

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-60М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійної роботи
та підготовки до практичних занять
з навчальної дисципліни «*Вища математика*»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Теплоенергетика»
спеціальності 144 «Теплоенергетика»
денної і заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІЕАВГ
Протокол № 3 від 21.11.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» денної та заочної форм навчання. Частина 1 / Кушнір О. О., Кушнір В. П. – Рівне : НУВГП, 2023. – 60 с.

Укладачі:

Кушнір О. О. – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики;
Кушнір В. П. – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівник (гарант) освітньої програми:

Костюк О. П., к.т.н., доцент кафедри гідроенергетики, теплоенергетики та гідравлічних машин.

© О. О. Кушнір,
В. П. Кушнір, 2023
© НУВГП, 2023

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Програма навчальної дисципліни	4
2 Мета та завдання навчальної дисципліни	5
3 Програмні результати навчання	5
4 Компетентності здобувача	6
5 Теми практичних занять у першому семестрі	6
6 Теми практичних занять у другому семестрі	14
7 Завдання для самостійної роботи	22
Самостійна робота № 1. Матриці та визначники 2-го і 3-го порядків. Відшукування обернених матриць.	22
Самостійна робота № 2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера. Лінійні операції над векторами. Розклад векторів за базисом.	24
Самостійна робота № 3. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів і їх застосування.	28
Самостійна робота № 4. Пряма на площині.	32
Самостійна робота № 5. Лінії 2-го порядку.	33
Самостійна робота № 6. Площина і пряма в просторі.	36
Самостійна робота № 7. Перехід до полярних координат. Комплексні числа.	39
Самостійна робота № 8. Обчислення границь. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій.	42
Самостійна робота № 9. Відшукування асимптот графіків функцій. Диференціювання елементарних функцій.	46
Самостійна робота № 10. Диференціювання параметрично заданих функцій. Відшукування найбільшого та найменшого значень неперервної функції на відріжку.	51
Самостійна робота № 11. Дослідження функцій на монотонність та опуклість і побудова графіків.	55
Самостійна робота № 12. Методи інтегрування.	57
8 Використана та рекомендована література	59

Вступ

Методичні вказівки до самостійної роботи та практичних занять із навчальної дисципліни «Вища математика» складені відповідно до освітньо-професійної програми «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти, затвердженої Вченою радою НУВГП, протокол № 8 від 25.06.2021 р.

Знання та навички, отримані під час вивчення дисципліни, допоможуть здобувачам вищої освіти оволодіти компетентностями з дисциплін: «Фізика», «Інженерна та комп'ютерна графіка», «Технічна механіка», «Інформаційні технології та програмування», «Гідрогазодинаміка», «Математичні методи і моделі в інженерних розрахунках», «Тепломасообмін», «Технічна термодинаміка», «Проектування теплоенергетичних установок».

У методичних вказівках подано короткі теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач з чотирьох розділів курсу вищої математики: «Елементи лінійної і векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Диференціальне числення функцій декількох змінних». Вони представлені у вигляді таблиць, що сприяє систематизації й узагальненню знань з навчального предмету.

Також наведено приклади розв'язання типових задач, що виносяться на модульні контролі та самостійні роботи. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв'язання задач, наведено завдання для самоконтролю та самостійної роботи.

1. Програма навчальної дисципліни

Ступінь вищої освіти	<i>бакалавр</i>	
Освітня програма	Теплоенергетика	
Спеціальність	144 Теплоенергетика	
Рік навчання, семестр	<i>1-й рік, 1 семестр</i>	<i>1-й рік, 2 семестр</i>
Кількість кредитів	5	4
Всього кредитів	9	

Лекції:	<i>26 годин/ 4 години</i>	<i>20 годин/ 4 години</i>
Практичні заняття:	<i>28 годин/10 годин</i>	<i>18 годин/10 годин</i>
Самостійна робота:	<i>96 годин/136 годин</i>	<i>82 години/ 106 година</i>
Курсова робота:	<i>ні</i>	<i>ні</i>
Форма навчання	<i>денна / заочна</i>	
Форма підсумкового контролю	<i>залік</i>	<i>екзамен</i>
Мова викладання	<i>українська</i>	

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Метою та завданнями викладання навчальної дисципліни є розвиток логічного, алгоритмічного, аналітичного і синтетичного мислення, оволодіння математичним апаратом, необхідним для вивчення загально інженерних та спеціальних дисциплін, розвиток здібностей свідомого сприйняття математичного матеріалу, характерного для спеціальності «Теплоенергетика»; оволодіння основними математичними методами, необхідними для аналізу і моделювання пристроїв, процесів та явищ, пошуків оптимальних рішень з метою підвищення ефективності виробництва і вибору найкращих способів реалізації цих рішень, опрацювання і аналізу результатів експериментів.

3. Програмні результати навчання

Відповідно до освітньо-професійної програми «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти навчальна компонента спрямована на те, щоб за її результатами студенти могли:

РН1. Знати і розуміти математику, фізику, хімію на рівні, необхідному для досягнення результатів освітньої програми.

РН5. Обирати і застосовувати придатні типові аналітичні, розрахункові та експериментальні методи; правильно інтерпретувати результати таких досліджень.

4. Компетентності здобувача

ФК1. Здатність застосовувати відповідні методи математики, природничих та технічних наук і комп'ютерне програмне забезпечення для вирішення інженерних завдань в теплоенергетичній галузі.

ФК3. Здатність проектувати та експлуатувати теплоенергетичне обладнання.

ФК4. Здатність виявляти, класифікувати і оцінювати ефективність систем і компонентів на основі використання аналітичних методів і методів моделювання в теплоенергетичній галузі.

ФК7. Здатність враховувати ширший міждисциплінарний інженерний контекст у професійній діяльності в сфері теплоенергетики.

ФК11. Здатність забезпечувати якість в теплоенергетичній галузі.

ФК15. Здатність розробляти оптимальні режими роботи теплообмінного обладнання, оцінювати ефективність та загальну економічність використання різних видів вторинних енергетичних ресурсів та альтернативних джерел енергії.

ФК16. Здатність використовувати сучасні інформаційні технології, пакети прикладних програм та графічні редактори, математичні методи та моделі для аналізу та вибору оптимальних тепло технологічних режимів роботи теплоенергетичного обладнання.

5. Теми практичних занять у першому семестрі

Тема 1. Матриці та визначники 2-го і 3-го порядків.

Відшукування обернених матриць.

1. Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти $3A$; $2A - 3B^T$; AB ; BA .

2. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.
3. Знайти мінори та алгебраїчні доповнення усіх елементів матриць АВ та ВА 1-ї задачі.
4. Знайти визначники матриць АВ та ВА 1-ї задачі.
5. Знайти обернені матриці до АВ та ВА 1-ї задачі та перевірити правильність множенням.
6. Нехай $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Розв'язати матричне рівняння $BX = C$.
7. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$.

Тема 2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера. Лінійні операції над векторами. Розклад векторів за базисом.

1. Довести, що СЛАР має один розв'язок, знайти його та перевірити правильність розв'язання.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 5, \\ 6x_1 - 8x_2 = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6, \\ 4x_1 - 6x_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

1. Дано $\vec{AB} = (1; 4; -1)$; $\vec{AC} = (1; -1; 2)$. Знайти $3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ та \vec{BC} .
2. Дано $A(0; -3; 2)$, $B(9; 3; -1)$, $C(3; -5; 4)$, $D(-1; 0; 3)$. Знайти \vec{AB} , \vec{CB} , \vec{AD} , $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$. Чи є серед знайдених векторів

колінеарні? Знайти координати точки, симетричної точці А відносно точки В.

3. Перевірити чи точки $A(1; 3; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; -5; 4)$, $D(5; -2; 1)$ є вершинами трапеції та паралелограма.
4. Довести, що вектори $\vec{a} = (-1; 4)$ та $\vec{b} = (2; -1)$ утворюють базис на площині та розкласти вектор $\vec{c} = (5; -6)$ за ним. Зобразити ці три вектори в ПДСК.
5. Нехай $A(1; -3)$, $B(4; 3)$. Знайти координати точок, що ділять відрізок АВ на три рівні частини.

Тема 3. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів і їх застосування.

1. Для векторів $\vec{a} = (-3; 2; 0)$, $\vec{b} = (4; 5; -3)$ знайти скалярний добуток, кут між ними, проекцію першого вектора на другий та напрямні косинуси.
2. Чи можуть косинуси кутів 30° , 45° , 80° бути напрямними? А кутів $\pi/3$, $5\pi/6$, $\pi/2$?
3. Дано $A(1; 3; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; -5; 4)$. Знайти довжину відрізка АВ та довжину медіани, опущеної з вершини В. Яким є кут при вершині В: гострим, прямим чи тупим?
4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (5; -2; 1)$ при переміщенні з точки $A(3; 0; -2)$ в точку $B(4; 2; -2)$, а також момент цієї сили, прикладеної до точки В відносно точки А, його абсолютну величину і напрямні косинуси.
5. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ та довжину його висоти, опущеної з вершини С.
6. Взаємно перпендикулярні вектори з довжинами 1, 3, 4 утворюють ліву трійку. Знайти їх змішаний добуток та об'єм паралелепіпеда, побудованого на них.
7. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.
8. Чи лежать точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ на одній площині?

9. Перевірити чи трикутник з вершинами $A(-3; 2; 0)$, $B(4; 5; -3)$, $C(-6; 9; 0)$ прямокутний, тупокутний чи гострокутний. Назвати вершину найбільшого кута.

Тема 4. Пряма на площині.

1. Написати рівняння всіх сторін, медіан та висот трикутника з вершинами в точках $A(1; -5)$, $B(2; -2)$, $C(1; -1)$.
2. Знайти кут між прямими $5x-3y-3=0$, $4x-2y-5=0$ та точку їх перетину.
3. Знайти відстань від точки $A(3; 1)$ до прямої $4x-3y-5=0$ та до прямої $y=2x-4$.
4. Знайти тангенс кута між прямими $y=3x-4$ та $y=2-x$.
5. Знайти відрізки, які відтинають прямі $2x-3y-6=0$ та $y=2x-4$ на координатних осях, побудувати ці прямі та знайти їх нормальні вектори.
6. Написати рівняння прямої, яка відтинає відрізок -2 на осі абсцис та відрізок 7 на осі ординат.
7. Вибрати пари паралельних, рівних та перпендикулярних прямих серед наступних: $3x + 2y = 0$, $2x - 3y - 3 = 0$, $4x - 6y + 7 = 0$, $y = 2x/3 - 1$, $y = -3x/2 - 1$.
8. Написати рівняння прямих, що проходять через точку $M(2; -4)$ перпендикулярно й паралельно до прямих $4x - 3y + 4 = 0$, $y = 3x - 2$ та $x = 3$.
9. Задані рівняння сторін трикутника: $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Знайти координати його вершин.
10. Знайти проекцію точки $A(-6; 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

Тема 5. Лінії 2-го порядку.

1. Назвати та зобразити лінії: а) $x^2/9 + y^2/4 = 1$, б) $x^2/9 - y^2/4 = 1$, в) $y^2 + x - 4 = 0$, г) $x/9 + y/4 = 1$.
2. Знайти центри та радіуси, написати параметричні рівняння кіл та зобразити їх: а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2x$.
3. Знайти центр, фокуси, ексцентриситет та асимптоти і зобразити гіперболу $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y - 161 = 0$.
4. Знайти вершини та параметри і зобразити параболу а) $4y = x^2 + 4x + 8$; б) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

5. Знайти центр, фокуси, ексцентриситет і зобразити еліпс $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Написати його параметричне рівняння.
6. Вказати порядки ліній $x^3+y^3-3xy+1=0$ та $x^3+y^3-2x^2y^2-1=0$. Чи належать їм точки $A(2; 1)$, $B(1; 1)$?
7. З'ясувати, які лінії 2-го порядку задаються рівняннями $2x^2-3y^2-4x-12y-10=0$, $2x^2+3y^2-4x+18y+31=0$, $x^2+4y^2-8xy=0$ та зобразити їх.

Тема 6. Площина і пряма в просторі.

1. Задані координати вершин тетраедра $A(5; 2; -3)$, $B(1; -3; 4)$, $C(0; 4; 1)$, $D(3; -2; 0)$. Знайти рівняння грані ABC та довжину висоти тетраедра, опущеної на неї. Який кут утворює ребро AD з гранню ABC ?
2. Знайти тупий кут між прямими $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = 3 - t$ та $x = 2t - 1$, $y = t$, $z = t - 3$.
3. Знайти проекцію точки $A(2; -1; 3)$ на пряму $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.
4. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, заданої своїми загальними рівняннями
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$
5. Перевірити, чи площини $x_1 - x_2 + x_3 = 4$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -2$, $3x_1 - x_2 - x_3 = 4$ перетинаються в одній точці.
6. Зобразити площину $2x-3y+6z-6=0$ в координатному просторі.
7. Написати рівняння медіани BM трикутника з вершинами в точках $A(5; 2; -3)$, $B(1; -3; 4)$, $C(0; 4; 1)$.
8. Знайти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; 1; -3)$ перпендикулярно до площини $2x - 3y + 4z - 3 = 0$. Знайти точку перетину прямої з площиною.
9. Знайти проекцію точки $B(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Тема 7. Перехід до полярних координат.

Комплексні числа.

1. Зобразити точки, задані в полярній системі координат. А($-\pi/8$, 1), В($5\pi/8$, 2), С($3\pi/8$, 3), D($11\pi/8$, 4), Е($-7\pi/8$, 5). В яких квадрантах ПДСК вони містяться?
2. В яких квадрантах ПДСК розташована лінія $\rho=2 \sin \varphi$? Якщо ця лінія алгебрична, то вказати її порядок.
3. Перейшовши до полярної системи координат, зобразити лінії $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$, $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$. При яких кутах вони визначені? В яких квадрантах ПДСК вони розміщені? Якщо ці лінії алгебричні, то вказати їхні порядки.
4. Розв'язати квадратні рівняння в полі комплексних чисел С. а) $x^2+6x+13=0$; б) $x^2-8x+40=0$; в) $4x^2+20x+29=0$.
5. Обчислити і зобразити в ПДСК комплексні числа $(3-4i)(2+5i)$; $(2-i)(2+5i)$; $(2-i)^2$; $2-i^7$; $(3-2i)^2-i^5$; $(3+2i)/(4-2i)$; $(3-4i)/i$; $(2-2i)^{10}$; $(1-i\sqrt{3})^5$; $\sqrt[5]{i-\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Тема 8. Обчислення границь. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій.

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \sqrt{x+5}$,
 $f(x) = \frac{5-x}{4x^2-x-4}$, $f(x) = \frac{5x^2-4x-1}{4x+5x^2-1}$, $f(x) = \frac{3x^2+5x-3}{3x+5x^2+5}$,
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $f(x) = \lg(1-x^2)$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}$,
 $f(x) = \arccos \frac{x-2}{3}$.
2. Знайти границі функцій при прямуванні x до $+\infty$, $-\infty$ та до 2.
 $f(x) = \frac{x+7}{2x^2-x-6}$, $f(x) = \frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$, $y = \frac{4-4x-3x^2}{x+2}$.
3. Знайти границі послідовностей: $\frac{2n-n^2+4}{2n^2-n-3}$, $\frac{n+4}{5n-3}$, $\frac{4n+n^2}{1-2n}$.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{arctg} x}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{4x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x^2}{4x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 5x}$.
5. Знайти проміжки, на яких функції $\frac{3x^2 + x}{4x^2 - 1}$, $\frac{5 - x}{4x^2 - x - 3}$,
 $\frac{-4 + 2x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ додатні.

Тема 9. Відшукування асимптот графіків функцій. Диференціювання елементарних функцій.

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{10 + 3x - x^2}{x - 3}$ та $\lim_{x \rightarrow 5-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$.
2. Назвати лінії $y = \frac{10 + 3x - x^2}{x - 3}$, $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$ та побудувати їх графіки.
3. Знайти похідні та диференціали функцій
- а) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 3$; б) $y = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^4}$;
 в) $y = 3^{\sin^3 4x}$; г) $y = \sin^4 3x$; д) $y = x^3 \cos x$;
 е) $y = 5^{\operatorname{tg}^2 x} - x \cos(x + 1)$; є) $y = (2^{\cos^3 x} + \operatorname{tg} 2x)^6$;
 ж) $y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x \ln 2x$; з) $y = 2 \arcsin \sqrt{1 - x^2} + x^6 \operatorname{ctg} 3x$;
 и) $y = (4^{\cos 2x} + \ln(1 + x^2))^6$; і) $y = \ln \operatorname{arccos} e^x + x \cos 2x$;

Тема 10. Диференціювання параметрично заданих функцій. Відшукування найбільшого та найменшого значень неперервної функції на відрізку.

1. Знайти похідні другого порядку функцій $f(x) = \sqrt{x+5}$,

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}, \quad f(x) = \lg(1 - x^2), \quad y = \lg \frac{x}{x-3},$$

$$f(x) = \frac{x}{3x+2} + \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{5}.$$

2. Знайти похідні другого порядку від y по x .
- $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad y = \begin{cases} x = (2t+3) \cos t, \\ y = 3t^2; \end{cases}$$

3. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

4. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

5. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \sqrt{2+x-x^2} \quad \text{на відрізку } [-1; 2].$$

6. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x-1}{1+x^2}$

на відрізках а) $[-1; 2]$, б) $[0; 3]$.

Тема 11. Дослідження функцій на монотонність та опуклість і побудова графіків.

Зробити повне дослідження та побудувати графіки функцій

$$y = \frac{3x-4}{2x-3}, \quad y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2}, \quad y = \frac{\ln x}{x},$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Тема 12. Методи інтегрування.

1. Знайти інтеграли $\int \frac{x^4 + \sqrt[3]{x^5}}{x^2} dx$; $\int \frac{dx}{x \ln x}$; $\int x \cdot 7^{x^2+1} dx$;

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 7}}$$
; $\int \frac{\sin \sqrt{x+1} dx}{\sqrt{x+1}}$; $\int \sin^6 x \cos x dx$; $\int \frac{x dx}{1+x^4}$;
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}$$
; $\int \frac{dx}{(9+x)\sqrt{x}}$; $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x - 1}}$; $\int \frac{(\ln x + 3)^5 dx}{x}$;
$$\int \frac{\sin x dx}{9 - \cos^2 x}$$
; $\int x^2 \sqrt{2x^3 + 1} dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{2 - \operatorname{ctg} x}}$;
$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4 - \cos^2 2x}}$$
; $\int \sin(\operatorname{tg} 3x + 2) \frac{dx}{\cos^2 3x}$; $\int x^3 \sqrt{2 + 5x^2} dx$;

2. Знайти визначені інтеграли $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$; $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8 + 1}$;

$$\int_1^e \ln x dx$$
; $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

3. Дослідити на збіжність та обчислити значення збіжних невластних інтегралів $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$.

Тема 13. Застосування інтегралів до задач геометрії та фізики.

1. Знайти площі фігур, обмежених лініями:
 - а) $y = 2x - x^2$, $y = -x$, б) $y = x^2$, $y = 2/(2 + x^2)$,
 - в) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$; г) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.
2. Знайти довжини ліній:
 - а) $y = \frac{x^2}{2} - 1$, $y \leq 0$; б) $\begin{cases} x = t^6/6, \\ y = t^4/4, 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$
3. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні лінії

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
 навколо осі (Oy).
4. Знайти шлях, пройдений тілом, яке рухається зі швидкістю $v = \sqrt{1 + t}$, за перші 8 секунд.
5. Знайти масу стержня з лінійною густиною $\lambda = \cos^3 x$, $0 < x < \pi/2$.
6. Обчислити момент інерції відносно осі (Ox) однорідного підграфіка функції $y = 2x - 4$, $2 < x < 4$.

6. Теми практичних занять у другому семестрі

Тема 1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

1. Знайти загальні розв'язки ДР з відокремлюваними змінними $xu' = 1 - x^2$; $y' = 10^{x+y}$; $\sin^2 y \operatorname{tg} x dx = \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy$.
2. Розв'язати задачі Коші для ДР з відокремлюваними змінними $(x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$, $y(0) = 1$ та $y' \sin x = y \ln y$, $y(\pi/2) = e$.
3. Швидкість охолодження приміщення пропорційна різниці температур у приміщенні і на вулиці. При температурі повітря в приміщенні 25°C і на вулиці 0°C вимкнулося опалення. Через добу температура опустилася до 20°C . Через скільки часу температура в приміщенні буде 10°C ?

Тема 2. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння.

1. Знайти загальні розв'язки однорідних ДР: $y' = -2 + y^2/x^2$;
 $xy' = y - x$; $xudy = (x^2 + y^2)dx$; $xy' = y \ln(y/x)$.
2. Розв'язати задачі Коші для однорідних ДР
 $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$, $y(2) = 1$ та $(xy' - y)\arctg(y/x) = x$, $y(1) = 0$.
3. Знайти загальні розв'язки лінійних ДР: $xy' = y + x\sqrt{x}$;
 $y' + 2y/x = x^3$.
4. Розв'язати задачі Коші для лінійних ДР
 $y' - y \cos x = \sin 2x$, $y(0) = -1$ та $x' = ux + \ln y$, $x(1) = 2$.
5. Визначити, до яких типів відносяться наступні ДР:
а) $(x+y)y' = x(\ln x - \ln y)$; б) $y' = 2xy + x^3$; в) $x' - x \operatorname{tg} y = 1/\cos y$;
д) $xy' + y = y^2$; е) $x + xy' \sin(y/x) = y \sin(y/x)$; ф) $e^{x-y}y' = 1$;
г) $xy' = y + x^2 \cos x$; г) $y' = (1 + \arcsin(y/x))y/x$;
і) $y' = x/(x^2 \sin y - 5y)$; ж) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^{2x} dx$;
к) $y' - y/(x-1) = y^2/(x-1)$; з) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.

Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.

1. Знайти загальні розв'язки ЛОДР: $y'' - 9y = 0$; $y'' + 5y' - 6y = 0$;
 $y'' + 9y' + 20y = 0$; $y'' - y' = 0$; $y'' + y = 0$; $y''' - y'' - y' + y = 0$;
 $y''' - 13y'' + 12y' = 0$; $y^{IV} - 4y'' = 0$; $y^{IV} + y = 0$; $y'' - 2y' + 2y = 0$.
2. Знайти загальні розв'язки систем ЛОДР:
$$\begin{cases} x' = -3x - y, \\ y' = x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x. \end{cases}$$
3. Розв'язати задачі Коші для ЛОДР
 $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 2$;
 $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
4. Нехай три корені характеристичного рівняння ЛОДР дорівнюють 0, два дорівнюють $2+i$ та два $2-i$. Який загальний розв'язок цього рівняння?
5. У якому вигляді слід шукати частковий розв'язок ЛНДР?
а) $y'' - 4y' + 4y = (2x-3)e^{2x}$; б) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$; в) $y'' - 2y' = x^2 - x$;
д) $y'' - 16y = 3 \cos 4x - \sin 4x$; е) $y'' + 16y = \cos 4x - \sin 4x$;
ф) $y'' + y = x^2 \sin x$; г) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x$.

6. Знайти загальні розв'язки ЛНДР: $2y''+y'-y=2e^x$; $y''-y=e^x$;
 $y''-5y'+6y=2\cos 4x+\sin 4x$; $y''-y'=2x-1-\cos x$;
 $y''-y'+2y=8\sin 2x$; $y''-2y'+2y=4e^x \sin x$; $y''-4y'+4y=x+e^{2x}$.
7. Розв'язати задачі Коші для ЛНДР
 $y''-6y'=2x-1$, $y(0)=y'(0)=2$; $y''+y=\sin x$, $y(0)=y'(0)=1$;
 $y''-2y'+2y=x^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
8. Знайти розв'язки задачі Коші для систем ЛНДР:
- $$\begin{cases} x' = e^{3t} - y, \\ y' = 2e^{3t} - x, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = -2; \quad \begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

Тема 4. Частинні похідні, градієнт, похідні у напрямку.

Рівняння дотичної площини та нормалі.

Диференціал функцій декількох змінних.

1. Зобразити області визначення функцій, множини їх неперервності та лінії розриву:
- а) $z = \ln(x + y)$; б) $z = 3x^2y + 5x\sqrt{y} + 2$; в) $z = \frac{7x^2 + 3x + 2}{y^2 - 4x^2}$.
2. Зобразити лінії рівня функцій:
- а) $z = x^2 + y^2$; б) $z = \ln(x + y)$; в) $z = \sqrt{xy}$.
3. Знайти частинні похідні функцій: а) $z = \frac{7x^2 + 3x + 2}{y^2 + 7}$;
 б) $z = x^2 + y^2$; в) $z = 3x^2y + 5x\sqrt{y} + 2$; г) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
4. Показати, що функція $z = xy + xe^{y/x}$ задовольняє диференціальне рівняння з частинними похідними
- $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$
5. Написати рівняння дотичних площин та нормалей до поверхонь у заданих точках: а) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M(1; 2; -1)$ (спочатку перевірити чи точка лежить на поверхні); б) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ при $x=y=1$.

6. Написати рівняння дотичних площин та нормалей до графіків функцій у заданих точках: а) $z = x^2 + y^2$, $M(2; 1)$; б) $z = \arctg \frac{y}{x}$, $M(1; 1)$.
7. Знайти градієнти та диференціали функцій: а) $z = \ln(x + y)$; б) $z = x^y$; в) $z = 3xy + 5x^3 - 3y^2 + 7$; г) $z = \frac{7x^2 + 3x + 2}{y^2 - 4x^2}$.
8. Знайти похідну функції $z = \sqrt{xy}$ у точці $M(4; 1)$ у напрямку вектора $\vec{p} = (3; 4)$.

Тема 5. Дослідження на абсолютний та локальний екстремум функцій декількох змінних.

1. Знайти частинні похідні й диференціал другого порядку та матрицю Гессе функції $z = \frac{7x^2 + 3x + 2}{y^2 + 7}$ в точці $M(1; 1)$.
2. Дослідити на екстремум функції:
а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3$, б) $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ на трикутнику, обмеженому прямими $x=2$, $y=3$, $3x+2y=6$.
4. Знайти найбільше і найменше значення функцій $z = x^2 - y^2$ та $f(x, y) = 6-3x-4y$ при $x^2 + y^2 \leq 1$.

Тема 6. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів.

1. Знайти подвійний інтеграл $\iint_D (3x + 2xy + 5) dx dy$, якщо D – множина, обмежена лініями $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$.
2. Перейти від подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ до повторного на трикутнику з вершинами $A(1; 3)$, $B(4; 5)$, $C(0; 3)$.
3. Перейти у подвійному інтегралі до полярної системи координат на множинах а) $x^2 + y^2 \leq 4$; б) $x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \leq x$.

4. Знайти $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, якщо $D: 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$, перейшовши до полярної системи координат.
5. Перейти від потрійного інтеграла $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ до повторного якщо Ω – множина, обмежена поверхнями $x=0, z=0, y=0, y+2x+3z=6$.
6. Знайти момент інерції відносно осі (Oz) однорідного конуса $0 \leq z \leq 5, x^2 + y^2 \leq z^2$.
7. Знайти $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, якщо $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, перейшовши до сферичної системи координат.

Тема 7. Обчислення криволінійних інтегралів

1. Обчислити: $\int_l (x + y) dl$, $l: y=x-1, 0 \leq x \leq 1$;
 $\int_l \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, l - відрізок OA, O(0; 0), A(1; 2);
 $\int_l (x^2 + y^2)^3 dl$, $l: \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Знайти масу четвертини еліпса $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$, якщо густина в кожній точці пропорційна її ординаті.
3. Знайти момент інерції однорідного кола відносно його діаметра.
4. Обчислити: $\int_l (x - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$, $l: y=x^2, 1 \leq x \leq 2$;
 $\int_{l^+} y dx + x dy$, $l: \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \pi/2$;
 $\int_{l^+} -y dx + x dy$, $l: \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$.

5. Обчислити роботу сили: а) $\vec{F} = y\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ вздовж параболи $y=1-x^2$ від точки $A(-1; 0)$ до точки $B(0; 1)$;
 б) $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж відрізка AB , де $A(-1; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$; в) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ в додатному напрямку вздовж еліпса, заданого канонічним рівнянням.

Тема 8. Формула Гріна.

Відшукання функції двох змінних за її диференціалом.

1. Обчислити $\oint_{l^+} (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, $l: x^2 + y^2 = 4$ за годинниковою стрілкою безпосередньо та за формулою Гріна.
2. Обчислити за формулою Гріна $\oint_{l^+} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, l : контур трикутника з вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 3)$.
3. Довести, що інтеграл $\int_A^B (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$ не залежить від шляху інтегрування та обчислити його, якщо
 а) $A(0; 0)$, $B(2; 3)$; б) $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$.
4. Знайти функцію u та обчислити $\int_{(0;0)}^{(\pi; \pi)} du$, якщо
 а) $du = (2x+3y)dx + (3x-4y)dy$;
 б) $du = (1 - e^{-x-y} + \cos x)dx + (e^{-x-y} + \cos y)dy$;
 в) $du = (\sin y - y \sin 2x)dx + (x \sin y + 1 + \cos^2 2x)dy$.
8. Чи поле а) $\vec{F} = (x^4 + 4xy^3)\vec{i} + (6x^2y^2 - 5y^4)\vec{j}$;
 б) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ є потенціальним? Якщо так, то знайти його потенціал і роботу по переміщенню точки вздовж еліпса від точки $A(2; 0)$ до точки $B(0; 1)$.

Тема 9. Обчислення поверхневих інтегралів.

1. Знайти $\iint_{\sigma} \frac{dS}{(x + y + z)^2}$, де $\sigma: x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

2. Знайти момент інерції однорідної сфери відносно її діаметра.
3. Знайти $\iint_{\sigma^+} xdydz + 2ydzdx + 3zdx dy$ по нижньому боці трикутника $x+y+z/2=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
4. Знайти $\iint_{\sigma^+} xdydz + ydzdx + xyzdxdy$ по зовнішньому боці циліндра $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5$.
5. Знайти $\iint_{\sigma^+} 2ydzdx + zdx dy$ по нижньому боці нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
6. Знайти $\iint_{\sigma^+} xydydz + 3xyzdxdy$ по зовнішньому боці поверхні одиничного куба.
7. Знайти $\iint_{\sigma^-} ydydz + xzdzdx + 2zdx dy$ по внутрішньому боці повної поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 5$.
8. Знайти $\oint_{\gamma^+} x^2 z^2 dx - x^3 y^2 dy + dz$ вздовж кола $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ проти годинникової стрілки з додатного напрямку осі (OZ).
9. Знайти $\oint_{\gamma^+} (y - z)dx + (z - x)dy + xdz$ за годинниковою стрілкою з додатного напрямку осі (OY) вздовж лінії $x^2 + y^2 = 4, z = x + y$.
10. Перевірити, чи поле $\vec{F} = z^2 e^y \vec{i} + (1 + xz^2 e^y) \vec{j} + 2xyze^y \vec{k}$ потенціальне і чи трубчасте. Якщо потенціальне, то знайти його потенціальну функцію та роботу при переміщенні тіла з точки $K(1, 0, 1)$ у точку $N(2, 1, 0)$.

6. Завдання для самостійної роботи

Самостійна робота №1. Матриці та визначники 2-го і 3-го порядків. Відшукування обернених матриць.

Варіант № 1

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $AB+2BC$; б) A^{-1} ; в) BC^{-1} .

Варіант № 2

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 6 \\ 6 & -6 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

. Знайти а) $2AB+BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Варіант № 3

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -1 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Знайти а) } 3AB+2BC; \text{ б) } A^{-1}; \text{ в) } BC^{-1}.$$

Варіант № 4

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $AB - 2BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Вариант № 5

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $2AB+3BC$; б) A^{-1} ; в) BC^{-1} .

Вариант № 6

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $2AB - BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Вариант № 7

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти а) $AB+3BC$; б) A^{-1} ; в) BC^{-1} .

Вариант № 8

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -1 & -6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $3AB - 2BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Варіант № 9

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 1 & -5 & -7 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $3AB+BC$; б) A^{-1} ; в) BC^{-1} .

Варіант № 10

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $AB - 3BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Варіант № 11

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти а) $3AB - BC$; б) A^{-1} ; в) $C^{-1}B^T$.

Самостійна робота №2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера. Лінійні операції над векторами. Розклад векторів за базисом.

Варіант № 1

1. Знайти суму модулів координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (-1; 4)$ за базисом $\vec{p} = (2; -3)$, $\vec{q} = (2; -1)$.

3. Дано $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Знайти координати точки D — середини медіани BM .

Варіант № 2

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (0; -3)$ за базисом $\vec{p} = (2; 9)$,
 $\vec{q} = (3; -1)$.
3. Дано $A(-1; 4; 2)$, $B(-3; 2; -1)$, $C(0; 2; -2)$. Знайти координати точки D — середини медіани CM .

Варіант № 3

1. Знайти суму модулів координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (3; -5)$ за базисом $\vec{p} = (4; -1)$,
 $\vec{q} = (0; 3)$.
3. Дано $A(0; -3; 2)$, $B(9; 3; -1)$, $C(3; -5; 4)$. Знайти координати точки D — середини медіани AM .

Варіант № 4

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + x_2 = -1; \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (1; 3)$ за базисом $\vec{p} = (-2; 4)$,
 $\vec{q} = (2; -2)$.
3. Дано $A(1; 3; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; -5; 4)$. Знайти координати точки D — середини медіани BM .

Варіант № 5

1. Знайти суму модулів координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (3; -5)$ за базисом $\vec{p} = (4; 5)$,
 $\vec{q} = (-2; 1)$.
3. Дано $A(-1; 4; 2)$, $B(2; -1; 0)$, $C(5; -6; 3)$. Знайти координати точки D — середини медіани CM .

Варіант № 6

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (-3; 2)$ за базисом $\vec{p} = (3; -1)$,
 $\vec{q} = (-1; 3)$.
3. Дано $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$. Знайти координати точки D — середини медіани AM .

Варіант № 7

1. Знайти суму модулів координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (-3; 4)$ за базисом $\vec{p} = (2; 2)$,
 $\vec{q} = (-4; 4)$.
3. Дано $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$. Знайти координати точки D — середини медіани BM .

Варіант № 8

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ 5x_1 - 4x_2 = -1. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (3; -2)$ за базисом $\vec{p} = (4; 2)$,
 $\vec{q} = (-2; 3)$.
3. Дано $A(-3; 2; 0)$, $B(4; 5; -3)$, $C(-6; 9; 0)$. Знайти координати точки D — середини медіани CM .

Варіант № 9

1. Знайти суму модулів координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_3 = -1; \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (-4; 1)$ за базисом $\vec{p} = (3; 4)$,
 $\vec{q} = (2; -2)$.
3. Дано $A(-3; 2; 2)$, $B(4; 5; -3)$, $C(-6; 9; 2)$. Знайти координати точки D — середини медіани AM .

Варіант № 10

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (2; -1)$ за базисом $\vec{p} = (1; -1)$,
 $\vec{q} = (2; 5)$.
3. Дано $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$. Знайти координати точки D — середини медіани BM .

Варіант № 11

1. Знайти суму координат розв'язку СЛАР

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

2. Розкласти вектор $\vec{a} = (-2; 3)$ за базисом $\vec{p} = (2; 1)$,
 $\vec{q} = (5; 7)$.
3. Дано $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$. Знайти координати точки D — середини медіани AM.

Самостійна робота №3. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів і їх застосування.

Варіант № 1

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(3; -1; 2)$, $B(4; 3; 1)$, $C(5; 2; 3)$, $D(3; 0; -2)$. Яким є трикутник ABC: прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (2; -1; 4)$ на вектор $\vec{b} = (-3; 2; -1)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2; 2; -4)$ по переміщенню з точки $A(1; 3; -2)$ в точку $B(4; 2; -2)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A.

Варіант № 2

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(0; -3; 2)$, $B(9; 3; -1)$, $C(3; -5; 4)$, $D(-1; 0; 3)$. Яким є трикутник ABC: прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (-1; 4; 2)$ на вектор $\vec{b} = (2; -1; 0)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (4; 1; 3)$ по переміщенню з точки $A(3; -5; 4)$ в точку $B(3; 0; -2)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 3

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(1; 3; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; -5; 4)$, $D(5; -2; -4)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (0; -3; 2)$ на вектор $\vec{b} = (5; -6; 3)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (-2; 4; 2)$ по переміщенню з точки $A(4; 2; -2)$ в точку $B(2; -1; 1)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 4

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$, $D(4; -1; 5)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (9; 3; -1)$ на вектор $\vec{b} = (1; -4; 3)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (-2; 3; -5)$ по переміщенню з точки $A(1; -1; 2)$ в точку $B(5; -6; 2)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 5

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(1; 1; -2)$, $B(3; 2; 1)$, $C(2; 4; -1)$, $D(3; 1; 3)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (3; -5; 4)$ на вектор $\vec{b} = (-3; 2; 3)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (4; -4; 1)$ по переміщенню з точки $A(1; 3; -1)$ в точку $B(2; -1; 1)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 6

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(3; -1; 0)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 0; -2)$, $D(0; 3; -4)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (-1; 0; 3)$ на вектор $\vec{b} = (-3; -1; 2)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (3; 3; 0)$ по переміщенню з точки $A(5; 5; 4)$ в точку $B(3; 2; -1)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 7

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(3; 1; -1)$, $B(6; 5; -1)$, $C(2; 0; 1)$, $D(2; -1; 3)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (1; 3; -2)$ на вектор $\vec{b} = (-3; 1; 3)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (-2; 2; -1)$ по переміщенню з точки $A(4; 1; 3)$ в точку $B(1; 2; -1)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 8

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; -1; 2)$, $D(3; 6; 0)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (4; 2; -2)$ на вектор $\vec{b} = (5; -2; 3)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (1; 5; 5)$ по переміщенню з точки $A(0; 1; 5)$ в точку $B(-1; 2; 1)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 9

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$, $D(3; -2; -5)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (3; -5; 4)$ на вектор $\vec{b} = (8; 1; -6)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (4; 3; 2)$ по переміщенню з точки $A(2; 1; 3)$ в точку $B(-3; 2; 0)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 10

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2; 1; -4)$, $B(1; 3; 5)$, $C(7; 2; 3)$, $D(2; -3; 5)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (5; -2; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; -3; 4)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .
3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (-1; 4; 1)$ по переміщенню з точки $A(4; 5; -3)$ в точку $B(-6; 9; 0)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Варіант № 11

1. Знайти об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$, $D(-1; 1; 4)$. Яким є трикутник ABC : прямокутним, тупокутним чи гострокутним? Знайти довжину висоти цього трикутника, опущеної з вершини найбільшого кута.
2. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (1; -3; 4)$ на вектор $\vec{b} = (3; -4; 2)$ та суму напрямних косинусів вектора \vec{b} .

3. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2; -1; 3)$ по переміщенню з точки $A(7; -3; 2)$ в точку $B(9; 2; 4)$ та момент цієї сили, прикладеної в точці B відносно точки A .

Самостійна робота № 4. Пряма на площині.

Варіант № 1

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(-1; 4)$, $B(2; -3)$, $C(2; -1)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=x-5$.

Варіант № 2

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(0; -3)$, $B(2; 9)$, $C(3; -1)$ до його середньої лінії, паралельної стороні BC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=3x-4$.

Варіант № 3

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(3; -5)$, $B(4; -1)$, $C(0; 3)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AB і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=1$.

Варіант № 4

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(2; -2)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=3-x$.

Варіант № 5

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(3; -5)$, $B(4; 5)$, $C(-2; 1)$ до його середньої лінії, паралельної стороні BC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=-4x$.

Варіант № 6

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(-1; 4)$, $B(2; -1)$, $C(5; -6)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AB і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=2x-1$.

Варіант № 7

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(-1; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-1; 0)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=4-2x$.

Варіант № 8

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(-3; -3)$, $B(4; 1)$, $C(2; 0)$ до його середньої лінії, паралельної стороні BC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=1-3x$.

Варіант № 9

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(5; -6)$, $B(3; 1)$, $C(-4; 3)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AB і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=5x-3$.

Варіант № 10

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(-2; -3)$, $B(-6; 2)$, $C(2; 1)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AC і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=4x-1$.

Варіант № 11

Знайти відстань від точки перетину висот трикутника з вершинами в точках $A(5; -1)$, $B(2; -3)$, $C(3; -2)$ до його середньої лінії, паралельної стороні AB і тангенс гострого кута між цією середньою лінією та прямою $y=-2x-1$.

Самостійна робота № 5. Лінії 2-го порядку.

Варіант № 1

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

1) $x^2 - 6x + y - 1 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$;

3) $x^2 - 2x - 4 = 0$;

4) $y^2 - 4y + 4 = x^2 + 4x$;

5) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 34 = 0$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 2

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 55 = 0$;
- 3) $y^2 - x - 4y + 4 = 0$;
- 4) $y^2 - 2y = x^2 - 4x + 4$;
- 5) $x^2 + y^2 - 14x + 4y - 11 = 0$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 3

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $16x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 149 = 0$;
- 2) $y^2 = 13 + 12x - x^2$;
- 3) $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$;
- 4) $x^2 - 2x + y = 0$;
- 5) $x^2 + 3y^2 - 10x + 6y + 25 = 0$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 4

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$;
- 2) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 10 = 0$;
- 3) $y^2 + 4y + 7 = 6x + 9x^2$;
- 4) $16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$;
- 5) $x^2 + 4x - y + 3 = 0$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 5

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $x^2 - 6x - 4y + 25 = 0$;
- 2) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
- 3) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
- 4) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 11 = 0$;

$$5) 4y^2 + 4y = 2 + 2x - x^2.$$

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 6

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

$$1) y^2 + 8y = -55 + 12x - x^2;$$

$$2) x^2 - 8x - y + 16 = 0;$$

$$3) x^2 + y^2 + 6x - 10y - 2 = 0;$$

$$4) y^2 = x^2 - 2x + 12y + 1;$$

$$5) 16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y - 71 = 0.$$

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 7

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

$$1) 5x^2 - 9y^2 - 30x + 18y - 9 = 0;$$

$$2) 9x^2 + 4y^2 = 36x - 16y - 3;$$

$$3) \frac{1}{4}x^2 - x - y + 3 = 0;$$

$$4) y^2 = 3x - x^2;$$

$$5) x^2 + 3y^2 - 10x + 6y + 28 = 0.$$

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 8

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

$$1) y^2 = x^2 - 2x + 2y;$$

$$2) y^2 = x^2 - 8x + 16y + 1;$$

$$3) 2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 10 = 0;$$

$$4) x^2 + 3x - y - 10 = 0;$$

$$5) x^2 - 6x + y^2 - 16y = 8.$$

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 9

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $y^2 = 6y - 1 + 2x - x^2$;
- 2) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 16y + 16 = 0$;
- 3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;
- 4) $0 = 7 - x^2 - 6x$;
- 5) $x^2 - 2y + 3x - 1 = 0$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 10

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $1 = 2x - x^2$;
- 2) $x^2 - y + 6x - 3 = 0$;
- 3) $3x^2 + 3y^2 - 60x - 54y + 111 = 0$;
- 4) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;
- 5) $y^2 = x^2 - 6x - 12y - 36$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Варіант № 11

Назвати та зобразити на координатній площині лінії, задані рівняннями

- 1) $x^2 + y^2 + 8x + 14y + 65 = 0$;
- 2) $x^2 + 4y + 2x - 3 = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 + 18x - 12y + 36 = 0$;
- 4) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$;
- 5) $y^2 = 4x^2 + 8x - 10y - 37$.

Разом із гіперболою зобразити її асимптоти. Знайти ексцентриситети невироджених ліній.

Самостійна робота № 6. Площина і пряма в просторі.

Варіант № 1

1. Знайти проекції точки $D(-1; 0; 3)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(1; 3; -2)$, $B(4; 2; -2)$, $C(3; -5; 4)$ та на пряму AB . Написати рівняння медіани BM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -4. \end{cases}$$

Варіант № 2

1. Знайти проекції точки $D(5; -2; 1)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(0; -3; 2)$, $B(9; 3; -1)$, $C(3; -5; 4)$ та на пряму AC . Написати рівняння медіани CM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Варіант № 3

1. Знайти проекції точки $D(3; 0; -2)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(0; 2; -2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(5; -1; -3)$ та на пряму BC . Написати рівняння медіани AM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Варіант № 4

1. Знайти проекції точки $D(4; 2; -2)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ та на пряму AB . Написати рівняння медіани AM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Варіант № 5

1. Знайти проекції точки $D(2; 1; 5)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ та на пряму AC . Написати рівняння медіани AM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант № 6

1. Знайти проекції точки $D(4; 1; 3)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ та на пряму BC . Написати рівняння медіани BM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Варіант № 7

1. Знайти проекції точки $D(4; -3; 2)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(-3; 2; 0)$, $B(4; 5; -3)$, $C(-6; 9; 0)$ та на пряму AB . Написати рівняння медіани CM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Варіант № 8

1. Знайти проекції точки $D(0; 4; -2)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(-3; 2; 2)$, $B(4; 5; -3)$, $C(-6; 9; 2)$ та на пряму AC . Написати рівняння медіани BM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Варіант № 9

1. Знайти проекції точки $D(-13; 6; 7)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ та на пряму AB . Написати рівняння медіани AM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Варіант № 10

1. Знайти проекції точки $D(3; -2; 0)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$ та на пряму BC . Написати рівняння медіани CM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 3. \end{cases}$$

Варіант № 11

1. Знайти проекції точки $D(-4; -3; 2)$ на площину ABC , що проходить через точки $A(4;1;0)$, $B(2;2;1)$ і $C(6;3;1)$ та на пряму BC . Написати рівняння медіани CM трикутника ABC .
2. Написати канонічні і параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Самостійна робота № 7. Перехід до полярних координат. Комплексні числа.

Варіант № 1

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = y$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(-3-3i)/(4+i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 2\sqrt{x} + 11 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2+6x+12=0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 3-го степеня.

Варіант № 2

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = y(x^2 - y^2)^2$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(2-5i)/(3-5i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 6\sqrt{x} + 15 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2+x+1/2=0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 12-го степеня.

Варіант № 3

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = x^4$, перейшовши до полярної системи координат. Який порядок цієї лінії? При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена?

2. Виконати дію ділення $(4+5i)/(-2-4i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - \sqrt{x} + 11 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 - 4x + 16 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 6-го степеня.

Варіант № 4

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = xy^2 - x^3$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(-2+3i)/(-2+2i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 4\sqrt{x} + 6 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 - 6x + 18 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 4-го степеня.

Варіант № 5

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = y^5$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(5+4i)/(2+3i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 4\sqrt{x} + 12 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 - 2x + 4/3 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 9-го степеня.

Варіант № 6

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = 2yx^4 - 2x^2y^3$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(-5+3i)/(1+3i)$.
3. Розв'язати рівняння $x + 10\sqrt{x} + 37 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 - 3x + 9/2 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 7-го степеня.

Варіант № 7

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = 2xy$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(-5+3i)/(-4+i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 2\sqrt{x} + 5 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 + 4x + 16/3 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 6-го степеня.

Варіант № 8

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = x^2y^2 - y^4$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(3+2i)/(-4-i)$.
3. Розв'язати рівняння $x + 3\sqrt{x} + 13 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 + x + 1/3 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 8-го степеня.

Варіант № 9

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = y^3(y^2 - x^2)$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(4+2i)/(2-4i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 6\sqrt{x} + 14 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2 - 5x + 25 = 0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 5-го степеня.

Варіант № 10

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = 2xy^2(y^2 - x^2)$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?

2. Виконати дію ділення $(-4+4i)/(3-3i)$.
3. Розв'язати рівняння $x + 10\sqrt{x} + 56 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2+6x+36=0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 4-го степеня.

Варіант № 11

1. Зобразити криву $(x^2 + y^2)^3 = 2xy^2$, перейшовши до полярної системи координат. При яких кутах вона визначена? В яких чвертях декартової системи координат (xOy) вона розміщена? Який порядок цієї лінії?
2. Виконати дію ділення $(-2+3i)/(5-2i)$.
3. Розв'язати рівняння $x - 8\sqrt{x} + 34 = 0$ в полі комплексних чисел.
4. Записати корені квадратного рівняння $x^2+6x+12=0$ у тригонометричній формі і піднести їх до 5-го степеня.

Самостійна робота № 8. Обчислення границь.

Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій

Варіант № 1

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$ та $f(x) = \ln(x - 6) + \sqrt{x - 3}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{-2n^2 - n - 1}{5n^2 - 3n + 3}$.
3. Знайти границі функції $\frac{5x^2 + 2x - 2}{4x + 2}$ при прямуванні x до $-\infty$ та до 1.
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 5x}$.

Варіант № 2

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$ та $f(x) = \log_2(9 - x^2)$.

2. Знайти границю послідовності $\frac{4n^2 - 4n - 2}{4n + 2n^2}$.
3. Знайти границі функції $\frac{2x}{-4x^2 - 2}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до 0 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x}$.

Варіант № 3

1. Знайти області визначення функцій $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ та $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{4n - n^2 - 2}{-n - 3}$.
3. Знайти границі функції $\frac{-x^2 + 2x + 3}{4x^2 - x + 5}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до -4 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x}$.

Варіант № 4

1. Знайти області визначення функцій $y = \lg \frac{x}{x - 3}$ та $f(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{5 + 2n^2 + n}{n^2 - 4n}$.
3. Знайти границі функції $\frac{-2x^2}{x - 2x^2 + 2}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до 3 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{7x^2}$.

Варіант № 5

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$
та $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{-2n^2 + 4n}{5 - n - 4n^2}$.
3. Знайти границі функції $\frac{-4 + 2x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до -3 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Варіант № 6

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 7x + 12}$
та $f(x) = \sqrt{-x} + 2^{x^2}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{3n^2 + 3n}{5 - 3n^2}$.
3. Знайти границі функції $\frac{-x^2 - 2x - 3}{-2x + 5}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до 0 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2}$.

Варіант № 7

1. Знайти області визначення функцій
 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt[3]{x - 1}$ та $f(x) = \frac{x + 7}{2x^2 - x - 6}$.
2. Знайти границю послідовності $\frac{3n^2 + 3n + 3}{-n^2 - 2n - 2}$.
3. Знайти границі функції $\frac{5 - x}{4x^2 - x - 4}$ при прямуванні x до $+\infty$ та до -2 .
4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 5x}{x^2}$.

Варіант № 8

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$

та $f(x) = \frac{x}{3x+2} + \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{5}$.

2. Знайти границю послідовності $\frac{-n^2+n+1}{-2-2n^2-2n}$.

3. Знайти границі функції $\frac{3x^2+5x-3}{3x+5x^2+5}$ при прямуванні x до $-\infty$
та до 2.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} 4x \cdot \operatorname{ctg} 5x$.

Варіант № 9

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \sqrt{x-x^3}$ та

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1}.$$

2. Знайти границю послідовності $\frac{2n^2+4n}{2-3n^2-4n}$.

3. Знайти границі функції $\frac{5x^2-4x-1}{4x+5x^2+1}$ при прямуванні x до $-\infty$
та до 3.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

Варіант № 10

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \frac{1}{\lg(1-x)}$ та

$$f(x) = \sqrt{4x-x^2}.$$

2. Знайти границю послідовності $\frac{n^2-4n+2}{1-n^2}$.

3. Знайти границі функції $\frac{5x^2+x}{-4x^2-1}$ при прямуванні x до $-\infty$ та
до 0.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Варіант № 11

1. Знайти області визначення функцій $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ та

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 7x + 12}.$$

2. Знайти границю послідовності $\frac{2n^2 - n + 2}{3 - n - 5n^2}$.

3. Знайти границі функції $\frac{3x^2 + x}{4x^2 - 1}$, при прямуванні x до $-\infty$ та до 1.

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{2x}$.

Самостійна робота № 9. Відшукування асимптот графіків функцій. Диференціювання елементарних функцій.

Варіант № 1

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{10 + 3x - x^2}{x + 2}$ та $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{4x^2 - 3x + 1}{x - 5}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши

асимптоти гіперболи. а) $y = \frac{10 + 3x - x^2}{x + 2}$; б)

$$y = \frac{4x^2 - 3x + 1}{x - 5}.$$

3. Знайти похідні та диференціали функцій

а) $y = 2 \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \operatorname{tg} 2x$;

б) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}$; в) $y = (6^{\cos^2 x} + \sin^2 x)^5$;

Варіант № 2

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2}$ та $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{3x^2 + 16x + 5}{1 - 2x}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2}$; b) $y = \frac{3x^2 + 16x + 5}{1 - 2x}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = (2^{\arctg 5x} + \operatorname{arccctg} 6x)^3$; b) $y = 3^{\sqrt{x}} + e^x \operatorname{tg} 2x$;

c) $y = \ln \operatorname{arccos} \frac{1}{x} + x \cos 3x$;

Варіант № 3

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - 4x - 3x^2}{x + 2}$ та $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{7x^2 - 3x + 1}{x - 3}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{4 - 4x - 3x^2}{x + 2}$; b) $y = \frac{4 - 4x - 3x^2}{x + 2}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \ln \operatorname{arcsin} \sqrt{1 - 4x^2}$;

b) $y = 2^{(x^3 + \sin 3x)} \operatorname{arctg} 2x$; c) $y = (5^{\cos 2x} - \cos^2 3x)^3$;

Варіант № 4

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x - 3}$ та $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 + x - 1}{x + 2}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x - 3}$; b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x + 2}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = \ln \cos 3^{x^3} + x^6 \operatorname{ctg} 3x;$

b) $y = \sqrt[4]{\frac{3x^2 + 1}{3 - x^2}};$

c) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}; .$

Варіант № 5

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{9 - 3x - 2x^2}{x + 3}$ та $\lim_{x \rightarrow 1/4-} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x - 1}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{9 - 3x - 2x^2}{x + 3};$

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{4x - 1}.$

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = (4^{\lg x} - \operatorname{ctg}^2 7x)^5;$ b) $y = \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} + x^2 \cos 2x;$

c) $y = \arcsin 3^{x^2} + e^x \cos 3x; .$

Варіант № 6

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ та $\lim_{x \rightarrow -1/2+} \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x + 1}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1};$

b) $y = \frac{7x^2 + 26x - 8}{2x + 1}.$

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = \ln \arccos \frac{1}{x} + xe^{3x};$ b) $y = (4^{\sin 2x} + \operatorname{ctg} 3x)^5;$

c) $y = 2^{\operatorname{arctg} \sqrt{x-1}} + x \sin^3 x; .$

Варіант № 7

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$ та $\lim_{x \rightarrow -1/4-} \frac{x^2 - 7x - 3}{4x + 1}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$;

b) $y = \frac{x^2 - 7x - 3}{4x + 1}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = \arcsin \sqrt{1-x} + 2^x \cos 3x$; b) $y = (2^{\operatorname{ctg} 3x} + \sin^3 7x)^5$;

c) $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2^{\sin x^3}$; .

Варіант № 8

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 5x - 8}{x - 1}$ та $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x - 2}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{3x^2 + 5x - 8}{x - 1}$;

b) $y = \frac{2x^2 - 7x + 4}{x - 2}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = (2^{\sin x} + \operatorname{arctg}^2 x)^5$; b) $y = \sqrt[3]{x^3 + 1} + x\sqrt{1 - x^2}$;

c) $y = \ln \arccos \sqrt{5 - x^2} + 3^{\arcsin x}$; .

Варіант № 9

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{6x^2 + 13x + 7}{x + 1}$ та $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{5x^2 - 3x - 1}{x - 5}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{6x^2 + 13x + 7}{x + 1}$;

b) $y = \frac{5x^2 - 3x - 1}{x - 5}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = \ln \arccos \sqrt{1-4x^2} + x \ln 2x$;

b) $y = x^3 \sqrt{1+x^2} + 5^{\frac{1}{x^2} + \cos 3x}$; c) $y = (7^{\lg^2 x} + \cos^2 6x)^4$;

Варіант № 10

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x - 3}$ та $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 4x - 1}{-x - 2}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{2x^2 - 9x + 9}{x - 3}$;

b) $y = \frac{2x^2 + 4x - 1}{-x - 2}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = (4^{\cos^2 x} - \operatorname{ctg}^3 x)^5$; b) $y = \arcsin \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$;

c) $y = \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x$;

Варіант № 11

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 5}$ та $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5x - x^2 - 4}{-x - 2}$.

2. Назвати лінії та зобразити їх графічно, знайшовши точки перетину з координатними осями та побудувавши асимптоти гіперболи.

a) $y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 5}$;

b) $y = \frac{5x - x^2 - 4}{-x - 2}$.

3. Знайти похідні та диференціали функцій

a) $y = (3^{\arcsin 2x} - \sqrt[3]{x})^2$; b) $y = 3^{\sqrt{x}} + e^x \operatorname{tg} 2x$;

c). $y = \ln \operatorname{cose}^{-4x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$;

Самостійна робота № 10.

**Диференціювання параметрично заданих функцій.
Відшукування найбільшого та найменшого значень
неперервної функції на відрізку.**

Варіант № 1

1.
$$\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$$
 знайти похідні другого порядку від y по x .

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

$$y = \frac{x^4}{4} - 27x + 60 \text{ в точці з абсцисою } x_0 = 2.$$

3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3} \text{ та } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{6 - x}}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $\frac{\sqrt{x}}{x+2}$ на відрізку $[0; 8]$.

Варіант № 2

1.
$$\begin{cases} x = \sin t - t \cos t, \\ y = \cos t + t \sin t; \end{cases}$$
 знайти похідні другого порядку від y по x .

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

$$\text{кривої } y = \frac{3x - 4}{2x - 3} \text{ в точці з абсцисою } x_0 = 2.$$

3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} \text{ та } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $\frac{x^2}{x^3 + 4}$ на відрізку $[-1; 4]$.

Варіант № 3

- $$\begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}; \end{cases}$$
 знайти похідні другого порядку від y по x .
- Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = \sqrt{x-4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 8$.
- Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8} \text{ та } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}}.$$

- Знайти найбільше і найменше значення функції $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ на відрізку $[0; \pi/2]$.

Варіант № 4

- $$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$$
 знайти похідні другого порядку від y по x .
- Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції кривої $y = \frac{\ln x}{x}$ в точці абсцисою $x_0 = 1$.
- Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2} \text{ та } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}}{x+2}.$$

- Знайти найбільше і найменше значення функції $\sin x \cos^3 x$ на відрізку $[0; \pi/2]$.

Варіант № 5

- $$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$$
 знайти похідні другого порядку від y по x .
- Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точці $M_0(1;1)$.
- Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{10 - 3x^2 - 13x}{4x^2 + 17x - 15} \text{ та } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2 - x}}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $x\sqrt{3 - x}$ на відрізку $[-1; 3]$.

Варіант № 6

1. $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t; \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .
2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = \sqrt{x + 4}$ в точці з абсцисою $x_0 = -3$.
3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{5 - x}}; \text{ та } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $x\sqrt{6 + x}$ на відрізку $[-6; 3]$.

Варіант № 7

1. $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t; \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .
2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2 - 6x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.
3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^2 - 15x - 4}{3x^2 - 8x - 16} \text{ та } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 2} - \sqrt{8 - x}}{x - 5}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $2x - \arcsin x$ на відрізку $[0; 1]$.

Варіант № 8

1. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точці $M_0(2;1)$.

3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{5x - x^2 - 6} \quad \text{та} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2 - x}}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $x - 2 \operatorname{arctg} x$ на відрізку $[-1; \sqrt{3}]$.

Варіант № 9

1. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2); \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції кривої $y = 2\sqrt{2} \sin x$ в точці $M_0(\frac{\pi}{4}; 2)$.

3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1} \quad \text{та} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{8 - x}}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $\frac{x^3 - 3x + 2}{(x + 1)^2}$ на відрізку $[0; 4]$.

Варіант № 10

1. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 8\sin^3 t; \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .

2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2 - 7x + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. Знайти границі функцій

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10} \quad \text{та} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{5 - x}}{x - 1}.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції $\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ на відрізьку $[3; 10]$.

Варіант № 11

1. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t; \end{cases}$ знайти похідні другого порядку від y по x .
2. Написати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2 - 16x + 7$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
3. Знайти границі функцій
- $$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6} \text{ та } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{4-x}}{x+1}.$$
4. Знайти найбільше і найменше значення функції $3 \operatorname{ctg} x + 4x$ на відрізьку $[\pi/6; 3\pi/4]$.

Самостійна робота № 11. Дослідження функцій на монотонність та опуклість і побудова графіків.

Варіант № 1

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Варіант № 2

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x^3}{3x^2 - 1}$$

Варіант № 3

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$$

Варіант № 4

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{2x+1}{x^2+x}$$

Варіант № 5

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x^2+x-1}{x^2-x}$$

Варіант № 6

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x^3-2}{x^2+x+1}$$

Варіант № 7

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{1}{x^2+4x-5}$$

Варіант № 8

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$$

Варіант № 9

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-1}$$

Варіант № 10

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$$

Варіант № 11

Зробити повне дослідження та побудувати графік функції

$$\frac{x}{(x+1)^2}$$

Самостійна робота № 12. Методи інтегрування.

Варіант № 1

Знайти інтеграли $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$, $\int \frac{e^x dx}{x^2}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$;
 $\int \operatorname{arctg} x dx$; $\int \frac{x + 4}{2x^2 - 7x + 1} dx$; $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Варіант № 2

Знайти інтеграли $\int \frac{6x^5 - 1}{x^3 \sqrt{x}} dx$; $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} - 16}$; $\int \frac{(1+x) dx}{1 + \sqrt{x}}$;
 $\int x \operatorname{arctg} x dx$; $\int \frac{x dx}{2x^2 + x + 5}$, $\int \cos^2 x dx$.

Варіант № 3

Знайти інтеграли $\int 4^{-2x+1} dx$; $\int \frac{dx}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + 9}$;
 $\int x \ln x dx$; $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}} dx$, $\int \sin^3 x dx$.

Варіант № 4

Знайти інтеграли $\int \frac{\sqrt[5]{x^7} - 2}{x\sqrt{x}} dx$, $\int \frac{x^3 dx}{x^8 + 9}$; $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$;
 $\int x \cos(3x + 2) dx$; $\int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx$, $\int \sin x \cos 2x dx$.

Варіант № 5

Знайти інтеграли $\int \frac{7\sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx$, $\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x}$;
 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$; $\int x \sin(x + 7) dx$; $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{1 + x - 3x^2}} dx$; $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Вариант № 6

Знайти інтеграли $\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^3}} dx$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 - 1}}$; $\int \frac{\sqrt{x+2} dx}{1 + \sqrt{x+2}}$;
 $\int \arcsin x dx$; $\int \frac{3x-2}{5x^2 - 3x + 2} dx$; $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

Вариант № 7

Знайти інтеграли $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 3x}{x^3} dx$, $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4-x)}$;
 $\int x 5^x dx$; $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Вариант № 8

Знайти інтеграли $\int \frac{7x + \sqrt[4]{x^9}}{\sqrt{x^7}} dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(7x^3 - 1)}$;
 $\int \frac{dx}{2 - \sqrt{x-3}}$; $\int x \cos 7x dx$; $\int \frac{2x-8}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$; $\int \cos^3 x dx$.

Вариант № 9

Знайти інтеграли $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[5]{x^2}} dx$, $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$;
 $\int (x+2)e^{5x} dx$; $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} dx$; $\int \sin^2 x dx$.

Вариант № 10

Знайти інтеграли $\int \frac{3x - \sqrt[3]{x^5}}{x^2} dx$; $\int \frac{\sin(\ln x) dx}{x}$; $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx$;
 $\int \arcsin 2x dx$; $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}$; $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Варіант № 11

Знайти інтеграли $\int \frac{x^3 + 7}{\sqrt[5]{x}} dx$; $\int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$; $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1}$; $\int \ln x dx$;
 $\int \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 4} dx$; $\int \frac{dx}{4 + \cos x}$.

Варіант № 12

Знайти інтеграли $\int \frac{x^3 - \sqrt[7]{x^2}}{x\sqrt{x}} dx$; $\int x^3 \sqrt{5x^2 + 1} dx$;
 $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int \frac{x - 4}{\sqrt{2x^2 - x + 7}} dx$; $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$.

7. Використана та рекомендована література

1. Брушковський О. Л., Дубчак І.В., Цецик С.П. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2017. 178 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/6962> (дата звернення 10.09.2023).
2. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. Ч. 2 : Диференціальне та інтегральне числення / А. Д. Тевяшев та ін. Харків : СМІТ, 2010. 330 с.
3. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч. / Дюженкова Л. І. та ін. Київ : Вища школа, 2002. Ч1. 462 с.; ч.2. 470 с.
4. Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях: довідник. Київ : МАУП, 1999. 88 с.
5. Мізюк В. Г. Вища математика: навч.-метод. посіб. Рівне : НУВГП, 2010. 163 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/2381/> (дата звернення 10.09.2023).
6. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник у 2-х ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / За заг. ред.

- П. П. Овчинникова; пер. з рос. П. М. Юрченка. Вид. 3-тє, випр. Київ : Техніка, 2003. 600 с.
7. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч.1: Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія / Бутенко Н. С., Нерух О. Г., Ружицька Н. М., Стогній Н. П.; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 172 с.
 8. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Бутенко Н. С., Нерух О. Г., Ружицька Н. М., Стогній Н. П.; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 268 с.
 9. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Луник Х. П., Уханська Д. В. Львів : Бескид Біт, 2002. 262с.
 10. Збірник задач з математичного аналізу: у 2 ч. / Рудавський Ю. К. та ін. Львів : Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003-2008. Ч.1. 2008. 352 с.; ч.2. 2003. 232 с.
 11. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика : підручник: у 3-х кн. Київ : Либідь, 1994. Кн. 1: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. 280с. Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. 352 с. Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. 352 с.
 12. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632> (дата звернення 10.09.2023).