.

Полная потенциальная энергия (156) не зависит от α , в то время как кинетическая энергия (154а) растет как α^{-2} . Поэтому полная энергия, безусловно, положительна для достаточно малых α , и наиболее вероятным значением α является, конечно, не $\alpha = 0$.

Аналогичным образом для очень больших α можно заменить все множители, за исключением $f(\alpha\rho)$, их значениями при очень малых ρ и получить:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{3NZV_0}{(N+Z)} \int f(\alpha\rho) \rho^2 d\rho = \\ &= -\frac{3NZ}{N+Z} \frac{V_0}{a^3} \int f\left(\frac{r}{a}\right) \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2 d\left(\frac{r}{a}\right) = \text{const } \alpha^{-3}, \quad \alpha \gg 1. \end{aligned} \quad (156a)$$

Для больших α потенциальная энергия уменьшается более быстро, чем кинетическая. Поэтому полная энергия для очень больших α должна быть продолжительной. Отрицательная полная энергия, т. е. энергия связи, может быть получена только для промежуточных значений α и, так как все постоянные порядка единицы, минимум значения α следует ожидать вблизи единицы. Это значит, что r_0 — порядка a . Но r_0 — радиус сферы, объем которой равен объему, занятому одной ядерной частицей. Таким образом, r_0 — порядка величины расстояния между соседними частицами в ядре. Мы заключаем, что это расстояние примерно так же велико, как радиус действия ядерных сил. Это заключение соответствует действительности — радиус радиоактивных ядер составляет от 8 до $9 \cdot 10^{-13}$ см (глава IX), их атомный вес — около 220; поэтому $r_0 = 9 \cdot 10^{-13} \cdot 220^{-1/3} \approx 1,5 \cdot 10^{-13}$ см, что действительно порядка величины области действия ядерных сил (§ 21).

§ 26. Количественные результаты и ограничения статистической модели (H9, W2, W10)

Чтобы действительно вычислить энергию связи и радиус ядра, необходимо сделать частное предположение о виде потенциала $J(r)$. Примем (см. 115)

$$J(r) = -Be^{-\frac{r}{a}}. \quad (157)$$

⁽¹⁾ Формула (156) имеет смысл, понятно, только в том случае, если $J(0)$ конечно. Если этого нет, $J(\alpha\rho)$ не может быть заменена через $J(0)$ для сколько угодно малых α .

Этот потенциал был допущен при вычислениях Финберга в применении к легким ядрам; поэтому постоянные B и a хорошо известны. Нужно подставить $f(\alpha\rho) = e^{-\alpha^2\rho^2}$ в (154). При этом интегрирование может быть произведено элементарно; оно дает:

$$V = -\frac{B(N+Z)}{\pi^{1/2}x^3} \left\{ [2 - x^2(n^{2/3} + n^{1/3}(2-n)^{1/3} + (2-n)^{2/3})] \times \right. \\ \times e^{-1/2x^2[n^{1/3} - (2-n)^{1/3}]^2} - [2 - x^2(n^{2/3} - n^{1/3}(2-n)^{1/3} + \\ + (2-n)^{2/3})] \cdot e^{-1/2x^2[n^{1/3} + (2-n)^{1/3}]^2} + \pi^{1/2}x^3 \Phi\left(\frac{1}{2}x[n^{1/3} + \right. \\ \left. + (2-n)^{1/3}]\right) - n^{1/3}(p-1)x^3 \Phi\left(\frac{1}{2}x[n^{1/3} - (2-n)^{1/3}]\right) \left. \right\} \quad (158)$$

где (1)

$$n = \frac{2N}{N+Z}, \quad 2-n = \frac{2Z}{N+Z}, \quad (158a)$$

$$x = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{a}{r_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha} \quad (158b)$$

и $\Phi(y)$ есть интеграл ошибок Гаусса (см., например, табл. Янке-Эмде). Если ядро содержит одинаковое число нейтронов и протонов, $n=1$, и (158) сводится к (2):

$$V = -\frac{B(N+Z)}{\pi^{1/2}x^3} [2 - 3x^2 + (x^2 - 2)e^{-x^2} + \pi^{1/2}x^3 \Phi(x)], \quad (159)$$

в то время как кинетическая энергия (154a) может быть переписана так:

$$T = \frac{3}{10} \frac{\hbar^2}{Ma^2} x^2 (N+Z). \quad (159a)$$

Наиболее удовлетворительным способом дальнейшего вычисления была бы подстановка величин B и a , определенных из теории легких ядер, и нахождение минимума $V+T$ и соответствующей величины x . К сожалению, энергия связи, получающаяся таким образом, слишком мала; она совсем пропадает, если учесть кулоновское отталкивание протонов и „поверхностный эффект“ (§ 29).

Величины B и a , найденные из теории легких ядер, равны (а)

$$B = 133 \text{ MV}, \quad a = 0,99 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad T = \frac{\hbar^2}{Ma^2} = 42 \text{ MV}, \quad (160)$$

если допустить отсутствие взаимодействия между одинаковыми частицами (см. 125);

(б)

$$B = 41 \text{ MV}^{(2)}, \quad a = 2,32 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad T = 7,6 \text{ MV}, \quad (160a)$$

(1) Старые постоянные k_{1N} и k_{1P} сведены с n через

$$k_{1N} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/2} \left(\frac{2N}{N+Z}\right)^{1/2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\pi n}{3}\right)^{1/2}, \quad k_{1P} = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi(2-n)}{3}\right]^{1/2}.$$

(2) Эта формула впервые была вычислена Гейзенбергом (F12).

(3) Данная величина представляет собой силу, действующую между протоном и нейтроном плюс половина силы между одинаковыми частицами ($B + \frac{1}{2}C$; см. § 28). Эта комбинация входит в энергию тяжелых ядер, содержащих приблизительно равные числа протонов и нейтронов (см. 174).

если взаимодействие между одинаковыми частицами имеет величину, найденную в (128). Согласно таблице VII мы получим при этих постоянных следующие результаты в статистической модели.

(а) Без взаимодействия между одинаковыми частицами $D = \frac{MBa^2}{h^2} = 3,17$. Для этой величины D энергия $V + T$ вообще не имеет минимума; она положительна для всех значений x .

(б) При наличии взаимодействия между одинаковыми частицами $D = \frac{MBa^2}{h^2} = 5,3_5$. Минимум энергии для $x = 1,99$, $r_0 = 0,79a = 1,82 \cdot 10^{-13}$ см.

Минимум энергии $= -0,067 B(N + Z) = -2,7(N + Z) MV.$ (160b)

При постоянных (а) мы, таким образом, не получаем никакой энергии связи, даже без поправки на кулоновское отталкивание и поверхностный эффект. При постоянных (б) мы находим слабую энергию связи, равную примерно $\frac{1}{4}$ наблюдаемой энергии связи ядер среднего веса. Однако даже эта маленькая связь исчезает, если ввести поправку на кулоновское отталкивание и поверхностный эффект (см. ниже).

Мы должны поэтому заключить, что *статистическая модель вообще непригодна для рассмотрения ядерных энергий связи*. Это не является особенно неожиданным после приведенных в § 24 возражений против применения метода Хартри к ядерным вопросам, которые переносятся на статистический метод. Имея в виду эти возражения, можно пойти дальше и сказать, что любое выражение ядерных сил, которое сделало бы ядерную энергию связи, полученную из статистической модели, равной экспериментально наблюдаемой энергии, заведомо должно давать очень большое значение для ядерных сил.

Интересно отметить, что статистическая модель становится тем хуже, чем меньше область действия сил. Это связано с тем, что волновые функции меняются очень быстро, если расстояние между двумя частицами меньше области действия сил (§ 20). Указанное обстоятельство вытекает из сравнения наших случаев (а) и (б). Можно добавить, что для нулевой области действия сил потенциальная энергия (159) никогда не может больше, чем в 0,73 раза превышать кинетическую энергию (159а), если постоянную $D = \frac{MBa^2}{h^2}$ взять из теории дейтерона (2,70; табл. III).

Ценность статистической модели, согласно предыдущему, лежит не в возможности количественных вычислений энергии связи ядер, но, по нашему мнению, в качественных результатах вроде полученных в предыдущем параграфе и возможности установления верхнего предела ядерных сил (§ 27). Кроме того мы можем попытаться вывести зависимость энергии связи от атомного веса, от отношения чисел нейтронов и протонов и т. д. Однако все эти заключения могут носить лишь характер попыток.

Очевидно, если мы хотим использовать статистическую модель, необходимо выбрать постоянные B и a ad hoc, а не брать их из теории лёгких ядер. Постоянные B и a , определенные из статистической модели не совсем правильны, однако, делая выводы из этой модели, будет более последовательно также определять из нее и постоянные.

Чтобы определить постоянные B и a , необходимы две экспериментальные величины. Разными авторами были использованы различные данные, например, Гейзенберг (H9) использовал массовые дефекты средних и тяжелых ядер. Вик (W10) использовал массовый дефект и радиус ядра кислорода, Вейдекер (W2) — массовые дефекты кислорода и ртути. Метод Вика кажется нам наиболее подходящим, потому что в первом приближении массовый дефект на частицу должен быть одним и тем же у всех ядер, согласно статистической модели. Только кулоновское отталкивание протонов и поверхностные эффекты могли бы вызвать некоторую разницу в массовых дефектах, отнесенных к одной частице.

Так как поверхностный эффект нельзя учесть с той же степенью точности, что и объемную энергию, не следует основывать определение постоянных на величинах, существенно зависящих от поверхностного эффекта, например, на разности массовых дефектов кислорода и ртути. Единственное возражение, которое могло бы возникнуть против метода Вика, состоит в том, что радиус кислорода недостаточно точно известен экспериментально. Это затруднение можно обойти, приняв за стандарт радиус и энергию связи тяжелого атома. Поступая таким образом, мы выигрываем также в том, что уменьшаем поверхностный эффект.

Примем поэтому радиус и энергию связи ртути как стандарты. Так как ядро ртути имеет атомный вес, лежащий как раз под весом радиоактивных ядер, мы можем принять радиус ядра ртути несколько меньшим радиусов радиоактивных ядер. Пусть

$$R_{\text{Hg } 200} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (161)$$

Энергия связи, вытекающая из атомного веса ртути, определенного Астоном 200,016 и из атомного веса протона и нейтрона (1,00807 и 1,00846, соответственно) (см. 75a), равна:

$$\begin{aligned} E_{\text{Hg } 200} &= 200,016 - (80 \cdot 1,00807 + 120 \cdot 1,00846) = \\ &= 200,016 - 201,661 = -1,645 \text{ масс. ед.} = -1530 \text{ MV.} \end{aligned} \quad (161a)$$

На одну частицу внутри ядра энергия связи равна $-7,6_5$ MV.

Из радиуса ядра (161) можно непосредственно вычислить кинетическую энергию всех нейтронов и протонов вместе, которая, согласно (150c) и (150d) с $N=120$ и $Z=80$, равна:

$$T = \frac{3}{5} (ZT_Z + NT_N) = \frac{3}{5} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2MR^2} \cdot (Z^{5/3} + N^{5/3}) = 2980 \text{ MV.} \quad (161b)$$

Здесь T_Z и T_N обозначают максимум кинетических энергий для протона и нейтрона, которые равны для ртути 22,2 и 28,9 MV,

соответственно. Средняя кинетическая энергия каждой из 200 частиц, согласно (161b), равна 14,9 MV.

Потенциальная энергия V ядерных сил получается из

$$E = T + V + C + S, \quad (162)$$

где C — потенциальная энергия кулоновского отталкивания протонов, равная (ур. 16)

$$C = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{R} = 670 \text{ MV}, \quad (162a)$$

и S — поверхностная энергия, которую мы оцениваем (см. 184).

$$S = 450 \text{ MV}. \quad (162b)$$

Поэтому

$$V = -(1530 + 2980 + 670 + 450) = -5630 \text{ MV}, \quad (163)$$

$$\frac{|V|}{T} = 1,89. \quad (163a)$$

Процесс определения B и a состоит затем в следующем. Для какого-либо значения $D = \frac{M B a^2}{h'^2}$ мы можем определить минимум $E' = V + T$, как функцию x , используя (159) и (159a). Значение x_{\min} , для которого имеет место минимум, дано как функция D в таблице VII (n положено равным единице, что соответствует равному числу протонов и нейтронов). Подставляя x_{\min} в (159) и в (159a), мы можем найти отношение $\frac{V}{T}$ как функцию D (4-я строка в табл. VII). Эта величина D , дающая наблюдаемое значение $\frac{V}{T}$, есть „правильная“ величина D для статистической модели; для $\frac{|V|}{T} = 1,89$ имеем:

$$D = \frac{M B a^2}{h'^2} = 9,6. \quad (164)$$

Соответствующая величина x_{\min} равна 2,70, согласно (см. 158b):

$$a = 0,64 \cdot 2,70 r_0 = 1,73 r_0 \quad (164a)$$

и при наблюдаемом значении $R = 8 \cdot 10^{-13}$ см:

$$r_0 = 8 \cdot 10^{-13} \cdot 200^{-1/3} = 1,37 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (164b)$$

$$a = 2,37 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (164c)$$

$$B = \frac{h'^2 D}{M a^2} = 70 \text{ MV}. \quad (164d)$$

Таким образом, область действия ядерных сил почти совпадает с значением, полученным Финбергом из легких ядер, хотя глубина потенциальной ямы должна быть выбрана примерно на 70% больше, чем действительная глубина, чтобы привести „статистическую энергию“ в согласие с наблюдаемой энергией связи ядер.

Из таблицы мы замечаем, что глубина потенциальной ямы (5-я строка) зависит практически только от радиуса ядра и не зависит от наблюдаемой энергии связи. Последняя определяет лишь область a действия сил.

Таблица VII

Соотношение констант в статистической модели

$$\left(\text{Потенциал } J(r) = -Be^{-\frac{r^2}{a^2}} \right)$$

$D = \frac{M Ba^2}{h'^2}$	3,5	4	5	6	7	8	9	10	11
x_{\min}	1,22	1,56	1,92	2,14	2,34	2,48	2,62	2,76	2,90
$\frac{a}{r_0}$	0,78	0,99	1,22	1,36	1,48	1,57	1,66	1,75	1,84
$\frac{ V }{T}$	0,90	1,04	1,25	1,40	1,54	1,67	1,81	1,94	2,08
$\frac{B}{T}$	5,8	4,1	3,35	3,25	3,20	3,23	3,25	3,26	3,27
$\frac{h'^2 M r_0^2}{E_{\min}}$	+0,013	-0,008	-0,053	-0,093	-0,127	-0,159	-0,187	-0,213	-0,234
$\frac{B(N+Z)}{B(N+Z)}$									

Теперь можно использовать полученные постоянные для выводов „объемной“ энергии $V+T$ для ряда отношений чисел нейтронов и протонов. Развертывая (159) и (159а) в степенные ряды по

$$n-1 = \frac{N-Z}{N+Z}, \quad (165)$$

мы имеем:

$$V(n) = V(1) + \frac{B}{3(\pi)^{1/2}} \cdot \frac{(N-Z)^2}{N+Z} \cdot \frac{1}{x} (x^2 - 1 + e^{-x^2}), \quad (165a)$$

$$T(n) = T(1) + \frac{h'^2}{6Ma^2} \cdot \frac{(N-Z)^2}{N+Z} x^2, \quad (165b)$$

где $V(1)$ и $T(1)$ — величины потенциальной и кинетической энергии для $n=1$, т. е. $N=Z$. Складывая (165а) и (165b), имеем для полной энергии:

$$E(n) = E(1) + \beta \frac{(N-Z)^2}{N+Z}, \quad (166)$$

Подставляя величины x , B и a , определенные выше для статистической модели, находим:

$$\beta = 39 \text{ MV (статистическое)}. \quad (166a)$$

Подставляя, с другой стороны, постоянные B и a , выведенные для легких ядер (см. 160а), и определяя x из этого значения a и наблюдаемого r_0 (см. (164b) при помощи (158b) имеем:

$$\beta = 26 \text{ MV (силовые постоянные из легких ядер)}. \quad (166b)$$

В обоих случаях увеличение кинетической энергии дает примерно 8 MV для постоянной β , в то время как основная часть обусловлена уменьшением величины потенциальной энергии, когда число нейтронов и протонов становится неравным.

Величину β следует сравнить с величиной, найденной в § 8. В этом параграфе она была найдена из определения отношения

чисел нейтронов и протонов в тяжелых ядрах (и обозначена $\alpha \epsilon$, см. (15) и (196)

$$\beta = 20 \text{ MV (полуэмпирическое)}, \quad (166c)$$

что несколько меньше, чем два теоретических значения (166a) и (166b). Согласие достигается путем введения сил между одинаковыми частицами (§ 28).

Радиус ядра также несколько меняется, когда число нейтронов и протонов не равно, потому что минимум $V(n) + T(n)$ (см. 65a) имеет место для несколько отличного значения величины x , чем минимум $T(1) + V(1)$. Радиус ядра становится равным

$$R = r_0 (N + Z)^{1/3} \left[1 + 0,665 \left(\frac{N - Z}{N + Z} \right)^2 \right]. \quad (167)$$

Поправочный член, содержащий $N - Z$, очень мал; он достигает всего 3,5% в случае урана ($Z = 92$, $N = 146$).

В заключение этого параграфа отметим, что вполне аналогичные результаты получаются для простой экспоненциальной функции:

$$J(r) = -Be^{-\frac{r}{a}}, \quad (168)$$

которая послужила основой исследования статистической модели ядер Гейзенбергом (H9), Виком (W10) и Вейцекером (W2). Вместо (158), находим:

$$V = -\frac{B(N+Z)}{\pi x^3} \left\{ n^{1/3} (2-n)^{1/3} x^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} x^2 [n^{2/3} + (2-n)^{2/3}] \right) \log \frac{1+x^2 [n^{1/3} + (2-n)^{2/3}]^2}{1+x^2 [n^{1/3} - (2-n)^{2/3}]^2} + 2 \text{arc tg } (x [n^{1/3} + (2-n)^{1/3}]) - 2(n-1) \text{arc tg } (x [n^{1/3} - (2-n)^{1/3}]) \right\}, \quad (168a)$$

что при $n = 1$ ($N = Z$) сводится к

$$V(n=1) = -\frac{B(N+Z)}{\pi x^3} \left\{ x^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} x^2 \right) \log (1 + 4x^2) + \text{arc tg } 2x \right\} \quad (168b)$$

формула, впервые выведенная Гейзенбергом (1). Снова мы не получаем практически никакой энергии связи, если подставить постоянные B и a , взятые из теории легких ядер. Постоянные, которые необходимы, чтобы получить наблюдаемую энергию связи и радиус ядра Hg^{200} , равны:

$$D = \frac{M B a^2}{h^2} = 6,7, \quad (169)$$

$$x_{\min} = 1,75; \quad a = 0,64 \cdot 1,75 r_0 = 1,53 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (169a)$$

$$B = 118 \text{ MV}. \quad (169b)$$

Эти постоянные не очень отличаются от полученных Виком ($B = 88 \text{ MV}$, $a = 1,47 \cdot 10^{-13} \text{ см}$), как и следует ожидать, по той причине, что использованные им экспериментальные данные аналогичны нашим. (Разница в B обусловлена тем, что Вик не учел поверхностной энергии, достаточно большой в случае ядра O^{16}). Вейцекер нашел $B = 184 \text{ MV}$, $a = 1,03 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, $D = 4,7$, т. е. очень короткую область действия сил и очень глубокую яму. Результаты Гейзенберга отличаются от наших в другом направлении; $B = 25 \text{ MV}$, $a = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. За-

(1) Гейзенберг (H9) дает энергию на единицу объема, т. е. (168b), деленное на объем ядра $\left(\frac{4\pi}{3} \right) R^3 \cdot (N + Z)$.

висимость энергии от „изотопического“ номера $J = N - Z$ при экспоненциальном потенциале равна:

$$V = V(1) + \frac{B}{6\pi x} \cdot \frac{(N-Z)^2}{N+Z} (4x^2 - \log(1+4x^2)), \quad (168c)$$

что дает для постоянной β в (166) величину 42 MV, т. е. почти то же значение, что и полученное из потенциала $e^{-\frac{r^2}{a^2}}$.

§ 27. Опровержение существования обычных сил

В этом параграфе мы докажем, что допущение обычных сил между нейтронами и протонами привело бы к гораздо большим энергиям связи тяжелых ядер, чем наблюдаемые. Чтобы показать это, воспользуемся статистической моделью, которая заведомо дает пониженную энергию связи ядер.

Если заменить обменные силы Майорана обычными силами Вигнера, энергия связи основного состояния дейтерона осталась бы неизменной, а также почти неизменной осталась бы энергия связи α -частицы. Таким образом мы получаем практически тот же результат для постоянных B и a , что и при силах Майорана.

Выражения (144b) и (146b) следует заменить:

$$V' = \sum_{i=1}^Z \sum_{k=1}^N \int |\psi_i(x_1)|^2 |\varphi_k(x_2)|^2 J(r_{12}) d\tau_1 d\tau_2, \quad (170)$$

$$V' = \int J(r_{12}) \rho_p(x_1) \rho_n(x_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (170a)$$

где ρ_p — обычная плотность протонов, определенная в (145). При плоских волнах, использованных в качестве волновых функций статистической модели, мы имеем, очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \rho_p(r) &= \text{const} = \frac{3Z}{4\pi R^3}, \\ \rho_n &= \frac{3N}{4\pi R^3} \end{aligned} \right\} \text{ для } r < R; \quad (170b)$$

$$\rho_p = \rho_n = 0 \text{ для } r > R.$$

Теперь следует вычислить интеграл в (170a) точно, т. е. мы не должны рассматривать R как большую величину по сравнению с областью действия сил a , потому что это допущение приводит к противоречиям в результатах. При

$$J(r) = -B'e^{-\frac{r^2}{a^2}}, \quad (171)$$

элементарное вычисление дает:

$$\begin{aligned} V' &= -\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{B'ZN8\pi^2}{R^6} \int_0^R r_1 dr_1 \int_0^R r_2 dr_2 \int_{|r_1-r_2|}^{r_1+r_2} r_{12} dr_{12} e^{-\frac{r_{12}^2}{a^2}} = \\ &= -\frac{6B'ZN}{y^6} [\pi^{1/2} y^3 \Phi(y) + 2 - 3\frac{y}{2} + e^{-y^2} (y^2 - 2)], \end{aligned} \quad (171a)$$

где

$$y = \frac{2R}{a}. \quad (171b)$$

Для простоты допустим, что число протонов и нейтронов равно $N = Z$. Разделим (171a) на полную кинетическую энергию $T = \frac{6}{5} NT_{0N}$, где T_{0N} —

максимальная кинетическая энергия на частицу, как это дано в (150 с), и получим:

$$\frac{|V'|}{T} = \frac{5}{3\pi} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/3} \cdot A^{1/3} \cdot \frac{1}{y^4} \cdot \frac{Ma^2 B^4}{h'^2} \left\{ \pi^{1/2} y^3 \Phi(y) + \dots \right\}. \quad (171 \text{ с})$$

Подставляя для $\frac{Ma^2 B^4}{h'^2}$ наименьшее возможное значение, т. е. 2,70 (см. табл. III, § 12), имеем:

$$\frac{|V'|}{T} > 1,50 A^{1/3} [\pi^{1/2} y^{-1} \Phi(y) + 2y^{-4} - 3y^{-2} + e^{-y^2} (y^{-2} - 2y^{-4})]. \quad (172)$$

Теперь мы вспомним, что R , а поэтому и y , есть произвольный параметр, который надо выбрать так, чтобы энергия была минимальной. Если поэтому выбрать то значение для y , которое обращает квадратные скобки (142) в минимум, мы можем получить только слишком низкое значение для энергии связи. Максимум квадратных скобок получается при $y = 2,80$ и имеет величину 0,288. Таким образом,

$$\frac{|V'|}{T} > 0,433 A^{1/3}. \quad (172 \text{ а})$$

Мы видим, что при $A > 12$ потенциальная энергия становится больше кинетической даже в грубом приближении статистического метода. Если A значительно больше 12, кинетическая энергия составляет лишь небольшую роль потенциальной. Но потенциальная энергия (171 а) — порядка величины $A^2 B^4$. Другими словами, энергия связи ядер с атомным весом больше, чем, например, 30, будет увеличиваться пропорционально квадрату атомного веса, что противоречит опыту (§ 7). Кроме того полная энергия связи будет достигать огромных значений, например, если подставить $a = 2,3 \cdot 10^{-13}$ см (см. 128) и $B^4 = 41$ MV (см. 160 а), минимум полной энергии урана получается при $y = 0,62$ и он имеет значение:

$$E_U = (V' + T)_U = -366,000 \text{ MV}. \quad (172 \text{ б})$$

Это соответствовало бы массовому дефекту ядра урана, равному приблизительно 380 массовых единиц, т. е. примерно превышало бы в 1,5 раза массу самого урана! Так как наша теоретическая величина является нижним пределом, невозможность допущения обычных сил, притягивающих при любом расстоянии, следует считать доказанной.

В дополнение к очень большой энергии связи модель дает также слишком маленькие радиусы ядер. y приблизительно постоянна для всех значений A ; действительно, она даже повышается при уменьшении A . Радиус ядра поэтому не зависит от A ; он величина того же порядка, что и область действия сил. Например, для урана радиус должен быть примерно $1,3 \cdot 10^{-13}$ см, что составляет $\frac{1}{7}$ наблюдаемого радиуса.

Кулоновские силы, понятно, не важны по сравнению с колоссальными энергиями связи, получающимися из нашей модели, и не меняют заключений.

Наше утверждение о невозможности обычных сил должно однако быть дополнено в двух отношениях. Во-первых, „обычные“ силы отталкивания на очень малых расстояниях и силы притяжения на несколько больших расстояниях, конечно, не могут считаться невозможными. Малая вероятность таких сил есть единственный аргумент против их существования для взаимодействия элементарных частиц (см. § 31, где такие силы выводятся для сложной α -частицы).

Во-вторых, малая „обычная“ сила в дополнение к обменным силам не может быть исключена. Под напряженностью обычной силы мы понимаем обычную силу, выраженную в MV, и допускаем, что область ее действия порядка области действия обменных сил. Если принять величины B и a , данные в (164 с, d) для обменных сил, мы находим следующее изменение ядерных сил, вызванное при малых дополнительных обычных силах.

Атомный вес A	10	30	100	238
Относительное изменение радиуса ядра (проценты)	-1,70 B'	-2,85 B'	-4,0 B'	-4,6 B'
Изменение энергии связи на частицу (MV)	0,63 B'	0,87 B'	1,07 B'	1,19 B'

„Обычная“ сила $B' = 5$ MV вполне приемлема. Она соответствовала бы разнице в энергиях на частицу для U^{238} и Si^{30} $0,32 B' = 1,6$ MV, причем энергия связи урана была бы больше. Такая разница, повидимому, едва ли была бы совместима с опытом. B' может, конечно, быть отрицательным и примерно той же величины притяжения. В любом случае обычные силы должны быть очень малы (не больше примерно 7%) по сравнению с обменными силами.

§ 28. Силы между одинаковыми частицами

Полная энергия взаимодействия, обусловленная силами между одинаковыми частицами, имеет согласно (146 e) практически тот же вид, что и энергия взаимодействия между протонами и нейтронами (146 b). Как и в § 21, мы примем вид потенциала взаимодействия K для одинаковых частиц таким же, как и для разных частиц, и область действия сил одинаковой в обоих случаях, так что

$$K(r) = -C e^{-\frac{r}{a}}. \quad (173)$$

Тогда по аналогии с (158)

$$F = -\frac{1}{4} \frac{C(N+Z)}{\pi^{1/2} x^3} \{ [4 - 3x^2 (n^{1/2} + (2-n)^{1/2})] - [2 - x^2 n^{1/2}] e^{-x^2 n^{1/2}} - [2 - x^2 - n^{1/2}] e^{-x^2 (2-n)^{1/2}} + \pi^{1/2} x^3 [n \Phi(x n^{1/2}) + (2-n) \Phi(x (2-n)^{1/2})] \}, \quad (173a)$$

где x имеет то же значение, что и в (158b).

Величина x , обращающая $T+V+F$ в минимум, зависит только от $\frac{n}{2} = \frac{2N}{N+2}$ и от силовых постоянных $\frac{M B a^2}{h'^2}$ и $\frac{M C a}{h'^2}$. Она не зависит от полного числа частиц. Это делает, как и в § 26, объем ядра и полную энергию связи пропорциональной числу частиц, что находится в согласии с опытом. Количественно для $n = \frac{1}{2}$

$$\frac{F}{V} = \frac{C}{2B}. \quad (174)$$

Полное взаимодействие, обусловленное взаимодействием между одинаковыми и разными частицами, поэтому пропорционально (62) $B + \frac{1}{2} C$. Из теории легких ядер (ср. 128) мы получаем

$$\frac{C}{2B} = 0,35. \quad (174a)$$

Пользуясь значениями для B , C и a , выведенными в (128), находим результат (160b) для энергии связи очень малым, хотя добавление взаимодействия между одинаковыми частицами несколько способствует повышению энергии связи, вытекающей из статистической модели (см. результат, полученный без учета сил между одинаковыми частицами — текст над ур. 160b).

Определим снова постоянные ad hoc из статистической модели, как в § 26 (164). Единственное необходимое изменение состоит в том, что мы теперь делаем $B + \frac{1}{2}C$ равной B в § 26. Сохраняя отношение $B:C$, как оно дается теорией легких ядер, т. е. $\frac{1}{2}C = 0,35B$, B § 26 (164d) должно быть уменьшено в отношении $1/1,35$, что дает:

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{70}{1,35} = 52 \text{ MV}, \\ C &= 0,70 \cdot 52 = 36 \text{ MV}, \\ a &= 2,37 \cdot 10^{-13} \text{ см} \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

(из статистической модели) с силами между одинаковыми частицами, равными 0,7 взаимодействия нейтронов с протонами).

Взаимодействие одинаковых частиц оказывает некоторое влияние на зависимость энергий ядер от $N-Z$. Как и следовало ожидать, потенциальная энергия этого взаимодействия уменьшается (т. е. ее абсолютная величина становится большей), когда число нейтронов и протонов различно. Постоянная β , определяемая в (166), состоит теперь из трех частей, обусловленных соответственно силами между протонами и нейтронами, силами между одинаковыми частицами и кинетической энергией. Для значений постоянных B , a , C , выбранных в (175), мы имеем:

$$\beta = 0,44B + \frac{0,39h'^2}{Mr_0^2} - 0,070C = 23 + 8 - 1 = 30 \text{ MV}, \quad (176)$$

в то время как постоянные (128) дали бы:

$$\beta = 22 \text{ MV}. \quad (176a)$$

Если принять в расчет силы между одинаковыми частицами, мы получили бы 39 и 28 MV соответственно. Полуэмпирическая величина, данная в § 8, т. е. 20, почти совпадает с (176a).

В дополнение к специфически ядерным силам между одинаковыми частицами мы имеем также отталкивание между протонами, которым обусловлено увеличение отношения $\frac{N}{Z}$ с повышением атомного номера (§ 8). Примем, что протоны однородно распределены по всему ядру, так что их плотность равна $\frac{3Z}{4\pi R^3}$. Тогда их взаимодействие без учета обмена равно (см. 146с):

$$C = \frac{1}{2} Z^2 \int \frac{e^2}{r_{12}} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)^{-2} d\tau_1 d\tau_2 = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{R}. \quad (177)$$

Каждый из этих пространственных интегралов $d\tau_1, d\tau_2$ распространяется по сфере радиуса R . Результат должен быть поправлен на обменную энергию (член A , см. 146d). При выражении (151a) для смешанной плотности и при допущении $k_0 R \gg 1$ (т. е. большой атомный вес) мы получаем⁽¹⁾:

$$A = \frac{1}{4} \frac{4\pi}{3} R^3 \int_0^\infty \frac{e^2}{r_{12}} \cdot \frac{4\pi r_{12}^2 dr_{12}}{(\pi^2 r_{12}^2)^2} (\sin k_0 r_{12} - k_0 r_{12} \cos k_0 r_{12})^2 =$$

$$= \frac{e^2 R^3 k_0^4}{3\pi^2} = \frac{3^{5/2} e^2 Z^{1/2}}{2^{9/2} \pi^{3/2} R}. \quad (177a)$$

Выражая R через r_0 (см. 153), мы имеем для полного эффекта электростатических сил:

$$C - A = \frac{e^2}{r_0} \left(\frac{Z}{N+Z} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{3}{5} Z^{5/2} - 3^{5/2} \pi^{-3/2} \cdot 2^{-9/2} Z \right). \quad (177b)$$

$$C - A = \frac{e^2}{r_0} \left(\frac{Z}{N+Z} \right)^{1/2} (0,600 Z^{5/2} - 0,460 Z) \quad (177c)$$

При нашем значении $r_0 = 1,37 \cdot 10^{-13}$ см, выведенном из опыта, мы имеем:

$$\frac{e^2}{r_0} = 1,08 \text{ MV}. \quad (177d)$$

Обменный член пропорционален заряду ядра и достигает лишь 0,18 MV на одну частицу в ядре. Первый член, возрастающий как $Z^{5/2}$, достигает для урана 890 MV, т. е. $3^{3/4}$ MV на частицу ядра урана, что уменьшает энергию связи этого ядра примерно на $\frac{1}{3}$ (см. вывод ядерных сил из массового дефекта ртути в § 26).

Кулоновские силы оказывают также некоторое действие на радиус ядра. Относительное изменение последнего обусловлено кулоновскими силами, равно, если использовать (159), (159a) и полагая $B = 70$ MV:

$$\frac{\delta R}{R} = +0,60 \left(\frac{e^2}{B r_0} \right) Z^2 A^{-4/3} = 0,0092 Z^2 A^{-4/3}. \quad (177e)$$

Для урана это дает 5,3%, для $\text{Fe}^{56} - 2,8\%$. Мы нашли в (167), что радиус урана должен быть увеличен на $3^{1/2}\%$ вследствие неравенства числа нейтронов и протонов. Складывая оба эффекта вместе, мы должны ожидать, что радиус урана на $(3,5 + 5,3 - 2,8)\%$ больше, чем он должен был бы быть, исходя из радиуса ядра Fe и допуская, что объем ядра пропорционален числу частиц. Однако следует иметь в виду, что радиус ядра нельзя просто определить с такой точностью.

§ 29. Поверхностный эффект (W2, W10)

Вик (W10) первый отметил, что энергии связи ядер уменьшились бы, особенно для малых ядер, из-за наличия поверхности. Частицы на поверхности взаимодействуют в среднем с вдвое меньшим числом частиц, чем частицы, находящиеся внутри ядра. Это вполне аналогично, понятно, поверхностному натяжению жидкостей.

(1) Выражение Вейцекера [W2, ур. (50)] не верно на множитель $\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{3/2}$.

Вейцекер (W2) вычислил поверхностный эффект количественно. Он показал, что эффект состоит из „классической“ и „квантово-механической“ частей. Классически мы можем допустить, что ядро имеет резкую поверхность на некотором расстоянии R от центра. Те частицы, которые находятся ближе к поверхности, чем область a действия сил, не будут полностью участвовать в энергии связи. Это приводит к увеличению общей энергии на величину относительного порядка $\frac{a}{R}$ (классический поверхностный эффект).

В квантовой теории поверхность никогда не может быть резкой; это означало бы бесконечную производную для волновых функций всех частиц и, следовательно, бесконечную кинетическую энергию. Поверхностный слой должен распространяться на некоторую область порядка длины волны частицы. Чем уже поверхностная область, тем больше должна быть добавочная кинетическая энергия; чем шире эта область, тем больше полная потенциальная энергия будет снижаться. Поэтому должен быть некоторый оптимум ширины поверхностного слоя.

Вейцекер вычислил поверхностный эффект, рассматривая статистическую модель. Если мы воспользуемся статистической моделью в ее обычном виде, мы вообще не обнаружим никакого поверхностного эффекта. Чтобы убедиться в этом, допустим существование некоторой „добавочной потенциальной энергии“ U , имеющей отрицательное значение $-U_0$ внутри сферы с радиусом R (радиус ядра) и затем постепенно возрастающей до нуля вне этой сферы. Будем считать возрастание потенциальной энергии достаточно постепенным для того, чтобы можно было применить статистическую модель, т. е. предположим, что мы можем выбрать элемент объема $d\tau$ настолько малым, что внутри этого объема потенциальная энергия U приблизительно постоянна. С другой стороны, этот элемент объема достаточно велик, чтобы к любому элементу можно было приложить рассуждение § 25. Это условие в основном обозначает, что толщина поверхностного слоя, т. е. область, в которой потенциальная энергия U изменяется от $-U$ до 0, должна быть большой по сравнению с длиной волны ядерных частиц.

Если это условие выполнено, плотность частиц в любой точке r (или в любом элементе объема $d\tau$), так же как и максимум и средняя кинетическая энергия частиц в этой точке, и участие $d\tau$ в полной кинетической энергии в основном определяются величиной вспомогательного потенциала U в этой точке. Мы имеем (см. 150)

$$\rho(r) = \frac{3N}{4\pi R^3} = k^3_{\max}(r)/3\pi^2 = \frac{\{2M[E_0 - U(r)] h'^{-2}\}^{3/2}}{3\pi^2}, \quad (178)$$

где

$$\frac{h'^2}{2M} k^2_{\max} = E_0 - U(r) \quad (178a)$$

есть максимальная кинетическая энергия частицы в точке r , E_0 — полная энергия частицы с наибольшей энергией. Средняя кинетическая энергия частиц в r равна:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{h'^2}{2M} k_{\max}^2 = \frac{3^{5/3} \pi^{4/3}}{10} \cdot \frac{h'^2}{M} \rho^{2/3}. \quad (178b)$$

Умножая это выражение на ρ , мы получим кинетическую энергию в единице объема.

Смешанная плотность дана в (151a), причем следует только k_0 заменить k_{\max} , считая опять, что k_{\max} не меняется существенно между двумя точками r_1, r_2 , т. е. допуская, что вспомогательный потенциал меняется достаточно медленно. Участие каждого элемента объема в потенциальной энергии может быть вычислено затем по аналогии с (158) или (159), если мы допустим, что плотность нейтронов и протонов одинакова в каждой точке. Необходимо лишь разделить (159) на полную энергию объема $\frac{4\pi}{3} \times (N+r)r_0^3$ и выразить в определении (158b) x величину r_0 через плотность ρ протонов или нейтронов. Так как r_0 было определено как радиус сферы, содержащий одну частицу, т. е. в среднем половину нейтрона и половину протона, мы имеем:

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3 = \frac{1}{2} \rho^{-1} \quad (178c)$$

$$x = (3\pi^2 \rho)^{1/3} a. \quad (178d)$$

Полная энергия элемента объема $d\tau$ равна:

$$dE = -\frac{2}{3} \cdot \frac{B}{\pi^{1/2} a^3} [2 - 3x^2 - (2 - x^2)e^{-x^2} + \pi^{1/2} x^3 \Phi(x)] d\tau + \\ + 3^{5/3} \pi^{4/3} \frac{h'^2}{10M} \rho^{5/3} d\tau. \quad (178e)$$

Общая энергия на частицу в элементе объема $d\tau$, т. е. $\frac{dE}{\rho d\tau}$, как мы знаем, достигает минимума, если x имеет значение x_{\min} , определенное в § 26 (таблица VII). Величину ρ , соответствующую x_{\min} , мы назовем стандартной плотностью ρ_0 ; она определяет плотность внутри ядра. Любая область ядра, в которой ρ отличается от стандартной величины ρ_0 , будет увеличивать общую энергию ядра по сравнению с энергией, выведенной в § 26.

С этой точки зрения общая энергия ядра достигает своего минимального значения, если плотность равна ρ_0 во всем ядре, спадая очень быстро до нуля на границе. Это минимальное значение должно быть в точности равно энергии, полученной в § 26. Таким образом, здесь не было бы совсем никакого поверхностного эффекта, о котором мы говорили выше. Однако, чтобы сделать статистический метод применимым к этому случаю, следует допустить, что плотность *медленно* меняется на границе ядра, точнее, что она не меняется от ρ_0 до 0 в области меньшей, чем длина волны ядерных частиц, т. е. в области порядка r_0 .

Если плотность меняется слишком быстро, кинетическая энергия становится гораздо больше получающегося по статистической модели значения.

Мы допустим поэтому, что уменьшение плотности от ρ_0 до 0 имеет место в слое λ порядка величины r_0 . Далее, мы принимаем потенциал U спадающим линейно в этой области. Это обозначает, согласно (178), что ρ меняется как степень $\frac{3}{2}$ расстояния от поверхности. Обозначая через y координату, перпендикулярную поверхности, мы, таким образом, предполагаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 0 && \text{при } y < 0, \\ \rho &= \rho_0 \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{3/2} && \text{при } 0 < y < \lambda, \\ \rho &= \rho_0 && \text{при } \lambda < y. \end{aligned} \right\} \quad (179)$$

Теперь просто вычислим изменение энергии ядра, обусловленное поверхностным эффектом. Обозначим через S полную поверхность ядра, через Ω — его объем, где Ω определяется

$$\Omega \rho_0 = N, \quad (179a)$$

причем N — полное число нейтронов. T_0 есть полная кинетическая энергия без поверхностного эффекта, данная в § 26. Тогда мы получим уменьшение кинетической энергии ⁽¹⁾ на

$$\delta T = -\frac{4}{35} T_0 \frac{S\lambda}{\Omega}. \quad (179b)$$

и увеличение потенциальной энергии на

$$\delta V = \frac{3}{5} \cdot \frac{B(N+Z)}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{S\lambda}{\Omega} \cdot \frac{1}{x_0^3} \left[\frac{1}{2} x_0^3 - 2 + 3x_0^{-2} - (3x_0^{-2} + 1) e^{-x_0^2} \right], \quad (179c)$$

где x_0 — значение x , обращающее энергию ядра в минимум. Подставляем (см. 164d, 161b):

$$S = 4\pi R^2, \quad \Omega = \frac{4\pi}{3} R^3, \quad (179d)$$

$$B = 70 \text{ MV}, \quad T_0 = 15(N+Z) \text{ MV}, \quad x_0 = 2,70 \quad (179e)$$

и получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta T &= -5,1 \frac{(N+Z)\lambda}{R} \text{ MV}, \\ \delta V &= +8,3 \frac{(N+Z)\lambda}{R} \text{ MV}, \\ \delta E &= +3,2 \frac{(N+Z)\lambda}{R} \text{ MV}, \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

или пользуясь (153):

$$\delta E = 3,2 \frac{(N+Z)^{1/2} \lambda}{r_0} \text{ MV}. \quad (180a)$$

⁽¹⁾ Это обусловлено изменением плотности в поверхностном слое.

$\frac{\lambda}{r_0}$ должно быть согласно нашим предположениям порядка единицы. Чтобы получить согласие с опытом, существенно большая величина кажется необходимой (см. § 30, в частности 185а).

Вейцекер попробовал определить λ теоретически. Он предположил, что каждая отдельная волновая функция состоит из экспоненциально спадающего множителя вблизи поверхности ядра, но в других местах она ведет себя так же, как функция статистической модели. Экспоненциальное спадание вводит добавочный член в кинетическую энергию. Дальше он принял, что плотность, соответствующая каждому отдельному состоянию, уменьшается так же, как уменьшается общая плотность. Очевидно, что добавочный член кинетической энергии будет тогда тем больше, чем тоньше поверхностный слой. С другой стороны, член (179с) тем больше, чем толще поверхностный слой. То условие, что сумма двух членов должна быть минимальной, приводит непосредственно к определению толщины поверхностного слоя и добавочной поверхностной энергии. Однако основное допущение об увеличении плотности на поверхности вследствие однородного уменьшения плотности каждого отдельного состояния, повидимому, не оправдывается; в действительности мы приближаемся к поверхности состояния после того, как другие отпадают, потому что их полная энергия становится меньше потенциальной энергии в данной точке. Это отпадание вызывает уменьшение плотности без какой-либо необходимости экспоненциального спадания волновых функций. (Экспоненциальная часть каждой волновой функции в статистическом методе может быть отброшена).

Флюге (F12) использовал метод Вейцекера при рассмотрении легких ядер, для которых поверхностный слой нельзя считать тонким по сравнению с радиусом ядра, так что различие между „внутренней областью“ и „внешним слоем“ становится менее оправданным. Он нашел, что массовые дефекты всех легких ядер от He^4 до Si^{28} можно легко представить выражением Вейцекера, получающимся из описанного выше статистического метода, если принять потенциальную энергию взаимодействия нейтрона и протона

$$J(r) = -Be^{-\frac{r^2}{a^2}}, \quad (181)$$

где

$$B = 85 \text{ MV}, \quad a = 1,46 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Плотность нейтронов и протонов предполагается зависящей от расстояния r по функции Гаусса:

$$\rho(r) = e^{-\frac{2r^2}{Rr}}, \quad (181a)$$

где R — радиус ядра. R не точно пропорционален кубическому корню атомного веса, как это имеет место для тяжелых ядер; он несколько больше для легких ядер:

$$R = (0,67A^{1/3} + 0,93A^{-1/3}) \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (181b)$$

Следовательно, объем легких ядер больше, чем следовало бы ожидать, если бы объем был строго пропорционален числу частиц.

Флюге также произвел вычисление, используя экспоненциального вида потенциальную энергию, причем он получил те же результаты.

§ 30. Полуэмпирические формулы Вейцекера (W2)

Статистическая модель не дает удовлетворительных результатов. Вейцекер предложил поэтому полуэмпирический метод вычисления энергий ядер. Энергия ядер предполагается имеющей такой же вид, какой дает статистическая модель, исходя из простых качественных соображений. Однако формулы содержат не-

которые произвольные постоянные, которые следует определить из опыта.

Выберем следующий вид для *полной величины массы* (энергии) атома, который слегка проще Вейцекеровского:

$$M = NM_n + ZM_p - \alpha A + \beta \frac{(N-Z)^2}{A} + \gamma A^{2/3} + \frac{3}{5} \left(\frac{e^2}{r_0} \right) Z^2 A^{-1/3}, \quad (182)$$

где A — атомный вес, N и Z — число нейтронов и протонов, $r_0 A^{1/3}$ — радиус ядра, M_n и M_p — масса нейтрона и водородного атома, $\gamma \beta \gamma r_0$ — опытные постоянные. Два первых члена в (182) ясны сами по себе. Третий представляет основную энергию связи, которая, как мы знаем, должна быть пропорциональна числу частиц в ядре A , постоянная α должна определяться из опыта.

Четвертый член в (182) дает уменьшение энергии связи при отличном числе протонов и нейтронов; он имеет вид, выведенный из статистической модели в § 26. Этот вид понятно справедлив только при $N - Z \ll A$, но это условие выполняется для всех существующих ядер.

Пятый член есть поверхностный эффект и последний — кулоновское отталкивание протонов. Оба эти члена имеют вид уже полученный в статистической модели. Обменная поправка на электростатическое отталкивание (177а) может считаться содержащейся в первом члене, так как он пропорционален Z .

Чтобы определить постоянные, поступим следующим образом.

1. Определим r_0 из опытных радиусов радиоактивных ядер; это дает (см. 17а, б):

$$r_0 = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (182a)$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0} = 0,58 \text{ MV}. \quad (182b)$$

2. β определим так, чтобы наиболее устойчивое ядро с атомным весом 200 имело заряд 80 (Hg^{200}). Это дает:

$$\begin{aligned} \beta &= \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{r}{A^{1/3}} + \frac{1}{2} (M_p - M_n) \right] \frac{A}{2(N-Z)} = \\ &= \left(0,58 \cdot \frac{80}{200^{1/3}} - 0,20 \right) \frac{200}{80} \text{ MV}, \\ \beta &= 19,5 \text{ MV}. \end{aligned} \quad (183)$$

При этом значении β наиболее устойчивое ядро с атомным весом A имеет „изотопический номер“.

$$\left. \begin{aligned} J_A &= (N-Z)_A = A \frac{0,3 \left(\frac{e^2}{r_0} \right) A^{2/3} + \frac{1}{2} (M_p - M_n)}{2\beta + 0,3 \left(\frac{e^2}{r_0} \right) A^{2/3}}, \\ J_A &= \frac{A (A^{2/3} - 0,7)}{134 + A^{2/3}}, \end{aligned} \right\} \quad (183a)$$

и массу

$$M_{\min}(A) = \frac{1}{2} A (M_n + M_p) - \alpha A + \gamma A^{2/3} + \frac{3}{20} \left(\frac{e^2}{r_0} \right) A^{2/3} - \\ - A \frac{\left[0,3 \frac{e^2}{r_0} A^{2/3} - \frac{1}{2} (M_n - M_p) \right]^2}{2 \left(2\beta + 0,3 \frac{e^2}{r_0} A^{2/3} \right)} = \\ = \frac{1}{2} A (M_n - M_p) - \alpha A + \gamma A^{2/3} + 0,145 A^{2/3} \frac{135}{134 + A^{2/3}}. \quad (183b)$$

При последнем преобразовании мы пренебрегли несколькими очень малыми членами, содержащими разность масс нейтрона и атома водорода. Результат дает энергию в MV.

3 и 4. Определим коэффициенты α и γ так, чтобы массы O^{16} и Hg^{200} были правильными. Для O^{16} имеем: атомный вес 16,0000, $8M_n + 8M_p = 16,1322$.

Разность $-0,1322$ массовых единиц $= -123,1$ MV.

Кулоновская энергия $0,58 \cdot 8^2 \cdot 16^{-1/3} = 14,7$ MV.

Член $\frac{\beta(N-Z)^2}{A}$ исчезает.

Поэтому

$$-16\alpha + 16^{2/3}\gamma = -(123,1 + 14,7) = -137,8 \text{ MV}. \quad (184a)$$

Для Hg^{200} : атомный вес 200,016, $120M_n + 80M_p = 201,661$.

Разность $-1,645$ массовых единиц $= -1532$ MV.

Кулоновская энергия $0,58 \cdot 80^2 \cdot 200^{-1/3} = 633$ MV.

$$\frac{\beta(N-Z)^2}{A} = 19,5 \frac{40^2}{200} = 156 \text{ MV}.$$

Поэтому

$$-200\alpha + 200^{2/3}\gamma = -(1532 + 633 + 156) = -2321 \text{ MV}. \quad (184b)$$

Из (184a) и (184b) находим:

$$\alpha = 13,86 \text{ MV}, \quad \gamma = 13,2 \text{ MV}. \quad (184)$$

Преобразуем все энергии в тысячные доли массовой единицы и подставим постоянные в (182). Тогда избыток точного атомного веса атома (A, Z) над „массовым числом“ A , выраженный в тысячных долях массовой единицы, равен:

$$E = 1000(M - A) = 8,0_5 Z + 8,4_5 N - 14,9A + \\ + 21 \frac{(N-Z)^2}{A} + 14,2A^{2/3} + 0,625Z^2 A^{-1/3}, \quad (185)$$

или

$$E = 6,6_5 A + 0,4I + 21 \frac{I^2}{A} + 14,2A^{2/3} + 0,625Z^2 A^{-1/3} \quad (185a)$$

где $I = N - Z = A - 2Z$ есть изотопический номер.

Как отметил Вейцекер, эта формула непосредственно применима только к ядрам с четным числом нейтронов и протонов. Ядра, содержащие нечетное число нейтронов или протонов, обладают большей массой (меньшей энергией связи). В этом можно убедиться следующим образом. Для данного числа протонов Z

энергия (185а) очень близка квадратичной функции числа нейтронов N . Поэтому каждый добавочный нейтрон, который может быть связан с данным ядром, должен быть связан менее прочно, чем предыдущий нейтрон. В действительности однако, если мы имеем ядро, содержащее четное число нейтронов и протонов, будет всегда два добавочных нейтрона с одной и той же энергией связи, потому что оба они могут быть связаны в одном состоянии. Поэтому энергия ядра, содержащего нечетное число нейтронов, должна быть получена как средняя кинетическая между энергиями двух соседних ядер с четным числом нейтронов. То же справедливо для ядер, содержащих нечетное число протонов. Энергия ядер с нечетными N и Z должна получаться двойной интерполяцией.

Таблица VIII

Массы некоторых ядер, вычисленные по полуэмпирической формуле (185), в тысячных долях массовой единицы

Атом	Избыток массы составных частей	Общая энергия (°)	Член в $(N-Z)^2$	Поверхностная энергия	Кулоновская энергия	Полная	
						теор.	экспер.
O^{26}	+132,0	-238,4	0	90,1	15,8	-0,5	0,0
A^{40}	329	-596	8	116	59	-33	-29
K^{82}	329	-1222	25	268	186	-78	-73
He^{134}	1101	-1997	106	372	354	-62	-71
Hg^{200}	1658	-2980	168	486	680	+16	+16
U^{238}	1953	-3547	257	545	838	+52	+99 (²)

В таблице VIII даны избытки масс некоторых ядер периодической системы в тысячных долях массовой единицы. Эта таблица показывает относительную важность общей энергии, поверхностной энергии и кулоновского отталкивания. Согласие с опытом вполне удовлетворительно. Неполное согласие для стандартного ядра O^{16} обусловлено пренебрежениями, сделанными в (185).

Таблица IX дает избытки масс известных легких ядер, вычисленные из наблюдения. Приведены также данные, полученные Вейцекером из его полуэмпирических формул. Они согласуются с наблюдаемыми значениями несколько лучше наших. Причиной этому лежит в том, что Вейцекер подобрал свои постоянные так, чтобы по возможности хорошо представить массы легких ядер. Формула Вейцекера:

$$E = \left[-(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} + \left\{ \alpha^2 + \beta^2 \left(\frac{Z-N}{A} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \cdot [A - 1 - \gamma(A-1)^{1/2}] + \frac{3e^2}{r_0 A^{1/2}} \cdot \left(\frac{1}{5} Z^2 - 2^{-1/2} Z^{1/2} \right), \quad (185b)$$

(¹) $8,0_5 Z + 8,5_4 N$, т. е. избыток масс нейтронов и протонов, содержащихся в ядре, над «массовым числом» $Z + N$.

(²) Составлено по энергии α -частиц, испускаемых рядом урана и принятой массы Rb^{206} , 206,020.

Таблица IX

Избытки массы легких ядер, вычисленные по полуэмпирической формуле (185), в тысячных долях массовой единицы ⁽¹⁾

Ядро	Теор.	По Вейцекеру	Экспер.	Ядро	Теор.	По Вейцекеру	Экспер.
He ³	29,3	13,3	16,4	He ⁴	10,8	9,6	3,4
Li ⁵	17,5	15,3	—	Li ⁶	16,5	13,9	16,1
Be ⁷	16,5	13,7	—	Be ⁸	8,3	7,5	7,0
B ⁹	12,5	12,1	15,5	B ¹⁰	10,5	10,4	14,6
C ¹¹	10,6	10,3	14,2	C ¹²	4,6	3,5	3,7
N ¹³	7,5	8,7	10,0	N ¹⁴	4,8	6,5	7,6
O ¹⁵	5,0	7,4	8,6	O ¹⁶	-0,4	0,4	0,0
F ¹⁷	2,4	5,5	7,8	F ¹⁸	-0,5	3,1	>5,5
Ne ¹⁹	0,0	—	—	Ne ²⁰	-5,2	-2,3	-0,2
				Na ²²	-5,9		-0,3
				Mg ²⁴	-10,2		-6,1
				Al ²⁶	-10,8		-3,5
				Si ²⁸	-14,8		-15
				P ³⁰	-15,7		-11,5
				S ³²	-19,5		-22,5

Ядро	Теор.	По Вейцекеру	Экспер.	Ядро	Теор.	По Вейцекеру	Экспер.
He ⁵	16,8	14,1	—	He ⁶	22,8	18,6	—
Li ⁷	15,5	12,7	16,9	Li ⁸	25,1	17,6	18,3
Be ⁹	10,4	10,1	13,9	Be ¹⁰	12,5	13,6	15,4
B ¹¹	8,5	8,5	11,1	B ¹²	13,2	12,8	16,6
C ¹³	4,7	6,0	6,9	C ¹⁴	4,9	8,5	7,8
N ¹⁵	2,2	4,3	5,3	N ¹⁶	4,6	7,9	7,5
O ¹⁷	-1,0	1,8	4,0	O ¹⁸	-1,7	3,4	4,5
F ¹⁹	-3,4	0,4	+4,0	F ²⁰	-2,6		5,4
Ne ²¹	-6,7		-0,5	Ne ²²	-8,3		-2,2
Na ²³	-9,2		-2	Na ²⁴	-9,2		-0,5
Mg ²⁵	-12,2		-6,5	Mg ²⁶	-14,2		-7,5
Al ²⁷	-14,5		-10,5	Al ²⁸	-15,2		-10,0
Si ²⁹	-17,2		-16	Si ³⁰	-19,6		-17,5
P ³¹	-19,5		-20	P ³²	-21,0		-20,5
S ³³	-22,4		-23,5	S ³⁴	-25,3		-25,5

где $\alpha = 1,6$, $\beta = 13,9$, $\gamma = 0,6$ в тысячных массовой единицы и $r_0 = = 1,26 \cdot 10^{-13}$ см.

Общий ход масс ядер представляется теоретическими формулами достаточно хорошо. Исключением являются легчайшие ядра, для которых впрочем и нельзя было бы ожидать хорошего резуль-

⁽¹⁾ Все экспериментальные данные относительно ядер с атомным весом больше 17, за исключением F¹⁹ и Ne²⁷, не особенно достоверны. Они основаны на сильно расходящихся данных относительно ядерных преобразований этих тяжелых элементов и частично на интерполяции. Возможны ошибки на три единицы в разностях между соседними элементами и до десяти единиц в абсолютных значениях.

тата, и ядро кислорода. В то время как полученные из опыта энергии в среднем приблизительно равны теоретическим до ядра O^{16} , а иногда даже ниже (Be^8 , C^{12}), они значительно выше теоретических для ядер между O и Al . Эта разница достигает 6—8-тысячных массовых единицы. Для еще более тяжелых ядер согласие снова восстанавливается; наиболее полно оно для серы. Причина всех этих явлений, повидимому, лежит в построении „замкнутой нейтронной оболочки“.

Разница между энергиями таких изобар, как $C^{13}N^{13}$, $N^{15}O^{15}$, $O^{17}F^{17}$ и т. д., повидимому, находится в хорошем согласии с опытными данными, полученными нами из верхнего предела спектра β -частиц (§ 39). В согласии с опытом V^{10} оказывается более устойчивым, чем Be^{10} , N^{14} — более устойчивым, чем C^{14} , но F^{18} менее устойчив, чем O^{18} (1). Однако существуют также заметные расхождения, особенно для тяжелых ядер с четным атомным весом; например, ядра Si^{28} и Al^{28} должны были бы иметь одинаковый вес согласно полуэмпирической формуле, в действительности же Al^{28} на 5 единиц тяжелее; P^{30} должно было бы быть на 4 единицы тяжелее, чем Si^{30} , а в действительности превышает на 6 единиц, P^{32} должно было бы быть на 1 единицу легче, чем S^{32} , а в действительности на 2 единицы тяжелее. Это показывает, что наш метод не дает достаточно большой разницы между ядрами с четными массами и нечетным зарядом и ядрами с четными массами и четным зарядом, особенно в случае тяжелых ядер. Это указывает на необходимость введения сил между одинаковыми частицами (§§ 10, 18, 21, 28).

Для наиболее легких ядер максимум устойчивости имеет место у ядер, содержащих четное число α частиц (Be^8 , C^{12} , O^{16}). При более высоком атомном весе эти разницы устойчивости постепенно исчезают, и максимум устойчивости смещается к ядрам, содержащим больше нейтронов, чем протонов (сравни Be^8 , Be^9 , Be^{10} — с S^{32} , S^{33} , S^{34}). Следовало бы заметить, что исключительная устойчивость легких ядер, содержащих целое число α -частиц, получается без допущения, что α -частицы содержатся в ядре. Следует сделать лишь достаточно очевидное предположение о том, что нейтроны и протоны по два образуют замкнутые оболочки, причем каждая оболочка содержит две частицы с противоположным спином и с одной и той же пространственной волновой функцией.

Используем теперь наши формулы для того, чтобы вновь определить предел устойчивости относительно α -распада (см. § 8). Возьмем наиболее устойчивое ядро с данным атомным весом A , энергия которого определяется (183b). Подставляя значения α и γ из (185), найдем для избытка масс наиболее устой-

(1) Это указывает, повидимому, на то, что излом в ходе изотопов вблизи O (см. § 34) не связан с образованием замкнутой оболочки у O^{16} . Действительно, последнее обстоятельство не отражено в наших вычислениях, в то время как первое учитывается автоматически, так как большей устойчивости O^{18} по сравнению с F^{18} достаточно, чтобы объяснить изменение хода весов изотопов.