

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та
природокористування

Стрілець О. Р.

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН
Конспект лекцій

Навчально-методичний посібник

Рівне – 2023

УДК 621.01
С18

Рецензенти:

Кравець С. В., д.т.н., професор Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне;
Марчук Р. М., к.т.н., доцент Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

*Рекомендовано науково-методичною радою
Національного університету водного господарства
та природокористування.
Протокол № 5 від 26 квітня 2023 р.*

Стрілець О. Р.

С18 Теорія механізмів і машин. Конспект лекцій : навчально-методичний посібник. [Електронне видання]. – Рівне : НУВГП, 2023. – 229 с.

ISBN 978-966-327-558-1

У навчально-методичному посібнику наведено основні системні підходи до проектування машин і механізмів, знаходження кінематичних і динамічних характеристик механізмів за допомогою аналітичних та графо-аналітичних методів, визначення оптимальних параметрів механізмів за заданими умовами.

Навчально-методичний посібник призначений для вивчення дисципліни «Теорія механізмів і машин» здобувачами вищої освіти спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт» та 133 «Галузеве машинобудування», проте цю дисципліну вивчають майбутні фахівці усіх механічних спеціальностей.

ISBN 978-966-327-558-1

© О. Р. Стрілець, 2023
© НУВГП, 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ПЕРЕДУМОВИ ВИВЧЕННЯ	5
ТЕМА 1. Структурна будова та класифікація механізмів	9
ТЕМА 2. Плоскі важільні механізми	31
ТЕМА 3. Плоскі кулачкові механізми	53
ТЕМА 4. Плоскі зубчасті механізми	77
ТЕМА 5. Складні та просторові зубчасті механізми	95
ТЕМА 6. Сили, що діють у механізмах	128
ТЕМА 7. Дослідження руху механізмів та регулювання ходу машин	188
ТЕМА 8. Зрівноваження і віброзахист машин	211
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	222
ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК	224
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	228

ВСТУП

Технічний рівень всіх галузей економіки України визначається рівнем машинобудування, розвиток та основи проектування якого базуються на багатьох дисциплінах, а особливо на «Теорії механізмів і машин». У ній вивчають сучасні методи синтезу та аналізу важільних, зубчастих і кулачкових механізмів, рух механізмів під дією заданих сил, поняття енергетичної ефективності машин та коефіцієнта корисної дії, балансування та віброзахисту.

Завданням дисципліни є дати здобувачам вищої освіти фахові компетентності по практичній реалізації системних підходів до проектування машин і механізмів, знаходження кінематичних і динамічних характеристик механізмів за допомогою аналітичних та графо-аналітичних методів, визначення оптимальних параметрів механізмів за заданими умовами.

Навчально-методичний посібник призначений для вивчення дисципліни «Теорія механізмів і машин» здобувачами вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт» та 133 «Галузеве машинобудування» денної та заочної форми навчання, проте цю дисципліну вивчають майбутні фахівці усіх механічних спеціальностей.

В університетах «Теорію механізмів і машин» викладають вже на протязі століття, а окремі розділи і ще раніше. Тому можна сказати, що це класична, сформована і завершена загально технічна дисципліна. Вагомий вклад в її розвиток зробили українські науковці Кожевников С. М., Кореняко О. С., Заблонський К. І., Костецький Б. І., Іванченко Ф. К., Кінницький Я. Т., Червоний Б. І. та ін.

Даний посібник узагальнює досвід науковців дисципліни і містить результати власних досліджень автора по кінематичному аналізі та енергетичній ефективності зубчастих диференціальних механізмів.

ПЕРЕДУМОВИ ВИВЧЕННЯ

Для успішного засвоєння знань з дисципліни «Теорія механізмів і машин» необхідно володіти базовими знаннями і методами вищої математики, фізики та теоретичної механіки.

Розділ фізики, що вивчає рух тіл називається *механікою*.

На сучасному рівні розуміння найдосконаліше рух описують засади *релятивістської механіки*, заснованої на спеціальній теорії відносності (СТВ) А. Ейнштейна. Властивості простору і часу, що були описані в роботах Ейнштейна, змушують переосмислити зроблені раніше припущення про співвідношення фізичних величин при русі. Так, наприклад, маса насправді не може бути мірою інертності тіла, а форма тіла чи відстань між двома об'єктами не є абсолютними величинами, так як залежать від швидкості з яким тіло рухається. Чим більша швидкість тим меншою стає маса тіла і зменшуються його лінійні розміри. Величина швидкості є обмеженою і не може бути вищою за швидкість світла. Це, водночас, означає, що маса і розміри тіла, яке розганяється до швидкості світла стають рівними нулю. Час не абсолютний, одна подія відбудеться в різному інтервалі часу для спостерігачів у різних інерційних системах. Так з точки зору спостерігача на Землі частинка світла долає шлях від Сонця до нього приблизно за 8 хв. В той же час, з точки зору світла, воно відправляється і відбивається від поверхні Землі в один момент часу.

Дана теорія є досить складною для осмислення, але суттєво впливає на процеси і співвідношення параметрів руху тільки на величезних швидкостях, близьких до швидкості світла ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с). Тому для наших цілей, а саме дослідження руху механізмів, швидкість яких далеко не така велика, ми будемо користуватися положеннями

класичної механіки, суть яких описана трьома законами Ньютона для інерційних систем відліку.

Перший закон Ньютона. В системі відліку, яка має назву «інерційна», тіло за відсутності взаємодії з іншими тілами зберігає стан спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.

Тобто доки на тіло, що розглядається, не подіє інше тіло воно не буде змінювати ні напрямку ні швидкості руху, або, іншими словами, рухатиметься за *інерцією*. Це можливо, інтуїтивно, може викликати у читача заперечення, наприклад, для ситуації, коли ми відпускаємо предмет який щойно тримали в руці нерухомо, він одразу змінює свою швидкість і рухається вниз (падає). Це не є запереченням першого закону, адже на згаданий предмет, як і на всі тіла на Землі, постійно діє гравітація нашої планети, яка і змінює величину і напрямок власної швидкості тіла.

Кількісна міра дії одного тіла на інше називається *силою* (гравітаційна сила, сила тертя, тощо). Сила вимірюється в ньютонах (N) і має напрямок (є векторною величиною). Геометрична сума всіх сил що діє на тіло називається *рівнодійною*. Сила виявляє себе у зміні швидкості (*прискоренні*) тіла за величиною і напрямком, а співвідношення для цієї зміни описує другий закон Ньютона.

Другий закон Ньютона. Рівнодійна сила, що прикладена до тіла прямо пропорційна добутку маси тіла на його прискорення.

$$\overrightarrow{\text{Рівнодійна сила}} = \text{маса} \cdot \overrightarrow{\text{прискорення}}$$

У співвідношенні вище величини сили і прискорення є векторними, а маса скалярною. У класичній механіці *маса* є абсолютною величиною для тіла і не залежить від швидкості його руху. Таким чином можна зробити висновок, що дія на тіло іншої чи одночасно кількох сил призводить до виникнення в нього прискорення (зміни

величини і напрямку швидкості). Напрямок у якому тіло рухатиметься після прикладання сил співпадатиме з напрямком рівнодійної прикладених сил. Рівність величин рівнодійної і добутку маси на прискорення, означає, що якщо одну і ту ж силу прикладати до тіл різної маси, то величина зміни швидкості буде для цих тіл різною – чим більша маса, тим пропорційно менше прискорення. Тобто тіло більшої маси чинитиме більший опір зміні швидкості. Таку властивість тіла називають *інертністю*, а маса є мірою цієї інертності (в межах класичної механіки).

Важливо розуміти що зміна швидкості також може відбуватись або тільки за величиною, або тільки за напрямком. Тобто тіло, що рухається прямолінійно але змінює швидкість свого руху з часом матиме прискорення, так само як і тіло що рухається з постійною швидкістю але по криволінійній траєкторії. Якщо прикласти силу в напрямку руху тіла, це призведе до збільшення його швидкості (прискорення руху). Якщо сила прикладена в напрямку протилежному руху тіла, воно почне сповільнюватись.

Усі описані вище процеси інтуїтивно зрозумілі, адже ми виконуємо рухи в повсякденному житті постійно, і пояснюються однією простою формулою для аналітичного вираження другого закону Ньютона, наведеною вище.

Сила що діє на одне тіло не може виникнути без існування іншого тіла що цю викликає. При чому ця взаємодія має взаємний характер, що описується третім законом Ньютона.

Третій закон Ньютона. Сили, з якими два тіла діють одне на одне, завжди рівні за величиною і напрямлені у протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує центри мас цих тіл.

Закони Ньютона суперечать принципам СТВ, але є достатніми для вирішення задач механіки механізмів.

Більше про теоретичні засади механіки можна прочитати в спеціалізованій літературі, наприклад, [1].

У запропонованому курсі «Теорія механізмів і машин» вирішення задач здебільшого пропонується виконувати графо-аналітичними методами, для більшої наочності отриманих результатів і спрощення матеріалу. Векторні фізичні величини подаються у вигляді напрямлених відрізків побудованих в масштабі. А додавання цих величин відбувається графічно за **правилом трикутника** (правилом паралелограма). Якщо у нас є декілька векторів, величина і напрямок яких відома, для їх додавання будемо перший вектор в прийнятому масштабі, далі з кінця першого будемо в тому ж масштабі другий вектор, далі з кінця другого – третій, і так вибудовуємо ланцюжок із всіх векторів суми. Результатом цієї суми буде побудова, що з'єднає початок першого вектора з кінцем останнього:

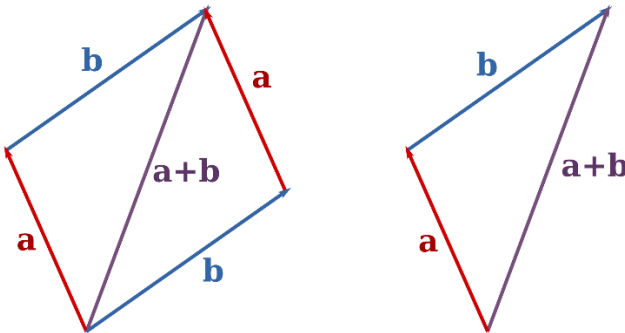


Рисунок. Графічне додавання векторів

Зверніть увагу, що якщо відомо, що сума декількох векторів рівна нулю, то графічно це означає, що кінець останнього вектора співпадає з початком першого. Таку властивість можна використати, наприклад, для графічного визначення невідомих сил, що входять в рівняння рівноваги.

ТЕМА 1. Структурна будова та класифікація механізмів

- 1.1. Загальні визначення: машина, механізм. Види машин і механізмів
- 1.2. Компоненти механізму
- 1.3. Кінематичні пари та їх класифікація
- 1.4. Кінематичні ланцюги та їх класифікація
- 1.5. Структурні формули кінематичних ланцюгів. Сімейства механізмів
- 1.6. Принцип утворення механізмів
- 1.7. Групи Ассура та їх класифікація
- 1.8. Класифікація механізмів. Послідовність структурного аналізу
- 1.9. Зайві ступені вільності та пасивні умови зв'язку
- 1.10. Замінюючі механізми

1.1. Загальні визначення: машина, механізм. Види машин і механізмів

Метою створення машин є збільшення продуктивності праці і заміна праці людини машинною. В деяких випадках машина може замінювати людину не тільки у фізичній, а й у розумовій праці, а також замінювати окремі органи людини, як наприклад, протези, штучне серце, механізми маніпуляторів та промислових роботів.

Механізм – це система твердих тіл, з'єднаних між собою рухомо, яка призначена для перетворення рухів і сил одного чи кількох тіл у потрібні рухи і сили інших тіл (редуктор, коробка зміни передач і ін.).

Машина – це технічний об'єкт, що виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів та інформації, щоб полегшити працю людини (електродвигун, двигун внутрішнього згорання).

Машини, що використовуються в наш час, за характером виконуваних ними функцій можна поділити на наступні класи (рис. 1.1), відповідно до [2]:

- **енергетичні** (двигуни), перетворюють енергію у механічну роботу (електродвигуни, парові машини, гідротурбіни, двигуни внутрішнього згоряння);

- **перетворювачі**, що перетворюють механічну енергію в будь-який інший вид (генератори, компресори, механізми насосів);

- **транспортні**, переміщують маси (автомобіль, тепловоз, літак);

- **технологічні** (робочі), які приводяться в рух двигунами (прокатні стани, металообробні та ткацькі верстати);

- **інформаційні** (лічильні, лічильно-обчислювальні машини);

- **кібернетичні** відтворюють механічні рухи, властиві людині (роботи, маніпулятори).

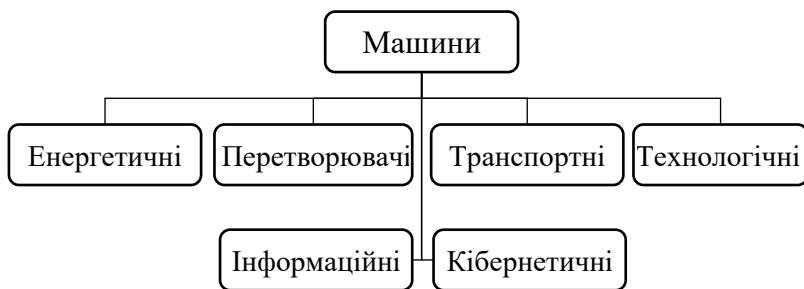


Рис. 1.1. Класифікація машин

Двигун і робочу машину, що з ним з'єднана, називають **машинним агрегатом**. Іноді до складу машинного агрегату входять передавальні механізми (рис. 1.2).

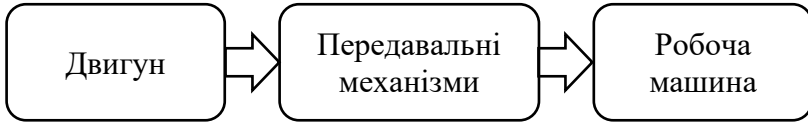


Рис. 1.2. Машинний агрегат

Усі механізми, що складаються із твердих тіл, діляться на:

- важільні (рис. 1.3);
- кулачкові (рис. 1.4);
- фрикційні, що працюють за рахунок тертя (рис. 1.5);
- зубчасті, що складаються із зубчастих коліс (рис. 1.6);
- з гнучкими ланками (рис. 1.7);
- гідравлічні і пневматичні (робочим тілом є вода або повітря);
- лічильні (планіметри, інтегратори, аналізатори і ін.).

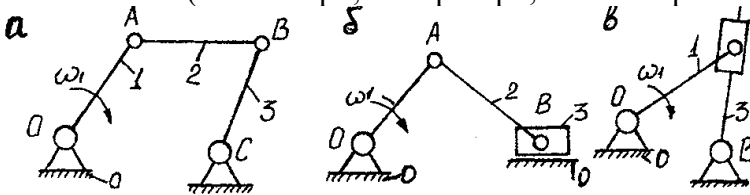


Рис. 1.3. Важільні механізми:

a – кривошипно-коромисловий; *б* – кривошипно-повзунний; *в* – кулісний

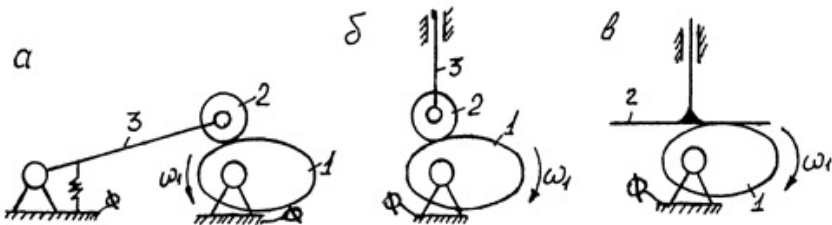


Рис. 1.4. Кулачкові механізми:

a – з коромисловим штовхачем; *б* – з роликівим штовхачем; *в* – з тарілчастим штовхачем

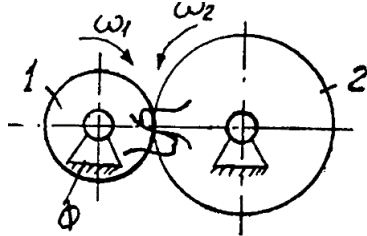
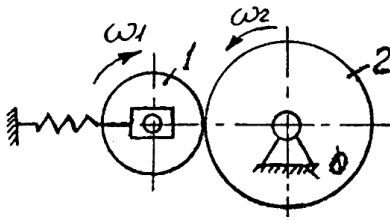


Рис. 1.5. Фрикційний механізм Рис. 1.6. Зубчастий механізм

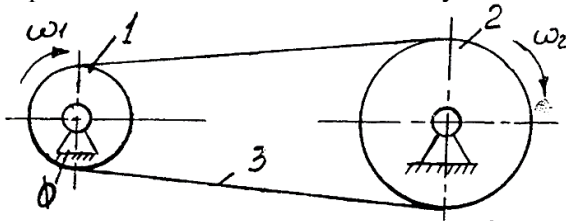


Рис. 1.7. Механізм з гнучкою ланкою

1.2. Компоненти механізму

Для виконання необхідної роботи з перетвореннями рухів від двигуна до робочої машини, будь-який механізм повинен складатись з окремо виготовлених елементів, з'єднаних між собою для сумісної роботи.

Такий виріб, виготовлений із матеріалу однієї марки, без застосування складальних операцій, називається *деталлю* (шків, шестерня, вал). Деталі можна з'єднувати між собою *рухомо*, тобто із забезпеченням їх вільного відносного зміщення (шарніри, гвинт-гайка), або *нерухомо* (жорстко), обмежуючи будь-який відносний рух (зварне, різьбове з'єднання).

В даному курсі не розглядається детальна конструкція конкретних машин, а тому основним елементом для аналізу прийнято *ланку* – деталь, або жорстке з'єднання кількох деталей, що несе на собі елементи кінематичних пар.

Місце рухомого з'єднання двох ланок називається *кінематичною парою*.

Кожен механізм повинен мати одну нерухому ланку, або ланку, що приймається за нерухому (корпус, рама). Далі називатимемо таку ланку **стояком** (0 – рис. 1.3).

Решта ланок є рухомими, і їх поділяють на вхідні (ведучі) проміжні (з'єднувальні) та вихідні (ведені).

Вхідною (ведучою) називається ланка, закон руху і сили для якої задаються, тобто відомі (1 – рис. 1.3).

Вихідною (веденою) називається ланка, від якої отримуються потрібні рухи і сили для робочого органу механізму (3 – рис. 1.3).

Решта ланок називаються **з'єднувальними**, або проміжними.

В загальному випадку в механізмах одна вхідна і одна вихідна ланка. Вхідна ланка отримує рух від двигуна, а вихідна з'єднується з робочою машиною.

Залежно від характеру руху відносно стояка інші ланки важільного механізму мають специфічні назви:

Кривошип – обертова ланка, яка здійснює повний оберт навколо нерухомої осі (1 – рис. 1.3).

Шарнірна тяга – ланка, що несе тільки обертальні кінематичні пари (2 – рис. 1.3, а).

Шатун – ланка, що з'єднана обертальними кінематичними парами тільки з рухомими ланками, одна яких повзун (2 – рис. 1.3, б).

Повзун – ланка, яка утворює поступальну пару зі стояком (3 – рис. 1.3, б).

Коромисло – обертова ланка, що здійснює неповний оберт навколо нерухомої осі (3 – рис. 1.3, а).

Куліса – обертова ланка, яка є напрямною ковзаючого каменя (3 – рис. 1.3, в).

Ковзаючий камінь – ланка, що здійснює прямолінійно-поступальний рух вздовж рухомої напрямної (2 – рис. 1.3, в).

1.3. Кінематичні пари та їх класифікація

Кінематичною парою, як вже було сказано, називається місце, де рухомо з'єднуються дві ланки. За характером дотикання поверхонь цих двох ланок кінематичні пари діляться на вищі і нижчі.

До *нижчих* відносяться пари, у яких дотик елементів проходить по поверхням (наприклад, поршень з циліндром).

До *вищих* відносяться пари, у яких дотик елементів проходить по лініям або точкам (наприклад, колесо з дорогою).

Способи рухомого з'єднання ланок, тобто сполучення елементів кінематичних пар, можуть бути різними. Теорію кінематичних пар вперше розробив вчений Х. І. Гохман у 1890 р., а в подальшому доповнили А. П. Малишев, В. В. Добровольський, І. І. Артоболовський та ін.

На відносний рух кожної із двох ланок кінематичної пари накладаються певні обмеження, які залежать від способу з'єднання цих ланок. Обмеження, накладені на відносний рух ланок кінематичної пари, називаються *умовами зв'язку*.

Розглянемо, які ж зв'язки і в якій кількості можуть бути накладені на відносний рух ланок кінематичної пари.

В загальному випадку можна розглядати, що всяке абсолютно тверде тіло, що вільно рухається в просторі, матиме шість незалежних переміщень (три поступальних вздовж відповідних осей просторової системи координат та три обертальних відносно цих осей), тобто має шість ступенів вільності (рис. 1.8).

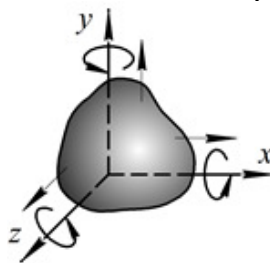


Рис. 1.8. Абсолютно тверде тіло у просторі

З'єднання, навіть рухоме, однієї ланки з іншою ланкою, тобто утворення кінематичної пари, накладає на відносний рух цих ланок обмеження. Іншими словами, якщо дві ланки дотикаються, вони втрачають можливість виконувати одне чи більше із своїх шести незалежних переміщень в просторі. Число цих обмежень, що ми далі і називатимемо умови зв'язку, залежить від того як саме ланки дотикаються.

Число умов зв'язку для можливості існування кінематичної пари, очевидно, повинно бути цілим, більше 0 і меншим шести.

Якщо число умов зв'язку дорівнює 6, це означає, що ланки втрачають відносний рух, тобто не можуть виконати жодне із шести незалежних переміщень, і переходять в жорстке з'єднання. Жорсткі з'єднання на цьому курсі ми розглядати не будемо.

Якщо число умов зв'язку дорівнює 0, то це означає, що ланки не дотикаються взагалі і отже не утворюють кінематичної пари.

Таким чином, число умов зв'язку змінюється від 1 до 5.

Число ступенів вільності N ланки кінематичної пари можна зв'язати з числом її умов зв'язку S наступним виразом:

$$N = 6 - S. \quad (1.1)$$

Всі кінематичні пари діляться на класи в залежності від числа умов зв'язку.

Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку S . Скільки умов зв'язку в кінематичній парі – такий і її клас. Із (1.1) маємо

$$S = 6 - N. \quad (1.2)$$

Очевидно, оскільки число умов зв'язку змінюється від 1 до 5, то загалом існує 5 класів кінематичних пар.

Для прикладу, якщо кінематична пара дозволяє двом ланкам, що її утворюють, виконувати 5 відносних переміщень із 6 можливих, тобто вона має 5 ступенів вільності ($H = 5$), то згідно (1.2) вона накладає 1 умову зв'язку ($S = 6 - 5 = 1$). Отже, така кінематична пара буде відноситись до 1 класу.

Розглянемо найпоширеніші кінематичні пари (рис. 1.9).

На рис. 1.9, *а* показано кінематичну пару – кулю А, що перекочується з ковзанням відносно площини В. Рух кулі відносно площини можна розкласти на три обертальні рухи навколо осей x , y , z і два поступальні – вздовж осей x і y .

В той же час, переміщення кулі, вздовж осі z неможливе, тому що рух вниз обмежує площина, а при русі вверх пара перестає існувати.

Для такої пари ступінь вільності $H = 5$, тобто згідно (1.2) число умов зв'язку $S = 1$, а тому ця пара відноситься до пар 1 класу.

Аналогічно розглянемо пару – куля А, розміщена в циліндрі В (рис. 1.9, *б*). Ця пара має чотири ступені вільності (всі три обертальні рухи кулі циліндр не обмежує, а також куля може рухатись поступально вздовж осі x циліндра), а отже дві умови зв'язку (куля не здатна рухатись поступально в поперечних напрямках циліндра – осі y , z). Таким чином маємо кінематичну пару II класу.

Трирухома кінематична пара (рис. 1.9, *в*) має три обертальні рухи навколо осей x , y , z і три зв'язки, а тому відноситься до пар III класу.

Дворухома кінематична пара (рис. 1.9, *г*) допускає два відносні рухи: обертальний і поступальний. Така пара має чотири зв'язки і відноситься до пар IV класу.

До V класу відносяться всі поступальні і обертальні кінематичні пари, а також умовно гвинтова пара (рис. 1.9, *д*).

Клас пари	Вид пари		
	I	II	III
I			
II			
III			
IV			
V			

Рис. 1.9. Класифікація кінематичних пар

Зверніть увагу що для показаних на рис. 1.9 кінематичних пар 2–5 класів можливі різні конструкції з'єднання ланок, що дають різний розподіл обертальних та поступальних рухів, які конкретна кінематична пара дозволяє чи обмежує. Наприклад, для кінематичної пари III класу (рис. 1.9, в), у першому випадку дозволено три обертальних рухи, у другому два обертальних і один поступальний, а в третьому два поступальних і один обертальний. Кількісно у кожній із конструкцій маємо обмеження трьох інших рухів, тобто це все дійсно кінематичні пари III класу. Але можливість таких конструктивних відмінностей вимагає їх додаткової класифікації. Тому окрім класів, кінематичні пари також поділяються на види.

Вид кінематичної пари визначається числом можливих поступальних і обертальних рухів. Обертальним рухам при класифікації надається перевага. Тобто, якщо для даного класу кінематичної пари є максимальне число обертальних рухів, то пара відноситься до першого виду, якщо один обертальний рух замінено поступальним, то пара відноситься до другого виду і т.д.

Розберімося детальніше.

Отже, наприклад, кінематична пара V класу за визначенням обмежує 5 рухів ланок цієї пари із 6, тобто дозволяє лише один. Однак в залежності від конструкції з'єднання, цей один рух може бути або обертальним, або поступальним. Тому дотримуючись правила переваги обертального руху, кінематична пара V класу, що дозволяє обертальний рух матиме I вид, а та що дозволяє поступальний буде II виду.

В той час як для пари V класу можливий поділ тільки на названі вище два види, зі зменшенням числа обмежень, змінюється число можливих комбінацій поступальних і обертальних рухів. Так, кінематична пара IV класу дозволяє

вже два рухи. Це можуть бути два обертальних рухи (I вид), один обертальний і один поступальний (II вид) чи два поступальних рухи (III вид).

Також не варто забувати, що б можливих переміщень вільного тіла в просторі це завжди три обертальних і три поступальних. Тобто не можлива кінематична пара, наприклад, II класу, яка дозволить 4 обертальні рухи – їх може бути максимум 3. Принаймні в тривимірному просторі.

В загальному поділ кінематичних пар на види можна представити у табличному вигляді (таблиця 1.1):

Таблиця 1.1

Види кінематичних пар різного класу

	I вид	II вид	III вид	IV вид
I клас	3 оберт. і 2 пост.	2 оберт. і 3 пост.	–	–
II клас	3 оберт. і 1 пост.	2 оберт. і 2 пост.	1 оберт. і 3 пост.	–
III клас	3 оберт.	2 оберт. і 1 пост.	1 оберт. і 2 пост.	3 пост.
IV клас	2 оберт.	1 оберт. і 1 пост.	2 пост.	–
V клас	1 оберт.	1 пост.	–	–

1.4. Кінематичні ланцюги та їх класифікація

Система ланок, які з'єднані між собою кінематичними парами, називається **кінематичним ланцюгом** (рис. 1.10).

Кінематичні ланцюги поділяють на прості і складні, [5].

Простим називається такий кінематичний ланцюг у якого кожна ланка входить не більше, ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.10, а).

Складним називається такий кінематичний ланцюг, у якого хоч би одна ланка входить більш як у дві кінематичні пари (рис. 1.10, б).

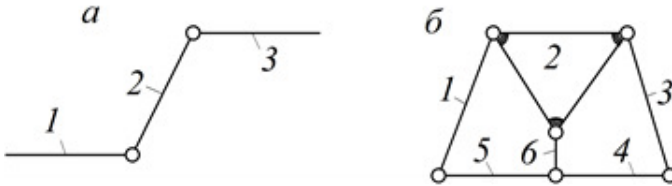


Рис. 1.10. Кінематичні ланцюги:

а – простий незамкнений; *б* – складний замкнутий

Прості і складні кінематичні ланцюги у свою чергу діляться на замкнуті і незамкнуті.

Незамкнутим називається такий кінематичний ланцюг, у якого хоч би одна ланка входить в одну кінематичну пару (рис. 1.10, *а*).

Замкнутим називається такий кінематичний ланцюг, у якого кожна ланка входить не менше, ніж у дві кінематичні пари (рис. 1.10, *б*).

Кінематичні ланцюги бувають **плоскі** і **просторові**.

1.5. Структурні формули кінематичних ланцюгів. Сімейства механізмів

Число ступенів вільності кінематичного ланцюга залежить від числа ланок, а також від числа та класу кінематичних пар, що входять до складу ланцюга.

Кожну ланку можна розглядати як абсолютно тверде тіло, що, як відомо, має шість ступенів вільності в просторовому русі. Сукупність n ланок являє собою систему з $6n$ ступенями вільності. Кожна кінематична пара V класу вносить 5 обмежень руху (умов зв'язку) в системі, тобто зменшує загальне число ступенів вільності на п'ять; пара IV класу – відповідно на чотири, III класу – на три і т.д.

Відповідно, число ступенів вільності W просторового кінематичного ланцюга, що складається із n рухомих ланок і p_5 кінематичних пар п'ятого класу, p_4 – четвертого, p_3 – третього, p_2 – другого і p_1 – першого, буде:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (1.3)$$

Рівність (1.3) є формулою *рухомості*, або структурною формулою просторового кінематичного ланцюга і носить назву *формули Сомова-Малишева*.

У випадку *плоского кінематичного ланцюга*, у якого всі ланки рухаються в одній або паралельних площинах, кожна ланка, будучи вільною, матиме тільки три ступені вільності, тобто n ланок будуть мати відповідно $3n$ ступенів вільності. В склад плоского кінематичного ланцюга можуть входити тільки кінематичні пари V класу (обертальні і поступальні) і IV класу (зубчаста передача, передача кулачок-штовхач). Кінематична пара V класу, що дозволяє тільки один відносний рух ланки, в такому випадку обмежить два інші, тобто зменшить ступінь вільності на 2, а IV класу – на 1. Тому, аналогічно (1.3), ступінь вільності плоского кінематичного ланцюга знаходиться як

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.4)$$

Рівність вище носить назву *формули Чебишева*.

Кожний механізм є частковим випадком кінематичного ланцюга, але не кожний кінематичний ланцюг є механізмом.

Механізми, в склад яких входять кінематичні пари від першого по п'ятий клас включно, називаються *механізмами нульового сімейства*. Ступінь рухомості таких механізмів визначається за формулою (1.3).

Механізми, в склад яких входять кінематичні пари від другого по п'ятий клас включно, називаються *механізмами першого сімейства*. Ступінь рухомості, таких механізмів визначається за формулою

$$W = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2. \quad (1.5)$$

Механізми, в склад яких входять кінематичні пари від третього по п'ятий клас включно, називаються **механізмами другого сімейства**. Ступінь рухомості визначається як

$$W = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3. \quad (1.6)$$

Плоскі механізми, в склад яких входять кінематичні пари четвертого та п'ятого класів відносяться до **третього сімейства**. Ступінь рухомості визначається за формулою (1.4).

Механізми, в склад яких входять тільки кінематичні пари п'ятого класу, відносяться до механізмів **четвертого сімейства**. Ступінь рухомості визначається

$$W = 2n - p_5. \quad (1.7)$$

1.6. Принцип утворення механізмів

Принцип утворення механізмів був вперше сформульований вченим Л. В. Ассуром і полягає в наступному.

Будь-який механізм може бути утворений шляхом послідовного присєднання до вхідної ланки (або кількох вхідних ланок) із стояком кінематичних ланцюгів з нульовою ступінню вільності.

Механізмом, відповідно до цього принципу, буде такий замкнений кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, у якого при заданих законах рухів вхідних ланок, всі інші ланки здійснюють доцільні, наперед заданні рухи.

Ведуча (вхідна) ланка із стояком називається **умовним механізмом I класу** (рис. 1.11). Ведуча ланка може виконувати обертальний (рис. 1.11, а) або поступальний (рис. 1.11, б) рух.

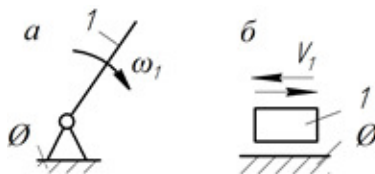


Рис. 1.11. Умовний механізм I класу

Ступінь вільності (рухомість) механізму характеризує число його ступенів вільності відносно ланки, прийнятої за нерухому (стояк) і повинен бути рівним числу вхідних (ведучих) ланок. Більшість механізмів мають одну ступінь вільності, тобто одну вхідну ланку. Деякі механізми мають два і більше ступенів вільності. Наприклад, зубчасті механізми з рухомими в просторі осями мають дві ступені вільності. До таких механізмів відносяться диференціальні механізми, які широко застосовуються, наприклад, у ведучих мостах автомобілів.

В загальному випадку число ступенів вільності механізму дорівнює числу вхідних (ведучих) ланок.

1.7. Групи Ассура та їх класифікація

Кінематичний ланцюг, ступінь вільності W якого рівний нулю, має назву *група Ассура*.

В сучасному машинобудуванні і автомобілебудуванні найчастіше застосовують саме плоскі механізми, ланки яких утворюють лише кінематичні пари IV і V класів. Розглянемо принципи їх структурної класифікації.

Використовуючи введені вище визначення, **принцип утворення механізмів** можна сформулювати інакше: будь-який механізм може бути утворений шляхом послідовного приєднання груп Ассура до умовного механізму I класу.

Отже, група Ассура має $W=0$. Тоді для кожної групи Ассура і права сторона рівняння Чебишева (1.4) буде рівна нулю, тобто:

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (1.8)$$

Якщо в склад плоского механізму входять тільки кінематичні пари V класу (наприклад, як у важільному механізмі), то $p_4 = 0$, а із (1.8) маємо, що:

$$n = \frac{2}{3} p_5. \quad (1.9)$$

Визначимо співвідношення між можливим числом рухомих ланок n і кінематичних пар V класу p_5 в групах Ассура (рис. 1.12) згідно (1.9), враховуючи, що це можуть бути тільки цілі числа. Результати наведено в таблиця 1.2.

Таблиця 1.2

Співвідношення n і p_5

n	2	4	6	8	...
p_5	3	6	9	12	...

Як бачимо із таблиця 1.2, найпростіша можлива група Ассура містить дві рухомі ланки, що утворюють три кінематичні пари V класу. Проте можливі і складніші побудови

Групи Ассура діляться на класи і порядки.

Клас групи визначається найвищим класом контура, що входить в дану групу. В свою чергу, **клас контура** визначається числом кінематичних пар, з яких утворюється.

Порядок групи визначається числом вільних елементів, якими група приєднується до основного механізму.

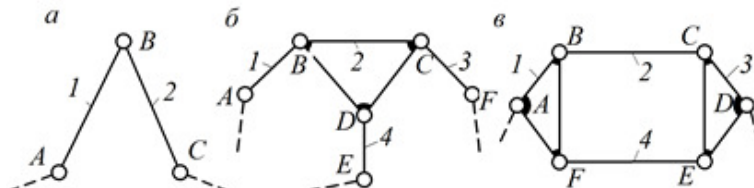


Рис. 1.12. Групи Ассура

Групи Ассура II класу II порядку діляться ще на **види**, в залежності від наявності і співвідношення обертальних і поступальних кінематичних пар (рис. 1.13). Подібно і як при визначенні виду кінематичної пари, перевага при класифікації груп Ассура надається обертальним кінематичним парам. Тобто прийнято, що якщо в групі Ассура II кл. II пор. всі три пари обертальні, то вона відноситься до I виду (рис. 1.13, a); якщо одну із крайніх

обертальних пар замінити поступальною, то – II виду (рис. 1.13, б); якщо середню обертальну пару замінити поступальною, то – III виду (рис. 1.13, в); якщо дві крайніх обертальних пари замінити поступальними, то – IV виду (рис. 1.13, з); якщо середню і одну із крайніх обертальних пар замінити поступальними, то – V виду (рис. 1.13, д).

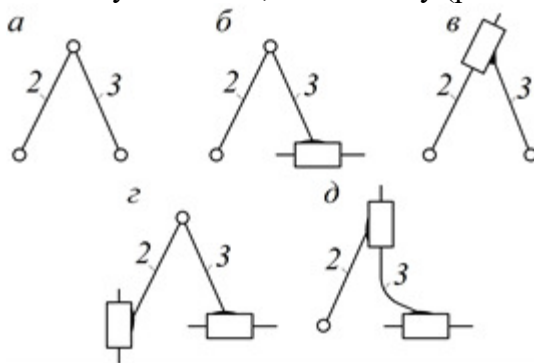


Рис. 1.13. Групи Ассура II класу II порядку

1.8. Класифікація механізмів. Послідовність структурного аналізу

Якщо до умовного механізму I класу приєднати групу Ассура II класу II порядку відповідного виду, отримаємо наступні механізми:

- 1 виду – *кривошипно-коромисловий* (рис. 1.14, а);
- 2 виду – *кривошипно-повзунний* (рис. 1.14, б);
- 3 виду – *кулісний* (рис. 1.14, в);
- 4 виду – *тангенсний* (рис. 1.14, з);
- 5 виду – *синусний* (рис. 1.14, д).

Клас механізму в цілому визначається найвищим класом групи Ассура, що входить в даний механізм.

Схема механізму, зображена без масштабу, називається **структурною**.

Схема механізму, зображена в масштабі, називається **кінематичною**.

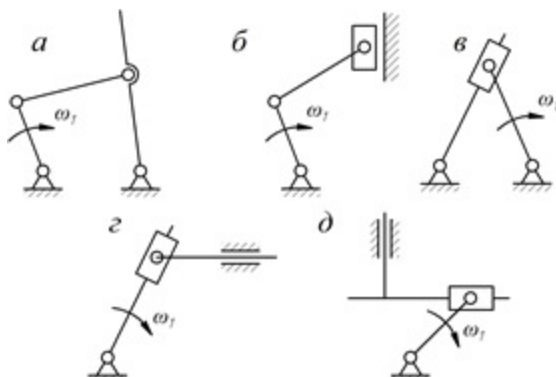


Рис. 1.14. Різновиди механізмів II кл. II порядку

Механізми, в склад яких входять тільки нижчі кінематичні пари, називаються *важільними*.

Розкладання механізму на групи Ассура проводиться в послідовності оберненій утворенню механізму, починаючи з найпростішої групи і так, щоб механізм, що залишається, був працездатним і не було розриву кінематичного ланцюга. Якщо не можливо виділити найпростішу групу Ассура, то виділяємо наступну за складністю групу і т.д.

Структурний аналіз механізмів проводиться в наступній *послідовності*:

1. Будується структурна схема, виділяють ланки та класифікують кінематичні пари.
2. Визначають ступінь рухомості механізму за формулою Чебишева;
3. Розкладають механізм на структурні одиниці: групи Ассура і механізм I класу в послідовності, оберненій утворенню механізму;
4. Визначають клас, порядок і вид кожної групи;
5. Визначають клас механізму в цілому.

1.9. Зайві ступені вільності та пасивні умови зв'язку

Під час проведення структурного аналізу механізму можна знайти ступені вільності чи умови зв'язку, які мають тільки доповнюючий конструктивний характер і не впливають на рух механізму [5].

Такі ступені вільності називаються *зайвими*, а зв'язки – *пасивними*.

Зайві ступені вільності є в кулачкового механізму з роликівим штовхачем (рис. 1.15).

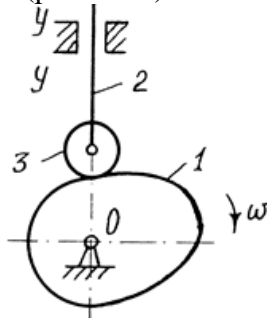


Рис. 1.15. Кулачковий механізм із зайвим ступенем вільності

Кулачок 1 такого механізму обертається навколо нерухомої осі O. Штовхач 2 рухається поступально відносно вертикальної напрямної. Ролик 3 може вільно обертатися навколо своєї осі, не впливаючи на характер руху кулачка і штовхача, і використовується тільки для зменшення сили тертя між ним, а відповідно і спрацювання ланок. Отже, можливість обертання ролика є зайвим ступенем вільності. Кінематика не зміниться, якщо ролик видалити і штовхач безпосередньо з'єднати з кулачком у кінематичну пару IV класу.

На рис. 1.16 показано механізм шарнірного чотирьохланковика.

Якщо паралельні ланки 1 і 3 з'єднати ланкою EF з двома обертальними парами, то ступінь вільності за формулою Чебишева: $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$, і в загальному випадку ця побудова буде нерухомою.

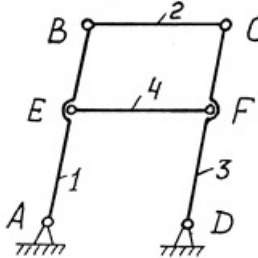


Рис. 1.16. Важільний механізм з пасивними зв'язками

Однак, якщо і ланка EF паралельна ланці BC, то контур EBCF завжди буде утворювати паралелограм, а механізм матиме один ступінь вільності, $W = 1$.

В даному випадку, ланка 4 потрібна для забезпечення певності руху, підвищенням жорсткості системи та поліпшенням розподіл зусиль. Отже, ланка 4 вносить необов'язкові пасивні зв'язки, що заважають аналізу.

Таким чином, під час проведення структурного та кінематичного досліджень механізмів усі зайві ступені вільності та пасивні умови зв'язку попередньо вилучити, умовно видаливши відповідні ланки.

1.10. Замінюючі механізми

Під час дослідження плоских механізмів з вищими кінематичними парами (наприклад, зубчастих) в багатьох випадках зручно умовно замінювати вищі пари нижчими, тобто утворити замінюючий механізм.

Замінюючим механізмом називається такий механізм, у якого вищі кінематичні пари замінені нижчими і який еквівалентний за структурою та кінематикою в даний момент часу, основному механізму.

Порядок побудови такого механізму розглянемо на прикладі механізмів з вищою кінематичною парою, зображених на рис. 1.17 [2].

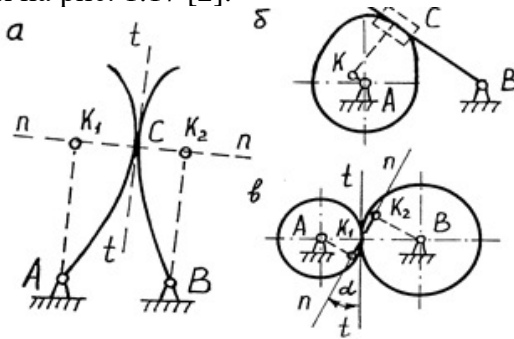


Рис. 1.17. Замінюючі механізми

В точці C дотикання двох ланок, які утворюють вищу кінематичну пару (рис. 1.17, a) проведем загальну нормаль $n - n$ до обох профілів ланок. На лінії $n - n$ знаходяться центри кривизни профілів K_1 і K_2 . В точках K_1 і K_2 ставимо обертальні кінематичні пари V класу і з'єднуємо їх допоміжними ланками з центрами A і B . Утворений кривошипно-коромисловий механізм AK_1K_2B і буде замінюючим.

Якщо одна із ланок має прямолінійний профіль, тобто центр його кривизни знаходиться в нескінченності (рис. 1.17, b), то в т. C ставиться поступальна кінематична пара V класу. Отримуємо замінюючий кулісний механізм $AKCB$.

Побудова замінюючого механізму для зубчастої передачі показана на (рис. 1.17, c). Із центрів A і B обертання зубчастих коліс опустимо перпендикуляри на лінію зачеплення $n-n$, отримаємо точки K_1 і K_2 . В точках K_1 і K_2 ставимо обертальні кінематичні пари і з'єднаємо їх між собою та з центрами A і B допоміжними ланками. Механізм AK_1K_2B і буде замінюючим.

Запитання для перевірки знань по темі 1:

1. Механізмом називається – ...
2. Машиною називається – ...
3. Кінематичною парою називається – ...
4. Вхідною (ведучою) називається – ...
5. Як визначається клас кінематичної пари?
6. Кінематичним ланцюгом називається – ...
7. Групою Ассура називається – ...
8. Як визначається клас групи Ассура?
9. Як визначається порядок групи Ассура?
10. Як визначається вид групи Ассура?
11. Запишіть формулу Чебишева для плоского механізму.
12. Запишіть формулу Сомова-Малишева для просторового механізму.
13. Кривошипно-коромисловий механізм отримаємо, якщо до механізму I класу приєднати ...?
14. Кривошипно-повзунний механізм отримаємо, якщо до механізму I класу приєднати ...?
15. Кривошипно-кулісний механізм отримаємо, якщо до механізму I класу приєднати ...?
16. Тангенсний механізм отримаємо, якщо до механізму I класу приєднати ...?
17. Синусний механізм отримаємо, якщо до механізму I класу приєднати ...?
18. Важільний механізм – це ...?
19. Як визначається клас механізму в цілому?
20. Що показує ступінь вільності механізму?
21. Коли виникають зайві ступені вільності та пасивні умови зв'язку?
22. Для чого будують замінюючі механізми?

ТЕМА 2. Плоскі важільні механізми

- 2.1. Основні задачі кінематичного аналізу
- 2.2. Визначення положень ланок механізму та траєкторій характерних точок ланок
- 2.3. Кінематичні діаграми механізмів
- 2.4. Кінематичний аналіз механізмів методом планів

2.1. Основні задачі кінематичного аналізу

Кінематичний аналіз (кінематичне дослідження) механізму проводиться з метою вивчення параметрів руху його ланок. При цьому сили, які впливають на рух, не враховують.

При проведенні будь-якого дослідження вчені завжди роблять певні припущення, для спрощення розрахунків. У кінематичному аналізі механізмів вважають, що кутова швидкість вхідної ланки, при усталеному русі, постійна. Це в загальному випадку на практиці не так, адже на рух вхідної ланки впливають різні фактори: різка характеристика двигуна, нерівномірне навантаження робочого органу машини, переміщення власної маси, що в результаті можуть відхилити величину кутової швидкості від бажаного номінального значення. Однак дане припущення дозволяє провести дослідження в першому наближенні з достатньою точністю.

Задачі кінематичного дослідження механізмів:

- визначення переміщень ланок і траєкторій їх характерних точок;
- визначення швидкостей окремих точок ланок і кутових швидкостей ланок;
- визначення прискорень окремих точок ланок і кутових прискорень ланок.

Існують аналітичні і графоаналітичні методи визначення кінематичних параметрів руху. **Аналітичні** методи вимагають глибокого розуміння математичних

методів та приводять до громіздких формул, а отже і складних розв'язків. Однак отримані результати є більш точнішими і їх можна запрограмувати на ПК та повторно використовувати для розрахунку подібних механізмів, змінюючи тільки визначені параметри. **Графо-аналітичні методи** дають порівняно швидкі, прості і наочні розв'язання для конкретного механізму чи його положення, але якщо нам потрібно змінити розміри ланок чи їх розміщення, побудову потрібно виконати повторно.

До основних графо-аналітичних методів дослідження відносяться: **метод кінематичних діаграм** та **метод планів** положень, швидкостей та прискорень.

Більшість механізмів має одну ступінь вільності. Переміщення, швидкості і прискорення вихідних ланок і довільних точок механізму, у такому випадку, залежать від **закону руху** його єдиної вхідної ланки.

Вхідна ланка може утворювати із стояком обертальну (вал електромотора), або поступальну (циліндр двигуна внутрішнього згорання) кінематичну пару. В першому випадку закон руху вхідної ланки задається аналітично у вигляді рівняння, що виражає залежність кута повороту, чи кутової швидкості вхідної ланки від часу, наприклад $\varphi = \varphi(t)$. В другому випадку, закон можна задати у вигляді рівняння що виражає залежність переміщення (в загальному вигляді, $S = S(t)$), швидкості чи прискорення вхідної ланки від часу.

Такі закони називаються **функціями переміщень** вхідних ланок. Їх можна задати і **графічно** у вигляді графіків кривих в координатах кутів повороту φ , або переміщення S , відкладених по вертикальній осі (ординат), та часу t – по горизонтальній осі (абсцис), у заданих масштабах. Користуючись графіками легко визначити, наприклад, числові значення кутів повороту φ (рис. 2.1, а), або переміщень S за довільний відрізок часу (рис. 2.1, б).

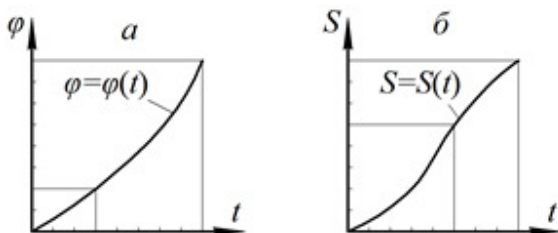


Рис. 2.1. Графіки переміщення вхідної ланки:
a – кутові переміщення; *б* – лінійні переміщення

На практиці, враховуючи згадане вище припущення, при дослідженні механізмів закон руху вхідної ланки приймається лінійним, тобто вважається, що швидкість руху вхідної ланки є сталою величиною, що дорівнює проектній середній швидкості, яка відповідає необхідним умовам роботи механізму.

2.2. Визначення положень ланок механізму та траєкторій характерних точок ланок

Геометрична характеристика механізмів з одним ступенем вільності встановлює залежність між геометричними параметрами механізму (кутами повороту ланок, переміщеннями точок), що взаємно змінюються в процесі руху механізму.

Для *механізмів з коливальним рухом* вихідної ланки це буде залежність між кутом Ψ повороту цієї ланки та кутом φ повороту вхідної ланки, тобто:

$$\Psi = f(\varphi). \quad (2.1)$$

Для *механізмів із зворотно-поступальним прямолінійним рухом* вихідної ланки

$$S = f(\varphi), \quad (2.2)$$

де S – це переміщення вихідної ланки.

Наведені залежності називаються *функціями положення* – геометрична характеристика механізму, яка

визначається будовою механізму та лінійними розмірами його ланок і не залежить від швидкостей ланок. Функції положення (2.1) і (2.2) навіть для найпростіших важільних механізмів виражаються складними рівняннями. Значно простіше дістати їх у графічній формі розміткою траєкторій **методом засічок**.

Для розв'язання цієї задачі повинні бути **задані**:

- кінематична схема механізму;
- необхідні розміри ланок;
- закон руху (функція переміщення) вхідної ланки.

При визначенні положень механізму приймається **масштаб** μ_l і викреслюється його кінематична схема. Під масштабом (**масштабним коефіцієнтом**) розуміють число, що показує, скільки одиниць дійсної величини ланки (довжини ланки в даному випадку) припадає на 1 мм зображення на кресленні

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}, \left(\frac{m}{mm} \right), \quad (2.3)$$

де l_{OA} – дійсна довжина ланки в м, OA – довжина зображення ланки на кресленні в мм.

Побудова траєкторії т. В на вихідній ланці (рис. 2.2) проводиться в наступній послідовності:

- викреслюється механізм в кількох положеннях в межах одного циклу;
- в накреслених положеннях механізму відмічається положення точки, траєкторія якої будується;
- знайдені положення точки з'єднують послідовно плавною кривою.

При викреслюванні положень механізму за початкове вибираємо таке положення вхідної ланки, при якому вихідна ланка (т. В) займає крайнє положення на початку робочого ходу. Далі ділимо коло, що описує т. А кривошипа, на довільне число рівних частин. Чим більше таких частин тим точнішими будуть результати. Будуємо

траєкторію т. В, тобто знаходимо її положення, що відповідають обраним положенням т. А. В кожному положенні механізму відмічаємо положення точки S_2 на шатуні. Отримані точки з'єднаємо плавною кривою. Це і буде траєкторія точки S_2 .

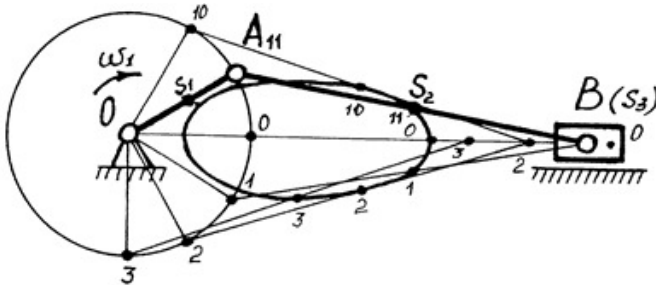


Рис. 2.2. Побудова траєкторії точки

Інколи, при виконанні побудови кінематичної схеми, відомі тільки бажані координати крайніх положень вихідної ланки, та нерухомих осей обертових ланок. Тоді невідомі розміри інших ланок знаходяться геометричною побудовою (*синтез механізму*).

2.3. Кінематичні діаграми механізмів

Однією із проблем, що вирішується в кінематичному аналізі механізмів є дослідження руху механізму за повний цикл. Графічним методом, знаходження переміщень, швидкостей та прискорень проводиться для ряду положень механізму, на які розбивається один цикл його руху.

Кінематичні діаграми представляють собою графічне зображення зміни одного із кінематичних параметрів точки ланки (переміщення, швидкості або прискорення) в функції часу, або ж в функції переміщення вхідної ланки (функції узагальненої координати).

Розглянемо приклад побудови кінематичних діаграм для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.3).

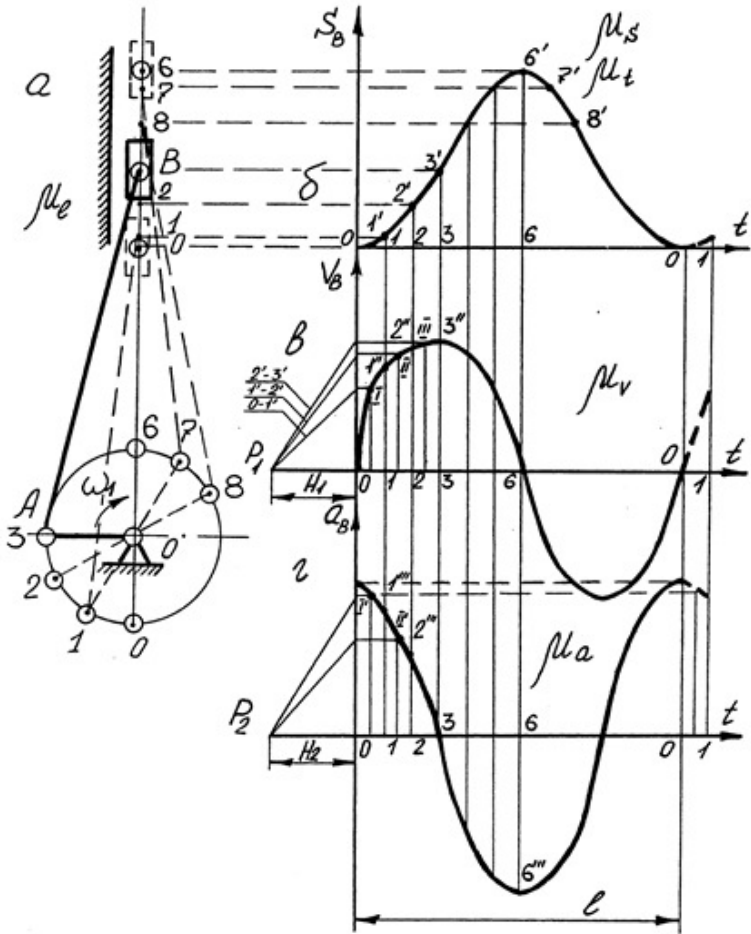


Рис. 2.3. Побудова кінематичних діаграм для т. В:
 а – кінематична схема механізму; б – діаграма переміщень;
 в – діаграма швидкостей; г – діаграма прискорень

1. Накреслимо кінематичну схему в *масштабі* μ (рис. 2.3, а). За початкове положення механізму, для даного випадку, приймаємо крайнє нижнє положення т. В повзуна, де розпочинається робочий хід повзуна знизу ввєрх.

2. Будуємо механізм в декількох, наприклад, дванадцяти положеннях (чим більше положень, тим точнїшою будуть отриманї діаграми). Для цього, спочатку, розділимо траєкторію т. А кривошипа на 12 частин, починаючи з крайнього (нульового), при якому кривошип і шатун складаються в одну лінію з розташуванням кривошипа вертикально вниз, що і забезпечує знаходження т. В повзуна у крайньому нижньому положенні.

3. Враховуючи, що т. В завжди віддалена від т. А на довжину шатуна, *методом засїчок* будуємо траєкторію переміщення т. В на вертикальній напрямній.

4. Для побудови діаграми переміщень креслимо осї координат $S_B - t$ (рис. 2.3, б).

5. На осї абсцис відкладаємо довільний відрізок l в мм, що зображає час T одного повного повороту кривошипа в певному масштабі μ_t . Так як, відповідно до зробленого припущення, вхідна ланка – кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю, то кожна із 12 частин, на які була розбита її траєкторія, т. А пройде за рівні проміжки часу, рівні $T/12$. Тому, відрізок l ділимо на 12 рівних частин, що відповідають 12 положенням кривошипа, і у для кожного положення по осї ординат S_B відкладаємо відповіднє їм переміщення т. В від її крайнього положення, замїряє на кінематичній схемі. З'єднавши послїдовно плавною кривою ці точки, отримаємо *діаграму переміщення* т. В в залежності від часу повороту кривошипа $S_B = S_B(t)$. Час T в секундах одного повного оберту кривошипа

$$T = \frac{60}{n_1} = \mu_t l, \quad (2.4)$$

де n_1 – частота обертання кривошипа в об/хв.

Із (2.4) маємо **масштаб часу**

$$\mu_t = \frac{60}{n_1 l} \left(\frac{c}{\text{мм}} \right). \quad (2.5)$$

Масштаб переміщення точки В

$$\mu_s = t \mu_t, \quad (2.6)$$

де t – коефіцієнт зменшення зображення переміщення на діаграмі: $t = 1$, якщо величини переміщення т. В відкладені як і заміряні зі схеми механізму; $t = n$ якщо заміряні переміщення т. В зменшують в n разів при переносі на діаграму; $t = 1/n$ якщо переміщення т. В збільшують в n разів.

6. Як відомо, функцію швидкості точки можна отримати аналітично продиференціювавши функцію переміщення. Аналогічно, **діаграму швидкості** т. В отримаємо, скориставшись методом **графічного диференціювання** діаграми її переміщення (застосуємо диференціювання **методом хорд**). Для побудови діаграми швидкості (рис. 2.3, в) виконуємо наступне:

- криву діаграми переміщень розіб'ємо на хорди 0-1', 1'-2', ..., обмежені відповідно ділянками по осі абсцис 0-1, 1-2, ...;

- безпосередньо під діаграмою $S_B - t$ будуємо осі координат $V_B - t$ і на продовженні осі абсцис (t) вліво від початку координат відкладемо т. P_1 на довільній відстань H_1 . Чим більша величина H_1 , яка має назву **полюсна відстань**, тим більші габарити по вертикалі буде мати майбутня діаграма швидкостей;

- із т. P_1 проводим промені, паралельно кожній хорді 0-1', 1'-2', ... кривої $S_B - t$, взяті з відповідних ділянок 0-1, 1-2, Ці промені, перетнувши вісь ординат V_B , покажуть на ній значення (точки), які пропорційні середній швидкості т. В на відповідних ділянках 0-1, 1-2, ... діаграми;

- перенесемо ці точки горизонтально вправо на середини відповідних ділянок отримаємо точки I, II, ...;

- з'єднаємо точки I, II, ... плавною кривою; ця крива і буде діаграмою швидкості $V_B - t$. Зверніть увагу, що точкам екстремуму функції переміщення повинні відповідати нульові значення функції швидкості, тобто для положень де буде максимальне і мінімальне значення переміщення, крива швидкості буде перетинати горизонтальну вісь діаграми.

7. **Діаграму прискорення** т. В $a_B - t$ (рис. 2.3, з) отримаємо так само, виконавши графічне диференціювання діаграми швидкостей $V_B - t$. Зауважте, що при побудові діаграми прискорень описаним вище методом не можливо знайти точки початку і кінця циклу діаграм (крива не буде виходити з початку координат). Для знаходження цих точок потрібно продовжити осі абсцис і додатково побудувати частину (хоча б одне положення) діаграми переміщення і діаграми швидкостей для наступного циклу. З'єднавши плавною кривою точку, що відповідає останній ділянці першого циклу з точкою, що відповідає першій ділянці наступного циклу, отримаємо величину прискорення в нульовому положенні механізму там де крива перетне межу ділянок. Отримане значення переносимо і на початок першого циклу та остаточно побудуємо повну криву прискорення т. В.

Масштаб по осям ординат визначаємо за формулами:

- для діаграми **швидкостей**

$$\mu_V = \frac{\mu_S}{\mu_t H_1}, \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right); \quad (2.7)$$

- для діаграми **прискорень**

$$\mu_a = \frac{\mu_V}{\mu_t H_2}, \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right), \quad (2.8)$$

де H_1 і H_2 – відрізки в мм, взяті з креслення.

Дійсну величину швидкості та прискорення т. В в будь-якому положенні механізму можна визначити шляхом вимірювання висоти кривої у бажаному положенні механізму та перемноживши її на відповідний масштаб:

$$V_{B1} = 1-1'' \cdot \mu_V; V_{B2} = 2-2'' \cdot \mu_V; \quad (2.9)$$

$$a_{B1} = 1-1''' \cdot \mu_a; a_{B2} = 2-2''' \cdot \mu_a. \quad (2.10)$$

Таким чином, отримаємо швидкість та прискорення точки В безперервно за цикл роботи механізму.

Побудова діаграми переміщення т. С коромисла кривошипно-коромислового механізму в залежності від часу t повороту кривошипа $S_C = S_C(t)$ виконується подібно і показана на рис. 2.4.

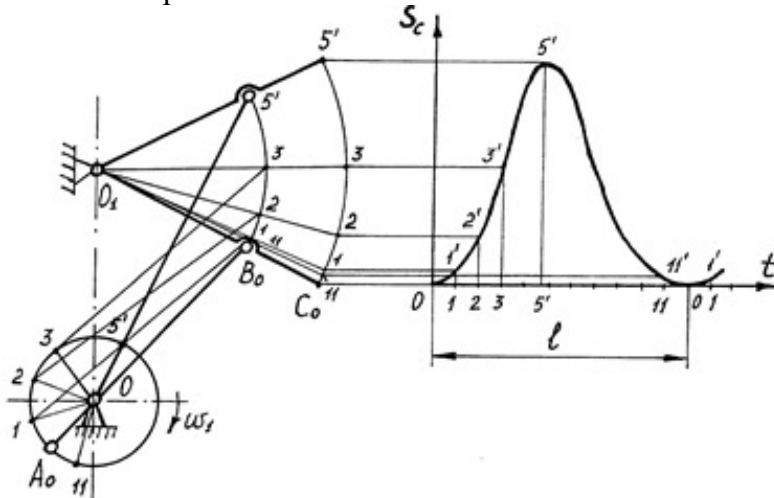


Рис. 2.4. Кривошипно-коромисловий механізм

Діаграми швидкості та прискорення т. С можна отримати послідовно, використавши метод графічного диференціювання спочатку діаграми переміщення, а потім отриманої діаграми швидкостей. Алгоритм побудови цих діаграм та визначення їх масштабних коефіцієнтів

аналогічний описаному вище для побудови діаграм швидкості та прискорення для кривошипно-повзунного механізму.

2.4. Кінематичний аналіз механізмів методом планів

2.4.1. Визначення швидкостей окремих точок груп Ассура та кутових швидкостей ланок

Крім визначення кінематичних параметрів окремих точок механізму за повний цикл його руху, існує задача знаходження швидкостей та прискорень усіх точок механізму в конкретний момент його руху.

Для Ассура II класу, II порядку вирішення цієї задачі можна виконувати методами планів швидкостей та прискорень. Вивчення цього методу зручніше розпочати окремо для різних видів груп II класу. Абсолютні швидкості та прискорення тих елементів ланок, якими група приєднується до основного механізму будемо вважати відомими. Визначимо швидкості та прискорення окремих точок і кутові швидкості та прискорення ланок групи.

Розглянемо групу Ассура II класу II порядку I виду, яка утворена двома ланками, що несуть три обертальні кінематичні пари (рис. 2.5, а).

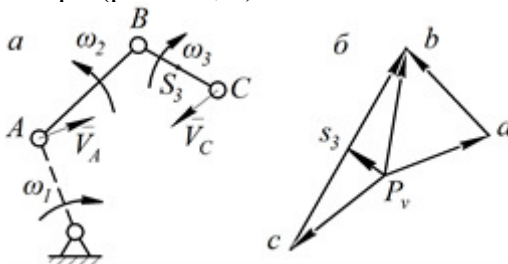


Рис. 2.5. Група Ассура II класу II порядку I виду:
а – кінематична схема; б – план швидкостей

Отже, вектори швидкостей точок А і С, що позначають обертальні кінематичні пари, якими група Ассура приєднуються до решти механізму, відомі.

Знайдемо вектор швидкості т. В. Для цього розглянемо рух т. В спочатку відносно т. А, як частина руху ланки АВ, а потім відносно т. С з ланкою ВС. Складемо векторні рівняння складного руху для обох випадків, та запишемо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \\ \vec{V}_B = \vec{V}_C + \vec{V}_{BC}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Вектори швидкостей \vec{V}_{BA} і \vec{V}_{BC} руху точки В відносно точок А і С, відповідно, перпендикулярні відповідним ланкам АВ і ВС.

Проведемо додавання векторів згідно системи рівнянь (2.11). Для цього вибираємо, довільну точку p_V – полюс плану швидкостей (рис. 2.5, б) і з неї відкладемо напрямлені відрізки відомих векторів швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_C . На кінцях відрізків позначимо точки a і c . Побудова виконується в *масштабі* μ_V , який показує, скільки м/с дійсної величини швидкості припадає на 1 мм її зображення на плані

$$\mu_V = \frac{V_A}{p_V a}, \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right). \quad (2.12)$$

Далі із кінця побудованих векторів, точок a і c , відповідно до «правила трикутника», проведемо лінії дії векторів \vec{V}_{BA} і \vec{V}_{BC} перпендикулярно до ланок відповідно АВ і СВ. Місце перетину цих векторів дає точку b . З'єднаємо т. b з точкою p_V . Відрізок $p_V b$ зображає вектор повної швидкості т. В.

Зв'язок між дійсними швидкостями точок і відповідними відрізками на плані швидкостей буде:

$$\begin{aligned} V_{BA} &= ab \cdot \mu_V; \\ V_{BC} &= cb \cdot \mu_V; \\ V_B &= p_V b \cdot \mu_V. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Отриманий багатокутник із векторів швидкостей характерних точок групи і є її планом швидкостей. За допомогою цього плану можна знайти швидкість будь-якої точки на даному механізмі в даному положенні. Визначимо швидкість довільної точки S_3 , що лежить на ланці CB

$$\vec{V}_{S_3} = \vec{V}_C + \vec{V}_{S_3C}. \quad (2.14)$$

Із рівняння (2.14) видно, що напрям вектора швидкості \vec{V}_{S_3C} співпадає з напрямом вектора \vec{V}_{BC} . Очевидно, до відрізків на плані cS_3 співпадає по напрямку з відрізком cb . Величину відрізка знайдемо, використовуючи умови:

$$V_{BC} = \omega_3 \cdot l_{CB}; \quad (2.15)$$

$$V_{S_3C} = \omega_3 \cdot l_{CS_3}. \quad (2.16)$$

Розділимо почленно (2.16) та (2.15)

$$\frac{V_{S_3C}}{V_{BC}} = \frac{l_{CS_3}}{l_{CB}}. \quad (2.17)$$

Замінімо швидкості V_{S_3C} і V_{BC} відрізками із плану, отримаємо

$$\frac{cS_3 \cdot \mu_V}{cb \cdot \mu_V} = \frac{l_{CS_3}}{l_{CB}}. \quad (2.18)$$

Із (2.18) маємо:

$$cS_3 = cb \frac{l_{CS_3}}{l_{CB}}. \quad (2.19)$$

Отримавши величини швидкостей характерних точок, знайдемо кутові швидкості ланок ω_2 і ω_3 :

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}; \quad \omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{CB}}. \quad (2.20)$$

Напрямок кутової швидкості ланки співпадає з напрямом вектора відомої відносної швидкості точки цієї ланки перенесеної у відповідну точку. Так вектор \vec{ab} з плану швидкостей, перенесений в т. В на кінематичній схемі групи, обертає ланку АВ проти годинникової стрілки, а вектор \vec{cb} обертає ланку ВС за годинниковою стрілкою.

Побудову планів швидкостей для груп Ассура II класу II порядку другого та третього видів розглянемо пізніше на наступному прикладі конкретного вільного механізму.

2.4.2. Визначення прискорень окремих точок груп Ассура та кутових прискорень ланок

Побудова планів для визначення прискорень окремих точок ланок груп Ассура II класу II порядку виконується подібно до побудови планів швидкостей. Розглянемо групу Ассура першого виду (рис. 2.6, а).

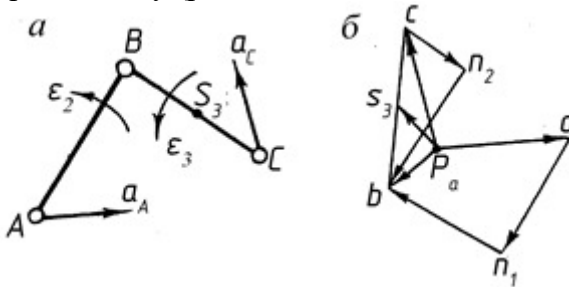


Рис. 2.6. Група Ассура II класу II порядку I виду: а – кінематична схема; б – план прискорень

Вважаємо, що вектори \vec{a}_A і \vec{a}_C повних прискорень точок А і С відомі. План швидкостей побудований раніше і швидкості всіх характерних точок знайдені. Для визначення прискорення т. В розглянемо її рух відносно точок А і С. Складемо векторні рівняння:

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t; \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^t. \end{cases} \quad (2.21)$$

де \vec{a}_{BA}^n і \vec{a}_{BC}^n – нормальні прискорення відносного руху; \vec{a}_{BA}^t і \vec{a}_{BC}^t – тангенціальні прискорення у тому ж русі. Знайдемо величини нормальних прискорень за відомими формулами:

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}; \quad a_{BC}^n = \frac{V_{BC}^2}{l_{CB}}. \quad (2.22)$$

План прискорень (рис. 2.6, б) будуємо в масштабі μ_a , який показує число м/с^2 величини дійсного прискорення, яке припадає на 1 мм його зображення на плані.

$$\mu_a = \frac{a_A}{p_a a}, \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right). \quad (2.23)$$

Вектор нормального прискорення точки, як відомо напрямлений від точки до миттєвого центра кривизни її траєкторії. В нашому випадку, \vec{a}_{BA}^n буде напрямлений від т. В до т. А, паралельно ланці АВ, а вектор прискорення \vec{a}_{BC}^n – від т. В до т. С паралельно ВС. Вектори тангенціальних прискорень \vec{a}_{BA}^t і \vec{a}_{BC}^t направлені перпендикулярно до відповідних нормальних. Виконаємо графічне складання векторів згідно системи рівнянь (2.21). Для цього вибираємо довільну точку p_a – полюс плану прискорень (рис. 2.6, б) із неї відкладемо вектори відомих прискорень \vec{a}_A і \vec{a}_C в раніше прийнятому масштабі μ_a . Отримаємо точки a і c .

Далі із кінця векторів, в отриманих точках a і c , відкладемо вектори \vec{a}_{BA}^n і \vec{a}_{BC}^n , довжиною згідно (2.22) в масштабі μ_a , і в напрямку описаному вище. На кінцях побудованих векторів позначаємо точки n_1 і n_2 . Із точок n_1 і n_2 проводим прямі по напрямку векторів тангенціальних прискорень \vec{a}_{BA}^t і \vec{a}_{BC}^t (перпендикулярно відповідним нормальним прискоренням). Місце перетину цих прямих дає точку b . З'єднавши т. b з полюсом т. p_a отримаємо повне прискорення т. В – \vec{a}_B .

Дійсні прискорення точок знайдемо:

$$\begin{aligned} a_{BA}^t &= n_1 b \cdot \mu_a; \\ a_{BC} &= c b \cdot \mu_a; \\ a_B &= p_a b \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Прискорення довільної т. S_3 знайдемо із співвідношення, аналогічно знаходженню швидкості т. S_3

$$c s_3 = c b \frac{l_{CS_3}}{l_{CB}}. \quad (2.25)$$

Знайдемо кутові прискорення ε_2 і ε_3 ланок АВ і ВС

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^{\tau}}{l_{AB}}; \varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^{\tau}}{l_{CB}}. \quad (2.26)$$

Для визначення напрямів кутових прискорень ланок переносимо з плану прискорень вектор відповідного тангенціального прискорення у т. В. В нашому випадку і \vec{a}_{BA}^{τ} обертає ланку АВ і \vec{a}_{BC}^{τ} обертає ланку ВС проти годинникової стрілки. Отже, ε_2 і ε_3 направлені проти годинникової стрілки.

Побудову планів прискорень для груп Ассура II класу II порядку другого та третього видів розглянемо в наступному питанні на прикладі конкретного важільного механізму.

2.4.3. Плани швидкостей і прискорень важільного механізму

Метод планів широко застосовується при дослідженні важільних механізмів. Розглянемо побудову планів на прикладі конкретного механізму, наприклад стругального верстату (рис. 2.7, а).

Побудова **плану швидкостей** механізму проводиться в послідовності його утворення. Спочатку визначаються швидкості т. А_{1,2}, що належить кривошипу 1 та, для наведеного механізму ковзаючому каменю 2, і далі визначаються швидкості решти характерних точок груп Ассура в послідовності їх приєднання до основного механізму. Кутова швидкість кривошипа вважається сталою, згідно припущення, описаного в розд. 2.1.

Вихідними даними для цієї задачі є відомий закон руху ведучої ланки, та розміри всіх ланок механізму. Якщо розміри ланок не відомі, попередньо необхідно виконати кінематичний синтез (побудову) механізму.

Викреслюємо кінематичну схему механізму (рис. 2.7, а) в масштабі μ_l

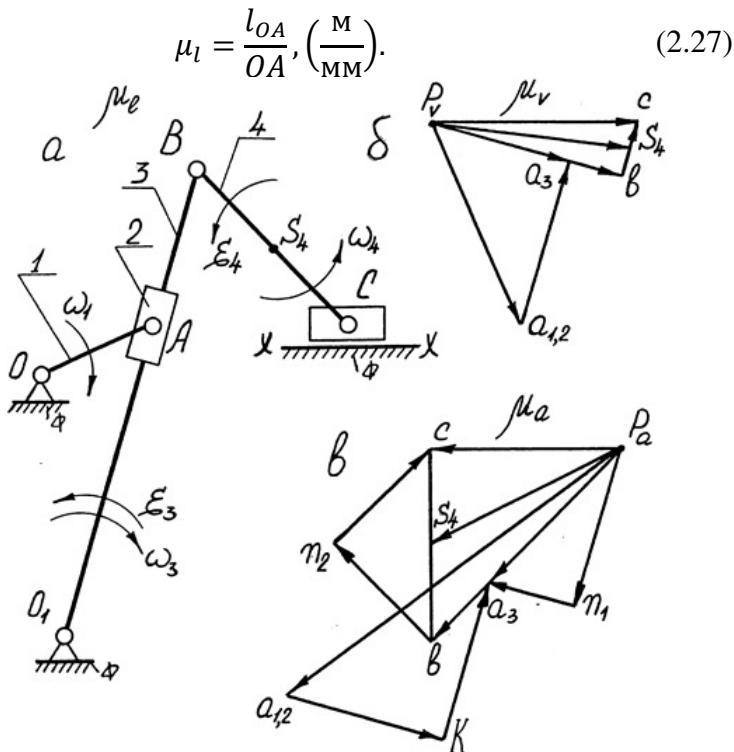


Рис. 2.7. Механізм стругального верстату:
 а – кінематична схема; б – план швидкостей;
 в – план прискорень

Будуємо план швидкостей (рис. 2.7, б). Для цього визначимо величину швидкості т. \$A_{1,2}\$, що належить одночасно кривошипу 1 і ковзаючому каменю 2

$$V_{A_{1,2}O} = \omega_1 \cdot l_{OA}. \quad (2.28)$$

Вибираємо масштаб плану швидкостей

$$\mu_v = \frac{V_{A_{1,2}}}{p_v a_{1,2}}, \left(\frac{\text{М/с}}{\text{ММ}} \right), \quad (2.29)$$

де \$p_v a_{1,2}\$ – відрізок на плані швидкостей в мм, що зображає повну швидкість \$V_{A_{1,2}}\$ в м/с. На даному етапі можна задатись

довільним розміром цього відрізка і знайти відповідний масштаб з (2.29), або прийняти зручний масштаб і будувати відрізок $p_v a_{1,2}$ в ньому.

Вектор швидкості $\vec{V}_{A_{1,2}}$ напрямлений в бік кутової швидкості ω_1 , перпендикулярно до ланки OA. Вибераємо довільну т. p_v – полюс плану швидкостей і з неї відкладаємо у вказаному вище напрямку вектор $\overline{p_v a_{1,2}}$.

Визначимо швидкість т. A_3 , що належить кулісі O_1B і в даний момент співпадає з т. $A_{1,2}$. Розглянемо рух т. A_3 відносно т. $A_{1,2}$ і відносно т. O_1 . Складемо векторні рівняння:

$$\begin{cases} \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{A_{1,2}} + \vec{V}_{A_3 A_{1,2}}; \\ \vec{V}_{A_3} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{A_3 O_1}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Із т. $a_{1,2}$ проведемо лінію дії вектору швидкості $\vec{V}_{A_3 A_{1,2}}$, паралельно ланці O_1B , а із т. p_v – лінію дії вектору швидкості $\vec{V}_{A_3 O_1}$, перпендикулярно ланці O_1B . Місце перетину цих прямих дає т. a_3 . З'єднавши т. a_3 з полюсом p_v отримаємо вектор \vec{V}_{A_3} повної швидкості т. A_3 .

Визначимо відрізок $p_v b$, що зображає швидкість т. B, використавши відношення

$$p_v b = p_v a_3 \frac{l_{O_1 B}}{l_{O_1 A}}. \quad (2.31)$$

Точка b лежить на продовженні відрізка $p_v a_3$.

Подібно знайдемо швидкість т. C. Розглянемо рух т. C відносно т. B і відносно горизонтальної напрямної x-x. Складемо векторні рівняння:

$$\begin{cases} \vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}; \\ \vec{V}_C = \vec{V}_{x-x} + \vec{V}_{Bx-x}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Із т.с проведемо пряму в напрямі вектору швидкості \vec{V}_{CB} , тобто перпендикулярно ланці BC, а із p_v – пряму,

паралельно напрямній х-х. Місце перетину цих прямих дає т. с. Вектор $p_v c$ показує повну швидкість т. С.

Користуючись побудованим планом, визначимо повну швидкість т. S_4 на ланці ВС. Для цього знайдемо відрізок bs_4 із співвідношення

$$bs_4 = cb \frac{l_{BS_4}}{l_{CB}}. \quad (2.33)$$

З'єднавши т. s_4 з полюсом p_v , отримаємо зображення вектора швидкості т. S_4 .

Маючи величини зображень, визначимо дійсні швидкості всіх точок:

$$\begin{aligned} V_{A_3} &= p_v a_3 \cdot \mu_V; \\ V_{A_3 A_{1,2}} &= a_3 a_{1,2} \cdot \mu_V; \\ V_B &= p_v b \cdot \mu_V; \\ V_C &= p_v c \cdot \mu_V; \\ V_{CB} &= bc \cdot \mu_V. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Визначимо **кутові швидкості** всіх ланок за величиною:

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_{O_1 B}}; \quad \omega_4 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}}. \quad (2.35)$$

Для визначення напрямку кутових швидкостей ω_3 і ω_4 перенесемо вектори лінійних швидкостей \vec{V}_B в т.В і \vec{V}_{CB} в т.С. Куткові швидкості будуть напрямлені в бік відповідних векторів лінійних швидкостей, як показано на рис.2.7, а.

План прискорень механізму (рис. 2.7, в) будемо в подібній послідовності.

Визначаємо величину прискорення т. $A_{1,2}$. Оскільки ω_1 вважаємо сталою, то і швидкість т. $A_{1,2}$ не змінюється з часом за величиною, а отже тангенціальна складова її прискорення рівна нулю. Однак змінюватиметься напрямок вектора швидкості, тому повне прискорення т. $A_{1,2}$ буде

рівне нормальній його складовій, яка визначається через задану кутову швидкість, як:

$$a_{A_{1,2}} = a_{A_{1,2}}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}. \quad (2.36)$$

Вибираємо масштаб плану прискорень

$$\mu_a = \frac{a_{A_{1,2}}}{p_a a_{1,2}}, \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right), \quad (2.37)$$

де $p_a a_{1,2}$ – відрізок на плані прискорень в мм, що відповідає величині прискорення $a_{A_{1,2}}$ в м/с^2 . Вектор прискорення $a_{A_{1,2}}$ направлений в бік його нормальної складової, тобто від т. $A_{1,2}$ до т. О паралельно кривошипу ОА.

Вибираємо довільну т. p_a – полюс плану прискорень із неї відкладемо відрізок $p_a a_{1,2}$ в напрямку в $\overrightarrow{a_{A_{1,2}}}$.

Визначимо прискорення т. A_3 . Розглянемо рух т. A_3 відносно т. $A_{1,2}$ і т. O_1 . Складемо векторні рівняння:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{A_{1,2}} + \vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^k + \vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r; \\ \vec{a}_{A_3} = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{A_3 O_1}^n + \vec{a}_{A_3 O_1}^{\tau}. \end{cases} \quad (2.38)$$

Визначимо прискорення Кориоліса і нормальне прискорення за відомими формулами [1]:

$$\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^k = 2\omega_3 V_{A_3 A_{1,2}}; \quad \vec{a}_{A_3 O_1}^n = \frac{V_{A_3 O_1}^2}{l_{O_1 A}}. \quad (2.39)$$

Напрямок прискорення Кориоліса збігається з напрямком, повернутого на 90° в бік кутової швидкості ω_3 вектора швидкості $V_{A_3 A_{1,2}}$. Напрямок відносного прискорення $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r$ паралельний ланці $O_1 B$.

Із т. $a_{1,2}$ відкладемо вектор прискорення Кориоліса, отримаємо т. k , через т. k проведемо пряму в напрямі відносного прискорення $\vec{a}_{A_3 A_{1,2}}^r$, паралельно ланці $O_1 B$. Із т. p_a відкладемо вектор нормального прискорення, напрямлений від т. A_3 до т. O_1 паралельно ланці $O_1 B$. Кінець вектора позначаємо т. n_1 . Через т. n_1 проведемо лінію дії тангенціального прискорення $\vec{a}_{A_3 O_1}^{\tau}$, перпендикулярно ланці $O_1 B$. Місце перетину ліній дії відносного і тангенціального

прискорень позначимо т. a_3 . і з'єднаємо з полюсом p_a .
Відрізок $p_a a_3$, зображає вектор повного прискорення т. A_3 .

Визначимо відрізок $p_a b$, що зображає прискорення т. B , використавши співвідношення

$$p_a b = p_a a_3 \frac{l_{O_1 B}}{l_{O_1 A}}. \quad (2.40)$$

Точка b лежить на продовженні відрізка $p_a a_3$.

Визначимо прискорення т. C . Розглянемо рух т. C відносно т. B і напрямної $x-x$. Складемо векторні рівняння:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau; \\ \vec{a}_C = \vec{a}_{x-x} + \vec{a}_{Cx-x}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Нормальне прискорення визначається аналогічно (2.39).

Із т. b відкладемо вектор нормального прискорення \vec{a}_{CB}^n , який направлений від т. C до т. B паралельно ланці BC . Отримаємо т. n_2 . Через т. n_2 проведемо лінію дії тангенціального прискорення \vec{a}_{CB}^τ , перпендикулярно ланці BC , а через т. p_a – горизонтальну пряму, паралельну $x-x$. В місці перетину прямих отримуємо т. c . Відрізок $p_a c$ зображає вектор \vec{a}_C повного прискорення т. C .

З отриманого плану, визначимо прискорення т. S_4 , для цього складаємо пропорцію:

$$b s_4 = c b \frac{l_{BS_4}}{l_{CB}}. \quad (2.42)$$

З'єднаємо т. s_4 з полюсом p_a , отримаємо вектор повного прискорення т. S_4 .

З врахуванням масштабу плану прискорень, дійсні прискорення всіх точок.

$$\begin{aligned} a_{A_3} &= p_a a_3 \cdot \mu_a; \\ a_{A_3 O_1}^\tau &= n_1 a_3 \cdot \mu_a; \\ a_B &= p_a b \cdot \mu_a; \\ a_C &= p_a c \cdot \mu_a; \\ a_{BC}^\tau &= n_2 c \cdot \mu_a. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Визначимо кутові прискорення всіх ланок за величиною.

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{A_3O_1}^\tau}{l_{O_1A}}; \varepsilon_4 = \frac{a_{BC}^\tau}{l_{CB}}. \quad (2.44)$$

Напряму кутових прискорень ε_3 і ε_4 знаходиться по напрямку відповідних тангенціальних прискорень $\vec{a}_{A_3O_1}^\tau$ і \vec{a}_{CB}^τ , перенесених у точки А і С.

Варто зауважити, що якщо напрямок кутового прискорення ланки співпадає з напрямком її кутової швидкості, то ланка прискорюється в даний момент, а якщо напрямки протилежні, то сповільнюється.

Запитання для перевірки знань по темі 2:

1. Коли виконується кінематичний синтез механізму?
2. Задача кінематичного аналізу механізму.
3. Як визначається кутова швидкість ведучої ланки – кривошипа?
4. Функції положень ведучої ланки.
5. Функції положень механізму.
6. Які вихідні дані повинні бути відомі для проведення кінематичного аналізу?
7. Масштаб часу діаграми положень механізму.
8. Масштаб швидкості діаграми положень механізму.
9. Як можна визначити швидкість точки А кривошипа.
10. Векторні рівняння швидкості точки В відносно точок А та О.
11. Як можна визначити прискорення точки А кривошипа?
12. Як визначається кутова швидкість ланки АВ?
13. Як визначається кутове прискорення ланки АВ?
14. Векторні рівняння прискорення точки В відносно точок А та О.

ТЕМА 3. Плоскі кулачкові механізми

- 3.1. Аналіз кулачкових механізмів
- 3.2. Синтез кулачкових механізмів

3.1. Аналіз кулачкових механізмів

3.1.1. Загальні відомості. Види кулачкових механізмів

Механізм, що складається з вхідної ланки кулачка і вихідної – штовхача, називається **кулачковим механізмом**.

Кулачком називається рухома ланка, яка має змінну кривизну поверхні і надає переміщення штовхачу.

Штовхач – це рухома ланка, яка отримує рух безпосередньо від кулачка.

В базову модель кулачкового механізму (рис. 3.1) крім згаданих рухомих ланок: кулачка 1 і штовхача 2 входить стаяк 0.

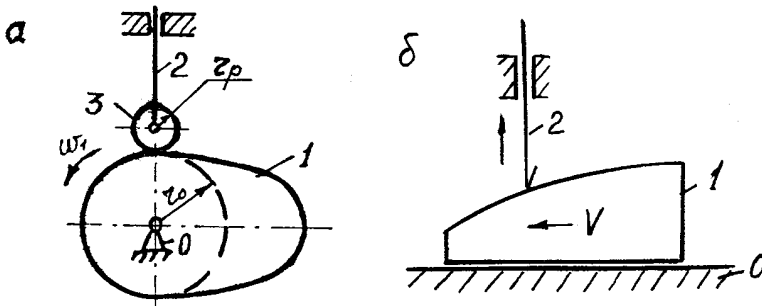


Рис. 3.1. Кулачковий механізм

Кулачкові механізми призначені для перетворення безперервного руху кулачка (обертального чи поступального) в зворотно-поступальний або коливальний рух штовхача.

В деяких кулачкових механізмах, для зменшення спрацювання контактуючих поверхонь кулачка і штовхача, виконують конструктивну заміну тертя ковзання тертям

кочення. Для цього між кулачком і штовхачем розміщують додаткову ланку – ролик 3, який закріплений на штовхачі з можливістю вільно обертатись. Таке вдосконалення ускладнює конструкцію кулачкового механізму, тому його використання має бути обґрунтоване для кожного конкретного випадку. Також ролик додає зайвий ступінь вільності для механізму (див. розд. 1.9).

При відомому законі руху кулачка, як ведучої ланки, штовхач також буде отримувати рухи, які можна описати функцією руху. Цю функцію можна порівняно легко змінювати, підбираючи необхідну для конкретної технічної задачі, за рахунок зміни обрису профілю кулачка. Тому кулачкові механізми широко застосовуються в механізмах різних галузей машинобудування.

Кулачок і штовхач утворюють вищу кінематичну пару. Тобто, в залежності від конструкції штовхача ланки механізму контактують в точці або по лінії. Внаслідок цього в місці миттєвого дотикання робочих поверхонь виникає значний питомий тиск a , отже, інтенсивне спрацювання ланок. Для зменшення спрацювання, ланки кулачкового механізму слід виготовляти із високоякісних матеріалів, а їх робочі поверхні обробляти відповідним чином. Крім цього, згадувана кінематична пара має IV клас, і дозволяє саморозмикатися ланкам в момент зміни напрямку руху штовхача, якщо не застосувати додаткових конструктивних заходів.

За можливістю ланок рухатись в різних площинах виділяють *плоскі* і *просторові* кулачкові механізми.

За характером руху ланок бувають:

- кулачкові механізми з обертовим рухом кулачка і поступальним рухом штовхача (рис. 3.2, а);
- кулачкові механізми з обертовим рухом кулачка і обертовим рухом штовхача (рис. 3.2, б);

- кулачкові механізми з поступальним рухом кулачка і поступальним (обертальним) рухом штовхача (рис. 3.1, б);
- кулачкові механізми із змішаним рухом ланок (зустрічаються рідко).

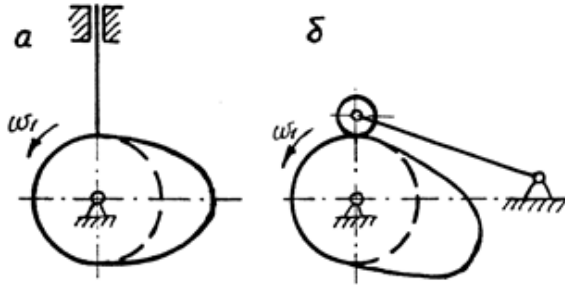


Рис. 3.2. Кулачкові механізми за характером руху

Конструкції штовхачів кулачкових механізмів діляться на:

- голкові (точкові) (рис. 3.3, а);
- роликів (рис. 3.3, б);
- тарілчасті (плоскі) (рис. 3.3, в).

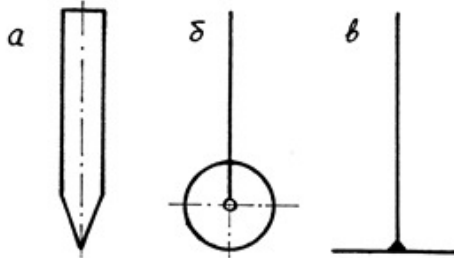


Рис. 3.3. Конструкції штовхачів

За можливістю замикання кінематичної пари кулачок-штовхач розрізняють:

- кулачкові механізми з силовим замиканням (пружиною) (рис. 3.4, а);
- кулачкові механізми з геометричним замиканням (паз в кулачку) (рис. 3.4, б).

Механізми з обертливим рухом кулачка і поступальним рухом штовхача можуть бути:

- центральні (рис. 3.4, а);
- дезаксильні (рис. 3.4, б).

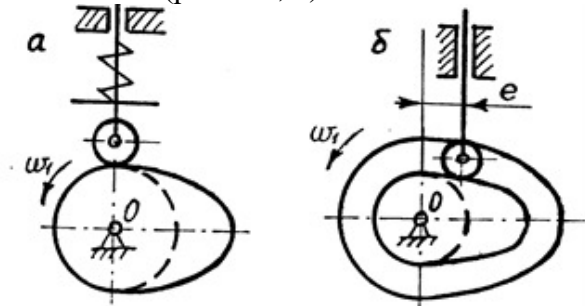


Рис. 3.4. Замикання кулачкових механізмів

3.1.2. Закони руху веденої ланки. Фазові кути

Як і для будь-якого механізму, рух вхідної і вихідної ланок кулачкового механізму може бути заданий аналітично у вигляді рівняння руху, або графічно у вигляді кінематичних діаграм. Такий закон руху має відповідати вимогам робочого процесу, зв'язаного з рухом ланки механізму, і може мати різний характер.

Закон руху вхідної ланки, в загальному випадку описує її усталений рух з постійною швидкістю. Розглянемо найбільш поширені в техніці **закони руху вихідної ланки** кулачкового механізму:

- з жорсткими ударами (рис. 3.5, а);
- з м'якими ударами (рис. 3.5, б);
- без ударів (рис. 3.5, з).

Як видно із діаграм (рис. 3.5, а) при **миттєвій зміні** швидкості штовхача, тобто коли ця швидкість значно збільшується за нескінченно малий проміжок часу, прискорення в крайніх положеннях теоретично набувають також нескінченних значень. На практиці, завдяки пружності ланок а інколи і їх пластичній деформації,

прискорення, а отже, і інерційні навантаження мають скінченні, але дуже великі значення. Таке явище називається *жорстким ударом*. Воно призводить до швидкого спрацювання механізмів, тому його слід максимально уникати, а для швидкісних механізмів (наприклад, привод газорозподільного вала двигуна автомобіля) жорсткі удари взагалі не допустимі.

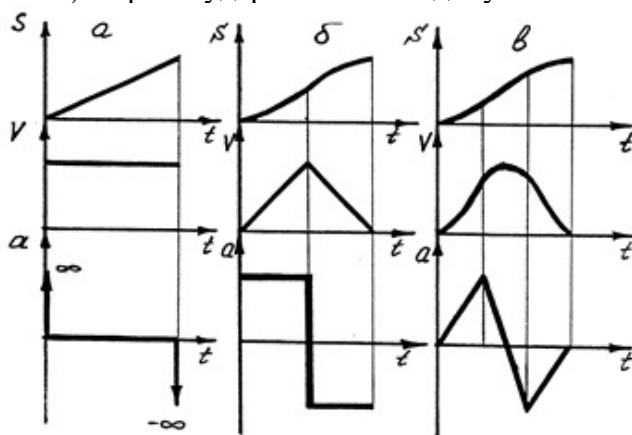


Рис. 3.5. Закони руху веденої ланки

При законі руху штовхача (рис. 3.5, б), коли в крайніх положеннях його ходу швидкість миттєво змінює свій напрямок і величину, відбувається і миттєва зміна інерційних навантажень. Це явище називається *м'яким ударом*. В такому режимі можуть працювати тихохідні кулачкові механізми.

При русі штовхача за законом на рис. 3.5, в, діаграми швидкостей та прискорень не мають стрибків (різких змін значень). Такий рух штовхача відбувається *без ударів*.

Аналізуючи вищезгадані діаграми, можна зробити висновок, що з точки зору динаміки кулачкового механізму, найбільш інформативними є діаграми прискорень, тому часто вони даються як вихідні дані при проектуванні.

Рух штовхача за цикл складається із чотирьох характерних **фаз** (рис. 3.6):

- **віддалення** (піднімання) $\varphi_{\text{в}}$ штовхача від центра обертання кулачка, від крайнього нижнього до крайнього верхнього положення (хід штовхача), кулачок при цьому повертається на кут віддалення $\varphi_{\text{в}}$;

- штовхач залишається нерухомим у піднятому положенні – **дальньому вистой** $\varphi_{\text{д}}$, кулачок повертається на кут дальнього вистою $\varphi_{\text{д}}$;

- **наближення** (опускання) $\varphi_{\text{н}}$ штовхача на величину ходу, кулачок повертається на кут наближення $\varphi_{\text{н}}$;

- штовхач залишається нерухомим у початковому положенні – **ближньому вистой** $\varphi_{\text{б}}$, кулачок повертається на кут ближнього вистою $\varphi_{\text{б}}$.

Кути $\varphi_{\text{в}}$, $\varphi_{\text{д}}$, $\varphi_{\text{н}}$, $\varphi_{\text{б}}$ повороту кулачка, що розділяють відповідні фази руху штовхача, називаються **фазовими кутами**.

3.1.3. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів методом діаграм і методом планів

При вивченні кулачкових механізмів може бути поставлено **два завдання**:

- аналіз (дослідження) існуючих кулачкових механізмів;

- синтез (проекування) нових кулачкових механізмів за заданими умовами.

Аналіз кулачкових механізмів полягає у знаходженні закону руху штовхача для існуючого кулачкового механізму. Вихідними даними аналізу тоді є відома кінематична схема кулачкового механізму, (рис. 3.6, а).

Для кінематичного аналізу кулачкових механізмів використовують **аналітичні** і **графоаналітичні** методи. Графоаналітичні методи аналогічні тим що ми розглядали для важільних механізмів: методи **діаграм** та **планів**.

Аналіз методом діаграм

Розглянемо спочатку алгоритм дослідження кулачкового механізму методом кінематичних діаграм.

На запропонованій кінематичній схемі кулачкового механізму (рис. 3.6, а) розміtimo переміщення точки А штовхача, що відповідає певним кутам повороту кулачка.

Для цього побудуємо коло з центром в т. О, осі обертання кулачка, радіусом $r_0 = OA$, що відповідає найменшому радіусу кривизни профілю кулачка. Таке коло називається **основним** (початковим) колом кулачка. Розділимо отримане коло на довільне число рівних частин, в нашому прикладі – десять. Через точки розбиття проведемо промені з т. О і до перетину з профілем кулачка. Отримуємо точки 1', 2', 3', ..., з яких проводимо дуги з центром в т. О до перетину з вертикальною лінією руху штовхача ОА. Точки 1, 2, 3..., відмічені таким чином на лінії руху штовхача, зображають положення точки контакту А при відповідному повороті кулачка. Відрізок А4 відповідає найбільшому переміщенню штовхача (його ходу).

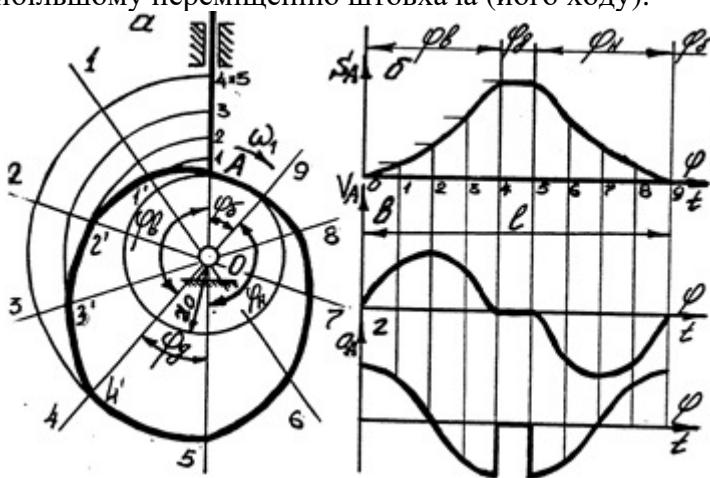


Рис. 3.6. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів методом діаграм

Отримавши значення переміщення т. А штовхача, в залежності від положення кулачка, побудуємо графік її переміщення в координатах $S_A - \varphi$ (рис. 3.6, б).

Відкладемо на осі абсцис φ кути повороту кулачка, що відповідають його положенням, відміченим на кінематичній діаграмі, у деякому масштабі μ_φ . Кожному куту, в свою чергу відповідає конкретне переміщення т. А від свого крайнього нижнього положення, яке відкладаємо по осі ординат у масштабі μ_S . Якщо переміщення переносити без зміни масштабу то μ_S буде рівним масштабу побудови профілю кулачка μ_l . Сполучивши плавною кривою отримані ординати, отримаємо діаграму переміщення штовхача за один цикл повороту кулачка.

Діаграми аналогів швидкості та прискорення штовхача (рис. 3.6, в, г) можна отримати відомими методами **графічного диференціювання**, побудова яких розглядалась детально для важільних механізмів у розд. 2.3.

Масштаб кута повороту кулачка

$$\mu_\varphi = \frac{(\varphi_B + \varphi_D + \varphi_H)\pi/180^\circ}{l}, \left(\frac{\text{рад}}{\text{мм}}\right). \quad (3.1)$$

Масштаб переміщення

$$\mu_\varphi = \mu_l, \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}}\right). \quad (3.2)$$

Масштаб аналогів швидкостей

$$\mu_{\frac{ds}{d\varphi}} = \frac{\mu_S}{\mu_\varphi H_1}, \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}}\right). \quad (3.3)$$

Масштаб аналогів прискорень

$$\mu_{\frac{d^2s}{d\varphi^2}} = \frac{\mu_{\frac{ds}{d\varphi}}}{\mu_\varphi H_2}, \left(\frac{\text{м}}{\text{мм}}\right). \quad (3.4)$$

Отримані діаграми є саме **аналогами** відповідних кінематичних діаграм, адже отримуються, як функція від кута повороту кулачка φ , а не часу t . Однак, якщо враховувати припущення, що рух кулачка усталений, з

постійною кутовою швидкістю ω_1 , то можна легко перейти до функції часу через масштаби.

Масштаб швидкості

$$\mu_v = \omega_1 \mu \frac{ds}{d\varphi}, \left(\frac{\text{м/с}}{\text{мм}} \right). \quad (3.5)$$

Масштаб прискорення

$$\mu_a = \omega_1^2 \mu \frac{d^2s}{d\varphi^2}, \left(\frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}} \right). \quad (3.6)$$

Аналіз методом планів

Якщо потрібно визначити величину швидкості та прискорення штовхача в конкретному положенні кулачкового механізму, застосовують метод планів. Для цього потрібно побудувати **замінюючий механізм**, тобто кінематичну пару IV класу умовно замінити кінематичними парами V класу. Для кожного положення кулачкового механізму будується окремий замінюючий механізм. Спочатку знаходиться центр кривизни профілю кулачка в місці його контакту з штовхачем. В отриманому центрі кривизни (т. А на рис. 3.7, а), та в центрі ролика ставляться обертальні кінематичні пари V класу і з'єднуються між собою. З'єднуємо центр обертання кулачка (т. О) з т. А. Отримаємо замінюючий механізм.

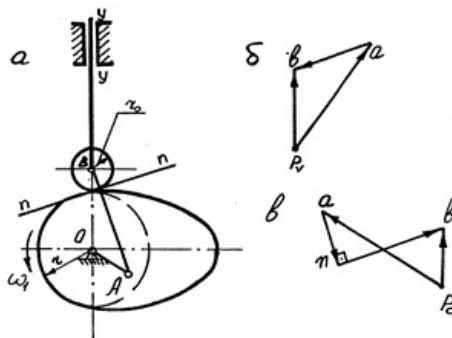


Рис. 3.7. Кінематичний аналіз кулачкових механізмів методом планів

Затим будемо план швидкостей в масштабі μ_v та план прискорень в масштабі μ_a (рис. 3.7, б, в) для замінюючого механізму, аналогічно побудові для звичайного кривошипно-шатунного механізму, викладеним при кінематичному дослідженні важільних механізмів (див. розд. 2.4).

Визначимо швидкість точки А

$$V_A = \omega_1 l_{OA}. \quad (3.7)$$

Визначимо швидкість точки В

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \\ \vec{V}_B \parallel y - y. \end{cases} \quad (3.8)$$

Визначимо прискорення точки А

$$a_A = \omega_1^2 l_{OA}. \quad (3.9)$$

Визначимо прискорення точки В

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t; \\ \vec{a}_B \parallel y - y. \end{cases} \quad (3.10)$$

Кінематичне дослідження кулачкових механізмів можна проводити також і **аналітичними методами**. Вони базуються на узгодженні рухів ланок для замінюючого механізму з використанням тригонометричних функцій, аналогічно аналітичному дослідженню відповідних важільних механізмів.

3.2. Синтез кулачкових механізмів

3.2.1. *Кінематичний синтез кулачкових механізмів з роликівим та тарілчастим штовхачами*

Кінематичний синтез кулачкових механізмів виконується тоді, коли постає задача створити новий механізм, який забезпечував би необхідний закон руху штовхача. Вихідними даними в такому випадку будуть:

- хід штовхача;
- найменший (початковий) радіус профілю кулачка r_0 ;
- фазові кути $\varphi_B, \varphi_D, \varphi_H$;

- закон руху штовхача;
- закон руху кулачка.

На рис. 3.8 у певному масштабі (μ_S, μ_φ) побудовано діаграму переміщень штовхача.

На осі абсцис відкладені фазові кути: віддалення φ_B , дальнього вистою φ_D , наближення φ_H . Крива переміщення складається з ординат переміщень штовхача на кожному фазовому куті. Задачею синтезу є побудова профілю кулачка, що забезпечить наведений графічно закон руху. Розділимо фазові кути φ_B і φ_H на декілька рівних проміжків, в даному прикладі – по чотири. Позначимо отримані на осі абсцис точки 0, 1, 2, 3, Ординати кривої переміщення у точках 1, 2, 3... позначимо, відповідно, 1', 2', 3', З діаграми видно, що якщо кулачок повертається із положення 0 в положення 1 (на кут φ , що відповідає відрізьку 0-1 в масштабі μ_φ), то штовхач віддаляється від найнижчого положення на величину відрізьку 1-1' в масштабі μ_S . Зміщення штовхача в положенні 2 тоді буде рівне 2-2' і т.д.

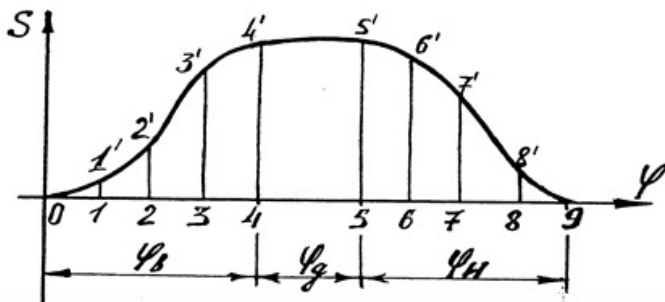


Рис. 3.8. Діаграма переміщень штовхача

Графічно, побудова профілю кулачка виконується методом оберненого руху, який ще називається **методом інверсії**. Полягає він у тому, що ми надаємо всьому кулачковому механізму кутову швидкість – ω_k (рівну за

величиною кутової швидкості кулачка, але обернену за напрямком). В результаті кулачок умовно зупиниться, а штовхач навпаки – обертатиметься навколо кулачка з кутовою швидкістю ω_k в напрямі, протилежному обертанню кулачка, описуючи при цьому його профіль.

Методика побудови профілю кулачка відрізняється залежно від конструкції штовхача. Розглянемо спочатку **профілювання кулачкового механізму з роликівим штовхачем.**

Спочатку задаємось точкою O – віссю обертання кулачка. З центром в t . O будуємо основне (початкове) коло за відомим початковим радіусом профілю кулачка r_0 в машинобудівному масштабі (рис. 3.9, *a*).

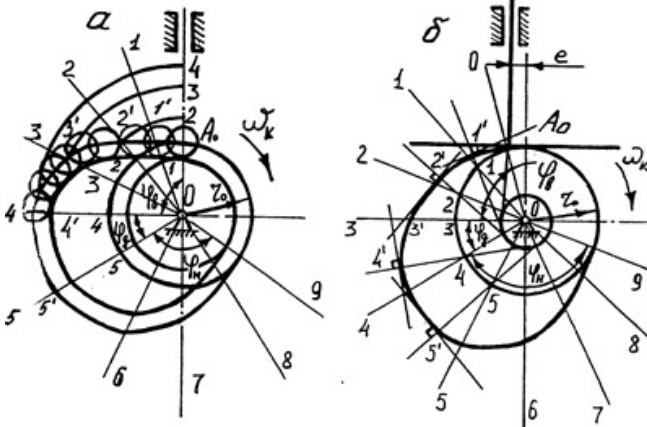


Рис. 3.9. Профілювання кулачка

Отже, штовхач умовно обертається навколо основного кола профілю кулачка, і при цьому $t. A_0$ (позначена на штовхачі) зміщується відносно основного кола в радіальному напрямку відповідно до діаграми переміщень штовхача (рис. 3.8). Траекторія $t. A_0$ опише необхідний **теоретичний профіль** кулачка.

Для побудови цієї траєкторії, відкладемо променями з т. О фазові кути $\varphi_{\text{в}}$, $\varphi_{\text{д}}$, $\varphi_{\text{н}}$. починаючи від променя OA_0 в напрямі, зворотному напрямку обертання кулачка. Додатково поділимо кути $\varphi_{\text{в}}$ і $\varphi_{\text{н}}$ на стільки рівних частин, на скільки поділені відповідні їм проміжки на осі абсцис діаграми переміщення штовхача (рис. 3.8), у нашому прикладі на чотири. В місцях перетину побудованих променів та основного кола отримуємо точки 1, 2, 3,

Від отриманих точок перетину на кожному промені $O1$, $O2$, $O3$, ... у напрямку віддалення від т. О відкладемо переміщення штовхача $1-1'$, $2-2'$, $3-3'$, ... взяті із діаграми переміщення (рис. 3.8) для відповідних положень (з врахуванням масштабів діаграми і побудови). З'єднаємо плавною кривою отримані на відповідних променях точки $1'$, $2'$, $3'$, ... та отримаємо частину профіля кулачка на кутах $\varphi_{\text{в}}$ і $\varphi_{\text{н}}$. Профілі кулачка в межах фаз дальнього $\varphi_{\text{д}}$ і ближнього вистоя $\varphi_{\text{б}}$ будуть описувати дуги кіл з центром в т. О, радіусами $04'$ і $0A_0$. Маємо повний теоретичний профіль кулачка, при обертанні якого з $\omega_{\text{к}}$, точка штовхача A_0 рухатиметься за заданим на діаграмі (рис. 3.8) законом руху.

В нашому прикладі штовхач містить ролик, тому практичний (конструктивний) профіль кулачка відрізнятиметься від теоретичного, а саме буде еквідистантним йому на величину радіуса ролика.

Радіус r_p ролика приймається:

$$r_p = (0,3 \dots 0,4)r_0. \quad (3.11)$$

Обкатуючи тепер штовхач разом з роликом по теоретичному профілю кулачка, так щоб шарнір ролика рухався по теоретичному профілі, отримуємо **практичний (конструктивний) профіль**, як криву по якій умовно котиться ролик при такому русі.

При використанні інженерних САПР ця побудова виконується з використанням вбудованої функції

«побудова еквидали» з параметром зміщення рівним радіусу ролика r_p . При ручному виконання можна побудувати сукупність допоміжних кіл з центрами на теоретичному профілі і вписати профіль плавною кривою, що плавно дотикається до всіх кіл у точках, що найближчі до центра обертання кулачка.

Описаний вище алгоритм відноситься до побудова **центрального кулачкового механізму**, в якого лінія руху штовхача проходить через центр обертання кулачка

Розглянемо **профілювання кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем**, для випадку, коли лінія руху штовхача зміщена відносно осі обертання кулачка (кулачковий механізм з **ексцентриситетом**).

Використаємо метод інверсії, як і для попереднього прикладу. З центром в т. О побудуємо в деякому масштабі два кола: початкове, радіусом $r_0 = OA_0$, та коло ексцентриситету, радіусом e (рис. 3.9, б). Аналогічно побудові профілю в попередньому прикладі розбиваємо початкове коло радіальними променями, починаючи від променя OA_0 , на кути $\varphi_B, \varphi_D, \varphi_H$, а фазові кути φ_B і φ_H в свою чергу на чотири, для нашого прикладу, рівні частини. Отримаємо на початковому колі точки 1, 2, 3 ... Через точки 1, 2, 3 ... опускаємо дотичні на коло ексцентриситету. Переміщення штовхача 1-1', 2-2', 3-3', ... задані на діаграмі переміщень (рис. 3.8) будемо відкладати саме на цих дотичних, у відповідних положеннях. В отриманих точках 1', 2', 3' ... проведемо перпендикуляри до відповідних дотичних, що відобразять положення тарілки штовхача при конкретних кутах повороту кулачка. Перпендикуляри утворять замкнуту внутрішню область у вигляді багатокутника. Плавна крива, вписана в даний багатокутник, і дасть нам теоретичний профіль кулачка. Для кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем, теоретичний профіль співпадає з конструктивним.

3.2.2. Кут тиску та кут передачі руху

При аналізі і синтезі кулачкового механізму важливо передбачити відсутність заклинювання чи надмірного самогальмування. Це можна зробити підібравши оптимальне значення таких параметрів як **кут передачі руху** γ або **кут тиску** α .

Нехай кулачок 1 діє на штовхач 2 з певною силою F (рис. 3.10).

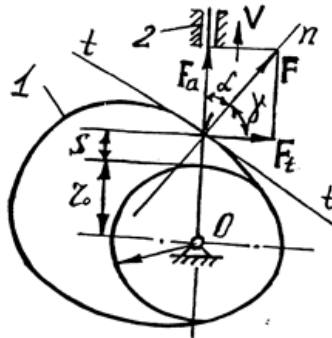


Рис. 3.10. Кут тиску та передачі руху

Для спрощення, знехтуємо силою тертя. Тоді сила F буде напрямлена по загальній нормалі $n-n$ до контактуючих поверхонь кулачка і штовхача в точці дотику. Розкладемо силу F на дві складові: F_a і F_t – паралельно та перпендикулярно руху штовхача, відповідно. При цьому, складова F_a буде рушійною силою, яка рухає штовхач в напрямку вектора швидкості \vec{v} , а F_t виконуватиме шкідливу роботу, намагаючись зігнути штовхач і викликати тертя в напрямних. Ефективність механізму буде тим кращою, чим більша складова F_a і менша F_t . Кут, між векторами сили F і складової F_a , називається кутом тиску α . Отже, із рис. 3.10 бачимо, що:

$$\begin{aligned} F_t &= F \sin \alpha; \\ F_a &= F \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тобто, із (3.12), можна сказати, що чим менший кут тиску тим краще буде працювати кулачковий механізм.

Через змінну кривизну профіля кулачка, кут тиску в різних положеннях механізму буде різним. Зменшити його можна за рахунок збільшення габаритів кулачка, що не завжди є оптимальним рішенням. Раціональне значення кута тиску вибирається виходячи із досвіду експлуатації механізмів.

Для кулачкових механізмів: з поступальним рухом штовхача рекомендується забезпечувати $\alpha \leq 30^\circ$; з коромисловим штовхачем $\alpha \leq 45^\circ$; з тарілчастим штовхачем $\alpha \cong 0^\circ$.

Кут між силою F і силою F_t , має свою назву – **кут передачі руху** γ . Із рис. 3.10

$$\gamma = 90^\circ - \alpha. \quad (3.13)$$

3.2.3. Динамічний синтез кулачкових механізмів

Кулачковий механізм, що забезпечить певний конкретний закон руху штовхача, може мати різні розміри і форму в залежності від обраного початкового радіуса кулачка r_0 . З технічної точки зору механізм буде найбільш придатним, якщо має найменші можливі розміри і при цьому задовольняє умови міцності та можливості передавати рух без заклинювання. Тому виникає задача підібрати найбільш раціональне **значення найменшого (початкового) радіуса профілю кулачка** r_0 , на основі певних вихідних даних. Дослідження, що включає цей крок, називається **динамічним синтезом**. Після отримання раціонального значення r_0 , наприклад, за заданим чи знайденим найбільшим кутом тиску, виконується побудова профілю кулачка за алгоритмом, аналогічним, описаному раніше в кінематичному синтезі (див. розд. 3.2.1).

Визначення початкового радіуса профілю кулачка для кулачкових механізмів з роликівим штовхачем

Нехай величина найбільшого кута тиску не відома, а заданий лише закон руху штовхача.

Покажемо, як знайти величину кута тиску в будь-якому положенні кулачкового механізму з роликівим штовхачем, що рухається поступально.

Спочатку, побудуємо для нього замінюючий механізм (рис. 3.11, а), за методикою описаною в розд. 3.1.3.

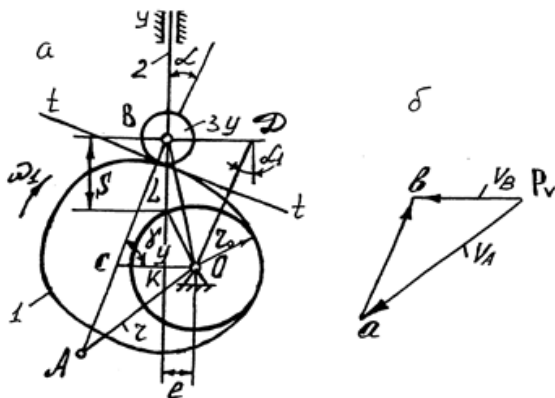


Рис. 3.11. Кулачковий механізм з роликівим штовхачем

Для замінюючого механізму побудуємо **повернутий на 90°** проти напрямку ω_1 план швидкостей (рис. 3.11, б).

Запишемо рівняння:

$$V_A = \omega_1 r; \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \\ \vec{V}_B \parallel y - y. \end{cases} \quad (3.15)$$

Проведемо з т. О (центр обертання кулачка) горизонтальну лінію вліво до перетину з шатуном АВ, отримаємо точку С. Позначимо $OC = y$ і $OA = r$. Трикутники $p_v ab$ і OAC подібні тому, що їх сторони взаємно паралельні.

Із подібності трикутників маємо:

$$\frac{y}{r} = \frac{p_v b}{p_v a} = \frac{V_B}{V_A}. \quad (3.16)$$

Враховуючи (3.14) і те що $V_B = ds/dt$ будемо мати:

$$\frac{y}{r} = \frac{ds}{r\omega_1 dt} = \frac{ds}{rd\varphi}, \quad (3.17)$$

бо $\omega_1 dt = d\varphi$, де φ – кут повороту кулачка.

Із рівняння (3.17) остаточно маємо:

$$y = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (3.18)$$

Рівняння (3.18) показує, що значення y можна визначити для бажаного кута φ інтегруванням закону руху штовхача $S = S(\varphi)$.

Відкладемо такий же відрізок у горизонтально вправо від т. В (кінематична пара штовхач-ролик). Отримуємо т. D, яку з'єднаємо з центром О. Відрізок OD утворює з вертикаллю в т. D, шуканий кут тиску α . Це буде виконуватись і для будь-якого іншого положення механізму. Вісь штовхача продовжимо вниз до перетину з відрізком ОС, де отримаємо т. К.

Для прямокутного трикутника ВКС:

$$tg\gamma = \frac{BK}{CK}. \quad (3.19)$$

Із рис. 3.11, а видно, що $BK = BL + LK$, $CK = OC - OK$,
де

$BL = s$ – переміщення штовхача;

$OK = e$ – ексцентриситет;

$OL = r_0$ – початковий радіус профілю кулачка;

$LK = \sqrt{r_0^2 - e^2}$.

Рівняння (3.19) з врахуванням позначень запишемо:

$$tg\gamma = \frac{\sqrt{r_0^2 - e^2} + s}{\frac{ds}{d\varphi} - e}. \quad (3.20)$$

Для центральних кулачкових механізмів $e = 0$, тоді

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r_0 + s}{\frac{ds}{d\varphi}}. \quad (3.21)$$

Тобто, щоб простежити за зміною кута тиску α за цикл переміщення штовхача, необхідно для кожного значення кута φ знайти величину $y = ds/d\varphi$ і відкласти її від відповідного положення т. В штовхача горизонтально вправо (при віддаленні), або вліво (при наближенні), позначивши точку. З'єднавши всі точки плавною кривою отримаємо діаграму $S = S(ds/d\varphi)$ (рис. 3.12, а). Сполучимо кожну точку цієї діаграми з центром обертання кулачка О. Найбільші кути тиску α отримаємо для тих положень, в яких промінь OD дотикається до діаграми.

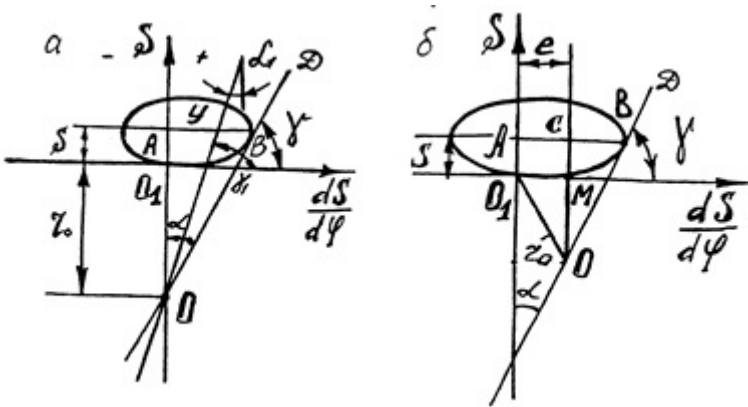


Рис. 3.12. До визначення початкового радіуса

Із прямокутного трикутника OAB (рис. 3.12, а) маємо:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{OA}{AB} = \frac{r_0 + s}{\frac{ds}{d\varphi}}. \quad (3.22)$$

Якщо кулачковий механізм має ексцентриситет, то із рис. 3.12, б випливає

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{CO}{CB} = \frac{CM + MO}{AB - AC} = \frac{s + \sqrt{O_1 O^2 - O_1 M^2}}{AB - AC} = \\ &= \frac{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}}{\frac{ds}{d\varphi} - e}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для знаходження дійсного (початкового) радіус $r_{0д}$ профілю кулачка, необхідно вирішити обернену задачу, побудувавши діаграму $S = S(ds/d\varphi)$, та провівши до нього дотичну під заданим кутом тиску α . Тоді $r_{0д} = OO_{1\mu S}$.

Визначення початкового радіуса профілю кулачка для кулачкових механізмів з тарілчастим штовхачем

Контактуюча поверхня тарілчастого штовхача має форму площини, тому він може працювати тільки в парі з кулачком з випуклою криволінійною поверхнею. Тобто радіус кривизни профілю кулачка в будь-якій точці повинен бути більше нуля:

$$\rho > 0. \quad (3.24)$$

Задача визначення початкового радіуса такого штовхача вперше була вирішена проф. Героніусом.

Починаємо з побудови заміняючого механізму (рис. 3.13, а).

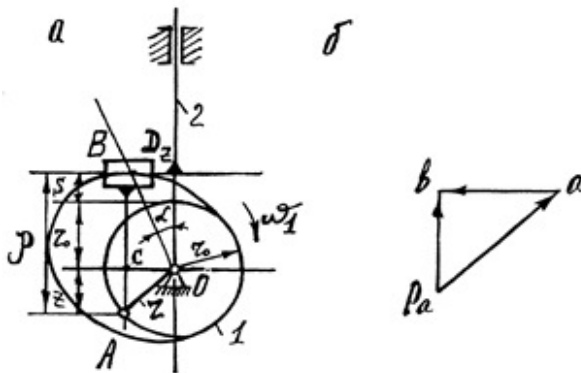


Рис. 3.13. Кулачковий механізм з тарілчастим штовхачем

Побудуємо план прискорень для замінюючого механізму (рис. 3.13, б).

Рівняння для визначення прискорень точок А і В матимуть вигляд:

$$a_A = \omega_1^2 r. \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; \\ \vec{a}_B \parallel y - y. \end{cases} \quad (3.26)$$

Проведемо горизонтальну лінію ОС (паралельно тарілці штовхача). Позначимо відрізок $AC = z$ (рис. 3.13, а). Із рис. 3.13 видно, що трикутник ОАС і $ap_a b$ подібні, внаслідок паралельності відповідних сторін. Із подібності трикутників, з врахуванням (3.25) і що $a_B = d^2s/dt^2$, а $\omega_1 dt = d\varphi$ маємо:

$$\frac{z}{r} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{d^2s}{r\omega_1^2 dt^2} = \frac{d^2s}{rd\varphi^2}. \quad (3.27)$$

Із рівняння (3.27) випливає:

$$z = \frac{d^2s}{d\varphi^2}. \quad (3.28)$$

Радіус кривизни профіля кулачка в точці В контакту з штовхачем

$$\rho = s + r_0 + z. \quad (3.29)$$

Враховуючи значення z із (3.28) отримаємо:

$$\rho = s + r_0 + \frac{d^2s}{d\varphi^2}. \quad (3.30)$$

Якщо згідно (3.24) $\rho > 0$, то

$$s + r_0 + \frac{d^2s}{d\varphi^2} > 0. \quad (3.31)$$

Перепишемо нерівність (3.31) так

$$r_0 + s > -\frac{d^2s}{d\varphi^2}. \quad (3.32)$$

Розділимо (3.32) на $r_0 + s$

$$1 > \frac{-\frac{d^2s}{d\varphi^2}}{r_0 + s}. \quad (3.33)$$

Оскільки $\operatorname{tg}45^\circ = 1$, то нерівність (3.33) прийме вигляд:

$$\operatorname{tg}45^\circ > \frac{-\frac{d^2s}{d\varphi^2}}{r_0 + s}. \quad (3.34)$$

Нерівність (3.31) може не виконуватися тільки при від'ємних значеннях $z = d^2s/d\varphi^2$, та тоді, коли абсолютне значення z більше за абсолютне значення $r_0 + s$.

Відкладемо відрізок z від осі штовхача (рис. 3.13, *a*) вліво вздовж його кромки. Сполучимо кінець цього відрізка т. D з центром O.

Із рисунка видно, що поки кут $\alpha < 45^\circ$, нерівність (3.31) буде виконуватись тому, що $z < r_0 + s$.

Побудуємо діаграму $d^2s/d\varphi^2 = d^2s/d\varphi^2(s)$ Для цього, користуючись діаграмою $S = S(\varphi)$ (рис. 3.8) визначимо в кожному положенні значення z .

По осі ординат відкладемо значення S, а по осі абсцис – відповідне йому значення z . Сполучивши послідовно плавною кривою отримані точки, одержимо діаграму (рис. 3.14).

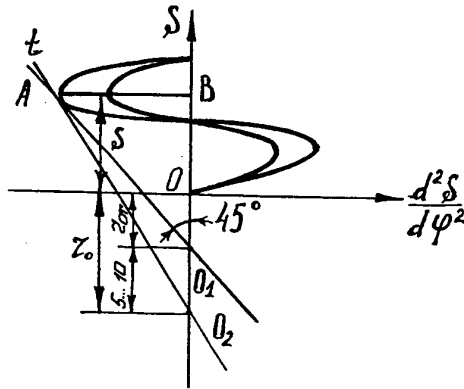


Рис. 3.14. До визначення початкового радіуса

Далі проведемо під кутом 45° до вертикалі дотичну $t-t$ до цієї діаграми в зоні її від'ємних значень (зліва).

Згідно нерівності (3.34) центр обертання кулачка повинен бути розміщений нижче точки O_1 , на практиці приймають $O_1O_2=(5\dots 10)$ мм.

Із трикутника O_1AB (рис. 3.14) маємо

$$tg45^\circ = \frac{AB}{OB} = \frac{\frac{d^2s}{d\varphi^2}}{r_0 + s}. \quad (3.35)$$

$O_1B = OB + OO_1$ і $OB = s$; $OO_1 = r_0$ – шуканий теоретичний початковий радіус профіля кулачка.

Найменший (початковий) **дійсний радіус профіля** кулачка $r_{0д}$

$$r_{0д} = OO_2\mu_s.$$

Далі будемо профіль кулачка, методами, описаними раніше.

Запитання для перевірки знань по темі 3:

1. Кулачком називається – ...
2. Призначення кулачкових механізмів?
3. Для чого в конструкцію кулачкового механізму додають ролик?
4. Що таке фазові кути?
5. Побудова профілю кулачка.
6. Що називається кутом тиску кулачкового механізму?
7. Якою діаграмою доцільно задавати закон руху при проектуванні кулачкових механізмів?
8. Яку діаграму необхідно побудувати для визначення початкового радіуса профілю кулачка кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем?
9. Яку діаграму необхідно побудувати для визначення початкового радіуса профілю кулачка кулачкового механізму з роликовим штовхачем?

ТЕМА 4. Плоскі зубчасті механізми

- 4.1. Типи зубчастих механізмів. Передаточні відношення простих зубчастих передач
- 4.2. Основна теорема зачеплення
- 4.3. Евольвента кола та її властивості
- 4.4. Основні розміри циліндричних зубчастих коліс
- 4.5. Геометрія евольвентного зачеплення
- 4.6. Косозубі циліндричні колеса. Основні параметри
- 4.7. Методи нарізання зубів зубчастих коліс
- 4.8. Підрізування зубів. Найменше число зубів на колесі
- 4.9. Виправлення (корегування) зубчастих коліс

4.1. Типи зубчастих механізмів. Передаточні відношення простих зубчастих передач

Трьохланковий механізм, призначений для передавання обертового руху від одного вала до іншого за допомогою зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні з заданим відношенням кутових швидкостей, називають **зубчастою передачею**.

Зубчасті передачі бувають плоскі і просторові. До **плоских** відносяться зубчасті циліндричні передачі. У таких передачах осі валів паралельні. До **просторових** відносяться зубчасті конічні, гвинтові і черв'ячні передачі. У них осі валів або перетинаються, або є мимобіжними. В залежності від розміщення зубів на зубчастому вінці коліс передачі розрізняють **прямозубі**, **косозубі** і **шевронні**.

Зубчасті механізми одні з найпоширеніших у сучасній техніці (автомобілі, трактори, верстати і ін.), за рахунок ряду **переваг**:

- можливість передавати великі потужності (від 0,05 до 50000 кВт) у широкому діапазоні колових швидкостей (від 0,01 до 150 м/с);
- сталість передаточного відношення;

- компактність, надійність;
- високий ККД до 96–97%;
- простота обслуговування.

Недоліки:

- порівняно невеликі передаточні відношення для однієї пари зубчастих коліс $u \leq 7$, рідше $u \leq 15$;
- створення вібрацій і шуму;
- неможливість пробуксовування при перенавантаженнях, що може привести до поломки зубів;
- складність виготовлення через вимогу точності.

Зубчасті передачі використовуються здебільшого для зміни кутових швидкостей при передаванні обертового руху. Тому зубчасті колеса обертаються з різними кутовими швидкостями ω_1 і ω_2 , відношення яких називається **передаточним відношенням**.

Передаточне відношення від зубчастого колеса 1 до зубчастого колеса 2 будемо позначати u_{12} , а його величина знаходиться як:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (4.1)$$

Менше (зазвичай ведуче) зубчасте колесо в зубчастій передачі прийнято називати **шестернею**. Передаточне відношення коліс, що обертаються в різні сторони, вважають від'ємним. Такі колеса утворюють зубчасту передачу із **зовнішнім зачепленням** (рис. 4.1, а)

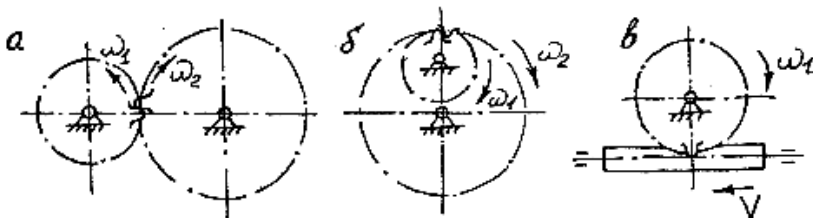


Рис. 4.1. Зубчасті передачі:

- а – зовнішнє зачеплення;
- б – внутрішнє зачеплення;
- в – рейкове зачеплення

У випадку конструкції (рис. 4.1, б) маємо зубчасту передачу з *внутрішнім зачепленням*, де і шестерня і колесо обертаються в одну сторону а передаточне відношення вважаємо додатнім.

Якщо одне із коліс виготовлене у вигляді *зубчастої рейки* (рис. 4.1, в), яка виконує поступальний рух, а обертальний відсутній, то $u = 0$, або $u = \infty$.

4.2. Основна теорема зачеплення

Завдання теорії зачеплення круглих циліндричних зубчастих коліс – визначити умови, при дотриманні яких обертальний рух передається із заданим відношенням кутових швидкостей. Виконання цих умов з точки зору кінематики забезпечує *основна теорема зачеплення*, сформульована Р. Віллісом.

Крива що утворює обрис бокової поверхні зуба в перпендикулярній до осі колеса площині, називається *торцевим профілем зуба*. Для того щоб пара зубчастих коліс передавали обертальний рух з заданим відношенням кутових швидкостей ($u = const$), профілі їх зубів не можуть бути довільними. Умову, яку повинні задовольняти ці профілі, встановлює основна теорема зачеплення.

Нехай зуби коліс 1 і 2 (рис. 4.2) обертаються з кутовими швидкостями ω_1 і ω_2 і дотикаються один до одного в т. К. Точка К належить одночасно зубу колеса 1 і зубу колеса 2. Швидкість т. К, що належить колесу 1 направлена перпендикулярно до радіуса O_1K в сторону ω_1 і за величиною рівна

$$V_{K1} = \omega_1 \cdot O_1K. \quad (4.2)$$

Швидкість т. К, що належить колесу 2 в даний момент перпендикулярна радіусу O_2K і знаходиться як

$$V_{K2} = \omega_2 \cdot O_2K. \quad (4.3)$$

Виконаємо наступні побудови на схемі зубчастого зачеплення. Через т. К проведемо прями: загальну дотичну

$T-T$ і загальну нормаль $N-N$. Нормаль перетне лінію центрів O_1O_2 в т. P . Із центрів O_1 і O_2 опустимо перпендикуляри на нормаль $N-N$, де позначимо точки L_1 та L_2 .

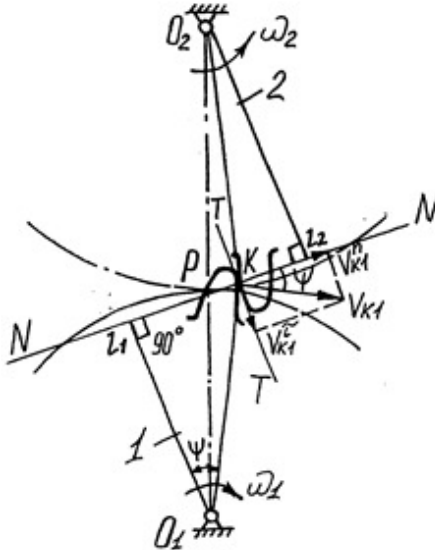


Рис. 4.2. Зубчасте зачеплення

Швидкість V_{K_1} спроектуємо на нормаль $N-N$, та отримаємо дві складові швидкості. Нормальна складова визначиться як

$$V_{K_1}^n = V_{K_1} \cos \psi = \omega_1 \cdot O_1K \cos \psi = \omega_1 \cdot O_1L_1. \quad (4.4)$$

Аналогічно для другого колеса буде

$$V_{K_2}^n = \omega_2 \cdot O_2L_2. \quad (4.5)$$

Для того, щоб контактуючі зуби коліс завжди рухались синхронно, не випереджаючи один одного необхідно, щоб нормальні складові швидкостей $V_{K_1}^n$ і $V_{K_2}^n$ були рівні між собою як за величиною так і напрямом

$$V_{K_1}^n = V_{K_2}^n. \quad (4.6)$$

Підставимо в (4.6) значення із (4.4) і (4.5), отримаємо:

$$\omega_1 \cdot O_1L_1 = \omega_2 \cdot O_2L_2. \quad (4.7)$$

Звідси маємо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2L_2}{O_1L_1}. \quad (4.8)$$

Якщо подібних трикутники O_1L_1P і O_2L_2P , запишемо:

$$\frac{O_2L_2}{O_1L_1} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.9)$$

Замінивши відношення O_2L_2/O_1L_1 в (4.8) із (4.9) отримаємо:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (4.10)$$

З рівняння (4.10) випливає формулювання основної теореми зачеплення – **теорема Вілліса**.

Загальна нормаль до профілів зубів в точці їх дотику ділить відстань між центрами обертання зубчастих коліс на частини, обернено пропорційні їх кутовим швидкостям.

При $\omega_1/\omega_2 = const$, на основі (4.10) робимо висновок, що $O_2P/O_1P = const$, тобто т. P має знаходитись на лінії центрів в однаковому положенні. Точка P називається **полюсом зачеплення**.

Отже, для забезпечення сталого відношення кутових швидкостей при передачі обертального руху, профілі зубів повинні бути підібрані так, щоб загальна нормаль до них в будь-якій точці дотику завжди проходила через одну і ту ж точку на лінії центрів.

4.3. Евольвента кола та її властивості

Евольвента кола – крива, яку описує точка на прямій лінії, що котиться по колу без проковзування. Таке коло називається **основним**, а пряма, що по ньому перекочується, – **твірною** (рис. 4.3).

Нехай пряма $N-N$ котиться по основному колу радіуса r_b без проковзування. Точка K при цьому буде описувати евольвенту. Біжучий радіус-вектор точки K_x евольвенти

Використавши позначення в рівнянні (4.11), отримаємо

$$\operatorname{inv} \alpha_x = \operatorname{tg} \alpha_x - \alpha_x. \quad (4.17)$$

Зв'язок між r_x і α_x запишемо із трикутника $K_x O N_x$

$$r_x = \frac{r_b}{\cos \alpha_x}. \quad (4.18)$$

Рівняння (4.17) і (4.18) називаються *параметричними рівняннями евольвенти*.

Властивості евольвенти:

- евольвента є симетричною кривою, яка має дві вітки, що збігаються у початковій точці K_0 ;

- будь-які дотичні $N-N$ до основного кола є нормальними до евольвенти у відповідних точках K_x ;

- основне коло є геометричним місцем центрів кривизни евольвент описаних прямою $N-N$, тобто їх еволютою, а отже вектор $K_x N_x$ є радіусом кривизни евольвенти у відповідній точці K_x .

4.4. Основні розміри циліндричних зубчастих коліс

Для кожного колеса (рис. 4.4) відомо:

$$2\pi r_{w1} = p_w z_1. \quad (4.19)$$

$$2\pi r_{w2} = p_w z_2. \quad (4.20)$$

Розділимо (4.20) на (4.19)

$$\frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.21)$$

Співставляючи (4.21) із (4.10), і прийнявши до уваги, що $O_1 P = r_{w1}$ і $O_2 P = r_{w2}$, маємо:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.22)$$

При проектуванні зубчастих коліс за основу беруть не з **крок** p_w , а величину, яка називається **торцевим модулем зубів**

$$m_w = \frac{p_w}{\pi}. \quad (4.23)$$

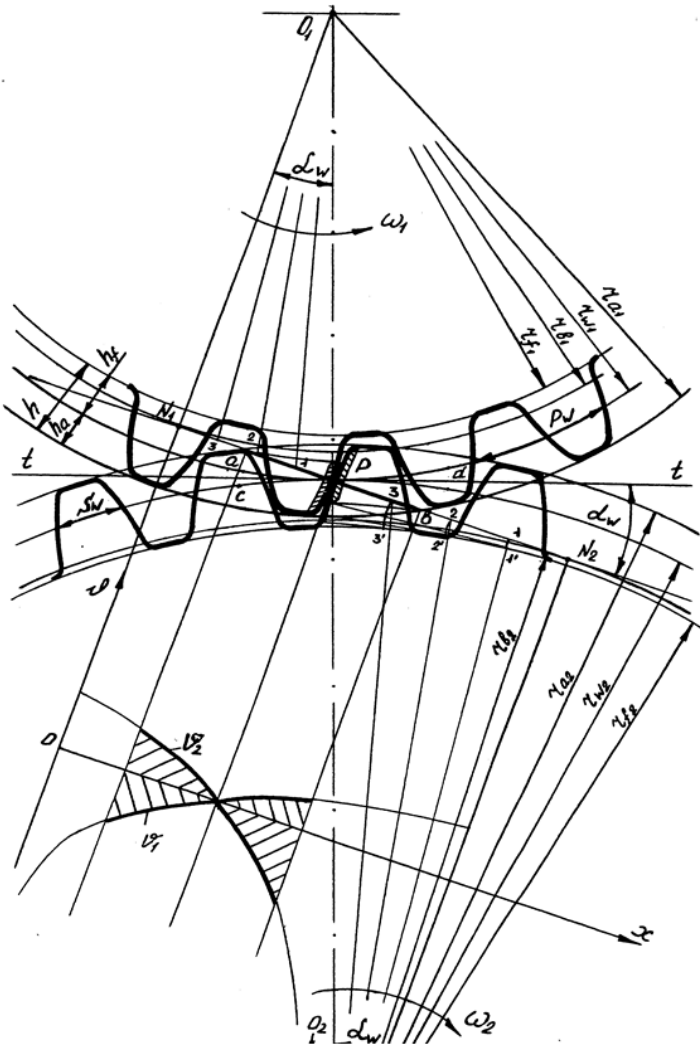


Рис. 4.4. Циліндричні зубчасті колеса

Із формули (4.19) для будь-якого зубчастого колеса маємо:

$$2r_w = d_w = \frac{p_w z}{\pi}. \quad (4.24)$$

Враховуючи (4.23), отримаємо:

$$d_w = m_w z, \quad \text{або} \quad m_w = \frac{d_w}{z} \quad (4.25)$$

Модуль показує число міліметрів діаметра ділильного (початкового) кола, що припадає на один зуб. Модулі стандартизовані.

За кордоном (США, Англія) розміри зубчастих коліс стандартизують за величиною, оберненою модулю, яка називається *пітч* (pitch – крок P_d), $P_d = z/d$, де d – діаметр ділильного кола в дюймах. Відповідно, зв'язок модуля з пітч $m_w = 25,4/P_d$, мм.

Ділильним колом називають коло, що ділить переріз зуба по висоті на дві частини: ніжку і головку.

Для стандартних **нормальних зубчастих коліс** ділильне коло співпадає з **початковим** (коло, що проходить через полюс зачеплення).

Коло, що обмежує зуби зовні, називається **колом вершини зубів**, а коло, що обмежує западини – **колом западин**.

Радіальна відстань h між колом вершини і колом западини відповідає висоті зуба, яка в свою чергу складається із висоти головки h_a і висоти ніжки h_f

$$h = h_a + h_f. \quad (4.26)$$

Відповідно до стандарту розміри зубів нормальної висоти залежать від модуля і складають:

$$h_a = m; h_f = 1,25m; h = 2,25m. \quad (4.27)$$

Товщина зуба s_w по початковому колу і ширина западини e_w рівна половині кроку p_w

$$s_w = e_w = \frac{p_w}{2}. \quad (4.28)$$

Радіус кола вершин

$$r_a = r_w + h_a. \quad (4.29)$$

Радіус кола западин

$$r_f = r_w - h_f. \quad (4.30)$$

Коло, по якому слід котити дотичну без проковзування, щоб побудувати евольвенту (профіль зуба), називається **основним**.

Із трикутника O_1N_1P маємо ($O_1N_1 = r_b$)

$$r_b = r_w \cos \alpha_w. \quad (4.31)$$

Визначимо відстань між центрами коліс O_1O_2

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} = m \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (4.32)$$

4.5. Геометрія евольвентного зачеплення

Через **полюс зачеплення** P проведемо загальну дотичну $T-T$ до початкових кіл (перпендикулярно лінії центрів) і загальну нормаль $N-N$ до профілів зубів в цій точці (рис. 4.4). Кут, утворений прямими $T-T$ і $N-N$, називається **кутом зачеплення** α_w і для нормальних зубчастих коліс згідно стандарту рівний 20° . Лінія яку описує точка дотикання профілів двох зубів спряжених коліс від входження в зачеплення і до виходу, називається **активною лінією зачеплення**, ab .

Два окремі зуби входять в зачеплення в точці a , в якій коло вершин зубів веденого колеса перетинає лінію зачеплення і виходять в точці b , в якій лінію зачеплення перетинає коло вершин зубів ведучого колеса.

Активна лінія зачеплення – це розгортка **дуги зачеплення** cd .

Основним критерієм, який визначає довговічність роботи зубчастих коліс є спрацювання робочих поверхонь зубів, величина якого оцінюється глибиною стертого шару металу внаслідок тертя при взаємному ковзанні робочих поверхонь зубів спряжених коліс.

Для визначення робочих поверхонь профілів зубів дугою з центром в т. O_1 і радіусом O_1a робимо засічку на профілі зуба ведучого колеса, що в даний момент проходить через полюс P . Аналогічно із т. O_2 радіусом O_2b робимо

засічку на відповідному профілі зуба веденого колеса. Ділянки профіля від відповідного кола вершин до отриманих точок (на рис. 4.4 виділено штриховкою) і будуть **робочими поверхнями зубів**.

Відношення довжини дуги зачеплення cd до кроку p_w , називається **коефіцієнтом торцевого перекриття** ε_α (якісна характеристика зачеплення). Він показує число пар зубів, що одночасно знаходяться в зачепленні.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{cd}{p_w} = \frac{ab}{p_w \cos \alpha_w} = \frac{ab}{p_b}. \quad (4.33)$$

Коефіцієнт торцевого перекриття можна визначити аналітично за формулою

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_w \sin \alpha_w}{\pi m \cos \alpha_w}. \quad (4.34)$$

Для забезпечення неперервної роботи без ударів коефіцієнт торцевого перекриття не повинен бути меншим одиниці. Враховуючи можливу неточність при виготовленні і монтажі зубчастих коліс, знос зубів необхідно приймати $\varepsilon_{\alpha \min} = 1,05 \dots 1,1$.

Визначимо **коефіцієнти відносного ковзання** робочих профілів зубів за формулою

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{u_{12}} - \frac{1}{xu_{12}}; \quad (4.35)$$

$$\lambda_2 = 1 + u_{12} - \frac{lu_{12}}{l-x}, \quad (4.36)$$

де u_{12} – передаточне відношення; l – довжина теоретичної лінії зачеплення; x – біжуча координата;

при $x = 0$, $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = 1$;

при $x = l$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\infty$;

при $x = N_1P$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Графіки λ_1 і λ_2 побудовані на рис. 4.4.

4.6. Косозубі циліндричні колеса. Основні параметри

У прямозубих колесах зубці входять в контакт одночасно всією довжиною ширини зубця, а тому перехід зачеплення з зубця на зубець супроводжується ударом і шумом. Дефекти виготовлення (несталість кроку, неточність профілю, тощо) можуть значно погіршити умови роботи прямозубої передачі. Також, прямозубі колеса мають порівняно невеликий коефіцієнт перекриття. Для того, щоб його збільшити і водночас зменшити чутливість зубців до похибок виготовлення і монтажу, прямозубі колеса замінюють колесами з косими або шевронними зубцями. У таких коліс зубці розміщені під деяким кутом β до осі обертання колеса (рис. 4.5).

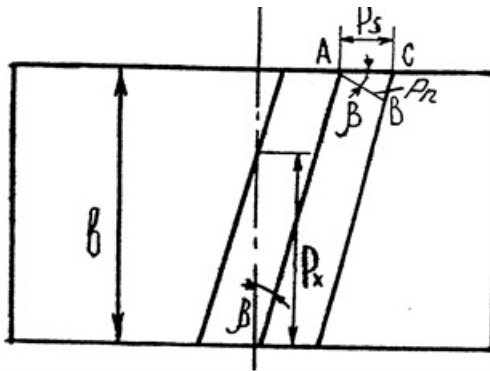


Рис. 4.5. Косозубе колесо

В торцевому перерізі косозубого колеса профіль зуба евольвентний. Позначимо в цьому перерізі крок p_t , модуль m_t , а в перерізі, перпендикулярному лінії зуба, – крок p_n , модуль m_n . Кут зачеплення α_w , ширина колеса – b .

Зв'язок кроку і модуля аналогічний як і для прямозубого колеса

$$p_n = \pi m_n, \quad p_t = \pi m_t. \quad (4.37)$$

Із трикутника ABC (рис. 4.5) маємо

$$p_n = p_t \cos \beta . \quad (4.38)$$

Торцевий модуль зв'язаний з нормальним відповідно

$$m_n = m_t \cos \beta . \quad (4.39)$$

Кут нахилу зубців приймають $\beta = 8 \dots 30^\circ$.

Стандартним є нормальний модуль. Для визначення геометричних розмірів косозубого колеса в нормальному перерізі використовують формули для прямозубого колеса.

Геометричні параметри в торцевому перерізі визначаються за торцевим модулем. Наприклад, радіус початкового кола буде рівний

$$r_w = \frac{m_t z}{2} = \frac{m_n z}{2 \cos \beta} . \quad (4.40)$$

Коефіцієнт торцевого перекриття косозубого колеса

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta . \quad (4.41)$$

де ε_α – коефіцієнт торцевого перекриття, як для прямозубого колеса; $\varepsilon_\beta = b/p_x$ – коефіцієнт осьового перекриття, тут p_x - осьовий крок.

Із рис. 4.5 $p_x = p_t / \operatorname{tg} \beta$, тоді

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \frac{b \operatorname{tg} \beta}{p_t} . \quad (4.42)$$

Переваги зачеплення косозубих коліс:

- значно більший коефіцієнт торцевого перекриття (10–20);
- більший момент опору зуба за рахунок збільшення його довжини без збільшення ширини колеса;
- менший шум через покращення плавності зачеплення.

Недолік: виникає осьова сила.

Для зрівноважування осьових сил застосовують спарені косозубі, або **шевронні колеса**, в яких зубці мають нахил в різні сторони дзеркально середній торцевій площині колеса.

4.7. Методи нарізання зубів зубчастих коліс

Одним із недоліків зубчастих передач є необхідність точного нарізання зубчастих коліс. Загалом виділяють два методи виготовлення: метод копіювання, та метод обкатування, які можна виконати практично різними способами (інструментами).

Метод копіювання полягає в тому, що інструмент для виготовлення зубчастого колеса, відтворює форму або самого колеса, або западини між зубами. До цього методу відноситься виготовлення зубчастих коліс литвом (відливка), штампування і фрезерування впадин між зубами за допомогою дискових або пальцевих фрез.

Найчастіше застосовують фрезерування модульною фрезою з зубцями, що мають в перерізі такі ж обриси, як і западини між зубами колеса, що виготовляється (рис. 4.6).

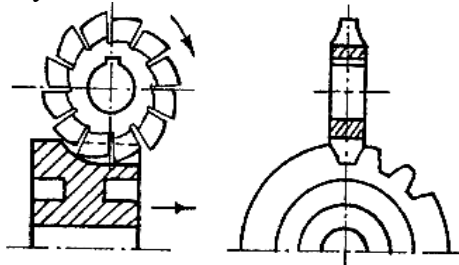


Рис. 4.6. Нарізання зубів фрезою

Процес фрезерування однієї западини складається з обертального руху фрези та поступального руху заготовки назустріч фрезі. Для виготовлення наступної западини заготовку повертають на кут $360^\circ/z$ (де z – число зубців колеса) і повторюють процес. Хоча в сучасних верстатах процеси подачі і повороту заготовки автоматизовані, такий спосіб не являється достатньо продуктивним. Обриси западин між зубами коліс, навіть однакового модуля, при різних числах зубів будуть неоднакові. Тобто на виробництві необхідно мати значну кількість фрез під

кожний випадок.

Метод обкатування є більш технологічним. В якості різального інструменту тут застосовуються інструментальні рейки (гребінки), довбачі зуборізні і черв'ячні фрези.

В процесі нарізання зубів інструмент і заготовка колеса відтворюють відносний рух, який би мали зуби коліс, що знаходяться в дійсному зачепленні. При цьому інструмент зрізає ті частини заготовки, які заважають йому знаходитись в зачепленні з колесом що виготовляється.

Найбільш продуктивними є верстати з черв'ячними фрезами. Контур гребінки і перерізу черв'ячної фрези називають вихідним контуром інструментальної рейки. Його розміри нормалізовані. Пряма на гребінці, вздовж якої товщина зуба рівна ширині западини і половині кроку, називається ділильною прямою гребінки.

При нарізанні нормального зубчастого колеса гребінку встановлюють так, щоб її ділильна пряма дотикалась до ділильного кола колеса, яке виготовляється.

Ділильна пряма і ділильне коло котяться без ковзання одне відносно одного.

4.8. Підрізування зубів. Найменше число зубів на колесі

При використанні зубчастих коліс певного числа зубів виникає ситуація, коли вершина зуба колеса врізається в ніжку зуба шестерні, виконану зі стандартним евольвентним профілем. Це призведе до заклинювання зуба колеса, а відповідно і поломки або посиленого спрацювання. Щоб запобігти цьому явищу, ніжку зуба шестерні треба відповідним чином підрізати. При використанні методу обкатування для нарізання зубів різальний інструмент і заготовку також можна розглядати як зубчасту передачу. При чому в процесі нарізання

заклинювання не виникатиме тому, що інструмент зріже ту частину профілю зуба, що йому заважає. В результаті отримаємо зуби з необхідним вибором матеріалу що «заважає» (рис. 4.7)

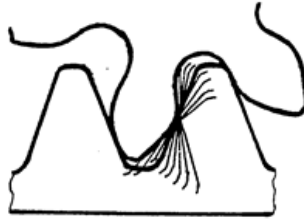


Рис. 4.7. Підрізування зубів

Однак, хоча це і вирішить проблему заклинювання, зменшиться поперечний переріз зуба, що опирається напруженням згину, а також збільшаться величини питомих тисків на ділянці видаленої частини активного профіля зуба, а отже, збільшиться спрацювання зубів.

Тому при виготовленні зубчастих коліс намагаються максимально обійтись без підрізування зубів, при цьому забезпечивши мінімально можливе число зубів шестерні для зменшення загальних габаритів передачі.

Для нормального зубчастого зачеплення, у якого, згідно стандарту, кут зачеплення $\alpha_w = 20^\circ$ і коефіцієнт висоти головки зуба $h_a^* = 1,0$, найменше число зубів колеса, при якому відсутнє підрізування, рівне $z_{min} = 17$.

4.9. Виправлення (корегування) зубчастих коліс

Згадане вище мінімальне число зубів для нормальних евольвентних коліс ($z_{min} = 17$) досить велике. При необхідності його можна зменшити, збільшивши кут зачеплення α_w і зменшивши висоту головки зубця $h_a^* = 0,8$.

Тобто для того, щоб зробити передачу більш компактною, потрібно відступити від норм стандарту і застосувати такі індивідуальні геометричні умови

зачеплення, які дозволяли б здійснити передачу з числами зубців менше z_{min} і забезпечити при цьому нормальну роботу коліс.

Зубчасті колеса, що не відповідають стандартну, мають загальну назву виправлених, або **коригованих**.

Слід розуміти, що порушення стандарту призводить до погіршення взаємозамінності і ускладнення ремонту такої передачі, адже у випадку поломки потрібно розраховувати і замінити обидва колеса пари.

Однак, коли компактність передачі є більш пріоритетною можна вдаватись до коригування.

Методом обкатування дає можливість дуже просто замінювати окремі геометричні параметри зубчастого колеса і виготовляти кореговані зубчасті колеса з більш раціональними в конкретному випадку параметрами.

Для виготовлення таких коліс гребінка або вихідний контур черв'ячної фрези мають крок $p = \pi m$, однаковий на будь-якій горизонтальній прямій. Профіль зубців прямолінійний з нахилом під кутом $\alpha_w = 20^\circ$ (рис. 4.8).

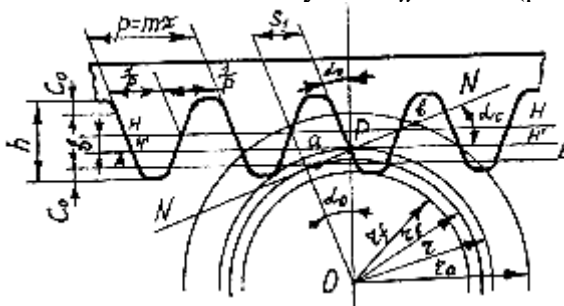


Рис. 4.8. Вихідний контур

Якщо установити центр заготовки колеса відносно гребінки, так, щоб початкове коло заготовки дотикалось до середньої (модульної) прямої гребінки, то в результаті гребінка наріже нормальне колесо із заданим числом зубів z . Якщо ж, тепер, не змінюючи положення колеса, відвести

гребінку або черв'ячну фрезу від нормального положення до центру заготовки (від'ємне зміщення) або від центра (додатне) на деяку величину, то буде нарізано кориговане зубчасте колесо.

Міжосьова відстань двох коригованих коліс у загальному випадку вже не дорівнюватиме міжосьовій відстані коліс, виготовлених згідно стандарту. Тому ділильні кола не співпадатимуть з початковими.

Запитання для перевірки знань по темі 4:

1. Як визначається передаточне відношення простого зубчастого механізму?
2. Який механізм називається зубчастою передачею?
3. Завдання теорії зачеплення циліндричних зубчастих коліс.
4. Як формулюється основна теорема зачеплення?
5. Що називається евольвентою кола?
6. Що називається евольвентним кутом, або інволютою кута профілю евольвенти?
7. Модулем зубчастого колеса називається?
8. Як визначається коловий крок зубчастого колеса?
9. Як визначається висота зуба зубчастого колеса?
10. Як визначається відстань між центрами обертання зубчастих коліс?
11. Модуль зубчастих коліс зубчастої передачі.
12. Який модуль є стандартним у циліндричній косозубій передачі?
13. Як співвідносяться торцевий та нормальний модуль косозубого зубчастого колеса?

ТЕМА 5. Складні та просторові зубчасті механізми

- 5.1. Передаточні відношення складних зубчастих передач з нерухожими осями
- 5.2. Зубчасті механізми з рухожими осями. Планетарні та диференціальні механізми
- 5.3. Кінематика диференціальних та планетарних механізмів
- 5.4. Керування змінами швидкості за допомогою зубчастих диференціальних механізмів
- 5.5. Визначення передаточних відношень планетарних механізмів графічним методом
- 5.6. Поняття про хвильову передачу. Кінематика
- 5.7. Проектування планетарних механізмів
- 5.8. Конічні зубчасті передачі. Основні параметри
- 5.9. Черв'ячна передача
- 5.10. Гвинтові зубчасті колеса
- 5.11. Поняття про нові види зубчастого зачеплення

5.1. Передаточні відношення складних зубчастих передач з нерухожими осями

Зубчасті механізми, в залежності від геометрії можуть або зменшувати або збільшувати кутову швидкість при передаванні обертального руху. В першому випадку такі передачі будуть називатися *редукторами*, а в другому – *мультиплікаторами*.

Одна пара коліс, що утворюють зубчасту передачу (одноступінчаста передача) може забезпечити обмежене значення передаточного відношення.

Таке передаточне відношення u_{12} , як вже говорилося раніше, виражається формулою

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.1)$$

Тобто, конструктивно, u_{12} залежить від числа зубів z_1 і z_2 , а отже обмежене певною величиною. На практиці не рекомендується перевищувати $u_{12} = 1 \dots 10$.

Якщо технічна задача вимагає більшого передаточного відношення, то його можна забезпечити за допомогою кількох проміжних валів, на яких закріплюють зубчасті колеса.

Багатоступінчасті зубчасті передачі відносяться до *складних зубчастих механізмів*. Вони, в свою чергу, бувають з нерухомими і рухомими осями.

Розглянемо спочатку складні зубчасті механізми з *нерухомими осями* (рис. 5.1).

Такі механізми діляться на: *ступінчасті* (паралельна серія) (рис. 5.1, а), та *рядові* (послідовна серія зубчастих коліс) (рис. 5.1, б).

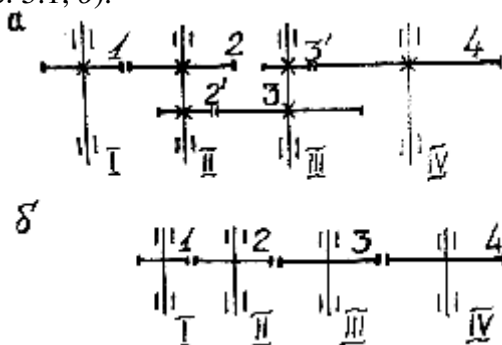


Рис. 5.1. Складні зубчасті механізми

Передаточне відношення зубчастого механізму з паралельною серією зубчастих коліс (рис. 5.1, а) буде рівне

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_{2'}}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_{3'}}{\omega_4} = u_{12} u_{23} u_{34}. \quad (5.2)$$

Враховуючи (5.1) вираз (5.2) прийме вигляд

$$u_{14} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}} \cdot \frac{z_4}{z_{3'}}. \quad (5.3)$$

Передаточне відношення рядової серії

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \frac{z_4}{z_1}. \quad (5.4)$$

Передаточне число для такого механізму дорівнює відношенню числа зубів останнього колеса до числа зубів першого колеса. Тобто, а нього не впливають проміжні колеса. Рядові передачі використовуються, коли треба збільшити міжосьову відстань, без збільшення габаритів висоти, або змінити напрям обертання вхідного і вихідного валів.

5.2. Зубчасті механізми з рухомими осями. Планетарні та диференціальні механізми

Зубчасті механізми, у яких геометричні осі одного чи декількох коліс переміщуються у просторі; називаються *планетарними*. Планетарні механізми з однією ступінню вільності називаються *звичайними планетарними механізмами* (рис. 5.2, а).

Планетарні механізми з ступінню вільності два і більше, називається *диференціальними* (рис. 5.2, б).

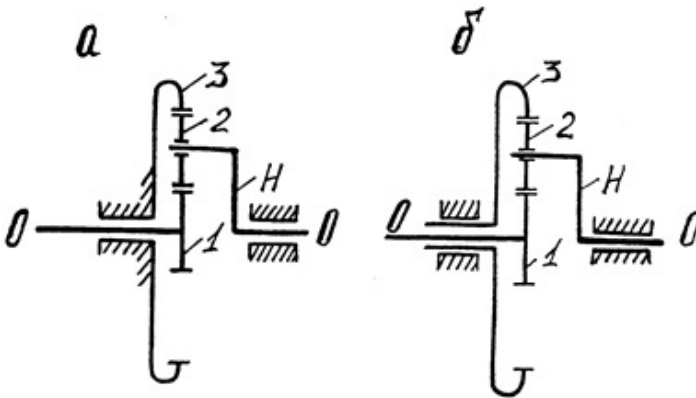


Рис. 5.2. Зубчасті механізми з рухомими осями:
а – планетарний механізм Джемса; б – диференціальний механізм

Зубчасті колеса 1 і 3 називаються центральними, при цьому колесо 1 ще має назву *сонячного*, а колесо 3 – *епіцикла*. Зубчасте колесо 2, вісь обертання якого обертається навколо другої осі називається *сателітом*. Ланка Н називається *водилом*. Якщо центральне колесо закріплене, його називають опорним.

Ступінь вільності таких механізмів визначається за формулою Чебишева (1.4): $W = 3n - 2p_5 - p_4$.

Планетарний механізм

	n	p_5	p_4
	1	0-1	1-2
	2	2-Н	2-3
	Н	Н-0	–
Σ	3	3	2

Диференціальний механізм

	n	p_5	p_4
	1	0-1	1-2
	2	2-Н	2-3
	3	3-0	–
	Н	Н-0	–
Σ	4	4	2

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

Диференціальну передачу можна перетворити в планетарну шляхом закріплення одного із центральних коліс 1 або 3.

Зубчасте колесо 1 обертається навколо осі і знаходиться в зачепленні разом з колесом 2. Колесо 2 виконує одночасно два рухи: обертальний разом з водилом Н з кутовою швидкістю ω_H навколо нерухомої спільної осі 0-0 механізму, залишаючись у той самий час у постійному зачепленні з колесами 1 та 3 і в обертальний з кутовою швидкістю ω_2^H навколо своєї власної осі. Зубчасте колесо 3 обертається в диференціальному механізмі і воно нерухоме (опорне) в наведеному планетарному механізмі.

На рис. 5.3 показано складний зубчастий механізм з рухомими осями з зовнішнім зачепленням (рис. 5.3, а) і внутрішнім зачепленням (рис. 5.3, б). Якщо всі колеса механізму обертаються, то ступінь вільності – два і це буде диференціальний механізм, якщо одне із коліс закріпити – 1

або 3, то ступінь вільності буде одиниця і тоді це буде планетарний механізм, який має назву *редуктора Давида*.

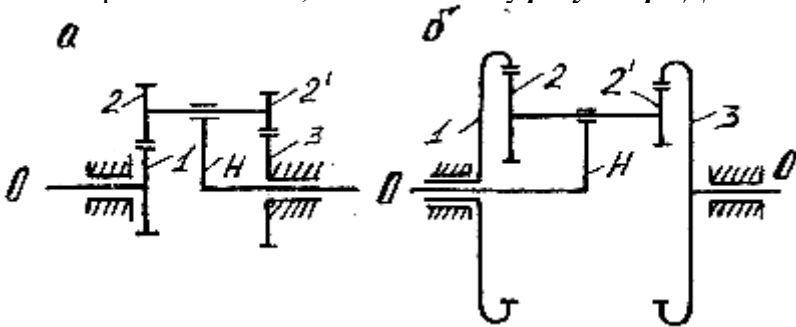


Рис. 5.3. Зубчасті механізми типу редуктора Давида:
 а – з зовнішнім зачепленням; б – з внутрішнім зачепленням

Планетарний механізм			
	n	p_5	p_4
	1	0-1	1-2
	22'	22'- H	2'-3
	H	$H-0$	–
Σ	3	3	2

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Диференціальний механізм			
	n	p_5	p_4
	1	0-1	1-2
	22'	22'- H	2'-3
	3	3-0	–
	H	$H-0$	–
Σ	4	4	2

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2.$$

5.3. Кінематика диференціальних та планетарних механізмів

Для виведення формули, що зв'язує швидкості ланок диференціального механізму, застосовуємо *метод Вілліса*, що ґрунтується на принципі оберненого руху.

Надамо усім ланкам механізму додаткового обертання навколо осі 0-0 з кутовою швидкістю $-\omega_H$, що дорівнює за величиною, але протилежна за знаком кутовій швидкості водила H . Застосувавши метод оберненого руху, умовно перетворимо диференціальний механізм в *обернений* тобто у звичайний двохступінчастий зубчастий механізм з

нерухомими осями (нерухожим водилом).

Від кутової швидкості кожної ланки віднімемо кутову швидкість ω_H водила.

Для *редуктора Джемса* (рис. 5.2, б) маємо:

Номер ланки	Кутлова швидкість диференціального механізму	Кутлова швидкість оберненого механізму
1	ω_1	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
H	ω_H	$\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Передаточне відношення від ланки 1 до ланки 3 в оберненому механізмі

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}. \quad (5.5)$$

Тут верхній індекс « H » біля позначення величин означає, що вона відноситься до оберненого механізму (з нерухожим водилом H)

Формула (5.5) зв'яже між собою швидкості обертання центральних коліс 1 і 3 і водила H . Задавшись двома із них завжди можна знайти третю швидкість. Для цього потрібно знати числа зубів. Тоді передаточне число, як для механізму з нерухомими осями, знайдемо аналогічно (5.3) і (5.4)

$$u_{13}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(+\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1}. \quad (5.6)$$

Знак «-» показує, що зубчасті колеса 1 і 2 обертаються в різні сторони (*зовнішнє зачеплення*), а «+» – зубчасті колеса 2 і 3 обертаються одну сторону (*внутрішнє зачеплення*). В результаті маємо від'ємне загальне передаточне число оберненого механізму.

Для оберненого механізму *редуктора Давида* (рис. 5.3, б)

$$u_{13}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (5.7)$$

Передаточне число *планетарного механізму* отримаємо, застосувавши також метод оберненого руху. Для редуктора Джемса:

Номер ланки	Кутова швидкість диференціального механізму	Кутова швидкість оберненого механізму
1	ω_1	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
2	ω_2	$\omega_2^H = \omega_2 - \omega_H$
3	$\omega_3=0$	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
<i>H</i>	ω_H	$= -\omega_H$ $\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Передаточне відношення від ланки 1 до ланки 3 в оберненому механізмі:

$$u_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}. \quad (5.8)$$

Оскільки $\omega_1/\omega_H = u_{1H}$, то рівняння (5.8) запишемо

$$u_{13}^H = 1 - u_{1H}, \text{ або } u_{1H} = 1 - u_{13}^H. \quad (5.9)$$

Передаточне відношення планетарної передачі

дорівнює одиниці мінус передаточне відношення оберненого механізму.

Враховуючи (5.6) для редуктора Джемса

$$u_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (5.10)$$

Враховуючи (5.7) для редуктора Давида

$$u_{1H} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}. \quad (5.11)$$

Приклад: Необхідно визначити передаточне відношення u_{1H} для редуктора Давида (рис. 5.3, б) при $z_1 = z_2' = 100$, $z_2 = 99$, $z_3 = 101$.

Згідно (5.11) маємо

$$u_{1H} = 1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100} = \frac{1}{10000}.$$

Центральне колесо 1 буде обертатися в 10000 раз повільніше водила *H*.

5.4. Керування змінами швидкості за допомогою зубчастих диференціальних механізмів

Зубчасті диференціальні механізми мають степінь вільності $W = 2$, тобто відповідно до принципу утворення механізмів, у них має бути дві ланки керування. На практиці це використовується, наприклад, у приводах ходозменшувачів, де додатковий двигун використовується для силового зменшення кутової швидкості вихідної ланки. Або ж диференціальний зубчастий механізм використовується для розподілення потужності, що надходить на вхідну ланку, між двома веденими (диференціал трансмісії автомобіля).

Розглянемо можливість керування змінами швидкості за допомогою зубчастої диференціальної передачі, яка складається з наступних ланок (рис. 5.4): сонячного зубчастого колеса 1, сателітів 2, зубчастого колеса – епіцикла 3 і водила 4 розміщених в корпусі. Сонячне зубчасте колесо 1 знаходиться в центрі. Сателіти 2 обертаються навколо сонячного зубчастого колеса 1 і, одночасно, навколо своєї власної осі. Зубчасте колесо – епіцикл 3 охоплює сателіти 2, які встановлені на водилі 4. Усі сателіти 2 обертаються одночасно в одному напрямку.

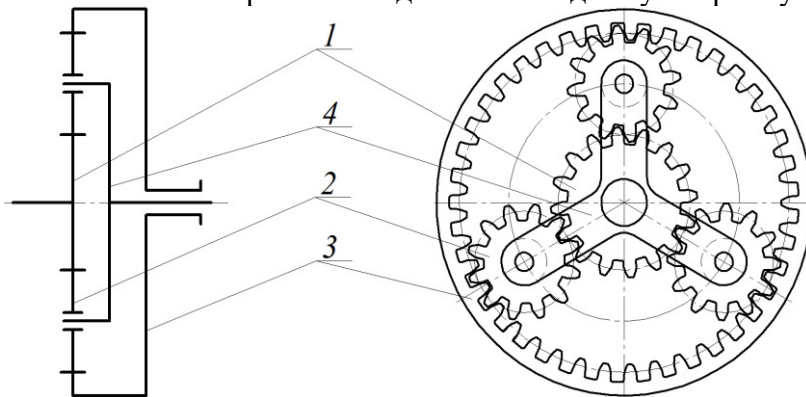


Рис. 5.4. Схема зубчастої диференціальної передачі

Розглянемо рух ланок зубчастої диференціальної передачі і можливість керування їх швидкістю та напрямками обертання на простих прикладах руху двох зубчастих рейок між якими встановлена шестерня.

Приклад 1 (рис. 5.5). Між зубчастими рейками **A** і **B** розміщена шестерня **C**. Зубчаста рейка **B** нерухома, а зубчаста рейка **A** рухається в напрямку, показаному стрілкою.

У цьому випадку шестерня **C** рухається у тому ж напрямку, що і зубчаста рейка **A**, тільки повільніше неї. Якщо цей приклад застосувати до зубчастої диференціальної передачі, тоді в якості зубчастої рейки **A** буде зубчасте колесо – епіцикл 3, зубчаста рейка **B** – сонячне зубчасте колесо 1 і шестерня **C** – сателіти 2. Коли повернути зубчасте колесо – епіцикл 3 в напрямку стрілки при зупиненому сонячному зубчастому колесі 1, сателіти 2 будуть обертатися в тому ж напрямку, що і зубчасте колесо – епіцикл 3, але повільніше. З сателітами 2 буде обертатися водило 4.

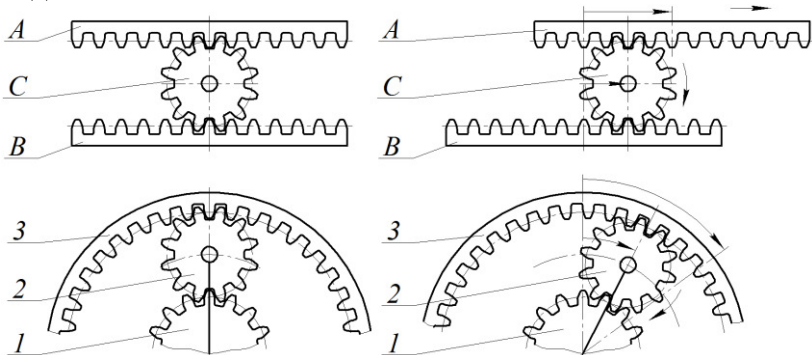


Рис. 5.5. Схема до прикладу 1

Приклад 2 (рис. 5.6). Розглянемо рух елементів зубчастої диференціальної передачі, коли будемо рухати

зубчасту рейку **A** як і в першому прикладі, а зубчаста рейка **B** буде рухатися у протилежному напрямку зубчастій рейки **A**. Тоді шестерня **C** рухається з меншою швидкістю. У зубчастій диференціальній передачі, швидкість з якою переміщається водило 4 зубчастим колесом – епіциклом 3 зменшується по відношенню до швидкості сонячного зубчастого колеса 1, яке обертається в зворотному напрямку. Швидкість водила 4 у цьому випадку буде менша ніж у попередньому прикладі.

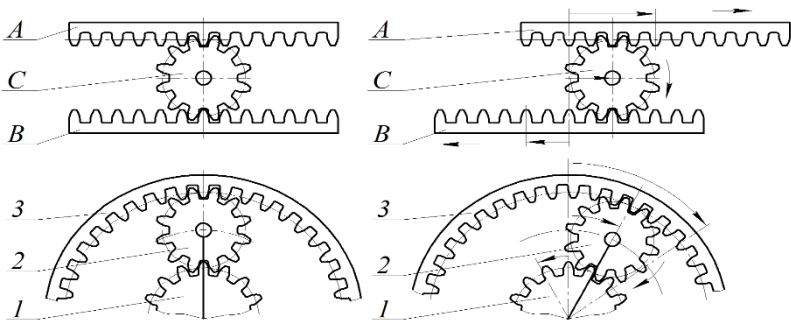


Рис. 5.6. Схема до прикладу 2

Приклад 3 (рис. 5.7). Будемо рухати зубчасті рейки **A** і **B** в одному напрямку з однаковими швидкостями. Шестерня **C** між зубчастими рейками **A** і **B** не може обертатися самостійно і вона рухається разом з ними. Якщо в зубчастій диференціальній передачі сонячне зубчасте колесо 1 і зубчасте колесо – епіцикл 3 обертаються в одному напрямку і з однаковою швидкістю, тоді водило 4 обертається у тому ж напрямку і з тією швидкістю.

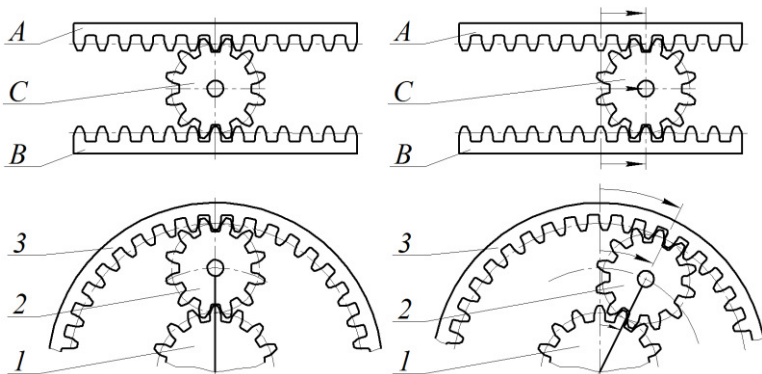


Рис. 5.7. Схема до прикладу 3

Приклад 4 (рис. 5.8). Спробуємо рухати зубчасту рейку **В** у напрямку показаному стрілкою, а шестерня **С** залишиться нерухомою, обертаючись навколо своєї осі. У цьому випадку зубчаста рейка **А** рухається у протилежному напрямку руху зубчастої рейки **В**.

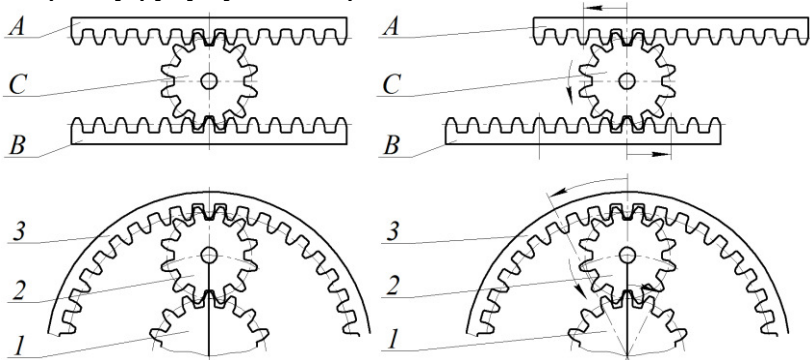


Рис. 5.8. Схема до прикладу 4

Стосовно зубчастої диференціальної передачі, тоді як водило 4 зафіксоване і сонячне зубчасте колесо 1 обертається по годинниковій стрілці, сателіти 2 обертаються і рухають зубчасте колесо – епіцикл 3 у зворотному напрямку руху.

Приклад 5 (рис. 5.9). Накінець, зафіксуємо зубчасту рейку **В** і будемо рухати шестерню **С** в напрямку стрілки. Тоді зубчаста рейка **А** рухається з великою швидкістю у тому ж напрямку, що і шестерня **С**. Знову застосуємо цю ситуацію до зубчастої диференціальної передачі. Якщо сонячне зубчасте колесо 1 заблоковане, а водило 4 обертається за годинниковою стрілкою, сателіти 2 обертаються у тому ж напрямку навколо сонячного зубчастого колеса 1.

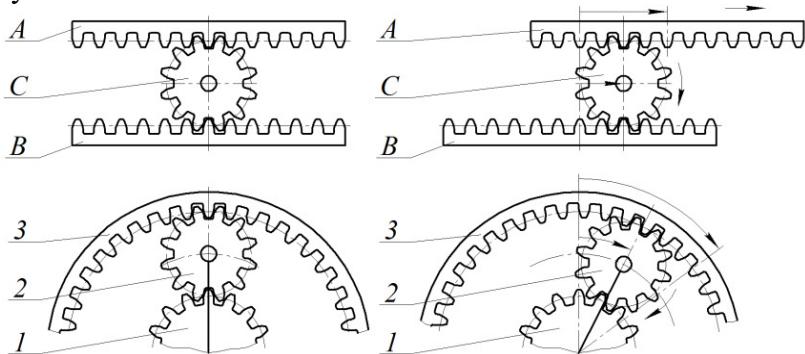


Рис. 5.9. Схема до прикладу 5

Швидкість обертання зубчастого колеса – епіцикла 3 складається з власної швидкості обертання сателітів 2 і швидкості їх обертання навколо нерухомого сонячного зубчастого колеса 1. Іншими словами зубчасте колесо – епіцикл 3 обертається швидше, ніж водило 4.

З огляду на наведені приклади руху окремих ланок у диференціальній передачі та їх аналізу можна стверджувати про можливість керування швидкістю за величиною і напрямком руху в зубчастій диференціальній передачі у залежності від стану руху її ланок.

Для зміни руху цих ланок, як правило, для їх зупинки, у сучасних умовах застосовуються фрикційні муфти і гальма.

На рис. 5.10 розглянуті базові схеми **одноступінчастих зубчастих диференціалів** з циліндричними зубчастими колесами:

- за розміщеннями коліс: *a* – однорядні; *б, в, г* – двохрядні;

- за видом зачеплення коліс: *a, б* – зовнішнє і внутрішнє; *в* – внутрішнє; *г* – зовнішнє.

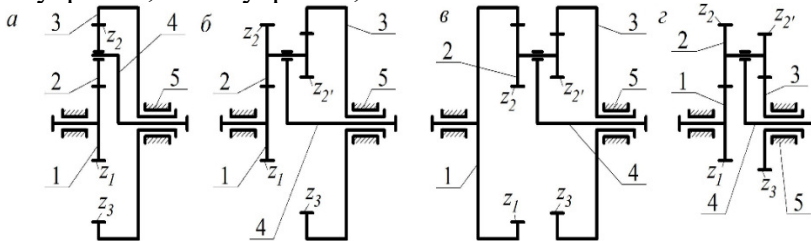


Рис. 5.10. Базові схеми одноступінчастих зубчастих диференціалів

Розглянемо випадок коли ведучою ланкою буде сонячне зубчасте колесо 1, а веденою – водило H (рис. 5.11). Керування зміною веденої ланки – водила H здійснюється через епіцикл 3. Якщо прийняти кутову швидкість ведучої ланки 1 за $\omega_1 = const$, тоді за рахунок зміни швидкості колеса – епіцикла 3 ($\omega_3 = var$) за допомогою зупинника обертального руху 6 можна плавно змінювати швидкість веденої ланки – водила H (ω_H).

В якості зупинника обертального руху зазвичай використовують фрикційні муфти чи гальма. В [3] пропонується використовувати замкнуту гідросистему. Маємо те, що зубчасте колесо – епіцикл 3 через зубчасту передачу 7 приводить у рух шестеренчастий гідронасос, який перекачує рідину в замкнутій гідросистемі – коли регульовальний кран відкритий. Якщо регульовальний кран закритий, тоді гідросистема 6 закрита, тобто шестеренчастий гідронасос зупинений і, при цьому, зубчасте колесо – епіцикл 3 зупинене ($\omega_3 = 0$). Таким чином,

в залежності від пропускної здатності регулювального крана, швидкість зубчастого колеса – епіцикла 3 (ω_3) змінюється від 0 до ω_{3max} і, при цьому, змінюється швидкість водила H (ω_H).

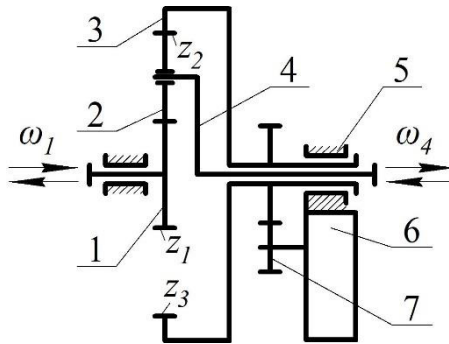


Рис. 5.11. Схема зубчастого диференціала з керуванням через епіцикл

Зв'язок між швидкостями в диференціальній передачі описується відомим аналітичним виразом (5.5). Якщо вирішити його відносно кутової швидкості ведучої ланки, для нашого прикладу ω_H , отримаємо

$$\omega_H = \frac{\omega_1 - \omega_3 u_{13}^H}{1 - u_{13}^H}, \quad (5.12)$$

де u_{13}^H – передаточне відношення механізму від сонячного зубчастого колеса 1 до епіцикла 3 при зупиненому водилі H . Для схеми, що розглядається $u_{13}^H = -(z_3/z_1)$, де z_1 – число зубців сонячного зубчастого колеса; z_3 – число зубців епіцикла. Знак (-) тому, що у передачі є одне зовнішнє (колеса 1–2) і одне внутрішнє (колеса 2–3) зачеплення. Таким чином, врахувавши від'ємне значення передаточних відношень, вираз (5.12) можна представити у вигляді графічної залежності $\omega_H = \omega_H(\omega_3, \omega_1, u_{13}^H)$, при прийнятих значеннях $u_{13}^H = 0 \dots 10$ та кутових швидкостях ланок

ведучої $\omega_1 = 100$ рад/с і керування $\omega_3 = 0 \dots 100$ рад/с. Отримані графічні залежності показані на рис. 5.12, а.

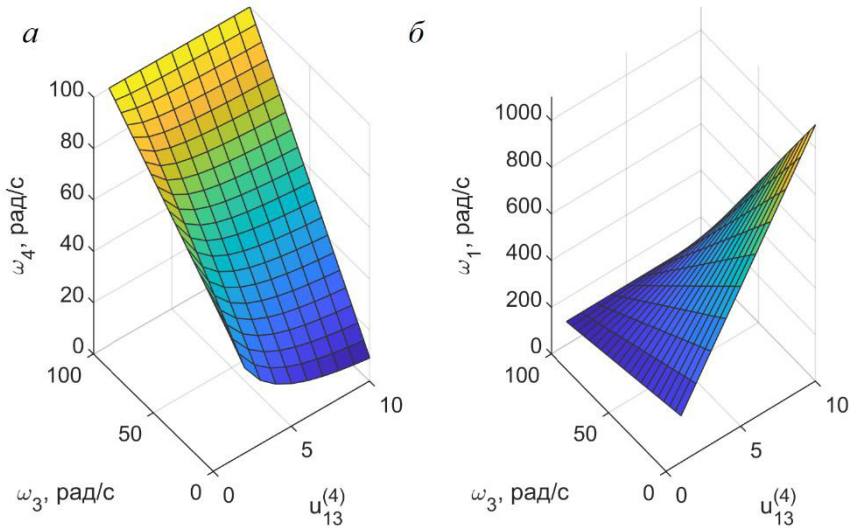


Рис. 5.12. Графічні залежності:

$$а - \omega_H = \omega_H(\omega_3, \omega_1, u_{13}^H); \quad б - \omega_1 = \omega_1(\omega_3, \omega_H, u_{13}^H)$$

Якщо ж прийняти водило H за ведучу ланку (див. рис. 5.11 в зворотному напрямку) з кутовою швидкістю $\omega_H = const$, тоді за рахунок зміни швидкості зубчастого колеса – епіцикла 3 $\omega_3 = var$ за допомогою замкнутої гідросистеми 6 можна плавно змінювати швидкість веденої ланки, сонячного зубчастого колеса 1. У цьому випадку зубчата диференціальна передача з пристроєм для керування зміною швидкості працює таким чином. Водило 4 через сателіт 2 приводить у рух епіцикл 3, а той через зубчасту передачу 7 приводить у рух шестеренчастий гідронасос, який перекачує рідину в замкнутій гідросистемі 6 – коли регулювальний кран відкритий. Якщо регулювальний кран закритий, тоді замкнута гідросистема 6 замкнута, тобто шестеренчастий гідронасос зупинений і, при цьому,

зубчасте колесо – епіцикл 3 зупинене $\omega_3 = var$. Знову ж, в залежності від пропускної здатності регулювального крана, швидкість зубчастого колеса – епіцикла 3 ω_3 змінюється і, при цьому, змінюється швидкість сонячного зубчастого колеса ω_1 .

Формулу (5.5) вирішимо відносно ω_1 , маємо

$$\omega_1 = \omega_H(1 + u_{13}^H) - \omega_3 u_{13}^H, \quad (5.13)$$

Графічне подання (5.15) показане на рис. 5.12, б.

5.5. Визначення передаточних відношень планетарних механізмів графічним методом

Графо-аналітичний метод кінематичного дослідження планетарних механізмів зводиться до побудови трикутників лінійних швидкостей кожного колеса, знаходження кутових швидкостей всіх ланок і передаточних відношень між ними (метод Л.П. Смирнова).

Побудуємо кінематичну схему механізму в масштабі μ_l (рис. 5.13, а).

На деякій відстані від схеми проведемо полюсну лінію $P-P$ (рис. 5.13, б).

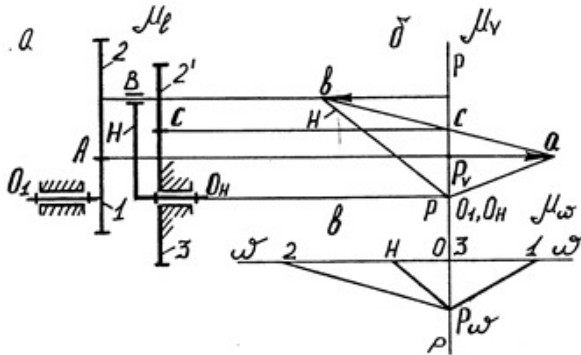


Рис. 5.13. Графічне визначення передаточних відношень:
 а – кінематична схема механізму; б – план лінійних швидкостей;
 в – план кутових швидкостей

З плану механізму на лінію $P-P$ проектуємо точки, швидкості яких рівні нулю: O_1 , O_H , C . Далі будуємо трикутники швидкостей для ланок механізму. Побудову починаємо з довільної ланки, в якій швидкість однієї з точок рівна нулю, наприклад з зубчастого колеса 1.

Визначимо швидкість т. A , що належить зубчастому колесу 1. Вважаємо, що кутова швидкість ω_1 і розміри ланок відомі, тоді

$$V_A = \omega_1 r_{O_1 A}. \quad (5.14)$$

Відкладемо відрізок, що зображає швидкість V_A в масштабі μ_V , отримаємо точку a . З'єднаємо т. a з точками O_1 і C . Продовжимо лінію ac до перетину з віссю сателітів 2-2, отримаємо точку b . З'єднаємо точку b з віссю O_H . Лінії $O_1 a$, ab і $O_H b$ пропорційні кутовим швидкостям відповідно ланок 1, 2 і H .

Побудуємо план аналогів кутових швидкостей (рис. 5.13, в).

Проведемо лінію $\omega-\omega$ вибираємо точку P_ω і проведемо з неї похилі лінії, паралельно лініям плану швидкостей $O_1 a$, ab і $O_H b$. На лінії $\omega-\omega$ знайдемо точки перетину з цими похилими лініями. Позначимо ці точки відповідно 1, 2 і H . Із плану кутових швидкостей можна визначити передаточні відношення між ланками механізму.

Передаточне відношення від ланки 1 до водила H

$$u_{1H} = -\frac{01}{0H}, \quad (5.15)$$

де 01 і $0H$ – відрізки із плану кутових швидкостей. Знак «-» – тому, що відрізки 01 і $0H$ лежать по різні сторони від лінії $P_\omega 0$, а зубчасте колесо 1 і водило H мають напрям обертання в протилежні сторони.

Аналогічно можна визначити

$$u_{12} = -\frac{02}{01}; u_{H2} = -\frac{0H}{02}. \quad (5.16)$$

5.6. Поняття про хвильову передачу. Кінематика

В 1959 році Массер в США отримав патент на зубчасту хвильову передачу, яка може застосовуватися в якості редуктора з великим передаточним відношенням. Хвильова зубчаста передача відрізняється від інших зубчастих механізмів тим, що гнучке колесо зазнає хвильової деформації, завдяки якій і передається обертальний рух. Хвильова передача може бути виконана планетарною і диференціальною.

Хвильова зубчаста передача в планетарному одноступінчастому виконанні (рис. 5.14) складається з генератора хвиль деформації (води́ла) 1, з'єднаного з ведучим валом, жорсткого центрального колеса 2 та пружної ланки 3, виконаної у вигляді тонкостінного стаканчика з зубчастим вінцем на вільному кінці і з'єднаної з веденим валом передачі. Зубчастий вінець пружної ланки 3, деформований роликками генератора 1 в еліпс, входить у зачеплення з центральним колесом 2 у двох діаметрально протилежних зонах (у зонах найбільшої деформації).

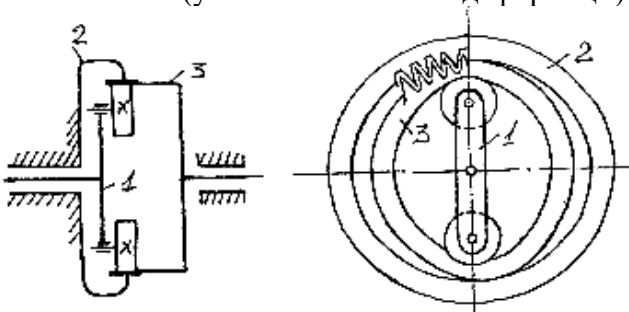


Рис. 5.14. Хвильова передача

Під час обертання генератор 1 своїми роликками обкочує пружно деформований зубчастий вінець 3 по нерухомому центральному колесі 2 переміщуючи у коловому напрямі у бік власного обертання осей зачеплення, або хвилі деформації. При різних числах зубців

2 та гнучкого вінця 3 це приводить до обертання вінця, а отже і з'єданого з ним веденого вала у напрямі, протилежному напрямку обертання генератора 1. Різниця між зубцями кратна числу хвиль генератора. Визначимо ступінь вільності таких передач:

Планетарний механізм

	n	p_5	p_4
	1	1-2	2-3
	3	3-0	–
Σ	2	2	–

Диференціальний механізм

	n	p_5	p_4
	1	1-2	2-3
	2	2-0	–
	3	3-0	–
Σ	3	3	1

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Визначимо передаточне відношення хвильової передачі в планетарному одноступінчатому виконанні (рис. 5.14).

Залежність між кутовими швидкостями ω_1 генератора 1 і (ведучої ланки) та ω_3 пружного вінця (веденої ланки) можна дістати, користуючись методом оберненого руху. Для цього всьому механізму надамо кутову швидкість $-\omega_1$: при цьому в оберненій передачі генератор буде немов би зупинений, а гнучкий вінець і жорстке колесо обертатимуться в одному напрямі відповідно з кутовими швидкостями:

Номер ланки	Кутова швидкість в хвильовій передачі	Кутова швидкість в оберненій передачі
1	ω_1	$\omega_1^{(1)} = \omega_1 - \omega_1 = 0$
2	$\omega_2 = 0$	$\omega_2^{(1)} = \omega_2 - \omega_1 = -\omega_1$
3	ω_3	$\omega_3^{(1)} = \omega_3 - \omega_1$

Передаточне відношення від колеса 2 до гнучкої ланки 3 в оберненому русі визначиться відношенням

$$u_{32}^{(1)} = \frac{\omega_3^{(1)}}{\omega_2^{(1)}} = \frac{\omega_3 - \omega_1}{-\omega_1} = 1 - u_{31} = 1 - \frac{1}{u_{13}}. \quad (5.17)$$

З відношенням (5.14) маємо

$$u_{13} = \frac{1}{1 - u_{32}^{(1)}}. \quad (5.18)$$

Враховуючи, що передаточне відношення $u_{32}^{(1)}$ в зображеній передачі визначається як і для звичайної передачі відношенням чисел зубів, тобто $u_{32}^{(1)} = z_2/z_3$, а $z_2 > z_3$, то рівняння (5.18) остаточно прийме вид

$$u_{13} = \frac{z_3}{z_3 - z_2}. \quad (5.19)$$

5.7. Проектування планетарних механізмів

Планетарні механізми виконують звичайно з декількома сателітами, розміщеними на рівних відстанях один від одного. При числі сателітів, рівному K , вони повинні бути встановлені один відносно одного під кутами $2\pi/K$.

При збільшенні числа сателітів навантаження на кожну пару зубів зменшується; це дозволяє застосовувати колеса менших розмірів, а тому і загальні габарити механізму зменшуються. Однак існує межа числа сателітів. Максимальне число сателітів може бути таким, щоб вершинами своїх зубів сателіти не торкалися один одного. Для того, щоб планетарний механізм можна було скласти, необхідно щоб зуби сателітів могли одночасно увійти в зачеплення з зубами обох центральних коліс. Виконання цих і інших умов повинно бути враховано при проектуванні планетарних механізмів, яке зводиться до визначення числа зубів коліс, при заданому передаточному відношенні і підборі числа сателітів.

При проектуванні планетарного механізму необхідно виконати **наступні умови**: забезпечення заданого передаточного відношення, умову співвісності, умову складання, умову сусідства.

Розглянемо всі ці умови на прикладі редуктора Джемса (рис. 5.15).

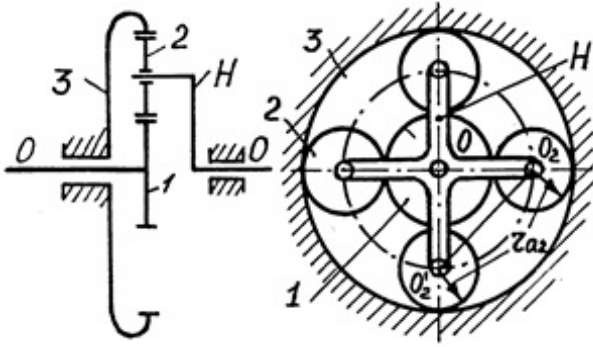


Рис. 5.15. Редуктор Джемса

Забезпечення заданого передаточного відношення

Визначимо необхідне співвідношення між числом зубів коліс редуктора Джемса для забезпечення заданого передаточного відношення, використавши формулу передаточного відношення планетарної передачі (5.10), отримаємо

$$u_{1H} = \frac{z_1 + z_3}{z_1}. \quad (5.20)$$

Умова співвісності

Для виконання умови співвісності необхідно щоб осі центральних (сонячних) коліс 1 і 3 і водила H лежали на одній прямій (осі 0-0).

Із рис. 5.15 видно, що для виконання цієї умови необхідно забезпечити наступне співвідношення між радіусами коліс

$$r_3 = r_1 + 2r_2. \quad (5.21)$$

Виразимо радіуси через модуль і числа зубів

$$\frac{mz_3}{2} = \frac{mz_1}{2} + 2 \frac{mz_2}{2}. \quad (5.22)$$

Скоротивши це рівняння на $m/2$, отримаємо

$$z_3 = z_1 + 2z_2, \text{ або } z_2 = \frac{z_3 - z_1}{2}. \quad (5.23)$$

Таким чином число зубів сателітів залежить від числа зубів центральних коліс. Із рівняння (5.23) випливає, що оскільки z_2 повинно бути числом цілим, то числа зубів z_1 і z_3 повинні бути або обидва парними, або обидва непарними.

Умова складання

При числі сателітів рівним одиниці, передача завжди може бути складена, якщо виконується умова співвісності. В загальному випадку при числі сателітів $K > 1$ цієї умови уже недостатньо.

Для того щоб механізм, який включає K сателітів, міг бути складений, тобто зуби сателітів одночасно могли ввійти в зачеплення з зубами обох центральних коліс, необхідно, щоб відношення суми чисел зубів центральних коліс до числа сателітів було цілим числом, тобто:

$$\frac{z_1 + z_3}{K} = C. \quad (5.24)$$

де C – обов'язково ціле число.

Умова сусідства

Для забезпечення умови сусідства необхідно, щоб сусідні сателіти не зачіплювались головками зубців, тобто щоб відстань між центрами обертання сателітів була більшою двох радіусів кіл вершин, тобто

$$O_2O_2' > 2r_{a2}. \quad (5.25)$$

Визначивши із рис. 5.15 відстань O_2O_2' і виразивши r_{a2} через модуль і число зубів, знайдемо :

$$\sin \frac{\pi}{K} > \frac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}. \quad (5.26)$$

Нерівність (5.26) забезпечує умову сусідства, тобто умову не пересікання шляхів руху зубів сусідніх сателітів.

5.8. Конічні зубчасті передачі. Основні параметри

Конічні зубчасті передачі застосовуються для передавання рухів між валами, що перетинаються (часто під кутом 90). Аксоїдами у відносному русі конічних зубчастих коліс (рис. 5.16) є два конуси А і В. Ці конуси за аналогією з центроїдами (початковими колами циліндричних коліс) називаються початковими конусами.

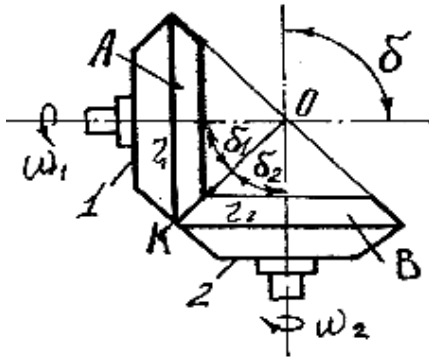


Рис. 5.16. Конічна зубчаста передача

Спільна вершина цих конусів знаходиться в т. О, на перетині їх осей.

Передаточне відношення u_{12} зберігатиметься сталим у тому разі коли початкові конуси котитимуться один по одному без ковзання. Для цього досить, щоб швидкості точки стикання К, яка належить обом конусам, були рівні, тобто $V_1 = V_2$. Оскільки $V_1 = \omega_1 r_1$, а $V_2 = \omega_2 r_2$, то

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2. \quad (5.27)$$

Із прямокутного трикутника (рис. 5.7)

$$r_1 = OK \sin \delta_1 ; r_2 = OK \sin \delta_2 . \quad (5.28)$$

Якщо кути при вершинах початкових конусів $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$, то загальний вираз передаточного відношення можна записати

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1. \quad (5.29)$$

Кут δ_1 при вершині конуса можна знайти аналогічно як для фрикційної конічної передачі

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \delta}{u_{12} + \cos \delta}. \quad (5.30)$$

Теоретично правильним зачепленням конічних зубчастих коліс являється зачеплення сферичне, профілі зубців якого побудовані на сферичній поверхні. Таким чином, точна теорія зачеплення конічних коліс зводиться до вивчення умов зачеплення двох спряжених криволінійних контурів, побудованих на поверхні сфери. Проте профілювання точного евольвентного конічного зачеплення зв'язано з цілим рядом практичних труднощів, оскільки сферична поверхня без спотворення не розгортається на площину, а створений профіль важко було б виготовити. Тому на практиці застосовують наближений метод профілювання евольвентних конічних коліс. Цей метод ґрунтується на тому, що профіль зубів конічних коліс будується не на сфері, а на конічній поверхні OLE, яка дотична до сфери OL'E' (рис. 5.17). Твірна конуса VLC перпендикулярна до твірної початкового конуса ВОС. Точки дуги L'BE' розміщені біля точки В, можна замінити з невеликою похибкою точками дотичної LBE.

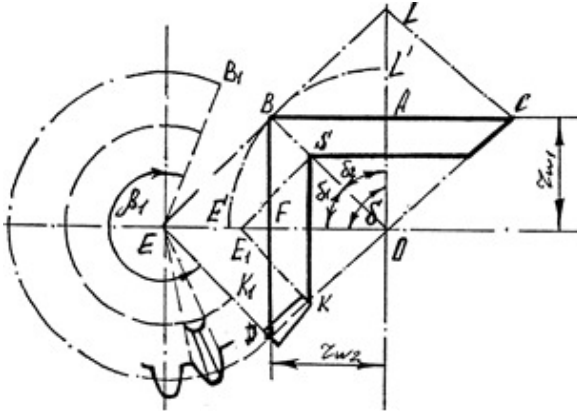


Рис. 5.17. Профілювання конічної передачі

Побудову ведемо так. Вважаємо відомими числа зубів конічних коліс z_1 і z_2 , а також модуль m . Будемо розглядати середній переріз по довжині зуба. Визначимо радіуси початкових кіл в цьому перерізі.

$$r_{w1} = \frac{mz_1}{2}; r_{w2} = \frac{mz_2}{2}. \quad (5.31)$$

Із т. О (рис. 5.17) відкладаємо відрізки $OA = r_{w1}$ і $OF = 2$ ($\delta=90^\circ$).

Затим будемо початкові конуси OCB і ODB . Через точку В проведемо пряму, перпендикулярно OB до перетину її з осями конусів в точках L і E . Конуси LCB і EDB називаються додатковими. В точці В обидва додаткові конуси мають спільну твірну. Поверхні додаткових конусів розгортаємо на цю дотичну площину. Розгортки будуть являти собою сектори кіл, що дотикаються в точці В, радіусами:

$$BE = \rho_1 = \frac{r_{w1}}{\cos \delta_1} \text{ і } LB = \rho_2 = \frac{r_{w2}}{\cos \delta_2}. \quad (5.32)$$

Центральні кути секторів

$$\beta_1 = \frac{2\pi r_{w1}}{\rho_1}; \beta_2 = \frac{2\pi r_{w2}}{\rho_2}. \quad (5.33)$$

На секторах, як на початкових колах, будемо профілі зубів, тим же методом як і для циліндричних коліс. Якщо довжина зуба DK , то зі сторони, зверненої до вершини конусів, зуби обмежуються поверхнями двох інших додаткових конусів. Розгортуючи додатковий конус E_1SK отримаємо сектор кола радіуса $E_1K = E_1K$. На цьому секторі, як на початковому колі будемо профіль малого торця зуба. Ці циліндричні колеса називаються еквівалентними.

Для визначення коефіцієнта торцевого перекриття використовуються формули для круглих циліндричних коліс (4.34) і (4.35). При цьому в названі формули слід підставляти значення еквівалентних чисел зубів z_{V1} і z_{V2} , які відповідають повній довжині початкових кіл радіусів ρ_1 і ρ_2 , на розгортках додаткових конусів.

Виведемо формули для визначення числа зубців еквівалентних циліндричних коліс. Для визначення ρ_1 і ρ_2 , підставимо в формули (5.32) значення із формули (5.33) і враховуючи, що

$$\frac{1}{\cos \delta_1} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1},$$

отримаємо

$$\rho_1 = \frac{r_{w1} \sqrt{u_{12}^2 + 2u_{12} \cos \delta + 1}}{u_{12} + \cos \delta} \quad (5.34)$$

або

$$\frac{\rho_1}{r_{w1}} = \frac{\sqrt{u_{12}^2 + 2u_{12} \cos \delta + 1}}{u_{12} + \cos \delta}. \quad (5.35)$$

Визначимо радіуси r_{w1} і ρ_1 початкових кіл конічного та еквівалентного йому циліндричного коліс з числом зубів відповідно z_1 , та z_{V1} і модулем m .

$$r_{w1} = \frac{mz_1}{2}; \quad \rho_1 = \frac{mz_{V1}}{2}. \quad (5.36)$$

Враховуючи, що з (5.36) $\rho_1/r_{w1} = z_{V1}/z_1$, а $u_{12} = z_2/z_1$, то з (5.35) отримаємо

$$z_{V1} = z_1 \frac{\sqrt{z_1^2 + 2z_1z_2 \cos\delta + z_2^2}}{z_2 + z_1 \cos\delta}. \quad (5.37)$$

Аналогічно знайдемо

$$z_{V2} = z_2 \frac{\sqrt{z_1^2 + 2z_1z_2 \cos\delta + z_2^2}}{z_1 + z_2 \cos\delta}. \quad (5.38)$$

Для конічного зачеплення, при $\delta = 90^\circ$, остаточно маємо

$$z_{V1} = z_1 \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_2} \text{ і } z_{V2} = z_2 \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1}. \quad (5.39)$$

З рівняння (5.39) випливає

$$u_V = \frac{z_{V2}}{z_{V1}} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = u_{12}. \quad (5.40)$$

Таким чином, зачеплення конічних коліс з числами зубів z_1 і z_2 еквівалентно зачепленню циліндричних коліс з еквівалентними числами зубів z_{V1} і z_{V2} .

Конічні колеса бувають прямозубі, косозубі і гіпоідні. Модуль і крок в них змінюється по довжині зуба. За стандартну величину береться модуль в зовнішньому найбільшому торцевому перерізі.

5.9. Черв'ячна передача

Для передачі руху між валами, які не паралельні і не перетинаються, а перехрещуються, найбільш широко застосовуються черв'ячні передачі. Один з елементів передачі, має форму одновиткового або багатовиткового гвинта, називається безкінечним гвинтом, або **черв'яком**. **Черв'ячне колесо**, яке з ним зачіплюється, має зубці, що являють собою виступи гвинтової різьби гайки, яка відповідає гвинту (рис. 5.18). Кут перехрещування в більшості випадків дорівнює 90° .

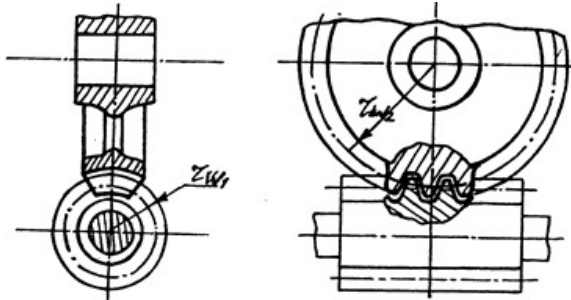


Рис. 5.18. Черв'ячна передача

В залежності від *способу утворення поверхні черв'яка* розрізняють два основні типи черв'ячної передачі:

- з архімедовим черв'яком, що має прямобічний профіль в осьовому перерізі;
- з евольвентним черв'яком, що має прямобічний профіль на деякій віддалі від осі і криволінійний випуклий профіль в осьовому перерізі.

Користуючись кінематичною аналогією між черв'ячною і рейковою передачами, можна легко встановити зв'язок між основними параметрами черв'ячної передачі.

В разі зачеплення черв'яка з рейкою її зубці при обертанні черв'яка навколо осі переміщуються вздовж неї, причому при одному оберті черв'яка рейка переміщається на крок p зачеплення, помножений на число витків z черв'яка, тобто на висоту підйому h витка черв'яка. Таким чином, при числі обертів на хвилину n_1 , швидкість V_1 переміщення рейки дорівнюватиме

$$V_1 = \frac{hn_1}{60}. \quad (5.41)$$

При зачепленні черв'яка з черв'ячним колесом колова швидкість V_2 профілю зубця на колесі

$$V_2 = \frac{2\pi r_w n_2}{60}. \quad (5.42)$$

В спільній точці дотику $V_1 = V_2$, або

$$\frac{hn_1}{60} = \frac{2\pi r_{w2}n_2}{60}. \quad (5.43)$$

Для гвинтової лінії черв'яка залежність між висотою підйому h і кутом λ підйому гвинтової лінії можна встановити із прямокутного трикутника

$$h = 2\pi r_{w1} \operatorname{tg} \lambda. \quad (5.44)$$

Підставимо значення h із (5.44) в формулу (5.43) і після нескладних перетворень отримуємо

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{2\pi r_{w2}}{h} = \frac{r_{w2}}{r_{w1} \operatorname{tg} \lambda}. \quad (5.45)$$

Оскільки $2\pi r_{w2} = z_2 p$ а $h = z_1 p$, то рівняння (5.43) можна записати у вигляді

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.46)$$

Передаточне відношення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_{w2}}{r_{w1} \operatorname{tg} \lambda}. \quad (5.47)$$

Для черв'ячних передач передаточне відношення рекомендується $u = 10 \dots 80$. Профілі зубців колеса та їх розміри в головному перерізі роблять такими самими, як і для циліндричних коліс. Висоту зубців беруть стандартну $h = 2,25m$. Кут зачеплення $\alpha = 20^\circ$, або 15° . Кут підйому гвинтової лінії $\lambda = 5 \dots 20^\circ$. Число заходів черв'ячка $z_1 = 1 \dots 6$. При $\alpha = 15^\circ$, $z_2 \geq 24$, при $\alpha = 20^\circ$, $z_2 \geq 36$. Коефіцієнт корисної дії $0,7 \dots 0,9$. Число модулів в початковому діаметрі черв'яка називається *коефіцієнтом відносного діаметра черв'яка*

$$q = \frac{2r_{w1}}{m}. \quad (5.48)$$

В більшості випадків $q = 8 \dots 16$.

В черв'ячних передачах стандартним є осьовий модуль черв'яка, який дорівнює торцевому модулю колеса. Черв'ячна передача є самогальмівною. Вхідною ланкою

передачі завжди являється черв'як.

Якщо частину дуги початкового кола колеса прийнята за початкову лінію черв'яка, то отримаємо глобоїдну передачу. В цій передачі глобоїдну (увігнуту) форму мають як зубці колеса, так і витки черв'яка. Гвинтові поверхні глобоїдного черв'яка мають різний крок, який зменшується від середини частини її кінців. Черв'ячна передача з глобоїдним черв'яком дозволяє при однакових габаритах передавати значно більшу потужність порівняно з передачею з циліндричним черв'яком і має високий коефіцієнт корисної дії.

5.10. Гвинтові зубчасті колеса

Механізм гвинтових зубчастих коліс застосовують у тих випадках, коли треба передати рухи між валами, які схрещуються, із сталим передаточним відношенням .

Передаточне відношення пари гвинтових коліс $u_{12} = 1 \dots 7$.

Гвинтові колеса так само, як і косозубі циліндричні колеса, мають гвинтові зубці, нахилені до відповідних осей під кутом β_1 і β_2 (рис. 5.19).

$$\beta_1 + \beta_2 = \delta. \quad (5.49)$$

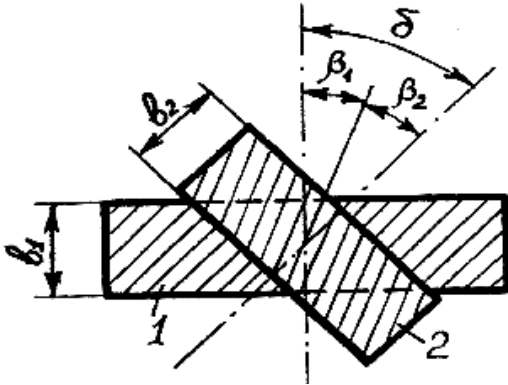


Рис. 5.19. Гвинтові колеса

Передаточне відношення

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (5.50)$$

Розміри елементів гвинтових коліс визначаються, виходячи із нормального модуля m_n аналогічно як і для косозубих циліндричних коліс. Гвинтові колеса використовують при невеликих швидкостях і незначних потужностях як другорядні передачі в машинах (у передачах до розподільчих валів двигунів, до паливних насосів і двигунів та ін.).

5.11. Поняття про нові види зубчастого зачеплення

В 1955 році професор Новіков запропонував новий вид зубчастого зачеплення (рис. 5.20). Випробування цього зачеплення показали, що його несуча здатність в 2–3 рази більша, ніж евольвентного. У цих передачах теоретичне стикання зубців відбувається в точці. Ця точка під час роботи передачі переміщується по лінії, паралельній осям коліс. Безперервність руху в цих передачах можна забезпечити тільки застосуванням косозубих коліс. У кожному перерізі, перпендикулярному до осі колеса, є тільки одна точка зачеплення, замість ділянки, а тому коефіцієнт перекриття прямозубої передачі в торцевому перерізі дорівнює нулеві.

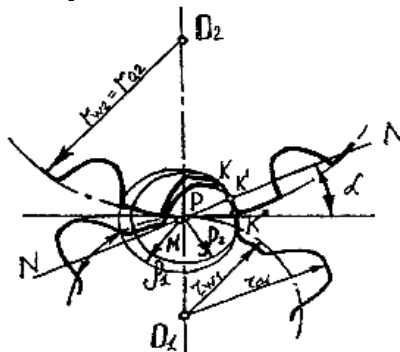


Рис. 5.20. Зачеплення Новікова

Повний коефіцієнт перекриття цієї передачі буде дорівнювати членові рівняння (4.42) як для косозубої передачі.

$$\varepsilon = \frac{b \operatorname{tg} \beta}{p_t}. \quad (5.51)$$

Через те, що зубці стикаються в одній точці висота їх теоретично може дорівнювати нулеві, практично може бути невеликою, а профілі зубців різноманітними. Завдяки цьому, напруження згину значно менші, ніж в евольвентному зачепленні. В такій передачі зубці шестерні виготовляють випуклими з радіусом профілю зубця $\rho_1 = 1,35m_t$. Центр якого знаходиться в точці Р. Вігнуті профілі зубів більшого колеса описуються по дузі кола радіуса $\rho_2 = (1,03 \dots 1,10)\rho_1$ із центром в точці М, яка лежить на прямій $N-N$. Завдяки малій різниці радіусів ρ_1 і ρ_2 профілі зубів на деякій частині їх майже співпадають, а тому не зважаючи на точковий контакт, зменшується питомий тиск на зубці.

Формули для визначення геометричних розмірів такої передачі:

$$\begin{aligned} r_{a1} &= r_{w1} + (0,8 \dots 0,9)\rho_1; & r_{a2} &= r_{w2}; \\ r_{f1} &= r_{w1} - (0,2 \dots 0,4)\rho_1; & r_{f2} &= a_w - r_{a1} - c. \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$r_{f1} = r_{w1} - (0,2 \dots 0,4)\rho_1; \quad r_{f2} = a_w - r_{a1} - c,$$

де c – раціональний зазор, $c = (0,1 \dots 0,2)\rho_1$.

$$s_{w1} + s_{w2} < p_w; \quad s_{w1} = (1,3 \dots 1,5)s_{w2}. \quad (5.53)$$

Виготовлення таких коліс має певні труднощі. Окрім того, щоб передача працювала ($\varepsilon > 1,0$), ширина колеса повинна задовольняти умові

$$b > \frac{p_t}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (5.54)$$

Запитання для перевірки знань по темі 5:

1. Передаточне відношення конічної передачі.
2. Передаточне відношення циліндричної передачі, яка еквівалентна конічній.
3. Коефіцієнт відносного діаметра черв'яка.
4. Модуль зубчастих коліс зубчастої передачі.
5. Який модуль є стандартним у черв'ячній передачі?
6. Редуктором називається зубчастий механізм, який призначений для ...?
7. Загальне передаточне відношення складного зубчастого механізму з нерухомими осями.
8. Яке призначення паразитного колеса рядного циліндричного редуктора?
9. Які механізми називають планетарними?
10. Який зубчастий механізм з рухомими осями називається диференціальним?
11. Як визначається передаточне число планетарного механізму?
12. Де застосовуються диференціальні механізми?
13. Яка передача називається хвильовою?

ТЕМА 6. Сили, що діють у механізмах

- 6.1. Вступ до динамічного аналізу. Основні задачі. Сили
- 6.2. Механічні характеристики машин
- 6.3. Режими руху механізмів
- 6.4. Сили інерції в механізмах
- 6.5. Сили тертя в механізмах
- 6.6. Поняття про фрикційні механізми
- 6.7. Коефіцієнт корисної дії механізмів і машин
- 6.8. Коефіцієнт корисної дії кінематичних пар
- 6.9. Кінетостатичне дослідження механізмів

6.1. Вступ до динамічного аналізу. Основні задачі.

Сили

При розгляді кінематичного аналізу механізмів, ми вважали, що закон руху ведучих (вхідних) ланок заданий. Рух ведених (вихідних) ланок вивчався в залежності від заданого закону руху ведучих ланок. При цьому сили, які діють на ланку механізму, і сили, що виникають при його русі, нами не враховувалися. Таким чином, при кінематичному аналізі, дослідження руху механізмів ведеться з врахуванням тільки структури механізмів і геометричних співвідношень між розмірами їх ланок.

Динаміка механізмів і машин вивчає рух ланок з врахуванням сил, які визивають цей рух.

Основні задачі динамічного аналізу механізмів:

- вивчення впливу зовнішніх сил на ланки механізму і їх елементи, на кінематичні пари і нерухомі опори і визначення способу зменшення динамічних навантажень, які виникають при русі механізму;
- вивчення режиму руху механізму під дією заданих сил і визначення способів, які забезпечують задані режими руху механізму.

Перша задача має назву силового, або **кінестатичного аналізу** механізмів, а друга задача – **динаміки механізмів**.

Сила – це дія навколишнього середовища на тіло, яка прагне змінити його стан спокою, або руху.

Величина сили – це міра механічної взаємодії двох тіл.

Всі сили умовно можна розділити на **зовнішні** і **внутрішні**.

Усі **сили**, що діють в механізмах, поділяються на:

- рушійні сили F_p ;
- сили виробничого (корисного) опору $F_{ко}$;
- сили тяжіння ланок F_g (гравітаційні сили);
- сили тертя та інших невиробничих опорів F_f ;
- реакції зв'язків F_R ;
- сили інерції F_i .

Рушійні сили F_p створюються двигунами, які здійснюють перетворення якогось виду енергії (теплової, електричної, гідравлічної) у механічну роботу. Ці сили намагаються прискорити рух ланок механізму. Елементарна робота dA_p , що здійснюється рушійною силою на елементарному переміщенні dS , завжди додатна:

$$dA_p = F_p dS \cos \widehat{F_p V}. \quad (6.1)$$

Отже, рушійна сила збільшує кінетичну енергію машин. В двигуні внутрішнього згорання рушійна сила створюється в результаті тиску газу, що розширюється, на поршень. В електродвигуні момент рушійних сил виникає в результаті взаємодії між струмом і обмотці ротора і магнітним полем.

Сили виробничого (корисного) опору $F_{ко}$ – це сили, для переборювання яких призначена машина (сили опору різання в металообробних верстатах, опору, що виникає при стисканні повітря у компресорах та ін.).

Сили виробничих опорів з напрямком швидкості точок їх прикладання утворюють тупий кут, або кут, що дорівнює 180° . Елементарна робота $dA_{\text{ко}}$, що здійснюється силою $F_{\text{ко}}$ на елементарному переміщенні dS , від'ємна

$$-dA_{\text{ко}} = F_{\text{ко}} dS \cos \widehat{F_{\text{ко}} V}. \quad (6.2)$$

Сила $F_{\text{ко}}$ зменшує кінетичну енергію машин.

Робота A_g *сил тяжіння* F_g ланок, що визначаються матеріалом та конструкцією ланок, на деякому переміщенні h його центра ваги, що відлічується по вертикалі

$$A_g = \pm F_g h. \quad (6.3)$$

Ця робота буває додатна і від'ємна.

До *сил невиробничих опорів* належать сили опору повітряного чи рідинного середовища переміщенню ланок і сили тертя F_f в кінематичних парах машин. Сили опору і сили тертя виконують від'ємну роботу. Сили тертя являють собою дотичні складові реакції зв'язків у кінематичних парах.

Реакції зв'язків F_R можна розкласти на дві складові, з яких одна направлена по нормалі до поверхонь, що утворюють кінематичну пару, а сила тертя – у бік протилежний швидкості елементів цієї пари. Реакції в кінематичних парах виникають не тільки внаслідок дії зовнішніх сил на ланки механізму, але і внаслідок руху мас механізму з прискореннями.

Рух ланок з прискореннями, викликає додаткові динамічні зусилля в кінематичних парах, які являються складовими реакцій і змінюють їх повну величину. Ці додаткові динамічні зусилля можна визначити із рівнянь рівноваги ланок, якщо в ці рівняння, крім заданих зовнішніх, нам уже відомих сил, і реакцій, додати сили інерції.

Визначення *сил інерції* ланок, що рухаються з прискореннями, буде розглянуто нижче.

Сили рушійні і сили виробничих опорів, залежно від їх механічних, фізичних і технологічних характеристик, можуть бути сталими чи функціями різних кінематичних параметрів – переміщень, швидкостей, прискорень і часу.

Наприклад, у вантажопідійомних машинах, прокатних станах, сили виробничих опорів залишаються сталими. У машинному агрегаті з двигуном внутрішнього згоряння і поршневим насосом рушійні сили і сили виробничих опорів залежать від положення ведучих ланок.

Рушійні сили і сили виробничого опору визначають за допомогою динамометрів для ряду положень машини за цикл її роботи. Одержані числові значення зображаються у вигляді діаграми сил, робіт, моментів чи потужностей (рис. 6.1).

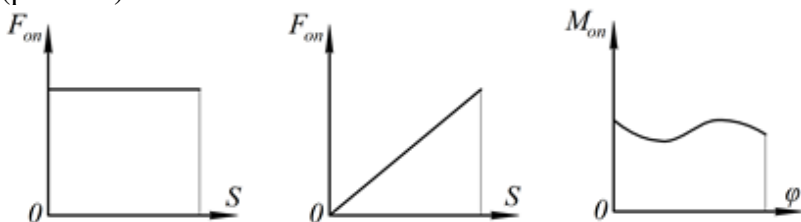


Рис. 6.1. Діаграми сил

6.2. Механічні характеристики машин

Механічною характеристикою двигуна, або робочої машини називають залежність силового параметра від одного чи кількох кінематичних параметрів і часу.

При виборі двигуна до робочої машини для узгодження оптимального значення кутових швидкостей треба, щоб механічна характеристика двигуна відповідала характеристиці робочої машини. Щоб зменшити габарити та масу агрегату, треба застосовувати швидкохідні двигуни, адже потужність двигуна P дорівнює

$$P = M_p \omega, \quad (6.4)$$

де M_p – момент рушійних сил, ω – кутова швидкість.

У більшості машинних агрегатів безпосереднє з'єднання двигуна з робочою машиною здійснити неможливо. Тому для збільшення величини крутного моменту і відповідного зменшення кутової швидкості між двигуном і робочою машиною встановлюють редуктор.

Залежно від типу двигуна чи робочої машини механічні характеристики бувають більш-менш складними. Розглянемо механічні характеристики деяких машин.

На рис. 6.2 показані механічні характеристики електродвигунів постійного струму: *a* – з паралельним збудженням; *b* – з послідовним збудженням.

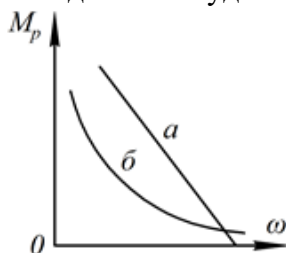


Рис. 6.2. Механічні характеристики електродвигунів постійного струму:

a – з паралельним збудженням; *b* – з послідовним збудженням

На рис. 6.3, *a*, показано механічну характеристику асинхронного електродвигуна трифазного струму.

Механічна характеристика цього двигуна складається з двох частин: перша – висхідна, нестійка частина розташована ліворуч M_{max} ; друга – низхідна, стійка частина розташована праворуч M_{max} , ця частина являється робочою. При деякому значенні кутової швидкості ω , що відповідає номінальному моменту M_H , двигуна і номінальній швидкості ω_H , двигун розвиває максимальну потужність. Кутова швидкість ω_c , при якій $M_p = 0$, називається синхронною і з цією швидкістю ротор обертається під час холостого ходу. Точка *a* діаграми

визначає положення максимального перекидного моменту M_{max} мінімально допустимої кутової швидкості ω_{min} робочої частини характеристики, а т.О визначає початковий пусковий момент $M_{п}$ при нульовій кутовій швидкості ротора. Умови роботи електродвигунів при низьких швидкостях обертання значно погіршуються.

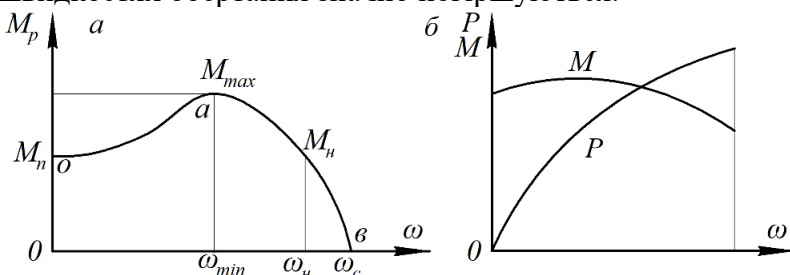


Рис. 6.3. Механічні характеристика деяких двигунів:
 а – асинхронного електродвигуна; б – двигуна внутрішнього згорання

Механічна характеристика двигуна внутрішнього згорання показана на рис. 6.3, б, двома кривими, що виражають залежність моменту M , який розвивається на головному валу, і потужності P від швидкості ω .

6.3. Режими руху механізмів

Механізм являє собою механічну систему з двосторонніми не залежними від часу зв'язками, що рухається під дією сил. Тому при розв'язанні деяких питань динаміки механізмів з одним ступенем вільності можна визначити **закон зміни кінетичної енергії**. Цей закон формулюється так: приріст кінетичної енергії механізму на кінцевому його переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх заданих сил і реакцій зв'язків на відповідних переміщеннях точок їх прикладання

$$T - T_0 = \sum A, \quad (6.5)$$

де $T = \sum(mV^2/2)$ – кінетична енергія механізму в довільному положенні; $T_0 = \sum(mV_0^2/2)$ – кінетична енергія механізму в початковому положенні; $\sum A$ – алгебраїчна сума робіт усіх сил і моментів, прикладених до механізму.

Якщо ланка здійснює плоскопаралельний рух, то кінетичну енергію визначають за формулою

$$T_i = \frac{I_{S_i}\omega_i^2}{2} + \frac{m_iV_{S_i}^2}{2}, \quad (6.6)$$

де I_{S_i} – динамічний момент інерції і ланки відносно осі, яка проходить через центр мас ланки; ω_i – кутова швидкість і ланки; m_i – маса i ланки; V_{S_i} – швидкість центра мас i ланки. Перша складова правої частини рівняння (6.6) являє собою кінетичну енергію в обертальному русі ланки, а друга – кінетичну енергію в поступальному русі тієї самої ланки.

При обертальному русі ланки навколо нерухомої осі O кінетична енергія визначається

$$T_i = \frac{I_{O_i}\omega_i^2}{2}, \quad (6.7)$$

де I_{O_i} – момент інерції ланки і відносно нерухомої осі O обертання.

Якщо ланка рухається поступально, то її кутова швидкість дорівнює нулю, і для обчислення кінетичної енергії цієї ланки досить використати другий член правої частини рівняння (6.6).

Кінетична енергія усього механізму дорівнює сумі кінетичних енергій усіх його ланок

$$T = \sum T_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{I_{S_i}\omega_i^2}{2} + \frac{m_iV_{S_i}^2}{2} \right), \quad (6.8)$$

де n – число рухомих ланок механізму.

За характером зміни кінетичної енергії **повний цикл роботи** машинного агрегату в загальному випадку

складається з трьох частин: розгону (пуску), усталеного руху і вибігу (зупинки) (рис. 6.4).

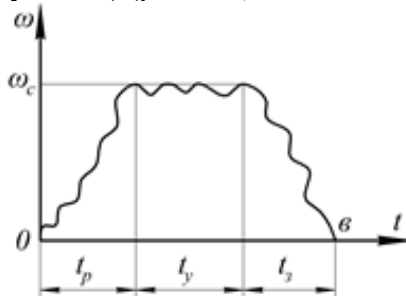


Рис. 6.4. Режимы руху

Час розгону t_p характеризується збільшенням швидкості ведучої ланки від нуля до номінального значення, а це можливо за умови, якщо робота A_p рушійних сил більша, ніж робота $A_{оп}$ усіх сил опору

$$A_p > A_{оп}. \quad (6.9)$$

Час зупинки характеризується зменшенням швидкості ведучої ланки від номінального значення до нуля, тоді

$$A_p < A_{оп}. \quad (6.10)$$

Час розгону і час зупинки машини не повинен бути тривалим.

Час усталеного руху t_y найтриваліший, при якому

$$A_p = A_{оп}. \quad (6.11)$$

Протягом цього часу виконується корисна робота, для здійснення якої і призначений агрегат.

Робота $A_{оп}$ усіх сил опору складається із суми робіт $A_{ко}$ сил корисного (виробничого) опору і робіт A_f сил тертя та інших невиробничих опорів:

$$A_{оп} = A_{ко} + A_f. \quad (6.12)$$

6.4. Сили інерції в механізмах

6.4.1. Загальні положення

Внаслідок руху ланок механізму з прискореннями в кінематичних парах виникають додаткові динамічні зусилля. Для визначення цих зусиль кожен ланку механізму слід зрівноважити прикладанням до неї у відповідній точці фіктивної сили і фіктивного моменту пари сил, які за величиною рівні силі і моменту пари сил, що визивають прискорений рух ланки. Цю фіктивну силу називають масовою силою, або силою інерції F_i , а фіктивний момент пари сил – моментом пари сил інерції M_i .

Слід підкреслити, що ніякої сили інерції F_i і ніякого моменту пари сил інерції M_i до ланки в дійсності не прикладено. Сила F_i момент M_i не мають ніякого фізичного змісту, а в розрахунках виконують роль не більше, ніж чисто математичних величин, за допомогою яких враховується вплив прискореного руху ланок на додаткові динамічні зусилля в кінематичних парах.

6.4.2. Визначення сил інерції ланок плоских механізмів

Ланка механізму складається з окремих матеріальних точок, прискорення яких в загальному випадку складного руху різні. Тому різні і елементарні сили інерції, умовно прикладені в цих точках. Система елементарних сил інерції матеріальних точок ланки, яка здійснює плоскопаралельний рух і має площину симетрії, паралельну площині руху, зводиться до головного вектора F_i , який прикладений у центрі мас ланки, і до головного моменту M_i пари сил інерції.

Головний вектор сил інерції:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_s, \quad (6.13)$$

де m – маса ланки, кг; \vec{a}_s – вектор повного прискорення центра мас S ланки, м/с². З рівності (6.13) випливає, що сила

інерції F_i вимірюється в Н. Напрямок сили інерції F_i протилежний напрямку вектора прискорення. На це вказує знак «-» в (6.13).

Момент M_i пари сил інерції спрямований протилежно кутовому прискоренню ε і визначається за формулою

$$\vec{M}_i = -I_S \vec{\varepsilon}, \quad (6.14)$$

де I_S – динамічний момент інерції ланки, що дорівнює добутку маси m ланки на квадрат його радіуса інерції ρ_S відносно центра мас S

$$I_S = m\rho_S^2. \quad (6.15)$$

Момент інерції I_S вимірюють в кгм^2 , а кутове прискорення ε – в рад/с^2 . Отже, момент M_i пари сил інерції вимірюється в Нм . Площина, в якій він діє, паралельна площині руху ланки.

6.4.3. Зведення сил інерції ланки до центру коливання

Силу інерції F_i і момент пари сил M_i можна замінити однією результуючою силою F_i , прикладеною в деякій точці K (рис. 6.5).

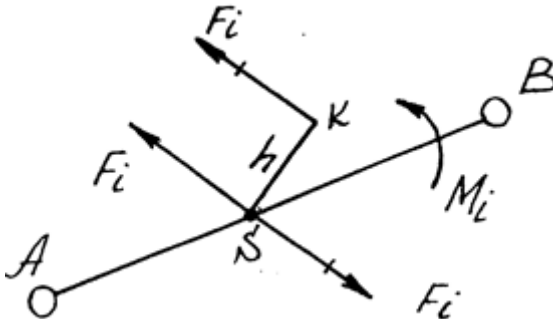


Рис. 6.5. Визначення центру коливання

Для цього момент M_i пари сил інерції замінимо парою сил, кожна складова F_i якої рівна за величиною силі інерції F_i . Знайдемо величину цих складових

$$F_i = \frac{M_i}{h}. \quad (6.16)$$

Прикладемо цю пару до ланки так, щоб одна складова $-F_i$ була прикладена в центрі мас S , а друга – в деякій точці K , на відстані h від центру мас.

Визначимо плече h із (6.16)

$$h = \frac{M_i}{F_i} = \frac{I_S \varepsilon}{m a_S}. \quad (6.17)$$

Отримаємо дійсне значення плеча h в м.

Складова $-F_i$ пари сил від моменту M_i , яка прикладена в центрі мас, зрівноважує силу інерції F_i , прикладену також в центрі мас. В результаті чого залишається одна сила F_i , прикладена в точці K . Точка K називається центром коливання ланки.

6.4.4. Метод заміщених точок

При розв'язуванні деяких технічних задач буває зручно замінити результуючу силу від сили інерції і моменту пари сил інерції, силами інерції мас, які зосереджені у деяких вибраних точках. Ці точки називають **заміщеними точками**. В якості заміщених точок можуть бути вибрані, наприклад, центри кінематичних пар (шарнірів), центри мас ланок і ін.

Умовою такої заміни з вимога, щоб сили інерції ланки і системи точкових мас, що її заміщає, були у динамічному відношенні еквівалентними. Для цього повинні бути виконані наступні умови:

- сума мас, які зосереджені в заміщених точках, повинна бути рівна масі ланки;
- сума статичних моментів заміщених мас, відносно центра інерції мас ланки, дорівнює нулю;

- динамічний момент інерції мас, які зосереджені в заміщених точках, відносно осі, яка проходить через центр інерції мас ланки перпендикулярно до площини, в якій ланка рухається, повинен бути рівний динамічному моменту інерції ланки відносно тієї ж осі.

При виконанні перших двох умов отримуємо статичне розміщення маси ланки, а при виконанні всіх трьох умов – динамічне розміщення маси ланки.

При наближених розрахунках буває достатньо обмежитися статичним розміщенням маси ланки.

Якщо центр мас ланки розташований між центрами шарнірів, то масу ланки замінюють двома або трьома точковими масами.

Нехай треба розмістити масу m ланки в двох точках, розташованих на одній прямій з центром мас ланки (рис. 6.7).

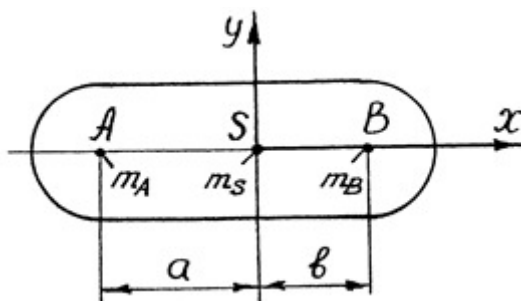


Рис. 6.6. Розміщення маси ланки в точках

Умови динамічної еквівалентності ланки з масами, що розміщені в точках A і B, ланці масою t з центром мас в точці S запишемо у вигляді наступних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 m_A + m_B &= m; \\
 m_A a + m_B b &= 0; \\
 m_A a^2 + m_B b^2 &= I_S.
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

Заданося, наприклад, положенням точки A і розв'язуючи сумісно рівняння (6.18), знаходимо:

$$m_A = \frac{mI_s}{ma^2 + I_s}; m_B = \frac{m^2a^2}{ma^2 + I_s}; \quad (6.19)$$

$$b = \frac{I_s}{ma}.$$

При статичному розташуванні маси ланки по двох точках можна довільно задаватися двома величинами, наприклад, відстанями a і b розміщуючи маси m_A і m_B в центрах шарнірів A і B . Для цього випадку достатньо записати два рівняння:

$$m_A + m_B = m; m_A a - m_B b = 0. \quad (6.20)$$

Із рівнянь (6.20) знайдемо величини мас:

$$m_A = m \frac{b}{a + b}; m_B = m \frac{a}{a + b}. \quad (6.21)$$

Застосуємо метод заміщених точок для визначення сил інерції кривошипно-повзунного механізму (рис. 6.7, a).

Ведуча ланка OA обертається із сталою кутовою швидкістю ω . Центри мас ланок 1, 2, 3 позначені відповідно S_1, S_2, S_3 . Як заміщені точки для ланки 1 вибираємо точки O і A_1 , а для ланки 2 вибираємо точки A_2 і B_2 .

Із формул (6.21) для ланки 1 маємо:

$$m_{O_1} = m_1 \frac{l_{AS_1}}{l_{OA}}; m_{A_1} = m_1 \frac{l_{OS_1}}{l_{OA}}. \quad (6.22)$$

де m_1 – маса ланки 1, m_{O_1} і m_{A_1} – розміщені маси ланки 1 відповідно в точки O_1 і A_1 .

Масу m_1 шатуна AB розміщуємо аналогічно:

$$m_{A_2} = m_2 \frac{l_{BS_2}}{l_{AB}}; m_{B_2} = m_2 \frac{l_{AS_2}}{l_{AB}}. \quad (6.23)$$

Прискорення точки O дорівнює нулю, тому зосереджена в ній маса в подальших розрахунках не враховується.

Визначимо прискорення необхідних точок ланок механізму. Для цього побудуємо план прискорень (рис. 6.7, б).

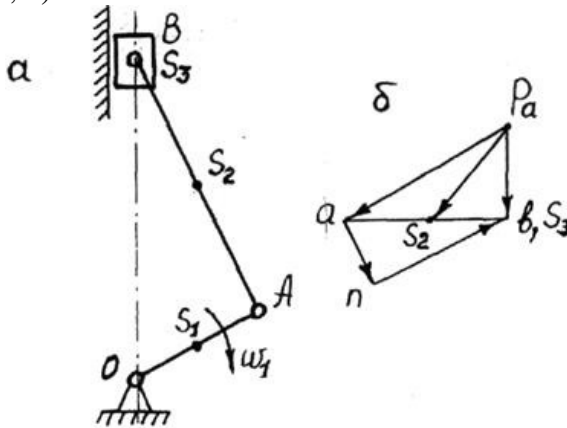


Рис. 6.7. До визначення сил інерції:

а – кривошипно-повзунний механізм; б – план прискорень

Сили інерції розміщених мас прикладені у відповідних точках і спрямовані протилежно прискоренням цих точок. В механізмі, що розглядається величина сили інерції F_{iA} маси m_A , одержаної від розташування мас ланок 1 і 2:

$$F_{iA} = m_A a_A = (m_{A_1} + m_{A_2}) a_A, \quad (6.24)$$

де m_{A_1} і m_{A_2} – маса, зосереджена в точці А і одержана в результаті розташування відповідно мас m_1 і m_2 . Сила інерції F_{iA} напрямлена у бік, зворотний прискоренню a_A точки А.

Аналогічно величина сили інерції F_{iB} маси m_B , яку вираховали від розташування маси шатуна 2, дорівнює

$$F_{iB} = m_B a_B = (m_3 + m_{B_2}) a_B, \quad (6.25)$$

де m_3 – маса ланки 3; m_{B_2} – маса, зосереджена в точці В і одержана в результаті розташування маси m_2 в точки A_2 і B_2 .

6.5. Сили тертя в механізмах

6.5.1. Види тертя. Тертя ковзання сухих тіл

При вирішенні багатьох питань, які відносяться до динаміки механізмів і машин, поряд з рушійними силами і силами виробничих опорів приходиться враховувати також і сили тертя.

Загальний опір, що виникає в місцях дотику двох тіл, які переміщуються одне відносно одного, називається **силою тертя**.

Тертя – це складне явище, для пояснення якого створені дві гіпотези: механічна і молекулярна.

За сучасною гіпотезою, що має змішаний характер, процес тертя при ковзанні поверхонь є результатом не лише механічної взаємодії поверхонь, але і результатом дії молекулярних сил.

Ми не будемо зупинятися на сучасних теоріях, які пояснюють природу тертя, а зупинимося тільки на викладенні елементарних відомостей з теорії тертя, необхідних для вирішення простих задач теорії механізмів.

В загальному тертя розрізняють таких **видів**:

- чисте – сухе;
- граничне – поверхні розділяє шар мастила товщиною не більше 0,1 мкм;
- рідинне, поверхні певністю розділені шаром мастила;
- напівсухе – одночасно сухе і граничне;
- напіврідинне – одночасно рідинне і граничне.

По **видам рухів** розрізняють:

- тертя ковзання;
- тертя кочення.

Сила F_f сухого тертя, яка виникає при відносному ковзанні одного тіла відносно іншого, пропорційна силі F_N

нормального тиску і визначається із рівняння Амонтона-Кулона

$$F_f = f F_N, \quad (6.26)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Коефіцієнт тертя f залежить від матеріалів поверхонь що труться, їх стану та обробки, мащення та інших факторів.

Не дивлячись на це, коефіцієнт тертя f для конкретних матеріалів приймається сталим.

Сила тертя завжди напрямлена в сторону, протилежну швидкості відносного ковзання тіла.

Повна реакція F_R ланки 2 на ланку 1 визначається додаванням нормальної реакції F_N і сили тертя F_f (рис. 6.9).

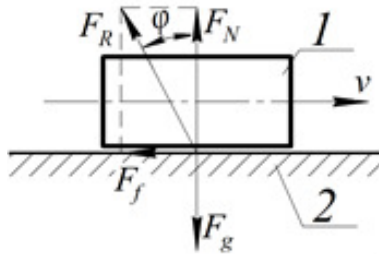


Рис. 6.8. Визначення кута тертя

Повна реакція F_R відхилена від нормальної реакції F_N на кут φ , який називається **кутом тертя ковзання**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_f}{F_N} = \frac{f F_N}{F_N} = f. \quad (6.27)$$

Таким чином, коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута тертя.

6.5.2. Тертя на похилій площині

Знайдемо рушійну силу F_p , необхідну для рівномірного переміщення тіла 1, на яке діє гравітаційна сила F_g (сила тяжіння), **вгору на похилій площині** 2, якщо

коефіцієнт тертя ковзання рівний f . Похила площина і рушійна сила F_P складають з горизонталлю кути, відповідно α і β (рис. 6.9, *a*).

При рівномірному переміщенні тіла 1 на похилій площині 2 вгору на нього діють: рушійна сила F_P , сила тяжіння F_g , нормальна реакція F_N та сила тертя F_f .

Знайдемо повну реакцію F_R шляхом додавання нормальної реакції F_N та сили тертя F_f . Реакція F_R складає з нормаллю до площини кут тертя φ .

Складемо векторне рівняння всіх сил, що діють на тіло 1:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_P + \vec{F}_R = 0. \quad (6.28)$$

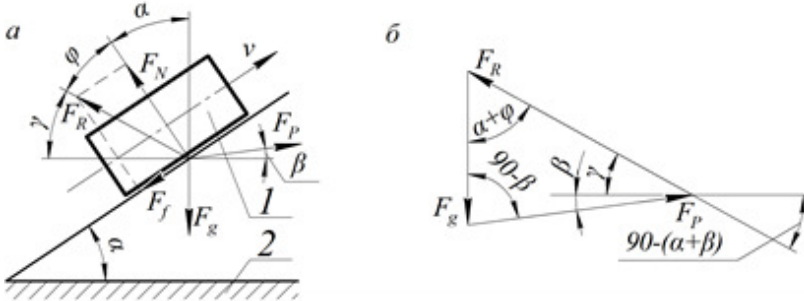


Рис. 6.9. Тіло на похилій площині:
a – переміщення тіла вгору; *б* – план сил

Побудуємо план сил (рис. 6.9, *б*). Отримаємо замкнутий силовий трикутник із відповідними кутами при вершинах. На основі теореми синусів можна записати

$$\frac{F_P}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{F_g}{\sin(90^\circ - (\alpha + \varphi - \beta))}. \quad (6.29)$$

Звідси знайдемо рушійну силу

$$F_P = F_g \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(90^\circ - (\alpha + \varphi - \beta))}. \quad (6.30)$$

Якщо сила F_P горизонтальна, кут $\beta = 0$, то рівняння (6.30) прийме вигляд:

$$F_P = F_g \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)} = F_g \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (6.31)$$

Розглянемо випадок, коли тіло 1 рухається рівномірно **донизу** (рис. 6.10, а).

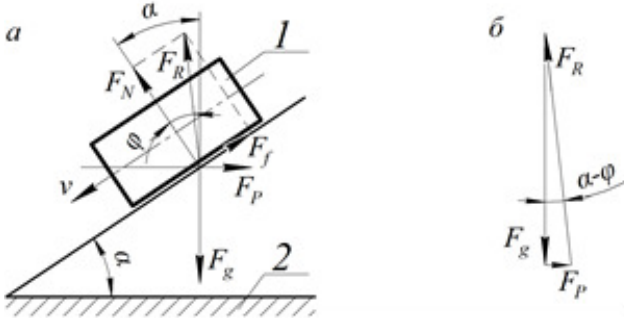


Рис. 6.10. Тіло на похилій площині:
а – переміщення тіла донизу; б – план сил

В цьому разі побудова відрізняється від попередньої тим, що сила тертя F_f напрямлена ввверх, а повна реакція F_R відхиляється на кут тертя φ , не ліворуч від нормалі (рис. 6.9, а), а праворуч від неї (рис. 6.10, а).

Для цього випадку досить у формулах (6.30) і (6.31) замінити кут φ на $-\varphi$. Тоді будемо мати

$$F_P = F_g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(90^\circ - (\alpha - \varphi - \beta))}. \quad (6.32)$$

$$F_P = F_g \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \quad (6.33)$$

Рівняння (6.33) також впливає із (рис. 6.11, б).

При відсутності тертя (кут $\varphi = 0$) рівняння (6.33) набере вигляду

$$F_{P0} = F_g \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.34)$$

6.5.3. Тертя в клинчастому і циліндричному жолобі

Нехай повзун, який має форму клина, рухається рівномірно і паралельно осі жолоба.

До повзуна прикладені: рушійна сила F_P , паралельно осі жолоба; сила тяжіння F_g , напрямлена перпендикулярно до цієї осі; дві рівні нормальні реакції F_{N1} і F_{N2} , перпендикулярні до граней жолоба і дві рівні сили тертя F_{f1} і F_{f2} напрямлені протилежно швидкості клина (рис. 6.11, а).

Сумарна сила тертя $F_f = F_{f1} + F_{f2}$ при рівномірному русі повзуна, дорівнює рушійній силі F_P і визначається згідно (6.26)

$$F_f = F_P = 2fF_N. \quad (6.35)$$

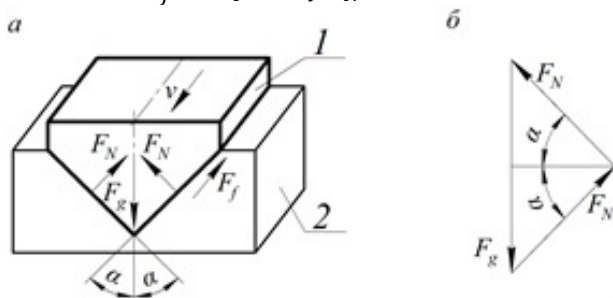


Рис. 6.11. Клинчаста пара:
а – клинчастий жолоб; б – план сил

Побудуємо для повзуна план сил (рис. 6.11, б). Із трикутника сил маємо:

$$\frac{1}{2}F_g = F_N \sin \alpha, \quad (6.36)$$

де α – кут, який складає кожна грань клина з вертикальною площиною.

Визначимо нормальну реакцію із (6.36)

$$F_N = \frac{F_g}{2 \sin \alpha}. \quad (6.37)$$

Сила тертя згідно (6.35) буде

$$F_f = 2 \frac{F_g f}{2 \sin \alpha} = F_g f', \quad (6.38)$$

де $f' = f / \sin \alpha$ – називається приведеним коефіцієнтом

тертя клинчастого повзуна, причому $f' > f$.

Розглянемо тертя циліндричного повзуна в жолобі (6.38).

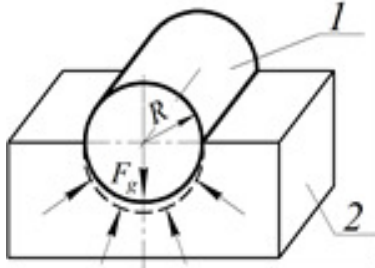


Рис. 6.12. Циліндричний жолоб

Сила тертя визначається за формулою

$$F_f = F_g f', \quad (6.39)$$

де $f' = 1,27f$ – приведений коефіцієнт тертя.

6.5.4. Тертя в гвинтовій парі

Умовно будемо вважати, що сила дії гайки на гвинт прикладена по середньому діаметру різьби. Середній діаметр різьби розміщений на відстані r_2 від осі гвинта. Припустимо, що дію сил в гвинтовій парі можна звести до дії сил на повзун, який знаходиться на похилій площині.

Розглянемо тертя в прямокутній гвинтовій різьбі (рис. 6.13, а). Нехай α – кут підйому гвинтової лінії різьби.

Розвернемо циліндр з прямокутною різьбою на площину. Тоді замість гвинтової лінії отримаємо похилу площину, на якій під дією горизонтальної рушійної сили F_p буде переміщатися вгору паралелепіпед, навантажений вертикальною силою F_g (рис. 6.13).

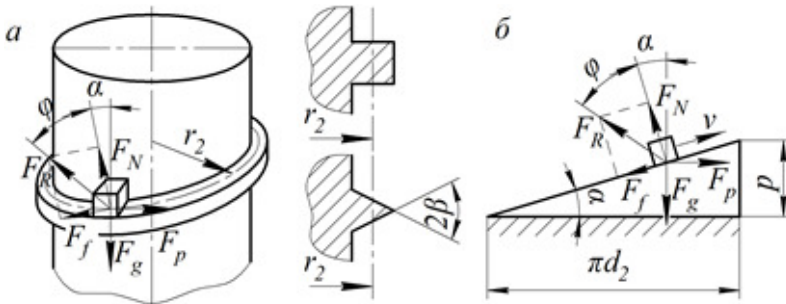


Рис. 6.13. Тертя в прямокутній різьбі:
a – пара гвинт-гайка; *б* – розгортка різьби

Ця задача нічим не відрізняється від задачі, розглянутої раніше – тертя на похилій площині, якщо кут $\beta = 0$. А тому на основі раніше виведеного рівняння (6.31), аналогічно запишемо

$$F_p = F_g \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (6.40)$$

Оскільки при рівномірному русі сила тертя F_f дорівнює рушійній силі то момент тертя в прямокутній різьбі

$$M_f = F_g r_2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (6.41)$$

У випадку трикутної різьби вважаємо, що рух гвинта аналогічний переміщенню клинчастого повзуна в жолобі, у якого кут між вертикальною площиною і стінками жолоба $\alpha = 90^\circ - \beta$, де 2β – кут профілю різьби.

Момент тертя в трикутній різьбі

$$M_f = F_g r_2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi'), \quad (6.42)$$

де φ' – приведений кут тертя.

Згідно (6.27) і враховуючи (6.38) запишемо

$$\operatorname{tg} \varphi' = f' = \frac{f}{\sin \alpha} = \frac{f}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{f}{\cos \beta}. \quad (6.43)$$

6.5.1. Тертя в обертальних парах: цапфі, п'яті

Вали можуть передавати на опори як радіальні, так і осеві зусилля.

Розглянемо випадок, коли вал передає на опору радіальне зусилля, тобто визначимо момент тертя в цапфі (рис. 6.14, а).

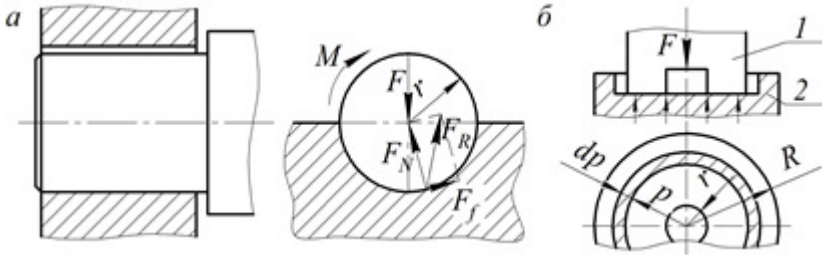


Рис. 6.14. Обертальні кінематичні пари

Момент тертя в цапфі визначається за формулою

$$M_f = F_r f', \quad (6.44)$$

де $f' = 1,27f$ – приведений коефіцієнт тертя у припрацьованій цапфі.

Визначимо момент тертя в п'яті (вал передає на опору осеве зусилля), (рис. 6.14, б).

В цьому випадку на поверхні стикання п'яті 1 і підп'ятника 2 виникає сила тертя вертіння, яка підкоряється закону Амонтона-Кулона.

На рис. 6.14, б показана кільцева п'ята, яка має опорну поверхню у вигляді кільця шириною $R - r$.

Величина питомого тиску P на одиницю площі постійна і рівна

$$P = \frac{F}{\pi(R^2 - r^2)}. \quad (6.45)$$

Виділимо на опорній поверхні п'яті кільце радіусом ρ і шириною d_ρ

Елементарний момент тертя dM_f на цій площі

$$dM_f = dF_f \rho. \quad (6.46)$$

Елементарна сила тертя рівна

$$dF_f = f dF_N = f P 2\pi \rho d\rho. \quad (6.47)$$

Рівняння (6.46) з врахуванням (6.47) прийме вигляд:

$$dM_f = f P 2\pi \rho^2 d\rho. \quad (6.48)$$

Проінтегруємо рівняння (6.48) в границях від r до R

$$\begin{aligned} M_f &= 2\pi f P \int_r^R \rho^2 d\rho = 2\pi f P \frac{\rho^3}{3} \Big|_r^R \\ &= \frac{2}{3} \pi f P (R^3 - r^3). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Підставимо в рівняння (6.49) значення P із (6.45), отримаємо:

$$M_f = \frac{2}{3} f F \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (6.50)$$

Якщо п'ята суцільна, то $r = 0$ і рівняння (6.50) прийме вигляд:

$$M_f = \frac{2}{3} f F R. \quad (6.51)$$

6.5.2. Тертя гнучкої ланки по нерухомому барабану

Розглянемо випадок, коли за допомогою гнучкої ланки (паса), перекинутої через нерухомий циліндричний барабан, рушійною силою F_p піднімається вантаж, на який діє сила тяжіння F_g (рис. 6.15, *a*). Нехай коефіцієнт тертя між гнучкою ланкою і барабаном f . Визначимо рушійну силу F_p , необхідну для рівномірного переміщення вантажу вгору. Для надання гнучкій ланці рівномірного руху, необхідно перебороти силу тертя, яка виникає між гнучкою ланкою і барабаном. Позначимо кут обхвата пасом барабана α , в рад.

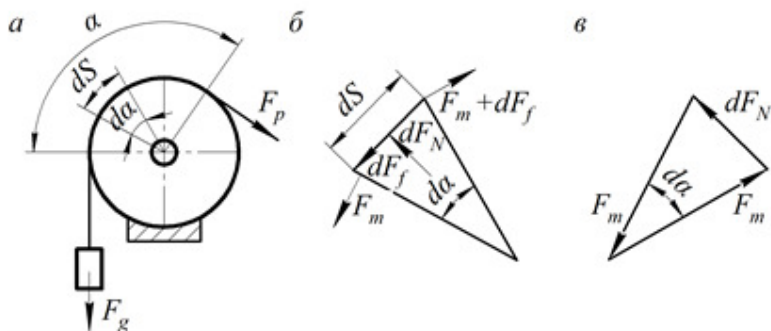


Рис. 6.15. Гнучка ланка на барабані:
 а – барабан-гнучка ланка; б – елемент барабана;
 в – план сил

Виділимо на поверхні барабана елемент dS . Цей елемент буде знаходитися в рівновазі під дією нерівних сил натягу F_T і нормальної реакції барабана F_N і елементарної сили тертя dF_f (рис. 6.15, б). Очевидно, що

$$dF_f = (F_T + dF_T) - F_T = dF_T. \quad (6.52)$$

З іншого боку маємо:

$$dF_f = dF_N f. \quad (6.53)$$

Прирівнюючи (6.52) і (6.53), знаходимо:

$$dF_T = dF_N f. \quad (6.54)$$

Отже, елементарна сила тертя зрівноважується елементарною силою натягу в dF_T , а тому їх можна відкинути.

Побудуємо план сил (рис. 6.15, в). Складемо векторне рівняння сил

$$\vec{F}_T + \vec{F}_T + d\vec{F}_N = 0. \quad (6.55)$$

Із трикутника сил маємо

$$dF_N \sqrt{F_T^2 + F_T^2 - 2F_T^2 \cos d\alpha} = \sqrt{2F_T^2(1 - \cos d\alpha)}. \quad (6.56)$$

Відомо, що $1 - \cos d\alpha = 2 \sin^2 d\alpha/2$ і при малих кутах α , $\sin d\alpha/2 = d\alpha/2$ тоді рівняння (6.56) прийме вид

$$dF_N = 2F_T \frac{d\alpha}{2} = F_T d\alpha. \quad (6.57)$$

Враховуючи значення dF_N із (6.57) знайдемо елементарну силу натягу dF_T із (6.54)

$$dF_T = fF_T d\alpha, \quad \text{або} \quad \frac{dF_T}{F_T} = f d\alpha. \quad (6.58)$$

Проінтегруємо рівняння (6.58):

$$\int_{F_{T_1}}^{F_{T_2}} \frac{dF_T}{F_T} = \int_0^\alpha f d\alpha; \quad (6.59)$$

$$\ln \frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} = f\alpha, \quad \text{або} \quad F_{T_2} = F_{T_1} e^{\alpha f}. \quad (6.60)$$

Оскільки $F_{T_2} = F_P$, а $F_{T_1} = F_g$ то рівняння (6.60) остаточно прийме вигляд

$$F_P = F_g e^{\alpha f}. \quad (6.61)$$

Ця залежність була отримана вперше Леонардом Ейлером в 1765.

Для клинового паса

$$F_P = F_g e^{\alpha f'}. \quad (6.62)$$

де $f' = f / \sin \delta$ – приведений коефіцієнт тертя, δ – кут профілю паса.

6.5.3. Тертя кочення у вищих кінематичних парах

Якщо циліндр знаходиться в стані спокою на горизонтальній площині і на нього діє сила тяжіння F_g , то крива розподілу напружень в зоні контакту колеса з площиною буде симетрична і реакція буде проходити через т. А (рис. 6.16, а).

Прикладемо до колеса рушійний момент M_P (рис. 6.16, б), або горизонтальну рушійну силу F_P на висоті h (рис. 6.16, в), які спричинять рівномірне кочення колеса (циліндра). В цих випадках крива розподілу напружень буде не симетрична. При цьому реакція F_N площини зміститься

назустріч руху на величину K , яку будемо називати плечем сили тертя кочення, або коефіцієнтом тертя кочення. Величина K вимірюється в *мм*. При рівномірному коченні колеса можна скласти наступні рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= -F_g + F_N = 0, \\ \Sigma M_\beta &= F_R h - F_g K = 0. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Із рівнянь (6.63) маємо:

$$F_N = F_g, \quad F_R h = F_g K, \quad (6.64)$$

де $F_R h = M_P$ – момент рушійних сил, $F_g K = M_f$ – момент сил тертя кочення.

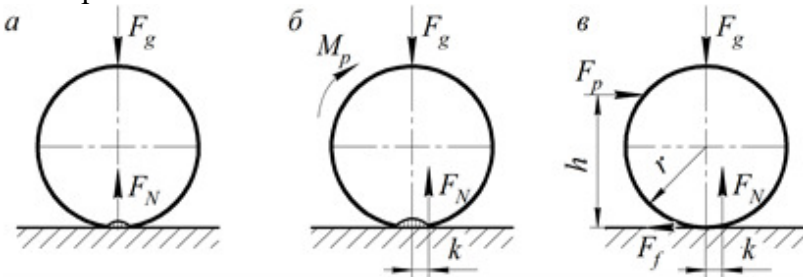


Рис. 6.16. Циліндр на горизонтальній площині:
a – у стані спокою; *б* – навантажений рушійним моментом;
в – навантажений рушійною силою

При рівномірному коченні момент рушійних сил дорівнює моменту сил тертя

$$M_P = M_f = K F_g. \quad (6.65)$$

Рушійна сила знаходиться із (6.64)

$$F_P = F_g \frac{K}{h}. \quad (6.66)$$

В залежності від висоти h можливі три випадки:

• **чисте ковзання** буде проходити, якщо

$$F_P = F_f = F_g f, \quad F_P h < F_g K, \quad (6.67)$$

звідки знаходимо:

$$F_g f h < F_g K, \quad f < \frac{K}{h}. \quad (6.68)$$

- **чисте кочення** можливе, якщо

$$F_P h = F_g K, \quad F_P < F_g f, \quad (6.69)$$

звідки знаходимо:

$$\frac{F_g K}{h} < F_g f, \quad f > \frac{K}{h}. \quad (6.70)$$

- **одночасне кочення і ковзання** буде, якщо

$$F_P h = F_g K, \quad F_P > F_g f, \quad (6.71)$$

звідки знаходимо:

$$F_g f h < F_g K, \quad f = \frac{K}{h}. \quad (6.72)$$

6.5.4. Переміщення вантажу на катках

Розглянемо наступну задачу. Нехай вантаж, сила тяжіння якого переміщається на катку, сила тяжіння якого F_{g2} Коефіцієнт тертя кочення між вантажом і катком K_1 , а між катком і площиною K_2 . Знайти рушійну силу F_P для рівномірного переміщення вантажу (рис. 6.17).

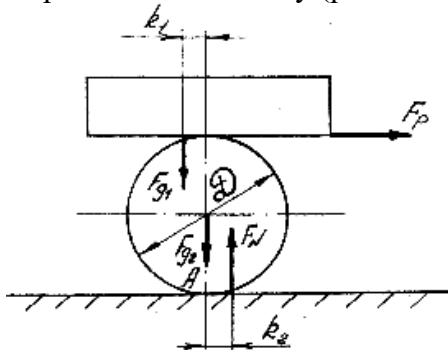


Рис. 6.17. Вантаж на катку

Момент рушійних сил M_P , буде дорівнювати сумарному моменту тертя M_f між вантажом і катком і між катком і площиною: $M_P = M_f$.

$$F_P D = F_{g1} K_1 + F_N K_2. \quad (6.73)$$

Реакція $F_N = F_{g1} + F_{g2}$. Підставимо значення F_N в (6.73), дістанемо

$$F_P D = F_{g1} K_1 + (F_{g1} + F_{g2}) K_2. \quad (6.74)$$

Звідси знайдемо рушійну силу:

$$F_P = \frac{F_{g1}(K_2 + K_2) + F_{g2} K_2}{D}. \quad (6.75)$$

6.5.5. *Переміщення вантажу на візку*

Знайдемо горизонтальну рушійну силу F_P , необхідну для рівномірного переміщення візка з вантажем, сила тяжіння якого F_{g1} , а сила тяжіння кожного із коліс F_{g2} , (рис. 6.18). Позначимо радіуси: колеса R , цапфи r .

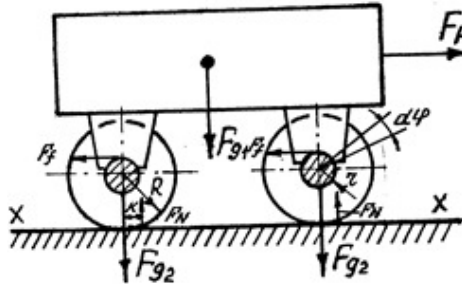


Рис. 6.18. Вантаж на візку

Прирівняємо елементарну роботу рушійної сили F_P на елементарному переміщенні dx до суми елементарних робіт від моменту тертя кочення коліс відносно площини $x-x$ і від моменту тертя ковзання в цапфах коліс, отримаємо: $A_p = A_{x-x} + A_{fц}$.

$$F_P dx = K(F_{g1} + 2F_{g2})d\varphi + F_{g1} r f d\varphi. \quad (6.76)$$

Знайдемо елементарне переміщення

$$dx = K d\varphi = K \omega dt. \quad (6.77)$$

Підставимо в рівняння робіт (6.76) значення dx із (6.77), отримаємо

$$F_P K \omega dt = (K + r f) F_{g1} \omega dt + 2K F_{g2} \omega dt. \quad (6.78)$$

звідси маємо:

$$F_p = \frac{(K + rf)F_{g1} + 2KF_{g2}}{K}. \quad (6.79)$$

Подамо ряд значень коефіцієнту тертя кочення K при певних умовах тертя:

Умови тертя	Коефіцієнт K , мм
Стальні бандажі коліс залізничних вагонів відносно рейок	0.5–0.55
Дерево відносно дерева	0.5–1.3
Загартовані стальні кульки і ролики в підшипниках кочення	0.01
Колеса візків із залізними шинами відносно асфальту	6
Те саме відносно піску	15–30

6.6. Поняття про фрикційні механізми

6.6.1. Загальні відомості

Рух від машин-двигунів до робочих машин можна передавати різними способами. Найпоширенішим і конструктивно зручним способом цієї передачі руху є зчеплення між собою за допомогою яких – небудь кінематичних елементів двох валів, що обертаються. Ці вали можуть розташовуватися у просторі у будь-якому положенні. Залежно від відстані між валами та їх розташування може бути застосована та чи інша система механічної передачі.

Найхарактернішими конструкціями передач обертального руху є:

- передачі безпосереднім дотиканням;
- передачі гнучким зв'язком.

Механізми, в яких для передачі руху використовуються сили тертя, називаються **фрикційними механізмами**.

6.6.2. Циліндрична фрикційна передача

Найпростішим способом передачі руху і сили між валами, що обертаються, є застосуванням фрикційної передачі. **Фрикційна передача** утворюється з двох гладеньких коліс, які притискаються одне до одного з певною силою, наприклад пружиною (F_n).

Завдяки цьому, при обертанні ведучого колеса, у місці зіткнення коліс виникає сила тертя F_f і обертання передається веденому колесу. Сила тертя між колесами повинна бути більшою за колову силу F_t бо інакше рух не передаватиметься, а ведуче колесо, що обертається, проковзуватиме по нерухомому веденому. Це проковзування називається буксуванням. ($F_f \geq F_t$ – передача руху $F_f < F_t$ – буксування). Розглянемо найпростіший випадок, коли передача встановлюється між двома паралельними валами за допомогою гладеньких циліндричних коліс 1 та 2 (рис. 6.19)

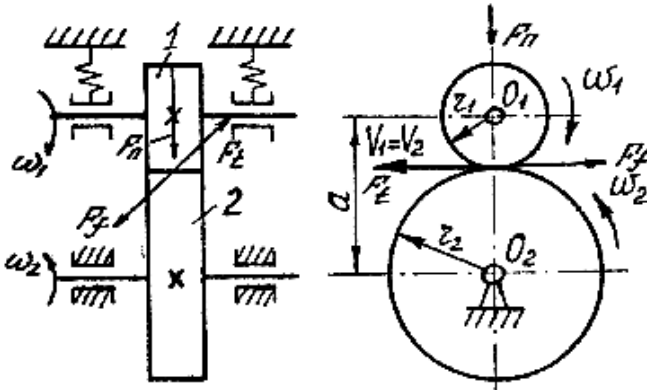


Рис. 6.19. Циліндрична передача

Ці колеса закріплені на ведучому колесі O_1 і на веденому O_2 . Позначимо радіуси коліс відповідно r_1 та r_2 . при достатньому натиску коліс рух відбувається без ковзання і, отже, лінійні колові швидкості їх рівні $V_1 = V_2$.

Відомо, що

$$V_1 = \omega_1 r_1, \quad V_2 = \omega_2 r_2. \quad (6.80)$$

Отже $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Звідси випливає, що

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_1}{r_2}. \quad (6.81)$$

Відношення кутових швидкостей коліс називається **передаточним відношенням** і позначається буквою u .

В рівнянні (6.81) верхній знак відноситься до внутрішнього дотикання коліс, а нижній – до зовнішнього, коли напрями обертання коліс відбуваються в різні сторони. Отже, передаточне відношення за числовою величиною дорівнює оберненому відношенню радіусів коліс.

Якщо колеса мають вигляд круглих циліндрів, то передаточне відношення $u_{12} \cong const$. А тому відношення кутових швидкостей можна замінити відношенням частоти обертання, тому формула (6.81) може бути подана в такому вигляді

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_1}{r_2}. \quad (6.82)$$

Відстань між центрами обертання коліс називається міжосьовою відстанню a .

Із визначення маємо

$$a = r_1 + r_2. \quad (6.83)$$

За заданим передаточним відношенням u_{12} і міжосьовою відстанню a можна легко визначити радіуси r_1 і r_2 коліс.

Визначимо r_2 із (6.82) і підставимо в (6.83)

$$a = r_1 \pm u_{12} r_1. \quad (6.84)$$

Звідси маємо

$$r_1 = \frac{a}{1 \pm u_{12}}. \quad (6.85)$$

Аналогічно визначаємо r_2

$$r_2 = \frac{a u_{12}}{1 \pm u_{12}}. \quad (6.86)$$

Якщо у фрикційній передачі відбувається ковзання, то

$$\omega_1 r_1 (1 - \varepsilon) = \omega_2 r_2, \quad (6.87)$$

де $\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$ – коефіцієнт ковзання при робочому навантаженні, при холостому ході $\varepsilon = 0$.

Тоді передаточне відношення при робочому ході буде:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} (1 - \varepsilon) = \pm \frac{r_1}{r_2}. \quad (6.88)$$

6.6.3. Конічна фрикційна передача

Передача між валами, осі яких перетинаються, вимагає застосування конічних коліс. Нехай осі OO_1 та OO_2 перетинаються під кутом δ у точці O (рис. 6.20).

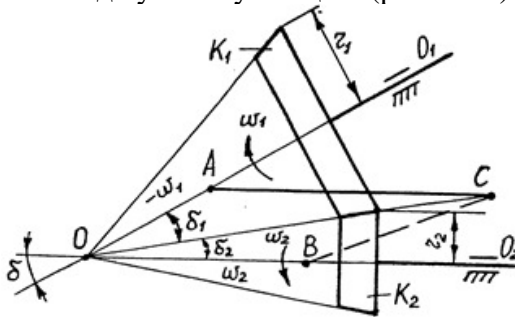


Рис. 6.20. Конічна передача

Навколо осі OO_1 обертається ланка K_1 з кутовою швидкістю ω_1 . Ця ланка має передати іншій ланці K_2 , що перебуває з першою ланкою у безпосередньому дотику, не перервний обертальний рух навколо осі OO_2 з кутовою швидкістю ω_2 . Треба знайти форму ланок за умови, щоб обертання від ланки K_1 , до K_2 передавалось із сталим відношенням кутових швидкостей

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = const. \quad (6.89)$$

Визначаємо відносний рух ланки K_2 . Рух ланки K_2 , що зв'язана з віссю OO_2 відносно ланки K_1 , яка зв'язана з віссю

OO_1 складається з двох обертальних рухів: навколо осі OO_2 з кутовою швидкістю ω_2 і навколо осі OO_1 з кутовою швидкістю ω_1 , напрямлену в бік протилежний заданому.

Результуючий рух також обертальний навколо миттєвої осі обертання OC , яка має напрям діагоналі паралелограма, побудованого на відрізках $OA = -\omega_1$ і $OB = \omega_2$. Обидві кутові швидкості слід відкласти так, щоб для спостерігача, який дивиться у напрямі від кінця вектора до початку, тобто від O_1 та OO_2 до O , обидва обертання уявлялись таким, що відбуваються проти напрямку рух годинникової стрілки. Миттєва вісь обертання OC з даними осями OO_1 та OO_2 складає кути, що відповідно дорівнюють δ_1 та δ_2 розглядаючи трикутник кутових швидкостей AOC знаходимо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (6.90)$$

Враховуючи (6.81) запишемо

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \quad (6.91)$$

Із рис. 6.20 видно, що

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (6.92)$$

Тоді враховуючи (6.92) рівняння (6.91) запишемо у вигляді:

$$u_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta - \delta_2)} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta \cos \delta_2 - \sin \delta_2 \cos \delta}. \quad (6.93)$$

Поділимо чисельник і знаменник рівняння (6.93) на $\cos \delta_2$, отримаємо:

$$u_{12} = \frac{\sin \delta_2}{\sin(\delta - \delta_2)} = \frac{\text{tg } \delta_2}{\sin \delta - \cos \delta \text{ tg } \delta_2}. \quad (6.94)$$

Із рівняння (6.94) маємо

$$\text{tg } \delta_2 = \frac{\sin \delta}{\frac{1}{u_{12}} + \cos \delta}. \quad (6.95)$$

Аналогічно знайдемо

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \delta}{u_{12} + \cos \delta}. \quad (6.96)$$

Миттева кутова швидкість Ω ланки K_2 у відносному русі навколо ланки K_1 визначається як діагональ паралелограма, сторонами якого є: $-\omega_1$ та ω_2 .

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \delta}. \quad (6.97)$$

Знайдемо аксоїди у відносному русі ланок K_1 та K_2 , тобто геометричні місця миттєвих осей обертання у нерухомому просторі та в самому тілі, що рухається.

Так як миттева вісь обертання OC весь час проходить через нерухому точку O , то аксоїдами будуть два конуси із спільною вершиною O . Зокрема, коли кутові швидкості ω_1 та ω_2 залишаються сталими, кути, що утворюються між миттевою віссю обертання OC і даними осями OO_1 та OO_2 , також залишаються незмінними.

Отже, в цьому разі нерухомий і рухомий аксоїди матимуть вигляд двох круглих конусів. У кожний момент часу ці два конуси дотикаються вздовж спільної твірної, яка є миттевою віссю обертання; відносний рух ланки K_2 відносно ланки K_1 геометрично визначається коченням конуса K_2 по конусу K_1 без ковзання. При цьому необхідною умовою того, щоб конуси не ковзали, як це видно з вищевикладеного, є наявність спільної вершини O .

Обмеживши кожний конус двома перерізами, перпендикулярними до їх осей обертання, дістанемо два конічних колеса тертя або конічні фрикційні колеса. Позначимо буквами r_1 та r_2 радіуси більших основ коліс. Тоді можна рівняння (6.82) записати

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.98)$$

На практиці застосовується найпоширеніша передача з осями валів, що перетинаються під прямим кутом $\delta = 90^\circ$ і лежать в одній площині. Тоді формула (6.98) для передаточного відношення приймає вигляд:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1. \quad (6.99)$$

6.6.4. Лобова фрикційна передача

Перевагами фрикційної передачі є можливість її реверсування і здійснення безступінчастої зміни передаточного відношення, а також простота конструкції та плавність роботи. Тому фрикційні передачі, незважаючи на свої недоліки (неминуче проковзування, неможливість забезпечення точності заданого закону передачі), широко застосовують в машинобудуванні як варіатори.

Найпростіший варіатор, так званий лобовий, зображений на рис. 6.21.

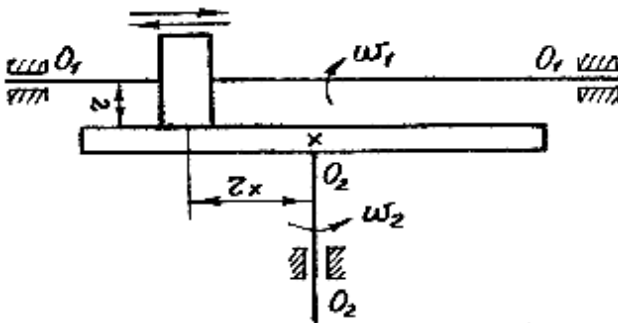


Рис. 6.21. Лобовий варіатор

Лобовий варіатор складається з ведучого ролика 1 і веденого диска 2. Ролик встановлюється на ведучому валу O_1O_1 і його можна переміщати відносно вала вздовж. При переміщенні ролика 1 вздовж осі обертання вала змінюється радіус кочення на диску 2. Це дозволяє плавно змінювати передаточне відношення передачі.

Не враховуючи ковзання, маємо:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_x}{r}. \quad (6.100)$$

Якщо середина ролика знаходиться на осі диска ($r_x = 0$), то $u_{12} = 0$.

Найбільше передаточне відношення буде тоді, коли ролик займатиме крайнє положення на диску 2:

$$u_{12max} = \frac{r_{xmax}}{r}. \quad (6.101)$$

При переміщенні ролика праворуч від осі O_2O_2 вал диска 2 обертатиметься у зворотньому напрямі.

Таким чином, лобовий варіатор дозволяє плавно змінювати передаточне відношення. Діапазон регулювання його лежить в межах:

$$0 \leq u_{12} \leq u_{12max}. \quad (6.102)$$

Фрикційні передачі застосовують у вібрографах, магнітофонах, кіноапаратах, програвачах, спідометрах. Варіатори широко використовують у різних галузях промисловості. Їх часто застосовують у приводах конвеєрів, зварювальних машинах, металорізальних верстатах і ін.

6.7. Коефіцієнт корисної дії механізмів і машин

Щоб визначити ступінь енергетичної досконалості машини, користуються поняттям механічного *коефіцієнта корисної дії* (ККД) машини.

Під механічним ККД η розуміють відношення величини роботи $A_{КО}$ сил корисного опору до роботи A_p сил рушійних за цикл усталеного руху

$$\eta = \frac{A_{КО}}{A_p}. \quad (6.103)$$

Враховуючи зв'язок роботи усіх сил опору і роботи рушійних сил із (6.11), а також значення роботи усіх сил опору із (6.12), маємо:

$$A_{КО} = A_p - A_f, \quad (6.104)$$

де A_f – робота сил тертя та інших невиробничих опорів.

Тоді рівняння (6.103) прийме вигляд

$$\eta = \frac{A_p - A_f}{A_p} = 1 - \frac{A_f}{A_p}. \quad (6.105)$$

Відношення значень робіт A_f сил невиробничих опорів до роботи сил рушійних, називається коефіцієнтом втрат φ механізмі. Відповідно до цього формула (6.105) набере вигляду

$$\eta = 1 - \varphi. \quad (6.106)$$

З формули (6.105) випливає, що коли робота рушійних сил дорівнює роботі усіх сил невиробничих опорів $A_p = A_f$ то ККД дорівнює нулю. При цьому рух механізму можливий, але без виконання якої-небудь корисної роботи (рух вхолосту). Таким чином маємо:

$$0 \leq \eta < 1. \quad (6.107)$$

Зустрічаються випадки, коли теоретично ККД має від'ємне значення. Це є ознакою *самогальмування*, або *заклинювання* механізму, тобто неможливості передавати рух у заданому напрямі (черв'ячна передача).

Машина складається з кількох механізмів, тому визначення її ККД зводиться до попереднього визначення ККД кожного з механізмів. Залежно від способу з'єднання цих механізмів обчислюють ККД усієї машини.

Існує *три способи з'єднання механізмів*: послідовне, паралельне, змішане.

Визначення коефіцієнту корисної дії при послідовному з'єднанні механізмів

Нехай маємо n послідовно з'єднаних механізмів (рис. 6.22).

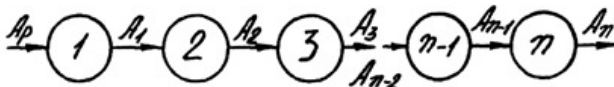


Рис. 6.22. Послідовне з'єднання механізмів

Прикладом послідовного з'єднання механізмів може бути теплосилова установка. Роботою рушійних сил тут є енергія палива; роботою сил виробничого опору – енергія, що виділяється головним валом двигуна; роботою сил невиробничих опорів – послідовні втрати у топці, котлі, паропроводах, у двигуні і т.д.

Іншими прикладами послідовного з'єднання механізмів можуть бути: привод стрічкового конвеєра (електродвигун, муфта, зубчасті передачі редуктора, підшипники, гнучка передача, стрічковий конвеєр); привод автомобіля (двигун внутрішнього згорання, муфта, коробка передач, кардан, диференціальний механізм, ведучі колеса).

Позначимо A_1 роботу сил корисного опору на вихідному валу першого механізму і роботу сил рушійних на вхідному валу другого механізму, A_2 роботу сил корисного опору на вихідному валу другого механізму і роботу сил рушійних на вхідному валу третього механізму і т.д. Таким чином, ККД усієї машини:

$$\eta = \frac{A_n}{A_p}. \quad (6.108)$$

Окремі ККД кожного механізму будуть:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}; \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}; \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}; \dots; \eta_n = \frac{A_n}{A_{(n-1)}}. \quad (6.109)$$

Запишемо тотожність:

$$\frac{A_n}{A_p} = \frac{A_1}{A_p} \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \cdot \dots \cdot \frac{A_n}{A_{(n-1)}}. \quad (6.110)$$

Підставимо в тотожність (6.110) значення множників із (6.109), отримаємо:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n. \quad (6.111)$$

ККД послідовного з'єднання механізмів дорівнює добутку ККД окремих механізмів.

**Визначення коефіцієнту корисної дії
при паралельному з'єднанні механізмів**

Прикладом паралельного з'єднання механізмів може бути трансмісійний вал разом з верстатами, між якими він розподіляє енергію. Нехай маємо η паралельно з'єднаних механізмів (рис. 6.23).

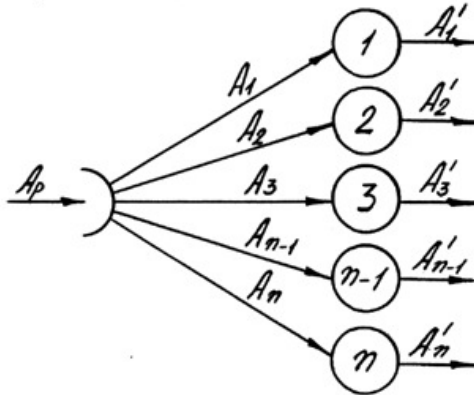


Рис. 6.23. Паралельне з'єднання механізмів

За допомогою трансмісійного валу до групи механізмів підводиться робота A_p рушійних сил. Позначимо $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ роботу рушійних сил, що підводиться до 1, 2, 3, ..., n механізму; $A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_n$ – роботу сил корисних опорів відповідних механізмів.

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n. \quad (6.112)$$

Окремі ККД механізмів будуть:

$$\eta_1 = \frac{A'_1}{A_1}; \eta_2 = \frac{A'_2}{A_2}; \eta_3 = \frac{A'_3}{A_3}; \dots; \eta_n = \frac{A'_n}{A_n}. \quad (6.113)$$

ККД усієї установки:

$$\eta = \frac{A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}. \quad (6.114)$$

В рівнянні (6.114) чисельник і знаменник правої частини являють собою відповідну суму чисельників і знаменників дробів, що є окремими значеннями ККД.

Відомо, що при такому способі утворення дробу з ряду дробів дістанемо число, яке менше від найбільшого і більше від найменшого з цих дробів.

Нехай η_k та η_i будуть відповідно найбільшим і найменшим значенням окремих ККД, тоді:

$$\omega_1 r_1 (1 - \varepsilon) = \omega_2 r_2. \quad (6.115)$$

Якщо усі окремі ККД рівні між собою, то ККД установки дорівнює кожному з них. Коли ж вони різко відрізняються за величиною, то про значення η , не підрахувавши попередньо за (6.114), заздалегідь нічого сказати не можна. Можна лише стверджувати, що вік буде ближче до того окремого значення ККД, питома вага якого в розумінні споживаної потужності більша.

Приклад *змішаного з'єднання механізмів* наведений на рис. 6.24.

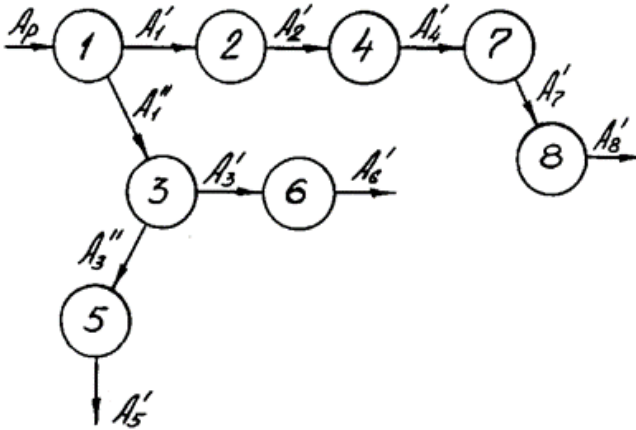


Рис. 6.24. Змішане з'єднання механізмів

При змішаному з'єднанні формула ККД усієї установки, виражена через окремі ККД, залежить від числа паралельних і послідовних віток, їх розташування і розподілу енергії всередині кожної з них.

Оцінка енергетичної ефективності машин

Загальновідомо, що досконалість машин і механізмів оцінюють ККД та намагаються його постійно підвищувати. ККД лежить у межах $0 \leq \eta < 1$ і є величиною, яка визначається відношенням корисної до витраченої потужності за відомими формулами, наприклад, (6.103). Вказане вище загальне визначення ККД може бути конкретизовано для окремих випадків і, що важливо, можна отримати формули для визначення його через інші параметри механізмів.

Розглянемо для прикладу визначення ККД зубчастих диференціальних передач. Якщо така передача застосовується в якості редуктора, який передає потужність виконавчому механізму машини на протязі тривалого часу, тоді для виявлення її придатності необхідно визначати ККД. У разі, коли такі передачі використовують у якості пристроїв регулювання руху деяких ланок ККД можна не визначати, якщо є впевненість, що передача несамогальмівна. На практиці в основному застосовують ***три відомі методи*** визначення ККД, які можна прийняти за базові для розв'язування поставленої конкретної задачі:

– безпосереднє визначення втрат на тертя у всіх рухомих з'єднаннях ланок та сили які діють між ними і по швидкостях відносного руху. При цьому сили визначають попередньо без врахування тертя, а з них вже визначають сили тертя та їх роботу. Отримана робота сил тертя дозволяє визначити ККД;

– зубчасті планетарні та диференціальні передачі шляхом інверсії зводять до простих передач з нерухомими осями, покладаючи, що додаткове обертання, подане всьому механізму в цілому, в результаті перетворення нічого не міняє у роботі сил тертя. Не враховуються також додаткові втрати від тиску в кінематичних парах, які

виникають під дією відцентрових сил і моментів сил інерції сателітів;

– при визначенні ККД передбачають, що втрати на тертя в кожній парі зубчастих коліс зубчастої диференціальної передачі пропорційні добутку колової сили на зубцях і швидкості точки початкового кола сателіта по відношенню до водила ($F_t v$) або добутку обертального моменту на кутову швидкість ланки ($T_i \omega_i$). Цей добуток носить назву *потенціальної потужності*.

ККД диференціальної передачі для керування швидкістю веденої ланки за допомогою зупинника обертального руху з'єднаного з епіциклом (див. розд. 5.4), де ведучою ланкою є сонячне зубчасте колесо, а веденою - водило, початково має загальний вигляд

$$\eta = \eta_{14} \eta_6 \eta_7, \quad (6.116)$$

де η_{14} – ККД зубчастої диференціальної передачі; η_6 – ККД привода зупинника (зубчастої передачі); η_7 – ККД зупинника (втрати потужності на роботу насоса при перекачуванні рідини у замкнутій гідросистемі).

Блок-схема можливих втрат потужності в пристрої для керування змінами швидкості наведено на рис. 6.25.

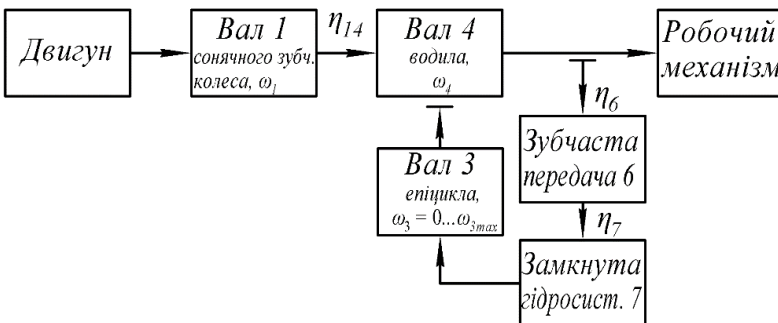


Рис. 6.25. Блок-схема втрат потужності у пристрої для керування змінами швидкості

На основі аналізу втрат потужності у пристрої зроблений висновок, що частина потужності, поданої на сонячне зубчасте колесо через сателіт, передається на водило, а її частина через сателіт передається на епіцикл і замкнуту гідросистему.

Для визначення ККД розглянемо схему сил, які діють у зачепленнях сонячного зубчастого колеса і сателіта \vec{F}_{12} , сателіта та епіцикла \vec{F}_{23} і сателіта та водила \vec{F}_{24} і запишемо умову рівноваги сателіта (рис. 6.26) у вигляді

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} = 0, \quad (6.117)$$

Крім того, сума моментів сил, які діють на сателіт, відносно осі його обертання, рівна нулю:

$$\vec{F}_{12}r_2 + \vec{F}_{23}r_2 = 0, \quad (6.118)$$

де r_2 – радіус початкового кола сателіта, з числом зубців z_2 .

З виразів (6.117) і (6.118) сили, діючі на ланки диференціальної передачі будуть:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{23} = 0, \quad (6.119)$$

$$\vec{F}_{24} = -(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{23}). \quad (6.120)$$

Отримані формули показують, що одна з заданих сил дає можливість визначити дві інші.

Якщо маємо заданий обертальний момент T_1 , то

$$F_{12} = \frac{T_1}{r_1}, \quad (6.121)$$

де r_1 – радіус початкового кола сонячного колеса.

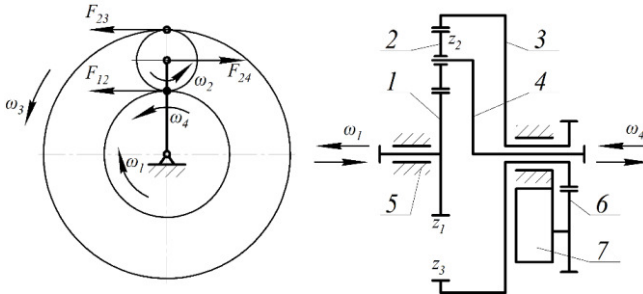


Рис. 6.26. Схема сил зубчастої диференціальної передачі

Відповідно до виразу (6.121) для обертального моменту, який прикладається до колеса z_3 у передачі з зупиненим водилом, маємо

$$T_3 = F_{23}r_3 = -\frac{r_3}{r_1}T_1 = -u_{13}^{(4)}T_1, \quad (6.122)$$

тобто обертальні моменти T_1 і T_3 без врахування тертя, відносяться, як у зубчастій передачі з нерухомими осями. Враховуючи тертя на зубцях, зв'язок між обертальними моментами можна подати так

$$T_3 = -T_1 u_{13}^{(4)} \eta_{13}^k, \quad (6.123)$$

де η_{13} – ККД передачі з нерухомими осями, визначається як для послідовного зачеплення; $k = +1$ – коли передача потужності здійснюється від зубчастого колеса z_1 до зубчастого колеса z_3 і $k = -1$ – коли передача потужності здійснюється від зубчастого колеса z_3 до зубчастого колеса z_1 ; $u_{13}^{(4)} = -z_3/z_1$ – передаточне число зубчастої диференціальної передачі при зупиненому водилі.

У даному випадку ККД зубчастої диференціальної передачі необхідно визначати тому, що передається значна потужність від сонячного зубчастого колеса до водила або навпаки, тобто вона застосовується, як силова передача.

Зв'язок між обертальними моментами, які діють на ланки зубчастої диференціальної передачі, може бути встановлений із розгляду умови рівноваги передачі в цілому, а саме

$$T_1 + T_3 + T_4 = 0, \quad (6.124)$$

де T_4 – обертальний момент, який діє на водило.

$$T_4 = -T_1 \left(1 - u_{13}^{(4)} \eta_{13}^k \right). \quad (6.125)$$

Коли ведучою ланкою є сонячне колесо, а веденою – водило, тобто обертальний момент сил опору прикладений до водила, тоді вираз для ККД буде мати такий вигляд

$$\eta_{14} = -\frac{T_4 \omega_4}{T_1 \omega_1 + T_3 \omega_3}. \quad (6.126)$$

Підставимо значення T_1, T_3, T_4 у (6.126) і виразимо ω_4 через ω_1 використавши формулу (5.12). Після нескладних перетворень, отримаємо:

$$\eta_{14} = - \frac{(1 + u_{13}^{(4)}) (\omega_1 + \omega_3 u_{13}^{(4)})}{(1 + u_{13}^{(4)}) (\omega_1 + \omega_3 u_{13}^{(4)}) \eta_{13}}. \quad (6.127)$$

Наочно характер зміни ККД диференціальної передачі можна показати графічно, як на рис. 6.27.

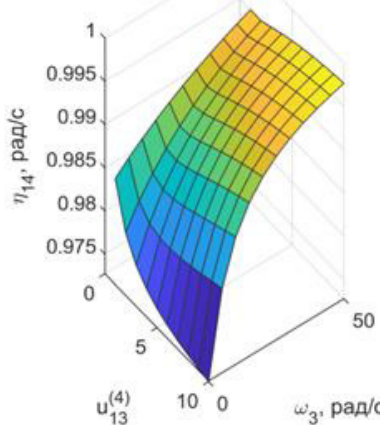


Рис. 6.27. Графічні залежності ККД

6.8. Коефіцієнт корисної дії кінематичних пар

Визначимо ККД похилої площини. Розглянемо рівномірне переміщення повзуна на похилій площині вгору (рис. 6.28). ККД дорівнює відношенню робіт рушійних сил F_{P0} при відсутності тертя до робіт рушійних сил F_P на переміщенні S :

$$\eta = \frac{F_{P0} S}{F_P S}. \quad (6.128)$$

Враховуючи значення F_P і F_{P0} із (6.31) і (6.34) отримаємо:

$$\eta = \frac{F_g \operatorname{tg} \alpha}{F_g \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (6.129)$$

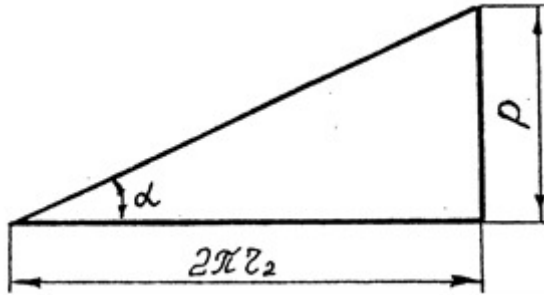


Рис. 6.28. Розгортка гвинтової лінії різьби

При рівномірному переміщенні повзуна на похилій площині донизу, враховуючи значення рушійних сил F_p і F_{p0} із (6.33) і (6.34) будемо мати:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}. \quad (6.130)$$

Визначимо ККД гвинтової кінематичної пари (рис. 6.29). Відомо, що для рівномірного піднімання вантажу, на який діє сила тяжіння F_g , за допомогою гвинтової пари треба прикласти пару сил, момент якої визначається за формулою (6.39). При підніманні вантажу на один крок P гвинта, гвинт треба повернути на кут 2π (рис. 6.28).

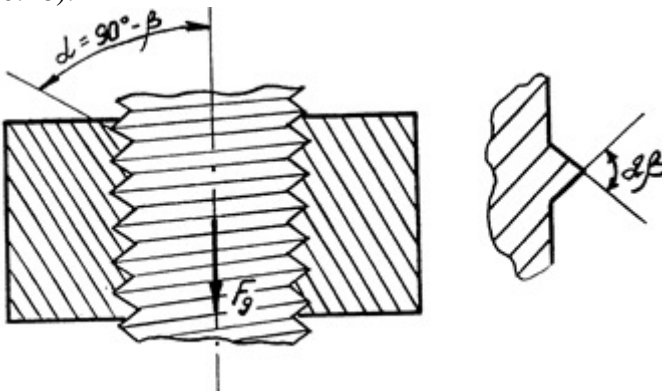


Рис. 6.29. Гвинтова пара з трикутною різьбою

Із рис. 6.29 видно, що крок P гвинта дорівнює:

$$p = 2\pi r_2 \operatorname{tg} \alpha, \quad (6.131)$$

де r_2 – середній радіус різьби, α – кут підйому гвинтової лінії різьби.

Отже, корисна робота для підняття вантажу, сила тяжіння якого F_g , на один крок дорівнює:

$$A_{PK} = F_g p = F_g 2\pi r_2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.132)$$

Затрачена робота для підняття цього ж вантажу буде:

$$A_{P3} = M_f 2\pi. \quad (6.133)$$

Враховуючи значення M_f із (6.41), отримаємо :

$$A_{P3} = F_g r_2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) 2\pi. \quad (6.134)$$

ККД гвинтової пари:

$$\eta = \frac{A_{PK}}{A_{P3}} = \frac{F_g 2\pi r_2 \operatorname{tg} \alpha}{F_g r_2 \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) 2\pi},$$

або остаточно:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (6.135)$$

Як бачимо, ККД гвинтової пари з прямокутною різьбою аналогічний ККД похилої площини.

ККД гвинтової пари з трикутною різьбою (рис. 6.29) буде:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi')}, \quad (6.136)$$

де φ' – приведений кут тертя, визначається із (6.43).

Оскільки $f < f'$ і $\varphi < \varphi'$, то ККД має менше значення для трикутної різьби. А тому трикутні різьби використовують як кріпильні, а прямокутні як ходові. Умова самогальмування для трикутної різьби $\alpha < \varphi'$.

6.9. Кінетостатичне дослідження механізмів

6.9.1. Основні завдання кінетостатичного розрахунку

Силовий розрахунок механізмів являється однією із важливих стадій проектування машин.

До *основних завдань* кінетостатичного розрахунку механізмів належать:

- визначення зусиль, що діють на окремі ланки механізмів;
- визначення реакції в кінематичних парах;
- визначення зрівноважувальної сили, або зрівноважувального моменту.

Ці зусилля будуть використовуватися при розрахунках ланок і кінематичних пар на міцність, стійкість, жорсткість і при деяких інших динамічних розрахунках.

Розрахунок механізмів, який виконується з врахуванням тільки зовнішніх сил, що діють на ланки, називається *статичним*. Однак, нерівномірний рух ланок викликає додаткові зусилля в опорах. Для визначення повних реакцій в опорах, з врахуванням додаткових зусиль, будемо застосовувати *метод Даламбера*, тобто в рівняння статики введемо, так звані, сили інерції і моменти пар сил інерції.

Силовий розрахунок, який виконується з врахуванням сил інерції і моментів пар сил інерції, називається *кінетостатичним*.

Силовий розрахунок в першому наближенні виконується без врахування сил тертя. Як відомо із попередньої лекції, сили інерції і їх моменти фіктивні і на ланки не діють. Сили інерції вводять в розрахунки чисто умовно, тільки для того, щоб ланки були в рівновазі і до них можна було застосовувати рівняння статики.

6.9.2. Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга

Рух ланок механізму здійснюється під дією прикладених до них зовнішніх сил. Сили взаємодії ланок, що виникають в місцях їх дотику, називаються реакціями в кінематичних парах.

Вважатимемо, що тиск в кінематичних парах розподіляється рівномірно по їх елементах, які приймаємо за абсолютно гладенькі, тобто силами тертя нехтуємо. Напрямок рівнодійної тиску у парі проходить по спільній нормалі до дотичних поверхонь. Таким чином, результуюча тиску в обертальній парі проходить через центр шарніра (рис. 6.30, а). Величина і лінія дії цієї рівнодійної не відомі. У поступальній парі (рис. 6.30, б) результуюча реакція напрямлена перпендикулярно до напрямних, але величина і точка прикладання її також не відомі.

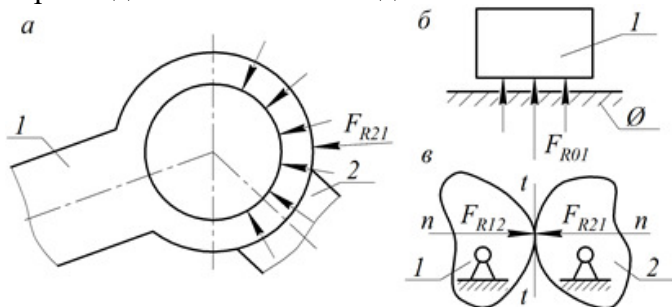


Рис. 6.30. Зусилля в кінематичних парах:
 а і б – нижчі кінематичні пари: обертальна і поступальна;
 в – вища кінематична пара

Таким чином, для визначення реакції в кожній із нижчих кінематичних пар 5 класу необхідно знайти дві невідомі.

Реакція в вищій кінематичній парі 4 класу проходить по спільній нормалі до дотичних поверхонь (рис. 6.30, в). Невідома тільки її величина.

Для кожної ланки кінематичного ланцюга можна скласти три рівняння рівноваги, тоді для n ланок можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги. Число невідомих, які потрібно визначити, буде: для пар V класу $2p_5$, а для пар IV класу p_4 .

Статично визначеним буде кінематичний ланцюг, у якого число рівнянь дорівнює числу невідомих, тобто:

$$3n = 2p_5 + p_4. \quad (6.137)$$

Вищі кінематичні пари IV класу можна замінити нижчими парами V класу, тоді матимемо:

$$3n = 2p_5. \quad (6.138)$$

Звідки

$$p_5 = \frac{3}{2}n. \quad (6.139)$$

Поєднання числа ланок і числа кінематичних пар V класу в рівнянні (6.139), аналогічне їх поєднанню для груп Ассура (див. розд. 1.7)

Таким чином, всі групи Ассура є статично визначеними, тобто число рівнянь, які можна скласти для групи Ассура, дорівнює числу невідомих.

6.9.3. Кінетостатика груп Ассура II класу II порядку

Кінетостатичний розрахунок механізмів проводиться в послідовності, оберненій утворенню механізмів, тобто розпочинається з останньої приєднаної групи Ассура і закінчується механізмом I класу. Отже, кінетостатичний розрахунок механізмів зводиться до розрахунку окремих груп Ассура і механізму I класу.

Силовий розрахунок будемо проводити **методом планів сил**. Вважатимемо, що всі зовнішні сили, прикладені до ланки, а також сили інерції і моменти пар сил інерції замінені однією узагальненою силою.

Кінестатика груп Ассура I виду

Механізми, утворені із груп Ассура I виду, застосовуються, наприклад, у верстатах, підйомних механізмах кранів і ін.

Накреслимо в певному масштабі групу Ассура I виду (рис. 6.31, а). Нехай до ланки 2 прикладено узагальнену силу \vec{F}_2 , а до ланки 3 – узагальнену силу \vec{F}_3 . Лінію дії, величину і точки прикладання обох сил задано. Дію від'єднаних ланок механізму замінимо реакціями в кінематичних парах F_{Ri} . Ці реакції невідомі як за величиною, так і за напрямом.

Розкладемо кожну невідому, прикладену в центрі шарніра, на дві складові: нормальну \vec{F}_R^n – напрямлену вздовж відповідної ланки і тангенціальну \vec{F}_R^t – напрямлену перпендикулярно до цієї ж ланки. Тоді, згідно принципу Даламбера, група буде в стані рівноваги, і до неї можна застосовувати рівняння статyki.

Кожну ланку окремо також можна розглядати в стані рівноваги, так як дію однієї ланки на другу можна замінити реакцією в середній кінематичній парі.

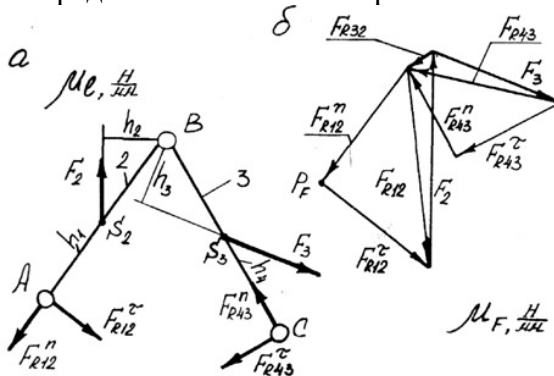


Рис. 6.31. Кінестатика групи Ассура II класу II порядку I виду: а – група Ассура I виду; б – план сил

Визначимо тангенціальні складові реакції, розглянувши рівновагу окремо кожної ланки. Візьмемо суму моментів всіх сил відносно т. В для другої ланки:

$$\sum m_F(B) = 0. \quad (6.140)$$

$$F_2 h_2 - F_{R12}^T h_1 = 0; \quad F_{R12}^T = F_2 \frac{h_2}{h_1}. \quad (6.141)$$

Візьмемо суму моментів всіх сил відносно т. В для третьої ланки:

$$\sum m_F(B) = 0; \quad (6.142)$$

$$F_3 h_3 - F_{R34}^T h_4 = 0; \Rightarrow F_{R34}^T = F_3 \frac{h_3}{h_4}. \quad (6.143)$$

Складемо векторне рівняння суми всіх сил, що діють на групу Ассура, так, щоб перший і останній доданок були невідомими реакціями. В нашому випадку це, відповідно $\overrightarrow{F_{R12}^n}$ і $\overrightarrow{F_{R34}^n}$:

$$\overrightarrow{F_{R12}^n} + \overrightarrow{F_{R12}^T} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_{R34}^T} + \overrightarrow{F_{R34}^n} = 0. \quad (6.144)$$

Побудуємо план сил в масштабі (рис. 6.31, б):

$$\mu_F = \frac{F}{f}, \quad (6.145)$$

де F – дійсне значення сили в Н; f – відрізок на плані сил в мм, що зображає дійне значення сили.

Вибираємо довільну точку P_F – **полюс план сил** і з неї, в вибраному масштабі μ_F , розпочинаємо побудову плану сил, відповідно до рівняння (6.144). Через точку P_F проводимо лінію дії нормальної реакції $\overrightarrow{F_{R12}^n}$, величина якої поки що невідома. Далі, з точки P_F відкладемо вектор, що зображає реакцію $\overrightarrow{F_{R12}^T}$. З кінця отриманого вектора, відкладаємо вектор, що записаний у рівнянні (6.144) наступним (в нашому випадку $\overrightarrow{F_2}$). І так далі послідовно вектори всіх сил, згідно їх величини і напрямку. Для останнього (вектора нормальної реакції $\overrightarrow{F_{R34}^n}$) проводимо

лінію його дії до взаємного перетину з лінією дії першого проведеного вектора ($\overrightarrow{F_{R12}^n}$). Отримана точка перетину буде кінцем вектора $\overrightarrow{F_{R34}^n}$ і початком $\overrightarrow{F_{R12}^n}$. Повні реакції $\overrightarrow{F_{R12}}$ і $\overrightarrow{F_{R34}}$ отримаємо додаванням відповідних нормальних і тангенціальних складових.

Визначимо реакцію в середній кінематичній парі. Для цього розглянемо рівновагу однієї ланки, наприклад, другої. Складемо векторне рівняння:

$$\overrightarrow{F_{R12}} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_{R32}} = 0. \quad (6.146)$$

Для знаходження реакції $\overrightarrow{F_{R32}}$, використаємо вже побудований план, на якому є побудовані вектори $\overrightarrow{F_2}$ і $\overrightarrow{F_{R12}}$. Як видно з рівняння (6.146), щоб провести $\overrightarrow{F_{R32}}$, достатньо з'єднати кінець першого вектора з початком другого.

Дійсні значення реакцій знайдемо множенням відповідного відрізка, що зображає цю реакцію на масштаб плану сил, наприклад:

$$F_{R12} = f_{R12}\mu_F; F_{R12}^t = f_{R12}^t\mu_F. \quad (6.147)$$

Кінестатика груп Ассура II виду

Механізми, утворені із груп Ассура II виду, застосовуються, наприклад, в двигунах внутрішнього згоряння, компресорах і ін.

Накреслимо в масштабі групу Ассура II виду (рис. 6.32, а) Прикладемо до ланок 2 і 3 у відповідних точках узагальнені сили $\overrightarrow{F_2}$ і $\overrightarrow{F_3}$. Дію від'єднаних ланок замінимо реакціями в кінематичних парах. Розкладемо невідому реакцію в кінематичній парі А на нормальну $\overrightarrow{F_{R12}^n}$ і $\overrightarrow{F_{R12}^t}$ тангенціальну, а в кінематичній парі В реакція $\overrightarrow{F_{R03}}$ буде напрямлена перпендикулярно напрямним і проходитиме через центр шарніра. Тоді ця група Ассура і кожна її ланка буде знаходитися в стані рівноваги. Розглянемо рівновагу

другої ланки. Візьмемо суму моментів всіх сил відносно т. В:

$$\sum m_F(B) = 0; \quad (6.148)$$

$$F_2 h_2 - F_{R12}^T h_1 = 0; \Rightarrow F_{R12}^T = F_2 \frac{h_2}{h_1}. \quad (6.149)$$

Складемо векторне рівняння суми всіх сил, що діють на групу:

$$\overrightarrow{F_{R12}^n} + \overrightarrow{F_{R12}^T} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_{R03}} = 0. \quad (6.150)$$

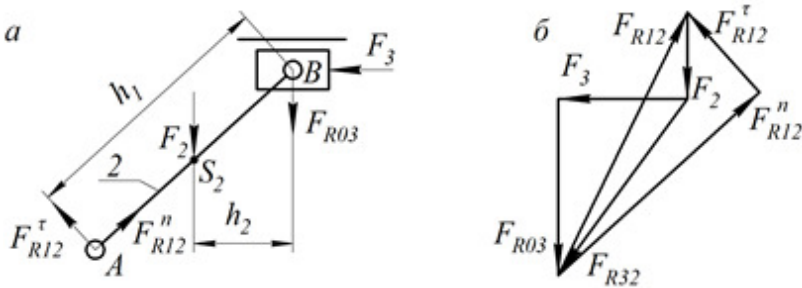


Рис. 6.32. Кінестатика групи Ассур II класу

II порядку II виду:

a – група Ассур II виду; *б* – план сил

Побудуємо план сил в певному масштабі, μ_F (рис. 6.32, б). Вибираємо довільну точку P_F , і з неї проводимо лінію дії реакції $\overrightarrow{F_{R12}^n}$ та відкладемо в масштабі реакцію $\overrightarrow{F_{R12}^T}$. Затим, згідно векторного рівняння (6.150) будуємо план сил, як описано для попереднього прикладу. На перетині лінії дій першої і останньої сили з рівняння отримуємо вектори цих сил. При цьому маємо повну реакцію $\overrightarrow{F_{R03}}$, а для визначення повної реакції $\overrightarrow{F_{R12}}$ сполучимо початок вектора $\overrightarrow{F_{R12}^n}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{F_{R12}^T}$.

Для визначення реакції в середній кінематичній парі складемо векторне рівняння суми всіх сил, що діють на другу ланку:

$$\vec{F}_{R12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{R32} = 0. \quad (6.151)$$

На плані сил з'єднаємо кінець вектора \vec{F}_2 із початком вектора \vec{F}_{R12} . Отриманий вектор і буде зображати в масштабі реакцію \vec{F}_{R32} .

Кінетостатика груп Ассура III виду

Механізми, в склад яких входять групи Ассура III виду, застосовуються, наприклад, в стругальних верстатах.

Накреслимо в масштабі групу Ассура III виду (рис. 6.33, а). Прикладемо до ланок 2 і 3 у відповідних точках рівнодійні сили \vec{F}_2 і \vec{F}_3 . Дію від'єднаних ланок замінимо реакціями в кінематичних парах.

Розглянемо спочатку рівновагу третьої ланки, для цього умовно від'єднаємо другу ланку із силами, що діють на неї. Дію від'єднаної ланки 2 на ланку 3 замінимо реакцією \vec{F}_{R23} яка буде напрямлена перпендикулярно до третьої ланки. Реакцію в кінематичній парі O розкладемо на нормальну \vec{F}_{R03}^n і тангенціальну \vec{F}_{R03}^t .

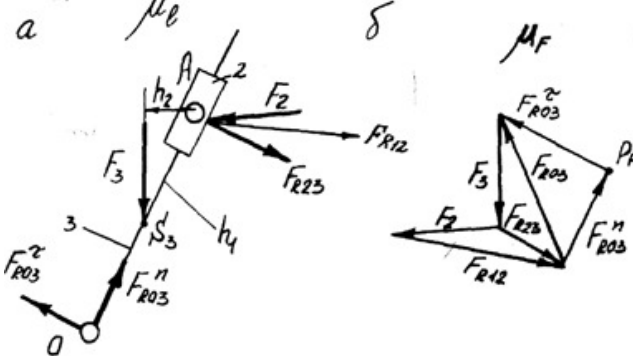


Рис. 6.33. Кінетостатика групи Ассура II класу II порядку III виду:
а – група Ассура III виду; б – план сил

Візьмемо суму моментів відносно т. А

$$\sum m_F(A) = 0. \quad (6.152)$$

$$F_3 h_2 - F_{R03}^T h_1 = 0; \Rightarrow F_{R03}^T = F_3 \frac{h_2}{h_1}. \quad (6.153)$$

Складемо векторне рівняння суми всіх сил, що діють на третю ланку:

$$\overrightarrow{F_{R03}^n} + \overrightarrow{F_{R03}^T} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_{R23}} = 0. \quad (6.154)$$

Побудуємо план сил в масштабі μ_F (рис. 6.33, б), за алгоритмом, детально описаним для попередніх прикладів.

Із плану сил знайдемо реакції $\overrightarrow{F_{R03}}$ і $\overrightarrow{F_{R23}}$.

Затим розглянемо рівновагу групи Ассура в цілому. Складемо векторне рівняння суми всіх сил, що діють на групу:

$$\overrightarrow{F_{R03}} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_{R12}} = 0. \quad (6.155)$$

На плані сил (рис. 6.33, б) з кінця вектора сили $\overrightarrow{F_3}$ побудуємо вектор сили $\overrightarrow{F_2}$. З'єднаємо кінець вектора сили $\overrightarrow{F_2}$ з початком вектора $\overrightarrow{F_{R03}}$. Отримаємо вектор $\overrightarrow{F_{R12}}$. Примітка. Якщо $F_2 = 0$, то $\overrightarrow{F_{R12}} = \overrightarrow{F_{R23}}$.

Кінестатика механізму I класу

Накреслимо в масштабі механізм I класу (рис. 6.34, а).

Прикладемо в центрі мас S_1 силу тяжіння $\overrightarrow{F_{g1}}$ та силу інерції $\overrightarrow{F_{i1}}$. Дію від'єднаної ланки 2 замінимо реакцією $\overrightarrow{F_{R21}}$, яка дорівнює $\overrightarrow{F_{R21}} = -\overrightarrow{F_{R12}}$. До ланки 1 в т.А прикладемо **зрівноважувальну силу** $\overrightarrow{F_{3p}}$ і визначимо її. Візьмемо суму моментів всіх сил відносно т. О

$$\sum m_F(O) = 0. \quad (6.156)$$

$$F_{3p} h_1 - F_{R21} h_2 - F_{g1} h_3 = 0. \quad (6.157)$$

Із рівняння (6.145) знаходимо:

$$F_{зр} = \frac{F_{R21}h_2 + F_{g1}h_3}{h_1}. \quad (6.158)$$

Визначимо реакцію \vec{F}_{R01} . Складемо векторне рівняння сил, що діють на механізм I класу:

$$\vec{F}_{R21} + \vec{F}_{g1} + \vec{F}_{l1} + \vec{F}_{R01} = 0. \quad (6.159)$$

Побудуємо план сил в масштабі μ_F (рис. 6.34, б), згідно векторного рівняння (6.147), для перших трьох сил.

Кінець вектора \vec{F}_{l1} сполучимо з початком вектора \vec{F}_{R21} . Отриманий вектор і буде зображати реакцію \vec{F}_{R01} .

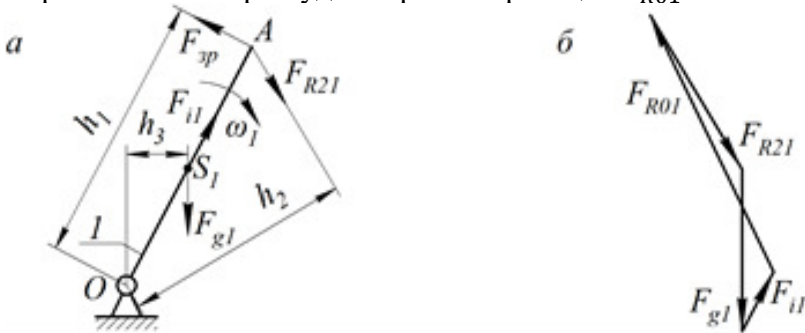


Рис. 6.34. Кінетостатика механізму I класу:
а – механізм I класу; б – план сил

Таким чином, кінетостатичне дослідження механізмів дозволяє визначити реакції у всіх кінематичних парах та зрівноважувальну силу, або зрівноважувальний момент:

$$M_{зр} = F_{зр} l_{OA}. \quad (6.160)$$

Сили тертя в механізмах можна врахувати наступним чином. Після визначення реакції в кінематичних парах без врахування сил тертя, задаємось величинами коефіцієнтів тертя і визначаємо відповідні сили тертя, а затим вводимо ці сили тертя в число зовнішніх сил, які прикладені до відповідних ланок і повторюємо весь розрахунок спочатку з врахуванням знайдених сил тертя.

Таким чином, зазначений процес можна продовжити й далі, але практично цілком досить обмежитись другим наближенням.

Запитання для перевірки знань по темі 6:

1. Силним аналізом механізму називається...
2. Динамічним аналізом механізму називається...
3. Сила, з точки зору динаміки механізмів.
4. Величина сили, це ...
5. Як називаються сили, які створюються двигунами і намагаються прискорити рух ланок механізму?
6. Як називаються сили, для переборювання яких призначена машина?
7. Як називаються сили, що визначаються фізико-механічними характеристиками ланок?
8. Як називаються сили, які враховують нерівномірність руху ланок?
9. Як визначається елементарна робота, що виконується рушійною силою на елементарному переміщенні?
10. Як визначається елементарна робота, що виконується силою корисного опору на елементарному переміщенні?
11. Як визначається елементарна робота, що виконується гравітаційною силою на елементарному переміщенні?
12. Які реакції виникають в кінематичних парах?
13. Що називають механічною характеристикою двигуна, або робочої машини?
14. Яким способом виконують зменшення габаритів та маси машинного агрегату?
15. Як визначається потужність двигуна?
16. Що встановлюють між двигуном і робочою машиною для зменшення кутової швидкості?

17. Закон зміни кінетичної енергії для механізму з одним ступенем вільності.

18. Кінетична енергія механізму в довільному положенні при поступальному русі.

19. Кінетична енергія механізму в довільному положенні при обертовому русі.

20. Кінетична енергія механізму в довільному положенні при плоскопаралельному русі.

21. При якій умові можливий пуск роботи машинного агрегату?

22. При якій умові можливе гальмування машинного агрегату?

23. При якій умові можливий усталений рух машинного агрегату?

24. Що називається силою тертя?

25. Яке тертя називається граничним?

26. Яке тертя називається чистим?

27. Яке тертя називається рідинним?

28. Яке тертя називається напіврідинним?:

29. Яке тертя називається напівсухим?

30. Рівняння Кулона-Амонтона.

31. Як завжди направлена сила тертя?

32. Як визначається коефіцієнт тертя ковзання?

33. Як визначається сила тертя для клинчастого жолоба?

34. Як визначається сила тертя для циліндричного жолоба?

35. Як визначається приведений коефіцієнт тертя для припрацьованої цапфи?

36. Як визначається момент тертя у суцільній п'яті?

37. Рівняння Ейлера:

38. Одиниця виміру коефіцієнта тертя кочення:

39. Одиниця виміру коефіцієнта тертя ковзання:

40. При переміщенні циліндра по площині, чисте ковзання буде відбуватись при...?
41. При переміщенні циліндра по площині, чисте кочення буде відбуватись при...?
42. При переміщенні циліндра по площині, ковзання разом із коченням буде відбуватись при ...?
43. Коли використовується заміна результуючої сили інерції, силами інерції мас, які зосереджені у певних точках?
44. При якій умові отримується статичне розміщення маси ланки, методом заміщених точок?
45. При якій умові отримується динамічне розміщення маси ланки. методом заміщених точок?
46. Як називається силовий розрахунок, який виконується з врахуванням сил інерції?
47. Що не враховується при проведенні силового розрахунку у першому наближенні?
48. Для чого в розрахунки вводять сили інерції та моменти пар сил інерції?
49. Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга.
50. Коефіцієнт корисної дії машини.
51. Робота сил корисного опору.
52. Коефіцієнт втрат у механізмі.
53. Ознакою самогальмування, або заклинювання механізму є?
54. Коефіцієнт корисної дії машинного агрегату з послідовним з'єднанням механізмів.

ТЕМА 7. Дослідження руху механізмів та регулювання ходу машин

- 7.1. Рух механізмів під дією заданих сил. Основні відомості
- 7.2. Зведені сили і моменти
- 7.3. Теорема М.Є. Жуковського
- 7.4. Зведена маса і зведений динамічний момент інерції механізму
- 7.5. Рівняння руху машини
- 7.6. Нерівномірність руху механізмів
- 7.7. Середня швидкість руху. Коефіцієнт нерівномірності руху
- 7.8. Визначення динамічного моменту інерції маховика

7.1. Рух механізмів під дією заданих сил. Основні відомості

Вивчаючи рух механізму, ми досі припускали, що вхідна (ведуча) ланка обертається із сталою кутовою швидкістю ($\omega_1 = const$). Для здійснення такого руху потрібне цілком певне співвідношення між силами, що діють на механізм. Взагалі неможливо встановити таке співвідношення між силами, що діють на механізм, яке б забезпечило заданий закон його руху.

У більшості випадків сили корисного опору залежать від положення ланок, до яких вони прикладені. Наприклад, сила опору стиску повітря в циліндрі компресора залежить від його кутової швидкості. У ряді випадків сили корисних опорів залежать від швидкості точок їх прикладання, а іноді від часу. Наприклад, момент опору пропелера залежить від його кутової швидкості, а зусилля перемішування тіста залежить від часу перебування тіста у місильній машині. Сила опору переміщенню транспортного засобу (автомобіля) залежить не тільки від маси вантажу, але і від швидкості та профілю шляхопроводу.

Визначення закону руху механізму, що перебуває під дією прикладених до його ланок заданих сил, і є задачею динамічного аналізу. Для механізму, що має один ступінь вільності, цю задачу можна вважати розв'язаною, коли буде встановлено закон руху однієї ланки. За таку ланку, звичайно, вибирають ведучий вал робочої машини або ведений вал двигуна. До цієї ланки, що приймається за ланку зведення, доцільно звести всі сили й моменти пар сил, що прикладені до механізму. При цьому необхідно, щоб потужність, яку розвиває замінююча сила, дорівнювала сумі потужностей, що розвивають всі сили, прикладені до ланок механізму. Цю замінюючу силу називатимемо *зведеною силою* $F_{зв}$.

Маси всіх ланок зручно замінити деякою умовною масою, зосередженою в точці зведення. При цьому необхідно, щоб кінетична енергія зведеної маси в даному положенні дорівнювала сумі кінетичних енергій усіх ланок механізму. Тоді замість розглядання всього комплексу сил, що діють на ланки механізму, можна розглянути сили, що діють лише на одну ланку – *ланку зведення*, наприклад кривошип O_1A (рис. 7.1), що перебуватиме під дією зведеної сили $F_{зв}$ або *зведеного моменту* $M_{зв}$ (змінного у загальному випадку) і матиме *зведену масу* $m_{зв}$ (змінну у загальному випадку), зосереджену ніби в *точці зведення* A .

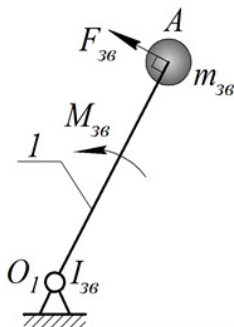


Рис. 7.1. Вхідна ланка (ланка зведення)

Якщо ланка зведення робить обертальний рух, то всі діючі сили і моменти доцільно замінити однією зведеною парою сил з моментом $M_{зв}$ а всі маси і динамічні моменти інерції ланок замінити **зведеним динамічним моментом інерції** $I_{зв}$, наданим ланці зведення O_1A .

Отже, у цьому випадку задача полягає у визначенні закону руху однієї ланки, що перебуває під дією зведеного моменту і має зведений динамічний момент інерції $I_{зв}$. Закон руху всіх інших ланок механізму можна визначити методом планів швидкостей та прискорень, або методом кінематичних діаграм.

7.2. Зведені сили і моменти

Зведеною силою (моментом) називається сила (момент), що замінює дію всіх сил і моментів в механізмі із умови рівності миттєвих потужностей зведеної сили (моменту) і всіх сил і моментів, що зводяться.

Сила (момент), що дорівнює за величиною зведеної силі (моменту) і протилежно їй напрямлена, називається **зрівноважувальною силою (моментом)**.

$$F_{зр} = -F_{зв}; M_{зр} = -M_{зв}. \quad (7.1)$$

Точка, до якої прикладена зведена сила, називається **точкою зведення**, а ланка, до якої зводяться всі сили і моменти, називається **ланкою зведення**.

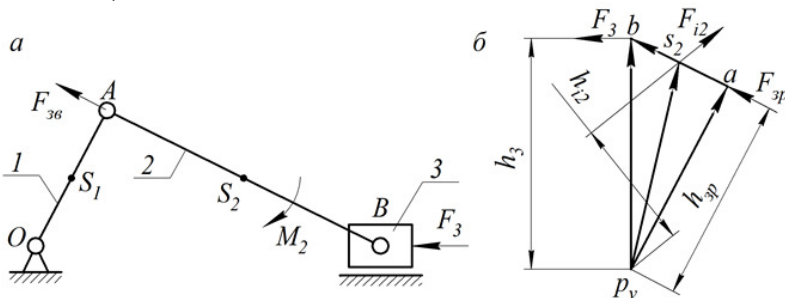


Рис. 7.2. Кривошипно-повзунний механізм:
a – кінематична схема; *б* – повернутий план швидкостей

Нехай до механізму (рис. 7.2, *a*) прикладені сила F_3 і момент M_2 .

В загальному випадку, на основі визначення зведеної сили (моменту) можна записати:

$$P_{3B} = \sum_{j=1}^n P_j. \quad (7.2)$$

Миттєві потужності визначаються за відомими формулами:

$$P_{3B} = F_{3B} V_A = M_{3B} \omega_1. \quad (7.3)$$

$$\sum_{j=1}^n P_j = \sum_{j=1}^n F_j V_j \cos(\vec{F}_j \wedge \vec{V}_j) + \sum_{j=1}^n M_j \omega_j. \quad (7.4)$$

Із рівнянь (7.3) та (7.4) маємо

$$F_{3B} = \sum_{j=1}^n F_j V_j \cos(\vec{F}_j \wedge \vec{V}_j) + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{V_A}. \quad (7.5)$$

$$M_{3B} = \sum_{j=1}^n F_j \frac{V_j}{\omega_1} \cos(\vec{F}_j \wedge \vec{V}_j) + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{\omega_1}. \quad (7.6)$$

Для конкретного механізму (рис. 7.2, *a*) із діючою силою F_3 і моментом M_2 зведена сила дорівнює:

$$F_{3B} = F_3 \frac{V_B}{V_A} + M_2 \frac{\omega_2}{V_A}. \quad (7.7)$$

Зведений момент буде

$$M_{3B} = F_3 \frac{V_B}{\omega_1} + M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (7.8)$$

Лінійні швидкості точок і кутові швидкості ланок можна визначити, побудувавши повернутий план швидкостей (рис. 7.2, *b*).

7.3. Теорема М.Є. Жуковського

Знайти зведену силу, або зведений момент можна також, користуючись методом М.Є. Жуковського.

Теорема М.Є. Жуковського читається так. Якщо механізм під дією системи прикладених до нього сил перебуває в рівновазі, то і повернутий на 90° план швидкостей механізму, навантажений тими ж силами, прикладеними в однойменних точках плану, також перебуватиме в рівновазі.

План швидкостей розглядається як жорсткий важіль з опорою в полюсі плану. Теорему Жуковського можна також застосувати до системи, яка не перебуває в рівновазі. Для цього потрібно крім діючих сил прикласти до системи ще й сили інерції, а моменти пар сил інерції замінити парами сил інерції. Система цих прикладених сил умовно перебуватиме в рівновазі і до них можна застосувати теорему Жуковського. Для доведення теореми скористаємось принципом можливих переміщень (принцип Даламбера). Сума можливих робіт заданих сил F_j на елементарних переміщеннях δS_j точок їх прикладання дорівнює нулю. Математичний вираз принципу можливих переміщень має вигляд:

$$\sum_{j=1}^n F_j \delta S_j \cos(\vec{F}_j \wedge \delta \vec{S}_j) = 0. \quad (7.9)$$

Поділимо (7.9) на dt , дістанемо:

$$\sum_{j=1}^n F_j V_j \cos(\vec{F}_j \wedge \vec{V}_j) = 0, \quad (7.10)$$

де F_j – задані сили; \vec{V}_j – швидкості точок прикладання сил F_j ; $V_j \cos(\vec{F}_j \wedge \vec{V}_j)$ – проекції швидкостей тих самих точок на лінії дії сил F_j ; P_j – потужності, що розвивають сили F_j .

Нехай в точці j ланки AB прикладена сила F_j (рис. 7.3, а). Перенесемо цю силу паралельно їй самій в однойменну точку j повернутого на 90° плану швидкостей ланки (рис. 7.3, б).

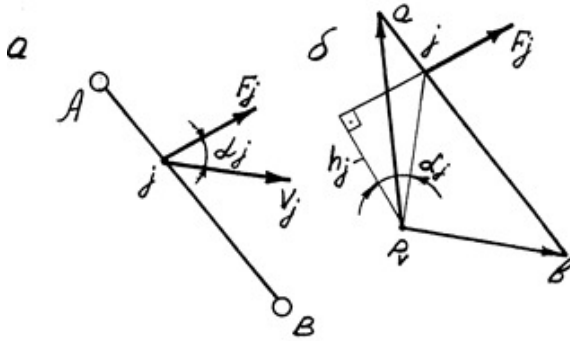


Рис. 7.3. До теореми М.С. Жуковського:
a – ланка механізму; *б* – повернутий план швидкостей

Із повернутого плану швидкостей потужність P_j сили можна визначити так:

$$P_j = F_j V_j \cos \alpha_j = F_j p_{vj} \mu_V \cos \alpha_j = F_j h_j \mu_V. \quad (7.11)$$

де h_j – перпендикуляр, опущений із полюса p_v плану швидкостей на лінію дії сили F_j ; α_j – кут між вектором швидкості p_{vj} і плечем h_j .

Застосуємо рівняння (7.11) для всіх сил

$$\sum_{j=1}^n P_j = \mu_V \sum_{j=1}^n F_j h_j, \quad (7.12)$$

що і є доведенням теореми.

Застосуємо метод Жуковського для визначення зведеної $F_{зв}$, або зрівноважувальної $F_{зр}$ сили.

Нехай на ланки 2 і 3 механізму (рис. 7.4, *a*) діють сили F_2 і F_3 , прикладені в точках S_2 і S_3 . Сили F_2 і F_3 є рівнодійними всіх сил, що діють на механізм, включаючи і сили інерції.

Для зведення механізму до рівноважного стану необхідно прикласти зрівноважувальну силу $F_{зр}$ в точці A кривошипа, спрямовуючи її перпендикулярно до O_1A . Побудуємо в довільному масштабі повернутий план

швидкостей механізму (рис. 7.4, б) і перенесемо вектори сил F_2 і F_3 , а також зрівноважувальну силу $F_{зр}$ паралельно самим собі в однойменні точки s_2, s_3 і a плану швидкостей.

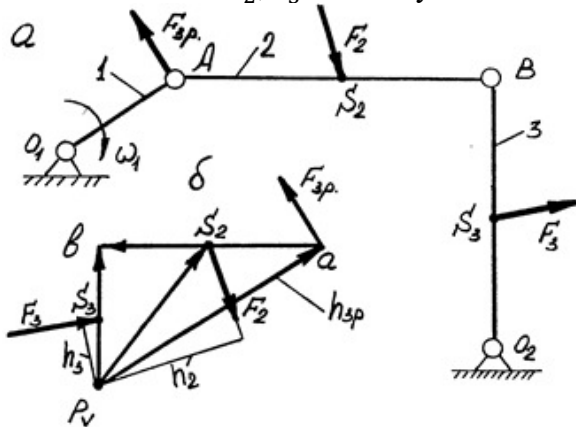


Рис. 7.4. Кривошипно-коромисловий механізм:
 а – кінематична схема; б – повернутий план швидкостей

Візьмемо суму моментів цих сил відносно полюса PV плану швидкостей, отримаємо:

$$F_2 h_2 + F_3 h_3 - F_{зр} h_{зр} = 0. \quad (7.13)$$

З рівняння (7.13) визначимо величину зрівноважувальної сили:

$$F_{зр} = \frac{F_2 h_2 + F_3 h_3}{h_{зр}}. \quad (7.14)$$

Якщо права частина рівняння після числового підрахунку буде додатною, то значить напрям сили $F_{зр}$ вибраний вірно. При від'ємному значенні правої частини напрям сили $F_{зр}$ треба змінити на протилежний. Визначивши зрівноважувальну силу $F_{зр}$ і змінивши напрям її на протилежний, дістанемо зведену силу $F_{зв}$. Зведена сила є умовною силою.

7.4. Зведена маса і зведений динамічний момент інерції механізму

Зведеною масою (динамічним моментом інерції) механізму, називається така умовна маса (динамічний момент інерції), яка будучи зосередженою в точці зведення має кінетичну енергію, що дорівнює сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму.

Отже, кінетична енергія зведеної маси $m_{зв}$, зосередженої в точці А ланки зведення (рис. 7.1)

$$T_1 = \frac{m_{зв} V_A^2}{2},$$

або кінетична енергія зведеного динамічного моменту інерції $I_{зв}$.

$$T_1 = \frac{I_{зв} \omega_1^2}{2}, \quad (7.15)$$

має дорівнювати сумі T_j кінетичних енергій усіх ланок механізму, тобто: $T_1 = \sum T_j$, або:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (m_j V_{Sj}^2 + I_{Sj} \omega_j^2). \quad (7.16)$$

Звідки дістаємо:

$$m_{зв} = \frac{2T_1}{V_A^2} = \sum_{j=1}^n \left(m_j \left(\frac{V_{Sj}}{V_A} \right)^2 + I_{Sj} \left(\frac{\omega_j}{V_A} \right)^2 \right); \quad (7.17)$$

$$I_{зв} = \frac{2T_1}{\omega_1^2} = \sum_{j=1}^n \left(m_j \left(\frac{V_{Sj}}{\omega_1} \right)^2 + I_{Sj} \left(\frac{\omega_j}{\omega_1} \right)^2 \right). \quad (7.18)$$

У формулах (7.17) і (7.18) m_j і I_{Sj} – це відповідно маса j -ї ланки та її динамічний момент інерції відносно осі, що проходить через центр маси перпендикулярно площині руху, V_{Sj} – швидкість центра маси ланки; ω_j – кутова швидкість ланки; V_A – швидкість точки зведення А; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення.

Зведена маса і зведений момент інерції залежить тільки від співвідношення швидкостей, які в свою чергу залежать від положення ланок механізму, тобто від положення ланки зведення механізму, і будуть завжди величинами додатними.

Знайдемо зведений динамічний момент інерції кривошипно-повзунного механізму (рис. 7.2, а).

$$\frac{I_{зв1}\omega_1^2}{2} = \frac{I_{S1}\omega_1^2}{2} + \frac{m_1 V_{S1}^2}{2} + \frac{I_{S2}\omega_2^2}{2} + \frac{m_2 V_{S2}^2}{2} + \frac{m_3 V_B^2}{2}. \quad (7.19)$$

Звідки маємо:

$$I_{зв1} = I_{S1} + m_1 \left(\frac{V_{S1}}{\omega_1} \right)^2 + I_{S2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{\omega_1} \right)^2. \quad (7.20)$$

Значення лінійних і кутових швидкостей виразимо через відповідні від-різки планів швидкостей. Відомо, що:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{l_{OA}} = \frac{p_v a \mu_V}{l_{OA}}; \quad \omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}} = \frac{ab \mu_V}{l_{OA}};$$

$$V_{S1} = p_v s_1 \mu_V; \quad V_{S2} = p_v s_2 \mu_V; \quad V_B = p_v b \mu_V.$$

Тоді рівняння (7.20) прийме вигляд:

$$I_{зв1} = I_{S1} + m_1 l_{OA}^2 \left(\frac{p_v s_1}{p_v a} \right)^2 + I_{S2} \left(\frac{ab}{p_v a} \right)^2 \left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \right)^2 + m_2 l_{OA}^2 \left(\frac{p_v s_2}{p_v a} \right)^2 + m_3 l_{OA}^2 \left(\frac{p_v b}{p_v a} \right)^2. \quad (7.21)$$

7.5. Рівняння руху машини.

Виконавши зведення сил і мас, будь-який механізм з однією ступінню вільності (важільний, зубчастий, кулачковий і ін.) (рис. 7.5, а), яким би складним він не був і скільки б сил на нього не діяло, можна замінити *динамічною моделлю* (рис. 7.5, б).

де A_{MP} і A_{MOP} – робота зведених до ланки зведення моментів рушійних і опору; $I_{зв}$, $I_{зв0}$ і ω_1 , ω_{10} – зведені динамічні моменти інерції ланок і кутова швидкість ланки зведення відповідно в довільному і початковому положенні.

Порівняно простим методом складання рівнянь руху механізмів являється метод Лагранжових рівнянь. При складанні рівнянь Лагранжа другого роду вважаємо, що рух механізму досліджується в системі узагальнених координат, в якості яких прийняті незалежні параметри, які визначають положення механізму, наприклад, переміщення деяких точок ланок, або кути повороту ланок відносно нерухомих осей. Число рівнянь Лагранжа повинно дорівнювати числу ступенів вільності механізму.

Із курсу теоретичної механіки відомо, що рівняння Лагранжа другого роду має наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} + \frac{\delta \Pi}{\delta q_j} = F_j, \quad (7.25)$$

де T – кінетична енергія механізму; q_j – узагальнена координата; \dot{q}_j – узагальнена швидкість; Π – потенціальна енергія системи; F_j – узагальнена сила, яка відповідає узагальненій координаті q_j .

Замінімо механізм (рис. 7.5, а) еквівалентною схемою (рис. 7.5, б), тоді будемо мати:

$$q_j = S_A; \dot{q}_j = V_A; F_j = F_{зв}; T = \frac{m_{зв} V_A^2}{2},$$

або

$$q_j = \varphi_1; \dot{q}_j = \omega_1; F_j = M_{зв}; T = \frac{I_{зв} \omega_1^2}{2}.$$

Якщо не враховувати сили тяжіння ланок і сили пружності, то $\delta \Pi / \delta q_j = 0$.

В цьому випадку рівняння Лагранжа приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_j} = F_j. \quad (7.26)$$

Якщо механізм замінений еквівалентною схемою (рис. 7.5, б), то маємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\delta V_A} \left(\frac{m_{зв} V_A^2}{2} \right) \right) - \frac{\delta}{\delta S_A} \left(\frac{m_{зв} V_A^2}{2} \right) = F_{зв}. \quad (7.27)$$

Зведена маса від швидкості точки зведення не залежить, а тому:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta V_A} \left(\frac{m_{зв} V_A^2}{2} \right) &= m_{зв} V_A \text{ і } \frac{d}{dt} (m_{зв} V_A) \\ &= m_{зв} \frac{dV_A}{dt} + \frac{dm_{зв}}{dt} V_A. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Виконаємо перетворення:

$$\frac{dm_{зв}}{dt} = \frac{dm_{зв}}{dS_A} \frac{dS_A}{dt} = \frac{dm_{зв}}{dS_A} V_A. \quad (7.29)$$

Крім того, V_A залежить тільки від часу, значить:

$$\frac{\delta}{\delta S_A} \left(\frac{m_{зв} V_A^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{dm_{зв}}{dS_A} V_A^2. \quad (7.30)$$

Замінімо в рівнянні (7.27) похідні їх значеннями із (7.28)–(7.30), тоді остаточно отримаємо:

$$m_{зв} \frac{dV_A}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm_{зв}}{dS_A} V_A^2 = F_{зв}. \quad (7.31)$$

У випадку заміни механізму еквівалентною схемою, яка має зведений момент інерції $I_{зв}$ і відповідну кінетичну енергію T , як в (7.15), аналогічно (7.31) будемо мати:

$$I_{зв} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dI_{зв}}{d\varphi_1} \omega_1^2 = M_{зв}. \quad (7.32)$$

Диференційні рівняння (7.31) і (7.32) називаються **рівняннями руху машини**. Кожна складова лівої частини рівняння (7.31) має розмірність сили, а складові лівої частини рівняння (7.32) – розмірність моменту.

7.6. Нерівномірність руху механізмів

Рівномірність руху частин механізму є істотно важливою умовою найвигіднішого його використання. Розрізняють два типи коливання швидкостей механізму: періодичне і неперіодичне, що зумовлено головним чином зміною навантаження механізму.

У ротаційних двигунах (електродвигуни) робочий процес відбувається не циклічно, а безперервно і при усталеному русі характеризується сталістю рушійного моменту; отже, у цих двигунах періодичних коливань швидкості не буде і головна ланка при усталеному русі обертатиметься рівномірно.

У поршневих двигунах, в основі яких лежить кривошипно-повзунний механізм, орган, що сприймає роботу рушійних сил (поршень), робить зворотно-поступальні рухи. Це ускладнює регулювання кутової швидкості обертання головного вала двигуна. В таких двигунах рушійна сила і сила корисного опору являються змінними величинами, незалежними одна від одної. Усталений рух механізму супроводжується періодичними змінами швидкості обертання головного вала. Така нерівномірність називається періодичною. Великі періодичні коливання швидкості недопустимі, бо вони спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні зусилля, які знижують надійність роботи механізму та його загальний коефіцієнт корисної дії. Задача про сталість швидкості обертання полягає в тому, щоб неминучі періодичні коливання швидкості усталеного руху довести до деяких, наперед заданих значень. Отже, питання зводиться до задачі регулювання коливань швидкості обертання головного вала при усталеному русі. Це регулювання здійснюється за допомогою додаткової маси –

маховика (колеса з великим динамічним моментом інерції), який встановлюють на одному з валів механізму.

Дія маховика полягає в тому, що при перевищенні роботи рушійних сил над роботою сил опору, маховик сприймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму, завдяки своєму великому моменту інерції не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота сил опору перевищує роботу рушійних сил, маховик віддає нагромаджену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

Крім періодичних коливань, у механізмі можливі коливання швидкості, що не мають певного циклу, так звані неперіодичні коливання. Ці коливання можуть виникати при раптовій зміні навантаження, включення в механізм додаткових мас тощо. Неперіодичні коливання регулюють за допомогою спеціальних механізмів, які називаються регуляторами.

7.7. Середня швидкість руху. Коефіцієнт нерівномірності руху

При проектуванні та розрахунку механізмів середнє значення кутової швидкості вхідної ланки (головного валу) за один цикл усталеного руху завжди задається на основі загальних міркувань про роботу механізму в зв'язку з його робочим процесом.

Розглянемо усталений рух, при якому через деякі проміжки часу параметр руху буде повторюватися (рис. 7.6).

Цей проміжок часу назвемо циклом періодичного руху. При визначенні середньої кутової швидкості ω_{CP} користуються наближеною формулою:

$$\omega_{CP} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \quad (7.33)$$

де ω_{max} і ω_{min} – відповідно максимальна і мінімальна кутові швидкості вхідної ланки.

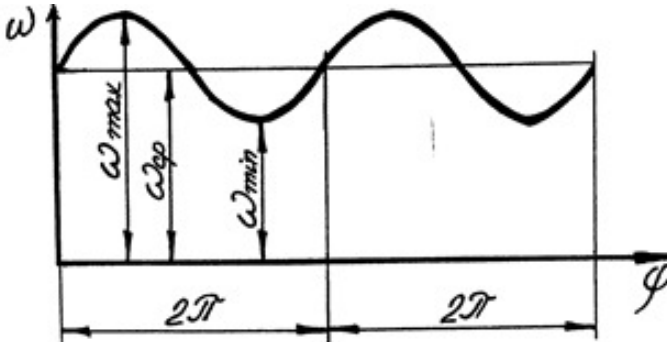


Рис. 7.6. Зміна кутової швидкості вхідної ланки

Середня швидкість $\omega_{\text{ср}}$ береться рівною номінальній кутовій швидкості, тобто кутовій швидкості, яка проставляється у паспорті двигуна механізму, або машини. При регулюванні руху механізмів треба наперед знати, в яких межах допускається робочим процесом механізму зміна кутової швидкості $\omega_{\text{ср}}$ вхідної (головної) ланки. Ці межі встановлюються з досвіду. Нерівномірність руху механізму характеризується відношенням абсолютної нерівномірності руху механізму до його середньої швидкості

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}}. \quad (7.34)$$

Величина δ називається коефіцієнтом нерівномірності руху механізму. Найсуворіші вимоги щодо рівномірності руху повинні задовольняти двигуни, які надають рух електричним генераторам змінного струму. Для них $\delta = 1/200 \dots 1/300$ для металообробних верстатів $\delta = 1/30 \dots 1/40$ для двигунів внутрішнього згоряння $\delta = 1/80 \dots 1/150$.

Розв'язуючи сумісно рівняння (7.33) і (7.34) дістанемо:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{ср}}(1 + 0,5\delta); \quad (7.35)$$

$$\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{ср}}(1 - 0,5\delta). \quad (7.36)$$

7.8. Визначення динамічного моменту інерції маховика

7.8.1. Графіки моментів, робіт та приросту кінетичної енергії механізму

Розглянемо питання про залежність між кінетичною енергією, зведе ним динамічним моментом інерції і коефіцієнтом нерівномірності руху вхідної ланки (головного валу) машини. Застосуємо **метод енергомас (метод Віттенбауера)** для визначення потрібного динамічного моменту інерції маховика.

Побудуємо графік зведених моментів сил опору за цикл усталеного руху $M_{зв} = M_{зв}(\varphi)$ (рис. 7.7, а)

$$M_{зв} = -M_{зр}; M_{зр} = F_{зр} l_{OA}, \quad (7.37)$$

де $M_{зв}$ і $M_{зр}$ – зведений і зрівноважувальних моменти сил опору; $F_{зр}$ – зрівноважувальна сила, визначена відомими методами, наприклад, важілем Жуковського; l_{OA} – довжина вхідної ланки (ланки зведення). Визначимо масштаби графіка моментів:

$$\mu_M = \frac{M_i}{y_i}; \mu_\varphi = \frac{2\pi}{L}, \quad (7.38)$$

де M_i – значення моменту в i -му положенні механізму; y_i – відрізок в мм на рис. 7.7, а, що зображає момент M_i в даному положенні; L – відрізок в мм, що зображає кут 2π повороту вхідної ланки.

Побудуємо графік робіт сил опору $A_{оп} = A_{оп}(\varphi)$ (рис. 7.7, б) для цього графічно інтегруємо графік зведених моментів сил опору $M_{зв} = M_{зв}(\varphi)$.

Масштаб графіка робіт буде:

$$\mu_A = \mu_M \mu_\varphi H, \quad (7.39)$$

де H – довільно вибрана полюсна відстань.

Побудуємо графік робіт рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$ (рис. 7.7, б). Знаючи, що при усталеному русі робота сил

опору дорівнює роботі рушійних сил, з'єднаємо початок і кінець графіка роботи сил опору прямою лінією:

$$A_{\text{оп}} = A_p. \quad (7.40)$$

Це і буде графік робіт рушійних сил.

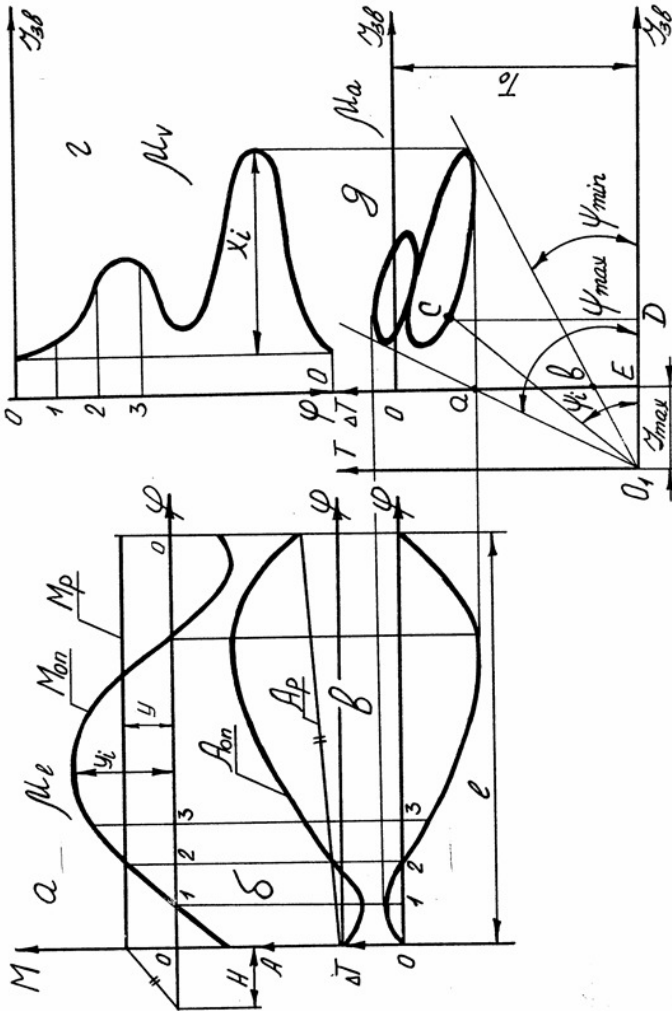


Рис. 7.7. Графіки для визначення динамічного моменту інерції маховика

Побудуємо графік моментів рушійних сил $M_p = M_p(\varphi)$ (рис. 7.7, а), для цього графічно диференціюємо графік робіт рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$.

Побудуємо графік приросту кінетичної енергії механізму $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (рис. 7.7, в), використавши, при цьому, відношення:

$$\Delta T = A_p - A_{оп}. \quad (7.41)$$

Масштаб графіка приросту кінетичної енергії буде:

$$\mu_{\Delta T} = t\mu_A, \quad (7.42)$$

де t – коефіцієнт проропорційності.

7.8.2. Графік зведеного динамічного моменту інерції механізму

Побудуємо графік зведеного динамічного моменту інерції механізму за цикл $I_{зв} = I_{зв}(\varphi)$ (рис. 7.7, з).

Числові значення зведеного динамічного моменту інерції для кожного механізму визначаються із формули, яка виводиться із умови рівності кінетичних енергій (див. розд. 7.4).

Визначимо масштаб графіка зведеного динамічного моменту інерції:

$$\mu_{I_{зв}} = \frac{I_{звi}}{X_i}, \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{мм}} \right), \quad (7.43)$$

де $I_{звi}$ – зведений динамічний момент інерції механізму в i -му положенні; X_i – відрізок в мм на рис. 7.7, з, що зображає цей момент $I_{звi}$.

7.8.3. Діаграма енергомас

Побудуємо діаграму енергомас $\Delta T = \Delta T(I_{зв})$ (рис. 7.7, д). Цю діаграму будуємо графічним складанням графіків приросту кінетичної енергії механізму $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (рис. 7.7, в) і зведеного динамічного моменту інерції

механізму $I_{зв} = I_{зв}(\varphi)$ рис. 7.7, з) методом виключення параметру φ .

Проведемо дотичні до діаграми енергомас $\Delta T = \Delta T(I_{зв})$ під кутами ψ_{max} і ψ_{min} (рис. 7.7, д). Отримаємо на перетині цих дотичних з віссю відрізок, який позначимо ΔT .

Визначимо кути ψ_{max} і ψ_{min} . Точка O_1 – перетину дотичних буде початком нових осей координат діаграми повної кінетичної енергії всього механізму у функції повного зведеного динамічного моменту інерції механізму з маховиком.

Для будь-якої точки C діаграми енергомас можна записати:

$$O_1D = ED + O_1E, \quad (7.44)$$

де O_1D – відрізок, що зображає повний зведений динамічний момент інерції механізму з маховиком; ED – відрізок, що зображає зведений динамічний момент інерції механізму; O_1E – відрізок, що зображає момент інерції маховика.

Із трикутника O_1CD маємо

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{CD}{O_1D}. \quad (7.45)$$

Визначимо кутову швидкість вхідної ланки в будь-якому i -му положенні механізму. Із рівняння кінетичної енергії маємо

$$\omega_1^2 = \frac{2T_i}{I_{звi}}, \quad (7.46)$$

де $T_i = CD\mu_{\Delta T}$, $I_{звi} = O_1D\mu_{I_{зв}}$. Підставимо значення T_i і $I_{звi}$ в рівняння (7.46), отримаємо:

$$\omega_1^2 = \frac{2CD\mu_{\Delta T}}{O_1D\mu_{I_{зв}}}. \quad (7.47)$$

Враховуючи відношення (7.45), знайдемо:

$$\omega_1^2 = \frac{2 \operatorname{tg} \psi_i \mu_{\Delta T}}{\mu_{I_{зв}}}, \text{ або } \operatorname{tg} \psi_i = \frac{\omega_1^2 \mu_{I_{зв}}}{2\mu_{\Delta T}}. \quad (7.48)$$

Підставимо в рівняння (7.48) значення ω_{max} і ω_{min} із (7.35) і (7.36). Знайдемо ψ_{max} і ψ_{min} . Зважаючи на малу величину коефіцієнта δ , членом нехтуємо. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{max} &= \frac{\mu_{I_{зв}}}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{CP}^2 (1 + \delta); \\ \operatorname{tg} \psi_{min} &= \frac{\mu_{I_{зв}}}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{CP}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \quad (7.49)$$

7.8.4. Динамічний момент інерції та геометричні розміри маховика

Визначимо динамічний момент інерції маховика I_{max} , із рис. 7.7, δ :

$$I_{max} = O_1 E \mu_{I_{зв}}. \quad (7.50)$$

Таким чином, вимірюючи в міліметрах безпосередньо із рис. 7.7, δ відрізок $O_1 E$ за формулою (7.50) визначимо динамічний момент інерції маховика. Проте при малому значенні коефіцієнта нерівномірності δ точка перетину O_1 дотичних може вийти за межі рисунка. Значно простіше користуватися відрізком ab . Із рисунка видно, що: $aE = O_1 E \operatorname{tg} \psi_{max}$ і $bE = O_1 E \operatorname{tg} \psi_{min}$.

Віднімемо від першого рівняння друге, отримаємо:

$$aE - bE = O_1 E (\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}). \quad (7.51)$$

Із відношення (7.51) знаходимо:

$$O_1 E = \frac{ab}{\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}}. \quad (7.52)$$

Підставимо значення ψ_{max} і ψ_{min} із (7.49) і $O_1 E$ із (7.50) в формулу (7.52), отримаємо:

$$\frac{I_{max}}{\mu_{I_{зв}}} = \frac{ab}{\frac{\mu_{I_{зв}}}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{CP}^2 2\delta}. \quad (7.53)$$

Звідки знаходимо:

$$I_{max} = \frac{ab \mu_{\Delta T}}{\omega_{CP}^2 \delta}. \quad (7.54)$$

Визначимо геометричні розміри маховика.

Вважаємо, що маса маховика рівномірно розподілена по колу діаметра D , а також нехтуємо моментами інерції маточини і спиць, оскільки вони відносно невеликі (рис. 7.8). Момент інерції I_{max} можна подати так:

$$I_{max} = \frac{mD^2}{4}. \quad (7.55)$$

Якщо врахувати моменти інерції маточини і спиць, то:

$$I_{max}^n = 1,1I_{max}. \quad (7.56)$$

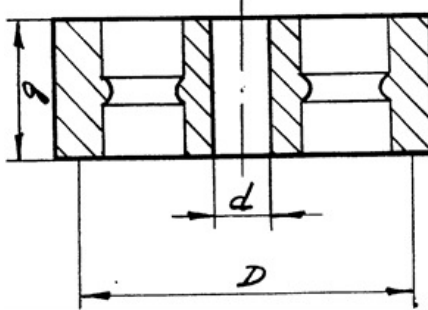


Рис. 7.8. Ескіз маховика

Вираз mD^2 називається маховим моментом, або характеристикою маховика. Задаючись діаметром D маховика, величина якого визначається з конструктивних міркувань, можна легко визначити масу маховика. Щоб запобігти небезпеці можливого розриву маховика, його діаметр вибирають таким, щоб колова швидкість на ободі не перевищувала допустимої, для матеріалу маховика величини. Наприклад, для чавунного маховика допустима швидкість $V = 30$ м/с.

Якщо маховик встановити не на вхідній ланці механізму, а на якій-небудь i -й його ланці, то з умови рівності кінетичних енергій маємо

$$\frac{I_{max}\omega_1^2}{2} = \frac{I_{maxi}\omega_i^2}{2}.$$

Звідки:

$$I_{maxi} = I_{max} \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2, \quad (7.57)$$

де I_{maxi} – динамічний момент інерції маховика, встановленого на i -й ланці; ω_i кутова швидкість цієї ланки.

Якщо між вхідною ланкою і двигуном встановлено редуктор з передаточним числом u_p , то момент інерції маховика на валу двигуна буде:

$$I_{max\text{ дв}} = \frac{I_{max}}{u_p^2}. \quad (7.58)$$

Необхідна, потужність двигуна на вхідній ланці:

$$P_{дв} = M_p \omega_{CP}, \quad (7.59)$$

де $M_p = u\mu_M$.

Механізм з маховиком при усталеному русі працює таким чином. В тих положеннях механізму (в більшості при холостому ході), коли момент рушійних сил більший за момент сил опору ($M_p > M_{оп}$) збільшується кутова швидкість вхідної ланки і тоді, маховик, завдяки своєму значному динамічному моменту інерції, сприймає надлишок кінетичної енергії механізму і не дозволяє кутовій швидкості надмірно зростати. В положеннях механізму (в більшості при робочому ході), коли $M_{оп} > M_p$, маховик віддає накопичену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню кутової швидкості вхідної ланки. Отже, призначення маховика – це регулювання в заданих межах періодичних коливань кутової швидкості вхідної ланки механізму при усталеному русі. Крім того, маховик дозволяє зменшити потрібний рушійний момент, а значить зменшити і необхідну потужність двигуна.

Запитання для перевірки знань по темі 7:

1. Сила (момент), що замінює дію всіх сил і моментів в механізмі із умови рівності миттєвих потужностей, називається...?

2. Теорема Жуковського.

3. Як називається умовна маса (динамічний момент інерції), яка зосереджена в певній точці і має кінетичну енергію, що дорівнює сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму?

4. Основою для складання рівняння руху механізму чи машини з одним ступенем рухомості є теорема?

5. Яким методом складаються рівняння руху механізму?

6. Для чого призначений маховик?

7. Коефіцієнт нерівномірності руху механізму.

8. Яким методом визначають величину динамічного моменту інерції маховика?

ТЕМА 8. Зрівноваження і віброзахист машин

- 8.1. Загальні положення
- 8.2. Зрівноважування обертових тіл
- 8.3. Зрівноважування механізмів
- 8.4. Статичне і динамічне балансування обертових тіл
- 8.5. Віброзахист машин

8.1. Загальні положення

В кінці XIX століття широкого застосування набули швидкохідні машини, в зв'язку з чим і постала задача зрівноважування і віброзахисту механізмів.

Під час руху ланок механізму у кінематичних парах виникають, крім статичних зусиль, додаткові зусилля – так звані динамічні тиски, які передаються на станину і фундамент механізму. Ці змінні за величиною і напрямом тиски спричиняють коливання і вібрації опор та фундаменту механізмів і особливо небезпечні бувають у тих випадках, коли частота вібрацій збігається з частотою власних коливань станини, тобто при наявності резонансу. Крім того, динамічні зусилля, які виникають під час руху механізму, збільшують сили тертя в опорах валів і спрацювання підшипників.

У сучасній техніці зрівноважування механізмів має важливе значення, оскільки багато механізмів і машин працюють на великих швидкостях. А тому в процесі проектування механізму ставиться задача зрівноважування механізмів, тобто повного або часткового погашення динамічних зусиль.

Досліджуючи питання про зрівноважування механізму на його фундаменті, вивчатимемо *дві задачі*:

- зрівноважування окремих обертових ланок;
- зрівноважування механізму в цілому.

Динамічні зусилля на фундамент від машини виникають тоді, коли система сил інерції не дорівнює нулю, А тому задача про зрівноважування мас полягає в такому розподілі їх в машині, при якому сили інерції і моменти пар сил інерції були б рівні нулю, або достатньо малі. Позначимо головний вектор сил інерції \vec{F}_I і головний момент пар сил інерції \vec{M}_I .

Тоді вимога, щоб динамічні зусилля на фундамент були відсутніми, зводиться до системи рівнянь: $\vec{F}_I = 0$ і $\vec{M}_I = 0$, або в проекціях на осі координат:

$$P_{дв} = M_p \omega_{ср}. \quad (8.1)$$

8.2. Зрівноважування обертових тіл

Незрівноваженість тіл обертання, яка викликана недосконалістю технологічного процесу їх виготовлення, усувається шляхом прибавлення або видалення невеликої маси матеріалу. Виправлення такої незрівноваженості називається **балансуванням**.

Незрівноваженість, яка виникає внаслідок конфігурації деталі (колінвал, кулачок) усувається шляхом встановлення **противаг**.

Нехай потрібно зрівноважити три маси, що обертаються на валу і центри мас яких розміщені в одній площині (рис. 8.1, а). В цьому випадку достатньо підібрати четверту масу так, щоб центр її мас також знаходився в цій же площині, а радіус-вектор загального центру мас дорівнює нулю $r_S = 0$.

Відстані центрів мас m_1, m_2, m_3 і m_0 до осі обертання позначимо r_1, r_2, r_3 і r_0 .

Відцентрові сили інерції кожної маси дорівнюють:

$$\begin{aligned} F_{i1} &= \omega^2 m_1 r_1; & F_{i2} &= \omega^2 m_2 r_2; \\ F_{i3} &= \omega^2 m_3 r_3; & F_{i0} &= \omega^2 m_0 r_0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

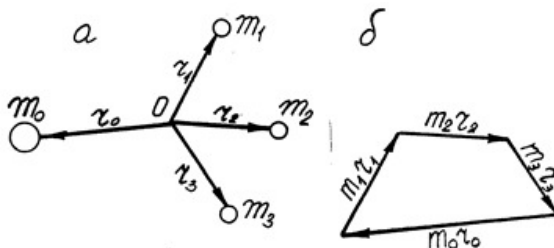


Рис. 8.1. Зрівноваження противагою

Для зрівноваження необхідно, щоб головний вектор сил інерції дорівнював нулю $\vec{F}_i = 0$, тобто

$$\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} + \vec{F}_{i0} = 0, \quad (8.3)$$

або враховуючи (8.2)

$$\overline{m_1 r_1} + \overline{m_2 r_2} + \overline{m_3 r_3} + \overline{m_0 r_0} = 0, \quad (8.4)$$

Це і є **умова статичного зрівноважування обертових тіл.**

Задача вирішується графічним складанням векторів $\overline{m_i r_i}$ (рис. 8.1, б).

При цьому вектор $\overline{m_0 r_0}$ показує напрям радіуса-вектора, на якому потрібно встановити противагу. Задаючись величиною радіуса r_0 , знайдемо масу противаги m_0 .

Якщо площину кріплення противаги конструктивно не можливо вибрати в тій же площині обертання що і незрівноважені маси, то встановлюють дві противаги в двох перпендикулярних, до осі обертання, площинах (рис. 8.2).

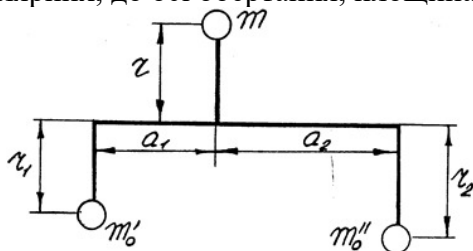


Рис. 8.2. Зрівноважування двома противагами

При цьому необхідно виключити можливість виникнення додаткових зусиль на підшипники не тільки від результуючої сили інерції, а і від моментів пар сил інерції.

Складемо рівняння моментів

$$\begin{cases} m'_0 r_1 + m''_0 r_2 = m r; \\ m'_0 r_1 a_1 = m''_0 r_2 a_2. \end{cases} \quad (8.5)$$

Встановленням двох противаг масами m'_0 і m''_0 досягається повне зрівноважування маси m , при цьому необхідно, щоб центри мас m , m'_0 і m''_0 знаходилися в одній площині, яка проходить через вісь обертання.

Розглянемо задачу про зрівноважування вала, на якому жорстко закріплені маси m_1 , m_2 і m_3 розміщені в трьох площинах, які перпендикулярні до осі обертання (рис. 8.3, а).

Умова відсутності тиску на підшипники від головного вектора сил інерції \vec{F}_i і головного моменту пар сил інерції \vec{M}_i відносно центра зведення O_1 виражається рівняннями:

$$\begin{cases} \omega^2 \sum_1^n \vec{m}_i \vec{r}_i = 0; \\ \omega^2 \sum_1^n \vec{m}_i \vec{r}_i \vec{a}_i = 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

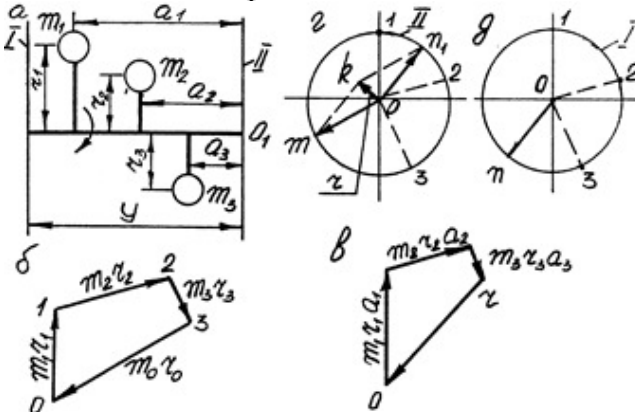


Рис. 8.3. Зрівноваження мас в різних площинах

Будуємо многокутники векторів сил (рис. 8.3, б) і векторів моментів (рис. 8.3, в). Зрівноважувальним у першому випадку є вектор $\vec{30}$, зображений на площині 2 вектором \vec{om} (рис. 8.3, з), а в другому – вектор $r\vec{0}$, який зображає повернутий момент пари векторів \vec{on} , що лежить у площині 1 (рис. 8.3, д) і \vec{on}_1 , що лежить у площині 2. Величина кожного з них дорівнює r_0/y .

Таким чином, задані маси m_1 , m_2 і m_3 будуть цілком зрівноважені двома масами, розміщеними вздовж \vec{on} у площині 1 і вздовж рівнодійної \vec{ok} у площині 2.

З викладеного випливає: будь-яка кількість мас, що лежить у різних площинах обертання, зрівноважується двома противагами, які встановлюються в двох довільних площинах, перпендикулярних до осі обертання при додержанні двох умов рівноваги векторів: $\vec{F}_l = 0$ і $\vec{M}_l = 0$, тобто

$$\sum_1^n m_i \vec{r}_i = 0 \text{ і } \sum_1^n m_i \vec{r}_i \vec{a}_i = 0. \quad (8.7)$$

8.3. Зрівноважування механізмів

Для зовнішнього зрівноважування плоского механізму необхідно і достатньо так підібрати маси цього механізму, щоб:

- спільний центр мас усіх його рухомих ланок залишався нерухомим

$$x_s = const; y_s = const. \quad (8.8)$$

- динамічні моменти інерції мас усіх ланок механізму відносно площин XZ і YZ були сталі

$$I_{xz} = const; I_{yz} = const. \quad (8.9)$$

При додержанні цих умов будуть зрівноважені головний вектор сил інерції і головний момент пар сил інерції відносно осей x і y . Головний момент сил інерції відносно осі z , перпендикулярної до площини руху

механізму, зрівноважується моментом рушійних сил і сил опору на головному валі машини.

У практиці машинобудування при зрівноважуванні механізмів умови (8.8) і (8.9) звичайно виконуються тільки частково.

Нехай, наприклад, треба зрівноважити тільки головний вектор сил інерції кривошипно-повзунного механізму (рис. 8.4). Позначимо маси кривошипа 1, шатуна 2 і повзуна 3 через m_1 , m_2 і m_3 і вважатимемо, що вони зосереджені відповідно в центрах мас S_1 і S_2 і B ланок. На лінії AB в точці D встановлюємо протизвагу і визначаємо її масу $m_{пр2}$ з умови, щоб центр мас $m_{пр2}$, m_2 і m_3 збігався з точкою A .

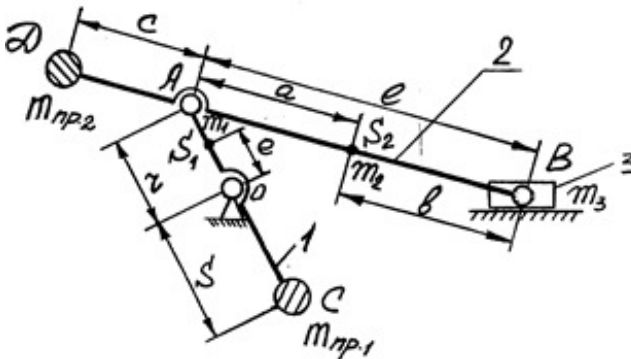


Рис. 8.4. Кривошипно-повзунний механізм

Складемо рівняння статичних моментів відносно точки A

$$m_3 l + m_2 a = m_{пр2} c. \quad (8.10)$$

звідки маємо:

$$m_{пр2} = \frac{1}{c} (m_3 l + m_2 a). \quad (8.11)$$

Масу $m_{пр1}$, протизваги, яку встановлено в точці C кривошипа, визначаємо з умови, щоб центр мас $m_{пр2}$, m_1 і m_A збігався з точкою D .

Повна маса в точці A буде:

$$m_A = m_{\text{пр}2} + m_2 + m_3. \quad (8.12)$$

Складемо рівняння статичних моментів відносно точки D

$$m_A r + m_1 e = m_{\text{пр}1} s. \quad (8.13)$$

звідки маємо:

$$m_{\text{пр}1} = \frac{1}{s} (m_A r + m_1 e). \quad (8.14)$$

Таким чином, дві противаги $m_{\text{пр}1}$ і $m_{\text{пр}2}$ цілком зрівноважують усі сили інерції даного механізму. Проте таке повне зрівноважування результуючої сили інерції кривошипно-повзунних механізмів на практиці застосовується рідко, бо при малому значенні радіуса s маса $m_{\text{пр}2}$ буде дуже великою, внаслідок чого в кінематичних парах і ланках механізму виникнуть додаткові навантаження. При великому значенні радіуса s дуже збільшуються габарити всього механізму. Через те часто обмежуються лише наближеним зрівноважуванням механізмів. На практиці часто застосовують зрівноважування тільки маси кривошипа і частини маси шатуна.

8.4. Статичне і динамічне балансування обертових тіл

Розрізняють *два роди балансування*: статичне і динамічне. Обертове тіло буде статично збалансоване, коли центр маси тіла лежатиме на осі обертання.

Щоб збалансувати тіло *статично*, його ставлять цапфами на дві паралельні лінійки (рис. 8.5).

У зв'язку з тим, що центр мас тіла лежить на осі, яка віддалена від осі обертання тіла на відстані r_s , то сила ваги тіла намагатиметься повернути його в таке положення, при якому його центр мас стане в найнижче положення. Підбираючи додатковий тягар, розміщений на плечі r від осі

обертання, завжди можна добитись стану байдужої рівноваги тіла на лінійках. Умова статично збалансованого тіла

$$\sum_1^n \overline{m_i r_i} = 0. \quad (8.15)$$

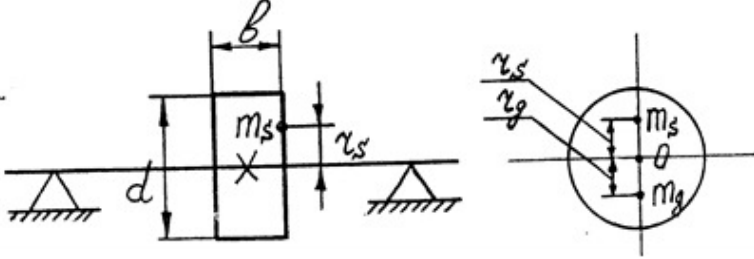


Рис. 8.5. Статичне балансування

Статичне балансування проводиться для роторів, в яких ширина b набагато менша діаметра d , $b \leq 0,2d$, а також тіл обертання з невеликою кутовою швидкістю $n < 200$ об/хв.

Для барабанів, усяких роторів, коліс автомобіля, які мають значну кутову швидкість, необхідне **динамічне балансування**, бо навіть незначний дисбаланс створює великі динамічні зусилля на підшипники. Вісь обертання динамічно збалансованого тіла стає головною центральною віссю інерції. У цьому випадку головний вектор і головний момент пар сил інерції обертового тіла дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_1^n \overline{m_i r_i} = 0 \text{ і } \sum_1^n \overline{m_i r_i a_i} = 0. \quad (8.16)$$

Установки (рис. 8.6), призначені для виявлення динамічної неврівноваженості тіла, дають можливість одночасно виявити і його статичну незрівноваженість.

Найпростішими установками для динамічного балансування є колискові, які ґрунтуються на принципі встановлення деталі, що балансується на пружну основу

(коліска на пружинах). У таких установках деталі що балануються надається число обертів, близьке до резонансних. Тоді незрівноважені сили створюють значні амплітуди коливань, які фіксуються за допомогою приладів. Результати обчислень дають можливість визначити величину дисбалансу і місця його встановлення. Відомий балансуєчий стенд Шитікова.

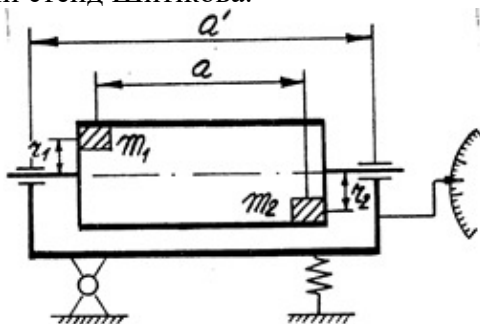


Рис. 8.6. Стенд для балансування

8.5. Віброзахист машин

Ідеально зрівноважити ланки механізму неможливо. Рух таких ланок викликає змінні за величиною і напрямом сили, котрі викликають коливання (вібрації) машини. Амплітуда A коливань тим більша, чим ближче власна частота p коливань ланки до частоти ω коливань незрівноваженої сили. При $\omega = p$ виникає **резонанс**, який супроводиться різким збільшенням амплітуди.

Вібрації можуть привести до руйнування елементів машин і фундамента, чинять шкідливий вплив на людину.

Вібрації можуть бути і корисними. Їх використовують для пересування вантажів (вібраційні транспортери), заглиблення паль, підвищення продуктивності обробки деяких матеріалів.

Для зменшення амплітуди вібрацій іноді використовують демпфери, в яких сила опору залежить від

швидкості (рис. 8.7). Чим більше демпфування, тим менша амплітуда коливань.

Розрізняють два основні *методи боротьби з вібраціями* – віброізоляція і віброгашення.

Прикладом *віброізоляції* може служити підвіска автомобіля. Він немов би ізольований ресорами і пневматичними шинами від більшості нерівностей шляху. На рис. 8.7 зображена динамічна модель віброізольованої системи. Машина масою m , установлена на фундамент (основу) за допомогою амортизатора з приведеною жорсткістю C і приведеним коефіцієнтом демпфування ν .

Рівняння руху амортизованого об'єкта

$$m\ddot{y} = F_0 \sin \omega t + F_R(y, \dot{y}), \quad (8.17)$$

де $F_R(y, \dot{y})$ – приведена реакція амортизатора.

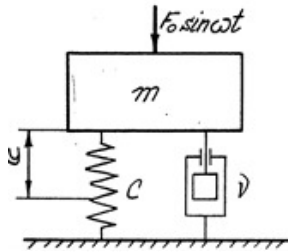


Рис. 8.7. Віброізольована система

Власна частота p коливань маси на пружині дорівнює

$$p = \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (8.18)$$

Амплітуда коливань амортизованого об'єкта, в залежності від частоти ω вимушених коливань підраховується відповідно з виразом:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 - 4n^2\omega^2}}, \quad (8.19)$$

де $n = \nu/2m$.

При $\omega = p$ виникає резонанс і віброізоляція в цьому випадку шкідлива, бо амплітуда коливань стає більшою, ніж вона була б без амортизаторів. В цих випадках застосовують нелінійні амортизатори.

Взагалі боротьба з вібраціями проводиться по трьох напрямках. На етапі проектування зниження віброактивності досягається вибором інерційних і пружних параметрів машини, зменшенням сил які діють на ланки механізмів, зрівноваженням ланок і т.п. На етапі виготовлення – дотримання технології, старанне балансування обертових ланок. На етапі експлуатації – вибір раціональних режимів руху машин.

Запитання для перевірки знань по темі 8:

1. Як називається виправлення незрівноваженості механізму шляхом прибавлення або видалення невеликої маси матеріалу?
2. Як потрібно підібрати маси для зовнішнього зрівноважування важільного механізму?
3. Коли тіло, яке обертається, буде статично збалансоване?
4. Коли тіло, яке обертається, буде динамічно збалансоване?
5. Для чого необхідний віброзахист машин?

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аналіз	22, 35, 52, 121	Колесо шевронне	81
Балансування	205, 210	Коло вершин	78
Вісь	63, 91, 153	Коло ділильне	78
Водило	91, 97, 162	Коло западин	78
Графік	28, 50, 80, 196	Коло основне	78
Група Ассура	19, 35, 175	Коло початкове	78
Динаміка	121	Копіювання	82
Динамічний момент		Корегування	85
інерції	127, 181, 200	Коромисло	9
Діаграма	32, 57, 198	Кривошип	9
Евольвента	74	Крок	76
Еволюта	76	Кулачок	23, 47
Енергія	127, 158, 179	Куліса	9
Енергоефективність	161	Кут зачеплення	81
Епіцикл	91, 97, 162	Кут нахилу зубів	81
Зачеплення внутрішнє	72	Кут передачі руху	60
Зачеплення зовнішнє	72	Кут підйому	116
Зачеплення Новікова	118	Кут тиску	60
Зрівноваження	206, 214	Ланка	9
Інерція	122, 129	Ланка вихідна	9
Кінематика	35, 92	Ланка вхідна	9
Кінематична пара	12, 169	Ланка зведення	182
Кінематичний ланцюг	15	Ланка обертова	9
Кінетостатика	168	Ланка поступальна	9
Клас	11, 20	Маса	127
Ковзаючий камінь	9	Маса зведена	182
Коефіцієнт корисної дії	121	Масштаб	28
Колесо гвинтове	117	Масштабний коефіцієнт	29
Колесо зубчасте	71, 91	Машина	5
Колесо косозубе	80	Машинний агрегат	6, 125
Колесо прямозубе	70, 80	Метод хорд	33
Колесо сонячне	91, 162	Модуль	77

Механізм:	5, 17	Редуктор	88
- диференціальний	90	Рівняння рівноваги	123
- замінюючий	24	Робота	122
- зубчастий	8, 91	Рухомість	9
- кулачковий	23, 47	Сателіт	91
- планетарний	90	Сила:	122
- плоский	17, 26	- гравітаційна	122
- просторовий	26, 88	- зведена	183
- фрикційний	7, 149	- зрівноважувальна	176
Механічна передача	70	- інерції	122
Механічний привод	95, 156	- корисного опору	122
Момент	126, 183	- тертя	122
Мультиплікатор	88	- невиробничого опору	122
Обкатування	82	Синтез	30, 52
Пара вища	9	Статика	168
Пара нища	9	Стояк	9
Пара сил	129	Ступінь вільності	11, 19, 90
Передаточне відношення	71	Схема кінематична	21
Передача зубчаста	70	Схема сил	163
Передача рейкова	71	Схема структурна	21
Передача хвильова	105	Тертя	7, 47, 79
Передача черв'ячна	70, 114	Тип	12, 20
Переміщення	12	Тіло	10
Пітч	78	Точка	10, 31
План прискорень	39	Точка зведення	182
План сил	137, 171	Траєкторія	30
План швидкостей	35	Умова зв'язку	10
Повзун	9	Умовний механізм	18
Полюс зачеплення	79	Функція переміщення	27
Полюс плана	36, 39	Шарнірна тяга	9
Порядок	20	Шатун	9
Прискорення кутове	40	Швидкість кутова	38
Прискорення лінійне	39	Швидкість лінійна	36
Реакції зв'язків	122	Штовхач	47

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Балансування – це виправлення незрівноваженості тіл обертання, яка викликана недосконалістю технологічного процесу їх виготовлення.

Вихідна (веденою) **ланка** – це ланка, від якої отримує потрібні рухи і сили робочий орган механізму.

Вхідна (ведуча) **ланка** – це ланка, закон руху і сили якої задаються.

Деталь – це виріб, виготовлений із однорідного матеріалу, без застосування складальних операцій.

Диференціальний механізм – це планетарний механізм зі ступінню вільності два і більше.

Ділильне (початкове) **коло** ділить переріз зуба по висоті на дві частини: ніжку і головку.

Евольвента кола – крива, яку описує точка на прямій лінії, що котиться по колу без проковзування.

Зведена маса (динамічний момент інерції) – це така умовна маса (динамічний момент інерції) механізму, яка будучи зосередженою в точці зведення має кінетичну енергію, що дорівнює сумі кінетичних енергій всіх ланок механізму.

Зведена сила (моментом) – це сила (момент), що замінює дію всіх сил і моментів в механізмі із умови рівності миттєвих потужностей зведеної сили (моменту) і всіх сил і моментів, що зводяться.

Зрівноважувальна сила (момент) – це сила (момент), що дорівнює за величиною зведеної силі (моменту) і протилежно їй напрямлена.

Зубчаста передача – це механізм, призначений для передавання обертового руху від одного вала до іншого за допомогою зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні з заданим відношенням кутових швидкостей.

Інволюта – це кут між початковим радіусом-вектором евольвенти і її біжучим радіусом.

Кінематична пара – це місце рухомого з'єднання двох ланок.

Кінематичний ланцюг – це сукупність ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами.

Ковзаючий камінь – це ланка, що здійснює прямолінійно-поступальний рух вздовж рухомої напрямної.

Коло вершини зубів – це коло зубчастого колеса, що обмежує зуби ззовні.

Колом западин зубів – це коло зубчастого колеса, що обмежує западини зубів.

Коромисло – це обертова ланка, що здійснює неповний оберт навколо нерухомої осі.

Кривошип – це обертова ланка, яка може здійснювати повний оберт навколо нерухомої осі.

Кулачковий механізм – це механізм, в склад якого входить кулачок.

Кулачок – це ланка, яка має змінну кривизну поверхні і надає переміщення штовхачу.

Куліса – це обертова ланка, яка є напрямною ковзаючого каменя.

Ланка – це деталь, або жорстке з'єднання декількох деталей, що несе елементи кінематичних пар.

Ланка зведення – це ланка, до якої зводяться всі сили і моменти.

Масштаб (масштабним коефіцієнтом) – це число, що показує, скільки одиниць дійсної величини припадає на 1 мм на кресленні.

Машина – це технічний об'єкт, що виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів та інформації, щоб полегшити працю людини.

Машинний агрегат – це виріб, що складається з двигуна і робочої машини, що з ним з'єднана.

Механізм – це система твердих тіл, з'єднаних між собою рухомо, яка призначена для перетворення рухів і сил одного чи кількох тіл у потрібні рухи і сили інших тіл.

Механічний ККД – це відношення величини роботи сил корисного опору до роботи сил рушійних за цикл усталеного руху машини.

Модуль – це число міліметрів діаметра ділильного (початкового) кола, що припадає на один зуб.

Мультиплікатор – це зубчастий механізм, який збільшує кутову швидкість при передачі від ведучої ланки до веденої.

Основне коло зубів – це коло зубчастого колеса, по якому необхідно котити без проковзування дотичну, щоб отримати евольвенту профіля зуба для цього колеса.

Планетарний механізм – це зубчастий механізм, у якому геометричні осі одного чи декількох коліс переміщуються у просторі.

Повзун – це ланка, яка утворює поступальну пару зі стояком.

Редуктор – це зубчастий механізм, в якому відбувається зменшення кутових швидкостей при передачі від ведучої ланки до веденої.

Рушійні сили – це сили, що створюються двигунами, які здійснюють перетворення якогось виду енергії (теплової, електричної, гідравлічної) у механічну роботу.

Сила – це дія навколишнього середовища на тіло, яка прагне змінити його стан спокою, або руху.

Сили виробничого (корисного) опору – це сили, для переборювання яких призначена машина.

Сили невиробничих опорів – це сили опору повітряного чи рідинного середовища переміщенню ланок і сили тертя в кінематичних парах машин.

Точка зведення – це точка, до якої прикладена зведена сила.

Фрикційні механізми – це механізми, в яких для передачі руху використовуються сили тертя.

Черв'як – це ведуча ланка черв'ячної передачі, яка має форму одновиткового або багатовиткового гвинта.

Черв'ячне колесо – це ведена ланка черв'ячної передачі, яка має вигляд зубчастого колеса із зубцями особливої форми, що являють собою виступи гвинтової різьби гайки, яка відповідає гвинту.

Шарнірна тяга – це ланка, що несе тільки обертальні кінематичні пари.

Шатун – це ланка, що з'єднана обертальними кінематичними парами тільки з рухомими ланками, одна яких повзун.

Шестерня – це менше (зазвичай ведуче) з двох зубчастих коліс в зубчастій передачі.

Штовхач – це ланка, яка отримує рух безпосередньо від кулачка.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Багнюк Г. А., Галанзовська М. Р., Наконечний В. В., Серілко Л. С. Практикум з теоретичної механіки. Статика, кінематика : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2014. Ч. 1. 162 с.
2. Червоний Б. І. Теорія механізмів машин : інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення. Рівне : НУВГП, 2006. 160 с.
3. Стрілець В. М. Червоний Б. І., Шинкаренко І. Т., Похильчук І. О. Практикум з курсу «Теорія механізмів і машин». Рівне : НУВГП, 2006. 107 с.
4. Стрілець О. Р. Способи і пристрої керування процесами зміни швидкості : монографія. Рівне : НУВГП, 2021. 281 с.
5. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин : підручник. К. : Наукова думка, 2002. 660 с.
6. Uicker J. J. Jr., Pennock G. R., Shigley J. E. Theory of machines and mechanisms. Fifth edition. New York : Oxford University Press, 2016. 950 p.

Навчально-методичне видання

Стрілець Олег Романович

ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН
Конспект лекцій

Навчально-методичний посібник

Друкується в авторській редакції

Технічний редактор Галина Сімчук

*Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції РВ № 31 від 20.04.2005 р.*