

531  
К-85

АКАДЕМИЯ НАУК УССР  
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

ЗАПИСКИ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, Т. I—II

Акад. Н. М. КРЫЛОВ и Проф. Д-р Н. Н. БОГОЛЮБОВ



# ВВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНУЮ МЕХАНИКУ

(ПРИБЛИЖЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ)

ТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УССР  
КИЕВ — 1937



ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS  
INSTITUT DE MECHANIQUE DES CONSTRUCTIONS

ANNALS DE LA CHAIR DE LA PHYSIQUE-MATHÉMATIQUE  
4-1-II

УДК 62-50



1955

INTRODUCTION

A LA MÉCANIQUE NON-LINÉAIRE

LES MÉTHODES APPROXIMÉES ET ASYMPTOTIQUES  
DE LA MÉCANIQUE NON-LINÉAIRE

ПЕЧАТЪ АКАДЕМИИ НАУК СССР  
1955

ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE  
INSTITUT DE LA MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

ANNALES DE LA CHAIRE DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE  
t. I—II

---

Prof. Dr. NICOLAS KRYLOFF et Prof. Dr. NICOLAS BOGOLIÛBOFF  
Membre des Académies des Sciences  
de l'URSS et de la RSS d'Ukraine

# INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE NON-LINÉAIRE

(LES MÉTHODES APPROCHÉES ET ASYMPTOTIQUES  
DE LA MÉCANIQUE NON-LINÉAIRE)

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE  
K I E V — 1937

А К А Д Е М И Я Н А У К У С С Р 531  
ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ K-8

ЗАПИСКИ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
т. I—II

Акад. Н. М. КРЫЛОВ и проф. д-р Н. Н. БОГОЛЮБОВ

ПЕРЕУЧЕТ  
1940 г.

проверено  
1966 г.

# ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ МЕХАНИКУ

(ПРИБЛИЖЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ)



e/a

V

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УССР  
КИЕВ — 1937

Библиографическое описание  
этого издания помещено в „Ле-  
тописи Украинской Печати“,  
„Карточном репертуаре“ и дру-  
гих указателях Украинской  
Книжной Палаты.

Ответственный редактор *акад. Н. М. Крылов*  
Литредактор *Б. Е. Козловский*  
Ученый корректор *И. М. Коган*  
Выпускающий *Е. Ц. Каганов*

Печатается по распоряжению Академии Наук УССР.

Непременный секретарь академик *А. В. Палладин*

Типо-литография Академии Наук УССР

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей монографии рассматриваются нелинейные колебательные системы, достаточно близкие к линейным.

Достаточно близкими к линейным называются здесь, как обычно, такие колебательные системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения, хотя и являются нелинейными, но содержат некоторый параметр  $\varepsilon$ , входящий в эти уравнения так, что при нулевом значении  $\varepsilon$  они вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

При этом предполагается, что параметр  $\varepsilon$  является „малым“, т. е. может принимать лишь достаточно малые значения.

В виду того, что в дифференциальных уравнениях колебательных систем, достаточно близких к линейным, нелинейные члены входят лишь как слабое возмущение, пропорциональное  $\varepsilon$ , мы рассматриваем вопрос о построении приближенных решений, удовлетворяющих данным дифференциальным уравнениям с точностью до величины порядка малости  $\varepsilon^m$ , где  $m$  — некоторое положительное целое число.

Дело идет, следовательно, об образовании для искомым решений асимптотических формул в окрестности нулевого значения  $\varepsilon$ .

Необходимо заметить, что обычные методы [разложения по степеням малого параметра приводят к приближенным решениям, содержащим так называемые секулярные члены, в которых независимое переменное  $t$  (время) выходит за знак тригонометрических выражений.

Благодаря этим секулярным членам ошибка  $R_m(\varepsilon, t)$  происходящая от подстановки в дифференциальные уравнения таких приближенных решений, хотя при фиксированном  $t$  и убывает вместе с  $\varepsilon$  как  $\varepsilon^m$ :  $R_m(\varepsilon, t) = O(\varepsilon^m)$ , но неравномерно — по отношению к  $t$ .

Можно найти такую последовательность  $t \rightarrow \infty$ , для которой ошибка  $R_m(\varepsilon, t)$  будет стремиться не к нулю, а к бесконечности, как быстро ни убывало бы  $\varepsilon$ .

Таким образом область применимости формул, получаемых при помощи обычных методов разложения, необходимо ограничена достаточно узким интервалом времени.

При исследовании же колебательных процессов, особенно процессов высокочастотных, требуется иметь, наоборот, такие приближенные формулы, которые были бы пригодны на возможно более длинном интервале времени.

Поэтому следует построить такие методы разложения, которые приводили бы к приближенным решениям, не содержащим секулярных членов и удовлетворяющим данным дифференциальным уравнениям с точностью до  $\varepsilon^m$  равномерно по отношению к  $t$ .

С аналогичным вопросом в свое время столкнулись в астрономической теории возмущений, где и был выработан для этой цели ряд методов, например методы Линшtedта, Гильдена, Болена и т. д.

Надо заметить, однако, что динамические системы, рассматриваемые в астрономической теории возмущения, консервативны и потому соответствующие дифференциальные уравнения приводимы к каноническому виду.

Упомянутые методы Линшtedта, Гильдена, Болена и т. д. основаны на этом каноническом характере дифференциальных уравнений.

В нелинейной же механике, имеющей в виду главным образом колебательные системы, встречающиеся в технике, условие консервативности, как правило, не выполняется, благодаря наличию сил, вызывающих затухание, а также (в случае автоколебательных систем) и источников энергии.

Поэтому методы астрономической теории возмущений не могут быть непосредственно перенесены в нелинейную механику.

Настоящая монография и посвящена рассмотрению методов разложения по степеням малого параметра для неконсервативных систем, приводящих к приближенным решениям, не содержащим секулярных членов и равномерно удовлетворяющим данным дифференциальным уравнениям с точностью до фиксированной степени  $\varepsilon$ .



При этом большое внимание уделено вопросам, связанным с исследованием первого приближения.

Дело в том, что эффективное построение высших приближений приводит к быстро усложняющимся формулам, вряд ли допускающим возможность реального практического использования.

Кроме того, первое приближение во многих случаях дает ту же качественную картину колебательного процесса, что и приближение сколь угодно высокое.

При исследовании формы первого приближения оказалось возможным установить общее правило, так называемый метод эквивалентной линеаризации, при помощи которого уравнения, определяющие первое приближение, могут быть получены непосредственно из данных задачи даже и без предварительного образования точных дифференциальных уравнений колебательной системы. При помощи метода эквивалентной линеаризации вопрос о получении уравнений первого приближения для данной нелинейной колебательной системы приводится к исследованию некоторой эквивалентной линейной системы.

Параметры этой эквивалентной системы, получаемой из рассматриваемой нелинейной системы путем замены нелинейных элементов линейными, могут быть определены с помощью особого правила, названного нами принципом гармонического баланса.

Заметим, что в различных вопросах техники колебаний уже применялись методы, по существу аналогичные методу эквивалентной линеаризации.

Особенно это относится к так называемой квазилинейной теории электронных генераторов в радиотехнике, разработанной трудами Баркгаузена, Меллера и Кобзарева.

По нашему мнению, представляется, однако, полезным на почве различных частных примеров сделать попытку к созданию более или менее общей теории, что нами и было сделано в настоящей монографии.

При этом особое внимание было уделено вопросу о связи метода эквивалентной линеаризации с методами разложения по степеням малого параметра. Показано, например, что построенное при помощи метода линеаризации так называемое улучшенное первое приближение удовлетворяет точным дифференциальным уравнениям с ошибкой порядка малости  $\epsilon^2$ .

Мы надеемся, что дальнейшее развитие метода линеаризации может дать эффективный математический аппарат для практического исследования колебательных процессов в нелинейных системах, достаточно близких к линейным.

Перечислим вкратце содержание этой книги.

В § 1 выводятся некоторые дифференциальные уравнения нелинейных колебательных систем, которые будут использованы в качестве примеров для излагаемой теории.

В § 2 рассматривается элементарная теория первого приближения для колебательных систем, для которых дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (1)$$

Полученные формулы первого приближения

$$x = a \sin \psi$$

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon \Phi(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \varepsilon \Omega(a)$$

где:

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

применяются к различным конкретным примерам, и с их помощью исследуется качественный характер колебательного процесса.

§ 3 посвящен различным элементарным уточнениям формул первого приближения и их приложениям.

Получено, например, выражение „улучшенного“ первого приближения:

$$x = a \sin \psi - \frac{\varepsilon}{\nu^2} f_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n\psi + g_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}$$

где  $f_n(a)$ ,  $g_n(a)$  — коэффициенты Фурье в разложении:

$$f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) = f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n(a) \cos n \tau + g_n(a) \sin n \tau\}$$

и показано, что это выражение удовлетворяет уравнению (1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Для случая уравнений вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0$$

получены некоторые формулы для определения частоты  $\omega$  стационарных колебаний с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$ , например:

$$\omega = \nu \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[ \frac{F_n^*(a)}{a} \right]^2 \right\}$$

где  $F_n^*(a)$  — коэффициенты Фурье в разложении:

$$F(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n \tau$$

и где

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

В § 4 рассматриваются вопросы, связанные с построением высших приближений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению (1) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^m$ , где  $m$  — данное положительное целое число.

Кроме общего метода разложения по степеням, тут приводятся специальные методы для исследования колебаний в консервативных системах и для исследования стационарных колебаний в неконсервативных системах.

В § 5 на примере колебательных систем, для которых дифференциальное уравнение имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + \varepsilon f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

излагается метод эквивалентной линеаризации и так называемый принцип гармонического баланса.

Рассуждения основываются на том, что, построенное обычным путем первое приближение

$$x = a \sin \phi$$

удовлетворяет, с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ , „эквивалентному линейному“ уравнению:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + (k + k_1) x = 0$$

в котором величины  $\lambda$  и  $k_1$  определяем как функции амплитуды  $a$ , приравнявая первую гармонику выражения

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad \text{где} \quad x = a \sin(\nu t + \varphi), \quad \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

гармонике вида:

$$\lambda \frac{dx}{dt} + k_1 x$$

§ 6 посвящен изложению известных в электротехнике символических методов для исследования линейных колебательных систем.

Эти символические методы в сочетании с методом линеаризации прилагаются затем к образованию уравнений первого приближения для стационарных колебаний.

Тот же способ обобщается также и для нестационарных колебаний. В качестве примера рассмотрены некоторые колебательные системы с одной собственной частотой.

§ 7 содержит приложение изложенных в § 3 методов для случая колебательных систем с несколькими собственными частотами.

В основном изложение строится на рассмотрении колебательной системы, состоящей из электрического контура  $(L, R, C)$  (в который включено нелинейное сопротивление), индуктивно связанного с другим контуром  $(L_1, R_1, C_1)$ .

Уравнение колебаний для такой системы будет дифференциальным уравнением четвертого порядка вида:

$$\left\{ \left( L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1 \right) \left( LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) - M^2 C C_1 \frac{d^4}{dt^4} \right\} i + C \frac{d}{dt} \left\{ L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1 \right\} F(i) = 0 \quad (2)$$

Следует заметить, впрочем, что здесь приближенные формулы получаются из непосредственного рассмотрения колебательной системы, независимо от дифференциального уравнения (2).

В § 8 исследуются случаи резонанса, имеющие место, когда между собственными частотами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  приближенно выполняются соотношения вида:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{s}$$

где  $r$  и  $s$  — некоторые взаимно-простые целые числа.

В § 9 в весьма общем виде формулируются основные принципы метода эквивалентной линеаризации и устанавливается связь этого метода с методами разложения по степеням малого параметра  $\epsilon$ .

Показано, например, что и в общем случае колебаний с несколькими собственными частотами улучшенное первое приближение, получаемое при помощи метода эквивалентной линеаризации, удовлетворяет соответствующим дифференциальным уравнениям с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^2$ .

В § 10 трактуются колебательные системы, находящиеся под воздействием внешних периодических сил, в нерезонансном случае.

Особое внимание тут уделено системам, для которых дифференциальное уравнение колебаний будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

где  $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторая квазипериодическая функция по отношению к  $t$ .

§ 11 посвящен рассмотрению случаев резонанса между собственной частотой и частотой внешнего возбуждения.

Изложение проводится здесь на примерах электронного генератора с независимым возбуждением и электрического контура с нелинейной самоиндукцией и периодически изменяющейся емкостью.

Тут рассмотрены также колебательные системы, описываемые уравнением вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(at, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

[в котором  $f\left(at, x, \frac{dx}{dt}\right)$  будет некоторой периодической функцией  $at$  с периодом  $2\pi$ ] и находящиеся в резонансе:

$$\nu \cong \frac{r}{s} \alpha; \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Полученные для таких систем формулы первого приближения:

$$x = a \sin\left(\frac{r}{s} at + \varphi\right)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1}{2m} a$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu - \frac{r}{s} \alpha + \nu \frac{k_1}{2k}$$

где:

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi \nu \alpha} \int_0^{2\pi} f\left(st - \frac{s\varphi}{r}, a \sin rt, a \nu \cos rt\right) \cos rt \, dt$$

$$k_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi \alpha} \int_0^{2\pi} f\left(st - \frac{s\varphi}{r}, a \sin rt, a \nu \cos rt\right) \cos rt \, dt$$

применены для исследования поперечных колебаний стержня, находящегося под воздействием синусоидальной осевой силы, а также для случая, когда

$$\frac{r}{s} = 1, \quad \varepsilon f = -f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + E \sin at$$

В этом последнем случае особое внимание уделено рассмотрению стационарных колебаний и вопросу их устойчивости.

В заключении настоящей монографии указывается ряд проблем, которые непосредственно связаны с рассмотренными в этой работе вопросами и могут, по нашему мнению, быть предметом дальнейших исследований.

## § 1. Вывод дифференциальных уравнений для некоторых нелинейных колебательных систем

В классической теории колебаний обычно рассматривались лишь линейные колебательные процессы, т. е. процессы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями.

Так как в действительности колебания всегда являются по существу нелинейными, то, чтобы привести изучение их к схеме классической „линейной теории“, при выводе соответствующих дифференциальных уравнений отбрасывают все нелинейные члены, например, путем допущения „малости“ амплитуды рассматриваемых колебаний.

Так, если в хорошо известном уравнении математического маятника:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

(где  $\theta$  — угол отклонения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $l$  — длина нити; см. фиг. 1) мы заменим  $\sin \theta$  на первый член в разложении Тейлора

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots$$

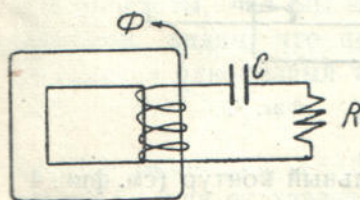
то получим простое уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$



Фиг. 1.

Линеаризация колебательных систем допускалась главным образом в виду отсутствия общих математических методов для непосредственного изучения нелинейных колебаний, причем следует заметить, что во многих случаях отбрасывание даже и действительно малых членов в дифференциальном уравнении может не только дать количественно неточные результаты, но и исказить качественную картину колебания.



Фиг. 2.

Приступая в настоящей главе к изложению приближенных методов нелинейной механики, позволяющих подойти к изучению различных важных типов нелинейных колебаний, мы начнем с вывода ряда дифференциальных уравнений, соответствующих колебательным системам, которые в дальнейшем послужат нам примером приложения излагаемой теории.

1. Рассмотрим крутильные колебания вала (см. фиг. 2), состоящего из двух вращающихся масс, соединенных при помощи нелинейной упругой связи.

Пусть  $J_1, J_2$  будут моменты инерции<sup>1)</sup> вращающихся масс;  $\theta_1, \theta_2$  — их углы кручения. Пусть, далее,  $M = c(\theta_1 - \theta_2)$  — крутящий момент упругой связи (муфты), представленный как функция от угла скручивания  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  (см., напр., фиг. 3).

Тогда, очевидно, имеем следующие уравнения:

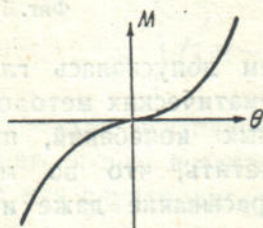
$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + c(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - c(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

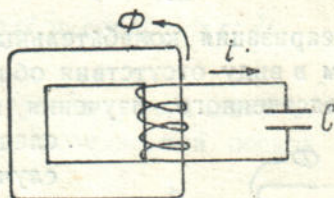
откуда непосредственно получаем искомое уравнение крутильных колебаний:

$$J_1 J_2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) = 0 \quad ($$

В этом уравнении функция  $c(\theta)$  обычно задается графически и может иметь самую разнообразную форму.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

2. Возьмем электрический колебательный контур (см. фиг. 4) содержащий железный сердечник.

Пусть  $\Phi$  обозначает поток магнитной индукции,  $i$  — силу тока в контуре,  $C$  — емкость.

Тогда на основании схемы фиг. 4, имеем:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Например, в случае гребного вала:  $J_1$  — момент инерции турбины,  $J_2$  — винта; в случае пропеллерного вала:  $J_1$  — момент инерции авиамотора,  $J_2$  — пропеллера.



Зависимость между  $\Phi$  и  $i$  схематически изображена на фиг. 5. С достаточной точностью в известных пределах мы можем представить эту зависимость аналитически, положив, например:

$$i = A\Phi + B\Phi^3 \quad (3)$$

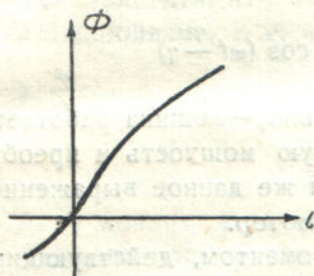
Подставив (3) в уравнение (2) и продифференцировав по  $t$ , получим окончательно:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{A\Phi + B\Phi^3}{C} = 0 \quad (4)$$

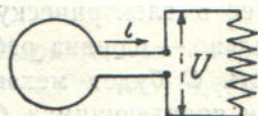
3. Рассмотрим синхронную машину, работающую на сеть бесконечной мощности, т. е. иначе говоря, предположим, что на клеммах машины имеется напряжение

$$u = U \cos \omega t$$

не зависящее от функционирования самой машины и создаваемое



Фиг. 5.



Фиг. 6.

некоторой достаточно мощной центральной станцией. Допуская, для простоты, что мы имеем дело с однофазной синхронной машиной, видим, что под действием этого напряжения возбуждается однофазный ток

$$i = I \cos(\omega t - \gamma)$$

где  $I$  — амплитуда,  $\gamma$  — фазовый сдвиг. Величины  $I$  и  $\gamma$  зависят, кроме  $U$ , еще от характера сопротивлений в машине.

Пусть  $E$  — внутренняя электродвижущая сила, возбуждаемая вращением ротора. Имеем, очевидно,

$$E = - \frac{dN}{dt}$$

где  $N$  — магнитный поток. Величина магнитного потока  $N$  есть некоторая функция от угла поворота ротора  $\psi$ , зависящая от конструкции ротора и статора синхронной машины.

Во многих случаях можно положить с достаточным приближением:

$$N = - \Phi_{\max} \cdot \sin p\psi$$

где  $\Phi_{\max}$  — максимальное значение потока магнитной индукции,  $p$  — число пар полюсов,  $\psi$  — угол поворота ротора, отсчитываемый от положения, при котором  $N = 0$  (причем положительным считаем то направление, при котором  $\psi$  убывает).

Таким образом имеем следующее выражение для внутренней электродвижущей силы:

$$E = p \frac{d\psi}{dt} \Phi_{\max} \cos p\psi$$

и потому мощность, возбуждаемая вращением ротора в момент времени  $\gamma$ , будет:

$$Ei = p \frac{d\psi}{dt} \Phi_{\max} I \cos p\psi \cos (\omega t - \gamma)$$

Если это выражение положительно, — машина работает как генератор, получающий механическую мощность и преобразующий ее в электрическую  $Ei$ ; если же данное выражение отрицательно, — машина работает как мотор.

Пусть  $C$  будет механическим моментом, действующим на ротор и появляющимся благодаря отдаче или получению мощности  $Ei$ . Механическая мощность, создаваемая  $C$ , будет:

$$C \frac{d\psi}{dt}$$

С другой стороны, механическая мощность равна

$$-Ei$$

и потому:

$$C \frac{d\psi}{dt} = -p \frac{d\psi}{dt} \Phi_{\max} I \cos p\psi \cos (\omega t - \gamma)$$

откуда:

$$C = -p \Phi_{\max} I \cos p\psi \cos (\omega t - \gamma)$$

Кроме этого момента, на ротор действует еще момент сил инерции вращающихся масс:

$$-J \frac{d^2 \psi}{dt^2}$$

и некоторый постоянный момент  $D$  (момент нагрузки в случае двигателя, движущий момент турбины в случае генератора).

Таким образом уравнение движения ротора будет:

$$J \frac{d^2\psi}{dt^2} + p\Phi_{\max} I \cos(\omega t - \gamma) \cos p\psi = D \quad (5)$$

Полагая в этом уравнении:

$$\psi = \frac{\omega}{p} t + \varphi$$

получаем:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + p\Phi_{\max} I \cos(\omega t - \gamma) \cos(\omega t + p\varphi) = D \quad (6)$$

Следует заметить, что в нормальных условиях машина работает в синхронизме, т. е. что угловая скорость ротора весьма близка к  $\frac{\omega}{p}$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{p}$$

При этих условиях угол  $\varphi$  будет, следовательно, меняться весьма медленно по сравнению с  $\omega t$ , так что мы можем считать этот угол практически постоянным в течение времени порядка периода пульсации тока  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Чтобы использовать это замечание, разобьем момент

$$C = -p\Phi_{\max} I \cos(\omega t - \gamma) \cos(\omega t + p\varphi)$$

на две слагающих:

$$C = -\frac{p\Phi_{\max} I}{2} \cos(p\varphi + \gamma) - \frac{p\Phi_{\max} I}{2} \cos(2\omega t + p\varphi - \gamma)$$

Так как в течение периода  $\frac{2\pi}{\omega}$  угол  $\varphi$  практически является постоянным, то можно утверждать, что среднее значение второй слагающей момента  $C$  за указанный период равно нулю:

$$-\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{p\Phi_{\max} I}{2} \cos(2\omega t + p\varphi - \gamma) dt = 0$$

Благодаря инерции вращающихся масс и быстрой частоте  $2\omega$  пульсаций второй слагающей момента  $C$ , действие его практи-

чески уничтожается и дело происходит так, как если бы  $C$  состояло из одной первой слагающей. Эта первая слагающая равна, очевидно,

$$C_m = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} C dt$$

т. е. усредненному значению  $C$ .

Заменяя теперь в уравнении (6) выражение момента на его усредненное значение, получаем уравнение:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{p\Phi_{\max}l}{2} \cos(p\varphi + \gamma) = D \quad (7)$$

называемое уравнением качаний синхронной машины. Очевидно, уравнение это справедливо<sup>1)</sup> лишь в том случае, если машина функционирует вблизи точного синхронизма (  $p \frac{d\varphi}{dt}$  достаточно мало по сравнению с  $\omega$  ).

Пусть  $\varphi_0$  — положение равновесия угла  $\varphi$ . Тогда из (7) имеем:

$$\frac{p\Phi_{\max}l}{2} \cos(p\varphi_0 + \gamma) = D$$

Введем следующие обозначения:

$$p\varphi_0 + \gamma = -\delta, \quad p(\varphi - \varphi_0) = \theta, \quad \frac{p^2\Phi_{\max}l}{2J} = k^2$$

Уравнение качаний синхронной машины (7) может быть представлено в таком окончательном виде:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \{ \cos(\theta - \delta) - \cos \delta \} = 0 \quad (8)$$

4. В ранее рассмотренных случаях колебательных процессов не были приняты во внимание силы трения, вызывающие затухание собственных колебаний.

<sup>1)</sup> Ср. рассуждение, при помощи которого было выведено уравнение (7) с принципом усреднения, изложенным в § 2. С этой точки зрения уравнение (7) будет по отношению к (6) „уравнением первого приближения“.

Законы механического трения, вообще говоря, весьма слабо исследованы. На практике пользуются главным образом следующими тремя основными законами трения:

а) Сила трения пропорциональна скорости (при колебаниях в воздушной среде).

б) Сила трения пропорциональна квадрату скорости (при колебаниях в жидкой среде).

в) Кулоновское трение — сила трения постоянна по величине, не зависит от скорости и действует в направлении, противоположном скорости (напр., при трении сухих скользящих поверхностей).

Рассмотрим, например, маятник, свободно качающийся в воздухе, и допустим, что сила трения пропорциональна скорости. Тогда уравнение колебаний будет:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (9)$$

где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом затухания.

Рассмотрим еще тело массы  $m$ , колеблющееся на пружине (см. фиг. 7) и погруженное в жидкость. Допуская, что упругая сила пружины прямо пропорциональна  $x$  — перемещению тела — и что сила трения пропорциональна квадрату скорости, имеем:



Фиг. 7.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm a \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + kx = 0$$

где  $k$  — коэффициент упругости пружины; знак плюс надлежит брать при  $\frac{dx}{dt} > 0$ , знак минус — при  $\frac{dx}{dt} < 0$  (так как сила трения направлена против скорости тела).

Обозначая, как обычно, через  $|a|$  абсолютное значение некоторой алгебраической величины  $a$ , можем представить уравнение колебаний в виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (10)$$

Если теперь мы возьмем опять колебательную систему, схематически изображенную на фиг. 7, но предположим, что

вместо квадратичного трения жидкости действует кулоновское, получим такое уравнение:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm A + kx = 0$$

где знак плюс имеет место при  $\frac{dx}{dt} > 0$ , знак минус — при  $\frac{dx}{dt} < 0$ ,

$A$  — абсолютная величина силы трения.

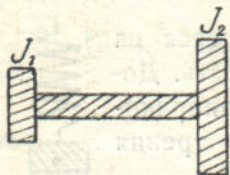
Введя функцию signum  $\alpha$  („знак  $\alpha$ “):

$$\text{sign } \alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0 \\ 0, & \text{если } \alpha = 0 \\ -1, & \text{если } \alpha < 0 \end{cases}$$

можем представить написанное уравнение в следующей форме:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + A \text{sign} \left( \frac{dx}{dt} \right) + kx = 0 \quad (11)$$

5. Возьмем электрический колебательный контур, содержащий железный сердечник, омическое сопротивление и емкость (см. фиг. 8). Пусть  $\Phi$  — поток магнитной индукции,  $i$  — сила тока в контуре,  $R$  — омическое сопротивление,  $C$  — емкость.



Фиг. 8.

Имеем:

$$\frac{d\Phi}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = 0$$

Как уже было принято ранее (см. п. 2):

$$i = A\Phi + B\Phi^3$$

а потому, дифференцируя, мы получим:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + R(A + 3B\Phi^2) \frac{d\Phi}{dt} + \frac{A\Phi + B\Phi^3}{C} = 0 \quad (12)$$

6. В ранее рассмотренных примерах мы имели дело с колебательными системами как при отсутствии, так и при наличии диссипативных сил (сил трения).

Так как в действительности диссипативные силы всегда в той или иной форме действуют в колебательной системе, то колебания не затухнут лишь если в системе имеется некоторый источник энергии, который может компенсировать расход энергии, причиненный диссипативными силами.

Это условие может быть выполнено двояким путем. Во-первых, сила, действующая на колеблющееся тело (благодаря ее связи с источником энергии), может обладать некоторой фиксированной периодичностью.

Простейшим примером колебаний такого рода, называемых вынужденными, могут служить вибрации обычной линейной системы, находящейся под воздействием моногармонического возбуждения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F \sin \alpha t \quad (13)$$

где  $m$  — масса,  $x$  — перемещение,  $\lambda$  — коэффициент затухания,  $k$  — коэффициент упругости,  $F$  — амплитуда внешней силы,  $\alpha$  — частота возбуждения.

Во-вторых, источник энергии сам по себе может не иметь никакой определенной периодичности, но его воздействие на колеблющееся тело как бы вносит в систему отрицательное затухание, могущее компенсировать обычное положительное затухание, вносимое диссипативными силами.

Колебания этого последнего типа, так называемые автоколебания, весьма распространены и имеют большое значение в физике и технике.

Чтобы составить себе некоторое представление о характере возбуждения автоколебаний, рассмотрим систему с одной степенью свободы.

Тогда, если колебания имеют весьма малую амплитуду, можем написать уравнение в обычном линейном виде:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Общее решение этого уравнения, как известно, будет:

$$x = ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

где  $a$  и  $\varphi$  — „произвольные“ постоянные,

$$\delta = \frac{\lambda}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2$$

Поэтому, если

$$\lambda > 0$$

то, очевидно амплитуда малых колебаний

$$ae^{-\lambda t}$$

будет затухать по экспоненциальному закону.

Если же, наоборот:

$$\lambda < 0$$

то малые колебания будут раскачиваться и их амплитуда по экспоненциальному закону будет возрастать.

Так как из физических соображений ясно, что амплитуда колебаний не может увеличиваться до бесконечности, то мы должны предположить, что, начиная с некоторого определенного момента, коэффициент затухания меняет знак и становится положительным.

Этот факт мы можем отразить в дифференциальном уравнении колебаний, например, заменивши постоянный коэффициент  $\lambda$  на переменный:

$$\lambda = -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$$

где  $A > 0$ ,  $B > 0$ .

В таком случае мы имеем уравнение следующего вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \left\{ -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (14)$$

из которого видим, между прочим, что затухание отрицательно для малых по абсолютной величине значений  $\frac{dx}{dt}$  и положительно — для больших.

Таким образом „малые“ колебания будут раскачиваться, а „большие“ затухать.

Отсюда интуитивно ясно существование не затухающих автоколебаний, к которым стремятся как большие, так и малые колебания.

Подробнее вопрос этот будет рассмотрен в следующих параграфах, пока же заметим лишь, что на важность уравнения (14) для построения математической теории автоколебаний указывал еще лорд Релей в своем сообщении „On Maintained Vibrations“ (Phil. Mag., S. 5, Vol. 15, № 94, April 1883).



Совершим теперь в уравнении (14) следующую замену переменных:

$$\tau = t \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad y = x \sqrt{\frac{3Bk}{Am}}$$

Тогда, очевидно, получим:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{A}{\sqrt{km}} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 \right\} \frac{dy}{d\tau} + y = 0$$

Продифференцировав это уравнение по  $\tau$  и положив:

$$\frac{A}{\sqrt{km}} = \varepsilon, \quad \frac{dy}{d\tau} = z$$

получим окончательно:

$$z'' - \varepsilon(1 - z^2)z' + z = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (15)$$

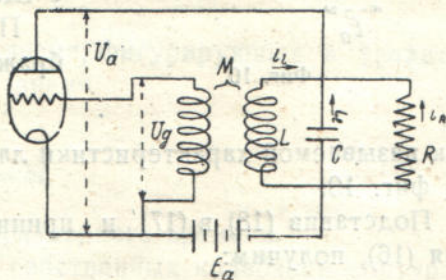
Уравнение автоколебаний, представленное в таком виде, называется уравнением ван-дер-Поля, как бывшее предметом весьма важных и интересных исследований голландского физика проф. Балтазара ван-дер-Поля, который показал значение этого уравнения для многих вопросов радиотехники.

7. После этих предварительных соображений остановимся на некоторых конкретных примерах автоколебательных систем.

Рассмотрим электронный генератор, схематически изображенный на фиг. 9.

Пусть  $i_L$ ,  $i_C$ ,  $i_R$  будут соответственно токи в самоиндукции  $L$ , емкости  $C$  и сопротивлении  $R$  колебательного контура.

Пусть  $E_a$  — постоянное напряжение (даваемое батареями или вообще источниками постоянного тока) в анодной цепи,  $V_a$  — полное напряжение на аноде электронной лампы,  $V_g$  — напряжение на сетке,  $i_a$  — анодный ток,  $M$  — коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром.



Фиг. 9.

Пренебрегая сеточным током, имеем, очевидно (см. схему фиг. 9):

$$L \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt = Ri_R = E_a - V_a$$

$$M \frac{di_L}{dt} = V_g \quad (16)$$

$$i_a = i_L + i_C + i_R$$

Из (16) получаем:

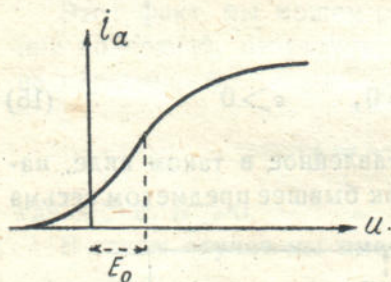
$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = i_a \quad (17)$$

Но, как известно из теории электронных ламп, анодный ток является определенной функцией так называемого управляющего напряжения  $u = V_g + DV_a$ :

$$i_a = f(u) = f(V_g + DV_a)$$

где  $D$  — постоянный фактор, называемый проницаемостью лампы. В обычных условиях численная величина  $D$  мала по сравнению с единицей.

Примерный вид кривой, изображающей зависимость



Фиг. 10.

$$i_a = f(u) \quad (18)$$

так называемой характеристики лампы, схематически изображен на фиг. 10.

Подставив (18) в (17) и принимая во внимание соотношения (16), получим:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = f\left( DE_a + [M - LD] \frac{di_L}{dt} \right) \quad (19)$$

Введем теперь в рассмотрение следующие величины:

$$E_0 = DE_a$$

$$V = (M - LD) \frac{di_L}{dt}$$

Так как управляющее напряжение равно

$$DE_a + (M - LD) \frac{di_L}{dt} = E_0 + V$$

то  $V$  будет, очевидно, переменной слагающей этого напряжения, возбуждаемой вибрациями тока в колебательном контуре, а  $E_0$  — постоянной слагающей, возбуждаемой источником постоянного тока (напр., батареями).

Заметив это, произведем над обеими частями равенства (19) операцию:

$$(M - LD) \frac{d}{dt}$$

Тогда для неизвестной  $V$  получим уравнение следующего вида:

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dV}{dt} + V = (M - LD) \frac{d}{dt} f(E_0 + V)$$

т. е.

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + V + \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (20)$$

Иногда в качестве независимой переменной удобно вводить так называемое безразмерное время, т. е. время, взятое в таких единицах, в которых частота собственных колебаний контура ( $LC$ ) равна единице (или в которых период этих колебаний равен  $2\pi$ ).

Пусть  $\tau$  будет „обычное“ время, фигурирующее в уравнении (20), а  $t$  — „безразмерное“ время.

Тогда, очевидно, получим:

$$\tau = kt$$

где  $k$  — величина единицы безразмерного времени.

Пусть, далее,  $\omega\tau$  — частота собственных колебаний контура, вычисленная для обычного времени, а  $1 = \omega t$  — та же частота для безразмерного.

Имеем:

$$\omega\tau = \frac{1}{k} \omega t$$

т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{k}$$

$$k = \sqrt{LC}$$

так что

$$\tau = t \sqrt{LC}$$

Совершив эту замену переменных в уравнении

$$LC \frac{d^2 V}{d\tau^2} + V + \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{d\tau} = 0$$

получим окончательное уравнение электронного генератора в безразмерной форме:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (21)$$

Покажем сейчас, что при известных допущениях уравнение (21) может быть приведено к виду уравнения ван-дер-Поля.

Предположим, например, что постоянная слагающая управляющего напряжения  $E_0$  выбрана таким образом, что она является абсциссой точки перегиба характеристики лампы

$$i_a = f(u)$$

т. е. так, чтобы

$$f''(E_0) = 0$$

Тогда для некоторого интервала значений  $V$  можем приближенно положить:

$$f(E_0 + V) = f(E_0) + V f'(E_0) + \frac{V^3}{6} f'''(E_0) \quad (22)$$

Допустим еще, что

$$(M - LD) f'''(E_0) < 0$$

$$(M - LD) f'(E_0) - \frac{L}{R} > 0 \quad (23)$$

Из (21) и (22) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - LD) f'(E_0) - \right. \\ \left. - \frac{V^2 (M - LD) f'''(E_0)}{2} \right\} \frac{dV}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$\frac{(M-LD)f'(E_0) - \frac{L}{R}}{\sqrt{LC}} = \varepsilon$$

$$\frac{-(M-LD)f''(E_0)}{2 \left\{ (M-LD)f'(E_0) - \frac{L}{R} \right\}} = \alpha^2, \quad \alpha V = x$$

и заметим, между прочим, что в силу условий (23)

$$\varepsilon > 0, \quad \alpha^2 > 0$$

так что  $\alpha$  вещественно.

В этих обозначениях уравнение (24) представится в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \varepsilon(1-x^2) \frac{dx}{dt} = 0$$

т. е. в виде уравнения ван-дер-Поля.

Если теперь мы подставим разложение (22) в уравнение (19), то получим:

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = f(E_0) + (M-LD) \frac{di_L}{dt} f'(E_0) +$$

$$+ \frac{1}{6} (M-LD) f'''(E_0) \left( \frac{di_L}{dt} \right)^3 \quad (25)$$

Положим:

$$i = i_L - f(E_0)$$

Тогда из уравнения (25) получаем для неизвестной  $i$  уравнение в форме Релея:

$$m \frac{d^2 i}{dt^2} + \left\{ -A + B \left( \frac{di}{dt} \right)^2 \right\} \frac{di}{dt} + ki = 0$$

в котором:

$$m = LC$$

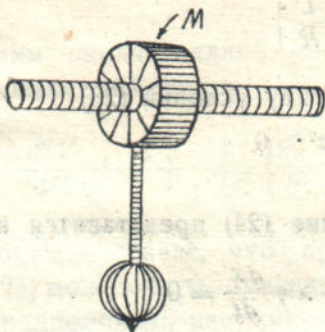
$$k = 1$$

$$A = f'(E_0) (M-LD) - \frac{L}{R}$$

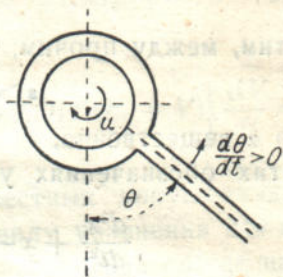
$$B = -\frac{1}{6} (M-LD)^3 f'''(E_0)$$

8. В качестве следующего примера автоколебательной системы рассмотрим маятник Фроуда.

Устройство этого маятника схематически представлено на фиг. 11: на вал  $O$ , вращающийся с равномерной скоростью, надета с известным трением муфта  $M$ ; самый маятник жестко связан с муфтой. Обозначим через  $\theta$  угол отклонения (оси)



Фиг. 11.



Фиг. 12.

маятника от вертикали,  $u$  — угловую скорость вращения вала,  $J$  — момент инерции маятника,  $\lambda \frac{d\theta}{dt}$  — момент сил трения маятника о воздух, пропорциональный угловой скорости  $\frac{d\theta}{dt}$  колебаний маятника.

Кроме момента сил трения маятника о воздух, необходимо еще учесть момент сил трения между муфтой и валом.

Если для простоты, идеализируя явление, мы пренебрежем зависимостью этого момента от положения маятника, т. е. от угла  $\theta$ , то этот момент  $\mathfrak{M}$  будет определенной функцией от относительной угловой скорости  $v$  (маятника относительно вала):

$$\mathfrak{M} = F(v)$$

В рассматриваемом случае (см. фиг. 12) имеем очевидно:

$$v = u + \frac{d\theta}{dt}$$

и потому уравнение колебаний маятника Фроуда (собственно говоря, уравнение „идеализированного“ маятника Фроуда, может быть представлено в такой форме:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) + mga \sin \theta = 0 \quad (26)$$

где  $m$  — масса маятника,  $a$  — расстояние от центра тяжести маятника до центра оси вала,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Характеристика трения между муфтой и валом

$$\mathfrak{M} = F(v)$$

имеет, вообще, падающие участки (см., напр., [фиг. 13], на которых

$$F'(v) < 0$$

Если мы выберем скорость  $u$  так, чтобы  $u$  была абсциссой точки перегиба падающего участка:

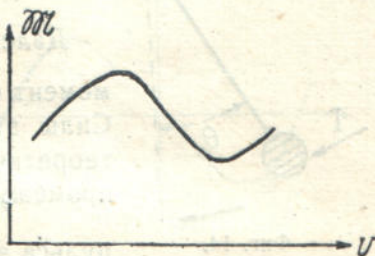
$$F''(u) = 0$$

причем допустим еще, что

$$F'(u) + \lambda < 0$$

$$F'''(u) > 0$$

то для  $\frac{d\theta}{dt}$ , лежащего в известных пределах, можем положить:



Фиг. 13.

$$F\left(u + \frac{d\theta}{dt}\right) = F(u) + F'(u) \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{6} F'''(u) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3$$

Если мы будем рассматривать случай малых отклонений, когда приближенно

$$\sin \theta \cong \theta$$

то уравнение (26) вышеизложенным способом (см. п. 7) можно было бы привести к уравнению Релея или к уравнению вандер-Поля.

### 9. Рассмотрим обычный часовой маятник.

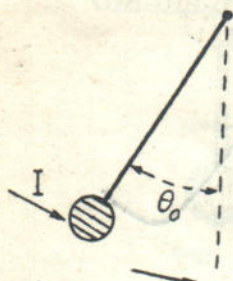
Как известно, в этом случае компенсация затухания происходит за счет импульсов, воздействующих на маятник в определенные моменты времени и посылаемых часовой пружиной при помощи особого механизма, называемого спускателем.

Схематически представим себе этот род возбуждения колебаний следующим образом: при проходе маятника через некоторый угол  $\theta_0$  в положительном направлении (см. фиг. 14) на маятник воздействует постоянный слабый ударный импульс  $I$ , приложенный по направлению движения.

Уравнение колебаний мы можем написать поэтому, например, следующим образом:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + k\theta = F\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) \quad (27)$$

где  $J$  — момент инерции,  $\lambda \frac{d\theta}{dt}$  — момент сил трения,  $k\theta$  — момент восстанавливающих сил (стремящихся возвратить маятник в положение равновесия). Этот последний момент мы принимаем пропорциональным углу  $\theta$ , допуская, что амплитуда колебаний достаточно мала.



Фиг. 14.

Далее в уравнении (27)  $F\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$  есть момент сил, действующих во время удара. Силы эти действуют лишь весьма малый, теоретически бесконечно малый ( $t' - 0, t' + 0$ ), промежуток времени. Пусть  $I$  — момент импульса этих сил, т. е. интеграл от  $F\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$ ,

взятый за этот промежуток времени:

$$I = \int_{t'-0}^{t'+0} F\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right) dt \quad (28)$$

Здесь  $t'$  — момент времени, в который маятник испытывает удар. Согласно нашему условию:

$$\theta(t') = \theta_0, \quad \theta'(t') > 0$$

Кроме того для  $\theta \neq \theta_0$ , а также и для  $\theta = \theta_0$ , но при  $\theta > 0$ , удара нет, и потому:

$$\begin{aligned} F(\theta, \theta') &= 0, \quad \text{при } \theta \neq \theta_0 \\ F(\theta, \theta') &= 0, \quad \text{при } \theta = \theta_0, \quad \theta' < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Так как

$$dt = \frac{d\theta}{\theta'}, \quad \theta'(t') > 0$$

то соотношение (28) дает:

$$\int_{\theta_0-0}^{\theta_0+0} F(\theta, \theta') \frac{1}{\theta'} d\theta = I, \quad \text{при } \theta' > 0 \quad (30)$$



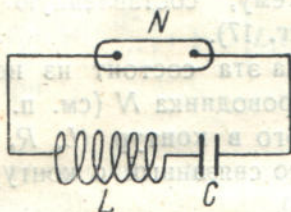
Введем теперь в рассмотрение так называемую „несобственную функцию“  $\delta(x)$ , а именно:

$$\delta(x) = 0, \quad \text{при } x \neq 0$$

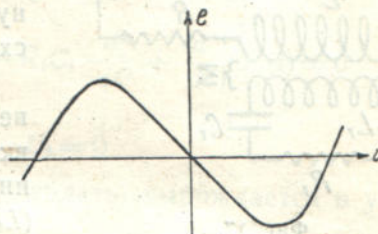
$$\int_{-0}^{+0} \delta(x) dx = 1$$

Мы видим, что условиям (29), (30) мы удовлетворим, положив:

$$F(\theta, \theta') = I \frac{\theta' + |\theta'|}{2} \delta(\theta - \theta_0)$$



Фиг. 15.



Фиг. 16.

Подставляя это выражение в уравнение (27) окончательно имеем:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{d\theta}{dt} - I \frac{d\theta}{dt} + \frac{|\frac{d\theta}{dt}|}{2} \delta(\theta - \theta_0) \right\} + k\theta = 0 \quad (31)$$

10. Во многих случаях электрические автоколебательные системы могут быть приведены к схеме фиг. 15, в которой  $N$  есть некоторый проводник с нелинейной зависимостью между напряжением и током или, как говорят, с нелинейной характеристикой напряжение — ток:

$$[e = F(i) \quad (32)$$

Из схемы фиг. 15 имеем уравнение:

$$e = -L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int idt$$

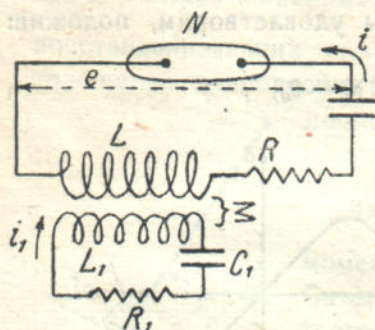
и потому:

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + CF'(i) \frac{di}{dt} + i = 0 \quad (33)$$

Если характеристика (32) имеет падающий характер вблизи  $i=0$ , т. е.  $F'(0) < 0$ , например, как на фиг. 16, то при малых  $i$

орган  $N$  будет действовать как отрицательное затухание<sup>1)</sup> и, таким образом, рассматриваемая в этом случае система является автоколебательной.

11. До сих пор мы выводили уравнения для колебательных систем с одной степенью свободы.



Фиг. 17.

Перейдем теперь к более сложным системам с несколькими степенями свободы.

Возьмем, например, колебательную систему, составленную по схеме (фиг. 17).

Система эта состоит из нелинейного проводника  $N$  (см. п. 10), включенного в контур  $(L, R, C)$ , индуктивно связанный с контуром  $(L_1, R_1, C_1)$ .

Пусть  $e$  — напряжение между концами проводника  $N$ ;  $i$  — ток в первом контуре;  $i_1$  — то же во втором;  $M$  — коэффициент взаимной индукции.

Тогда, очевидно, имеем:

$$e = F(i)$$

$$e = -L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{1}{C} \int i dt + M \frac{di_1}{dt}$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = M \frac{di}{dt}$$

откуда:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + C \{ R + F'(i) \} \frac{di}{dt} + i = CM \frac{d^2 i_1}{dt^2}$$

$$L_1 C_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 = C_1 M \frac{d^2 i}{dt^2}$$

<sup>1)</sup> Так как для колебаний с достаточно малой амплитудой  $F'(i) \cong F'(0)$ , и уравнение (33) можно, очевидно, заменить на обычное линейное уравнение:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + CF'(0) \frac{di}{dt} + i = 0$$

с отрицательным коэффициентом затухания.

и потому:

$$\left\{ L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1 \right\} \left\{ LC \frac{d^2 i}{dt^2} + [R + F'(i)] C \frac{di}{dt} + i \right\} = \\ = C_1 C M^2 \frac{d^4 i}{dt^4}$$

что после упрощений дает:

$$\left\{ \left( L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1 \right) \left( LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) - \right. \\ \left. - C_1 C M^2 \frac{d^4}{dt^4} \right\} i + C \left\{ L_1 C_1 \frac{d^3}{dt^3} + R_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right\} F(i) = 0 \quad (34)$$

При

$$L_1 = R_1 = C_1 = 0$$

это уравнение, как и следовало ожидать, вырождается в уравнение (33).

12. Перейдем теперь к системам находящимся под воздействием внешнего периодического возбуждения.

Весьма интересным как с теоретической, так и с практической стороны является вопрос об исследовании влияния периодического возбуждения на автоколебательную систему.

Рассмотрим, например, автоколебательную систему, описываемую уравнением ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

и приложим к этой системе некоторое внешнее гармоническое возбуждение.

Обозначая амплитуду этого возбуждения через  $E$ , а частоту — через  $\alpha$ , мы приходим к уравнению вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \varepsilon (1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = E \sin \alpha t \quad (35)$$

Важная в акустике проблема образования комбинационных тонов приводит к исследованию механической колебательной системы, с несимметрической упругой силой вида

$$kx + \partial x^2$$

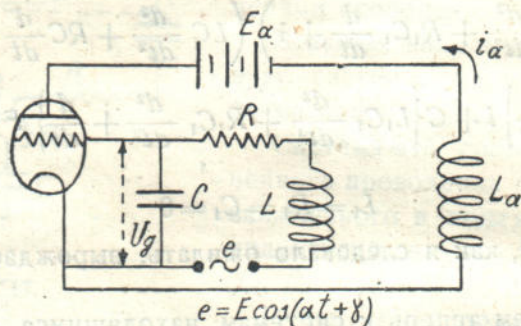
находящейся под воздействием возбуждения

$$F = E_1 \sin \alpha_1 t + E_2 \sin (\alpha_2 t + \gamma)$$

Пусть  $m$  — масса колеблющегося тела,  $\lambda$  — коэффициент затухания (которое предполагается линейным и которое здесь весьма мало).

Тогда получаем следующее уравнение колебаний:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx + \delta \lambda^2 = E_1 \sin \alpha_1 t + E_2 \sin (\alpha_2 t + \gamma) \quad (36)$$



Фиг. 18.

13. Рассмотрим теперь регенеративный приемник, схематически изображенный на фиг. 18, электронная лампа которого обладает весьма малой проницаемостью:

$$D \cong 0$$

Так как управляющее напряжение  $u$ , определяющее анодный ток, согласно формуле

$$i_a = f(u)$$

мы можем представить в виде

$$u = E_0 + V_g + DV_a$$

где  $E_0$  — постоянная слагающая управляющего напряжения, а  $V_g$  и  $V_a$  — соответственно переменные слагающие сеточного и анодного напряжений, — то благодаря малости  $D$  можем приближенно положить

$$u = E_0 + V_g$$

так что

$$i_a = f(E_0 + V_g)$$

Но, с другой стороны (см. фиг. 18), мы имеем:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt - M \frac{di_a}{dt} = E \cos (\alpha t + \gamma)$$

$$V_g = \frac{1}{C} \int i dt$$

откуда:

$$LC \frac{d^2 V_g}{dt^2} + RC \frac{dV_g}{dt} + V_g = M \frac{di_a}{dt} + E \cos(\alpha t + \gamma)$$

и потому

$$LC \frac{d^2 V_g}{dt^2} + RC \frac{dV_g}{dt} + V_g = Mf'(E_0 + V_g) \frac{dV_g}{dt} + E \cos(\alpha t + \gamma) \quad (37)$$

Рассмотрим уравнение:

$$LC \frac{d^2 V_0}{dt^2} + RC \frac{dV_0}{dt} + V_0 = E \cos(\alpha t + \gamma) \quad (38)$$

Как видно,  $V_0$  является слагающей напряжения  $V_g$ , не зависящей от реакции лампы [ведь уравнение (38) получается из (33), если положить  $f=0$ ].

Уравнению (38) удовлетворим, положив

$$V_0 = F \cos(\alpha t + \xi)$$

где  $F$  и  $\xi$  определяются из соотношений:

$$(1 - LC\alpha^2) F \cos \xi - RC\alpha F \sin \xi = E \cos \gamma$$

$$(1 - LC\alpha^2) F \sin \xi + RC\alpha F \cos \xi = E \sin \gamma$$

Так как фазовый сдвиг  $\xi$  не имеет значения и может быть уничтожен соответствующим выбором начала отсчета времени

(стоит лишь, напр., вместо  $t$  взять  $t - \frac{\xi}{\alpha}$ ), то мы напишем просто:

$$V_0 = F \cos \alpha t$$

Введем новую неизвестную:

$$e = V_g - V_0 = V_g - F \cos \alpha t$$

Тогда из (37) и (38) окончательно получим:

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + e + \left\{ RC \frac{de}{dt} - M \frac{d}{dt} f(E_0 + F \cos \alpha t + e) \right\} = 0 \quad (39)$$

14. Возьмем электрический колебательный контур (фиг. 19), содержащий обычную самоиндукцию  $L$ , сопротивление  $R$ , железный сердечник и переменную емкость

$$C = C_0 (1 + \rho \sin \alpha t)$$

Пусть кривая

$$\Phi = \Phi(i)$$

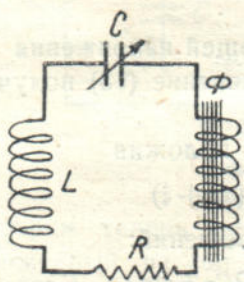
дает зависимость потока магнитной индукции через сердечник, от силы тока.

Тогда полный поток магнитной индукции в контуре будет:

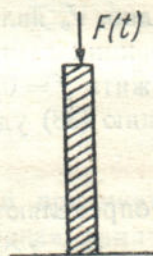
$$Li + \Phi(i)$$

и таким образом мы будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d[Li + \Phi(i)]}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = 0$$



Фиг. 19.



Фиг. 20.

или, введя в качестве неизвестной заряд на обкладках конденсатора:

$$q = \int idt$$

получим:

$$\left\{ L + \Phi' \left( \frac{dq}{dt} \right) \right\} \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C_0(1 + \rho \sin \alpha t)} = 0$$

откуда окончательно:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{L + \Phi' \left( \frac{dq}{dt} \right)} \left\{ R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0(1 + \rho \sin \alpha t)} q \right\} = 0 \quad (40)$$

Возьмем стержень длины  $l$  (см. фиг. 20), на конец которого действует периодическая осевая сила  $F(t)$ .

Пусть  $EJ$  — жесткость стержня,  $\gamma$  — вес единицы объема,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $A$  — площадь поперечного сечения.

Тогда, как известно из теории упругости, уравнение поперечных колебаний будет:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + F(t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (41)$$

16. Во многих практически важных случаях имеет значение вопрос об исследовании колебания тела (см. фиг. 21) некоторой массы  $m$ , находящегося под воздействием обычной „линейной“ пружины, нелинейного трения и гармонического возбуждения

$$F = E \sin \alpha t$$

Для такой системы можем написать дифференциальное уравнение колебательного процесса в виде:



Фиг. 21.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \left( \frac{dx}{dt} \right) + kx = E \sin \alpha t \quad (42)$$

где  $x$  — перемещение,  $f \left( \frac{dx}{dt} \right)$  — сила трения, выраженная как функция скорости,  $k$  — коэффициент пружинности.

17. Рассмотрим еще крутильные колебания вала, состоящего из двух масс, соединенных при помощи нелинейной упругой связи (см. п. 1, фиг. 2), на одну из которых действует синусоидальный крутящий момент

$$F = N \sin \alpha t$$

Пусть этот крутящий момент приложен к массе с моментом инерции  $J_1$ .

Тогда очевидно, имеем следующие уравнения:

$$J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} + c(\theta_1 - \theta_2) = N \sin \alpha t$$

$$J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - c(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

откуда для угла скручивания

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

получаем:

$$J_1 J_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) = J_2 N \sin \alpha t \quad (43)$$

При крутильных колебаниях вала силы трения обычно весьма малы, кроме того их законы изучены весьма слабо. Если, однако, мы все же пожелаем, хотя бы качественно, оценить влияние трения на крутильные колебания, то в уравнение (43)

следует добавить член, являющийся некоторой функцией  $\frac{d\theta}{dt}$ .

Уравнение (43) примет тогда следующий вид:

$$J_1 J_2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (J_1 + J_2) c(\theta) + f \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = J_2 N \sin \alpha t \quad (44)$$

## § 2. Элементарная теория первого приближения

Как мы уже видели в предыдущем параграфе, для многих практически важных колебательных систем, например для случая колебаний маятника, крутильных колебаний вала, качания синхронной машины, электронного генератора и т. д., дифференциальное уравнение собственных колебаний может быть представлено в таком виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + F \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad (45)$$

Мы будем рассматривать случай, когда форма колебания близка к синусоидальной:

$$x \cong a \sin(\nu t + \varphi)$$

т. е. когда функция  $F \left( x, \frac{dx}{dt} \right)$  достаточно близка к выражению вида  $\nu^2 x$ , где  $\nu$  — некоторая постоянная величина.

Это условие выполняется, например, для колебаний маятника при небольших углах отклонения.

В самом деле, в соответствующем дифференциальном уравнении

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

при углах  $\theta$ , колеблющихся между  $-30^\circ$ , и  $+30^\circ$ , относительное



отклонение функции  $\frac{g}{l} \sin \theta$  от  $v^2 \theta$  (где  $v = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ) не превышает 0,04.

Возьмем теперь уравнение электронного генератора:

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) f(E_0 + v) \right\} \frac{dV}{dt} = 0$$

и заметим, что при обычном устройстве генератора безразмерное выражение

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) f(E_0 + V) \right\}$$

будет величиной порядка 0,01, так что формулированное выше условие можно считать выполненным.

Равным образом это условие выполняется для крутильных колебаний вала (если зависимость  $M = c(\theta)$  между упругим моментом и углом скручивания в пределах колебания близка к линейной) для уравнения ван-дер-Поля при малых значениях параметра  $\epsilon$ , для качаний синхронных машин при небольших отклонениях и т. д.

Так как для колебательных систем, для которых выражение  $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  достаточно близко к  $v^2 x$ , дифференциальное уравнение (45) мало отличается от обычного линейного уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x = 0 \quad (46)$$

то такие системы мы можем назвать квазигармоническими. Как мы уже видели, квазигармонические колебательные системы весьма распространены и имеют большое практическое значение. Чтобы более оттенить условие квазигармоничности в самом уравнении (45), положим:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = v^2 x + \epsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (47)$$

где  $\epsilon$  — некоторый малый параметр, характеризующий малость отклонения  $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  от  $v^2 x$ .

Подставив формулу (47) в уравнение (45), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (48)$$

Это уравнение и будет предметом нашего рассмотрения в настоящем параграфе.

В виду того, что оно содержит малый параметр  $\varepsilon$ , естественно является мысль разложить решение  $x$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ .

Обычный способ, который был применен еще Пуассоном в его механике и в исследованиях о колебаниях маятника, сводится к следующему.

Пусть требуется производить вычисления с точностью до величин порядка  $\varepsilon^{k+1}$ . Тогда полагают:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^k x_k \quad (49)$$

подставляют это выражение в левую часть уравнения (48) и разлагают результат подстановки по степеням  $\varepsilon$ , отбрасывая при этом члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени выше  $k$ -ой. Затем группируют члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  и приравнивают нулю коэффициенты при каждой степени параметра.

Таким образом получают систему уравнений вида:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + v^2x_0 = 0$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + v^2x_1 = -f\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) \quad (50)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + v^2x_2 = -\left\{f'_x\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)x_1 + f'_{x'}\left(x_0, \frac{dx_0}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt}\right\}$$

Легко убедиться, однако, что применение изложенного способа в рассматриваемом случае наталкивается на существенное затруднение.

Возьмем, например, простейшее уравнение линейной слабо-затухающей колебательной системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x + \varepsilon v \frac{dx}{dt} = 0, \quad \varepsilon v > 0 \quad (51)$$

и получим по этому способу приближенное выражение для  $x$  с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Имеем:

$$x_0 = x_0 + \varepsilon x_1 \quad (52)$$

причем

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \nu^2 x_0 = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \nu^2 x_1 = -\nu \frac{dx_0}{dt} \quad (54)$$

Решив уравнение (53), получаем:

$$x_0 = A \sin(\nu t + \theta) \quad (55)$$

где  $A$  и  $\theta$  — произвольные постоянные. Подставив найденное выражение (55) в правую часть уравнения (54), имеем:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \nu^2 x_1 = -\nu^2 A \cos(\nu t + \theta)$$

Этому уравнению удовлетворим, положив:

$$x_1 = -\frac{\nu A t}{2} \sin(\nu t + \theta) \quad (56)$$

Подставив найденные значения (55), (56) в формулу (52), мы и получим искомое приближенное решение в следующем виде:

$$x = A \left( 1 - \frac{\varepsilon \nu t}{2} \right) \sin(\nu t + \theta) \quad (57)$$

Благодаря присутствию в этом выражении члена

$$\frac{A \varepsilon \nu t}{2} \sin(\nu t + \theta)$$

в котором время стоит вне знака синуса, мы видим, что амплитуда колебания (57) при неограниченном возрастании стремится к бесконечности.

Это свойство приближенного решения (57) находится, очевидно, в полном несоответствии с характером точного решения, имеющего, как известно, следующий вид:

$$x = A e^{-\frac{\varepsilon \nu t}{2}} \sin \left( \nu t \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} + \theta \right) \quad (58)$$

где  $A$  и  $\theta$  — произвольные постоянные.

Как это ясно из формулы (58), амплитуда действительных колебаний монотонно убывает по экспоненциальному закону, и при неограниченном возрастании  $t$  стремится к нулю.

Возьмем еще в качестве второго примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x(1 + \varepsilon x^2) = 0 \quad (59)$$

которое может быть интерпретировано как уравнение незатухающих колебаний некоторого тела единичной массы, притягиваемого к положению равновесия основной восстанавливающей силой  $v^2x$ , пропорциональной отклонению, и дополнительной восстанавливающей силой, пропорциональной третьей степени отклонения.

Образум для этого уравнения, по ранее изложенному методу Пуассона, приближенное решение с точностью до  $\varepsilon^2$ .

Имеем

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 \quad (60)$$

где:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + v^2x_0 = 0 \quad (61)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + v^2x_1 = -v^2x_0^3 \quad (62)$$

Решив уравнение (61):

$$x_0 = A \sin(vt + \theta) \quad (63)$$

и подставив найденное выражение в правую часть уравнения (62), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + v^2x_1 &= -v^2A^3 \sin^3(vt + \theta) = \\ &= -\frac{3}{4}v^2A^3 \sin(vt + \theta) + \frac{1}{4}v^2A^3 \sin 3(vt + \theta) \end{aligned}$$

Этому же последнему уравнению, очевидно, удовлетворим, положив:

$$x_1 = \frac{3}{8}vtA^3 \cos(vt + \theta) - \frac{A^3}{32} \sin 3(vt + \theta) \quad (64)$$

Подставив (63) и (64) в формулу (60), окончательно имеем следующее выражение для искомого приближенного решения уравнения (59):

$$x = A \sin(vt + \theta) + \frac{3\varepsilon}{8}vtA^3 \cos(vt + \theta) - \frac{A^3\varepsilon}{32} \sin 3(vt + \theta) \quad (65)$$

В полученном приближенном решении опять фигурирует член, в котором время стоит за знаком тригонометрического выражения, и потому мы видим, что колебания, представляемые формулой (65), должны раскачиваться и амплитуда их при неограниченном возрастании  $t$  должна приближаться к бесконечности. Тут мы опять имеем полное несоответствие с характером точного решения.

В самом деле, помножим обе части уравнения (59) на  $\frac{dx}{dt}$ . Получим:

$$\frac{d\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}v^2x^2 + \frac{\varepsilon v^2}{4}x^4\right\}}{dt} = \frac{dx}{dt} \left\{\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x(1 + \varepsilon x^2)\right\} = 0$$

откуда имеем так называемый интеграл живых сил

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}v^2x^2 + \frac{\varepsilon v^2}{4}x^4 = E = \text{const} \quad (66)$$

выражающий закон сохранения энергии.

Из (66) мы видим, что когда  $\varepsilon$  имеет положительное значение,  $x^2$  не может быть больше, чем  $\frac{2E}{v^2}$ , и, следовательно, амплитуда колебания не может неограниченно увеличиваться. Это, впрочем, ясно и из чисто физических соображений, поскольку в рассматриваемой колебательной системе не содержится никакого источника энергии, который бы мог сообщать колеблющемуся телу дополнительную энергию для постепенного раскачивания колебаний.

Итак, на рассмотрении двух простых примеров мы убедились, что вышеизложенный способ получения приближенных решений представляет то существенное затруднение, что в получаемых разложениях появляются члены, содержащие время  $t$  вне знака синуса или косинуса. При возрастании  $t$  эти члены, называемые в небесной механике вековыми или секулярными, неограниченно возрастают и тем самым искажают характер изучаемого колебания.

С аналогичным затруднением встретились математики XVIII столетия, как только, изучая движения светил нашей солнечной системы, они начали применять методы разложений по степеням малого параметра к решению вопросов небесной механики.

Поэтому, еще начиная с того времени, стали появляться работы, трактующие вопросы построения приближенных решений, свободных от секулярных членов, и в настоящее время существует очень много различных способов для достижения этой цели.

В настоящем параграфе мы изложим применительно к изучаемому уравнению (48) один простой метод, имеющий совершенно интуитивный характер, при помощи которого мы сможем построить приближенное решение в форме, не искаженной присутствием секулярных членов.

Заметим прежде всего, что при  $\varepsilon = 0$  уравнение (48) допускает такое решение:

$$x = \sin(vt + \varphi) \quad (67)$$

$$\frac{dx}{dt} = av \cos(vt + \varphi) \quad (68)$$

в котором амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  колебания являются постоянными по времени величинами.

Нетрудно убедиться, однако, что формулы (67) и (68) могут быть удержаны и в интересующем нас случае  $\varepsilon \neq 0$  при условии, что величины  $a$  и  $\varphi$  мы будем рассматривать не как постоянные, а как некоторые функции времени.

В самом деле, стоит лишь положить в этих формулах:

$$a = \sqrt{x^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}$$

$$\varphi = \arctg \left( \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right) - vt$$

чтобы они обратились в тождества, ибо тогда:

$$a \sin(vt + \varphi) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \sin \left[ \arctg \left[ \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right] \right] =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{1}{v^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} \left\{ \frac{\left[ \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right]}{\sqrt{1 + \left[ \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right]^2}} \right\} \equiv x$$

$$\begin{aligned}
 a v \cos(vt + \varphi) &= v \sqrt{x^2 + \frac{1}{v^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \cos \left\{ \arctg \left[ \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right] \right\} = \\
 &= \sqrt{v^2 x^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{vx}{\frac{dx}{dt}} \right]^2}} \right\} \equiv \frac{dx}{dt}
 \end{aligned}$$

Будем рассматривать  $a$  и  $\varphi$  — амплитуду и фазу колебания — как новые неизвестные функции времени, определив которые, мы с помощью (67) сможем найти искомое выражение для первоначальной неизвестной  $x$ .

Чтобы составить дифференциальные уравнения для  $a$  и  $\varphi$ , продифференцируем обе части формулы (67). Получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \sin(vt + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(vt + \varphi) + av \cos(vt + \varphi) \quad (69)$$

откуда, принимая во внимание соотношение (68), имеем уравнение:

$$\frac{da}{dt} \sin(vt + \varphi) + a \frac{d\varphi}{dt} \cos(vt + \varphi) = 0 \quad (70)$$

Продифференцируем теперь обе части формулы (68).

Получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{da}{dt} v \cos(vt + \varphi) - v a \frac{d\varphi}{dt} \sin(vt + \varphi) - v^2 a \sin(vt + \varphi) \quad (71)$$

Подставив в уравнение (48) вместо  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$  соответственно их значения, взятые из формул (67), (68) и (69), убеждаемся что

$$\begin{aligned}
 v \frac{da}{dt} \cos(vt + \varphi) - va \frac{d\varphi}{dt} \sin(vt + \varphi) &= \\
 &= -\varepsilon f \{ a \sin(vt + \varphi), a v \cos(vt + \varphi) \}
 \end{aligned} \quad (72)$$

Помножая обе части уравнения (70) на  $\sin(vt + \varphi)$ , а обе части уравнения (72) — на  $\frac{1}{v} \cos(vt + \varphi)$ , и складывая, получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{v} f \{ a \sin(vt + \varphi), a v \cos(vt + \varphi) \} \cos(vt + \varphi) \quad (73)$$

Пмножая затем (70) на  $\frac{1}{a} \cos(vt + \varphi)$ , а (72) — на  $\frac{1}{av} \sin(vt + \varphi)$ , и вычитая, имеем также:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{av} f \{ a \sin(vt + \varphi), av \cos(vt + \varphi) \} \sin(vt + \varphi) \quad (74)$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения второго порядка (48) относительно переменной  $x$  мы получили два дифференциальных уравнения (73) и (74) первого порядка относительно переменных  $a$  и  $\varphi$ .

Заметим прежде всего, что правые части (73) и (74) обладают по отношению к независимой переменной  $t$  периодом, равным  $T = \frac{2\pi}{v}$ , а кроме того  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$  пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$ , так что  $a$  и  $\varphi$  будут медленно изменяющимися функциями времени. В течение периода времени порядка  $T$  в первом приближении мы можем, следовательно, рассматривать  $a$  и  $\varphi$  как постоянные.

Исходя из этого очевидного замечания, укажем сейчас простой интуитивный способ для построения приближённого решения уравнений (73) и (74). Для этого рассмотрим функции

$$f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \cos \varphi$$

$$f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \sin \varphi$$

и разложим их в ряд Фурье.

Имеем:

$$f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \cos \varphi = K_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ K_n(a) \cos n\varphi + L_n(a) \sin n\varphi \} \quad (75)$$

$$f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \sin \varphi = P_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ P_n(a) \cos n\varphi + Q_n(a) \sin n\varphi \}$$

где

$$K_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

(76)

$$P_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, av \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$



$$\begin{aligned}
 K_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \cos \varphi \cos n\varphi d\varphi \\
 L_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \cos \varphi \sin n\varphi d\varphi \\
 P_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \sin \varphi \cos n\varphi d\varphi \\
 Q_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \sin \varphi \sin n\varphi d\varphi
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Воспользовавшись разложениями (75), можем представить уравнения (73) и (74) в следующем развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a) - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \{ K_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + \\
 + L_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) \}
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu a} \sum_{n=1}^{\infty} \{ P_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + \\
 + Q_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) \}
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части этих уравнений в пределах от  $t$  до  $t + T$ , где  $T = \frac{2\pi}{\nu}$ , причем при интеграции в правых частях будем считать  $a$  и  $\varphi$  постоянными<sup>1)</sup> в промежутке  $(t, t + T)$ , равными соответственно:  $a(t)$  и  $\varphi(t)$ .

<sup>1)</sup> Заметим, что так как  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$  — величины первого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ , то отклонения  $a$  и  $\varphi$  в интервале  $(t, t + T)$  от постоянных значений также будут величинами первого порядка малости. Поскольку, однако, правые части уравнений (78) пропорциональны  $\varepsilon$ , то, считая в них  $a$  и  $\varphi$  постоянными в рассматриваемом интервале времени, мы совершаем ошибку лишь второго порядка малости.

Выполнив интеграцию, получим приближенно:

$$\frac{a(t+T) - a(t)}{T} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0 \{ a(t) \}$$

$$\frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0 \{ a(t) \} \quad (79)$$

так как при постоянном  $\varphi$ :

$$\int_t^{t+T} \cos n(\nu t + \varphi) dt = \int_t^{t+T} \sin n(\nu t + \varphi) dt = 0$$

В виду того, что приращения  $\Delta a = a(t+T) - a(t)$  и  $\Delta \varphi = \varphi(t+T) - \varphi(t)$  малы, заменяем в формулах (79)  $\Delta a$  и  $\Delta \varphi$  на  $da$  и  $d\varphi$ , а  $T$  — соответственно на  $dt$ .

Таким образом мы получим уравнения первого приближения в следующей форме:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a) \quad (80)$$

Сравнивая эти уравнения с точными уравнениями (78), мы видим, что уравнения первого приближения получаются из точных путем усреднения правых частей точных уравнений по времени.

Обобщая только что изложенное рассуждение, мы могли бы прийти к такому общему правилу получения первых приближений, которое можно было бы назвать принципом усреднения.

Пусть будет дана система уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n); \quad k = 1, \dots, n$$

где  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр, а  $X_k(t, x_1, \dots, x_n)$  — некоторые периодические функции  $t$  с периодом  $T$ .

Тогда уравнения первого приближения будут:

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon \bar{X}_k(x_1, \dots, x_n); \quad k = 1, \dots, n$$

где

$$\bar{X}_k(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \int_0^T X_k(t, x_1, \dots, x_n) dt$$

Разумеется, вышеизложенные соображения не могут претендовать на какую бы то ни было математическую строгость, и потому в следующих параграфах будут рассмотрены вопросы о математическом обосновании принципа усреднения, а также и вопросы образования высших приближений.

Возвратимся теперь к уравнениям (80). Решив их каким-либо образом и подставив найденные значения для  $a$  и  $\varphi$  в формулу (67), мы получим приближенное выражение для  $x$ . Если в качестве неизвестной мы вместо фазы  $\varphi$  возьмем полную фазу колебания  $\psi = \nu t + \varphi$ , то из (80) получим:

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \frac{\varepsilon}{a\nu} P_0(a) \quad (81)$$

Подставляя в (80) и (81) вместо  $K_0$  и  $P_0$  их значения из формул (76), имеем в развернутом виде:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (82)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (83)$$

Итак, первое приближение для искомого решения уравнения (48) будет:

$$x = a \sin \psi \quad (84)$$

где амплитуда  $a$  и полная фаза  $\psi$  должны быть определены из уравнений (82), (83).

Рассмотрим сейчас частный случай, когда в уравнении (45) функция  $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  не зависит от  $\frac{dx}{dt}$ :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F(x) \quad (85)$$

В этом случае  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  в виду (47), разумеется, также не зависит от  $\frac{dx}{dt}$ :

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \quad (86)$$

и мы можем написать:

$$F(x) = \nu^2 x + \varepsilon f(x) \quad (87)$$

Уравнения (82), (83) в этом случае дадут:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (88)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a) \quad (89)$$

где

$$\omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (90)$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x) dx$$

Имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi(a \sin \varphi)}{d\varphi} d\varphi = \frac{1}{a} \Phi(a \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

и потому уравнение (88) принимает вид:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

откуда следует, что амплитуда колебания не зависит от времени и сохраняет свое начальное значение:

$$a = \text{const} = a_0$$

В виду постоянства  $a$ , из (89) получаем:

$$\psi = \omega(a) t + \theta$$

где  $\theta$  — фазовая постоянная, равная начальному значению фазы  $\psi$ :  $\theta = \psi_0$ .

Таким образом в рассматриваемом случае изучаемое колебание в первом приближении будет гармоническим колебанием:

$$x = a \sin \{ \omega(a)t + \theta \} \quad (91)$$

Нелинейный характер уравнения в первом приближении сказывается, очевидно, лишь в том, что частота колебаний  $\omega(a)$  зависит от амплитуды.

Иначе говоря, благодаря присутствию в уравнении колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) = 0$$

нелинейного члена  $\varepsilon f(x)$ , колебательная система теряет свою изохронность<sup>1)</sup>. Как это следует из формулы (90), потеря изохронности будет тем меньше, чем меньше будет  $\varepsilon f(x)$  по сравнению с  $\nu^2 x$ .

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, преобразуем несколько формулу (90), служащую для определения зависимости частоты от амплитуды.

Возведем для этого обе части (90) в квадрат. Получим:

$$\begin{aligned} \omega^2(a) = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + \\ + \frac{\varepsilon}{4\pi^2 \nu^2 a^2} \left[ \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^2 \end{aligned} \quad (92)$$

Поскольку все наши вычисления были построены на отбрасывании членов второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ , вместо (92) можем написать просто:

$$\omega^2(a) = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{a\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

<sup>1)</sup> Изохронностью (изохронизмом) называется свойство линейных колебательных систем, состоящее в том, что их частоты собственных колебаний не зависят от амплитуд.

откуда:

$$\omega^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \{ \nu^2 a \sin \varphi + \varepsilon f(a \sin \varphi) \} \sin \varphi d\varphi$$

что дает, вследствие (87):

$$\omega^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (93)$$

Полученная формула (93) имеет, как видно, ту существенную особенность, что в нее функция  $F(x)$  входит в целом, а не раздельно в виде двух слагающих — линейной  $\nu^2 x$  и нелинейной  $\varepsilon f(x)$ , как в формуле (90).

Рассмотрим теперь в качестве конкретного примера небольшие колебания математического маятника:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Так как мы изучаем лишь колебания небольшой амплитуды (напр., до  $30^\circ$ ), в этом уравнении мы можем заменить его двумя первыми членами в тейлоровском разложении, написав<sup>1)</sup>:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Применив к этому уравнению формулу (63), получим:

$$\omega^2(a) = \frac{g}{l} \cdot \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left( a \sin \varphi - \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{6} \right) \sin \varphi d\varphi$$

Но

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{4}$$

<sup>1)</sup> Заметим при этом, что разность

$$\sin \theta - \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right)$$

по абсолютной величине не превышает 0,0003, если  $\theta$  колеблется между  $-30^\circ$  и  $+30^\circ$ .

и потому окончательно:

$$\omega^2(a) = \frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{8}\right) \quad (94)$$

откуда:

$$\omega(a) = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{8}\right)} \cong \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{16}\right)} \quad (95)$$

Как видно, при увеличении амплитуды (размахов маятника) частота уменьшается, а период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^2}{16}} \cong 2\pi \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 + \frac{a^2}{16}\right)} \quad (96)$$

увеличивается.

Так, при колебаниях весьма малой амплитуды

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

при  $a = 10^\circ$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1,001)$$

при  $a = 20^\circ$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1,006)$$

и при  $a = 30^\circ$ :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1,014)$$

Возьмем далее уравнение качания синхронной машины

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \{ \cos(\theta - \delta) - \cos \delta \} = 0$$

при малых отклонениях от положения равновесия (от синхронизма) и положим в этом уравнении:

$$\cos(\theta - \delta) = \cos \delta + \theta \sin \delta - \frac{\theta^2 \cos \delta}{2} - \frac{\theta^3 \sin \delta}{6}$$

Тогда получим:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \nu^2 \left\{ \theta - \frac{\theta^2 \operatorname{ctg} \delta}{2} - \frac{\theta^3}{6} \right\} = 0 \quad (97)$$

где

$$v = k \sqrt{\sin \delta}$$

Применив к этому уравнению формулу (93), получим для квадрата частоты колебаний следующее выражение:

$$\begin{aligned} \omega^2(a) &= v^2 \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi^2} \left\{ a \sin \varphi - \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{2} \operatorname{ctg} \delta - \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{6} \right\} \sin \varphi d\varphi = \\ &= v^2 \left( 1 - \frac{a^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

откуда для частоты получаем:

$$\omega(a) = v \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right) = k \sqrt{\sin \delta} \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right) \quad (99)$$

а для периода:

$$T = \frac{2\pi}{k \sqrt{\sin \delta}} \left( 1 + \frac{a^2}{16} \right) \quad (100)$$

Как это видно из (97), формулы (98), (99) и (100) пригодны, лишь пока  $\frac{a^2}{6}$ ,  $\frac{a \operatorname{ctg} \delta}{2}$  малы по сравнению с 1, так как в противном случае мы не имели бы права считать в (97) нелинейные члены  $-\frac{\theta^2 \operatorname{ctg} \delta}{2}$ ,  $-\frac{\theta^3}{6}$  малыми по сравнению с линейным членом  $\theta$ , что является существенным условием применимости наших формул.

Рассмотрим еще уравнение крутильных колебаний вала:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} c(\theta) = 0$$

На основании (63) имеем для квадрата частоты собственных колебаний:

$$\omega^2(a) = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \cdot \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} c(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (101)$$

Возьмем конкретно случай, когда кривая зависимости

$$M = c(\theta)$$

крутящего упругого момента от угла скручивания будет иметь вид ломаной линии, изображенной на фиг. 22.



В этом случае

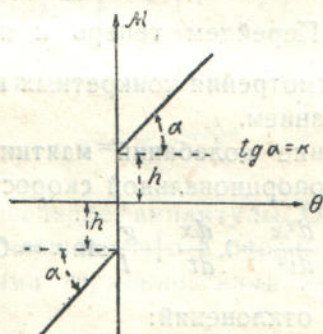
$$c(\theta) = h + k\theta, \text{ если } \theta > 0$$

и

$$c(\theta) = -h + k\theta, \text{ если } \theta < 0$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{\pi} c(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + \\ + \int_0^{2\pi} c(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi &= \int_0^{\pi} (h + ka \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi + \\ + \int_0^{2\pi} (-h + ka \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi &= 4h + \pi ka \end{aligned}$$



Фиг. 22.

и потому на основании (101) имеем:

$$\omega^2(a) = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} k \left( 1 + \frac{4h}{\pi a k} \right) \quad (102)$$

Очевидным условием применимости этой формулы должна служить малость отношения  $\frac{h}{ak}$ , измеряющая отклонение зависимости  $M = c(\theta)$  от линейного закона  $M = k\theta$ .

Рассмотрим еще уравнение колебательного электрического контура, содержащего железный сердечник:

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{1}{C} (A\Phi + B\Phi^3) = 0$$

Допуская, что  $\frac{B\Phi^2}{A}$  мало, применяем формулу (93). Имеем:

$$\begin{aligned}\omega^2(a) &= \frac{1}{\pi a C} \int_0^{2\pi} (Aa \sin \varphi + Ba^3 \sin^3 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{A}{C} \left(1 + \frac{3Ba^2}{4A}\right)\end{aligned}\quad (103)$$

или

$$\omega(a) = \sqrt{\frac{A}{C} \left(1 + \frac{3Ba^2}{8A}\right)}$$

До сих пор мы рассматривали случаи (85), когда функция  $F\left(x \frac{dx}{dt}\right)$  в дифференциальном уравнении (45) зависела лишь

от  $x$ , но не от  $\frac{dx}{dt}$ . Перейдем теперь к исследованию общего случая, начав с рассмотрения конкретных примеров колебательных систем с затуханием.

Возьмем уравнение колебаний маятника, затухающих под действием силы, пропорциональной скорости:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

или для небольших отклонений:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \lambda \frac{dx}{dt} = 0$$

Предполагая затухание слабым, полагаем:

$$\frac{g}{l} = \nu^2$$

$$-\frac{g}{l} \frac{x^3}{6} + \lambda \frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

(104)

Имеем:

$$\begin{aligned}& -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{g}{l} \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{6} + \lambda a \nu \cos \varphi\right) \cos \varphi d\varphi = -\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

Следовательно из (82) получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2} a \quad (105)$$

Далее:

$$\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{g}{l} \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{6} + \right. \\ \left. + \lambda a \nu \cos \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = -\frac{g}{l\nu} \cdot \frac{a^3}{16} = -\nu \frac{a^3}{16}$$

и потому из (89) имеем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right)} \quad (106)$$

Из уравнения (105) мы видим, что

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2} t} \quad (107)$$

где  $a_0$  — начальное значение амплитуды. Отсюда, на основании формулы (84), мы заключаем, что в первом приближении колебания будут обычными гармоническими затухающими колебаниями:

$$x = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2} t} \sin \psi \quad (108)$$

В этом выражении полная фаза  $\psi$  определяется из уравнения (106). Из этого уравнения мы видим, что фаза  $\psi$  вращается уже не с равномерной скоростью, и поэтому  $\frac{d\psi}{dt}$  будем называть мгновенной частотой колебания в некоторый момент времени.

Сравнивая формулу (95) для незатухающих колебаний маятника с формулой (106) для затухающих, мы видим, что в последнем случае зависимость между мгновенной частотой колебания и амплитудой та же, что в первом случае зависимость между обычной постоянной частотой  $\omega(a)$  и амплитудой.

Подставив (107) в (106), имеем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l} \left[ 1 - \frac{a_0^2 e^{-\lambda t}}{16} \right]} \quad (109)$$

Как видно, с увеличением времени вследствие постепенного затухания мгновенная частота будет увеличиваться, стремясь в пределе к постоянному „линейному“ значению частоты  $\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Интегрируя (109), получаем:

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}} \left\{ t + \frac{a_0^2}{16} \left[ \frac{e^{-\lambda t} - 1}{\lambda} \right] \right\} + \theta \quad (110)$$

где  $\theta$  — начальное значение фазы.

Подставив (110) в (108), получим в окончательной форме выражение для первого приближения:

$$x = a^0 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sin \left\{ \sqrt{\frac{g}{l}} \left[ t - \frac{a_0^2}{16} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \right] \right\} \quad (111)$$

В качестве второго примера возьмем уравнение затухающих колебаний массы  $m$ , на которую действует линейная упругая сила  $kx$  и нелинейное слабое трение  $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{1}{m}f\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (112)$$

Чтобы привести это уравнение к стандартному типу уравнения (48), положим:

$$\frac{k}{m} = \nu^2$$

$$\frac{1}{m}f\left(\frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

В этом случае получаем:

$$\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi\nu m} \int_0^{2\pi} f(a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi\nu m} \int_0^{2\pi} f(a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

так как, положив:

$$\Phi(x) = \int_0^x f(x) dx$$

тождественно имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(av \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{av} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(av \cos \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi = -\frac{1}{av} \Phi(av \cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Таким образом (82) и (83) дадут:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi m v} \int_0^{2\pi} f(av \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = v \quad (113)$$

Отсюда мы выводим, что мгновенная частота постоянна и равна обычной линейной частоте  $\nu$ , так что

$$\psi = \nu t + \theta$$

если  $\theta$  — начальное значение фазы  $\psi$ .

Итак, в первом приближении колебания оказываются гармоническими:

$$x = a \sin(\nu t + \theta)$$

с постоянной частотой  $\nu$ . Амплитуда колебаний затухает согласно закону, выражаемому первым из уравнений (113).

Определим теперь из этого уравнения зависимость амплитуды от времени для различных законов силы трения, т. е. для различных видов функции  $f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ . Разумеется, при этом мы имеем общее ограничение, необходимое для применимости наших формул, а именно, чтобы сила трения была достаточно малой. Впрочем, в практически используемых колебательных системах, как правило, это условие выполняется, так как обычно, за исключением особых специальных случаев, при конструкции системы заинтересованы в возможном уменьшении сил трения, вызывающих непроизводительный расход энергии.

Прежде всего рассмотрим линейное затухание:

$$f\left(\frac{dx}{dt}\right) = \lambda \frac{dx}{dt}$$

для которого, очевидно:

$$\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{\lambda a}{2}$$

Следовательно, в этом случае

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2m} a$$

и потому

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda t}{2m}}$$

так что первое приближение будет:

$$x = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2m} t} \sin(\nu t + \theta)$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Сравнив это приближенное решение с точным решением исследуемого уравнения

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

имеющим вид:

$$x = a_0 e^{-\frac{\lambda}{2m} t} \sin(\omega t + \theta)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2} = \nu \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{km}}\right)^2}$$

мы видим, что приближенное и точное решения разнятся лишь значением частоты.

При этом относительная ошибка в частоте:

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{km}}\right)^2} \approx \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{km}}\right)^2$$

будет второго порядка малости, что, впрочем, совершенно естественно, так как в ранее изложенных рассуждениях мы именно и пренебрегали членами второго порядка малости.

Заметим, между прочим, что отклонение приближенной частоты  $\nu$  от точной  $\nu \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{km}} \right)^2}$  мало даже при значительном затухании.

Так, при

$$\frac{\lambda}{\sqrt{km}} = \frac{1}{\pi}$$

(что соответствует такому затуханию, при котором амплитуда колебаний за период  $T = \frac{2\pi}{\nu}$  уменьшается в

$$e^{\frac{\lambda}{2m} \cdot \frac{2\pi}{\nu}} = e = 2,7 \text{ раза})$$

относительная ошибка в частоте составит всего 2,4%.

Рассмотрим сейчас квадратичное затухание (пропорциональное квадрату скорости)

$$f \left( \frac{dx}{dt} \right) = \alpha \left| \frac{dx}{dt} \right| \frac{dx}{dt}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi &= \alpha \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \nu^2 \cos^3 \varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} a^2 \nu^2 \cos^3 \varphi d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} a^2 \nu^2 \cos^3 \varphi d\varphi \right) = \alpha a^2 \nu^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi \right) = \\ &= 4 a^2 \nu^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{16}{3} \alpha a^2 \nu^2 \end{aligned}$$

и потому из (113) имеем:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{8\alpha}{3\pi m} \nu a^2$$

что дает

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} = \frac{8\alpha}{3\pi m} \nu$$

откуда получаем:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a_0} = \frac{8 a \nu}{3 \pi m} t$$

и таким образом

$$a = \frac{a_0}{1 + \frac{8 a \nu}{3 \pi m} t}$$

Амплитуда колебаний в этом случае затухает обратно пропорционально увеличению линейной функции времени.

Рассмотрим еще случай кулоновского трения:

$$f\left(\frac{dx}{dt}\right) = A \operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

где:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1, \text{ если } \frac{dx}{dt} > 0$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0, \text{ если } \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -1, \text{ если } \frac{dx}{dt} < 0$$

Имеем, при  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(a \nu \cos \varphi) d\varphi &= A \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right] = \\ &= 4A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 4A \end{aligned}$$

Далее, при  $a = 0$ :

$$\int_0^{2\pi} f(a \nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0$$

Поэтому из (113) получаем:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2A}{\pi m \nu}, \text{ если } a > 0$$

$$\frac{da}{dt} = 0, \text{ если } a = 0$$



Отсюда мы видим, что

$$a = a_0 - \frac{2A}{\pi m \nu} t \quad \text{при } t \leq \frac{\pi m \nu}{2A} a_0$$

$$a = 0 \quad \text{при } t > \frac{\pi m \nu}{2A} a_0$$

Таким образом в этом случае колебания исчезнут совершенно, начиная с  $t = \frac{\pi m \nu}{2A} a_0$

До сих пор мы рассматривали примеры незатухающих колебаний в консервативных системах и затухающих колебаний в системах с рассеянием энергии, вызываемым диссипативными силами. Перейдем теперь к исследованию колебаний в самовозбуждающихся системах, где рассеяние энергии компенсируется за счет имеющихся в системе источников энергии.

Начнем с рассмотрения уравнения ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} = 0$$

при малом положительном значении параметра  $\varepsilon$ .

Сравнивая это уравнение с исходным нашим уравнением (48), положим:

$$\nu = 1; \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -(1 - x^2) \frac{dx}{dt}$$

Следовательно, мы имеем:

$$\begin{aligned} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) &= -a(1 - a^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi = \\ &= -a \cos \varphi + \frac{1}{2} a^3 \sin \varphi \sin 2\varphi = a \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) \cos \varphi - \frac{a^3}{4} \cos 3\varphi \end{aligned}$$

и потому

$$-\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0$$

Таким образом из (82), (83) и (84) мы видим, что в первом приближении

$$x = a \sin \psi \quad (114)$$

где

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) \quad (115)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 \quad (116)$$

Из (116) получаем:

$$\psi = t + \theta, \text{ где } \theta = \psi_0$$

Итак, в первом приближении мы имеем дело с гармоническим колебанием

$$x = a \sin(t + \theta) \quad (117)$$

обладающим постоянной частотой, равной единице (и периодом, равным  $2\pi$ ), амплитуда которого изменяется в соответствии с дифференциальным уравнением (115). Чтобы найти в явном виде закон зависимости амплитуды колебания от времени, нам остается, как видно, решить это уравнение (115).

Для этого помножаем обе части (115) на  $a$ . Имеем:

$$\frac{da^2}{dt} = \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a^2$$

откуда:

$$\frac{da^2}{\left( 1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a^2} = \varepsilon dt$$

Но

$$\frac{1}{\left( 1 - \frac{1}{4} a^2 \right) a^2} = \frac{1}{4 - a^2} + \frac{1}{a^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{da^2}{4 - a^2} + \frac{da^2}{a^2} = \varepsilon dt$$

что дает

$$-d \log(4 - a^2) + d \log a^2 = \varepsilon dt$$

т. е.

$$d \log \frac{a^2}{4 - a^2} = \varepsilon dt \quad (118)$$

Отсюда имеем:

$$\log \frac{a^2}{4-a^2} = \log \frac{a_0^2}{4-a_0^2} + \varepsilon t \quad (118)$$

где, как всегда,  $a_0$  — начальное значение  $a$ .

Из (118) получаем:

$$\frac{a^2}{4-a^2} = \frac{a_0^2}{4-a_0^2} e^{\varepsilon t}$$

или

$$a^2 = \frac{a_0^2}{4-a_0^2} (4-a^2) e^{\varepsilon t}$$

откуда:

$$a^2 = \frac{\frac{4a_0^2}{4-a_0^2} e^{\varepsilon t}}{1 + \frac{a_0^2}{4-a_0^2} e^{\varepsilon t}} = \frac{a_0^2 e^{\varepsilon t}}{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}$$

Итак, окончательно:

$$a = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2} \varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \quad (119)$$

Подставив (119) в (117), имеем выражение для первого приближения в раскрытом виде:

$$x = \frac{a_0 e^{\frac{1}{2} \varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} a_0^2 (e^{\varepsilon t} - 1)}} \sin(t + \theta) \quad (120)$$

как это видно, например, из (119); если начальное значение амплитуды  $a_0$  точно равно нулю, то амплитуда останется равной нулю и (120) даст  $x = 0$ . Мы пришли, таким образом, к тривиальному решению уравнения ван-дер-Поля. Это тривиальное решение, очевидно, соответствует статическому режиму, т. е. отсутствию колебаний. Нетрудно усмотреть, однако, хотя бы из той же формулы (119), что этот статический режим неустойчив. В самом деле, как мало ни было бы начальное значение амплитуды, она все равно будет монотонно возрастать, приближаясь к значению, равному 2. Таким образом, поскольку

случайные малые толчки практически неизбежны, в рассматриваемой колебательной системе, находящейся в состоянии покоя, автоматически возбуждаются колебания с нарастающей амплитудой. В виду этого такие системы и называются самовозбуждающимися.

Из (119) мы замечаем далее, что, если  $a_0 = 2$ , то  $a = 2$  для всех  $t \geq 0$ . Это решение соответствует стационарному динамическому режиму

$$x = 2 \sin(t + \theta) \quad (121)$$

В отличие от статического, динамический режим обладает сильной устойчивостью, ибо каково бы ни было значение  $a_0 (\neq 0)$ , — малое или большое, — все равно  $a(t) \rightarrow 2$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Иначе говоря, любое колебание при увеличении  $t$  приближается к стационарному колебанию (121).

На рассмотренном простом примере колебательной самовозбуждающейся системы, описываемой уравнением ван-дер-Поля, мы замечаем коренное различие этой системы от колебательных консервативных систем, описываемых уравнением вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x + \varepsilon f(x) = 0$$

Именно в этих последних системах, как мы видели, возможны колебания с любой постоянной амплитудой, в первом же случае колебания с постоянной амплитудой возможны лишь при некотором определенном ее значении. Физически это ясно из следующего очевидного соображения. Поскольку в консервативной системе нет ни рассеяния, ни источника энергии, то раз возбудившиеся колебания не имеют основания ни возрастать, ни затухать, и их амплитуда остается равной ее начальному значению. В самовозбуждающихся же системах имеется рассеяние энергии и ее источник. Поэтому амплитуда колебаний будет возрастать, если количество энергии, доставляемой источником, превышает количество энергии, рассеиваемой диссипативными силами. Наоборот, если количество энергии, доставляемой источником, меньше количества рассеиваемой энергии, колебания будут затухать.

Постоянное же значение амплитуда будет сохранять только в том случае, когда для этого значения оба упомянутые количества энергии точно уравновешивают друг друга.

Детально разобрав случай самовозбуждающейся системы, описываемой уравнением ван дер-Поля, рассмотрим теперь систему, описываемую уравнением Релея:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Уравнение Релея, очевидно, приводится к виду (112), если положить:

$$f \left( \frac{dx}{dt} \right) = \left\{ -A + B \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} \frac{dx}{dt} \quad (122)$$

Поэтому на основании ранее установленного [см. формулы (113)] мы видим, что в первом приближении

$$x = a \sin(\nu t + \theta) \quad (123)$$

где

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \theta = \text{const}$$

и где

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\pi m \nu} \int_0^{2\pi} f(a \nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (124)$$

Но из (122) мы видим, что

$$\begin{aligned} f(a \nu \cos \varphi) &= -A a \nu \cos \varphi + B (a \nu)^3 \cos^3 \varphi = \\ &= -a \nu \left( A - \frac{3}{4} B a^2 \nu^2 \right) \cos \varphi + \frac{1}{4} B (a \nu)^3 \cos^3 \varphi \end{aligned}$$

и потому (124) дает

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2m} \left( A - \frac{3}{4} B a^2 \nu^2 \right) \quad (125)$$

Из этого уравнения мы видим, что [тривиальное решение  $a = 0$  будет неустойчивым, так как  $A > 0$ , и что, следовательно, мы имеем здесь самовозбуждение колебаний. Стационарное значение амплитуды найдем, приравняв выражение

$$A - \frac{3}{4} B a^2 \nu^2$$

нулю, что дает:

$$a = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{4A}{3B}} \quad (126)$$

Каково бы ни было начальное значение амплитуды  $a_0 (\neq 0)$ , мы, согласно (125), будем иметь:

$$a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{4A}{3B}}$$

и таким образом независимо от начальных условий колебание будет приближаться к стационарному колебанию с постоянной амплитудой

$$x = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{4A}{3B}} \sin(\nu t + \theta)$$

Если мы интересуемся не только стационарными колебаниями, но и колебаниями в переходном режиме (неустановившиеся колебания) и желаем получить в явном виде зависимость амплитуды от времени, нам следует проинтегрировать уравнение (125).

При помощи тех же рассуждений, что и для уравнения вандер-Поля, получаем:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\frac{A}{2m} t}}{\sqrt{1 + \frac{3B\nu^2}{4A} a_0^2 \left( e^{\frac{A}{m} t} - 1 \right)}}$$

где, как всегда,  $a_0$  — значение амплитуды при  $t = 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение часового маятника, возбуждаемого импульсами:

$$J \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left| \frac{dx}{dt} \right|}{2} - \delta(x - x_0) \right\} + kx = 0 \quad (127)$$

Здесь  $x_0$  значение угла, при котором на маятнике посылается импульс  $I$ ,  $\delta(x)$  — „несобственная функция“, определяемая соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0, \text{ если } x \neq 0 \\ \int_{-0}^{+0} \delta(x) dx &= 1 \end{aligned} \quad (128)$$

Чтобы привести уравнение (127) к виду уравнения (48), полагаем:

$$v^2 = \frac{k}{J}$$

$$J \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \lambda \frac{dx}{dt} - I \frac{\frac{dx}{dt} + \left|\frac{dx}{dt}\right|}{2} \cdot \delta(x - x_0) \quad (129)$$

Тогда, на основании ранее установленных формул, в первом приближении имеем:

$$x = a \sin \psi \quad (130)$$

где:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi v} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a v \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (131)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = v + \frac{\varepsilon}{2\pi v a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a v \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

В рассматриваемом же случае, на основании (128) и (129), получаем:

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a v \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{J} \int_0^{2\pi} \lambda a v \cos^2 \varphi d\varphi -$$

$$- \frac{I a v}{J} \int_0^{2\pi} \delta(a \sin \varphi - x_0) \frac{\cos \varphi + |\cos \varphi|}{2} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{\lambda \pi a v}{J} - \frac{I a v}{J} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \sin \varphi - x_0) \cos^2 \varphi d\varphi \quad (132)$$

Пусть  $\varphi_a$  будет значение угла  $\varphi$ , лежащее между 0 и  $\frac{\pi}{2}$ , для которого

$$a \sin \varphi = x_0 \quad (133)$$

Тогда для  $a \geq x_0$  имеем:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \sin \varphi - x_0) \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\varphi^{-0}}^{\varphi^{+0}} \delta(a \sin \varphi - x_0) \cos^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{a} \int_{x_0^{-0}}^{x_0^{+0}} \delta(x - x_0) \cos \varphi_a dx = \frac{\cos \varphi_a}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$$

Если же  $a < x_0$ , то, очевидно:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(a \sin \varphi - x_0) \cos^2 \varphi d\varphi = 0$$

Таким образом, на основании (132), из (131) получим:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2J} a, \text{ если } a < x_0$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2J} a + \frac{l}{2\pi J} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}, \text{ если } a \geq x_0 \quad (134)$$

и совершенно аналогично:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a)$$

где

$$\omega(a) = \begin{cases} \nu, & \text{если } a < x_0 \\ \nu - \frac{l x_0}{2\pi J a^2}, & \text{если } a > x_0 \end{cases}$$

Как показывает уравнение (134), при достаточно малом начальном значении амплитуды  $a_0$ , например, при

$$a_0 \ll x_0$$

амплитуда  $a(t)$  будет убывать:

$$a(t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow +\infty$$

и колебания затухнут.



Данная колебательная система не имеет, следовательно, самовозбуждения и статический режим (равновесие)

$$a = 0$$

является устойчивым.

Однако мы можем поставить вопрос о существовании стационарных динамических режимов, соответствующих постоянным, не равным нулю, значениям  $a$ .

Так как такие значения  $a$  должны, очевидно, удовлетворять уравнению

$$-\frac{\lambda}{2J} a + \frac{I}{2\pi J} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = 0 \quad (135)$$

то мы видим, что вопрос о существовании стационарных динамических режимов связан с вопросом о существовании вещественных положительных корней у „уравнения стационарных амплитуд“ (135).

Рассмотрим поэтому это последнее уравнение.

Из (135) имеем:

$$1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \left(\frac{\pi\lambda}{I}\right)^2 a^2$$

откуда:

$$a^4 - \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 a^2 = -\left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 x_0^2$$

Таким образом получаем два корня:

$$a_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2} \quad (136)$$

$$a_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^4 - x_0^2 \left(\frac{I}{\pi\lambda}\right)^2} \quad (137)$$

Корни эти будут вещественными, если

$$x_0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{\pi\lambda} \quad (138)$$

Наоборот, если

$$x_0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{\pi\lambda} \quad (139)$$

то оба корня (136) и (137) комплексны, а потому в этом случае стационарные динамические режимы невозможны. Единственно возможное стационарное значение амплитуды равно нулю.

Итак, при выполнении условия (139) колебания в рассматриваемой колебательной системе поддерживаться не могут. Независимо от своего начального значения амплитуда монотонно убывает, стремясь к нулю, и колебания затухают. Наоборот, при выполнении условия (138), как это следует из (134), процесс изменения амплитуды будет происходить следующим образом:

$$\text{если } a(0) < a_1, \text{ то } a(t) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow +\infty$$

$$\text{если } a(0) > a_1, \text{ то } a(t) \rightarrow a_2 \\ t \rightarrow +\infty$$

причем, если  $a(0) > a_2$ , то амплитуда монотонно убывает до значения  $a_2$ ; а если  $a_1 < a(0) < a_2$ , то амплитуда монотонно возрастает<sup>1)</sup> до этого же значения  $a_2$ .

Итак, если параметры системы выполняют условие (138), в системе возможно устойчивое стационарное колебание с постоянной амплитудой

$$a_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{I}{\pi\lambda} \right)^2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{I}{\pi\lambda} \right)^4 - x_0^2 \left( \frac{I}{\pi\lambda} \right)^2}$$

но для того, чтобы возбудить это колебание, необходимо, чтобы начальная амплитуда колебаний была больше  $a$ . Необходимо,

<sup>1)</sup> Сказанное становится особенно наглядным при графическом построении зависимости  $\frac{da}{dt}$  от  $a$  (см. фиг. 23, 24). На фиг. 24 изображен случай, когда

$$x_0 > \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{\pi\lambda}$$

а на фиг. 23 — когда

$$x_0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{I}{\pi\lambda}$$

В первом случае, как видно,  $\frac{da}{dt} < 0$ , и колебания всегда затухают, во втором случае —  $\frac{da}{dt} < 0$  для  $a < a_1$ , и потому колебания затухнут, если их начальная амплитуда меньше  $a_1$ . Наоборот, когда  $a_0 > a_1$ , из диаграммы фиг. 23 с наглядностью вытекает, что  $a$  приближается к  $a_2$  или снизу, или сверху, в зависимости от знака разности  $a_0 - a_2$ .

таким образом, достаточно сильный начальный толчок. Например, если начальные условия будут:

$$x=0, \frac{dx}{dt} = A, \text{ при } t=0$$

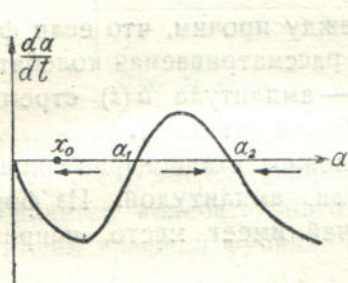
то мы видим, что

$$\psi = 0, \quad A = a_0 \nu$$

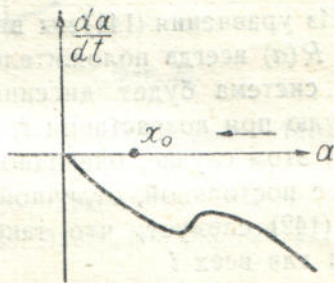
и, следовательно, условие возбуждения колебаний будет

$$A > a_1 \nu$$

Такого рода колебательные системы, в которых могут поддерживаться стационарные колебания с постоянной, отличной



Фиг. 23.



Фиг. 24.

от нуля, амплитудой и в которой вместе с тем „малые колебания“ не раскачиваются, а затухают, — назовем автоколебательными системами без самовозбуждения.

Будем рассматривать теперь уравнение электрического колебательного контура, состоящего из емкости, самоиндукции и органа с нелинейной характеристикой напряжение — ток:  $e = F(i)$ .

Имеем:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + i + CF'(i) \frac{di}{dt} = 0$$

Чтобы привести это уравнение к виду (48), полагаем<sup>1)</sup>:

$$\nu^2 = \frac{1}{LC}, \quad \frac{F'(i)}{L} \frac{di}{dt} = \varepsilon f\left(i, \frac{di}{dt}\right)$$

<sup>1)</sup> Чтобы яснее представить степень малости нелинейного члена, целесообразно ввести „безразмерное время“

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Тогда, на основании формул (132), (133) и (134), мы убеждаемся, что в первом приближении

$$i = a \sin(\nu t + \varphi), \quad \varphi = \text{const}$$

причем амплитуда колебаний  $a$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{da}{dt} = -\frac{R(a)a}{2L} \quad (141)$$

где

$$R(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F'(a \sin t) \cos^2 t dt \quad (142)$$

Из уравнения (141) мы видим, между прочим, что если функция  $R(a)$  всегда положительна, то рассматриваемая колебательная система будет диссипативна, — амплитуда  $a(t)$  стремится к нулю при возрастании  $t$ , и колебания затухают.

В этом случае, очевидно, невозможны стационарные колебания с постоянной, отличной от нуля, амплитудой. Из формулы (142) следует, что такой случай имеет место, например, если для всех  $i$

$$F'(i) > 0$$

Итак, если характеристика напряжение — ток  $e = F(i)$  нелинейного органа не имеет падающего участка [для которого было бы  $F'(i) < 0$ ], то рассматриваемый колебательный контур представляет диссипативную систему, в которой раз возбуждшиеся колебания затухают и в которой единственным стационарным состоянием будет состояние покоя.

Если, наоборот, рассматриваемая характеристика в начальной точке  $i = 0$  будет падающей, т. е. если

$$F'(0) < 0$$

Тогда получаем:

$$\frac{di^2}{dt^2} + i + \frac{CF'(i)}{\sqrt{LC}} \frac{di}{dt} = 0$$

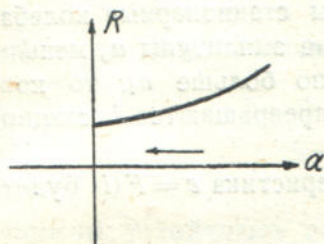
Отсюда видим, что для применимости наших формул необходимо, чтобы численные значения безразмерного коэффициента

$$\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot F'(i)$$

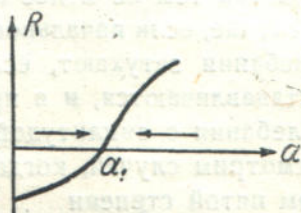
были малы по сравнению с единицей.

то, очевидно,  $R(a)$  будет положительной, во всяком случае для достаточно малых  $a$ .

Поэтому малые амплитуды будут возрастать и слабые колебания раскачиваться так, что состояние покоя делается неустойчивым и физически невозможным.



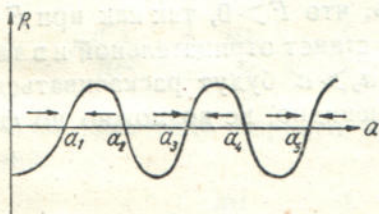
Фиг. 25.



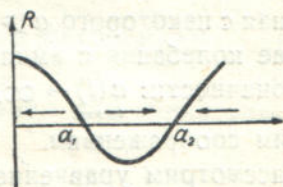
Фиг. 26.

Таким образом в данном случае мы имеем колебательную систему с самовозбуждением.

Характер колебательного процесса становится ясным, если мы имеем графики функции  $R(a)$  (см., напр., фиг. 25, 26, 27, 28).



Фиг. 27.



Фиг. 28.

На этих фигурах стрелками показано направление изменения  $a$ . Фигура 25 соответствует диссипативному случаю, фигура 26 — случаю самовозбуждения с одной возможной стационарной амплитудой, фигура 27 — случаю самовозбуждения с несколькими возможными стационарными амплитудами:  $a_1, a_3, a_5$  (колебания с амплитудами  $a_2, a_4$ , очевидно, неустойчивы). Вообще, если функция  $R(a)$  имеет корень  $\bar{a}$ , удовлетворяющий неравенству  $R'(\bar{a}) > 0$ , то возможен стационарный режим колебаний с постоянной амплитудой, равной  $\bar{a}$ . Заметим еще, что стационарная амплитуда самовозбужденных колебаний (т. е. предел монотонно возрастающей амплитуды колебаний, для которых  $a_0$  было весьма мало) равна наименьшей из всех возможных стационарных

амплитуд. Этот факт становится ясным из того очевидного соображения, что амплитуда, возрастая, не может перескочить через устойчивый корень уравнения  $R(a) = 0$ , т. е. через корень этого уравнения, удовлетворяющий условию  $R'(a) > 0$ .

На фиг. 28 изображен случай, когда система не самовозбуждена и когда тем не менее возможны стационарные колебания. В этом случае, если начальное значение амплитуды  $a_0$  меньше  $a_1$ , то колебания затухают, если же оно больше  $a_1$ , то колебания устанавливаются, и в пределе превращаются в стационарные колебания с амплитудой  $a_2$ .

Рассмотрим случай, когда характеристика  $e = F(i)$  будет полиномом пятой степени

$$F(i) = A + Bi + Ci^2 + Di^3 + Ei^4 + Fi^5$$

Тогда, очевидно:

$$R(a) = B + \frac{3}{4}Di^2 + \frac{5}{8}Fi^4$$

При этом мы должны допустить, что  $F > 0$ , так как при  $F < 0$ , начиная с некоторого  $a \geq a'$ ,  $R(a)$  станет отрицательной и в таком случае колебания с амплитудой  $a_0 > a'$  будут раскачиваться до бесконечности:  $a(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , что, очевидно, не возможно по физическим соображениям.

Рассмотрим уравнение

$$B + \frac{3}{4}Da^2 + \frac{5}{8}Fa^4 = 0$$

решая которое, получим:

$$a_1^2 = -\frac{3}{5} \frac{D}{F} - \sqrt{\frac{9D^2}{25F^2} - \frac{8}{5} \frac{B}{F}}$$

$$a_2^2 = -\frac{3}{5} \frac{D}{F} + \sqrt{\frac{9D^2}{25F^2} - \frac{8}{5} \frac{B}{F}}$$

Разберем случаи:

1)  $B > 0, D > 0$

2)  $B > 0, D < 0$

3)  $B < 0$

В случае 1 оба корня мнимые и функция  $R(a)$  всегда положительна, — следовательно, колебательная система диссипативна.

В случае 2, при

$$B > \frac{9}{40} \cdot \frac{D^2}{F}$$

система также диссипативна.

Если же

$$B < \frac{9}{40} \cdot \frac{D^2}{F}$$

то возможны устойчивые стационарные колебания с амплитудой  $a_2$ . Система однако, не самовозбуждена, и колебания с начальной амплитудой, меньшей  $a_1$ , затухают.

В случае 3 система самовозбуждена, причем имеется единственный стационарный режим колебаний. Для этого режима  $a = a_2$ .

Возьмем еще уравнение идеализированного маятника Фруда

$$J \frac{d^2 x}{dt^2} + \left\{ \lambda \frac{dx}{dt} + F \left( u + \frac{dx}{dt} \right) \right\} + mgl \sin x = 0$$

Имеем уравнение первого приближения для амплитуды колебаний:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2J} \{ \lambda a + \Phi(a) \} \quad (143)$$

где:

$$\Phi(a) = \frac{1}{\pi v} \int_0^{2\pi} F(u + av \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi, \quad v^2 = \frac{mgl}{J}$$

и для мгновенной частоты:

$$\omega(a) = v \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right).$$

Исследование уравнения (143) может быть выполнено при помощи только что изложенных соображений.

После рассмотрения ряда конкретных примеров обратимся к общему уравнению (48) и формулам (82), (83) и (84), дающим первое приближение.

В соответствии с этими формулами мы можем написать первое приближение для решений уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (144)$$

в виде

$$x = a \sin \psi \quad (145)$$

где:

$$\frac{da}{dt} = \Phi(a) \quad (146)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a) \quad (147)$$

причем:

$$\Phi(a) = -\frac{\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (148)$$

$$\omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi\nu a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (149)$$

Прежде чем идти дальше, укажем еще на одну формулу, могущую служить для определения мгновенной собственной частоты  $\omega(a)$ .

Из (149) имеем:

$$\begin{aligned} \omega^2(a) &= \nu^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 \nu^2 a^2} \left[ \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \right]^2 \end{aligned}$$

откуда, поскольку все вычисления в первом приближении ведем, отбрасывая члены второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \omega^2(a) &= \nu^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \{ \nu^2 a \sin \varphi + \varepsilon f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \} \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$



Отсюда, на основании формулы (47):

$$\omega^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (150)$$

Равным образом, принимая во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} (\nu^2 a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = 0$$

мы можем представить формулу (148) в виде:

$$\Phi(a) = -\frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} F(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (151)$$

В полученных формулах (150) и (151) функции  $\Phi(a)$  и  $\omega(a)$  представлены непосредственно с помощью функции  $\Phi\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ , входящей в уравнение (45), что отличает их от формул (148) и (149), где фигурирует лишь нелинейный поправочный член.

Входящая в наши формулы величина  $\nu$  может быть, очевидно, интерпретирована как приближенное значение (нулевое приближение) частоты колебаний.

Рассмотрим сейчас уравнение (146), выражающее закон изменения амплитуды колебаний со временем.

Допустим, прежде всего, что не существует положительной величины  $a^*$ , для которой

$$\Phi(a) > 0 \text{ для всех } a > a^*$$

Условие это, очевидно, необходимо принять и из физических соображений.

В самом деле, если бы такое значение  $a^*$  существовало, то, взяв начальное значение амплитуды  $a_0$  большим  $a^*$ :

$$a(0) > a^*$$

мы получили бы, в соответствии с уравнением (146), неограниченное возрастание амплитуды:

$$a(t) \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty$$

т. е. неограниченное раскачивание колебаний, что, очевидно, физически невозможно.

Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это условие (которое можно было бы назвать условием ограниченности амплитуд) выполнено.

Мы видим теперь из уравнения (146), что если начальное значение амплитуды не стационарно, т. е. не удовлетворяет уравнению стационарности

$$\Phi(a) = 0$$

то с возрастанием времени амплитуда  $a(t)$ , монотонно возрастая или убывая<sup>1)</sup>, стремится к стационарному значению.

Итак мы можем утверждать, что всякое нестационарное колебание с течением времени приближается к стационарному. Нестационарные колебания называются поэтому неустановившимися колебаниями или колебаниями в переходном режиме.

Факт приближения всякого колебания к стационарному — выявляет особую роль стационарных колебаний для высокочастотных колебательных процессов.

В самом деле, для высокочастотных процессов, в виду малости их „естественной единицы времени“ — периода колебаний, переходный режим, как правило, очень быстро приближается к стационарному, и потому всякое колебание можно рассматривать как уже практически стационарное почти тотчас же после начала колебательного процесса.

Заметим мимоходом, что существует случай вырождения, когда функция  $\Phi(a)$  тождественно равна нулю. В этом случае переходных режимов нет и всякое колебание является стационарным. Случай этот имеет место, например, когда  $F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  зависит лишь от  $x$  и не зависит от  $\frac{dx}{dt}$ . Тогда уравнение (45) принимаем вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0 \quad (152)$$

и его можно интерпретировать как уравнение колебаний материальной точки, находящейся под действием силы, зависящей лишь от положения и потому происходящей от потенциала:

$$F(x) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

<sup>1)</sup> Амплитуда  $a(t)$  монотонно возрастает, если в начальный момент  $\Phi(a_0) < 0$ , и убывает — в противном случае.

где

$$U(x) = \int_0^x F(x) dx$$

Таким образом, уравнение (152) является уравнением консервативной колебательной системы, энергия которой не меняется в течение колебаний:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = F = \text{const} \quad (153)$$

Практически, однако, никакая обычная колебательная система не является консервативной, и в ней всегда имеются диссипативные силы, вызывающие рассеяние энергии, а также, если речь идет об автоколебательной системе, могут находиться и источники энергии.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарных колебаний.

Пусть  $a_1$  — некоторый корень уравнения

$$\Phi(a) = 0$$

т. е. постоянное, стационарное решение (146).

Тогда для бесконечно близких к  $a_1$

$$a = a_1 + \delta a$$

решений уравнения (146) имеем:

$$\frac{d\delta a}{dt} = \Phi'(a_1)\delta a$$

Таким образом мы видим, что рассматриваемое значение амплитуды  $a_1$  является устойчивым, т. е. соответствует устойчивому стационарному колебанию, если

$$\Phi'(a_1) < 0 \quad (154)$$

В противном случае, когда, наоборот,

$$\Phi'(a_1) > 0$$

соответствующее стационарное колебание будет, очевидно, неустойчивым.

В частности, так как значение  $a = 0$ , соответствующее статическому режиму, всегда является корнем уравнения стационарности [благодаря формуле (148)], неравенство

$$\Phi'(0) > 0 \quad (155)$$

будет условием самовозбуждения.

Как мы уже видели раньше, условие самовозбуждения не является необходимым для того, чтобы система была автоколебательной, т. е. чтобы в данной системе могли существовать устойчивые стационарные колебания.

Для этого, очевидно, достаточно, чтобы уравнение стационарности имело по крайней мере один не равный нулю корень, удовлетворяющий условию (154).

Заметим вообще, что вопросы, связанные с характером возбуждения тех или иных стационарных состояний, весьма наглядно могут быть рассмотрены с помощью графика функции  $\Phi(a)$ . Так как мы уже говорили об этом на стр. 75—76, то здесь на этом вопросе мы останавливаться не будем.

Рассмотрим сейчас случай, когда в колебательной системе имеется некоторый параметр  $\mu$  (или группа параметров), который мы можем изменять как угодно медленно (адиабатически).

Чтобы более оттенить зависимость функции  $\Phi(a)$  от этого параметра, представим ее в виде  $\Phi(a, \mu)$ . При этом мы будем рассматривать изменение параметра, настолько медленное по сравнению с эффективной длительностью переходного режима (т. е. по сравнению с временем, по истечении которого произвольное колебание становится практически стационарным), что для каждого значения  $\mu$  в течение этого изменения колебание можно предполагать стационарным.

Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, допустим, что для  $\mu$ , меньших некоторого  $\mu_0$ ,

$$\Phi'_a(0, \mu) < 0$$

а для  $\mu$ , больших этого значения, —

$$\Phi'_a(0, \mu) > 0$$

Будем теперь адиабатически изменять  $\mu$ , увеличивая его, начиная с некоторого значения  $\mu_1$ , меньшего  $\mu_0$ .

Пусть система находилась вначале в равновесии:  $a=0$ . Тогда, поскольку до  $\mu < \mu_0$  система не самовозбуждена, она и останется в равновесии вплоть до достижения параметром  $\mu$  критического значения, равного  $\mu_0$ . По переходе через это критическое значение появляется самовозбуждение, и равновесие становится невозможным, амплитуда  $a$  от нуля переходит

к значению  $a(\mu)$ , равному наименьшему устойчивому корню уравнения

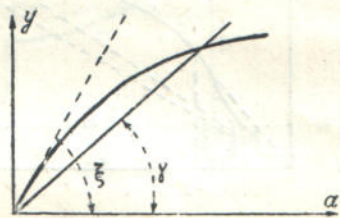
$$\Phi(a, \mu) = 0$$

Таким образом зависимость амплитуды от параметра представляется в виде:

$$a = 0, \text{ для } \mu < \mu_0$$

$$a = a(\mu), \text{ для } \mu > \mu_0$$

Если полученная кривая непрерывна, то мы будем говорить, что имеем случай мягкого возбуждения колебаний (по отношению к данному параметру). В случае мягкого возбуждения при переходе через критическое значение начинается генерация колебаний, амплитуда которых, вблизи критического значения, постепенно возрастает от нуля.



Фиг. 29.

Если же в точке  $\mu = \mu_0$  имеется разрыв, то тогда при переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нулевого значения сразу к значению  $a(\mu_0 + 0)$ .

Этот случай называют случаем жесткого возбуждения. Пусть, например,

$$\Phi(a, \mu) = \left\{ \Phi(a) - \frac{a}{\mu} \right\} \Psi(a, \mu),$$

где  $\Psi(a, \mu) > 0$  и где  $\Phi(a)$  есть некоторая функция  $a$ , не зависящая от  $\mu$ .

В этом случае вопрос о характере возбуждения можно решить с помощью одного из двух следующих графических построений.

Построим кривую (см. фиг. 29)

$$y = \Phi(a)$$

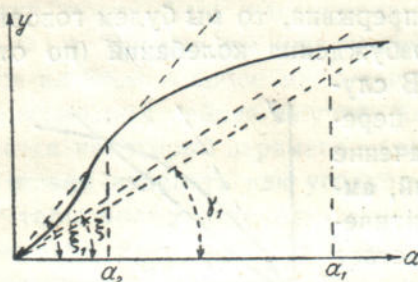
Тогда стационарные амплитуды найдутся из пересечения этой кривой с прямыми вида  $y = \frac{1}{\mu} a$ . Устойчивыми будут те, для которых угол наклона прямой больше угла наклона касательной в точке пересечения.

Таким образом на фиг. 29 имеем случай мягкого возбуждения, так как при переходе  $\mu$  через критическое значение, равное

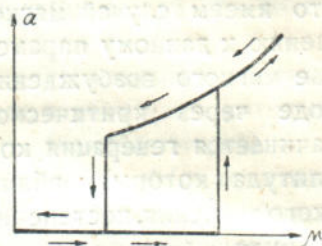
$$\frac{1}{\operatorname{tg} \xi} = \frac{1}{\Phi'(0)}$$

амплитуда начинает возрастать от нуля.

На фиг. 30 имеем случай жесткого возбуждения. При переходе через критическое значение амплитуда перескакивает от нуля к  $a_1$ .



Фиг. 30.



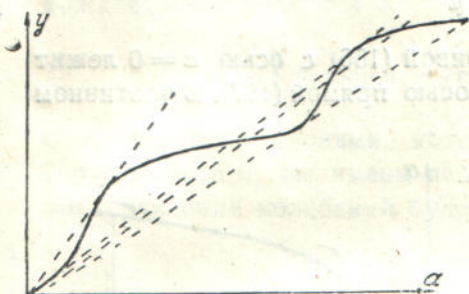
Фиг. 31.

Рассмотрим детально случай, представленный на фиг. 30. Пусть мы увеличиваем постепенно параметр  $\mu$  от нуля, уменьшая, таким образом, угол  $\gamma$  наклона прямой  $y = \frac{1}{\mu} a$ . Пусть система находится вначале в состоянии покоя:  $a = 0$ . Тогда, очевидно, амплитуда будет оставаться нулем вплоть до того, как  $\gamma$  станет меньше  $\xi$ . После перехода через  $\xi$  амплитуда скачет к  $a_1$  и затем начинает непрерывно расти. Доведя  $\gamma$ , скажем, до  $\gamma_1$  начинаем опять уменьшать  $\mu$  (увеличивать  $\gamma$ ); тогда амплитуда будет убывать (проходя через участки, отмеченные жирной линией) и, начиная с  $\gamma = \xi$ , срывается, при чем снова устанавливается состояние покоя. Графически изобразивши зависимость  $a$  от  $\mu$  в течение такого процесса, получим кривые (фиг. 31), имеющие характерную гистерезисную петлю. Значение стационарной амплитуды зависит не только от значения параметра, но и от того, каким образом этот параметр изменялся.

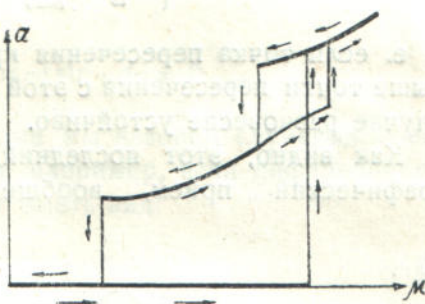
Подобного рода явления действительно наблюдаются в некоторых автоколебательных системах и называются колебательным гистерезисом (или затягиванием, — последнее наименование отражает тот факт, что при адиабатическом изменении параметра

амплитуда стремится как бы затянуть возможно дальше плавное изменение именно до тех пор, когда непрерывное изменение приводит уже к неустойчивым амплитудам).

Гистерезисные петли могут иметь и гораздо более сложную форму, чем на фиг. 31. Так например, для случая диаграммы фиг. 32 имеем при изменении  $\mu$  зависимость, схематически изображенную на фиг. 32.



Фиг. 32.



Фиг. 33.

Для исследования характера возбуждения колебаний можно воспользоваться еще таким (по существу аналогичным) приемом. Построим кривую

$$y = \frac{\Phi(a)}{a} \quad (156)$$

Тогда стационарные амплитуды найдутся из пересечения с этой кривой прямых, параллельных оси  $a$ :

$$y = \frac{1}{\mu} \quad (157)$$

Условие устойчивости

$$\frac{\partial \Phi(a, \mu)}{\partial a} < 0$$

может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\Phi(a)}{a} - \frac{1}{\mu} \right\}}{\partial a} < 0$$

и потому допускает простую геометрическую интерпретацию. Именно, устойчивыми будут амплитуды, соответствующие таким

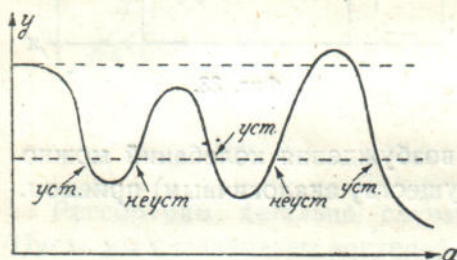
точкам пересечения кривой (156) с прямой (157), в которых направление кривой идет сверху вниз (см. фиг. 34).

Сказанное относится к стационарным амплитудам, не равным нулю. Кроме таких всегда существует и стационарная амплитуда, равная нулю. Она будет неустойчивой, если

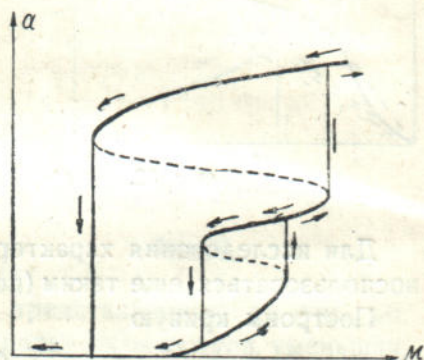
$$\left\{ \frac{\Phi(a)}{a} \right\}_{a=0} > \frac{1}{\mu}$$

т. е. если точка пересечения кривой (156) с осью  $a=0$  лежит выше точки пересечения с этой осью прямой (157). В противном случае равновесие устойчиво.

Как видно, этот последний графический прием, вообще



Фиг. 34.



Фиг. 35.

говоря, удобнее первого, так как при нем не требуется проводить касательных. В остальном же рассуждения остаются теми же, что дает нам возможность не детализировать их. На фиг. 35 схематически изображена картина колебательного гистерезиса, соответствующего случаю, изображенному на фиг. 34.

До сих пор мы рассматривали уравнение (146), выражающее зависимость амплитуды от времени и тем самым характеризующее свойства колебательного процесса, с точки зрения его амплитуды.

Возьмем теперь уравнение (147), характеризующее частотные свойства колебаний.

Согласно этому уравнению, мгновенная собственная частота колебаний  $\frac{d\psi}{dt}$  равна  $\omega(a)$ . Поэтому, в случае стационарных колебаний,  $\omega(a)$ , являясь постоянной, будет обычной собственной



частотой. Как показывает формула (149), собственная частота, а тем самым и период  $T = \frac{2\pi}{\omega(a)}$  стационарных колебаний, зависит вообще от амплитуды. Таким образом, вообще говоря, нелинейные колебательные системы не изохронны.

Существуют, однако, важные в приложениях случаи, когда в первом приближении система изохронна: например, когда тождественно для всех  $a$

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0$$

С такого рода случаями, которые мы назовем случаями квази-изохронности <sup>1)</sup>, мы имеем дело, например, если дифференциальное уравнение колебаний будет иметь вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (158)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \varepsilon F\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (159)$$

т. е. когда

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt}$$

или когда

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Впрочем, уравнение (159) может быть приведено к виду (158). В самом деле, полагая

$$\frac{dx}{dt} = y$$

и дифференцируя уравнение (159), имеем:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y + F'(y) \frac{dy}{dt} = 0$$

Рассматривая уравнение (158) и применяя формулы (145) — (149), получаем в первом приближении:

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (160)$$

<sup>1)</sup> Тут „квази“ прибавлено потому, что соответствующие колебательные системы будут изохронны лишь в первом приближении.

где  $\varphi$  — фазовая постоянная и где

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2} \lambda'(a) a \quad (161)$$

причем

$$\lambda(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau) \cos^2 \tau d\tau \quad (162)$$

Возьмем в качестве примера уравнение электронного генератора (при безразмерном времени):

$$\frac{d^2V}{dt^2} + V + \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ \frac{1}{R} - (M - DL) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0$$

На основании (160), (161) и (162) имеем в первом приближении:

$$V = a \sin(t + \varphi) \quad (163)$$

причем

$$2\sqrt{LC} \frac{da}{dt} = -\frac{L}{R} a + (M - DL) F(a) \quad (164)$$

где

$$\begin{aligned} F(a) &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \sin \tau) \cos^2 \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \sin \tau) \sin \tau d\tau \end{aligned} \quad (165)$$

Характер возбуждения колебаний, выражаемый уравнением (164) может быть исследован двумя графическими приемами:

1) Путем построения кривой

$$y = F(a)$$

так называемой колебательной характеристики лампы, когда стационарные амплитуды найдутся из пересечения этой кривой с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL)R} a$$

2) Путем построения кривой

$$y = \frac{F(a)}{a}$$

и рассмотрения ее пересечений с прямыми

$$y = \frac{L}{(M - DL)R}$$

параллельными оси  $y = 0$ .

Заметим мимоходом, что угловой коэффициент касательной к характеристике лампы, т. е.  $f'(E)$ , именуется обычно в радиотехнике крутизной характеристики.

В виду того, что

$$\frac{F(a)}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + a \sin \tau) \cos^2 \tau d\tau = f'(E_0 + a \sin \vartheta)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

выражение  $\frac{F(a)}{a}$  можно назвать средней крутизной лампы.

Поэтому первый графический метод иногда называется методом колебательной характеристики<sup>1)</sup>, второй — методом средней крутизны<sup>2)</sup>.

Оба эти метода применительно к общему случаю были изложены ранее. В данном случае параметр  $\mu$  равен

$$\frac{(M - DL)R}{L}$$

### § 3. Уточнение первого приближения

Разобрав различные вопросы, связанные с изучением первого приближения, для случая собственных колебаний систем с одной степенью свободы — консервативных, диссипативных, а также для автоколебательных, сделаем сейчас несколько замечаний относительно различных улучшений образованного нами первого приближения.

Возвратимся для этого к точным уравнениям (78), решив которые, мы с помощью формулы (67) можем образовать решение исходного уравнения (48).

<sup>1)</sup> Колебательные характеристики были использованы Möller-ом, в его книге „Die Elektronenröhren“.

<sup>2)</sup> Понятие средней крутизны восходит еще к Баркгаузену; за последнее время над различными обобщениями и применениями этого важного понятия работал проф. Кобзарев.

При образовании первого приближения мы в уравнениях (78) оставили лишь члены  $-\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a)$ ,  $\frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a)$ , вызывающие медленное, плавное изменение  $a$  и  $\varphi$ , отбросив быстро изменяющиеся члены, вызывающие дрожание в  $a$  и  $\varphi$  вокруг их медленно меняющихся средних значений. Чтобы учесть и это дрожание, вызываемое быстро изменяющимися тригонометрическими членами, используем основную идею метода последовательных приближений.

Тогда, применяя упомянутую идею к уравнениям (78) напишем:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\nu} K_0(a) - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + L_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)\} \quad (166)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{\varepsilon}{\nu a} P_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu a} \sum_{n=1}^{\infty} \{P_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + Q_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)\}$$

или

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt} - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + L_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)\} \quad (167)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varepsilon}{\nu a} \sum_{n=1}^{\infty} \{P_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + Q_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)\}$$

Так как  $a$  и  $\varphi$  изменяются по сравнению с  $\nu t$  медленно, будем трактовать их как постоянные в выражениях:

$$K_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + L_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)$$

$$P_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + Q_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)$$

Тогда, проинтегрировав (167), можем написать<sup>1)</sup>:

$$\bar{a} = a - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) - L_n(a) \cos n(\nu t + \varphi)}{n\nu} \quad (168)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{\varepsilon}{\nu a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) - Q_n(a) \cos n(\nu t + \varphi)}{n\nu}$$

<sup>1)</sup> Подставляя выражение (168) в уравнения (167), мы убеждаемся, что они удовлетворяют этим уравнениям с точностью до  $\varepsilon^2$ , так как  $\frac{da}{dt}$  и  $\frac{d\varphi}{dt}$  суть величины первого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Подставим теперь найденные значения (168) в выражение

$$x = \bar{a} \sin(\nu t + \bar{\varphi})$$

Тогда, отбрасывая члены второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ , получим:

$$x = a \sin(\nu t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\nu^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) - L_n(a) \cos n(\nu t + \varphi)}{n} \right\} \times \\ \times \sin(\nu t + \varphi) + \quad (169)$$

$$+ a \frac{\varepsilon}{\nu^2 a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(a) \sin n(\nu t + \varphi) - Q_n(a) \cos n(\nu t + \varphi)}{n} \right\} \cos(\nu t + \varphi)$$

Положим для краткости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n \sin n\tau - L_n \cos n\tau}{n} = u(\tau) \quad (170)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n \sin n\tau - Q_n \cos n\tau}{n} = v(\tau)$$

$$u(\tau) \sin \tau - v(\tau) \cos \tau = w(\tau)$$

и заметим, что на основании (75), мы тождественно имеем:

$$u'_\tau(\tau) = f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) \cos \tau - K_0 \\ v'_\tau(\tau) = f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) \sin \tau - P_0 \quad (171)$$

Тогда мы получим:

$$w'_\tau = u'_\tau \sin \tau - v'_\tau \cos \tau + u \cos \tau + v \sin \tau = \\ = P_0 \cos \tau - K_0 \sin \tau + u \cos \tau + v \sin \tau \\ w''_\tau = -P_0 \sin \tau - K_0 \cos \tau + u'_\tau \cos \tau + v'_\tau \sin \tau - \\ - u \sin \tau + v \cos \tau$$

и таким образом:

$$w''_\tau + w = -P_0 \sin \tau - K_0 \cos \tau + u'_\tau \cos \tau + v'_\tau \sin \tau = \quad (172) \\ = -2P_0 \sin \tau - 2K_0 \cos \tau + f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau)$$

Рассмотрим теперь разложение в ряд Фурье

$$f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) = f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_n(a) \cos n\tau + g_n(a) \sin n\tau\} \quad (173)$$

где:

$$f_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) \cos n\tau \, d\tau \quad (174)$$

$$g_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) \sin n\tau \, d\tau \quad (175)$$

$$f_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) \, d\tau, \quad (176)$$

и заметим, что благодаря (76):

$$K_0 = \frac{1}{2} f_1, \quad P_0 = \frac{1}{2} g_1$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) - 2K_0 \cos \tau - 2P_0 \sin \tau &= \\ = f_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \{f_n(a) \cos n\tau + g_n(a) \sin n\tau\} \end{aligned}$$

и потому из (172) мы имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w = f_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n \cos n\tau + g_n \sin n\tau)$$

откуда:

$$w = f_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n\tau + g_n \sin n\tau}{n^2 - 1}$$

Итак, из (169) и (170) мы окончательно получаем следующее выражение для улучшенного приближения:

$$\begin{aligned} x &= a \sin(\nu t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\nu^2} f_0(a) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n(\nu t + \varphi) + g_n(a) \sin n(\nu t + \varphi)}{n^2 - 1} \quad (177) \end{aligned}$$

Здесь  $a$  и  $\varphi$  удовлетворяют обычным нашим уравнениям первого приближения, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\nu} f_1(a) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(a) - \nu \end{aligned} \quad (178)$$

где

$$\omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\nu a} g_1(a) \quad (179)$$

или, что то же самое (до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ ):

$$\omega^2(a) = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{a} g_1(a) \quad (180)$$

Заметим теперь, что мы получили приближенное решение (177) при помощи хотя и интуитивных, но в некоторых пунктах совершенно не строгих рассуждений, не позволяющих оценить степень малости совершаемой погрешности.

Поэтому, чтобы проверить, с какою точностью выражение (177) удовлетворяет исходному нашему уравнению (48)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (48)$$

подставим его в левую часть этого уравнения. На основании (177), (178) и (179) имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = \\ &= -\varepsilon \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \cos n(\nu t + \varphi) + g_n \sin n(\nu t + \varphi)] + f_0 \right\} + O_1(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (181)$$

где  $O_1(\varepsilon^2)$  обозначает выражение порядка малости  $\varepsilon^2$ . Из (181) и (173) получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = -\varepsilon f[a \sin(\nu t + \varphi), a\nu \cos(\nu t + \varphi)] + O_1(\varepsilon^2) \quad (182)$$

С другой стороны, на основании (177):

$$\varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = O_2(\varepsilon^2) + \varepsilon f[a \sin(\nu t + \varphi), a\nu \cos(\nu t + \varphi)]$$

где  $O_2(\varepsilon^2)$  — выражение порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Таким образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = O_1(\varepsilon^2) - O_2(\varepsilon^2) \quad (183)$$

Следовательно, приближенное решение (177) удовлетворяет нашему уравнению (48) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Эксплицитируя выражения  $O_1(\varepsilon^2)$  и  $O_2(\varepsilon^2)$ , нетрудно убедиться, что если  $f(x, x')$  обладает частными производными до второго порядка включительно и если удовлетворяется, кроме того, условие ограниченности амплитуды, то

$$\left| \frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \right| \leq K\varepsilon^2, \quad 0 \leq t < +\infty$$

где  $K$  — некоторая постоянная величина, не зависящая ни от  $\varepsilon$ , ни от  $t$ .

Таким образом при этих общих условиях приближенное решение (177) удовлетворяет дифференциальному уравнению (48) с точностью до порядка малости  $\varepsilon^2$  равномерно по отношению к  $t$ .

Для оценки погрешности можно было бы идти и несколькими путем, — например, следующим. Совершим в уравнении (48) замену переменных, введя новые неизвестные  $a$  и  $\psi$  посредством соотношений:

$$x = a \sin \psi - \frac{\varepsilon}{\nu^2} f_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n\psi + g_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = a\omega(a) \cos \psi - \frac{\varepsilon}{2\nu} f_1(a) \sin \psi + \quad (184)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\nu}{n^2 - 1} (g_n \cos n\psi - f_n \sin n\psi)$$

Тогда после некоторых простых преобразований нетрудно убедиться, что  $a$  и  $\psi$  должны удовлетворять уравнениям следующего вида:



$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\nu} f_1(a) + \varepsilon^2 X(a, \psi, \varepsilon) \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(a) + \varepsilon^2 Y(a, \psi, \varepsilon)\end{aligned}\quad (185)$$

где  $X(a, \psi, \varepsilon)$ ,  $Y(a, \psi, \varepsilon)$  суть периодические функции  $\psi$  (с периодом, равным  $2\pi$ ), регулярные по отношению к  $\varepsilon$  вблизи точки

$$\varepsilon = 0$$

Как видно, уравнения (178) могут быть получены из уравнений (185) путем отбрасывания членов  $\varepsilon^2 X$ ,  $\varepsilon^2 Y$  в правых частях этих последних.

Таким путем мы опять убеждаемся в том, что приближенное решение (177) получается в результате пренебрежения членами второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Сравнивая улучшенное приближение (177) с первым приближением

$$x = a \sin(\nu t + \varphi)$$

мы видим, что это первое приближение выражает основную гармонику в ряде Фурье (177). Остальные гармоники будут величинами первого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Рассматривая стационарные колебания, мы на основании (177) и (178) видим, что они будут периодическими с периодом  $\frac{2\pi}{\omega(a)}$ , где  $a$  — соответствующая стационарная амплитуда. Частота колебаний, очевидно, равна при этом  $\omega(a)$ :

$$\omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\nu a} g_1^*(a)$$

Так как таким образом зависимость частоты от амплитуды выражается через член, пропорциональный  $\varepsilon$ , то, не нарушая порядка малости ошибки (порядка  $\varepsilon^2$ ), мы в этой формуле вместо  $a$  — амплитуды первой гармоники — можем поставить какую-либо другую величину, отличающуюся от  $a$  на величину порядка малости  $\varepsilon$ , например  $x_{\max}$ , т. е. максимальное значение  $x$ .

Следовательно, с точностью до  $\varepsilon^2$  частота колебаний равна

$$\nu + \frac{\varepsilon}{2\nu x_{\max}} g_1(x_{\max})$$

или, что то же самое, квадрат частоты колебаний равен (с точностью до  $\varepsilon^2$ )

$$v^2 + \frac{\varepsilon}{x_{\max}} g_1(x_{\max})$$

Эти простые соображения показывают, что первое приближение, не учитывая высших гармоник, допускает относительно формы колебания погрешность первого порядка малости  $\varepsilon$ , а относительно частоты — второго порядка по отношению к  $\varepsilon$ .

Применим теперь формулу (177) приближенного решения к различным частным случаям.

Рассмотрим, например, уравнение консервативной колебательной системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x + \varepsilon f(x) = 0 \quad (186)$$

в котором  $f(x)$  пусть будет асимметрической функцией, т. е. такой функцией, для которой тождественно

$$f(x) + f(-x) = 0 \quad (187)$$

Благодаря этому свойству мы видим, что в разложении функции  $f(a \sin \tau)$  в ряд Фурье не будет членов вида  $\cos n\tau$ , так что

$$f(a \sin \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a) \sin n\tau \quad (188)$$

где

$$g_n(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(a \sin \tau) \sin n\tau \, d\tau$$

Таким образом, из (177) и (178) мы получаем:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon}{v^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \sin n(\omega t + \theta)}{n^2 - 1} \quad (189)$$

где

$$\omega = v + \frac{\varepsilon}{2va} g_1(a) \quad (190)$$

или

$$\omega^2 = v^2 + \frac{\varepsilon}{a} g_1(a) \quad (190_1)$$

причем  $a$  и  $\theta$  здесь произвольные постоянные.

Если  $f(x)$  не асимметрична, то вообще имеем:

$$f(a \sin \tau) = h_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ h_n(a) \cos n\tau + g_n(a) \sin n\tau \}$$

и потому вместо (189) мы должны будем написать:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon h_0}{\nu^2} + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n \sin n(\omega t + \theta) + h_n \cos n(\omega t + \theta)}{n^2 - 1} \quad (189)$$

Возьмем конкретно случай уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon x^3 = 0$$

когда

$$f(x) = x^3$$

Так как тогда

$$f(a \sin \tau) = a^3 \sin^3 \tau = \frac{3}{4} a^3 \sin \tau - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\tau$$

то улучшенное приближенное решение будет

$$x = a \sin(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3(\omega t + \theta)$$

причем

$$\omega = \nu + \frac{3}{8} \varepsilon a^2$$

Возьмем еще уравнение колебаний маятника при малых отклонениях. Заменяя в этом уравнении вследствие малости отклонения  $\sin x$  на  $x - \frac{x^3}{6}$ , имеем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \left( x - \frac{x^3}{6} \right) = 0$$

Чтобы привести это уравнение к виду (186), полагаем:

$$\frac{g}{l} = \nu^2, \quad -\frac{g}{6l} x^3 = \varepsilon f(x) \quad (191)$$

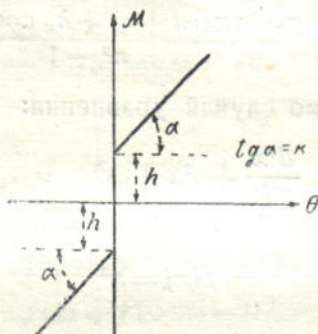
Тогда формулы (189) и (190) дадут:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \frac{a^3 \sin 3(\omega t + \theta)}{192}$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left(1 - \frac{a^2}{16}\right)} \quad (192)$$

Сравнивая полученные выражения с известными классическими разложениями по степеням амплитуды  $a$  для колебаний



Фиг. 36.

маятника, мы убедимся, что (191) и (192) дают точно два первых члена в этих разложениях.

Рассмотрим еще уравнение крутильных колебаний вала

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} c(x) = 0 \quad (193)$$

в случае, когда кривая зависимости

$$M = c(x)$$

имеет вид ломаной, изображенной на фиг. 36, т. е. когда

$$\left. \begin{aligned} c(x) &= h + kx, \text{ если } x > 0 \\ c(x) &= -h + xk, \text{ если } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Чтобы привести (193) к виду (186), полагаем:

$$\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} k = \nu^2$$

$$\varepsilon f(x) = \pm \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} h \begin{cases} \text{для } x > 0 \\ \text{„ } x < 0 \end{cases}$$

Тогда формула (189) дает:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \frac{4h}{\pi k} \sum_{n=3,5,7,\dots} \frac{\sin n(\omega t + \theta)}{n(n^2 - 1)} \quad (195)$$

а формула (190):

$$\omega = \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}} k \left(1 + \frac{2h}{\pi k a}\right) = \nu \left(1 + \frac{2h}{\pi k a}\right)$$

Заметим теперь, что для уравнения (193) в случае (194) нетрудно образовать точное решение. Это точное решение имеет следующий вид:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \frac{4h}{\pi} \sum_{n=3,5,7,\dots} \frac{(J_1 + J_2) \sin n(\omega t + \theta)}{n [J_1 J_2 n^2 \omega^2 - (J_1 + J_2) k]} \quad (196)$$

или, что то же самое:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \frac{4h}{\pi k} \sum_{n=3,5,7,\dots} \frac{\sin n(\omega t + \theta)}{n \left[ \left(\frac{\omega^2}{\nu^2}\right) n^2 - 1 \right]} \quad (197)$$

Здесь

$$\omega = \nu \sqrt{1 + \frac{4h}{\pi k a}} \quad (198)$$

Сравнивая приближенное решение (195) с точным (197), мы видим, что приближенное решение может быть получено путем замены в знаменателе  $n \left[ \left(\frac{\omega^2}{\nu^2}\right) n^2 - 1 \right]$  частоты  $\omega$  на ее „нулевое приближение“  $\nu$ .

Сравнивая далее (196) и (198), видим, что (196) представляет точно первые два члена в разложении формулы (198) в ряд по степеням отношения  $\frac{h}{ka}$ . Следует заметить также, что формула (190) в применении к рассматриваемому случаю дает для частоты точное значение (198).

Будем рассматривать теперь приближенное решение (177) применительно к уравнению квазиизохронных колебательных систем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (199)$$

тогда в уравнении (48) мы должны положить:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt} \quad (200)$$

Имеем, следовательно:

$$f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) = f(a \sin \tau) a \nu \cos \tau \quad (201)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (202)$$

и образуем разложение в ряд Фурье:

$$F(a \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n \varphi \quad (203)$$

Из (203), дифференцируя по  $\varphi$ , получим на основании (202):

$$af(a \cos \varphi) \sin \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} n F_n^*(a) \sin n \varphi$$

Отсюда, полагая  $\varphi = \tau + \frac{3\pi}{2}$ , из (201) имеем:

$$f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) = f(a \sin \tau) a \nu \cos \tau = -\nu \sum_{n=1}^{\infty} n F_n^* \sin n \left( \nu t + \varphi + \frac{3\pi}{2} \right)$$

и таким образом (177) даст следующее выражение для приближенного решения:

$$x = a \sin(\nu t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} F_n^*(a) \sin n \left( \nu t + \varphi + \frac{3\pi}{2} \right) \quad (204)$$

где  $\varphi$  — произвольная фазовая постоянная.

Здесь  $a$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a)$$

или, для случая стационарных колебаний, — обыкновенному уравнению:

$$F_1^*(a) = 0$$

Если мы введем другую фазовую постоянную, именно

$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

то формула (204) примет вид:

$$x = a \cos(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} F_n^*(a) \sin n(\omega t + \theta) \quad (205)$$

где  $\omega = \nu$ . Возьмем для примера случай уравнения ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \varepsilon(1 - x^2) \frac{dx}{dt} = 0$$

В этом случае

$$f(x) = x^2 - 1$$

и потому

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

Следовательно:

$$F(a \cos \varphi) = \frac{a^3 \cos^3 \varphi}{3} - a \cos \varphi = a \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) \cos \varphi + \frac{a^3}{12} \cos 3\varphi$$

так что:

$$F_1^*(a) = a \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

$$F_3^*(a) = \frac{a^3}{12} \quad (206)$$

$$F_n^*(a) = 0, \text{ если } n \neq 1 \text{ и } n \neq 3$$

Таким образом из (205) имеем:

$$x = a \cos(t + \theta) - \frac{\varepsilon a^3}{32} \sin 3(t + \theta) \quad (207)$$

Здесь  $\theta$  — произвольная постоянная, а амплитуда  $a$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

Для стационарных колебаний

$$a = 2$$

и следовательно:

$$x = 2 \cos \omega(t + \theta) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3\omega(t + \theta) \quad (208)$$

$$\omega = 1$$

Возвратимся теперь опять к уравнению (199). Мы видим, что частота колебаний в рассматриваемом приближении равна  $\nu$  — нулевому приближению. Поправочный член 1-го порядка малости в данном случае оказывается нулем (свойство квазиизохронности). Покажем теперь, как, исходя из формулы (205), можно образовать для случая стационарных колебаний выражение поправочного члена (для частоты) второго порядка малости.

Заметим для этого, что так как стационарное колебание периодически, обладая некоторым периодом  $T$ , то мы можем разложить точное решение  $x$  в ряд Фурье. Имеем

$$x = a \cos(\omega t + \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} [A_n \cos n(\omega t + \theta) + B_n \sin n(\omega t + \theta)] \quad (209)$$

где

$a$  — амплитуда,

$\theta$  — фаза первой гармоники,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

С другой стороны, из (199) получаем:

$$\int_0^T \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} x + \nu^2 x^2 + \varepsilon f(x) x \frac{dx}{dt} \right\} dt = 0$$

Легко убедиться, однако, что тождественно

$$\int_0^T \frac{d^2x}{dt^2} x dt = - \int_0^T \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt$$

$$\int_0^T f(x) x \frac{dx}{dt} dt = 0$$

благодаря периодичности  $x$ .

Следовательно:

$$\int_0^T \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \nu^2 \int_0^T x^2 dt \quad (210)$$

Подставив (209) в (210), имеем:

$$\omega^2 \left\{ a^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 [A_n^2 + B_n^2] \right\} = \nu^2 \left\{ a^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \right\}$$



откуда:

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 = \frac{a^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2)}{a^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2)} \quad (211)$$

Сравнивая теперь (205) и (209), мы видим, что приближенно можем положить:

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{\varepsilon n}{\nu(n^2 - 1)} F_n^*(a)$$

Итак, мы имеем следующую формулу для частоты стационарных колебаний:

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 = \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{\nu^2 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{n}{n^2 - 1} F_n^*(a) \right]^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\nu^2 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left[ \frac{n}{n^2 - 1} F_n^*(a) \right]^2} \quad (212)$$

Нетрудно убедиться, что эта формула будет точна во всяком случае до величин третьего порядка малости относительно  $\varepsilon$ . Пренебрегая поэтому в (212) величинами порядка малости  $\varepsilon^4$ , напомним ее в более простом виде:

$$\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[ \frac{F_n^*(a)}{a} \right]^2 \quad (213)$$

или

$$\omega = \nu \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n-1} \left[ \frac{F_n^*(a)}{a} \right]^2 \right\} \quad (214)$$

Воспользуемся этой формулой, например, для уравнения ван-дер-Поля.

Так как в этом случае при стационарных колебаниях

$$a = 2$$

то на основании (206) имеем:

$$F_3^*(a) = \frac{a^3}{12} = \frac{2}{3}, \quad F_n^*(a) = 0, \text{ если } n \neq 3$$

и следовательно:

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}, \text{ или } \omega^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \quad (215)$$

Возьмем в качестве следующего примера уравнение электронного генератора (при нормальной единице времени):

$$\frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{1}{\sqrt{LC}} V + \frac{1}{LC} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) f'(E_0 + V) \right\} \frac{dV}{dt} = 0$$

Для этого уравнения, очевидно, можем положить:

$$\varepsilon F(V) = \frac{1}{LC} \left\{ \frac{L}{R} V - (M - DL) f(E_0 + V) \right\}$$

поэтому:

$$\varepsilon F_1^*(a) = \frac{1}{LC} \left\{ \frac{L}{R} a - (M - DL) f_1(a) \right\}$$

$$\varepsilon F_n^*(a) = - \frac{(M - DL)}{LC} f_n(a), \quad n = 2, 3, \dots$$

где  $f_n(a)$  — коэффициенты Фурье в разложении

$$f(a \cos \varphi + E_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n \varphi$$

Таким образом на основании (214) имеем<sup>1)</sup>:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ 1 - \frac{(M - DL)^2}{2LC} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[ \frac{f_n(a)}{a} \right]^2 \right\} \quad (216)$$

причем амплитуда  $a$  должна удовлетворять уравнению стационарности

$$\varepsilon F_1^*(a) = 0$$

т. е.

$$\frac{L}{R} a - (M - DL) f_1(a) = 0$$

<sup>1)</sup> Отсюда мы видим, между прочим, зависимость частоты колебаний от амплитуды, зависимость, которая не учитывалась в первом приближении.

Благодаря этому уравнению формулу (216) можно представить в следующем виде:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{L}{R^2 C} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[ \frac{f_n(a)}{f_1(a)} \right]^2 \right\} \quad (217)$$

Рассмотрим теперь физическое значение входящих сюда величин.

Заметим прежде всего, что уравнение линейного контура генератора [то есть уравнение генератора при выключенной лампе, или математически — при  $f(E_0 + V) = 0$ ] будет:

$$LC \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} + x = 0$$

Решение этого уравнения имеет, поэтому, такой вид:

$$x = Ae^{-\frac{t}{2RC}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (218)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — произвольные постоянные и где

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{L}{4R^2 C}}$$

Так как контур у генератора слабозатухающий, то с весьма большой точностью

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

т. е.  $\Omega$  будет собственной частотой линейного контура.

Далее, согласно (218) мы видим, что при увеличении времени на один период  $\frac{2\pi}{\Omega}$ , амплитуда уменьшится в  $e^{\frac{\pi}{RC} \sqrt{LC}}$  раз. Логарифм (натуральный) этого отношения

$$\delta = \frac{\pi}{RC} \sqrt{LC} = \pi \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

Из (217) имеем тогда:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{\pi} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left( \frac{I_n}{I_1} \right)^2 \right\} \quad (219)$$

где

$$I_n = f_n(a)$$

Заметим теперь, что так как  $V$  есть переменная слагающая управляющего напряжения, то  $a$  есть его амплитуда.

Но в первом приближении

$$V = a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right)$$

и потому, обозначая через  $i_a$  анодный ток, получаем:

$$i_a = f\left[F_0 + a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi\right)\right] = f[E_0 + a \cos(\Omega t + \varphi)]$$

Отсюда из (220):

$$I_n = \frac{2}{T} \int_0^T i_a(t) \cos n(\Omega t + \varphi) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (220)$$

Итак, величины  $I_n$  (в первом приближении) являются соответственно амплитудами  $n$ -ых гармонических слагающих анодного тока.

Таким образом мы видим, что в формуле (219) все величины получили простую и наглядную интерпретацию.

#### § 4. Построение высших приближений

Мы указали уже, каким образом можно уточнить первое приближение, учтя высшие гармонические слагающие колебания.

Это уточненное приближенное решение удовлетворяло исходному нашему уравнению (48) с точностью до  $\epsilon^2$ .

Кроме того, для уравнений вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2x + \epsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0$$

был построен простой, хотя и несколько „кустарный“, придуманный ad hoc прием для вычисления частоты стационарных колебаний с точностью до  $\epsilon^3$  (т. е. с учетом членов порядка малости  $\epsilon^3$ ).

Укажем сейчас некоторые общие способы образования приближенных выражений, соответствующих стационарным колебаниям, удовлетворяющих рассматриваемым уравнениям с точностью до любой степени  $\epsilon$ . Заметим раз навсегда, что в даль-

нейшем мы постоянно будем предполагать, что функции, входящие в дифференциальные уравнения, обладают достаточным количеством производных, и что условие ограниченности амплитуд выполнено.

Когда мы будем говорить, что некоторое выражение удовлетворяет дифференциальному уравнению с точностью до  $\varepsilon^m$ , мы всегда будем подразумевать, что равномерно по отношению к  $t$  (в интервале  $0 \leq t < +\infty$ ) погрешность имеет порядок малости  $\varepsilon^m$ .

Начнем сперва с рассмотрения уравнения консервативной колебательной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) = 0 \quad (221)$$

(в этом случае, как видно, „произвольное“ колебание будет стационарным).

Согласно формуле (189<sub>1</sub>), „уточненное“ первое приближение будет:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) + \varepsilon \left\{ \frac{h_0(a)}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n \sin n(\omega t + \theta) + h_n \cos n(\omega t + \theta)}{n^2 - 1} \right\} \quad (222)$$

где  $a$  и  $\theta$  — „произвольные постоянные“ и где  $h_n, g_n$  — коэффициенты Фурье в разложении

$$f(a \sin \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (h_n \cos n\tau + g_n \sin n\tau) \quad (223)$$

Здесь, кроме того

$$\omega^2 = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{a} g_1(a) \quad (224)$$

Преобразуем сейчас выражение (222) так, чтобы в него входили коэффициенты Фурье в разложении<sup>1)</sup>:

$$f(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau \quad (225)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что функция косинуса при разложении в тригонометрический ряд Фурье не дает синусов, а лишь постоянный член и косинусы.

Для этого, заменив в (223)  $\tau$  на  $\tau + \frac{\pi}{2}$ , получим:

$$f(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ g_n \sin n \left( \tau + \frac{\pi}{2} \right) + h_n \cos n \left( \tau + \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

что дает

$$f(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( g_n \cos n \frac{\pi}{2} - h_n \sin n \frac{\pi}{2} \right) \sin n \tau + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left( g_n \sin n \frac{\pi}{2} + h_n \cos n \frac{\pi}{2} \right) \cos n \tau$$

откуда, сравнивая с (223), имеем:

$$g_n \cos n \frac{\pi}{2} - h_n \sin n \frac{\pi}{2} = 0$$

$$g_n \sin n \frac{\pi}{2} + h_n \cos n \frac{\pi}{2} = f_n$$

и, следовательно:

$$g_n = f_n \sin n \frac{\pi}{2}$$

(226)

$$h_n = f_n \cos n \frac{\pi}{2}$$

Подставив эти значения (226) в формулу (222), получим:

$$x = a \sin (\omega t + \theta) + \frac{\varepsilon}{y^2} \left\{ -f_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n \left( \omega t + \theta - \frac{\pi}{2} \right)}{n^2 - 1} \right\}$$

или, вводя для удобства вместо  $\theta$  новую произвольную постоянную

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

имеем:

$$x = a \cos (\omega t + \varphi) + \frac{\varepsilon}{y^2} \left\{ -f_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n (\omega t + \varphi)}{n^2 - 1} \right\} \quad (227)$$

Полученная формула (227) приближенного решения имеет по сравнению с (222) то преимущество, что содержит лишь косинусоидальные члены.

В соответствии с (226) формулу (224) для квадрата частоты напишем в виде:

$$\omega^2 = \nu^2 + \varepsilon \frac{f_1(a)}{a} \quad (228)$$

Выражения (227) и (228) наводят нас на мысль о возможности получить высшие приближения (удовлетворяющие нашему уравнению с точностью до любой заданной степени  $\varepsilon$ ) путем следующих соображений.

Представим решение уравнения (221) в виде  $x = z(\tau)$ , где  $\tau = \omega t + \varphi$  ( $\varphi$  — произвольная постоянная), и  $z(\tau)$  — периодическая функция  $\tau$  с периодом  $2\pi$ .

Замечаем при этом, что  $x = z(\tau)$  будет удовлетворять (221) тогда и только тогда, когда  $z(\tau)$  удовлетворяет уравнению:

$$\omega^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \nu^2 z + \varepsilon f(z) = 0 \quad (229)$$

Будем искать выражения  $z$  и частоты колебания  $\omega$ , исходя из разложений:

$$z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n z_n(\tau) \quad (230)$$

$$\omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n$$

коэффициенты которых определим, подставив (230) в (229) и приравняв нулю коэффициенты при отдельных степенях  $\varepsilon$ , притом так, чтобы  $z_n(\tau)$  оказались периодическими функциями  $\tau$  с периодом  $2\pi$ .

Таким путем получим уравнения вида:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} + \nu^2 z_0 &= 0 \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \nu^2 z_1 &= -f(z_0) - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + \nu^2 z_2 &= -f'(z_0) z_1 - \dot{\alpha}_2 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \alpha_1 \frac{dz_1}{d\tau} \\ &\dots \\ \alpha_0 \frac{d^2 z_{n+1}}{d\tau^2} + \nu^2 z_{n+1} &= F(z_0, z_1, \dots, z_n) - \alpha_{n+1} \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \\ &\quad - \alpha_n \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} - \dots - \alpha_1 \frac{d^2 z_n}{d\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

где  $F(z_0, z_1, \dots, z_n)$  — некоторое выражение, зависящее от  $z_0, z_1, \dots, z_n$  (полиномиально по отношению к  $z_1, \dots, z_n$ ).

Пусть функции  $z_0, z_1, \dots, z_N$  и величины  $\alpha_1, \alpha_0, \dots, \alpha_N$  удовлетворяют первым  $N+1$  уравнениям системы (231); тогда ясно, что выражение

$$x = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n z_n (\omega t + \varphi) \quad (232)$$

при

$$\omega^2 = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \alpha_n \quad (233)$$

будет удовлетворять нашему уравнению (221) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{N+1}$  и, следовательно, может быть рассматриваемо, как искомое  $(N+1)$ -ое приближение.

При определении  $z_n$  и  $\alpha_n$  из (231) имеется, очевидно, некоторый произвол, который мы устраним, требуя [по сравнению с (227) и (228)], чтобы  $z_0 = a \cos \tau$ ,  $\alpha_0 = \nu^2$  и чтобы  $z_n(\tau)$  (при  $n \geq 1$ ) не имели в своем составе основной гармоники<sup>1)</sup>.

Выражения:

$$z_0 = a \cos \tau, \quad \alpha_0 = \nu^2 \quad (234)$$

очевидно, удовлетворяют первому из уравнений (231). Рассмотрим второе уравнение этой системы:

$$\nu^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 \right) = -f(a \cos \tau) + \alpha_1 a \cos \tau \quad (235)$$

Но так как согласно (225):

$$f(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau$$

поэтому (235) дает:

$$\nu^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 \right) = - \sum_{n=2}^{\infty} f_n(a) \cos n\tau - f_0(a) + [\alpha_1 a - f_1(a)] \cos \tau \quad (236)$$

Из этого соотношения мы заключаем, что если в правой части (236) имеется основная гармоника, то в выражении для  $z_1$  появляется секулярный член.

Так как мы требуем, чтобы  $z_1$  явились периодическими функциями  $\tau$ , то амплитуду основной гармоники в правой

<sup>1)</sup> Закрывая постоянный член и члены вида  $\cos m\tau$  при  $m \geq 2$



части (236) следует приравнять нулю, что даст нам уравнение для определения  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} \text{или} \quad \alpha_1 a &= f_1(a) \\ \alpha_1 &= \frac{f_1(a)}{a} \end{aligned} \quad (237)$$

Подставив найденное значение (237) в (236), имеем:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 = -\frac{1}{\nu^2} \left( f_0 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n \cos n\tau \right)$$

Решая это уравнение, приняв во внимание то условие, чтобы в выражении  $z_1$  не было основной гармоники, получаем:

$$z_1 = -\frac{1}{\nu^2} f_0 + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n \cos n\tau}{n^2 - 1} \quad (238)$$

Мы видим, между прочим, что в выражении для  $z_1$ , как мы требовали, нет членов вида  $\sin n\tau$ , т. е.  $z_1$  будет „функцией косинуса“.

Легко видеть также, что формулы (237) и (238) находятся в полном соответствии с формулами (225) и (226).

Повторяя только что изложенное рассуждение, мы можем последовательно определить функции  $z_1, z_2, z_3, \dots$  (удовлетворяющие всем нашим требованиям) и величины  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

Докажем это по способу индукции.

Пусть в самом деле мы построили функции  $z_1(\tau), \dots, z_n(\tau)$  (не заключающие основной гармоники и являющиеся функциями  $\cos \tau$ ) и величины  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , удовлетворяющие  $n$  первым уравнениям системы (231).

Покажем, что  $(n+1)$ -ое уравнение этой системы дает возможность определить  $z_{n+1}$  и  $\alpha_{n+1}$  и притом так, чтобы  $z_{n+1}$  могло быть представлено в виде:

$$z_{n+1} = x_0^{(n+1)} + \sum_{m=2}^{\infty} x_m^{(n+1)} \cos m\tau$$

В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 z_{n+1}}{d\tau^2} + z_{n+1} \right) \nu^2 &= F(z_0, z_1, \dots, z_n) - \\ &- \alpha_n \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} - \dots - \alpha_1 \frac{d^2 z_n}{d\tau^2} + \alpha_{n+1} a \cos \tau \end{aligned} \quad (239)$$

Так как  $z_0, z_1, \dots, z_n$  состоят лишь из косинусоидальных членов, то  $F(z_0, z_1, \dots, z_n)$  также состоит лишь из косинусоидальных членов, равно как и  $\frac{d^2 z_1}{d\tau^2}, \dots, \frac{d^2 z_n}{d\tau^2}$ .

Мы можем, следовательно, написать<sup>1)</sup>:

$$F(z_0, z_1, \dots, z_n) - \alpha \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} - \dots - \alpha_1 \frac{d^2 z_n}{d\tau^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m \cos m\tau$$

и таким образом из (239) получим:

$$\frac{d^2 z_{n+1}}{d\tau^2} + z_{n+1} = \frac{1}{y^2} \left( \xi_0 + \sum_{m=2}^{\infty} \xi_m \cos m\tau \right) + \frac{1}{y^2} (\alpha_{n+1} a + \xi_1) \cos \tau \quad (240)$$

Отсюда, уничтожая секулярный член в  $z_{n+1}$ , имеем уравнение для определения  $\alpha_{n+1}$ :

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\xi_1}{a} \quad (241)$$

Подставив это значение (241) в правую часть уравнения (240), получаем

$$\frac{d^2 z_{n+1}}{d\tau^2} + z_{n+1} = \frac{1}{y^2} \left( \xi_0 + \sum_{m=2}^{\infty} \xi_m \cos m\tau \right)$$

Этому уравнению и всем нашим условиям удовлетворим, положив:

$$z_{n+1} = \frac{1}{y^2} \left( \xi_0 - \sum_{m=2}^{\infty} \xi_m \frac{\cos m\tau}{m^2 - 1} \right)$$

Итак, изложенный метод действительно позволяет определить  $z_0, z_1, z_2, \dots$ ;  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  до какого угодно высокого значения индекса  $n$  и тем самым построить приближенные решения, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению (221) с точностью до любой степени  $\varepsilon$  (до величины сколь угодно высокого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ ).

Применим сейчас этот метод к уравнению

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (242)$$

<sup>1)</sup> Так как мы уже определили  $z_0, \dots, z_n$ ;  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ , то величины  $\xi_m$  должны рассматриваться здесь как известные функции амплитуды  $a$ .

Для этого случая на основании (231) имеем, очевидно:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 = -z_0^3 - \alpha_1 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 = -3z_0^2 z_1 - \alpha_2 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} \quad (243)$$

$$\frac{d^2 z_3}{d\tau^2} + z_3 = -3z_0^2 z_2 - 3z_1^2 z_0 - \alpha_3 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \alpha_2 \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} - \alpha_1 \frac{d^2 z_2}{d\tau^2}$$

причем:

$$z_0 = a \cos \tau, \quad \alpha_1 = 1 \quad (244)$$

На основании (244), первое из уравнений (243) напомним в виде:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 = -a^3 \cos^3 \tau + \alpha_1 a \cos \tau = \left( \alpha_1 a - \frac{3}{4} a^3 \right) \cos \tau - \frac{a^3}{4} \cos 3\tau$$

Следовательно:

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} a^2$$

$$z_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3\tau \quad (245)$$

Подставив (245) во второе из уравнений (243), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 &= -\frac{3a^5}{32} \cos^2 \tau \cos 3\tau + \frac{27}{128} a^5 \cos 3\tau + \alpha_2 a \cos \tau = \\ &= \left( \frac{27}{128} - \frac{3}{64} \right) a^5 \cos 3\tau - \frac{3a^5}{128} \cos 5\tau + \left( \alpha_2 - \frac{3a^5}{128} \right) \cos \tau = \\ &= \frac{21}{128} a^5 \cos 3\tau - \frac{3a^5}{128} \cos 5\tau + \left( \alpha_2 - \frac{3a^5}{128} \right) \cos \tau \end{aligned}$$

откуда:

$$\alpha_2 = \frac{3a^4}{128}$$

$$z_2 = -\frac{21}{1024} a^5 \cos 3\tau + \frac{a^5}{1024} \cos 5\tau \quad (246)$$



где

$$F(z_0, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \left[ f \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z_k \right) + \varepsilon f_1 \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z_k \right) + \dots + \varepsilon^n f_n \left( \sum_{k=0}^n \varepsilon^k z_k \right) \right] \right\}_{\varepsilon=0}$$

Как и раньше, решение уравнений (250) начинаем с формул:

$$\alpha_0 = v^2, \quad z_0 = a \cos \tau$$

Рассмотрим теперь уравнение консервативной колебательной системы в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2 x + \varepsilon f(x) = 0 \quad (251)$$

где  $f(x)$  представляется степенным рядом, расположенным по возрастающим степеням  $x$ , начиная со степени не ниже второй:

$$f(x) = \sum_{m=2}^{\infty} b_m x^m \quad (252)$$

В этом случае в уравнении (251) нет малого параметра в явном виде. Однако, если мы ограничимся случаем „малых колебаний“, то ясно видно, что, во-первых,  $f(x)$  мало по сравнению с  $v^2$  и, во-вторых,  $f(x)$  состоит из ряда членов с постоянно возрастающей степенью малости.

Для случая малых колебаний мы можем образовать разложения, идущие по степеням амплитуды  $a$ .

Для этого можно применить, например, такой прием. Вместо (251) рассматриваем уравнение вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v^2 x + \rho b_2 x^2 + \rho^2 b_3 x^3 + \rho^3 b_4 x^4 + \dots = 0 \quad (253)$$

содержащее параметр  $\rho$ .

Для уравнения (253) применяем только что изложенный метод и получаем решение в виде:

$$x = z_0(\omega t + \varphi) + \rho z_1(\omega t + \varphi) + \rho^2 z_2(\omega t + \varphi) + \dots \\ \omega^2 = \alpha_0 + \rho \alpha_1 + \rho^2 \alpha_2 + \dots; \quad \alpha_0 = v^2$$

Полагая затем в этих формулах  $\rho = 1$ , имеем искомое решение для уравнения (251):

$$x = z_0(\omega t + \varphi) + z_1(\omega t + \varphi) + z_2(\omega t + \varphi) + \dots \quad (254)$$

расположенное по степеням амплитуды  $a$ .

Возьмем, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + x^2 = 0$$

Используя (250), напомним:

$$\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + z_1 = -z_0^2 - \alpha_1 \frac{d^2z_0}{d\tau^2}$$

$$\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 = -2z_0z_1 - \alpha_2 \frac{d^2z_0}{d\tau^2} - \alpha_1 \frac{d^2z_1}{d\tau^2} \quad (255)$$

$$\frac{d^2z_3}{d\tau^2} + z_3 = -2z_0z_2 - z_1^2 - \alpha_3 \frac{d^2z_0}{d\tau^2} - \alpha_2 \frac{d^2z_1}{d\tau^2} - \alpha_1 \frac{d^2z_2}{d\tau^2}$$

причем

$$z_0 = a \cos \tau, \alpha_0 = 1 \quad (256)$$

Итак, имеем:

$$\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + z_1 = -a^2 \cos^2 \tau + \alpha_1 a \cos \tau = -\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \cos 2\tau}{2} + \alpha_1 a \cos \tau$$

откуда:

$$\alpha_1 = 0$$

$$z_1 = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \cos 2\tau}{6} \quad (257)$$

Подставив (256) и (257) во второе из уравнений (255), получаем:

$$\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 = -2 \left( -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \cos 2\tau}{6} \right) a \cos \tau + \alpha_2 a \cos \tau =$$

$$= \left( a^3 - \frac{1}{6} a^3 + \alpha_2 a \right) \cos \tau - \frac{a^3}{6} \cos 3\tau$$

что дает:

$$\alpha_2 = -\frac{5}{6} a^2$$

$$z_2 = \frac{a^3}{48} \cos 3\tau \quad (258)$$

Далее, на основании (256), (257), (258) и третьего из уравнений, имеем:

$$\frac{d^2z_3}{d\tau^2} + z_3 = -\frac{a^4}{24} \cos \tau \cos 3\tau - \left( -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \cos 2\tau}{6} \right)^2 + \alpha_3 a \cos \tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5a^4}{9} \cos 2\tau = -\frac{a^4}{48} \cos 2\tau - \frac{a^4}{48} \cos 4\tau - \frac{a^4}{4} + \\
& + \frac{a^4}{6} \cos 2\tau + \frac{a^4}{36} \frac{1 + \cos 4\tau}{2} - \frac{5a^4}{9} \cos 2\tau + \alpha_3 a \cos \tau = \\
& = -\frac{17}{72} a^4 - \frac{59}{144} a^4 \cos 2\tau - \frac{a^4 \cos 4\tau}{144} + \alpha_3 a \cos \tau
\end{aligned}$$

откуда:

$$\alpha_3 = 0$$

$$z_3 = -\frac{17}{72} a^4 + \frac{59}{432} a^4 \cos 2\tau + \frac{a^4 \cos 4\tau}{2160} \quad (259)$$

Таким образом получаем следующее приближенное решение рассматриваемого уравнения, точное до величин порядка малости  $a^5$ :

$$\begin{aligned}
x = & a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \cos 2(\omega t + \varphi)}{6} + \\
& + \frac{a^3}{48} \cos 3(\omega t + \varphi) - \frac{17}{72} a^4 + \frac{59}{432} a^4 \cos 2(\omega t + \varphi) + \\
& + \frac{a^4 \cos 4(\omega t + \varphi)}{2160}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
x = & -\frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{17}{36} a^2 \right) + a \cos(\omega t + \varphi) + \\
& + \frac{a^2}{6} \left( 1 - \frac{59}{72} a^2 \right) \cos 2(\omega t + \varphi) + \frac{a^3}{48} \cos 3(\omega t + \varphi) + \\
& + \frac{a^4}{2160} \cos 4(\omega t + \varphi) \quad (260)
\end{aligned}$$

Здесь для квадрата частоты колебаний получаем с точностью до  $a^4$ :

$$\omega^2 = 1 - \frac{5}{6} a^2 \quad (261)$$

Если функция (252) асимметрична, т. е. если

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^{2m+1} \quad (262)$$

то вместо уравнения (253) целесообразно ввести в рассмотрение уравнение такого вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \rho x^{2m+1} = 0 \quad (263)$$

Таким путем мы получим разложение для  $x$  по нечетным степеням амплитуды  $a$  и для  $\omega^2$  — по четным.

Возьмем для примера уравнение маятника:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

Положим:

$$\frac{g}{l} = v^2 \quad (264)$$

Напишем его в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x + v^2 \left( -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) \quad (265)$$

Тогда вспомогательное уравнение (263) будет:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x + v^2 \left( -\frac{x^3}{3!} \rho + \frac{x^5}{5!} \rho^2 - \dots \right) = 0$$

и следовательно, на основании (250) мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 &= \frac{z_0^3}{6} - \frac{\alpha_1}{v^2} \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} \\ \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 &= \frac{z_0^5}{2} - \frac{z_0^3}{120} - \frac{\alpha_2}{v^2} \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \frac{\alpha_1}{v^2} \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} \end{aligned} \quad (266)$$

причем:

$$\alpha_0 = v^2, \quad z_0 = a \cos \tau \quad (267)$$

Следовательно мы имеем:

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 = \frac{a^3}{6} \cos^3 \tau + \frac{\alpha_1}{v^2} a \cos \tau = \frac{a^3}{24} \cos 3\tau + \left( \frac{a^3}{8} + \frac{\alpha_1 a}{v^2} \right) \cos \tau$$

откуда:

$$\frac{\alpha_1}{v^2} = -\frac{a^2}{8}, \quad z_1 = -\frac{a^3}{192} \cos 3\tau \quad (268)$$



Подставляя значение (267) и (268) во второе из уравнений (266), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 &= -\frac{a^5}{384} \cos^2 \tau \cos 3\tau - \frac{a^5}{120} \cos^5 \tau + \frac{3a^5}{512} \cos 3\tau + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\nu^2} a \cos \tau = -\frac{a^5}{384} \cdot \frac{1 + \cos 2\tau}{2} \cos 3\tau - \\ &- \frac{a^5}{120} \cdot \frac{\cos 5\tau + 5\cos 3\tau + 10\cos \tau}{16} + \frac{3a^5}{512} \cos 3\tau + \frac{\alpha_2}{\nu^2} a \cos \tau = \\ &= -a^5 \left( \frac{1}{120 \cdot 16} + \frac{1}{384 \cdot 4} \right) \cos 5\tau + a^5 \left( \frac{3}{512} - \frac{5}{120 \cdot 16} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{384 \cdot 2} \right) \cos 3\tau + \left( \frac{\alpha_2}{\nu^2} a - \frac{a^5}{12 \cdot 16} - \frac{a^5}{384 \cdot 4} \right) \cos \tau = \\ &= -\frac{3}{2560} \cos 5\tau + \frac{a^5}{512} \cos 3\tau + \left( \frac{\alpha_2}{\nu^2} a - \frac{3}{512} a^5 \right) \cos \tau \end{aligned}$$

что дает:

$$\frac{\alpha_2}{\nu^2} = \frac{3}{512} a^4, \quad z_2 = -\frac{a^5}{4096} \cos 3\tau + \frac{a^5}{20480} \cos 5\tau \quad (269)$$

Таким образом, с точностью до  $a^7$ :

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{a^3}{192} \cos 3(\omega t + \varphi) - \frac{a^5}{4096} \cos 3(\omega t + \varphi) + \\ &+ \frac{a^5}{20480} \cos 5(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi) - \\ &- \frac{a^2}{192} \left( 1 + \frac{3}{64} a^2 \right) \cos 3(\omega t + \varphi) + \frac{a^5}{20480} \cos 5(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (270)$$

где с точностью до  $a^6$ :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \left( 1 - \frac{a^2}{8} + \frac{3a^4}{512} \right) \quad (271)$$

Сравнивая полученные формулы (270) и (271) с ранее установленными формулами (191) и (192), мы видим, что эти последние могут быть получены из первых — отбрасыванием в них соответственно величин порядка малости  $a^5$  и  $a^4$ .

До сих пор мы рассматривали консервативные колебательные системы, когда произвольное колебание („общее решение“ соответствующего уравнения) было стационарным.

Перейдем теперь к проблеме расчета высших приближений для стационарных колебаний в неконсервативных системах, возвратившись к рассмотрению общего уравнения (48):

$$\frac{dx^2}{dt} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (48)$$

На основании формул (173), (177), (178) и (179) напомним уточненное первое приближение [положив для этого в формулах (177) и (178):  $\nu t + \varphi - \frac{\pi}{2} = \psi$ ] в виде:

$$x = a \cos \psi - \frac{\varepsilon}{\nu^2} F_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n\psi + G_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1} \quad (272)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\nu} G_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(a) \quad (273)$$

$$\omega(a) = \nu + \frac{\varepsilon}{2\nu a} F_1(a) \quad (274)$$

где  $F_n, G_n$  будут коэффициентами Фурье в разложении:

$$f(a \cos \tau, -a \nu \sin \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_n(a) \cos n\tau + G_n(a) \sin n\tau \} \quad (275)$$

Для стационарных колебаний из (273) имеем:

$$G_1(a) = 0 \quad (276)$$

$$\psi = \omega(a)t + \varphi \quad (277)$$

где  $\varphi$  — произвольная постоянная, и потому (272) дает:

$$x = a \cos \{ \omega(a)t + \varphi \} - \frac{\varepsilon}{\nu^2} F_0(a) + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n \{ \omega(a)t + \varphi \} + G_n(a) \sin n \{ \omega(a)t + \varphi \}}{n^2 - 1} \quad (278)$$

Для случая консервативных колебательных систем, как мы видели, функция  $G_1(a)$  тождественно равна нулю, и потому в этом случае выражение (278) для приближенного решения зависит от двух произвольных постоянных  $a$  и  $\varphi$ .

Сейчас мы рассмотрим противоположные случаи, когда  $G_1(a)$  не обращается тождественно в нуль ни в каком интервале значений  $a$ .

Предположим, кроме того, что эта функция  $G_1(a)$  имеет лишь простые корни, так что если для некоторого  $a$ :  $G_1(a) = 0$ , то для него  $G_1'(a) \neq 0$ . В этом случае, на основании (276) и (278), мы видим, что каждому корню  $G_1(a)$  соответствует некоторое стационарное состояние, причем выражение (278) для этого стационарного состояния зависит лишь от одной произвольной постоянной, а именно от  $\varphi$ .

Приступая теперь к образованию высших приближенных, используем в основном способ, ранее примененный для консервативных колебательных систем.

Будем представлять решение уравнения (48), соответствующее стационарным колебаниям, в виде:

$$x = z(\omega t + \varphi) \quad (279)$$

где  $\varphi$  — произвольная постоянная,  $\omega$  — частота колебания,  $z(\tau)$  — периодическая функция  $\tau$  с периодом  $2\pi$ .

Заметивши прежде всего, что функция  $z(\tau)$  должна удовлетворять уравнению вида:

$$\omega^2 \frac{d^2 z}{d\tau^2} + \nu^2 z + \varepsilon f\left(z, \omega \frac{dz}{d\tau}\right) = 0 \quad (280)$$

будем определять  $z(\tau)$  и частоту колебаний  $\omega$ , исходя из разложений:

$$\begin{aligned} z(\tau) &= z_0(\tau) + \varepsilon z_1(\tau) + \varepsilon^2 z_2(\tau) + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \end{aligned} \quad (281)$$

где  $z_n(\tau)$  — периодические функции  $\tau$  с периодом  $2\pi$ .

Чтобы определить  $z_n(\tau)$  и  $\omega_n$ , подставим (281) в левую часть уравнения (280), разложим результат подстановки по возрастающим степеням  $\varepsilon$  и приравняем нулю коэффициенты при каждой степени  $\varepsilon$ .



Подставив (284) во второе из уравнений (282) [воспользовавшись (275)], имеем:

$$\begin{aligned} \nu^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 \right) &= -f(a \cos \tau, -a\nu \sin \tau) + 2\nu\omega_1 a \cos \tau = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_n(a) \cos n\tau + G_n(a) \sin n\tau \right\} + 2\nu\omega_1 a \cos \tau \end{aligned} \quad (285)$$

Чтобы это уравнение допускало относительно  $z_1$  периодическое решение (т. е. чтобы в выражении  $z_1$  не появилось секулярного члена), необходимо приравнять нулю основную гармонику, входящую в правую часть (285) (приравнять нулю коэффициент при  $\cos \tau$  и при  $\sin \tau$ ).

Получим уравнения:

$$\begin{aligned} G_1(a) &= 0 \\ \omega_1 &= \frac{F_1(a)}{2\nu a} \end{aligned} \quad (286)$$

определяющие  $a$  и  $\omega_1$

Отсюда видим, что уравнение (285) примет вид:

$$\nu^2 \left( \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 \right) = -F_0(a) - \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ F_n(a) \cos n\tau + G_n(a) \sin n\tau \right\} \quad (287)$$

Это уравнение решаем, положив:

$$z_1 = a_1 \cos \tau - \frac{F_0(a)}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n\tau + G_n(a) \sin n\tau}{n^2 - 1} \quad (288)$$

где  $a_1$  — неопределенная постоянная.

Здесь, в отличие от случая консервативных систем,  $z_1$  на данном этапе определено лишь до первой гармоники. Амплитуду  $a_1$  этой гармоники мы определим из условия периодичности (отсутствия секулярных членов) выражения  $z_2$ .

Напишем формулу (288) в виде:

$$z_1 = a \cos \tau + u$$

Здесь:

$$u = -\frac{1}{\nu^2} F_0(a) + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n\tau + G_n(a) \sin n\tau}{n^2 - 1} \quad (290)$$

есть некоторая определенная уже периодическая функция  $\tau$ .

Подставив (289) в третье уравнение (282), получаем:

$$v^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 \right) = -f'_z(a \cos \tau, -a\nu \sin \tau) a_1 \cos \tau + \quad (291)$$

$$+ f'_{z'}(a \cos \tau, -a\nu \sin \tau) a_1 \nu \sin \tau + 2\nu\omega_1 a_1 \cos \tau + 2\nu\omega_2 a \cos \tau + v(\tau)$$

где

$$v(\tau) = -f'_{z'} \left( z_0, \nu \frac{dz_0}{d\tau} \right) u - \nu f'_{z'} \left( z_0, \nu \frac{dz_0}{d\tau} \right) \frac{du}{d\tau} - 2\nu\omega_1 \frac{d^2 u}{d\tau^2} - \quad (292)$$

$$- f'_{z'} \left( z_0, \nu \frac{dz_0}{d\tau} \right) \omega_1 \frac{dz_0}{d\tau} - \omega_1^2 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2}$$

Очевидно,  $v(\tau)$  есть некоторая определенная на данном этапе периодическая функция  $\tau$ . Разложим ее в ряд Фурье. Имеем:

$$v(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_n \cos n\tau + w_n \sin n\tau) \quad (293)$$

С другой стороны:

$$-f'_z a_1 \cos \tau + f'_{z'} a_1 \nu \sin \tau =$$

$$= - \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[(a + \varepsilon a_1) \cos \tau, -(a + \varepsilon a_1) \nu \sin \tau] \right\}_{\varepsilon=0}$$

и потому, на основании (275), получаем:

$$-f'_z a_1 \cos \tau + f'_{z'} a_1 \nu \sin \tau = \quad (294)$$

$$= -a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F'_n(a) \cos n\tau + G'_n(a) \sin n\tau \right\}$$

Подставив (293) и (294) в (291), имеем:

$$v^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 \right) = -a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F'_n(a) \cos n\tau + G'_n(a) \sin n\tau \right\} + \quad (295)$$

$$+ 2\nu(\omega_1 a_1 + \omega_2 a) \cos \tau + \sum_{n=0}^{\infty} (v_n \cos n\tau + w_n \sin n\tau)$$

В виду периодичности  $z_2$  приравняем во второй части уравнения (295) коэффициент при  $\cos \tau$  и при  $\sin \tau$  нулю, что дает:

$$\begin{aligned} a_1 G'_n(a) &= w_1 \\ \omega_2 a + \omega_1 a_1 &= -\frac{v_1}{2\nu} \end{aligned} \quad (296)$$

Первое из этих уравнений определяет  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{w_1}{G'_1(a)} \quad (297)$$

если  $G'_1(a)$  не равно нулю [мы уже раньше сделали предположение, что функция  $G_1(a)$  не имеет двойных корней, и благодаря этому уравнение (296) разрешимо].

Из второго же уравнения имеем значение  $\omega_2$ :

$$\omega_2 = -\frac{1}{a} \left( \frac{v_1}{2\nu} + \omega_1 a_1 \right) \quad (298)$$

Вследствие (296) уравнение (295) может быть записано так:

$$\nu^2 \left( \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 \right) = (v_0 - a_1 F'_0) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (v_n - a_1 F'_n) \cos n\tau + (w_n - a_1 G'_n) \sin n\tau \right\}$$

Решаем это уравнение, положив:

$$z_2 = a_2 \cos \tau + \frac{1}{\nu^2} (v_0 - a_1 F'_0) +$$

$$+ \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (v_n - a_1 F'_n) \cos n\tau + (w_n - a_1 G'_n) \sin n\tau \right\} \frac{1}{1-n^2}$$

где  $a_2$  — неопределенная постоянная. Величины  $a_2$  и  $\omega_3$  определим из условия периодичности  $z_3$  и т. д.

Благодаря общему виду уравнений (282) нетрудно обнаружить, что  $a_n$  и  $\omega_{n+1}$  определяются из условия периодичности  $z_{n+1}$ , которое приводит к линейным относительно этих неизвестных уравнениям:

$$\begin{aligned} a_n G'_n(a) &= \xi_n \\ 2\nu (\omega_{n+1} a + \omega_1 a_n) &= \eta_n \end{aligned} \quad (299)$$

где  $\xi_n, \eta_n$  — ранее определенные величины.

Уравнения (299) всегда разрешимы при  $G_1'(a) \neq 0$ , и потому при сделанном допущении относительно функции  $G_1(a)$  изложенный процесс может быть продолжен как угодно долго и дает возможность определить  $z_n(\tau)$  и  $\omega_n$  до какого угодно высокого значения индекса  $n$ .

Пусть, например, мы определили  $z_0(\tau), \dots, z_N(\tau); \omega_0, \dots, \omega_N$ . Тогда можем образовать выражение для  $(N+1)$ -го приближения, положив:

$$\begin{aligned} x_0 &= z_0(\omega t + \varphi) + \varepsilon z_1(\omega t + \varphi) + \dots + \varepsilon^N z_N(\omega t + \varphi) \\ \omega &= \nu + \varepsilon \omega_1 + \dots + \varepsilon^N \omega_N \end{aligned} \quad (300)$$

Например, для второго приближения по этому способу, на основании (284), (286) и (288), имеем:

$$\begin{aligned} x &= (a + \varepsilon a_1) \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\nu^2} F_0(a) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n(\omega t + \varphi) + G_n(a) \sin n(\omega t + \varphi)}{n^2 - 1} \\ \omega &= \nu + \varepsilon \frac{F_1(a)}{2\nu a} \end{aligned} \quad (301)$$

Сравнивая полученные приближения (301) с ранее установленной формулой (278), мы видим, что единственное отличие их состоит в том, что амплитуда первой гармоники в (278) равна  $a$ , где  $a$  — корень  $G_1(a)$ , а в формуле (301) эта амплитуда равна  $a + \varepsilon a_1$ .

На первый взгляд может показаться несколько странным, почему поправка к величине амплитуды первой гармоники будет вообще первого порядка малости по отношению к  $\varepsilon$  (а не высшего). Ведь (278) есть частный случай (в применении к стационарным колебаниям) приближенного решения (272) и (273), которое, как мы видели, удовлетворяет исходному уравнению (48) с точностью до величин второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Дело в том, что, как мы увидим далее, для высших приближений уравнение (178) принимает вид:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\nu} G_1(a) + \varepsilon^2 s_1(a) + \varepsilon^3 s_2(a) + \dots \quad (302)$$



и в частности для стационарных колебаний имеем:

$$\frac{\varepsilon}{2\nu} G_1(a) + \varepsilon^2 s_1(a) + \varepsilon^3 s_2(a) + \dots = 0 \quad (302_1)$$

Поэтому благодаря присутствию множителя  $\varepsilon$  перед  $G_1(a)$  мы видим, что если в (302<sub>1</sub>) мы отбросим величины порядка малости, начиная с  $N$ -го, то в значении стационарной амплитуды первой гармоники мы совершим ошибку порядка малости, вообще говоря, не  $N$ -го, а лишь  $(N-1)$ -го.

Заметим теперь, что в только что изложенном методе величины  $a_n$  и  $\omega_{n+1}$  определяются на одном и том же этапе. Иначе говоря, величина  $\omega_{n+1}$  определяется вместе с функцией  $z_n(\tau)$ .

Поэтому целесообразно вместо формул (300) пользоваться формулами:

$$\begin{aligned} x &= z_0(\omega t + \varphi) + \varepsilon z_1(\omega t + \varphi) + \dots + \varepsilon^N z_N(\omega t + \varphi) \\ \omega &= \nu + \varepsilon \omega_1 + \dots + \varepsilon^{N+1} \omega_{N+1} \end{aligned} \quad (303)$$

про которые можно сказать, что „форма“ стационарного колебания характеризуется ими с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{N+1}$ , а частота — с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{N+2}$ .

Положив в (303)  $N=0$ , имеем:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega &= \nu + \frac{\varepsilon F_1(a)}{2\nu a}, \quad G_1(a) = 0 \end{aligned}$$

получая таким образом наше обычное „первое приближение“ (ранее выведенное, исходя из „принципа усреднения“).

Для  $N=1$  имеем:

$$\begin{aligned} x &= (a + \varepsilon a_1) \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\varepsilon}{\nu^2} F_0(a) + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n(\omega t + \varphi) + G_n(a) \sin n(\omega t + \varphi)}{n^2 - 1} \end{aligned} \quad (304)$$

$$\omega = \nu + \varepsilon \frac{F_1(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 \omega_2$$

Чтобы вполне раскрыть это „второе приближение“, нам следует определить  $\alpha_1$  и  $\omega_2$ . Проведем эту операцию для случая уравнения вида (199):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \epsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (305)$$

Тогда в наших формулах следует положить:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt} \quad (306)$$

Вводим, как и раньше, функцию (198):

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

и образуем разложение в ряд Фурье:

$$F(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n\tau$$

Отсюда, дифференцируя по  $\tau$ , получаем:

$$af(a \cos \tau) \sin \tau = \sum_{n=0}^{\infty} n F_n^*(a) \sin n\tau$$

и потому, на основании (306):

$$f(a \cos \tau, -a\nu \sin \tau) = -\nu \sum_{n=0}^{\infty} n F_n^*(a) \sin n\tau$$

Таким образом, вследствие (275), имеем в рассматриваемом случае:

$$F_n(a) = 0, \quad G_n(a) = -\nu n F_n^*(a) \quad (307)$$

что на основании (290) дает:

$$u = -\frac{1}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n\tau}{n^2 - 1} \quad (308)$$

откуда, согласно (286), (306), (307) и (292):

$$v(\tau) = - \left\{ f'(a \cos \tau) \sin \tau \right\} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau}{n^2 - 1} + \\ + f(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^*(a) \cos n \tau}{n^2 - 1}$$

Следовательно [см. (293)]:

$$v_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^*(a) \cos n \tau}{n^2 - 1} - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} \cos \tau d \tau$$

$$w_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^*(a) \cos n \tau}{n^2 - 1} - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} \sin \tau d \tau \quad (309)$$

Заметим, что выражение, стоящее в фигурных скобках, есть симметричная функция  $\tau$ . Так как  $\sin \tau$  антисимметрично, то

$$w_1 = 0 \quad (310)$$

Далее, интегрируя по частям, имеем:

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a f'(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \cos \tau d \tau = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau \cos \tau}{n^2 - 1} \right\} \frac{df(a \cos \tau)}{d \tau} d \tau = \\ = - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^*(a) \cos n \tau \cos \tau}{n^2 - 1} \right\} f(a \cos \tau) d \tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} f(\cos \tau) d\tau$$

Подставив эту формулу в первое из равенств (309), получаем:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a)}{n^2 - 1} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau) \sin \tau \sin n \tau d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a)}{(n^2 - 1) a} \int_0^{2\pi} \frac{df(a \cos \tau)}{d\tau} \sin n \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^*(a)}{(n^2 - 1) a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \tau) \cos n \tau d\tau \end{aligned}$$

Итак:

$$v_1 = \frac{1}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|}{n^2 - 1} \quad (311)$$

Подставив значения (301), (310) и (311) в уравнения (296), окончательно имеем:

$$a_1 = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2\nu a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|^2}{n^2 - 1}$$

Таким образом искомое второе приближение для рассматриваемого уравнения (305) квазиизохронной системы будет:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\epsilon}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a)}{n^2 - 1} \sin n(\omega t + \varphi) \quad (312)$$

$$\omega = \nu \left\{ 1 - \frac{\epsilon^2}{2\nu^2 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|^2}{n^2 - 1} \right\} \quad (313)$$

причем  $a$  удовлетворяет уравнению

$$F_1^*(a) = 0 \quad (314)$$

Как уже об этом упоминалось, приводимые формулы „второго приближения“ характеризуют „форму“ стационарного колебания с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^2$ , а частоту — с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^3$ .

Рассматривая полученные формулы (312) и (313), мы видим, что они совпадают с ранее приведенными формулами (205) и (214), которые мы тогда выводили, пользуясь, так сказать, „кустарными“ приемами, ad hoc придуманными.

Мы установили метод для получения приближенных решений уравнений (48) с точностью до любой степени  $\epsilon$  в случае стационарных колебаний. Перейдем теперь к образованию метода получения приближенных решений нашего уравнения с точностью до любой степени  $\epsilon$ , годного для общего случая как стационарных, так и нестационарных колебаний.

Форма уточненного первого приближения (272) наводит нас на мысль искать общее решение уравнения (48) в виде:

$$x = z(\psi, a) \quad (315)$$

где  $z(\psi, a)$  — периодическая функция  $\psi$  с периодом  $2\pi$ , причем

$$\frac{da}{dt} = A(a) \quad (316)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a)$$

Дифференцируя (315), на основании (316) получаем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial z}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial z}{\partial a} A \quad (317)$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \psi \partial a} \omega A + \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} A^2 + \\ & + \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial \omega}{\partial a} A + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial a} A \end{aligned} \quad (318)$$

Таким образом, подставляя (315), (317) и (318) в левую часть уравнения (48), получаем уравнение для определения  $z$ ,  $A$  и  $\omega$  в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \psi \partial a} \omega A + \frac{\partial^2 z}{\partial a^2} A^2 + \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial \omega}{\partial a} A + \\ & + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial a} A + \nu^2 z + \varepsilon f \left( z, \frac{\partial z}{\partial \psi} \omega + \frac{\partial z}{\partial a} A \right) = 0 \end{aligned} \quad (319)$$

Легко убедиться, что, если мы найдем выражения для  $z$ ,  $A$ ,  $\omega$ , удовлетворяющие уравнению (319) с точностью до какой-либо степени  $\varepsilon$ , то выражение (315), при условиях (316), будет удовлетворять нашему уравнению (48) с точностью до той же степени  $\varepsilon$ . Чтобы найти требуемые выражения для  $z$ ,  $A$ ,  $\omega$ , полагаем:

$$\begin{aligned} z(\psi, a) &= z_0(\psi, a) + \varepsilon z_1(\psi, a) + \varepsilon^2 z_2(\psi, a) + \dots \\ A(a) &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \omega(a) &= \nu + \varepsilon \Omega_1(a) + \varepsilon^2 \Omega_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (320)$$

Здесь  $z_n(\psi, a)$  — некоторые периодические функции  $\psi$  с периодом  $2\pi$ . Подставим (320) в левую часть уравнения (321), разложим результат подстановки по возрастающим степеням  $\varepsilon$  и приравняем нулю коэффициенты при каждой степени  $\varepsilon$ . Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi^2} + z_0 = 0 \\ & \left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} + z_1 \right) \nu^2 = -f \left( z_0, \nu \frac{\partial z_0}{\partial \psi} \right) - \\ & - 2 \nu \Omega_1 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi^2} - 2 \nu A_1 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi \partial a} \\ & \left( \frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2 \right) \nu = -f'_z \left( z_0, \nu \frac{\partial z_0}{\partial \psi} \right) z_1 - \\ & - f'_z \left( z_0, \nu \frac{\partial z_0}{\partial \psi} \right) \left( \nu \frac{\partial z_1}{\partial \psi} + \Omega_1 \frac{\partial z_0}{\partial \psi} + A_1 \frac{\partial z_0}{\partial a} \right) - \\ & - 2 \nu \Omega_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} - 2 \nu A_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi \partial a} - \Omega_1^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi^2} - \end{aligned} \quad (321)$$

$$\left. \begin{aligned} & -2 \Omega_1 A_1 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi \partial a} - A_1^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial a^2} - \frac{\partial z_0}{\partial \psi} \frac{\partial \Omega_1}{\partial a} A_1 - \\ & - \frac{\partial z_0}{\partial a} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} - 2 \nu \Omega_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi^2} - 2 \nu A_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi \partial a} \end{aligned} \right\} (321)$$

$$\left( \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial \psi^2} + z_{n+1} \right) \nu^2 = -E_n - 2 \nu \Omega_{n+1} \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi^2} - 2 \nu A_{n+1} \frac{\partial^2 z_0}{\partial \psi \partial a}$$

где  $E_n$  есть выражение, зависящее от  $z_0, \dots, z_n; A_1, \dots, A_n; \Omega_1, \dots, \Omega_n$  и частных производных, которое, таким образом, следует считать определенным, когда определены

$$z_0, z_1, \dots, z_n; A_1, \dots, A_n; \Omega_1, \dots, \Omega_n$$

Первое из уравнений (321) решаем, полагая:

$$z_0 = a \cos \psi \quad (322)$$

(мы могли бы, разумеется, исходить также и из другого решения, напр.,  $z_0 = a \sin \psi$ : от этого ничего в основном не изменится).

Внося (322) в правую часть второго из уравнений (321), получаем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} + z_1 \right) \nu^2 &= -f(a \cos \psi, -a \nu \sin \psi) + 2 \nu \Omega_1 a \cos \psi + \\ &+ 2 \nu A_1 \sin \psi = - \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_n(a) \cos n \psi + G_n(a) \sin n \psi \} + \\ &+ 2 \nu \Omega_1 a \cos \psi + 2 \nu A_1 \sin \psi \end{aligned} \quad (323)$$

Отсюда из условия периодичности  $z_1$  имеем:

$$\begin{aligned} 2 \nu \Omega_1 a_1 - F_1(a) &= 0 \\ 2 \nu A_1 - G_1(a) &= 0 \end{aligned} \quad (324)$$

Определив из этих уравнений  $A_1, \Omega_1$  и внося полученные значения в (323), выводим:

$$\left( \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi^2} + z_1 \right) \nu^2 = -F_0(a) - \sum_{n=2}^{\infty} \{ F_n(a) \cos n \psi + G_n(a) \sin n \psi \}$$

Решаем это уравнение, полагая:

$$z_1 = -\frac{1}{\nu^2} F_0(a) + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(a) \cos n \psi + G_n(a) \sin n \psi}{n^2 - 1} \quad (325)$$

Подставив значения  $\Omega_1$ ,  $A_1$  и  $z_1$  в правую часть третьего из уравнений (321), получаем соотношение вида:

$$\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2\right) \nu^2 = - \sum_{n=0}^{\infty} \{ F_n^{(1)}(a) \cos n \psi + G_n^{(1)}(a) \sin n \psi \} + \\ + 2 \nu \Omega_2 a \cos \psi + 2 \nu A_2 \sin \psi \quad (326)$$

где  $F_n^{(1)}(a)$ ,  $G_n^{(1)}(a)$  — некоторые уже определенные функции.

Вследствие условия периодичности  $z_2$ , из (326) имеем для определения  $A_2$  и  $\Omega_2$  следующие равенства:

$$2 \nu \Omega_2 a - F_1^{(1)}(a) = 0 \\ 2 \nu A_2 - G_1^{(1)}(a) = 0 \quad (327)$$

Подставив определенные отсюда значения  $A_2$  и  $\Omega_2$  в правую часть (326), находим:

$$\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2\right) \nu^2 = - F_0^{(1)}(a) - \sum_{n=2}^{\infty} \{ F_n^{(1)}(a) \cos n \psi + G_n^{(1)}(a) \sin n \psi \}$$

Решаем это уравнение, полагая:

$$z_2 = - \frac{F_0^{(1)}(a)}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n^{(1)}(a) \cos n \psi + G_n^{(1)}(a) \sin n \psi}{n^2 - 1} \quad (328)$$

Этот процесс, очевидно, может быть продолжен как угодно долго.

В самом деле, если мы определили выражения для  $z_0, z_1, \dots, z_n$ ;  $A_1, \dots, A_n$ ;  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , то на основании  $(n+1)$ -го из уравнений (321) мы можем определить  $z_{n+1}$ ,  $A_{n+1}$ ,  $\Omega_{n+1}$ .

Действительно, определив  $z_0, z_1, \dots, z_n$ ;  $A_1, \dots, A_n$ ;  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , мы можем написать это уравнение в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial \psi^2} + z_{n+1}\right) \nu^2 = - \sum_{m=1}^{\infty} \{ F_m^{(n)}(a) \cos n \psi + \\ + G_m^{(n)}(a) \sin n \psi \} + 2 \nu \Omega_{n+1} a \cos \psi + 2 \nu A_{n+1} \sin \psi \quad (329)$$

где  $F_m^{(n)}(a)$  и  $G_m^{(n)}(a)$  — некоторые известные функции  $a$ .

Отсюда в виду периодичности  $z_{n+1}(\psi, a)$  имеем уравнения для определения  $\Omega_{n+1}$  и  $A_{n+1}$  в виде:

$$2 \nu \Omega_{n+1} a - F_1^{(n)}(a) = 0 \\ 2 \nu A_{n+1} - G_1^{(n)}(a) = 0 \quad (330)$$



Из (329) и (330) выводим:

$$\left( \frac{\partial^2 z_{n+1}}{\partial \psi^2} + z_{n+1} \right) \nu^2 =$$

$$= -F_0^{(n)}(a) - \sum_{m=2}^{\infty} \{ F_m^{(n)}(a) \cos n\psi + \varphi_m^{(n)}(a) \sin n\psi \}$$

Это же уравнение решаем, полагая:

$$z_{n+1} = -\frac{F_0^{(n)}(a)}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{F_m^{(n)}(a) \cos n\psi + G_m^{(n)}(a) \sin n\psi}{n^2 - 1} \quad (331)$$

Итак, мы убеждаемся в том, что при помощи установленного процесса можно построить выражения для

$$z_n(\psi, a), A_n(a), \Omega_n(a)$$

до какого угодно высокого значения индекса  $n$ . Определив, например, эти выражения до значения индекса  $n = N$  включительно, получаем приближенное решение, удовлетворяющее нашему уравнению (48) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{N+1}$  и имеющее следующий вид:

$$x = z_0(\psi, a) + \varepsilon z_1(\psi, a) + \dots + \varepsilon^N z_N(\psi, a)$$

или

$$x = a \cos \psi + \varepsilon z_1(\psi, a) + \dots + \varepsilon^N z_N(\psi, a) \quad (332)$$

где  $a$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^N A_N(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \varepsilon \Omega_1(a) + \varepsilon^2 \Omega_2(a) + \dots + \varepsilon^N \Omega_N(a)$$

т. е., на основании (324):

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon G_1(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^N A_N(a)$$

(333)

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \frac{\varepsilon F_1'(a)}{2\nu a} + \varepsilon^2 \Omega_2(a) + \dots + \varepsilon^N \Omega_N(a)$$

Например, при  $N = 1$  получаем как раз формулы „уточненного первого приближения“ — (272), (273) и (274).

Так как выражения  $z_1(\psi, a), \dots, z_n(\psi, a)$  не содержат первой гармоники, то величину  $a$  в соответствии с формулой (332) мы можем рассматривать как амплитуду первой гармоники.

Первое из уравнений (333) будем называть поэтому уравнением амплитуды основной (первой) гармоники колебания, второе же из них — уравнением мгновенной частоты. Самое выражение  $\omega = \nu + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots$  называем, как и раньше, мгновенной частотой колебания.

Образует сейчас в явном виде оба эти уравнения для  $N=2$  применительно к уравнению „квазиизохронной“ колебательной системы:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0$$

Пользуясь формулами (307), мы видим, что в рассматриваемом случае:

$$\Omega_1 = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{2} F_1^*(a)$$

$$z_1(\psi, a) = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^*(a) \sin n \psi}{n^2 - 1} \quad (334)$$

Благодаря (334) третье из уравнений (321) принимает вид:

$$\begin{aligned} \nu^2 \left( \frac{\partial^2 z_2}{\partial \psi^2} + z_2 \right) &= f(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^* \cos n \psi}{n^2 - 1} - \\ - f'(a \cos \tau) a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^* \sin n \psi \sin \psi}{n^2 - 1} - f(a \cos \psi) \cdot A_1 \cos \psi - \quad (335) \end{aligned}$$

$$- 2 \nu A_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial \psi \partial a} - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} \cos \psi + 2 \nu \Omega_2 a \cos \psi + 2 \nu A_2 \sin \psi$$

и потому условия периодичности  $z_2$  в раскрытом виде будут:

$$\left. \begin{aligned} 2 \nu A_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(a \cos \tau) \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^* \cos n \tau}{n^2 - 1} - A_1 \cos \tau \right] - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n a F_n^* \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} \sin \tau d \tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad (336)$$

$$a 2 n \Omega_2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(a \cos \tau) \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^* \cos n \tau}{n^2 - 1} - A_1 \cos \tau \right] - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n a F_n^* \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 2} \right\} \sin \tau d\tau = 0 \quad (336)$$

Но, как мы уже видели:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^* \cos n \tau}{n^2 - 1} - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n a F_n^* \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} \sin \tau d\tau = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n F_n^* \cos n \tau}{n^2 - 1} - \right. \\ \left. - f'(a \cos \tau) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n a F_n^* \sin n \tau \sin \tau}{n^2 - 1} \right\} \cos \tau d\tau = \frac{1}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*|^2}{n^2 - 1}$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau) \cos \tau \sin \tau d\tau = 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau) \cos^2 \tau d\tau = \frac{\partial F_1^*(a)}{\partial a} \quad (337)$$

и потому на основании (334) и (336) имеем:

$$A_2 = 0 \\ \Omega_2 = -\frac{1}{2\nu a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|^2}{n^2 - 1} - \frac{1}{8\nu a} F_1^*(a) \frac{\partial F_1^*(a)}{\partial a}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае квазизохронной колебательной системы уравнение для основной гармоник

с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$  будет обычным уравнением первого приближения:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2} F_1^*(a) \quad (338)$$

Зависимость же мгновенной частоты колебаний от амплитуды основной гармоники с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^3$  представится в виде:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(a) = \nu \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{8\nu a} F_1^*(a) \frac{\partial F_1^*(a)}{\partial a} - \frac{\varepsilon^2}{2\nu^2 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|^2}{n^2 - 1} \right\} \quad (339)$$

Для стационарных колебаний, как показывает (338):

$$F_1^*(a) = 0$$

и потому формула (339) переходит в формулу (313), ранее установленную специально для случая стационарных колебаний:

$$\omega(a) = \nu \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2\nu^2 a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 |F_n^*(a)|^2}{n^2 - 1} \right\}$$

Возьмем в качестве примера линейное уравнение вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + x = 0$$

В этом случае:

$$\nu = 1, \quad f(x) = 1, \quad F(x) = x$$

и поэтому:

$$F_1^*(a) = a; \quad F_n^*(a) = 0, \quad \text{если } a \neq 1$$

и формула (339) дает:

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}$$

Как видно, это выражение представляет два первых члена при разложении по степеням  $\varepsilon$  в точной формуле

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

Возьмем далее уравнение ван-дер-Поля. В этом случае согласно формулам (206):

$$F_1^*(a) = a \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right)$$

$$F_3^*(a) = \frac{a^3}{12}$$

$$F_n^*(a) = 0, \text{ если } n \neq 1 \text{ и } n \neq 3$$

и потому:

$$\frac{1}{a} F_1^* \frac{\partial F_1^*}{\partial a} = \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) \left( \frac{3}{4} a^2 - 1 \right)$$

Таким образом, в данном случае из (339) получаем:

$$\begin{aligned} \omega &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} \left( \frac{a^2}{4} - 1 \right) \left( \frac{3}{4} a^2 - 1 \right) - \frac{\varepsilon^2 a^4}{256} = \\ &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^2 a^2}{8} - \frac{7 \varepsilon^2 a^4}{256} \end{aligned} \quad (340)$$

В частности для стационарных колебаний:

$$a = 2$$

и мы приходим к ранее полученной формуле (214):

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$$

Мы изложили метод для получения высших приближений применительно к уравнению (48). Не представляет, однако, никаких затруднений распространить его и на уравнения вида:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x + \varepsilon f_1 \left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon^2 f_2 \left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \dots = 0$$

с более сложной зависимостью от  $\varepsilon$ .

В виду отсутствия каких-либо существенных особенностей, мы на этом здесь останавливаться не будем.

Заметим сейчас, что для консервативных колебательных систем, описываемых уравнением типа

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + v^2 x + \varepsilon f(x) = 0$$

т. е. для случая:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \quad (341)$$

все [величины  $A_n$  обращаются тождественно в нуль, так что уравнение амплитуды основной гармоники с точностью до любой степени  $\varepsilon$  будет:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

что выражает условие стационарности колебания с произвольной амплитудой.

Нетрудно также убедиться, что в этом случае величины  $\Omega_n$  могут быть определены из равенства

$$(\nu + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots)^2 = \nu^2 + \varepsilon \alpha_1 + \varepsilon^2 \alpha_2 + \dots$$

где величины  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  определены по способу, детализированному на стр. 106—114.

Вообще для случая (341) только что изложенный метод эквивалентен этому последнему.

В общем случае согласно формулам (333) уравнение для амплитуды основной гармоники в  $N$ -ом приближении будет:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon G_1(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^N A_N(a) \quad (342)$$

Так как уравнение (48) всегда допускает тривиальное постоянное решение:

$$x = c = \text{const}$$

где

$$\nu^2 c + \varepsilon f(c, 0) = 0$$

соответствует статическому режиму, для которого, разумеется,  $a = 0$ ; то, очевидно, тождественно имеем:

$$G_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = \dots = 0$$

Этот статический режим будет устойчив, если

$$\frac{\varepsilon G_1'(0)}{2\nu} + \varepsilon A_1'(0) + \dots + \varepsilon^N A_N'(0) < 0 \quad (343)$$

когда „малые колебания“ будут затухать. В противном случае, при

$$\frac{\varepsilon G_1'(0)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2'(0) + \dots + \varepsilon^N A_N'(0) > 0 \quad (344)$$

имеем самовозбуждение.

Оставляя в стороне случай исключения, когда функция  $G_1(a)$  может иметь двойные корни, мы видим, что при достаточно малых  $\varepsilon$  (что, впрочем, мы всегда явно или неявно предполагаем) вопрос о самовозбуждении или затухании малых колебаний решается знаком одного члена, именно

$$\frac{\varepsilon G_1'(0)}{2\nu}$$

т. е. точно так же, как если бы мы имели дело с уравнениями первого приближения.

Далее, как показывает (342), стационарные амплитуды должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{\varepsilon G_1(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots + \varepsilon^N A_N(a) = 0$$

Поэтому, оставляя в стороне вышеупомянутые случаи исключения, мы можем разложить  $a$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$a = a_0 + a_1 \varepsilon + \dots$$

Здесь  $a_0$  — корень уравнения  $G_1(a) = 0$ , т. е. стационарная амплитуда в первом приближении,

$$a_1 = -\frac{2\nu A_2(a_0)}{G_1'(a_0)}$$

Так как данный стационарный режим будет устойчивым, если

$$\frac{\varepsilon G_1'(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2'(a) + \dots + \varepsilon^N A_N'(a) < 0$$

и неустойчивым, если, наоборот,

$$\frac{\varepsilon G_1'(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2'(a) + \dots + \varepsilon^N A_N'(a) > 0$$

и так как очевидно, что

$$\frac{\varepsilon G_1'(a)}{2\nu} + \varepsilon^2 A_2'(a) + \dots + \varepsilon^N A_N'(a) = \frac{\varepsilon G_1'(a_0)}{2\nu} + O(\varepsilon^2)$$

где  $O(\varepsilon^2)$  — величина второго порядка малости, то мы видим, что вопрос устойчивости (при достаточно малом  $\varepsilon$ ) решается знаком  $\frac{\varepsilon G'_1(a_0)}{2\nu}$ , т. е. обычным критерием устойчивости, получаемым из уравнений первого приближения.

Заметим, кроме того, что из уравнений  $N$ -го приближения так же, как и из уравнений первого приближения, следует, что амплитуда  $a$  будет монотонно возрастать или убывать, приближаясь к ближайшей сверху или снизу стационарной амплитуде в зависимости от знака производной  $\frac{da}{dt}$  в начальный момент времени.

Вообще следует подчеркнуть, что, за исключением некоторых сингулярных случаев, уравнения первого приближения дают тот же качественный характер возбуждения колебаний, что и уравнения высших приближений.

Переход к уравнениям высших приближений вводит, вообще говоря, лишь поправки количественного характера, например поправки к величине стационарной амплитуды и т. п.

В виду этого, а также в виду сложности вычислений, с которыми, как правило, сопряжены операции с уравнениями высших приближений, целесообразно ограничиваться рассмотрением лишь уравнений первого приближения, тем более, что эти последние, как об этом будет речь в следующем параграфе, допускают весьма простую физико-техническую интерпретацию и могут быть образованы даже и без предварительного составления исходного точного дифференциального уравнения (типа 48-го, напр.).

## § 5. Линеаризация нелинейных колебательных систем квазилинейного типа

В настоящем параграфе мы займемся прежде всего вопросом о надлежащей интерпретации образованных ранее уравнений первого приближения.

Напишем для этого основное дифференциальное уравнение колебательной системы в виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (345)$$

где  $m$  и  $k$  положительны.



Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, допустим, что  $x$  есть перемещение,  $m$  — масса,  $k$  — коэффициент упругости (хотя точно так же мы могли бы предположить, что  $m$  есть момент инерции,  $x$  — угол отклонения или, наконец, что  $x$  есть ток или электродвижущая сила и т. п.).

Как уже ранее было установлено, первое приближение может быть представлено в форме:

$$x = a \cos \psi \quad (346)$$

причем амплитуда  $a$  и полная фаза  $\psi$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\nu m} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (347)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a)$$

где

$$\nu^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega^2(a) = \nu^2 + \frac{\varepsilon}{\pi m a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (348)$$

Напомним тут, что первое приближение (346) является основной гармоникой выражения „улучшенного первого приближения“ [см., напр., формулу (272)], удовлетворяющего основному уравнению (345) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Заметив это, введем в рассмотрение функции амплитуды  $\bar{k}(a)$  и  $\bar{\lambda}(a)$ , определяемые следующим образом:

$$\bar{\lambda} = - \frac{\varepsilon}{\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (349)$$

$$\bar{k} = k + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Тогда уравнения первого приближения (347) могут быть написаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\bar{\lambda}}{m} a \\ \frac{d\phi}{dt} &= \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}} \end{aligned} \quad (350)$$

Продифференцируем теперь выражение (346) для первого приближения. Имеем, приняв во внимание (350):

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \phi - \frac{\bar{\lambda}}{2m} a \cos \phi \quad (351)$$

Отсюда, дифференцируя еще раз, убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -a \frac{\bar{k}}{m} \cos \phi + \frac{\bar{\lambda}}{m} a \omega \sin \phi + \frac{\bar{\lambda}}{2m} a^2 \frac{\partial \omega}{\partial a} \sin \phi + \\ &+ \frac{\partial \bar{\lambda}}{2m \partial a} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{2m} a \cos \phi = -\frac{\bar{k}}{m} x - \frac{\bar{\lambda}}{m} \frac{dx}{dt} - \left(\frac{\bar{\lambda}}{m}\right)^2 \frac{a}{2} \cos \phi + \\ &+ \frac{\bar{\lambda}}{2m} a^2 \frac{\partial \omega}{\partial a} \sin \phi + \frac{1}{2m} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial a} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{2m} x \end{aligned} \quad (352)$$

Из (352) на основании формул (349) мы видим, что

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \bar{k}x = O(\varepsilon^2)$$

где  $O(\varepsilon^2)$  — величина порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Таким образом мы видим, что рассматриваемое первое приближение (346) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{\lambda} \frac{dx}{dt} + \bar{k}x = 0 \quad (353)$$

Итак, в первом приближении колебания исследуемой нелинейной колебательной системы эквивалентны [с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ , т. е. с точностью до величин, отбрасываемых при самом составлении уравнений первого приближения (347)] колебаниям некоторой линейной колебательной системы, обладающей коэффициентом затухания  $\bar{\lambda}$  и коэффициентом упругости  $\bar{k}$ .

В виду этого мы будем называть  $\bar{\lambda}$  эквивалентным коэффициентом затухания,  $\bar{k}$  — эквивалентным коэффициентом упругости, самую же линейную колебательную систему, описываемую уравнением (353), назовем эквивалентной линейной системой.

Сравнивая уравнение (353) с уравнением (345), мы видим, что это последнее получается из первого путем замены нелинейного члена

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (354)$$

линейным

$$F_1 = k_1 x + \bar{\lambda} \frac{dx}{dt} \quad (355)$$

где  $k_1 = \bar{k} - k$ .

Заметим далее, что выражение

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{\lambda}}{2m}$$

представляет, очевидно, декремент затухания эквивалентной линейной системы,  $\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}}$  — собственную частоту колебаний этой системы ( $\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}}$  с точностью до величин второго порядка малости, так как  $\bar{\lambda}$  есть величина первого порядка малости).

Мы видим, следовательно, что уравнения первого приближения (350) могут быть формально образованы таким путем.

Линеаризируем рассматриваемую колебательную систему, заменяя в основном уравнении нелинейную силу (354) линейной (355), в которой:

$$\bar{\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\pi a v} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a v \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (356)$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a v \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Для полученной таким путем эквивалентной линейной системы с массой  $m$ , коэффициентом затухания  $\bar{\lambda}$  и коэффициентом упругости  $\bar{k} = k + k_1$  находим обычным путем декремент затухания  $\delta$  и частоту собственных колебаний  $\omega$ , отбрасывая при этом величины второго порядка малости.

Тогда получаем:

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{\bar{k}}{m} \quad (357)$$

Образовав выражения для декремента затухания и частоты, применим общеизвестные (для линейных систем) формулы

$$\frac{da}{dt} = -\delta a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (358)$$

выявляющие тот факт, что декремент затухания есть логарифмическая производная амплитуды, взятая с обратным знаком, и что частота  $\omega$  есть угловая скорость вращения полной фазы колебания.

В раскрытом виде равенства (358) и являются нашими уравнениями первого приближения.

Только что изложенный формальный метод образования уравнений первого приближения будем называть методом линеаризации.

При пользовании этим методом может возникнуть вопрос, почему, с физической точки зрения, при линеаризации, — точнее говоря, при замене нелинейной силы (354) эквивалентной линейной (355), — коэффициенты  $k_1$  и  $\bar{\lambda}$  должны принимать именно те значения, которые даются формулами (356), а не какие-либо иные. В виду этого нам и следует сейчас решить вопрос о нахождении адекватной физико-технической интерпретации для этих формул.

Покажем прежде всего, что соответствующие (356) значения эквивалентного коэффициента затухания мы получим, приняв, что средние (за период колебания) мощности, развиваемые реальной (354) и эквивалентной (355) силами, равны. При этом, приравнивая выражения для обеих мощностей, следует не принимать во внимание величин порядка малости  $\epsilon^2$ , так как самые уравнения первого приближения точны лишь до величин именно этого порядка малости.

Так как работа, совершаемая силой  $\bar{k}x$ , пропорциональной перемещению, за период колебания равна нулю, то, приравнявая друг другу мощности, развиваемые силами (354) и (355), получаем:

$$\varepsilon \int_0^T f \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} dt = \bar{\lambda} \int_0^T \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt \quad (359)$$

где  $T$  — период колебания. Из (359) заключаем, между прочим, что  $\bar{\lambda}$  должно быть величиной первого порядка малости.

Но с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon$  мы можем положить в течение интервала времени порядка  $\frac{2\pi}{\nu}$

$$x = a \cos(\nu t + \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\nu \sin(\nu t + \theta),$$

где  $a$  и  $\theta$  постоянны в течение этого интервала. С точностью до величин первого порядка малости  $\nu$ , как видно, есть частота колебаний, и потому  $T = \frac{2\pi}{\nu}$  — период.

Подставив в обе части формулы (359) равенства

$$T = \frac{2\pi}{\nu}, \quad x = a \cos(\nu t + \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\nu \sin(\nu t + \theta)$$

точные лишь до величин первого порядка малости, имеем с точностью до величин второго порядка [так как в обеих частях (359) есть множители, являющиеся величинами первого порядка, именно  $\varepsilon$  и  $\bar{\lambda}$ ]:

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \nu \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} f \{ a \cos(\nu t + \theta), -a\nu \sin(\nu t + \theta) \} a \sin(\nu t + \theta) dt = \\ & = \bar{\lambda} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} a^2 \nu^2 \sin^2(\nu t + \theta) dt = \bar{\lambda} a^2 \pi \nu \end{aligned} \quad (360)$$

С другой стороны, имеем тождественно:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} f \{ a \cos (\nu t + \theta), -a\nu \sin (\nu t + \theta) \} \sin (\nu t + \theta) dt = \\ = \frac{1}{\nu} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

и, таким образом, (360) дает:

$$\lambda \pi a^2 \nu = -\varepsilon a \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

Мы приходим, следовательно, как раз к тому значению коэффициента  $\bar{\lambda}$ , которое дают и формулы (356).

Чтобы получить аналогичную интерпретацию и для другого коэффициента, именно для  $k_1$ , воспользуемся столь распространенным в электротехнике понятием, как понятие реактивной мощности.

Пусть мы имеем некоторый проводник  $AB$ , по которому протекает переменный ток  $i(t)$ . Пусть  $E(t)$  будет результирующей разностью напряжений между концами  $A, B$  проводника.

Тогда активной мощностью  $P_a$ , отдаваемой или поглощаемой (в зависимости от знака) в рассматриваемом проводнике, называют величину работы, совершенной за период  $T$  колебания, разделенную на величину  $T$ , т. е.

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i(t) dt \quad (361)$$

Как видно, понятие активной мощности полностью соответствует обычному понятию средней механической мощности; будучи связанным с понятием работы или энергии, оно имеет вполне реальное физическое значение.

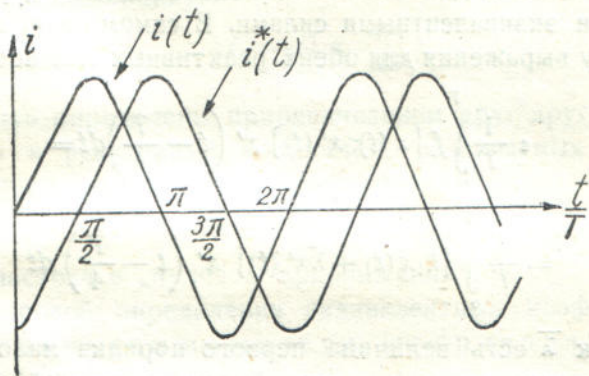
В электротехнике, однако, общепринято вводить в рассмотрение, кроме имеющего непосредственное физическое значение понятия активной мощности, еще и несколько искусственное понятие реактивной мощности.

Реактивной мощностью называют величину

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) i^*(t) dt \quad (362)$$

где функция  $i^*(t)$  представляет ток одинаковой формы с током  $i(t)$ , но отстающий по фазе относительно последнего на  $90^\circ$  (см. фиг. 37); иначе говоря:

$$i^*(t) = i\left(t - \frac{T}{4}\right) \quad (363)$$



Фиг. 37.

Несмотря на отсутствие реального смысла у понятия реактивной мощности, понятие это является одним из основных представлений современной электротехники.

В виду очевидной и прямой аналогии между колебаниями механическими и электротехническими нам представляется целесообразным использовать понятие реактивной мощности и для механических колебаний.

Пусть, например, мы имеем некоторое тело, находящееся под действием какой-либо силы  $F(t)$  и совершающее периодические колебания.

Пусть  $T$  будет периодом колебания,  $x(t)$  — перемещением тела. Тогда, так как в данном случае активной мощности соответствует средняя механическая мощность

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt \quad (364)$$

то, рассуждая по аналогии, естественно называть реактивной мощностью выражение вида:

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt \quad (365)$$

Приняв это определение и вернувшись к вопросу об интерпретации значения (356) для эквивалентного коэффициента  $k_1$ , покажем, что именно это значение мы получим, если предварительно постулируем равенство реактивных мощностей (опять таки с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ ), развиваемых реальной и эквивалентными силами. В самом деле, приравнявая друг другу выражения для обеих реактивных мощностей, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f \{ x(t), x'(t) \} x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \\ = \frac{1}{T} \int_0^T \{ k_1 x(t) + \bar{\lambda} x'(t) \} x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt \end{aligned} \quad (366)$$

Так как  $\bar{\lambda}$  есть величина первого порядка малости, то отсюда мы видим, что и  $k_1$  также будет величиной порядка малости  $\varepsilon$ .

Поэтому, подставляя в выражение для реактивных мощностей формулы:

$$x = a \cos(\nu t + \theta), \quad \frac{dx}{dt} = -a\nu \sin(\nu t + \theta), \quad T = \frac{2\pi}{\nu}$$

точные до величин первого порядка малости, имеем с требуемой точностью (т. е. до величин второго порядка малости):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f \{ x(t), x'(t) \} x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \\ = \frac{a\nu\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ \frac{1}{T} \int_0^T \{ k_1 x(t) + \bar{\lambda} x'(t) \} x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{a^2 \nu k_1}{2} \end{aligned}$$



откуда на основании (366) в полном согласии с (356) получим

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a\nu \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Итак, резюмируя вышесказанное, мы видим, что при применении метода линеаризации параметры (эквивалентные коэффициенты) эквивалентной линейной силы

$$F_l = k_1 x + \bar{\lambda} \frac{dx}{dt} \quad (367)$$

заменяющей нелинейную

$$F = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (368)$$

могут быть определены приравниванием друг другу выражений активных и реактивных мощностей, развиваемых силами (367) и (368) при гармонических колебаниях:

$$x = a \cos(\nu t + \theta)$$

где  $\nu$  — частота в „нулевом приближении“.

Этот способ определения эквивалентных коэффициентов назовем принципом мощности или принципом энергетического баланса.

Укажем еще другой, несколько более простой прием.

Подставим гармоническое колебание

$$x = a \cos(\nu t + \theta)$$

в выражения (367) и (368). Для этого гармонического колебания линейная эквивалентная сила  $F_l$  также будет гармонической функцией времени с частотой  $\nu$ . Обозначая амплитуду и фазу  $F_l$  соответственно через  $I_l$  и  $\varphi_l$ , имеем:

$$F_l = I_l \cos(\nu t + \varphi_l) \quad (369)$$

Нелинейная же сила будет, вообще говоря, периодической функцией времени, состоящей из различных гармоник с частотами вида  $n\nu$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Пусть

$$I \cos(\nu t + \varphi) \quad (370)$$

будет ее основной гармоникой. Тогда приравнивая друг другу амплитуды и фазы

$$I_l = I, \quad \varphi_l = \varphi$$

эквивалентной силы (369) и основной гармонике нелинейной силы (370), получаем два уравнения, которые дают для параметров  $k_1$  и  $\bar{\lambda}$  как раз те же значения, что и формула (356).

В самом деле, в раскрытом виде при гармоническом колебании эквивалентная линейная сила будет:

$$k_1 a \cos(\nu t + \theta) - \nu \bar{\lambda} a \sin(\nu t + \theta) \quad (371)$$

а основная гармоника нелинейной силы:

$$\left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau, -a \sin \tau) \cos \tau d\tau \right\} \cos(\nu t + \theta) + \\ + \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau, -a \sin \tau) \sin \tau d\tau \right\} \sin(\nu t + \theta)$$

Приравнявая одну другой обе гармонике (371) и (372), получим:

$$ak_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau, -a \sin \tau) \cos \tau d\tau \\ - \nu \bar{\lambda} a = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \tau, -a \sin \tau) \sin \tau d\tau$$

откуда для  $k_1$  и  $\bar{\lambda}$  получаем те же самые значения, что и из (346)

Этот последний прием назовем принципом гармонического баланса.

Нетрудно обнаружить, что принципы энергетического и гармонического баланса по существу вполне эквивалентны. Для этого стоит лишь заметить, что выражения мощностей:

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt, \quad \frac{1}{T} \int_0^T F(t) x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt \quad (373)$$

развиваемых некоторой периодической (с периодом  $T = \frac{2\pi}{\nu}$ ) силой  $F(t)$  при гармонических колебаниях

$$x = a \cos(\nu t + \theta)$$

зависят лишь от основной гармонике  $F(t)$ .

Чтобы убедиться в этом, представим  $F(t)$  в виде ряда Фурье, записанного в следующей форме:

$$F(t) = \sum_n E_n \cos(nvt + \theta_n) \quad (375)$$

Тогда, подставляя (374) и (375) в (373) получаем:

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x'(t) dt = \frac{E_1 a \cos(\theta_1 - \theta)}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) x' \left( t - \frac{T}{4} \right) dt = \frac{E_1 a \sin(\theta_1 - \theta)}{2}$$

Таким образом, действительно, если основные гармоники (гармоники с частотой  $\nu$ ) некоторых двух сил равны, то мощности, развиваемые ими при гармонических колебаниях (частоты  $\nu$ ), равны, и наоборот.

Этим обстоятельством и обусловлена существенная эквивалентность обоих вышеизложенных способов определения параметров эквивалентной линейной системы в методе линеаризации (принципа гармонического баланса и принципа энергетического баланса).

Заметим теперь, что нет никакой необходимости сначала составить дифференциальное уравнение колебаний и лишь затем линеаризировать входящие в него нелинейные выражения.

Во многих случаях (особенно для более или менее сложных колебательных систем) может представиться, наоборот, более удобным до составления дифференциального уравнения, исходя непосредственно из рассмотрения схемы колебательной системы, заменить в ней нелинейные элементы эквивалентными линейными (напр., при помощи принципа гармонического баланса), а затем находить выражения для частоты  $\omega(a)$  и декремента  $\delta(a)$ , исходя из общеизвестных классических формул линейной теории.

Основным условием допустимости такого рода метода эквивалентной линеаризации является, очевидно, приближенная гармоничность колебаний (условие квазигармоничности колебательной системы).

Приведем здесь несколько простых примеров.

а) Пусть в рассматриваемой колебательной системе имеется тело массы  $m$ , совершающее приближенно гармонические колебания и подвешенное на некоторой нелинейной пружине (т. е. с нелинейной зависимостью между упругой силой и растяжением), как указано на фиг. 38.



Фиг. 38.

Пусть соотношение

$$F = f(x)$$

выражает зависимость между упругой силой  $F$  и растяжением  $x$  пружины. Тогда для гармонического колебания

$$x = a \cos(\nu t + \theta)$$

основная гармоника силы упругости будет, очевидно:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(a \cos \tau) \cos \tau d\tau \cdot \cos(\nu t + \theta)$$

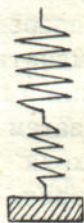
Поэтому, пользуясь принципом гармонического баланса, мы можем заменить реальную нелинейную пружину эквивалентной линейной — с коэффициентом упругости

$$k(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Пусть, например, система  $S$  состоит из только что рассмотренного элемента (тело  $m$  плюс нелинейная пружина), подвешенного на обычной линейной пружине с коэффициентом упругости  $c$  (см. фиг. 39).

Допустим, что жесткость линейной пружины настолько велика, что колебания тела  $m$  приближенно гармоничны.

Тогда, рассуждая обычным образом, мы видим, что результирующий коэффициент упругости сложной пружины (нелинейная плюс линейная) будет  $c + k(a)$ , и потому собственная частота колебаний будет равна:



Фиг. 39.

$$\omega = \sqrt{\frac{c + k(a)}{m}}$$

или же, так как  $k(a)$  по сравнению с  $c$  мало (ибо жесткость линейной пружины по сравнению с жесткостью нелинейной—ведлика), можем написать также:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{k(a)}{c} \right)$$

б) Рассмотрим колебательную систему, состоящую из тела массы  $m$ , подвешенного на линейной пружине, с коэффициентом упругости  $c$ , и испытывающего при своих колебаниях некоторое слабое амортизирующее воздействие нелинейного типа:

$$F = \Phi \left( \frac{dx}{dt} \right) \quad (376)$$

где  $F$ —амортизирующая сила.

При гармонических колебаниях

$$x = a \cos(\nu t + \theta)$$

основная гармоника амортизирующей силы будет:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi \cdot \sin(\nu t + \theta)$$

Поэтому, на основании принципа гармонического баланса, заменяем реальную силу (376) эквивалентной линейной амортизирующей силой

$$F_t = \bar{\lambda} \frac{dx}{dt}$$

с коэффициентом трения

$$\bar{\lambda} = -\frac{1}{a\nu\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(-a\nu \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{a\nu\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Таким образом, вследствие слабости затухания, имеем:

$$\omega = \nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

[пренебрегая  $\left(\frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{cm}}\right)^2$  как величиной второго порядка малости],

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}}{2m}$$

с) Возьмем колебательную систему  $S$ , рассмотренную в примере  $a$  (фиг. 39), состоящую из тела массы  $m$ , подвешенного на нелинейную пружину, связанную с достаточно более жесткой линейной пружиной.

Пусть тело  $m$  испытывает слабое амортизирующее воздействие нелинейного типа (376).

Тогда, линеаризируя, имеем эквивалентную систему с массой  $m$ , результирующим коэффициентом упругости  $c + k(a)$  и слабым коэффициентом трения  $\bar{\lambda}(a)$ .

Для такой системы имеем, очевидно, следующие значения частоты и декремента:

$$\omega = \sqrt{\frac{c + k}{m}}$$

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}}{m}$$

или, поскольку  $\frac{k}{c}$  мало, отбрасывая величины второго порядка малости:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m} \left( 1 + \frac{k}{2c} \right)}$$

$$\delta = \frac{\bar{\lambda}}{m}$$

д) Пусть мы имеем катушку с железным сердечником, в которой зависимость между потоком  $\Phi$  магнитной индукции и током  $i$  в обмотке, представляется нелинейным соотношением:

$$\Phi = f(i) \quad (377)$$

Тогда, если ток  $i$  имеет гармоническую форму:

$$i = a \cos(\nu t + \theta)$$

основная гармоника потока магнитной индукции будет, очевидно:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \cdot \cos(\nu t + \theta)$$

Поэтому согласно принципу гармонического баланса мы можем заменить нелинейное соотношение (377) эквивалентным линейным:

$$\Phi = L_e i$$

где

$$L_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

По аналогии с обычным соотношением

$$\Phi = Li$$

(где  $L$  — коэффициент самоиндукции), годным для „линейных“ катушек (напр., с воздушным сердечником), эквивалентный коэффициент  $L_e$  будем называть эквивалентным коэффициентом самоиндукции.

Рассмотрим колебательный контур (см. фиг. 40), состоящий из такой катушки с железным сердечником, обычной линейной катушки с постоянной самоиндукцией  $L$  и емкостью  $C$ .



Фиг. 40.

Возьмем постоянную самоиндукцию  $L$ , достаточно большую по сравнению с самоиндукцией нелинейной катушки так, чтобы обеспечить приближенную гармоничность колебаний тока в контуре.

Линеаризируя эту систему, получим эквивалентный линейный контур с результирующей самоиндукцией  $L + L_e$  и емкостью  $C$ . Поэтому для частоты имеем:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(L + L_e)C}} \cong \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{L_e}{2L}\right)$$

е) Рассмотрим некоторый проводник  $N$  с нелинейной зависимостью между падением напряжения  $e$  и током  $i$ :

$$e = -F(i)$$

Если ток  $i$  совершает гармонические колебания

$$i = a \cos(\omega t + \theta)$$

то основная гармоника падения напряжения  $e$  будет:

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

и потому в колебательных контурах, в которых выполняется условие приближенной гармоничности колебаний тока, нелинейный проводник  $N$  можем заменить линейным:

$$e = -R_e i$$

состоящим из эквивалентного сопротивления

$$R_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Если  $R_e$  положительно, то рассматриваемый проводник функционирует как омическое сопротивление и поглощает подводимую мощность; поглощаемая им средняя мощность будет, очевидно,  $\frac{R_e a^2}{2}$ . Наоборот, если  $R_e$  отрицательно, то проводник не поглощает, а наоборот, генерирует активную мощность. Генерируемая этим проводником средняя мощность (активная) будет:

$$-\frac{R_e a^2}{2} = \frac{|R_e| a^2}{2}$$

В этом последнем случае говорят, что рассматриваемый проводник имеет характеристику генератора.

Пусть мы имеем нелинейный проводник  $T$ , в котором зависимость между силой тока  $i$  и напряжением  $e$  имеет вид:

$$i = f(e) \quad (378)$$

Если напряжение совершает гармонические колебания

$$e = a \cos(\nu t + \theta)$$

то основная гармоника тока будет:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Следовательно, на основании принципа гармонического баланса, мы можем для контуров, для которых обеспечивается приближенная гармоничность напряжения, заменить нелинейную зависимость (378) эквивалентной линейной

$$i = \tau e$$



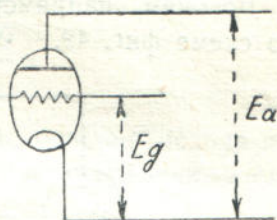
где эквивалентный коэффициент проводимости  $\sigma$  в зависимости от амплитуды напряжения будет:

$$\sigma = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Если  $\sigma > 0$ , рассматриваемый проводник работает как омическое сопротивление, поглощая активную мощность  $\frac{\sigma a^2}{2}$ . Если же  $\sigma < 0$ , этот проводник работает как генератор, отдавая активную мощность  $-\frac{\sigma a^2}{2} = \frac{|\sigma| a^2}{2}$ .

Рассмотрим электронную лампу (фиг. 41). Зависимость анодного тока  $i_a$  от управляющего напряжения  $E$  будет (при отсутствии сеточного тока):

$$i_a = f(E)$$



Фиг. 41.

Управляющее напряжение в электронном генераторе складывается из постоянного напряжения  $E_0$ , доставляемого батареями или иными источниками постоянного тока, и переменного управляющего напряжения  $e$ , индуктируемого колебательным контуром.

Зависимость анодного тока от переменной слагающей управляющего напряжения будет, следовательно:

$$i_a = f(E_0 + e) \quad (379)$$

Если  $e$  гармонично:

$$e = a \cos(\nu t + \theta)$$

то основная гармоника анодного тока будет:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \cdot \cos(\nu t + \theta)$$

Поэтому для электронных генераторов, в которых переменная слагающая управляющего напряжения приближенно гармонична (для так называемых генераторов томсоновского типа),

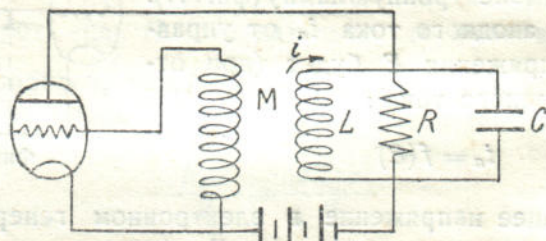
мы можем на основании принципа гармонического баланса заменить нелинейную зависимость (379) эквивалентной линейной

$$i_a = Se$$

где параметр  $S$  — „средняя крутизна характеристики лампы“ в зависимости от амплитуды  $a$ , переменной составляющей управляющего напряжения — имеет вид:

$$S = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

Возьмем, например, электронный генератор, составленный по схеме фиг. 42.



Фиг. 42.

Сопротивление  $R$ , как включенное параллельно, взято здесь достаточно большим, так, чтобы колебательный контур был слабозатухающим.

Переменная часть управляющего напряжения, очевидно, будет

$$e = (M - DL) \frac{di}{dt}$$

где  $i$  — ток в самоиндукции контура.

Так как колебания тока в слабозатухающем контуре весьма близки к гармоническим, то условие допустимости метода линеаризации выполнено.

Поэтому мы можем положить:

$$i_a = S \cdot (M - DL) \frac{di}{dt}$$

Но, с другой стороны:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = i_a$$

и, таким образом:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) S \right\} \frac{di}{dt} + i = 0$$

Следовательно:

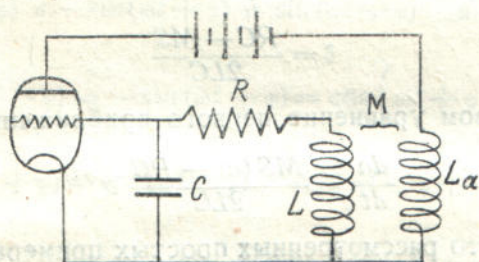
$$\delta = \frac{1}{2LC} \left\{ \frac{L}{R} - (M - DL) S \right\}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

и уравнение первого приближения будет:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{(M - DL) S(a) - \frac{L}{R} a}{2LC} a$$

Это уравнение уже было нами получено раньше, исходя из рассмотрения истинного (не линеаризованного) уравнения электронного генератора.



Фиг. 43.

Рассмотрим еще электронный генератор, составленный по схеме фиг. 43. Сопротивление  $R$ , включенное последовательно, взято достаточно малым, так, чтобы колебательный контур, помещенный в этой схеме в цепи сетки, был слабозатухающим.

Обозначая через  $i$  ток в колебательном контуре, имеем:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = M \frac{di_a}{dt}$$

или, линеаризируя характеристику лампы:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = MS \frac{de}{dt} \quad (380)$$

С другой стороны:

$$e = \frac{1}{C} \int^t idt + D \left( M \frac{di}{dt} - L_a \frac{di_a}{dt} \right)$$

Рассматривая лампы с весьма малой проницаемостью, при значении  $D$ , близком к нулю, можем, следовательно, принять:

$$e = \frac{1}{C} \int^t idt \quad (381)$$

Из (380) и (381) имеем, очевидно:

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + (RC - MS) \frac{de}{dt} + e = 0$$

откуда получаем следующие выражения для собственной частоты и декремента колебаний:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\delta = \frac{RC - MS}{2LC}$$

Таким образом уравнение первого приближения будет:

$$\frac{da}{dt} = \frac{MS(a) - RC}{2LC} a$$

На только что рассмотренных простых примерах квазигармонических колебательных систем мы показали способ применения метода линеаризации непосредственно к самой схеме данной колебательной системы.

При этом, как мы видим, нелинейные элементы системы линеаризируются независимо от прочих органов, роль которых при линеаризации сводится лишь к обеспечению приближенной гармоничности колебаний.

Здесь необходимо подчеркнуть, что эквивалентные линейные элементы существенно отличаются от истинных линейных тем, что их параметры — эквивалентные коэффициенты — являются не постоянными, а некоторыми определенными функциями амплитуды колебаний.

Преимущество метода эквивалентной линеаризации при эффективном построении уравнений первого приближения особенно

выясняется в случае сложных колебательных систем, для которых даже самое образование основных дифференциальных уравнений колебательного процесса, не говоря уже об операциях над ними, может представить затруднения.

Для таких сложных колебательных систем весьма удобно сочетать метод линеаризации с распространенными в электротехнике и акустике символическими методами. Это и составит предмет следующего параграфа, который мы начнем с краткого изложения основных понятий и приемов символических методов.

## § 6. Символические методы и их применение для квазигармонических колебательных систем

При различных действиях с гармоническими функциями времени, т. е. с тригонометрическими выражениями вида  $a \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $a \sin(\omega t + \varphi)$ , во многих случаях целесообразно вводить в рассмотрение оператор  $j$ , определяющийся как преобразование  $\cos(\omega t + \varphi)$  в  $-\sin(\omega t + \varphi)$  и  $\sin(\omega t + \varphi)$  в  $\cos(\omega t + \varphi)$ :

$$\begin{aligned} j \cos(\omega t + \varphi) &= -\sin(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \\ i \sin(\omega t + \varphi) &= \cos(\omega t + \varphi) = \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (382)$$

Как видно,  $j$  может быть также определен как оператор, поворачивающий полную фазу гармонической функции, т. е.  $\omega t + \varphi$ , на  $90^\circ$  в положительном направлении.

Целая степень  $j^n$  определяется как  $n$ -кратное последовательное применение оператора  $j$  к некоторой гармонической функции:

$$j^n f(t) = \overbrace{j \{ j \{ \dots j \{ f(t) \} \dots \} \}}^{n \text{ раз}}$$

Полиномиальный оператор вида:

$$\alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_n j^n$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  — постоянные, также имеет очевидный смысл, а именно:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 j + \dots + \alpha_n j^n) f(t) = \alpha_0 f(t) + \alpha_1 \{ j f(t) \} + \dots + \alpha_n \{ j^n f(t) \}$$

Введенный оператор  $j$ , очевидно, подчиняется основным законам алгебры в трансформациях, не зависящих от времени и линейных относительно гармонических функций, как например:

$$j(f_1 + f_2) = jf_1 + jf_2 \text{ (аддитивность)}$$

где  $f_1, f_2$  — некоторые гармонические функции,

$$j^n j^m = j^m j^n = j^{n+m}, aj = ja \text{ (коммутативность)}$$

где  $a$  — некоторая постоянная, и т. п.

Отсюда легко заключить о возможности действовать с оператором  $j$  как с обычным алгебраическим числом.

Из соотношений (382) мы видим, что

$$j^2 f(t) = -f(t)$$

где  $f(t)$  — любая гармоническая функция, т. е. символически<sup>1)</sup>:

$$j^2 = -1 \quad (383)$$

Полученное тождество позволяет трактовать оператор  $j$ , в трансформациях, не зависящих от времени и линейных относительно гармонических функций, как обычную мнимую единицу  $\sqrt{-1}$ .

В частности, например, произвольную (не зависящую от времени) функцию  $\Phi(j)$  оператора  $j$  мы можем представить в виде:

$$\Phi(j) = A + jB$$

где  $A$  — вещественная,  $B$  — мнимая часть выражения  $\Phi(\sqrt{-1})$  или в комплексно-экспоненциальной форме:

$$\Phi(j) = \mathfrak{A}e^{i\psi} \quad (384)$$

где:

$$\mathfrak{A} \cos \psi = A, \quad \mathfrak{A} \sin \psi = B$$

Поэтому, если  $f(t)$  есть гармоническая функция вида:

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

<sup>1)</sup> Нетрудно усмотреть что оператор  $j$  будет  $q$  — числом Дирака. При этом соотношение (383) показывает, что eigenвертами  $j$  будут  $+i$  и  $-i$ , где  $i = \sqrt{-1}$ . Eigenфункциями же, соответствующими этим eigenвертам, будут соответственно  $e^{i\omega t}$  и  $e^{-i\omega t}$ .

В самом деле, имеем тождественно:

$$je^{i\omega t} = j(\cos \omega t + i \sin \omega t) = -\sin \omega t + i \cos \omega t = ie^{i\omega t}$$

$$je^{-i\omega t} = j(\cos \omega t - i \sin \omega t) = -\sin \omega t - i \cos \omega t = -ie^{-i\omega t}$$

то

$$\Phi(j)f(t) = aA \cos(\omega t + \varphi) - aB \sin(\omega t + \psi)$$

или, что то же самое,

$$\Phi(j)f(t) = \mathfrak{A} a \cos(\omega t + \varphi + \psi)$$

Таким образом мы видим, что применение оператора  $\Phi(j)$  к некоторой гармонической функции  $f(t)$  сводится к умножению амплитуды этой функции на амплитуду  $\mathfrak{A}$  оператора и к повороту фазы рассматриваемой функции на фазу  $\psi$  оператора  $\Phi(j)$ .

Рассмотрим некоторую гармоническую функцию  $f(t)$  и напишем ее в виде:

$$f(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

Следовательно, на основании только что установленного:

$$f(t) = ae^{j\varphi} \cos \omega t$$

Выражение  $ae^{j\varphi}$  называется комплексной амплитудой гармонической функции  $f(t)$ . Комплексная амплитуда, очевидно, вполне определяет гармоническую функцию, и наоборот. Ясно также, что комплексная амплитуда суммы двух гармонических функций равна сумме комплексных амплитуд этих функций. Далее, легко убедиться, что если для некоторых гармонических функций  $F(t)$ ,  $f(x)$  имеет место соотношение вида:

$$F(t) = \Phi(j)f(t)$$

то их комплексные амплитуды  $I_F$  и  $I_f$  удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$I_F = \Phi(j)I_f = I_f \Phi(j)$$

Вообще, если мы имеем соотношение

$$\Phi_0(j)f_0(t) + \Phi_1(j)f_1(t) + \dots + \Phi_n(j)f_n(t) = 0 \quad (385)$$

где  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  гармонические функции с одинаковой частотой и где

$$\Phi_0(j) = \mathfrak{A}_0 e^{j\psi_0}, \Phi_1(j) = \mathfrak{A}_1 e^{j\psi_1}, \dots, \Phi_n(j) = \mathfrak{A}_n e^{j\psi_n}$$

то между комплексными амплитудами  $I_0, I_1, \dots, I_n$  функций  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  удовлетворяется алгебраическое уравнение вида

$$\Phi_0(j)I_0 + \Phi_1(j)I_1 + \dots + \Phi_n(j)I_n = 0$$

и наоборот.

Таким образом мы убеждаемся, что при различных операциях с гармоническими функциями, линейных относительно

этих функций и не зависящих от времени, например, при операциях вида (385), мы можем заменять гармонические функции обычными комплексными числами, а именно комплексными амплитудами. Определив каким-либо способом комплексные амплитуды, мы тем самым определим и самые функции.

Этот метод — так называемый метод комплексных амплитуд — благодаря своему удобству широко применяется в современной электротехнике и акустике.

Метод комплексных амплитуд приобретает особую наглядность, если мы используем графическое изображение комплексных чисел при помощи векторов (на плоскости), представляя, например, комплексную амплитуду  $ae^{j\psi}$  в виде вектора длины  $a$ , направление которого образует с направлением оси  $X$ -ов угол  $\varphi$ .

Используя этот графический способ, мы имеем возможность различные линейные соотношения между гармоническими функциями представить геометрическими соотношениями между векторами и тем самым во многих случаях решать вопрос при помощи геометрических построений.

Особая важность оператора  $j$  определяется тем фактом, что для любой гармонической функции с частотой  $\omega$  имеем тождественно:

$$\frac{df(t)}{dt} = j\omega f(t)$$

или, в символической форме:

$$\frac{d}{dt} = j\omega, \quad j = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \quad (386)$$

Рассмотрим, например, две гармонические функции  $E(t)$  и  $I(t)$  частоты  $\omega$ , удовлетворяющие дифференциальному уравнению:

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k \frac{d^k I}{dt^k} = \sum_{k=0}^n \beta_k \frac{d^k E}{dt^k} \quad (387)$$

где  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  — некоторые постоянные.

В соответствии с (386) из (387), заменяя  $\frac{d^k}{dt^k}$  на  $(j\omega)^k$ , имеем:

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega)^k \cdot I = \sum_{k=0}^n \beta_k (j\omega)^k \cdot E$$



откуда:

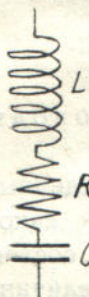
$$I(t) = \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega)^k} E(t)$$

$$E(t) = \frac{\sum_{k=0}^m \alpha_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^n \beta_k (j\omega)^k} I(t)$$

Таким образом линейные дифференциальные уравнения с постоянными по времени коэффициентами между гармоническими функциями приводятся к операционным соотношениям вида (385) и тем самым к алгебраическим уравнениям для комплексных амплитуд или к геометрическим соотношениям для соответствующих векторов.



Фиг. 44.



Фиг. 45.

Заметив это, рассмотрим некоторый проводник, между выводными концами которого протекает синусоидальный ток  $I$  некоторой частоты  $\omega$ . Предположим, что этот проводник линейный, т. е. во всех его частях все соотношения между токами и напряжениями линейны, и параметры этих соотношений постоянны по времени. Тогда, очевидно, падение напряжения  $E$  между концами проводника, вызываемое током  $I$ , будет также синусоидальным и будет обладать той же частотой  $\omega$ , что и  $I$ .

Написав, на основании законов Кирхгофа, дифференциальные уравнения, связывающие токи и напряжения в различных разветвлениях проводника, и исключая из них все неизвестные, кроме  $I$  и  $E$ , получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которому удовлетворяют гармонические функции  $I(t)$ ,  $E(t)$ .

Заменив, как было указано ранее,  $\frac{d}{dt}$  на  $j\omega$ , приходим к операционному соотношению, которое и запишем в виде:

$$E = -Z(j\omega)I \quad (388)$$

Выражение  $Z(x)$  будет, очевидно, рациональной функцией  $x$ , если уравнения Кирхгофа для рассматриваемого проводника будут обычными дифференциальными уравнениями (случай сосредоточенных параметров). Если же эти уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных (случай распределенных параметров), то  $Z(x)$ , вообще говоря, будет функцией трансцендентной.

Величина  $Z(j\omega)$ , фигурирующая в соотношении (388), формально аналогичном закону Ома, называется комплексным сопротивлением проводника, или его импедансом.

Как показывает это же соотношение, импеданс  $Z$  рассматриваемого проводника может быть определен из равенства

$$Z(j\omega) = -\frac{E_a}{I_a} \quad (389)$$

где  $E_a, I_a$  — комплексные амплитуды падения напряжения и тока.

Полагая:

$$Y(j\omega) = -\frac{I_a}{E_a} = \frac{1}{Z(j\omega)} \quad (390)$$

имеем также:

$$I = -Y(j\omega)E$$

Величина  $Y(j\omega)$  называется комплексной проводимостью или адмиттансом.

Мы видим прежде всего, что благодаря только что введенным понятиям импеданса и адмиттанса линейный проводник какой угодно сложной структуры можно заменить проводником, состоящим как бы из одного сопротивления, взяв лишь величину этого сопротивления равной импедансу сложного проводника.

При различных подсчетах импедансов и адмиттансов для всякого рода сложных линейных схем следует иметь в виду возможность применения для этой цели разных правил, относящихся к обычным сопротивлениям и проводимостям, а именно то, что при последовательном соединении складываются сопротивления, а при параллельном — проводимости.

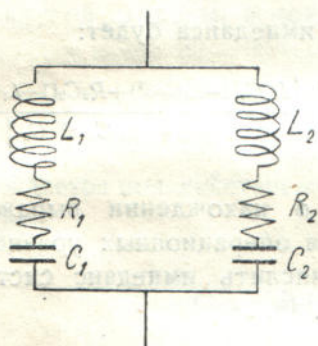
Все эти теоремы верны и в нашем случае в применении к импедансам и адмиттансам. Кроме того полезно помнить выражения для импедансов самоиндукции и емкости, которые будут соответственно:

$$Lj\omega, \quad \frac{1}{Cj\omega}$$

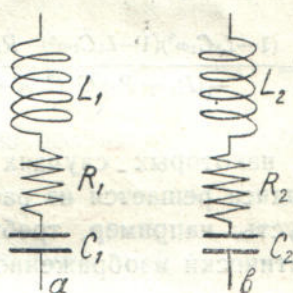
Положим, например, что мы желаем вычислить импеданс проводника, составленного по схеме фиг. 45. Тогда, замечая, что этот проводник состоит из последовательно включенных самоиндукции, омического сопротивления и емкости, на основании упомянутого правила получаем сразу искомое выражение импеданса:

$$Z = Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} = R + j \left[ L\omega - \frac{1}{C\omega} \right]$$

Взяв теперь случай более сложной схемы (фиг. 46), состоящей из двух параллельно включенных цепей *a* и *b* (фиг. 47),



Фиг. 46.



Фиг. 47.

имеем:

$$Y = Y_a + Y_b$$

где  $Y$ ,  $Y_a$ ,  $Y_b$  — соответственно полный адмиттанс и адмиттансы цепей *a* и *b*.

С другой стороны, так как цепь *a* в свою очередь состоит из последовательно включенных самоиндукции  $L_1$ , омического сопротивления  $R_1$  и емкости  $C_1$ , получаем:

$$Z_a = L_1 j\omega + R_1 + \frac{1}{C_1 j\omega}$$

и аналогично:

$$Z_b = L_2 j\omega + R_2 + \frac{1}{C_2 j\omega}$$

откуда:

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = \frac{C_1 j\omega}{(1 - L_1 C_1 \omega^2) + jR_1 C_1 \omega}$$

$$Y_b = \frac{1}{Z_b} = \frac{C_2 j\omega}{(1 - L_2 C_2 \omega^2) + jR_2 C_2 \omega}$$

Таким образом:

$$Y = \frac{C_1 j\omega}{(1 - L_1 C_1 \omega^2) + jR_1 C_1 \omega} + \frac{C_2 j\omega}{(1 - L_2 C_2 \omega^2) + jR_2 C_2 \omega} =$$

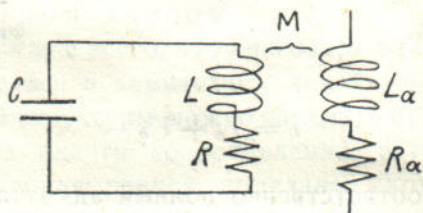
$$= \frac{\{(1 - L_2 C_2 \omega^2) C_1 + (1 - L_1 C_1 \omega^2) C_2\} j\omega - \{R_1 C_1 C_2 \omega^2 + R_2 C_1 C_2 \omega^2\}}{\{(1 - L_1 C_1 \omega^2) + jR_1 C_1 \omega\} \{(1 - L_2 C_2 \omega^2) + jR_2 C_2 \omega\}}$$

и потому выражение для искомого импеданса будет:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{(1 - L_1 C_1 \omega^2)(1 - L_2 C_2 \omega^2) - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + j\omega \{R_1 C_1 (1 - L_2 C_2 \omega^2) + R_2 C_2 (1 - L_1 C_1 \omega^2)\}}{-(R_1 + R_2) C_1 C_2 \omega^2 + j\omega \{(1 - L_2 C_2 \omega^2) C_1 + (1 - L_1 C_1 \omega^2) C_2\}}$$

В некоторых случаях вопрос о нахождении выражения импеданса решается из рассмотрения операционных уравнений.

Пусть, например, требуется вычислить импеданс системы, схематически изображенной на фиг. 48.



Фиг. 48.

Система эта состоит из проводника ( $L_a$ ,  $R_a$ ), индуктивно связанного (коэффициент взаимной индукции  $M$ ) с замкнутым контуром ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ).

Пусть  $i_a$  — ток в проводнике ( $L_a$ ,  $R_a$ ),  $e_a$  — падение напряжения между концами этого проводника,  $i$  — ток в контуре ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ).

Если бы контур ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ) отсутствовал, то мы имели бы, очевидно,

$$e_a = -(L_a j\omega + R_a) i_a$$

Вследствие же существования этого контура и его индуктивной связи с нашими проводниками, в проводнике ( $L_a$ ,  $R_a$ ) возбуждается электродвижущая сила

$$M \frac{di}{dt} = Mj\omega i$$

Поэтому предыдущее соотношение мы должны заменить на следующее:

$$e_a = -(L_a j\omega + R_a) i_a + Mj\omega i \quad (391)$$

С другой стороны, в контуре ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ) с импедансом

$$Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}$$

возбуждается под действием тока  $i_a$  электродвижущая сила  $Mj\omega i_a$ . Поэтому:

$$\left( Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} \right) i = Mj\omega i_a$$

откуда:

$$i = \frac{-MC\omega^2}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} i_a \quad (392)$$

Подставив (392) в (391), имеем:

$$e_a = - \left\{ L_a j\omega + R_a + \frac{M^2 C j\omega^3}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \right\} i_a$$

Следовательно, искомое выражение для импеданса рассматриваемой системы будет:

$$Z = L_a j\omega + R_a + \frac{M^2 C j\omega^3}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = R_a + \frac{RM^2 C^2 \omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2} + j\omega \left\{ L_a + \frac{M^2 C \omega^2 (1 - LC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2} \right\} \quad (393)$$

На рассмотренных примерах нами были указаны приемы для эффективного образования выражений для импедансов и адмиттансов, независимо от предварительного составления полной системы дифференциальных уравнений Кирхгофа.

Вообще говоря, составление и оперирование с системой дифференциальных уравнений Кирхгофа не представляет никаких принципиальных затруднений.

Однако, с точки зрения практической эффективности такой способ не был бы удобен вследствие большой громоздкости манипулирования с дифференциальными уравнениями.

В виду того, что самая сложная линейная электрическая колебательная система может быть характеризуема соответствующими импедансами или адмиттансами, понятия импеданса и адмиттанса являются основными понятиями современной электротехники.

За последнее время, главным образом в акустике, понятия эти обобщаются и для механических колебательных систем, что основано на давно известной аналогии между механическими и электрическими колебаниями.

Пусть, например, мы имеем механическую колебательную систему, состоящую из массы  $m$ , притягиваемой к неподвижному центру упругой силой  $kx$ , пропорциональной расстоянию и испытывающей амортизирующее воздействие силы трения  $\lambda \frac{dx}{dt}$ , пропорционального скорости.

Если к массе  $m$  приложена еще внешняя сила, то уравнение колебаний рассматриваемой системы будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (394)$$

или, принимая за неизвестное скорость  $v = \frac{dx}{dt}$ :

$$m \frac{dv}{dt} + \lambda v + k \int v dt = f(t) \quad (395)$$

Рассмотрим, с другой стороны, проводник, состоящий из последовательно включенных самоиндукции  $L$ , омического сопротивления  $R$  и емкости  $C$ .

Если между концами этого проводника приложена внешняя электродвижущая сила  $E(t)$ , то уравнение колебаний тока  $i$  в рассматриваемой цепи будет:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = E \quad (396)$$

Вследствие полной формальной идентичности уравнений (395) и (396) имеем следующую аналогию, установленную еще П. Кюри (см. „Труды“, стр. 164, 1891 г.):

Механические колебания	Электрические колебания
Перемещение $x$	Электрический заряд $q = \int idt$
Скорость $v$	Ток $i$
Сила $f$	Электродвижущая сила $E$
Масса $m$	Коэффициент самоиндукции $L$
Коэффициент трения (пропорционального скорости) $\lambda$	Омическое сопротивление $R$
Коэффициент упругости $k$	Величина, обратная емкости, $\frac{1}{C}$

Это и есть основная электромеханическая аналогия, используемая в современной акустике.

При изучении механических колебательных систем весьма часто приходится рассматривать колебания кручения (крутильные колебания).

Основное дифференциальное уравнение для крутильных колебаний в случае системы с одной степенью свободы имеет тот же вид, что и уравнение (394), а именно:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + n \frac{d\theta}{dt} + c\theta = M(t) \quad (397)$$

Как видно, уравнение (397) получается из уравнения (394), если мы заменим перемещение  $x$  на угловое отклонение  $\theta$ , скорость  $\frac{dx}{dt}$  — на угловую скорость  $\frac{d\theta}{dt}$ , силу  $f$  — на крутящий момент  $M$ , массу  $m$  — на момент инерции  $J$ , коэффициент трения  $\lambda$  — на момент трения, отнесенный к единице угловой скорости  $n$ , коэффициент упругости  $k$  — на коэффициент жесткости (жесткость)  $c$ .

Таким образом мы имеем следующую аналогию крутильных и электрических колебаний:

Крутильные колебания	Электрические колебания
Угловое отклонение $\theta$	Электрический заряд $q$
Угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$	Ток $i$
Крутящий момент $M$	Электродвижущая сила $E$
Момент инерции $J$	Самоиндукция $L$
Амортизирующий тормозящий момент, отнесенный к единице угловой скорости $n$	Омическое сопротивление $R$
Жесткость $c$	Величина, обратная емкости, $\frac{1}{C}$

Рассмотрим теперь гармонические колебания.

Используя понятие импеданса, из уравнения (396) получим:

$$E = Zi, \text{ где } Z = Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} \quad (398)$$

С другой стороны, применяя операционный метод к уравнению (395), имеем:

$$f = zv, \text{ где } z = mj\omega + \lambda + \frac{k}{j\omega}$$

По аналогии с соотношением (398) величину  $z$  называют механическим импедансом<sup>1)</sup> рассматриваемой системы, обратную же величину

$$y = \frac{1}{z} = \frac{j\omega}{(k - m\omega^2) + j\lambda\omega}$$

— механическим адмиттансом.

Мы рассматривали сейчас механические колебательные системы с одной степенью свободы. Не представляет, однако, особых затруднений построение электрических аналогов и для механических колебательных систем с большим числом степеней свободы.

<sup>1)</sup> Для случая крутильных колебаний мы должны были бы определить импеданс из соотношения:

$$z = Jj\omega + n + \frac{c}{j\omega}$$



Так например, нетрудно заметить, что для механической системы (см. фиг. 49), состоящей из трех масс  $m_1, m_2, m_3$ , связанных с неподвижным центром  $O$  пружинами, с коэффициентами упругости  $k_1, k_2, k_3$ , электрическим аналогом будет цепь,

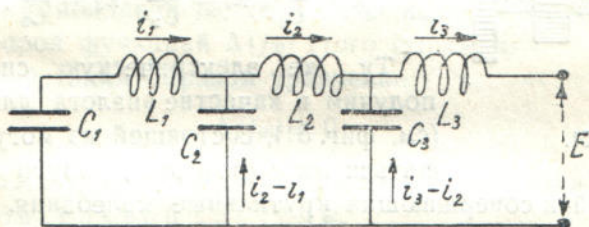


Фиг. 49.

состоящая из последовательно включенных самоиндукций  $L_1, L_2, L_3$  и параллельно включенных емкостей  $C_1, C_2, C_3$  (см. фиг. 50).

В самом деле, обозначая через  $v_1, v_2, v_3$  — скорости масс  $m_1, m_2, m_3$ , замечая, что перемещения этих масс будут соответственно:

$$x_1 = \frac{1}{j\omega} v_1, \quad x_2 = \frac{1}{j\omega} v_2, \quad x_3 = \frac{1}{j\omega} v_3$$



Фиг. 50.

имеем следующие операционные уравнения для рассматриваемой механической системы:

$$m_1 j\omega v_1 + \frac{k_1}{j\omega} v_1 - \frac{k_2}{j\omega} (v_2 - v_1) = 0$$

$$m_2 j\omega v_2 + \frac{k_2}{j\omega} (v_2 - v_1) - \frac{k_3}{j\omega} (v_3 - v_2) = 0 \quad (399)$$

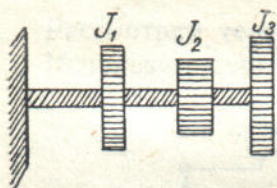
$$m_3 j\omega v_3 + \frac{k_3}{j\omega} (v_3 - v_2) = f$$

С другой стороны, обозначая через  $i_1, i_2, i_3$  токи в самоиндукциях  $L_1, L_2, L_3$  и замечая, что токи в емкостях  $C_1, C_2, C_3$  будут соответственно  $i_1, i_2 - i_1, i_3 - i_2$ , получаем операционные

уравнения для рассматриваемой электрической системы в виде:

$$\begin{aligned} L_1 j\omega i_1 + \frac{1}{C_1 j\omega} i_1 - \frac{1}{C_2 j\omega} (i_2 - i_1) &= 0 \\ L_2 j\omega i_2 + \frac{1}{C_2 j\omega} i_2 - \frac{1}{C_3 j\omega} (i_3 - i_2) &= 0 \\ L_3 j\omega i_3 + \frac{1}{C_3 j\omega} (i_3 - i_2) &= E \end{aligned} \quad (400)$$

Сравнивая операционные системы (399) и (400), мы видим, что система, изображенная на схеме фиг. 50, будет действительно электрическим аналогом рассматриваемой механической системы фиг. 49, если с точностью до выбора единиц мы положим:



Фиг. 51.

$$\begin{aligned} m_1 &= L_1, \quad m_2 = L_2, \quad m_3 = L_3 \\ k &= \frac{1}{C_1}, \quad k_2 = \frac{1}{C_2}, \quad k_3 = \frac{1}{C_3}, \quad f = E \end{aligned}$$

Ту же электрическую систему мы получим в качестве аналога для системы (см. фиг. 51), состоящей из могущих вращаться масс (рогоров), упруго связанных между собой и совершающих крутильные колебания. При этом один конец (1) системы закреплен, а на другой (3) действует крутящий момент  $M(t)$ .

Чтобы привести эту систему к ранее рассмотренной электрической схеме, стоит лишь положить с точностью до соответствующего выбора единиц:

$$\begin{aligned} J_1 &= L_1, \quad J_2 = L_2, \quad J_3 = L_3 \\ c_1 &= \frac{1}{C_1}, \quad c_2 = \frac{1}{C_2}, \quad c_3 = \frac{1}{C_3}, \quad M = E \end{aligned}$$

где  $J_1, J_2, J_3$  — моменты инерции рогоров;  $c_1, c_2, c_3$  — жесткости упругих связей.

В виду выясненной возможности приведения механических колебательных систем к электрическим, мы будем вести дальнейшее изложение настоящего параграфа применительно к электрическим системам.

Перенесение получаемых результатов на механические системы, как видно, не может вызвать никаких затруднений.

Будем исследовать теперь замкнутые линейные системы, в которых отсутствуют внешние источники гармонического возбуждения (внешние синусоидальные э. д. с.), рассматривая их собственные гармонические (т. е. незатухающие) колебания.

Составим полную совокупность операционных уравнений рассматриваемой колебательной системы. Мы получим здесь систему  $n$  линейных и однородных уравнений относительно неизвестных гармонических функций (токов или напряжений).

Заменяя эти неизвестные функции их комплексными амплитудами, имеем систему  $n$  линейных и однородных алгебраических уравнений.

Как известно, для разрешимости такой системы уравнений необходимо и достаточно обращение в нуль решающего определителя. Так как в операционных уравнениях оператор  $j$  входит всегда в комбинации  $j\omega$ , то и разрешающий определитель будет некоторой функцией  $\Delta(j\omega)$  этого выражения.

Полученное таким образом уравнение

$$\Delta(j\omega) = 0 \quad (401)$$

назовем комплексным уравнением рассматриваемой колебательной системы.

Пусть, например, мы имеем замкнутый контур ( $L, R, C$ ) и пусть  $i$  будет током в этом контуре. Тогда, очевидно:

$$\left( Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} \right) i = 0$$

откуда видим, что соответствующее комплексное уравнение будет:

$$\Delta(j\omega) = j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) + R = 0$$

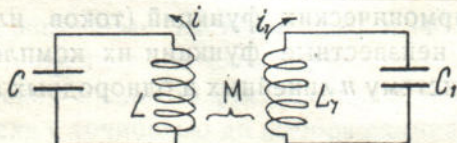
и, следовательно:

$$R = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Как и следовало ожидать, гармонические, и потому незатухающие, колебания в рассматриваемом контуре возможны лишь при отсутствии омического сопротивления  $R = 0$ .

Рассмотрим далее систему, состоящую из двух замкнутых, индуктивно связанных контуров  $(L, C)$ ,  $(L_1, C_1)$  (см. фиг. 52). Пусть  $i$  — ток в контуре  $(L, C)$ ,  $i_1$  — ток в контуре  $(L_1, C_1)$ . Имеем, очевидно:

$$\begin{aligned} \left( Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} \right) i - Mj\omega i_1 &= 0 \\ -Mj\omega i + \left( L_1 j\omega + \frac{1}{C_1 j\omega} \right) i_1 &= 0 \end{aligned}$$



Фиг. 52.

Поэтому комплексное уравнение рассматриваемой колебательной системы будет:

$$\left( Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} \right) \left( L_1 j\omega + \frac{1}{C_1 j\omega} \right) + M^2 \omega^2 = 0$$

т. е.:

$$(LC\omega^2 - 1)(L_1 C_1 \omega^2 - 1) - M^2 C_1 C_2 \omega^4 = 0 \quad (402)$$

Полагая для сокращения:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \nu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad q = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

из (402) имеем:

$$\omega^4 (1 - q^2) + (\nu^2 + \nu_1^2) \omega^2 + \nu^2 \nu_1^2 = 0$$

откуда, решая, получаем два возможных значения для частоты собственных колебаний:

$$\omega = \omega_1$$

$$\omega = \omega_2$$

где:

$$\omega_1^2 = \frac{\nu^2 + \nu_1^2 + \sqrt{(\nu^2 - \nu_1^2)^2 + 4q^2 \nu^2 \nu_1^2}}{2(1 - q^2)} \quad (403)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\nu^2 + \nu_1^2 - \sqrt{(\nu^2 - \nu_1^2)^2 + 4q^2 \nu^2 \nu_1^2}}{2(1 - q^2)}$$

Перейдем теперь к изучению собственных стационарных колебаний в квазигармонических колебательных системах, применяя изложенные выше приемы к эквивалентным линейным системам, образуемым в методе линеаризации.

Рассмотрим некоторую электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных самоиндукции  $L$ , сопротивления  $R$  и емкости  $C$ . Замыкая ее на короткое, имеем контур  $(L, R, C)$ , в котором могут иметь место затухающие колебания с декрементом затухания  $\frac{R}{2L}$  и частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$$

Если сопротивление  $R$  взять достаточно малым, так, чтобы величина

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

была величиной первого порядка малости, то рассматриваемые колебания будут слабозатухающими с частотой, равной (до величин второго порядка малости)

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Форма колебаний в этом случае, очевидно, весьма близка к синусоидальной. Чтобы нейтрализовать затухание колебаний, мы можем включить в этот контур некоторое отрицательное сопротивление.

Возьмем некоторый нелинейный орган  $N$ , например дугу, с характеристикой вида:

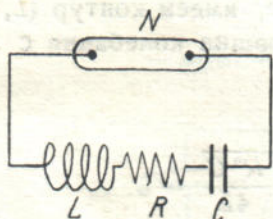
$$e = -F(i)$$

(где  $i$  — ток,  $e$  — падение напряжения, создаваемое током  $i$ ) такой, что „мгновенное сопротивление“  $F'(i)$  будет иметь одинаковый с  $R$  порядок малости и будет отрицательным, по крайней мере, в некотором участке значений  $i$ .

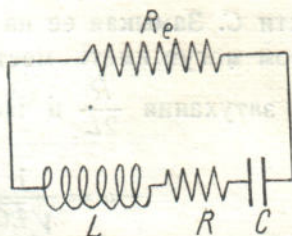
Замкнем теперь цепь  $(L, R, C)$  не на короткое, т. е. не на нулевое сопротивление, а на малое нелинейное сопротивление  $F'(i)$ . Тогда мы получим колебательную систему, схематически

изображенную на фиг. 53, которая состоит из последовательно включенных  $L$ ,  $R$ ,  $C$  и органа  $N$ .

В виду малости мгновенного сопротивления влияние его на форму колебаний в рассматриваемом контуре будет мало и, следовательно, мы будем иметь здесь квазигармоническую колебательную систему, к которой применим метод линеаризации.



Фиг. 53.



Фиг. 54.

Как мы уже видели раньше (стр. 157—158), орган  $N$  в квазигармонических колебательных системах может быть заменен линейным элементом

$$e = -R_e i$$

состоящим из эквивалентного сопротивления

$$R_e = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F'(a \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \quad (404)$$

где  $a$  — амплитуда тока  $i$ .

Как видно из этой формулы, эквивалентное сопротивление будет средним значением мгновенного сопротивления  $F'$ .

Поэтому  $R_e$  является величиной того же порядка малости, что и омическое сопротивление  $R$  нашего контура.

Так как эквивалентная линейная система состоит из эквивалентного сопротивления  $R_e$ , самоиндукции  $L$ , емкости  $C$  (см. фиг. 54), омического сопротивления  $R$ , то соответствующее комплексное уравнение будет:

$$Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} + R_e = 0$$

Это уравнение, очевидно, распадается на два:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad (405)$$

$$R_e(a) = -R \quad (406)$$