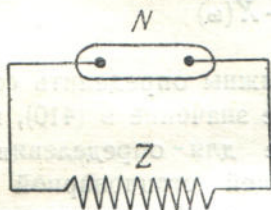


Первое из этих уравнений определяет собственную частоту стационарных колебаний:

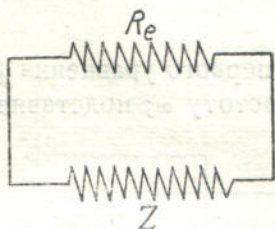
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

второе же (406) — служит для определения амплитуды.

Это последнее уравнения (406) показывает, между прочим, что стационарные колебания в рассматриваемой системе возможны лишь в том случае, когда эквивалентное сопротивление  $R_e(a)$



Фиг. 55.



Фиг. 56.

в некотором участке значений  $a$  отрицательно, т. е., если нелинейный орган  $N$  в некотором участке значений амплитуды тока работает как генератор. Для этого же, очевидно, необходимо, чтобы мгновенное сопротивление, средним значением которого является  $R_e$ , было отрицательно хотя бы в некотором участке значений  $i$ .

Рассмотрим теперь более общую колебательную систему  $\Sigma_N$ , состоящую из линейной электрической цепи с некоторым импедансом  $Z(j\omega)$ , замкнутой через нелинейный орган  $N$  (см. фиг. 55).

Чтобы не выходить из рамок квазигармонических колебательных систем и тем самым не нарушать возможности применения метода линеаризации, выберем параметры линейной цепи таким образом, чтобы в контуре, состоящем из этой замкнутой на короткое цепи, имели место слабозатухающие колебания почти синусоидальной формы и чтобы сопротивление, приносимое органом  $N$ , было достаточно малым по сравнению с импедансами индуктивных и емкостных ветвей, и тем самым не вызвало большой деформации синусоидальной формы колебаний.

Применяя метод эквивалентной линеаризации, получаем эквивалентную линейную систему, указанную на схеме фиг. 56.

Таким образом, комплексное уравнение будет:

$$Z(j\omega) + R_e = 0 \quad (407)$$

Пусть  $X(\omega)$  будет вещественной, а  $Y(\omega)$  — мнимой частью комплексного выражения

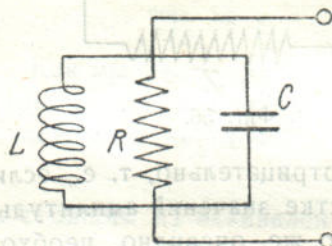
$$Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) \quad (408)$$

Мы видим, что уравнение (407) распадается на два:

$$Y(\omega) = 0 \quad (409)$$

$$R_e(a) = -X(\omega) \quad (410)$$

Из первого уравнения (409) мы должны определить собственную частоту  $\omega$ ; подставив найденное значение в (410), получим уравнение для определения соответствующей стационарной амплитуды. Имея графики величин  $X$  и  $Y$  в зависимости от  $\omega$  и график величины  $R_e$  в зависимости от  $a$ , очевидно, совсем нетрудно путем простого геометрического построения определить возможные значения амплитуд и частот рассматриваемых стационарных колебаний.



Фиг. 57.

Рассмотрим теперь цепь (см. фиг. 57), состоящую из параллельно включенных ( $L$ ,  $R$ ,  $C$ ).

Очевидно, что в этой цепи, или, что то же самое, в цепи, замкнутой через бесконечное сопротивление, могут иметь место затухающие колебания с декрементом затухания  $\frac{1}{2RC}$

и частотой  $\frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1-d^2}$ , где  $d = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Если сопротивление  $R$  взять достаточно большим, так, чтобы значение  $d$  было „величиной первого порядка малости“, то частота колебаний (с точностью до величин второго порядка малости) будет  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ , форма же колебаний становится весьма близкой к синусоидальной.

Чтобы нейтрализовать получающееся слабое затухание, мы можем замкнуть рассматриваемую цепь не через бесконечное, а через некоторое достаточно большое отрицательное сопро-



тивление (т. е. через некоторую весьма малую отрицательную проводимость).

Возьмем некоторый нелинейный орган  $T$ , например, динактрон с характеристикой

$$i = f(e)$$

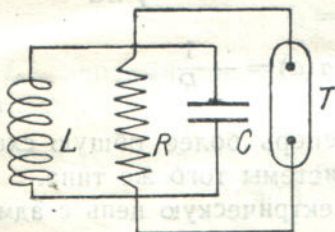
где  $e$  — напряжение,  $i$  — ток, для которой „мгновенная проводимость“  $f'(e)$  (крутизна характеристики) имеет порядок малости  $\frac{1}{R}$ .

Величина

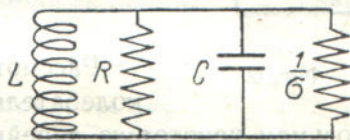
$$\frac{f'(e)}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

имеет, следовательно, первый порядок малости.

Допустим, что рассматриваемая характеристика имеет падающие участки, т. е. участки с отрицательной  $f'(e)$ .



Фиг. 58.



Фиг. 59.

Замыкая цепь (фиг. 58) через орган  $T$ , получаем колебательную систему, схематически изображенную на фиг. 59.

В виду условий достаточной малости величин

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ и } f'(e) \sqrt{\frac{L}{C}}$$

система эта, очевидно, будет квазигармонической.

Как уже было показано ранее (см. стр. 158), в квазигармонических системах орган  $T$  может быть заменен эквивалентным линейным органом

$$i = \sigma e$$

состоящим из сопротивления  $\frac{1}{\sigma}$ , где

$$\sigma = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

и где  $a$  — амплитуда напряжения  $e$ .

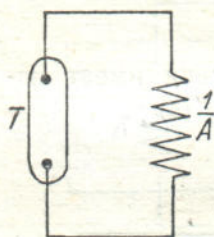
Таким образом, эквивалентная линейная система состоит (см. фиг. 59) из самоиндукции  $L$ , емкости  $C$  и сопротивлений  $R$  и  $\frac{1}{\sigma}$ , включенных параллельно. Соответствующее комплексное уравнение будет, очевидно:

$$(1 - LC\omega^2) + j\omega L \left( \frac{1}{R} + \sigma \right) = 0$$

откуда:

$$1 - LC\omega^2 = 0, \text{ т. е. } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\sigma(a) = -\frac{1}{R}$$



Фиг. 60.

Рассмотрим теперь более общую схему колебательной системы того же типа.

Возьмем некоторую линейную электрическую цепь с адмиттансом  $A(j\omega)$ , такую, что в этой цепи (замкнутой через бесконечное сопротивление) могут иметь место слабозатухающие колебания почти синусоидальной формы.

Образует колебательную систему  $\Sigma_T$ , замыкая взятую цепь через орган  $T$  (см. фиг. 60) с достаточно малой крутизной характеристики.

На основании ранее сказанного, эквивалентная линейная система состоит из импедансов

$$\frac{1}{A(j\omega)} \text{ и } \frac{1}{\sigma(a)}$$

Поэтому:

$$A(j\omega) + \sigma(a) = 0 \quad (411)$$



Обозначая через  $X(\omega)$  вещественную и через  $Y(\omega)$  — мнимую части адмиттанса  $A$ , получаем из (411) два уравнения, совершенно аналогичных уравнениям (409) и (410):

$$Y(\omega) = 0$$

$$\sigma(a) = -X(\omega)$$

Вообще нетрудно заметить, что для перехода от колебательных систем с органом  $N$  к системам с органом  $T$  следует лишь заменить токи на напряжения, импедансы — на адмиттансы, эквивалентное сопротивление — на эквивалентную проводимость и т. д.

Рассмотрим, наконец, электронный генератор томсоновского типа (в котором переменные слагающие анодного и сеточного напряжения  $e_a$  и  $e_g$  приближенно синусоидальны).

Как мы уже видели раньше (см. стр. 160), нелинейный элемент — электронная лампа — в генераторе рассматриваемого типа может быть заменен линейным с характеристикой вида

$$i_a = S(e_g + De_a) \quad (412)$$

где  $i_a$  — анодный ток,  $D$  — проницаемость лампы,  $S$  — „средняя крутизна“:

$$S(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (413)$$

$a$  — амплитуда переменной слагающей управляющего напряжения;  $e = e_g + De_a$ ;  $E_0$  — постоянная слагающая управляющего напряжения;  $i_a = f(E)$  — нелинейная характеристика лампы.

Обозначая через  $\mathfrak{R}_a(j\omega)$  импеданс линейной цепи анода, имеем:

$$e_a = -\mathfrak{R}_a(j\omega) i_a \quad (414)$$

В виду обратной связи анодной цепи с сеточной под действием анодного тока на сетке наводится напряжение, которое мы представим в виде:

$$e_g = \mathfrak{M}(j\omega) i_a \quad (415)$$

Из равенств (414) и (415) получаем:

$$\mathfrak{A}(j\omega)e = i_a \quad (416)$$

где

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\mathfrak{M} - D\mathfrak{R}_a} \quad (417)$$

Величина  $\mathfrak{A}$ , очевидно, имеет размерность адмиттанса; в виду этого ее можно назвать управляющим адмиттансом генератора.

Из (412) и (416) имеем:

$$\mathfrak{A}(j\omega)e - Se = 0$$

и потому комплексное уравнение электронного генератора будет:

$$\mathfrak{A}(j\omega) - S = 0 \quad (418)$$

Уравнение это, как видно, совершенно аналогично уравнению (411) для колебательной системы  $\Sigma_T$ , даже в отношении размерностей входящих сюда величин.

При исследовании электронного генератора иногда вводят в рассмотрение „коэффициент обратной связи“:

$$K = \frac{\mathfrak{M}(j\omega)}{\mathfrak{R}_a(j\omega)} \quad (419)$$

Так как из (414) и (415) мы имеем

$$\vec{e}_g = -K\vec{e}_a$$

где  $\vec{e}_g$ ,  $\vec{e}_a$  — соответственно комплексные амплитуды, то коэффициент обратной связи может быть определен как отношение, взятое с обратным знаком, комплексной амплитуды переменной слагающей сеточного напряжения к комплексной амплитуде переменной слагающей анодного напряжения:

$$K = -\frac{\vec{e}_g}{\vec{e}_a} \quad (420)$$

Из (417), (418) и (419) имеем:

$$(K - D)\mathfrak{R}_a S = 1$$

откуда

$$K = D + \frac{1}{\mathfrak{R}_a S} \quad (421)$$

В радиотехнике комплексное уравнение электронного генератора представляется обычно в форме (421) и называется „условием стационарности Баркгаузена“.



Рассмотрим сейчас несколько конкретных схем электронных генераторов.

Возьмем, например, ранее рассматривавшуюся уже схему, изображенную на фиг. 61.

Здесь анодная цепь состоит из параллельно включенных ( $L, R, C$ ), и потому адмиттанс ее будет:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_a} = \frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R} + Cj\omega$$

что дает:

$$\mathfrak{R}_a = \frac{j\omega L}{(1 - LC\omega^2) + j\frac{\omega L}{R}}$$

С другой стороны, имеем, очевидно:

$$K = \frac{M}{L}$$

и, следовательно:

$$\mathfrak{M} = \frac{j\omega M}{(1 - LC\omega^2) + j\frac{\omega L}{R}}$$

Таким образом:

$$\mathfrak{A} = \frac{(1 - LC\omega^2) + j\frac{\omega L}{R}}{(M - DL)j\omega}$$

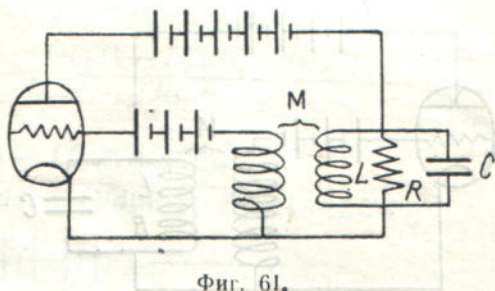
и комплексное уравнение рассматриваемой колебательной системы будет:

$$(1 - LC\omega^2) + j\omega \left[ \frac{L}{R} - (M - DL)S \right] = 0$$

откуда:

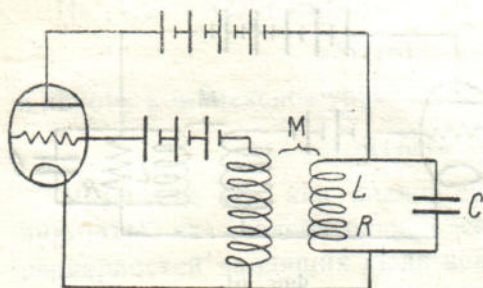
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$(M - DL)S(a) = \frac{L}{R} \quad (422)$$



Это же уравнение (422) мы могли бы получить из ранее образованного общего уравнения первого приближения, переходя в нем к стационарным колебаниям, т. е. полагая  $\frac{da}{dt} = 0$ .

Рассмотрим теперь еще так называемую схему Мейснера (фиг. 62). В этом случае мы имеем:



Фиг. 62.

$$K = \frac{Mj\omega}{Lj\omega + R}$$

$$\Re_a = \frac{Lj\omega + R}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

Следовательно:

$$\Im = \frac{Mj\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

и

$$\Re = \frac{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}{(M - DL)j\omega - DR}$$

так что комплексное уравнение будет:

$$1 - LC\omega^2 - DRS + j\omega [RC - (M - DL)S] = 0$$

откуда:

$$1 - LC\omega^2 - DRS = 0 \quad (423)$$

$$(M - DL)S(a) = RC \quad (424)$$

Так как в генераторе рассматриваемой схемы величина  $DRS$  является чрезвычайно малой (величиной второго порядка малости), то из (423) мы можем написать просто

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Рассмотрим, наконец, генератор, образованный по схеме фиг. 63. Анодная цепь состоит здесь из самоиндукции  $L_a$ , индуктивно связанной с замкнутым контуром ( $L, R, C$ ). Поэтому [см. формулу (393)]:

$$\Re_a = L_a j\omega + \frac{M^2 C j\omega^3}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$



Аналогично найдем:

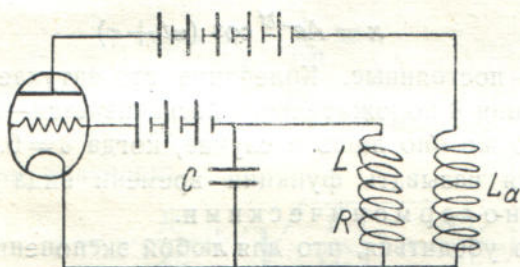
$$\Re = \frac{1}{Cj\omega} \cdot \frac{Mj\omega}{Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{Mj\omega}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}$$

откуда:

$$\begin{aligned} \Re - D\Re_a &= \frac{Mj\omega(1 - DMC\omega^2)}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} - DL_a j\omega = \\ &= \frac{j\omega [M(1 - DMC\omega^2) - DL_a(1 - LC\omega^2)] + DRCL_a \omega^2}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \end{aligned}$$

так что

$$\Re = \frac{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega}{DRCL_a \omega^2 + j\omega [M(1 - DMC\omega^2) - DL_a(1 - LC\omega^2)]}$$



Фиг. 63.

Комплексное уравнение будет, следовательно:

$$j[RC\omega - M\omega(1 - DMC\omega^2)S - DL_a S(1 - LC\omega^2)] + \\ + 1 - LC\omega^2 - DSRCL_a \omega^2 = 0$$

и таким образом мы получим:

$$1 - LC\omega^2 \left(1 + DSR \frac{L_a}{L}\right) = 0 \quad (425)$$

$$RC\omega - M\omega(1 - DMC\omega^2)S - DL_a S(1 - LC\omega^2) = 0 \quad (426)$$

Но так как в рассматриваемом случае  $DSR$  есть величина второго порядка малости, то из (425) и (426) мы имеем:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (427)$$

$$M \left(1 - D \frac{M}{L}\right) S(a) = RC$$

В частном случае весьма малой проницаемости:  $D \cong 0$  из (427) получаем:

$$MS(a) = RC$$

т. е. то же уравнение мы могли бы получить из общего уравнения первого приближения (381<sub>1</sub>), переходя в этом последнем к стационарным колебаниям, т. е. полагая  $\frac{da}{dt} = 0$ .

До сих пор мы рассматривали исключительно стационарные колебания с постоянной амплитудой. Перейдем теперь к исследованию общего случая нестационарных колебаний.

Как известно, в линейных колебательных системах нестационарное колебание имеет, вообще говоря, вид:

$$x = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (428)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — постоянные. Колебание это затухает, если декремент затухания  $\delta$  положителен, и раскачивается — в случае  $\delta < 0$ . Стационарно же оно лишь в случае, когда  $\delta = 0$ .

Условимся называть функции времени вида (428) экспоненциально-гармоническими.

Нетрудно убедиться, что для любой экспоненциально-гармонической функции  $f(t)$  имеет место тождество

$$\frac{df(t)}{dt} = (-\delta + j\omega)f(t)$$

(где  $\delta$  — ее декремент затухания,  $\omega$  — частота) и потому ранее изложенные символические методы могут быть распространены и на экспоненциально-гармонические функции, т. е. на общий случай нестационарных колебаний в линейных колебательных системах. Для этого стоит лишь заменить в ранее полученных формулах  $j\omega$  на  $-\delta + j\omega$ .

Пусть, например, мы имеем некоторую замкнутую линейную систему и пусть комплексное уравнение для собственных стационарных колебаний будет:

$$\Delta(j\omega) = 0$$

Тогда, на основании только что сказанного, соответствующее уравнение для общего нестационарного случая может быть представлено в виде:

$$\Delta(p) = 0 \quad (429)$$

где  $p = -\delta + j\omega$ .



Это уравнение (429) будем называть характеристическим уравнением рассматриваемой системы.

Решив характеристическое уравнение и найдя мнимую и вещественную части полученного корня, мы тем самым определим частоту и декремент затухания изучаемого колебания.

Пусть, например, мы имеем замкнутый контур ( $L, R, C$ ). Как мы уже видели [см. формулу (402)], комплексное уравнение этого контура следующее:

$$Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} = 0$$

и потому характеристическое уравнение будет:

$$Lp + R + \frac{1}{Cp} = 0$$

т. е.

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

откуда решая, получаем:

$$p = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 - \frac{R^2C}{4L}\right)}$$

и таким путем приходим к общеизвестным формулам для частоты и декремента затухания:

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}}{\sqrt{LC}}$$
$$\delta = \frac{R}{2L}$$

Нетрудно заметить, что характеристическое уравнение (429) могло бы быть получено без всяких символических методов обычным классическим путем. Именно, рассматривая собственные колебания в какой-либо линейной колебательной системе, построим полную систему линейных однородных дифференциальных уравнений. Заменяя  $\frac{d}{dt}$  на число  $p$ , получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений. Приравняв нулю разрешающий определитель системы, мы и получаем наше характеристическое уравнение.

По существу, разумеется, оба эти методы для эффективного образования характеристического уравнения совершенно эквивалентны, но все же, по видимому, с точки зрения наглядности и техники вычислений, удобнее применять символический метод, основанный на понятиях импеданса и адмиттанса, чем в явном виде выписывать все дифференциальные уравнения колебательной системы.

Заметив это, возьмем ранее рассмотренные нелинейные колебательные квазигармонические системы с органом  $N$ , с органом  $T$  и с электронной лампой. На основании только что сказанного и комплексных уравнений (407), (411) и (416), мы видим, что характеристические уравнения для эквивалентных линейных систем будут соответственно:

$$Z(p) + R_e(a) = 0 \quad \text{для системы } \Sigma_N \quad (430)$$

$$A(p) + \sigma(a) = 0 \quad \text{для системы } \Sigma_T \quad (431)$$

$$\mathfrak{A}(p) - S(a) = 0 \quad \text{для электронного генератора} \quad (432)$$

где

$$p = -\delta + j\omega$$

Определив из этих уравнений декременты затухания и частоты, вообще говоря, как функции  $a$ , и принимая во внимание основной прием метода линеаризации, непосредственно имеем уравнения первого приближения в виде:

$$\frac{da}{dt} = -a\delta$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

где  $a$  — амплитуда,  $\phi$  — полная фаза колебания.

Таким образом, благодаря методу линеаризации, вопрос о построении уравнений первого приближения для рассматриваемых колебательных систем сводится к решению характеристических уравнений (430), (431) и (432).

При решении этих уравнений, особенно в случае более или менее сложных контуров, весьма целесообразно использовать малость некоторых величин, входящих в уравнение, например, декрементов затухания, величин  $R_e$ ,  $\sigma$ ,  $S$  и т. п. Установив надлежащим образом порядок малости этих величин, при вычислении  $p = -\delta + j\omega$  следует отбрасывать величины второго порядка



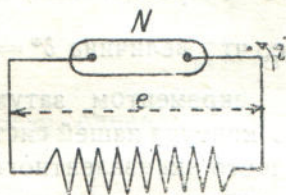
малости, ибо самые уравнения первого приближения, как мы это в свое время видели, точны именно лишь до величин этого порядка малости.

В виду полной формальной аналогии между тремя уравнениями (430), (431) и (432), мы ограничимся здесь рассмотрением лишь одного из них, например, первого (431).

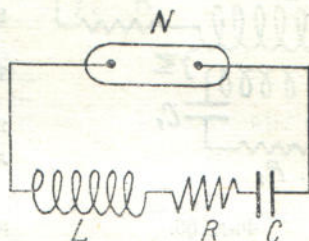
Итак будем исследовать характеристическое уравнение

$$Z(p) + R_e = 0$$

соответствующее колебательной системе, схематически изображенной на фиг. 64. При этом, чтобы рассматриваемая колеба-



Фиг. 64.



Фиг. 65.

тельная система оказалась квазигармонической, мы будем предполагать, что  $R_e$  и омические сопротивления, включенные последовательно, а равно и омические проводимости, включенные параллельно, пропорциональны величинам первого порядка малости.

Пусть, например, импеданс  $Z(j\omega)$  состоит из последовательно включенных ( $L, R, C$ ) (см. схему фиг. 65). Тогда:

$$Z(j\omega) = Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}$$

и уравнение (43) дает:

$$LCp^2 + (R + R_e) Cp + 1 = 0$$

откуда, пренебрегая величинами второго порядка малости (в данном случае — величиной  $\frac{(R + R_e)^2 C}{L}$ ), имеем:

$$\delta = \frac{R + R_e}{2L}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Как видно, собственная частота колебаний не зависит от сопротивлений  $R$ ,  $R_e$  и тем самым не зависит от амплитуды  $a$ .

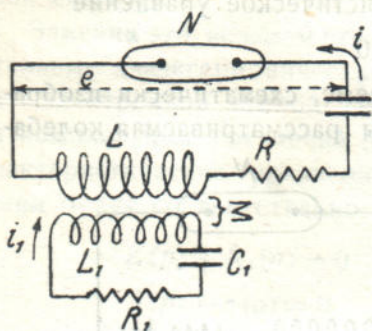
Рассматриваемая колебательная система является, следовательно, квазиизохронной.

Заметим теперь, что в этой системе имеет место самовозбуждение, если  $\delta(0) < 0$ , т. е., если:

$$R_e(0) < R^*$$

где

$$R^* = -R$$



Фиг. 66.

Значение  $R^*$  называется поэтому критическим значением эквивалентного сопротивления. Заметим далее, что величина  $\delta^* = \frac{R}{2L}$  является экрементом затухания линейного контура нашей системы.

До полного эквивалентного декремента имеем следующее выражение:

$$\delta = \delta^* \left( 1 - \frac{R}{R^*} \right) \quad (433)$$

Как мы увидим дальше, эта формула непосредственно обобщается и на случай более сложных схем.

Рассмотрим теперь колебательную систему, схематически изображенную на фиг. 66. В этом случае, как видно, линейная цепь состоит из последовательно включенных  $(L, R, C)$ , индуктивно связанных с замкнутым контуром  $(L_1, R_1, C_1)$ , и потому ее импеданс  $Z$  будет [ср. с формулой (393)]:

$$Z(j\omega) = Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega} + \frac{M^2 C_1 j\omega^3}{(1 - L_1 C_1 \omega^2) + jR_1 C_1 \omega}$$

Следовательно, соответствующее характеристическое уравнение может быть представлено в виде:

$$(LCp^2 + RCp + 1)(L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1) - M^2 C C_1 p^4 + R_e C p (L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1) = 0$$

или, соединяя  $R$  с  $R_e$ :

$$[LCp^2 + (R + R_e)Cp + 1][L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1] - M^2 C C_1 p^4 = 0$$



Положим для сокращения:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{резонансная частота первого контура})$$

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \quad (\text{резонансная частота второго контура})$$

$$q = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (\text{коэффициент связи контуров})$$

$$\rho = (R + R_e) C_\nu = \frac{R + R_e}{L\nu} \quad (434)$$

$$\rho_1 = R_1 C_1 \nu_1 = \frac{R_1}{L_1 \nu_1}$$

Тогда, очевидно, получим:

$$\left( \frac{p^2}{\nu^2} + \rho \frac{p}{\nu} + 1 \right) \left( \frac{p^2}{\nu_1^2} + \rho_1 \frac{p}{\nu_1} + 1 \right) - q^2 \frac{p^4}{\nu^2 \nu_1^2} = 0 \quad (435)$$

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае коэффициенты

$$\rho = \frac{R + R_e}{L\nu}, \quad \rho_1 = \frac{R_1}{L_1 \nu_1}$$

являются величинами первого порядка малости.

Поэтому мы можем положить:

$$\rho = \varepsilon \zeta, \quad \rho_1 = \varepsilon \zeta_1 \quad (436)$$

где  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр.

Подставив (436) в (435), получим наше характеристическое уравнение в виде:

$$\Delta(p, \varepsilon) = 0 \quad (437)$$

где

$$\Delta(p, \varepsilon) = \left( \frac{p^2}{\nu^2} + \varepsilon \zeta \frac{p}{\nu} + 1 \right) \left( \frac{p^2}{\nu_1^2} + \varepsilon \zeta_1 \frac{p}{\nu_1} + 1 \right) - q^2 \frac{p^4}{\nu^2 \nu_1^2} \quad (438)$$

Чтобы решить уравнение (437), представим искомый корень в виде ряда, расположенного по степеням  $\varepsilon$ :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (439)$$

Подставляя (439), получаем для определения коэффициентов этого разложения следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta(p_0, 0) &= 0 \\ \Delta'_p(p_0, 0)p_1 + \Delta'_\varepsilon(p_0, 0) &= 0 \\ \Delta'_p(p_0, 0)p_2 + \Delta''_{p^2}(p_0, 0)p_1^2 + 2\Delta''_{p\varepsilon}(p_0, 0)p_1 + \Delta''_{\varepsilon^2}(p_0, 0) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{440}$$

Определив из этих уравнений значения  $p_0, p_1$  и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующее выражение для искомого корня характеристического уравнения:

$$v = p_0 + \varepsilon p_1 \tag{441}$$

Заметив это, на основании (438), мы видим, что

$$\Delta(p, 0) = \left(\frac{p^2}{v_1^2} + 1\right) \left(\frac{p^2}{v^2} + 1\right) - q^2 \frac{p^4}{v^2 v_1^2}$$

Но, повторяя некоторые вычисления, детализированные на стр. 178, нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{p^2}{v_1^2} + 1\right) \left(\frac{p^2}{v^2} + 1\right) - q^2 \frac{p^4}{v^2 v_1^2} = \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}{v^2 v_1^2} (1 - q^2)$$

где:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{v^2 + v_1^2 + \sqrt{(v^2 - v_1^2)^2 + 4q^2 v^2 v_1^2}}{2(1 - q^2)} \\ \omega_2^2 &= \frac{v^2 + v_1^2 - \sqrt{(v^2 - v_1^2)^2 + 4q^2 v^2 v_1^2}}{2(1 - q^2)} \end{aligned} \tag{442}$$

Таким образом мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - q^2} \Delta(p, 0) &= \frac{(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)}{v^2 v_1^2} \\ \frac{1}{1 - q^2} \Delta'_p(p, 0) &= \frac{2p(p^2 + \omega_2^2)}{v^2 v_1^2} + \frac{2p(p^2 + \omega_1^2)}{v^2 v_1^2} = \frac{2p(2p^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{v^2 v_1^2} \tag{443} \\ \Delta'_\varepsilon(p, 0) &= \zeta \frac{p}{v} \left(\frac{p^2}{v_1^2} + 1\right) + \zeta_1 \frac{p}{v_1} \left(\frac{p^2}{v^2} + 1\right) \end{aligned}$$



На основании (440), мы видим теперь, что  $p_0$  может принять одно из следующих значений:

$$p_0 = j\omega_1 \quad (\alpha)$$

$$p_0 = j\omega_2 \quad (\beta)$$

Формулы (440) и (443) дают в случае (α):

$$(1 - q^2)p_1 = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\zeta \nu (\omega_1^2 - \nu_1^2) + \zeta_1 \nu_1 (\omega_1^2 - \nu^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}$$

а в случае (β):

$$(1 - q^2)p_1 = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\zeta \nu (\nu_1^2 - \omega_2^2) + \zeta_1 \nu_1 (\nu^2 - \omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right\}$$

Итак, с точностью до величин второго порядка малости мы имеем следующие решения рассматриваемого характеристического уравнения:

$$p = j\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{\zeta \nu (\omega_1^2 - \nu_1^2) + \zeta_1 \nu_1 (\omega_1^2 - \nu^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right\} \frac{1}{1 - q^2}$$

$$p = j\omega_2 - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{\zeta \nu (\nu_1^2 - \omega_2^2) + \zeta_1 \nu_1 (\nu^2 - \omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right\} \frac{1}{1 - q^2}$$

или, приняв во внимание (436):

$$p = j\omega_1 - \frac{1}{2} \rho \nu \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{1}{1 - q^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \nu_1 \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{1}{1 - q^2}$$

$$p = j\omega_2 - \nu \frac{1}{2} \rho \nu \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{1}{1 - q^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \nu_1 \frac{\nu^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{1}{1 - q^2}$$

Таким образом для декремента затухания и частоты получим:

$$\omega = \omega_1$$

$$(1 - q^2) \delta = \frac{1}{2} \rho \nu \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + \frac{1}{2} \rho_1 \nu_1 \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (444)$$

или:

$$\omega = \omega_2$$

$$(1 - q^2) \delta = \frac{1}{2} \rho \nu \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} + \frac{1}{2} \rho_1 \nu_1 \frac{\nu^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (445)$$

Как видно, собственные частоты  $\omega_1, \omega_2$  рассматриваемой колебательной системы те же, что и у системы, состоящей из двух индуктивно связанных контуров ( $L, C$ ), ( $L_1, C_1$ ) [см. формулы (403) и (442)].

Иначе говоря, при вычислении собственных частот (с точностью до величин второго порядка малости) мы можем пренебречь сопротивлениями, как эквивалентными, так и омическими.

Кроме того, поскольку  $\omega_1$  и  $\omega_2$  не зависят от амплитуды колебаний  $a$ , мы видим, что рассматриваемая колебательная система является квазиизохронной.

Преобразуем теперь выражение полного эквивалентного декремента  $\delta = \delta_1(a)$ , соответствующего частоте  $\omega_1$ .

На основании (434) и (444):

$$(1 - q^2) \delta_1(a) = \left( \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R + R_e(a)}{2L} + \left( \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R_1}{2L_1} \quad (446)$$

Заметим, с другой стороны, что если

$$\delta_1(0) < 0 \quad (447)$$

то имеет место самовозбуждение колебаний с частотой  $\omega_1$  или, как мы будем говорить, самовозбуждение на частоте  $\omega_1$ .

Подставив (446) в (447), мы можем представить условие самовозбуждения на частоте  $\omega_1$  в виде

$$R_e(0) < R_1^* \quad (448)$$

где критическое значение эквивалентного сопротивления  $R_1^*$  будет:

$$R_1^* = - \left( R + R_1 \frac{L}{L_1} \cdot \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \quad (449)$$

Из (446) и (449) получим, очевидно:

$$(1 - q^2) \delta_1(a) = \left\{ \left( \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R}{2L} + \left( \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R_1}{2L_1} \right\} \left\{ 1 - \frac{R_e(a)}{R_1^*} \right\} \quad (450)$$

Заметим теперь, что, применяя ранее изложенный прием к вычислению корней характеристического уравнения линейного контура (т. е. цепи с импедансом  $Z$ , замкнутой на короткое)

$$Z(p) = 0$$



мы найдем:

$$p = -\delta_1^* + j\omega_1$$

$$p = -\delta_2^* + j\omega_2$$

где

$$(1 - q^2) \delta_1^* = \left( \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R}{2L} + \left( \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R_1}{2L_1}$$

$$(1 - q^2) \delta_2^* = \left( \frac{\nu_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R}{2L} + \left( \frac{\nu^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \frac{R_1}{2L_1} \quad (451)$$

Как видно,  $\delta_1^*$ ,  $\delta_2^*$  будут соответственно декрементами затухания линейного контура, соответствующими частотам  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ .

Равенства (450) и (451) дают:

$$\delta_1(a) = \delta_1^* \left[ 1 - \frac{R_e(a)}{R_1^*} \right] \quad (452)$$

При помощи совершенно аналогичных рассуждений для полного эквивалентного декремента  $\delta = \delta_2(a)$ , соответствующего частоте  $\omega_2$ , получим также:

$$\delta_2(a) = \delta_2^* \left[ 1 - \frac{R_e(a)}{R_2^*} \right] \quad (453)$$

где  $R_2^*$  — критическое значение эквивалентного сопротивления для самовозбуждения частоты  $\omega_2$ :

$$R_2^* = - \left( R + j \frac{L}{L_1} \cdot \frac{\nu^2 - \omega_2^2}{\nu_1^2 - \omega_2^2} \right) \quad (454)$$

Мы пришли, таким образом, для полного эквивалентного декремента к формулам, совершенно аналогичным формуле (433), полученной нами раньше для случая простейшей схемы фиг. 65. Нетрудно заметить, что этот результат явился следствием определения  $p_1$  из уравнения (440) в виде:

$$p_1 = - \frac{\Delta'_e(p_0, 0)}{\Delta'_p(p_0, 0)} \quad (455)$$

Однако, для того, чтобы эта формула (455) имела смысл, очевидно, необходимо, чтобы

$$\Delta'_p(p_0, 0) \neq 0 \quad (456)$$

Как известно из теоремы о неявных функциях, условие (456) есть также достаточное условие для возможности представления корня уравнения (437) в виде ряда (439), расположенного по возрастающим степеням  $\varepsilon$  (при достаточно малых значениях  $\varepsilon$ ).

Но, как это следует из (443):

$$\frac{1}{1-q^2} \Delta'_p(p_0, 0) = \frac{2p_0(2p_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)}{v^2 v_1^2} = \begin{cases} \frac{-2j\omega_1(\omega_{11}^2 - \omega_2^2)}{v^2 v_1^2}, & \text{если } p_0 = j\omega_1 \\ \frac{2j\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{v_2 v_1^2}, & \text{если } p_0 = j\omega_2 \end{cases}$$

Таким образом в наших предыдущих рассуждениях мы исходили из неявного предположения о том, что собственные частоты линейного контура  $\omega_1$ , и  $\omega_2$  различны, как иногда говорят, не настроены в резонанс.

Поэтому для рассмотрения случая, когда эти частоты настроены в резонанс (т. е. когда  $\omega_1 = \omega_2$  или вообще когда  $\omega_1$  достаточно близко к  $\omega_2$ , так что мы можем предположить разность  $\omega_1 - \omega_2$  пропорциональной  $\varepsilon$ ), нам следует соответствующим образом видоизменить предыдущие рассуждения, что и будет предметом наших дальнейших исследований.

Не трудно показать, что вышеполученные формулы (452) и (453) для декремента  $\delta$  никоим образом не связаны с теми или иными специфическими особенностями рассмотренного нами типа схемы (66).

Наоборот, формулы эти непосредственно обобщаются для самых разнообразных схем колебательной системы  $\Sigma_N$ , для которых  $R_e$ , омические сопротивления, включенные последовательно, и омические проводимости, включенные параллельно, являются достаточно малыми — при условии, разумеется, что ни одна пара собственных частот линейного контура не настроена в резонанс. В самом деле, введем малый параметр  $\varepsilon$  так, чтобы  $R_e$ , омические сопротивления, включенные последовательно, и омические проводимости, включенные параллельно, оказались величинами пропорциональными  $\varepsilon$  (например, так, как это было нами сделано в рассмотренном выше примере).

В частности положим:

$$R_e = \varepsilon r_e \quad (457)$$



и представим импеданс  $Z$  линейной цепи в виде <sup>1)</sup>:

$$Z(p) = \frac{A(p, \varepsilon)}{B(p, \varepsilon)} \quad (458)$$

где  $A(p, \varepsilon)$ ,  $B(p, \varepsilon)$  — некоторые полиномы, не имеющие общих делителей.

Тогда основное характеристическое уравнение будет:

$$\Delta(p, \varepsilon) = A(p, \varepsilon) + \varepsilon B(p, \varepsilon) r_e = 0 \quad (459)$$

Так как при  $\varepsilon = 0$  рассматриваемая колебательная система состоит исключительно из емкостных и индуктивных импедансов, то импеданс

$$Z(j\omega) = \frac{A(j\omega, 0)}{B(j\omega, 0)}$$

в этом случае должен быть мнимым.

Поэтому рациональная функция

$$\frac{A(p, 0)}{B(p, 0)}$$

является нечетной и, следовательно, или  $A(p, 0)$  четно, а  $B(p, 0)$  нечетно, или, наоборот,  $A(p, 0)$  нечетно, а  $B(p, 0)$  четно.

Из (459) мы видим, что характеристическое уравнение линейного контура будет:

$$A(p, \varepsilon) = 0 \quad (460)$$

В случае  $\varepsilon = 0$ , т. е. при отсутствии сопротивлений, это уравнение (460) принимает вид:

$$A(p, 0) = 0 \quad (461)$$

Так как, с другой стороны, в линейном контуре при отсутствии сопротивлений колебания не затухают и их декременты

<sup>1)</sup> Например, в рассмотренном выше примере мы можем, очевидно, положить:

$$A(p, \varepsilon) = \left( \frac{p^2}{v^2} + \varepsilon^* \frac{p}{v} + 1 \right) \left( \frac{p^2}{v^2} + \varepsilon^* \frac{p}{v} + 1 \right) - q^2 \frac{p^4}{v^2 v_1^2}$$

$$B(p, \varepsilon) = Cp \left( \frac{p^2}{v_1^2} + \varepsilon^* \frac{p}{v} + 1 \right)$$

где

$$\varepsilon^* = RCv = \frac{R}{Lv}$$

тождественно равны нулю, то уравнение (461) имеет лишь чисто мнимые корни вида:

$$p = j\omega$$

где  $\omega$  — собственные частоты колебаний, кроме, быть может, тривиального корня  $p = 0$ . Пусть  $\omega$  будет одной из этих собственных частот. Тогда, так как согласно нашему условию ни одна пара собственных частот линейного контура не находится в резонансе, то  $p = j\omega_0$  будет простым корнем уравнения (461), и мы можем положить:

$$A(p, 0) = (p^2 + \omega_0^2) \Phi(p) \quad (462)$$

где

$$\Phi(j\omega_0) \neq 0 \quad (463)$$

В случае, когда  $\varepsilon \neq 0$ , но достаточно мало, то пренебрегая величинами второго порядка малости, мы можем написать характеристическое уравнение (460) линейного контура в виде:

$$A(p, 0) + \varepsilon A'_\varepsilon(p, 0) = 0$$

В этом уравнении член  $A(p, 0)$  учитывает влияние лишь индуктивных и емкостных импедансов, член же  $\varepsilon A'_\varepsilon(p, 0)$  учитывает влияние омических сопротивлений. Кроме того, так как этот последний член пропорционален  $\varepsilon$ , то омические сопротивления (включенные последовательно) или омические проводимости (включенные параллельно) входят в него линейным и однородным образом.

Так как, далее, характер четности индуктивных и емкостных импедансов противоположен характеру четности омических (именно импедансы самоиндукции и емкости  $Lp$  и  $\frac{1}{Cp}$  нечетны, омического сопротивления  $R$  — четны), то характер четности  $A(p, 0)$  и  $A'_\varepsilon(p, 0)$  также противоположный: если  $A(p, 0)$  четно, то  $A'_\varepsilon(p, 0)$  нечетно, и наоборот. Поэтому на основании только что установленного:

$$\frac{A'_\varepsilon(p, 0)}{\Phi(p)} \text{ — нечетно} \quad (464)$$

$$\frac{B(p, 0)}{\Phi(p)} \text{ — нечетно} \quad (465)$$



Заметив это, применим для решения характеристического уравнения (459) способ разложения корня по степеням  $\varepsilon$ , полагая:

$$p = j\omega_0 + \varepsilon p_1 + \dots$$

Способ этот допустим, ибо на основании (462) и (463):

$$A'_p(j\omega, 0) = A'_p(j\omega_0, 0) = 2j\omega_0 \Phi(j\omega_0) \neq 0$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, имеем:

$$p = j\omega_0 - \varepsilon \frac{A'_\varepsilon(j\omega_0, 0) + B(j\omega_0, 0)r_e}{A'_p(j\omega_0, 0)} = j\omega_0 - \varepsilon \frac{A'_\varepsilon(j\omega_0, 0)}{2j\omega_0 \Phi(j\omega_0)} - \frac{B(j\omega_0, 0)R_e}{2j\omega_0 \Phi(j\omega_0)} \quad (466)$$

Но на основании (464) и (465) величины

$$\delta_0 = \varepsilon \frac{A'_\varepsilon(j\omega_0, 0)}{2j\omega_0 \Phi(j\omega_0)}$$

$$k = \frac{B(j\omega_0, 0)}{2j\omega_0 \Phi(j\omega_0)}$$

будут вещественными. Таким образом из (466) получаем:

$$\omega = \omega_0$$

$$\delta = \delta_0 + kR_e \quad (467)$$

Решая аналогичным образом характеристическое уравнение линейного контура (460), имеем с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ :

$$p = j\omega_0 - \delta_0$$

Мы видим, следовательно, что  $\delta_0$  будет декрементом затухания линейного контура, соответствующим частоте  $\omega_0$ .

Заметим теперь, что на основании (467) условие самовозбуждения на частоте  $\omega_0$

$$\delta(0) < 0$$

может быть представлено в виде:

$$R_e(0) < R^*$$

где критическое значение  $R^*$  эквивалентного сопротивления, соответствующего частоте  $\omega_0$ , будет:

$$R^* = -\frac{1}{k} \delta_0$$

Итак, если  $\omega_0$  и  $\delta_0$  будет соответственно частотой и декрементом линейного контура рассматриваемой колебательной системы и если  $\omega_0$  не настроено в резонанс с другими частотами этого контура, то частота  $\omega$  и декремент  $\delta$  эквивалентной линейной системы могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \\ \delta &= \delta \left( 1 - \frac{R_e}{R^*} \right) \end{aligned} \quad (468)$$

где  $R^*$  — критическое значение эквивалентного сопротивления (соответствующего данной частоте).

При вычислении  $\omega_0$  можно пренебрегать сопротивлениями (полагая равным нулю сопротивления, включенные последовательно, и бесконечности — сопротивления, включенные параллельно) так как в рассматриваемом случае отсутствия резонанса влияние их будет второго порядка малости.

Кроме того, так как  $\omega = \omega_0$  зависит лишь от индуктивных и емкостных параметров линейного контура и тем самым не зависит от амплитуды, то рассматриваемые колебания будут квазиизохронны. В виду полной формальной аналогии между характеристическими уравнениями (430) (431) и (432) эти только что полученные результаты непосредственно обобщаются на колебательные системы  $\Sigma_T$  и на электронные генераторы.

В частности, например, для электронного генератора в аналогичном случае имеем:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \\ \delta &= \delta_0 \left( 1 - \frac{S}{S_{кр}} \right) \end{aligned} \quad (469)$$

где  $\omega$  и  $\delta$  — частота и декремент эквивалентной линейной системы,  $\omega_0$  и  $\delta_0$  — частота и декремент линейного контура,  $S_{кр}$  — соответствующее критическое значение средней крутизны.

Мы предполагали до сих пор, что частоты линейного контура не настроены в резонанс. Теперь перейдем к исследованию резонансного случая, причем для простоты изложения проделаем это на конкретном примере ранее рассмотренной схемы (фиг. 66).

Прежде всего на основании формул (442) замечаем, что для того, чтобы разность  $\omega_1 - \omega_2$  была величиной порядка  $\epsilon$ , необ-



ходимо, чтобы  $\nu_1 - \nu$  и  $q$  были величинами этого порядка. Иначе говоря, для того чтобы частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  были настроены в резонанс, необходимо, чтобы частоты  $\nu$ ,  $\nu_1$  обоих колебательных контуров ( $L, R, C$ ), ( $L_1, R_1, C_1$ ) были настроены в резонанс и чтобы коэффициент связи  $q = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$  между этими контурами был достаточно мал (случай „слабой связи“).

Поэтому в характеристическом уравнении (438) полагаем:

$$\frac{\nu_1}{\nu} = 1 + \varepsilon \Omega, \quad q = \varepsilon Q \quad (470)$$

Имеем:

$$(x^2 + \varepsilon \zeta x + 1) [x^2 + \varepsilon (1 + \varepsilon \Omega) \zeta_1 x + (1 + \varepsilon \Omega)^2] - \varepsilon_2 Q^2 x^4 = 0 \quad (471)$$

где для сокращения положено:

$$x = \frac{p}{\nu} \quad (472)$$

Будем представлять решение уравнения (471) в виде:

$$x = j + \varepsilon x_1 + \dots \quad (473)$$

Тогда, подставляя (473) в (471) и приравнявая коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получим для определения  $x_1$  следующее соотношение:

$$(2jx_1 + j\zeta)(2jx_1 + j\zeta_1 + 2\Omega) - Q^2 = 0$$

откуда:

$$4x_1^2 + 2x_1(\zeta + \zeta_1 - 2j\Omega) + Q^2 + \zeta\zeta_1 - 2j\Omega\zeta = 0$$

Следовательно:

$$x_1 = -\frac{\zeta + \zeta_1 - 2j\Omega}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{(\zeta + \zeta_1 - 2j\Omega)^2 + 8j\Omega\zeta - 4Q^2 - 4\zeta\zeta_1}$$

т. е.:

$$x_1 = -\frac{\zeta + \zeta_1 - 2j\Omega}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{(\zeta - \zeta_1)^2 - 4(Q^2 + \Omega^2) + 4j\Omega(\zeta - \zeta_1)}$$

Выводя  $j$  из под знака корня, при помощи обычных формул, получим, очевидно, позначивши  $\zeta - \zeta_1$  через  $\Re$ ,  $Q^2 + \Omega^2$  через  $\mathfrak{E}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Re^2 - 4\mathfrak{E} + 4j\Omega\Re} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\Re^2 - 4\mathfrak{E} + \sqrt{16\Omega^2\Re^2 + (\Re^2 - 4\mathfrak{E})^2}} + \\ &+ \frac{j}{\sqrt{2}} \sqrt{4\mathfrak{E} - \Re^2 + \sqrt{16\Omega^2\Re^2 + (\Re^2 - 4\mathfrak{E})^2}} \end{aligned}$$

Итак, пренебрегая в разложении (473) величинами второго порядка малости, имеем:

$$x = -\varepsilon \frac{\zeta + \zeta_1}{4} \pm \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} \sqrt{\mathfrak{R}^2 - 4\mathfrak{Q} + \sqrt{16\Omega^2\mathfrak{R}^2 + (\mathfrak{R}^2 - 4\mathfrak{Q})^2}} + \\ + j \left\{ 1 + \frac{\Omega}{2} \pm \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} \sqrt{4\mathfrak{Q} - \mathfrak{R}^2 + \sqrt{16\Omega^2\mathfrak{R}^2 + (\mathfrak{R}^2 - 4\mathfrak{Q})^2}} \right\} \quad (474)$$

Положим для сокращения:

$$(R_e + R - R_1)^2 C^2 v^2 - 4 \left[ q^2 + \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right)^2 \right] = 2\eta \quad (475) \\ 4(R_e + R - R_1)^2 C^2 v^2 \left( 1 - \frac{v_1}{v} \right)^2 = d^2$$

Тогда, на основании (434), (436), (470) (472) и (474) получим с точностью до величин второго порядка малости:

$$p = -\frac{R + R_1 + R_e + Lv \sqrt{\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}}}{4L} + \\ + j \left\{ v + \frac{2(v_1 - v) \pm v \sqrt{-\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}}}{4} \right\}$$

Мы видим, следовательно, что в рассматриваемом случае резонанса частота  $\omega$  и декремент  $\delta$  эквивалентной линейной системы будут:

$$\omega = \omega_1(a) = \frac{v + v_1}{2} + \frac{v}{4} \sqrt{-\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}} \quad (476) \\ \delta = \delta_1(a) = \frac{R + R_1 + R_e - Lv \sqrt{\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}}}{4L}$$

или

$$\omega = \omega_2(a) = \frac{v + v_1}{2} - \frac{v}{4} \sqrt{-\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}} \quad (477) \\ \delta = \delta_2(a) = \frac{R + R_1 + R_e + Lv \sqrt{\eta + \sqrt{d^2 + \eta^2}}}{4L}$$

Полученные формулы (475), (476) и (477) показывают, что в случае резонанса частот линейного контура выражения для  $\omega$  и  $\delta$  являются значительно более сложными. В частности, например,



зависимость  $\omega$  и  $\delta$  от эквивалентного сопротивления  $R_e(a)$  является нелинейной. В виду того, что частоты  $\omega = \omega_1(a)$ ,  $\omega = \omega_2(a)$  через посредство  $\eta$  и  $d$  зависят от  $R_e$ , а тем самым и от амплитуды колебаний, мы видим, что когда частоты линейного контура настроены в резонанс, рассматриваемая система, вообще говоря, теряет свою квазиизохронность.

Представив в заключение формулы (476) и (477) в раскрытом виде для случая точного<sup>1)</sup> резонанса частот  $\nu$ ,  $\nu_1$  контуров  $(L, R, C)$ ,  $(L_1, R_1, C_1)$

$$\nu = \nu_1$$

имеем следующее:

Если

$$(R_e + R - R_1) C \nu > 2q$$

то

$$\omega_1(a) = \nu$$

$$\delta_1(a) = \frac{R_e + R + R_1 - L\nu \sqrt{(R_e + R - R_1)^2 C^2 \nu^2 - 4q^2}}{4L} \quad (478)$$

$$\omega_2(a) = \nu$$

$$\delta_2(a) = \frac{R_e + R + R_1 + L\nu \sqrt{(R_e + R - R_1)^2 C^2 \nu^2 - 4q^2}}{4L} \quad (479)$$

Если же

$$|R_e + R - R_1| C \nu < 2q$$

то

$$\omega_1(a) = \nu \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sqrt{4q^2 - (R_e + R - R_1)^2 C^2 \nu^2} \right\} \quad (480)$$

$$\delta_1(a) = \frac{R_e + R + R_1}{4L}$$

$$\omega_2(a) = \nu \left\{ 1 - \frac{1}{4} \sqrt{4q^2 - (R_e + R - R_1)^2 C^2 \nu^2} \right\} \quad (481)$$

$$\delta_2(a) = \frac{R_e + R + R_1}{4L}$$

<sup>1)</sup> До величин второго порядка малости.

## § 7. Исследование колебательных процессов со многими частотами

В рассмотренных выше примерах более сложных колебательных систем (систем с несколькими степенями свободы) мы обычно получали для частоты и декремента эквивалентной линейной системы не одну, а несколько пар возможных значений.

Пусть, например:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(a), \quad \delta = \delta_1(a) \\ &\dots \dots \dots \\ \omega &= \omega_n(a), \quad \delta = \delta_n(a) \end{aligned}$$

будут  $n$  возможными парами значений частоты и декремента эквивалентной линейной системы. Мы видим тогда, что в рассматриваемой нелинейной системе возможны колебания следующих типов:

$$\begin{aligned} i &= i_1 = a_1 \cos \psi_1 \\ i &= i_2 = a_2 \cos \psi_2 \\ &\dots \dots \dots \\ i &= i_n = a_n \cos \psi_n \end{aligned}$$

где  $(a_1, \psi_1), (a_2, \psi_2), \dots, (a_n, \psi_n)$  удовлетворяют уравнениям первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\delta_1(a_1) a_1, & \frac{d\psi_1}{dt} &= \omega_1(a_1) \\ \frac{da_2}{dt} &= -\delta_2(a_2) a_2, & \frac{d\psi_2}{dt} &= \omega_2(a_2) \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{da_n}{dt} &= -\delta_n(a_n) a_n, & \frac{d\psi_n}{dt} &= \omega_n(a_n) \end{aligned}$$

В линейных системах, как известно, если возможны собственные колебания  $n$  типов:

$$i = i_1, \quad i = i_2, \dots, \quad i = i_n$$

то в силу принципа суперпозиции возможны также суммарные колебания вида:

$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + \dots + a_n \cos \psi_n \quad (482)$$

Легко заметить, что для эквивалентных линейных систем аналогичное применение принципа суперпозиции недопустимо,



так как при самом введении эквивалентных параметров мы исходили из допущения относительно определенной формы колебания, именно его (приближенной) гармоничности.

Поэтому, чтобы рассматривать суммарные колебания вида (482), состоящие из нескольких гармоник разных частот, нам надо соответствующим образом обобщить понятия эквивалентных параметров.

Покажем сейчас, как это можно сделать на конкретном примере уже рассмотренной схемы фиг. 66, причем рассмотрим сперва случай, когда собственные частоты линейного контура не настроены в резонанс.

Заметим прежде всего, что импеданс  $Z(j\omega)$  в рассматриваемом случае может быть представлен в виде:

$$Z(j\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\delta_1^*\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\delta_2^*\omega)}{C\nu \cdot j\omega\nu(\nu_1^2 - \omega^2 + 2j\rho_1\nu_1\omega)} \quad (483)$$

где  $\omega_1$ ,  $\delta_1^*$ ,  $\omega_2$ ,  $\delta_2^*$  — соответственно частоты и декременты линейного контура, определяемые формулами (442) и (451) с точностью до величин второго порядка малости.

Нетрудно видеть также [см. формулы (434), (436) и (451)], что

$$\delta_1^* = \varepsilon\xi_1, \quad \delta_2^* = \varepsilon\xi_2 \quad (484)$$

где:

$$(1 - q^2)\xi_1 = \left( \frac{\omega_1^2 - \nu_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \zeta^*\nu + \left( \frac{\omega_1^2 - \nu^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \zeta_1\nu_1$$

$$(1 - q^2)\xi_2 = \left( \frac{\nu_1^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \zeta^*\nu + \left( \frac{\nu^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \zeta_1\nu_1$$

причем

$$\varepsilon\zeta^* = RC\nu = \frac{R}{L\nu}$$

Из (483) и (484) окончательно получаем:

$$Z(j\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\xi_1\varepsilon\omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\xi_2\varepsilon\omega)}{C\nu \cdot j\omega\nu(\nu_1^2 - \omega^2 + 2j\varepsilon\zeta_1\nu_1\omega)} \quad (485)$$

Рассматриваемая колебательная система состоит, следовательно, из импеданса (485), замкнутого через нелинейный орган  $N$ , с характеристикой вида:

$$e = -F(i)$$

где  $i$  — напряжение между концами линейного контура.

Чтобы учесть достаточную малость эквивалентного сопротивления органа  $N$ , напомним эту характеристику в форме, содержащей малый параметр:

$$e = F(i) = -\varepsilon f(i) \quad (486)$$

Предположим при этом, что  $f(i)$  является полиномом некоторой степени. Заметим мимоходом, что сделанное предположение не является практическим ограничением, ибо, как известно, любую непрерывную функцию с желаемой степенью точности можно аппроксимировать полиномом.

Благодаря принятому способу введения параметра  $\varepsilon$  мы видим, что при  $\varepsilon = 0$  рассматриваемая колебательная система является линейной и состоит из двух индуктивно связанных замкнутых контуров  $(L, C)$  и  $(L_1, C_1)$ . Таким образом, при  $\varepsilon = 0$  общая форма колебаний тока будет:

$$i = i_1 + i_2 \quad (487)$$

где:

$$\begin{aligned} i_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ i_2 &= a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (488)$$

и где  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  — постоянные („произвольные постоянные“). При  $\varepsilon$ , не равном нулю, но все же достаточно малом, можно, очевидно, сохранить эти формулы (487) и (488), рассматривая их как приближенные, выражающие ток  $i$  с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon$ . Подставив (487) и (488) в (486), имеем, следовательно, с точностью до величин второго порядка малости:

$$e = -\varepsilon f \{ a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \} \quad (489)$$

Заметив это, рассмотрим функцию двух переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$f(a_1 \cos \varphi_1, a_2 \cos \varphi_2)$$

В виду полиномиального характера  $f(z)$  рассматриваемая функция может быть представлена в виде конечной суммы гармоник вида:

$$A_{n,m} \cos(n\varphi_1 + m\varphi_2)$$

Мы можем написать, например:

$$f(a_1 \cos \varphi_1, a_2 \cos \varphi_2) = \sum_n \sum_m A_{n,m} \cos(n\varphi_1 + m\varphi_2) \quad (490)$$



где  $n$  принимает нулевое и положительные целые значения и где  $m$  при  $n = 0$  принимает положительные, а при  $n \neq 0$  также и отрицательные целые значения. В частности, если  $f(z)$  есть полином третьей степени, то совокупность  $(n, m)$  может быть лишь одной из следующих пар:  $(0,0)$ ;  $(1,0)$ ;  $(2,0)$ ;  $(3,0)$ ;  $(0,1)$ ;  $(0,2)$ ;  $(0,3)$ ;  $(1,1)$ ;  $(1,-1)$ ,  $(1,2)$ ;  $(1,-2)$ ;  $(2,1)$ ;  $(2,-1)$ .

Из (489) и (490) находим:

$$e = -\varepsilon \sum_n \sum_m \mathfrak{A}_{n,m} \cos \{n\omega_1 + m\omega_2\} t + n\varphi_1 + m\varphi_2 \} \quad (491)$$

Мы представили, таким образом (с точностью до величин второго порядка малости), напряжение  $e$  между концами линейной цепи в виде суммы некоторого числа гармоник вида:

$$-\varepsilon \mathfrak{A}_{n,m} \cos \{ (n\omega_1 + m\omega_2) t + n\varphi_1 + m\varphi_2 \} \quad (492)$$

Так как импеданс линейной цепи есть  $Z(j\omega)$ , то каждая из этих гармоник возбуждает гармонику  $i_{n,m}$  тока  $i$ :

$$i_{n,m} = -\frac{\varepsilon \mathfrak{A}_{n,m}}{Z\{j(n\omega_1 + m\omega_2)\}} \cos \left[ (n\omega_1 + m\omega_2) t + n\varphi_1 + m\varphi_2 \right] \quad (493)$$

который и будет суммой этих гармоник

Из (493) мы видим, что амплитуды (абсолютные значения амплитуд) гармоник  $i_{n,m}$  тока  $i$  будут соответственно:

$$J_{n,m} = \frac{|\varepsilon \mathfrak{A}_{n,m}|}{|Z\{j(n\omega_1 + m\omega_2)\}|}$$

Отсюда, на основании (485), имеем:

$$J_{n,m} = \frac{\varepsilon \mathfrak{A}_{n,m} C v^2 (n\omega_1 + m\omega_2)}{\sqrt{\{[\omega_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]^2 + 4\varepsilon^2 \xi_1^2 (n\omega_1 + m\omega_2)^2\}}}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{\{v_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2\}^2 + 4\varepsilon^2 \zeta_1^2 (n\omega_1 + m\omega_2)^2}{\{[\omega_2^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]^2 + 4\varepsilon^2 \xi_2^2 (n\omega_1 + m\omega_2)^2\}}} \quad (494)$$

Нетрудно заметить, что если для некоторых  $n, m$  ни одна из разностей:

$$(n\omega_2 + m\omega_1)^2 - \omega_1^2, (n\omega_1 + m\omega_2)^2 - \omega_2^2$$

не будет достаточно малой, то соответствующие амплитуды  $J_{n,m}$  будут величинами первого порядка малости. Наоборот, если

для определенной пары значений  $(n, m)$  одна из этих разностей или, что, очевидно, то же самое, одно из выражений вида:

$$n\omega_1 + (m \pm 1)\omega_2, (n \pm 1)\omega_1 + m\omega_2$$

будет величиной первого порядка малости (или нулем), то порядок малости числителя  $j_{n,m}$  компенсируется порядком малости знаменателя и в результате  $j_{n,m}$  будет иметь конечное значение, не обращающееся в нуль при  $\varepsilon = 0$ . Этот последний случай, как видно, всегда имеет место при  $n=1, m=0$  и при  $n=0, m=1$ . Рассмотрим теперь рациональные положительные числа  $\neq 1$

$$\frac{r}{s} \quad (r, s - \text{целые})$$

которые могут принимать значения вида:

$$\frac{n}{\pm 1 - m}, \frac{n \pm 1}{-m}$$

где  $n$  и  $m$  — числа, входящие в сумму (490).

Необходимо исследовать два случая:

I. Частота  $\omega_2$  достаточно близка к  $\frac{r}{s}\omega_1$ , так что мы можем положить <sup>1)</sup>:

$$\omega_2 = \frac{r}{s}\omega_1 + \varepsilon\alpha \quad (495)$$

Мы видим, следовательно, что гармоники напряжения (492), за исключением двух основных гармоник

$$-\varepsilon \mathcal{A}_{1,0} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), -\varepsilon \mathcal{A}_{0,1} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (496)$$

возбуждают лишь слабые гармоники тока, амплитуды которых будут величинами первого порядка малости.

Таким образом, если в первом приближении мы будем пренебрегать этими гармониками по сравнению с основными  $i_{1,0}$  и  $i_{0,1}$ , то выражение (491) для напряжения мы можем заменить на следующее, в котором учтены лишь слагающие (496) (возбуждающие основные гармоники тока):

$$e = -\varepsilon \mathcal{A}_{1,0} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \varepsilon \mathcal{A}_{0,1} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (497)$$

<sup>1)</sup> На основании сделанного выше замечания видно, что, если, например,  $f(z)$  есть полином третьей степени, то возможные значения  $\frac{r}{s}$  будут:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$$



Из (486) и (490) мы имеем:

$$\varepsilon \mathcal{A}_{1,0} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \cos \varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$\varepsilon \mathcal{A}_{0,1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2$$

Полагаем теперь:

$$R'_e = \frac{1}{2\pi^2 a_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \cos \varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2$$

$$R''_e = \frac{1}{2\pi^2 a_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2$$

Тогда, очевидно:

$$\mathcal{A}_{1,0} = R'_e a_1, \quad \mathcal{A}_{0,1} = R''_e a_2$$

и потому благодаря (488) формула (497) дает:

$$e = -(R'_e i_1 + R''_e i_2) \quad (498)$$

Итак мы видим, что в рассматриваемом нерезонансном случае в первом приближении нелинейная характеристика (486) органа  $N$  может быть заменена эквивалентной линейной (498).

Параметры  $R'_e$ ,  $R''_e$  этой эквивалентной линейной характеристики могут быть трактованы, очевидно, как эквивалентные сопротивления токам  $i_1$ ,  $i_2$ , т.е. как эквивалентные сопротивления, соответствующие частотам  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  колебаний тока  $i$ .

Пусть теперь  $\omega'$ ,  $\omega''$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$  будут соответственно частотами и декрементами эквивалентной линейной системы.

Тогда уравнения первого приближения представляются в виде:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta' a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\delta'' a_2$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega', \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \omega''$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — полные фазы колебаний  $i_1, i_2$ . Так как согласно (388)

$$\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2$$

то рассматриваемые уравнения первого приближения могут быть написаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\delta' a_1, & \frac{da_2}{dt} &= -\delta'' a_2 \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega' - \omega_1, & \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega'' - \omega_2 \end{aligned} \quad (499)$$

Благодаря соотношению (498) нетрудно заметить, что для эквивалентной линейной системы должно иметь место уравнение

$$Z(j\omega' - \delta') i_1 + Z(j\omega'' - \delta'') i_2 + R'_e i_1 + R''_e i_2 = 0$$

откуда:

$$\begin{aligned} Z(j\omega' - \delta') + R'_e &= 0 \\ Z(j\omega'' - \delta'') + R''_e &= 0 \end{aligned} \quad (500)$$

Решая эти уравнения по способу, рассмотренному на стр. 199, получим (с точностью до величин второго порядка малости):

$$\omega' = \omega_1, \quad \omega'' = \omega_2$$

$$\delta' = \delta_1 \left(1 - \frac{R'_e}{R_1^*}\right), \quad \delta'' = \delta_2 \left(1 - \frac{R''_e}{R_2^*}\right) \quad (501)$$

где, как и раньше,  $\omega_1, \omega_2, \delta_1, \delta_2$  — частоты и декременты линейного контура,  $R_1^*$  — критическое значение эквивалентного сопротивления для самовозбуждения на частоте  $\omega_1$ ,  $R_2^*$  — критическое значение эквивалентного сопротивления для самовозбуждения на частоте  $\omega_2$ .

Из (499) и (501) мы видим, что

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = 0$$

Итак, в первом приближении в нерезонансном случае:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (502)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — произвольные постоянные и где  $a_1, a_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1 \left(1 - \frac{R'_e}{R_1^*}\right) a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\delta_2 \left(1 - \frac{R''_e}{R_2^*}\right) a_2 \quad (503)$$



Полученный результат непосредственно обобщается и для более сложных схем колебательной системы, рассмотренных на стр. 200—204.

Чтобы избежать излишних повторений, приведем здесь лишь окончательный вывод.

Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ;  $\delta_1, \dots, \delta_n$  будут собственно частотами и декрементами линейного контура. Пусть далее  $R_1^*, \dots, R_n^*$  — критические значения эквивалентного сопротивления на частотах  $\omega_1, \dots, \omega_n$ .

Тогда в первом приближении в нерезонансном случае:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (504)$$

где  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — произвольные постоянные и где  $a_1, \dots, a_n$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1 \left(1 - \frac{R_e^{(1)}}{R_1^*}\right) a_1, \dots, \frac{da_n}{dt} = -\delta_n \left(1 - \frac{R_e^{(n)}}{R_n^*}\right) a_n \quad (505)$$

в которых

$$R_e^{(k)} = \frac{1}{\pi (2\pi)^{n-1} a_k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(a_1 \cos \varphi_1 + \dots + a_n \cos \varphi_n) \cos \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_n \quad (506)$$

Следует заметить, что при  $n$  частотах демультимпликационные резонансы имеют место в случае приближенного удовлетворения равенств:

$$p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 + \dots + p_n \omega_n = 0$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — соответствующие целые числа. Разнообразие возможностей демультимпликационных резонансов, будет, как видно, тем больше, чем выше будет число  $n$ .

Из формулы (506) вытекает:

$$R_e^{(k)} = R_e(a_k)$$

если все  $a_1, \dots, a_n$ , кроме  $a_k$ , — нули.

Поэтому система (505) допускает частные решения вида:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1 \left(1 - \frac{R_e(a_1)}{R_1^*}\right) a_1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \dots, \quad a_n = 0$$

$$\frac{da_n}{dt} = -\delta_n \left(1 - \frac{R_e(a_n)}{R_n^*}\right) a_n, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \dots, \quad a_{n-1} = 0$$

соответствующие одночастотным моногармоническим колебаниям:

$$i = i_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \dots \dots \dots \\ i = i_n = a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Установим теперь одно важное общее свойство решений системы (505).

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z) = \int_0^z F(z) dz \quad (507)$$

и положим:

$$\Pi(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \Phi(a_1 \cos \varphi_1 + \dots + a_n \cos \varphi_n) d\varphi_1 \dots d\varphi_n$$

Из (506), очевидно, имеем:

$$a_k R_k^{(k)} = 2 \frac{\partial \Pi}{\partial a_k}$$

и потому уравнения (505) могут быть представлены в виде:

$$\frac{da_k}{dt} = -\delta_k a_k + 2 \frac{\delta_k}{R_k^*} \frac{\partial \Pi}{\partial a_k}$$

откуда:

$$2 \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \frac{R_k^*}{\delta_k} \frac{da_k}{dt} + R_k^* a_k$$

что дает:

$$\frac{R_k^*}{\delta_k} \frac{da_k}{dt} = - \frac{\partial \left( -2\Pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 R_k^* \right)}{\partial a_k}$$

Заметим, что  $\delta_k$ , как декременты линейного контура — все положительны, а  $R_k^*$  как критические значения (для самовозбуждения) эквивалентного сопротивления — все отрицательны.

Поэтому:

$$\frac{R_k^*}{\delta_k} = -\lambda_k; \lambda_k > 0; R_k^* = -|R_k^*|$$



где

$$\lambda_k = \left| \frac{R_k^*}{\partial_k} \right|$$

и, следовательно:

$$\lambda_k \frac{da_k}{dt} = - \frac{d \left( 2\Pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 |R_k^*| \right)}{da_k}$$

Помножив на  $\frac{da_k}{dt}$  и просуммировав, получим:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \left( \frac{da_k}{dt} \right)^2 = - \frac{d \left( 2\Pi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 |R_k^*| \right)}{dt}$$

Отсюда мы видим, что при увеличении времени функция

$$U(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 |R_k^*| + 2\Pi(a_1, \dots, a_n) \quad (510)$$

убывает, так что движение

$$x_k = a_k(t); \quad k = 1, \dots, n$$

совершается по линии ската поверхности [в  $(n+1)$ -мерном пространстве]:

$$z = U(x_1, \dots, x_n)$$

Таким образом всякое решение<sup>1)</sup> уравнений первого приближения при возрастании времени  $t$  приближается к стационарному:

$$a_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a_k^{(0)}$$

Стационарные значения амплитуды  $a_k^{(0)}$  должны, очевидно, удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial U(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_k} = 0; \quad k = 1, \dots, n$$

<sup>1)</sup> Если, разумеется, оно ограничено. Нетрудно заметить, что всякое решение будет ограничено, если абсолютный минимум функции  $U(x_1, \dots, x_n)$  достигается лишь при конечных значениях  $x_1, \dots, x_n$ .

или в раскрытой форме:

$$\left(1 - \frac{R_e^{(k)}}{R_k^*}\right) a_k = 0; \quad k = 1, \dots, n$$

Нетрудно убедиться также, что найденные стационарные значения амплитуд соответствуют устойчивому режиму колебаний, если функция  $U$  получает при этих значениях относительный минимум. Наоборот, если для этих значений функция  $U$  не имеет минимума, то они соответствуют неустойчивому и потому физически невозможному режиму колебаний.

Воспользовавшись этими простыми замечаниями, легко можно показать, что, если  $F(z)$  есть кубический полином вида:

$$F(z) = az + bz^2 + cz^3; \quad a < 0, c > 0$$

то устойчивые колебания<sup>1)</sup> могут быть лишь одного из следующих „одночастотных“ типов:

$$i = i_k = a_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

где  $a_k$  — соответственно решения уравнений:

$$R_e(a_k) = R_k^*$$

Все полученные выше результаты были изложены применительно к колебательным системам с органом  $N$ . Не представляет, очевидно, никаких затруднений распространить их на системы с органом  $T$  и на электронные генераторы.

Например, для электронного генератора, если  $\omega_1, \dots, \omega_n, \delta_1, \dots, \delta_n$  будут частотами и декрементами линейного контура, имеем в первом приближении, в нерезонансном случае:

$$e = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \dots + a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (511)$$

где  $e$  — переменная слагающая управляющего напряжения,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — произвольные постоянные, амплитуды  $a_1, \dots, a_n$  удовлетворяют уравнениям вида:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1 \left(1 - \frac{S_1}{S_{cr}^{(1)}}\right) a_1, \dots, \frac{da_n}{dt} = -\delta_n \left(1 - \frac{S_n}{S_{cr}^{(n)}}\right) a_n \quad (512)$$

<sup>1)</sup> В собственном смысле этого слова, т. е. для которых  $\sum_{k=1}^n a_k^2$  не равно тождественно нулю.



В этих уравнениях  $S_{cr}^{(1)}, \dots, S_{cr}^{(n)}$  — критические значения средней крутизны при самовозбуждении на частотах  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ;  $S_1, \dots, S_n$  — средние крутизны для этих частот:

$$S_k = \frac{2}{(2\pi)^n a_k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(E_0 + a_1 \cos \varphi_1 + \dots + \\ + a_n \cos \varphi_n) \cos \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_n \quad (513)$$

где  $E_0$  постоянная слагающая управляющего напряжения, а  $f(E)$  — характеристика лампы.

Возвратимся теперь к рассмотрению формулы первого приближения (502) для колебательной системы фиг. 66. Как мы уже видели, формула эта получается путем пренебрежения высшими гармониками  $i_{n,m}$ , [при  $(n, m)$  отличным от  $(0, 1)$ ;  $(1, 0)$ , т. е. когда  $[n^2 + (m-1)^2] [(n-1)^2 + m^2] \neq 0$ ], амплитуды которых являются величинами первого порядка малости.

Чтобы получить „улучшенное первое приближение“, учтем также и эти гармоники, написав:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \sum_n \sum_m i_{n,m} \quad (514)$$

где суммирование распространяется по всем целым  $n, m$ , входящим в разложение (490) и удовлетворяющим неравенству:

$$[n^2 + (m-1)^2] [(n-1)^2 + m^2] \neq 0 \quad (515)$$

Но на основании (493):

$$i_{n,m} = - \frac{\varepsilon \mathcal{A}_{n,m}}{Z [j(n\omega_1 + m\omega_2)]} \cos [(n\omega_1 + m\omega_2)t + n\varphi_1 + m\varphi_2]$$

Так как мы находимся в нерезонансном случае, то, на основании (515), мы видим, что

$$(n\omega_1 + m\omega_2)^2 \neq \omega_1^2; \quad (n\omega_1 + m\omega_2)^2 \neq \omega_2^2$$

и потому благодаря (485) убеждаемся, что с точностью до величин первого порядка малости:

$$\frac{1}{Z [j(n\omega_1 + m\omega_2)]} = \frac{j C \gamma^2 (n\omega_1 + m\omega_2) [\gamma_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]}{[\omega_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2] [\omega_2^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]}$$

Следовательно, с точностью до величин второго порядка малости мы имеем:

$$i_{n,m} = \frac{\varepsilon \mathfrak{A}_{n,m} C \nu^2 (n\omega_1 + m\omega_2) [\nu_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]}{[\omega_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2][\omega_2^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]} \cdot \sin [(n\omega_1 + m\omega_2)t + n\varphi_1 + m\varphi_2] \quad (516)$$

Подставив найденные значения в формулу (514), получаем выражение улучшенного первого приближения в виде:

$$i_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \varepsilon \sum_n \sum_m \mathfrak{A}_{n,m} C \nu^2 (n\omega_1 + m\omega_2) \frac{[\nu_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]}{[\omega_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2][\omega_2^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2]} \cdot \sin [(n\omega_1 + m\omega_2)t + n\varphi_1 + m\varphi_2] \quad (517)$$

Заметим теперь, что при  $x_1 = 0$  или при  $a_2 = 0$  разложение (490) может быть представлено соответственно следующим образом:

$$f(a_2 \cos \varphi_2) = \sum_n f_n(a_2) \cos n \varphi_2$$

$$f(a_1 \cos \varphi_1) = \sum_n f_n(a_1) \cos n \varphi_1$$

где суммирование распространяется по значениям  $n$ , равным  $0, 1, 2, \dots$ . Поэтому, если мы рассматриваем частные решения уравнений первого приближения:  $a_2 = 0$  или  $a_1 = 0$ , то формула (517) дает:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \varepsilon \sum_n \frac{f_n(a_1) C \nu^2 n \omega_1 (\nu^2 - n^2 \omega_1^2)}{\omega_1^2 (1 - n^2) (\omega_2^2 - n^2 \omega_1^2)} \nu \sin n(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (518)$$

или

$$i = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \varepsilon \sum_n \frac{f_n(a_2) C \nu^2 n \omega_2 (\nu_1^2 - n^2 \omega_2^2)}{\omega_2^2 (1 - n^2) (\omega_1^2 - n^2 \omega_2^2)} \sin n(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (519)$$

где  $n$  может принимать значения  $0, 2, 3, \dots$

Итак, если первое приближение состоит из одной гармоник с частотой  $\omega_1$  или  $\omega_2$ , то, как показывают формулы (518) и (519)



улучшенного приближения, в колебаниях  $i$  будут присутствовать также гармоники с обертонами  $n\omega_1$  или  $n\omega_2$  этой частоты.

В общем случае, когда в первом приближении эффективно имеются две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то, как показывает общая формула улучшенного приближения (517), в колебаниях тока  $i$  существуют также гармоники с частотами вида  $n\omega_1 + m\omega_2$ . Эти частоты называются комбинационными частотами (комбинационными тонами). При  $n$  и  $m$  положительных имеем суммарную частоту (суммарный тон). При  $n$  и  $m$  разных знаков — дифференциальную или разностную частоту (дифференциальный тон). Рассматривая формулу (517), мы замечаем, что она не может, очевидно, применяться, если хотя бы приближенно выполняется одно из равенств:

$$\omega_1^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2 = 0, \quad \omega_2^2 - (n\omega_1 + m\omega_2)^2 = 0$$

или, что то же самое, одно из равенств:

$$\omega_1(1 \pm n) \pm \omega_2 m = 0, \quad \omega_2(1 \pm m) \pm \omega_1 n = 0$$

Иначе говоря, формула (517) теряет свою применимость в случае приближенного выполнения равенства

$$\omega_2 = \frac{r}{s} \omega_1 \quad (520)$$

(где, как и раньше,  $\frac{r}{s}$  — одно из чисел вида:

$$\frac{1+n}{-m}, \quad \frac{1-n}{m}, \quad \frac{-n}{1+m}, \quad \frac{n}{1-m}$$

В данном случае мы имеем полную аналогию со случаем вынужденных колебаний системы, описываемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = E \cos \alpha t$$

Вынужденное колебание такой системы представляется формулой:

$$x = \frac{E \cos \alpha t}{\omega^2 - \alpha^2}$$

которая, очевидно, неприменима в случае резонанса  $\omega = \alpha$ .

Благодаря этой аналогии случай, когда  $\omega_2$  близко к  $\frac{r}{s} \omega_1$ , и называется случаем резонанса. Резонанс этот мы назвали демумльтипликационным, так как отношение частот  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{s}$  в данном случае, вообще говоря, дробное.

Нетрудно заметить также, что демумльтипликационные резонансы обязаны своим появлением наличию комбинационных частот.

В частности, если какая-либо комбинационная частота  $n_0 \omega_1 + m_0 \omega_2$  отсутствует (напр., когда  $\mathcal{A}_{n_0, m_0} = 0$ ), то не будет демумльтипликационного резонанса, соответствующего значениям  $n_0, m_0$ .

Заметим в заключение, что форма улучшенного первого приближения (517) может быть непосредственно обобщена и на случай более сложной схемы, когда линейный контур имеет  $n$  собственных частот  $\omega_1, \dots, \omega_n$  при отсутствии резонанса.

Возвращаясь к рассуждениям, детализированным на стр. 200, мы видим, что  $j\omega_1, \dots, j\omega_n$  будут корнями уравнения:

$$A(p, 0) = 0 \quad (460)$$

Так как согласно нашему предположению линейный контур имеет всего  $n$  частот, то функцию  $A(p, 0)$  мы можем представить в виде:

$$A(p, 0) = (p^2 + \omega_1^2) \dots (p^2 + \omega_n^2) \Phi^*(p) \quad (521)$$

где  $\Phi^*(p)$  не имеет чисто мнимых корней. Так как рациональная функция

$$\frac{B(p, 0)}{A(p, 0)}$$

как мы видели, нечетна, то нечетна и функция

$$\frac{B(p, 0)}{\Phi^*(p)}$$

Поэтому мы можем положить:

$$\frac{B(j\omega, 0)}{\Phi^*(j\omega)} = jS(\omega) \quad (522)$$

где  $S(\omega)$  — вещественная функция  $\omega$ , не имеющая вещественных полюсов (не обращающаяся в бесконечность при вещественных значениях  $\omega$ ).





если, разумеется, соответствующие комбинационные частоты  $m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n$  эффективно присутствуют в колебаниях тока, т. е. если для соответствующих значений  $m_1, \dots, m_n$

$$\mathfrak{A}_{m_1, m_2, \dots, m_n} S(m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n) \neq 0$$

Выражения улучшенного первого приближения были получены нами для колебательных систем типа  $\Sigma_N$ , состоящих из линейной цепи, замкнутой через нелинейное сопротивление (орган  $N$ ).

Не представило бы, разумеется, никаких принципиальных затруднений построить выражения улучшенного первого приближения и для колебательных систем иного типа, например, для электронных генераторов.

### § 8. Случай резонанса собственных частот

Перейдем теперь к рассмотрению демультипликационного резонанса на примере колебательной системы с двумя линейному частотами  $\omega_1, \omega_2$ , составленной по схеме фиг. 66.

Система эта, как мы видели, состоит из импеданса  $Z$ :

$$Z(j\omega) = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\xi_1 \varepsilon \omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + 2j\xi_2 \varepsilon \omega)}{jC\nu^2 \omega (\nu_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \nu_1 \omega)} \quad (485)$$

замкнутого через нелинейный элемент  $N$  с характеристикой вида:

$$e = -F(i) = -\varepsilon f(i) \quad (486)$$

Имея случай демультипликационного резонанса, полагаем в соответствии с формулой (495):

$$\omega_2 = \frac{r}{s} \omega_1 + \varepsilon \alpha, \quad \frac{r}{s} \neq 1 \quad (495)$$

Совершенно ясно, что без ограничения общности целые числа  $r, s$  мы можем считать взаимно-простыми, не имеющими общих делителей.

Вследствие принятого способа введения малого параметра  $\varepsilon$  мы видим, что при  $\varepsilon = 0$  рассматриваемая колебательная система вырождается в линейную систему без затухания с собственными частотами  $\omega_1$  и  $\frac{r}{s} \omega_1$ , и потому в этом случае ( $\varepsilon = 0$ ) собственные колебания тока  $i$  могут быть представлены в виде:

$$i = i_1 + i_2 \quad (527)$$



где:

$$\begin{aligned}i_1 &= a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\i_2 &= a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right)\end{aligned}\quad (528)$$

и где  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  „произвольные постоянные“.

При  $\varepsilon$ , не равном нулю, а лишь достаточно малом, можно очевидно, сохранить эти формулы, рассматривая их как приближенные, выражающие  $i$  с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon$ . Подставив (527) и (528) в соотношение (486), имеем, следовательно, с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ :

$$e = -\varepsilon f \left[ a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) \right] \quad (529)$$

Рассмотрим функцию

$$f \left[ a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) \right]$$

и заметим, что она будет периодична по отношению к  $t$  с периодом  $\frac{2\pi s}{\omega_1}$ . Тогда мы можем написать:

$$\begin{aligned}f \left[ a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) \right] &= \\&= \sum_{m \geq 0} \left( \mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t \right)\end{aligned}\quad (530)$$

где  $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m$  — некоторые функции переменных  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ .  
Таким образом:

$$e = -\varepsilon \sum_{m \geq 0} \left( \mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t \right) \quad (531)$$

Нетрудно убедиться теперь, на основании (485) и (495), что амплитуды гармоник тока  $i$

$$I_m = -\frac{\varepsilon}{Z\left(j \frac{m}{s} \omega_1\right)} \left( \mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t \right) \quad (532)$$

возбуждаемых гармониками напряжения

$$e_m = -\varepsilon \left( \mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{S} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{S} \omega_1 t \right)$$

будут величинами порядка малости  $\varepsilon$ , за исключением амплитуд гармоник  $I_r, I_s$  с частотами  $\frac{r}{S} \omega_1, \omega_1$ , остающихся конечными и не обращающихся в нуль при  $\varepsilon = 0$ .

Пренебрегая поэтому в первом приближении гармониками тока  $I_m$  ( $m \neq r, m \neq s$ ) по сравнению с гармониками  $I_r, I_s$ , мы можем заменить выражение (531) на нижеследующее, где учтены лишь те гармоники напряжения (именно  $e_r$  и  $e_s$ ), которые возбуждают основные гармоники тока:

$$e = -\varepsilon \left( \mathfrak{A}_r \cos \frac{r}{S} \omega_1 t + \mathfrak{B}_r \sin \frac{r}{S} \omega_1 t \right) - \varepsilon \left( \mathfrak{A}_s \cos \omega_1 t + \mathfrak{B}_s \sin \omega_1 t \right) \quad (533)$$

С другой стороны, на основании (530) имеем тождественно:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}_r \cos \frac{r}{S} \omega_1 t + \mathfrak{B}_r \sin \frac{r}{S} \omega_1 t = \\ & = C_r \cos \left( \frac{r}{S} \omega_1 t + \varphi_2 \right) + D_r \sin \left( \frac{r}{S} \omega_1 t + \varphi_2 \right) \\ & \mathfrak{A}_s \cos \omega_1 t + \mathfrak{B}_s \sin \omega_1 t = \\ & = C_s \cos (\omega_1 t + \varphi_1) + D_s \sin (\omega_1 t + \varphi_1) \end{aligned} \quad (534)$$

где:

$$\begin{aligned} C_r &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left\{ a_1 \cos \left[ s\tau - \frac{1}{r} (s\varphi_2 - r\varphi_1) \right] + a_2 \cos r\tau \right\} \cos r\tau d\tau \\ D_r &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left\{ a_1 \cos \left[ s\tau - \frac{1}{r} (s\varphi_2 - r\varphi_1) \right] + a_2 \cos r\tau \right\} \sin r\tau d\tau \\ C_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left\{ a_1 \cos s\tau + a_2 \cos \left[ r\tau + \frac{1}{s} (s\varphi_2 - r\varphi_1) \right] \right\} \cos s\tau d\tau \\ D_s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left\{ a_1 \cos s\tau + a_2 \cos \left[ r\tau + \frac{1}{s} (s\varphi_2 - r\varphi_1) \right] \right\} \sin s\tau d\tau \end{aligned} \quad (536)$$



Введем теперь в рассмотрение функции  $R_e', Y_e'; R_e'', Y_e''$  переменных  $a_1, a_2, \theta$ :

$$\begin{aligned}
 R_e'' &= \frac{1}{\pi a_2} \int_0^{2\pi} F \left[ a_1 \cos \left( s\tau - \frac{\theta}{r} \right) + a_2 \cos r\tau \right] \cos r\tau d\tau \\
 Y_e'' &= -\frac{1}{\pi a_2} \int_0^{2\pi} F \left[ a_1 \cos \left( s\tau - \frac{\theta}{r} \right) + a_2 \cos r\tau \right] \sin r\tau d\tau \\
 R_e' &= \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F \left[ a_1 \cos s\tau + a_2 \cos \left( r\tau + \frac{\theta}{s} \right) \right] \cos s\tau d\tau \\
 Y_e' &= -\frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} F \left[ a_1 \cos s\tau + a_2 \cos \left( r\tau + \frac{\theta}{s} \right) \right] \sin s\tau d\tau
 \end{aligned} \tag{536}$$

где

$$\theta = s\varphi_2 - r\varphi_1$$

Тогда, на основании (486), (534) и (535), получим:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \left( \mathfrak{A}_r \cos \frac{r}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_r \sin \frac{r}{s} \omega_1 t \right) &= R_e'' a_2 \cos \left( \frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2 \right) - \\
 - Y_e'' a_2 \sin \left( \frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2 \right) &= (R_e'' + j Y_e'') a_2 \cos \left( \frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2 \right)
 \end{aligned} \tag{537}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon (\mathfrak{A}_s \cos \omega_1 t + \mathfrak{B}_s \sin \omega_1 t) &= R_e' a_1 \cos (\omega_1 t + \varphi_1) - Y_e' a_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1) = \\
 &= (R_e' + j Y_e') a \cos (\omega_1 t + \varphi_1)
 \end{aligned}$$

и потому соотношение (533) может быть представлено в форме:

$$e = -(R_e' + j Y_e') i_1 - (R_e'' + j Y_e'') i_2 \tag{538}$$

Итак мы видим, что в первом приближении нелинейная характеристика органа  $N$  может быть заменена эквивалентной линейной (538). При этом, в рассматриваемом случае демультипликационного резонанса, в отличие от ранее рассмотренного нерезонансного случая, эквивалентные импедансы  $R_e' + j Y_e'$ ,  $R_e'' + j Y_e''$ , соответствующие частотам  $\omega_1, \omega_2$ , являются комплексными и состоят как из активных  $R_e', R_e''$ , так из реактивных  $Y_e', Y_e''$  слагающих.

Пусть теперь  $\omega', \omega'', \delta', \delta''$  будут соответственно частотами и декрементами эквивалентной линейной системы. Тогда уравнения первого приближения представятся в виде:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta' a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\delta'' a_2$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \omega', \quad \frac{d\psi_2}{dt} = \omega''$$

где  $\psi_1, \psi_2$  — полные фазы колебаний  $i_1, i_2$ . Однако, на основании (528), мы видим, что

$$\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1; \quad \psi_2 = \frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2$$

и потому уравнения первого приближения могут быть написаны в форме:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\delta' a_1, & \frac{da_2}{dt} &= -\delta'' a_2 \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega' - \omega_1, & \frac{d\varphi_2}{dt} &= \omega'' - \omega_2 \end{aligned} \quad (539)$$

В виду соотношения (539) нетрудно заметить, что для эквивалентной системы должно удовлетворяться равенство:

$$Z(j\omega' - \delta') i_1 + Z(j\omega'' - \delta'') i_2 + (R'_e + jY'_e) i_1 + (R''_e + jY''_e) i_2 = 0$$

Таким образом для определения величин  $\omega', \omega'', \delta', \delta''$  имеем следующие уравнения:

$$Z(j\omega' - \delta') + R'_e + jY'_e = 0$$

$$Z(j\omega'' - \delta'') + R''_e + jY''_e = 0$$

Решая эти уравнения по способу, изложенному на стр. 199, получим<sup>1)</sup> с точностью до величин второго порядка малости:

$$j\omega' - \delta' = j\omega_1 - \delta_1 \left( 1 - \frac{R'_e + jY'_e}{R_1^*} \right)$$

$$j\omega'' - \delta'' = j\omega_2 - \delta_2 \left( 1 - \frac{R''_e + jY''_e}{R_2^*} \right)$$

<sup>1)</sup> Сохраняя прежние обозначения.



откуда:

$$\omega' = \omega_1 + \delta_1 \frac{Y_e'}{R_1^*}, \quad \omega'' = \omega_2 + \delta_2 \frac{Y_e''}{R_2^*}$$

$$\delta' = \delta_1 \left( 1 - \frac{R_e'}{R_1^*} \right), \quad \delta'' = \delta_2 \left( 1 - \frac{R_e''}{R_2^*} \right)$$

Итак, в первом приближении, в рассматриваемом случае демальтипликационного резонанса:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) \quad (540)$$

где  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  представляют собою решения уравнений:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1 \left( 1 - \frac{R_e'}{R_1^*} \right) a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\delta_2 \left( 1 - \frac{R_e''}{R_2^*} \right) a_2 \quad (541)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\delta_1}{R_1^*} Y_e', \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 - \frac{r}{s} \omega_1 + \frac{\delta_2}{R_2^*} Y_e''$$

Чтобы получить выражение для улучшенного первого приближения, следует, очевидно, присоединить к формуле (540) отброшенные „малые“ гармоники  $I_m$  ( $m \neq r, m \neq s$ ). Таким образом мы имеем:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) + \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq r \\ m \neq s}} I_m$$

или, на основании (532):

$$i = a \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) - \varepsilon \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq r \\ m \neq s}} \frac{1}{Z\left(j \frac{m}{s} \omega\right)} \left( \mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t \right)$$

Однако на основании (485) и (495) мы можем написать, с точностью до величин второго порядка малости:

$$\frac{-\varepsilon}{Z\left(j\frac{m}{s}\omega\right)} = \frac{-j\varepsilon C v^2 \frac{m}{s} \omega_1 \left(v_1^2 - \frac{m^2}{s^2} \omega_1^2\right)}{\omega_1^4 \left(1 - \frac{m^2}{s^2}\right) \left(\frac{r^2}{s^2} - \frac{m^2}{s^2}\right)}$$

и потому улучшенное первое приближение будет:

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq r \\ m \neq s}} \frac{C v^2 m s \omega_1 (s^2 v_1^2 - m^2 \omega_1^2) \left(\mathfrak{A}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t - \mathfrak{B}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t\right)}{\omega_1^4 (s^2 - m^2) (r^2 - m^2)} \quad (542)$$

Сравнивая формулы:

$$f(a_1 \cos \varphi_1, a_2 \cos \varphi_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathfrak{A}_{m_1, m_2} \cos(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2)$$

$$f\left[a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right)\right] =$$

$$= \sum_{m \geq 0} \left(\mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t\right)$$

можно убедиться, что

$$\mathfrak{A}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t + \mathfrak{B}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t =$$

$$= \sum_{m_1 + \frac{r}{s} m_2 = m} \mathfrak{A}_{m_1, m_2} \cos \left[ \left(m_1 \omega_1 + m_2 \frac{r}{s} \omega_1\right) t + m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 \right]$$

откуда:

$$\mathfrak{A}_m \sin \frac{m}{s} \omega_1 t - \mathfrak{B}_m \cos \frac{m}{s} \omega_1 t =$$

$$= \sum_{sm_1 + rm_2 = sm} \mathfrak{A}_{m_1, m_2} (a_1, a_2) \sin \left[ m_1 (\omega_1 t + \varphi_1) + m_2 \left(\frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2\right) \right]$$



Мы видим, следовательно, что выражение улучшенного первого приближения (542) может быть представлено в виде:

$$i = a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + \varepsilon \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq r \\ m \neq s}} \frac{C v^2 m s \omega_1 (s^2 v_1^2 - m^2 \omega_1^2)}{\omega_1^4 (s^2 - m^2) (r^2 - m^2)} \left[ \sum_{m_1 s + m_2 r = m s} \mathfrak{A}_{m_1, m_2}(a_1, a_2) \sin(m_1 \psi_1 + m_2 \psi_2) \right] \quad (543)$$

где:

$$\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{r}{s} \omega_1 t + \varphi_2 \quad (544)$$

Заметим теперь, что в виду того, что параметры  $R'_e, R''_e, Y'_e, Y''_e$  являются функциями лишь переменных  $a_1, a_2$  и  $\theta = s \psi_2 - r \psi_1 = s \varphi_2 - r \varphi_1$ , исследование четырех уравнений первого приближения (541) может быть приведено к исследованию следующих трех уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\hat{\sigma}_1 \left( 1 - \frac{R'_e}{R_1^*} \right) a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\hat{\sigma}_2 \left( 1 - \frac{R''_e}{R_2^*} a_2 \right) \\ \frac{d\theta}{dt} &= s \omega_2 - r \omega_1 + s \frac{\hat{\sigma}_2}{R_2^*} Y''_e - r \frac{\hat{\sigma}_1}{R_1^*} Y'_e \end{aligned} \quad (545)$$

Рассмотрим стационарные решения этих уравнений, не зависящие от времени:  $a_1 = \text{const}, a_2 = \text{const}, \theta = \text{const}$ .

Приравнявая в уравнениях (541) производные  $\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$  нулю, имеем для определения стационарных значений соотношения вида:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \frac{R'_e}{R_1^*} \right) a_1 &= 0, \quad \left( 1 - \frac{R''_e}{R_2^*} \right) a_2 = 0 \\ s \omega_2 - r \omega_1 + s \frac{\hat{\sigma}_2}{R_2^*} Y''_e - r \frac{\hat{\sigma}_1}{R_1^*} Y'_e &= 0 \end{aligned} \quad (546)$$

Как это вытекает из (541) и (546), для рассматриваемых стационарных решений:

$$\psi_1 = \omega_r t + \vartheta_1, \quad \psi_2 = \omega_r t + \vartheta_2$$

где  $\vartheta_1, \vartheta_2$  — произвольные постоянные и где

$$\omega_f^* = \omega_1 + \frac{\delta_1}{R_1^*} Y_e', \omega_f^{**} = \omega_2 + \frac{\delta_2}{R_2^*} Y_e'' = \frac{r}{s} \omega_f^*$$

Итак, колебания, соответствующие этим стационарным решениям, совершаются с двумя основными частотами  $\omega_f^*$  и  $\omega_f^{**}$ , находящимися между собой в рациональном отношении:

$$s \omega_f^{**} - r \omega_f^* = 0 \quad (547)$$

Как показывает выражение (543), для улучшенного первого приближения в данном случае колебания являются периодическими с периодом  $\frac{2\pi s}{\omega_f^*}$ , причем, кроме основных частот  $\omega_f^*, \omega_f^{**}$ ,

они обладают также вообще всеми обертонами  $\frac{m}{s} \omega_f^*$  демультиплицированной (разделенной) частоты  $\frac{\omega_f^*}{s}$ .

Так как благодаря соотношению (547) „обобщенный сдвиг“ фаз  $\theta = s\psi_2 - r\psi_1$  основных гармоник является постоянным, то рассматриваемые колебания, соответствующие постоянным решениям уравнений (545), называются синхронизированными (колебаниями в синхронном режиме или в режиме синхронизации). Для получения критериев устойчивости синхронизированных колебаний можно воспользоваться обычным приемом составления „уравнений в вариациях“.

Пусть, например,  $a_1^0, a_2^0, \theta_0$  — некоторое решение уравнений (546). Тогда положим в уравнениях (545):

$$a_1 = a_1^0 + \delta a_1, a_2 = a_2^0 + \delta a_2, \theta = \theta_0 + \delta \theta$$

рассматривая вариации  $\delta a_1, \delta a_2, \delta \theta$  как бесконечно малые первого порядка. Отбросив бесконечно малые высших порядков, получаем систему трех уравнений, однородных, линейных, с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta a_1}{dt} &= \Phi_{a_1}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_1 + \Phi_{a_2}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_2 + \Phi_{\theta}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta \theta \\ \frac{d\delta a_2}{dt} &= \Phi_{a_1}'^*(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_1 + \Phi_{a_2}'^*(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_2 + \Phi_{\theta}'^*(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta \theta \\ \frac{d\delta \theta}{dt} &= F_{a_1}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_1 + F_{a_2}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta a_2 + F_{\theta}'(a_1^0, a_2^0, \theta_0) \delta \theta \end{aligned} \quad (548)$$



где для сокращения положено:

$$\Phi = -\delta_1 \left(1 - \frac{R'_e}{R_1^*}\right) a_1$$

$$\dot{\Phi} = -\delta_2 \left(1 - \frac{R'_e}{R_2}\right) a_2$$

$$F = s\omega_2 - r\omega_1 + s \frac{\delta_2}{R_2^*} Y_e'' - r \frac{\delta_1}{R_1^*} Y_e'$$

Образуем характеристическое уравнение для полученной системы (548) уравнений в вариациях. Таким путем приходим к рассмотрению алгебраического уравнения третьей степени.

Если вещественные части всех корней этого уравнения отрицательны, то, как известно, имеет место устойчивость; если же, наоборот, хотя бы одна из вещественных частей положительна — соответствующие синхронизированные колебания неустойчивы.

Полученный критерий устойчивости, а именно условие отрицательности вещественных частей всех корней характеристического уравнения, соответствующего системе (548) непосредственно распадается на ряд неравенств, которым должны удовлетворять первые частные производные функций  $\Phi$ ,  $\dot{\Phi}$ ,  $F$  в точке  $a_1 = a_1^0$ ,  $a_2 = a_2^0$ ,  $\theta = \theta_0$ .

Не останавливаясь здесь на эффективном образовании этих неравенств, предположим, что некоторое решение  $(a_1^0, a_2^0, \theta_0)$  уравнений (546) удовлетворяет вышеупомянутому условию устойчивости. Тогда из соображений непрерывности ясно, что при достаточно малом изменении каких-либо параметров, входящих в уравнение (546), например, при достаточно малом изменении „расстройки резонанса“  $s\omega_2 - r\omega_1$ , уравнение это допускает решения, достаточно близкие к рассматриваемому и удовлетворяющие также условию устойчивости.

Таким образом, синхронизированные колебания возможны не только при некотором определенном значении расстройки линейных частот  $s\omega_2 - r\omega_1$ , а и при других значениях этой величины, лежащих в некоторой полоске. Эта полоска значений расстройки, для которых возможны устойчивые синхронизированные колебания, называется зоной синхронизации. Существование зон синхронизации является характерной особенностью нелинейных колебательных систем; для линейных же

систем синхронизация, очевидно, имеет место лишь при нулевой расстройке соответствующих частот.

Перейдем теперь к рассмотрению основного резонанса

$$\omega_1 \cong \omega_2$$

полагая, как и раньше:

$$\frac{\nu_1}{\nu} = 1 + \varepsilon \Omega, \quad q = \varepsilon Q$$

Так как в данном случае, при  $\varepsilon = 0$ , колебания совершаются с частотой  $\nu$ , то для образования первого приближения принимаем:

$$i = a_1 \cos(\nu t + \varphi_1) + a_2 \cos(\nu t + \varphi_2) \quad (549)$$

Введем величины  $a$  и  $\vartheta$  при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 &= a \cos \vartheta \\ a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 &= a \sin \vartheta \end{aligned} \quad (550)$$

откуда:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (551)$$

Воспользовавшись величинами  $a$  и  $\vartheta$ , можем представить соотношение (549) в виде:

$$i = a \cos(\nu t + \vartheta) \quad (552)$$

Но, как уже было установлено ранее, при колебаниях типа (552) орган  $N$  может быть заменен эквивалентным сопротивлением  $R_e(a)$ .

Эквивалентная колебательная система состоит, следовательно, из импеданса  $Z$ , замкнутого через эквивалентное сопротивление  $R_e(a)$ .

Как это видно, система эта уже была рассмотрена нами на стр. 204—207, где мы установили, что ее частоты и декременты  $\omega_1(a)$ ,  $\omega_2(a)$ ,  $\delta_1(a)$ ,  $\delta_2(a)$  выражаются формулами (476) и (477).

Таким образом мы можем представить уравнения первого приближения, которым должны удовлетворять амплитуды  $a_1$ ,  $a_2$  и фазы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , входящие в выражение (549), в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= -\delta_1(a) a_1, \quad \frac{da_2}{dt} = -\delta_2(a) a_2 \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \omega_1(a) - \nu, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2(a) - \nu \end{aligned} \quad (553)$$



где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (554)$$

и где  $\delta_1(a)$ ,  $\delta_2(a)$ ,  $\omega_1(a)$ ,  $\omega_2(a)$  взяты из формул (476) и (477).

Чтобы получить улучшенное первое приближение, нам, очевидно, следует присоединить к правой части выражения (549) гармоники  $i_m$  с частотами  $m\nu$ , где  $m \neq 1$ .

Подставим для этого величину  $i$ , взятую в первом приближении (549) или (552), в соотношение

$$e = -\varepsilon f(i)$$

Тогда получим:

$$e = -\varepsilon f[a \cos(\nu t + \vartheta)]$$

Воспользовавшись разложением:

$$f(a \cos \vartheta) = \sum_{m \geq 0} f_m(a) \cos m \vartheta \quad (555)$$

находим:

$$e = -\varepsilon \sum_{m \geq 0} f_m(a) \cos m(\nu t + \vartheta)$$

Поэтому выражение для улучшенного первого приближения может быть взято в виде:

$$i = a \cos(\nu t + \vartheta) - \varepsilon \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq 1}} \frac{1}{Z(jm\nu)} f_m(a) \cos m(\nu t + \vartheta) \quad (556)$$

С другой стороны, нетрудно заметить [см., напр., формулу (485)], что в рассматриваемом случае основного резонанса имеем с точностью до величин первого порядка малости:

$$\frac{1}{Z(jm\nu)} = \frac{j C \nu^3 m}{(1 - m^2) \nu^2} \quad \text{при } m \neq 1$$

и потому с точностью до величин второго порядка малости:

$$-\frac{\varepsilon}{Z(jm\nu)} \cos m(\nu t + \vartheta) = \frac{\varepsilon C \nu m}{1 - m^2} \sin m(\nu t + \vartheta)$$

Так как при составлении улучшенного первого приближения принимаются в расчет лишь величины первого порядка малости, то выражение (556) можем написать:

$$i = a \cos(\nu t + \vartheta) + \varepsilon \sum_{m \geq 2} \frac{m}{1-m^2} C_{\nu} f_m(a) \sin m(\nu t + \vartheta) \quad (557)$$

или, что то же самое:

$$i = a_1 \cos(\nu t + \varphi_1) + a_2 \cos(\nu t + \varphi_2) + \varepsilon \sum_{m \geq 2} \frac{m}{1-m^2} C_{\nu} f_m(a) \sin m(\nu t + \vartheta) \quad (558)$$

Обратимся теперь к уравнениям первого приближения (553). Замечаем прежде всего, что, если

$$\delta_1(0) > 0, \delta_2(0) > 0$$

то самовозбуждения колебаний не будет и состояние равновесия  $a = 0$  будет устойчивым. Если же по крайней мере одна из величин  $\delta_1(0), \delta_2(0)$  отрицательна, то статическое состояние неустойчиво и колебания самовозбуждаются.

Рассмотрим частные решения уравнений (553), соответствующие стационарному значению результирующей амплитуды

$$a = \text{const}$$

В этом случае имеем:

$$a_1 = a_1^{(0)} e^{-\delta_1(a)t}, a_2 = a_2^{(0)} e^{-\delta_2(a)t}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + [\omega_1(a) - \nu] t, \varphi_2 = \varphi_2^{(0)} + [\omega_2(a) - \nu] t$$

откуда, на основании (554):

$$a^2 = [a_1^{(0)}]^2 e^{-2\delta_1(a)t} + [a_2^{(0)}]^2 e^{-2\delta_2(a)t} + 2a_1^{(0)} a_2^{(0)} e^{-[\delta_1(a) + \delta_2(a)]t} \cos \{ [\omega_2(a) - \omega_1(a)] t + \varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)} \}$$

Мы видим, следовательно, что искомые решения уравнений первого приближения будут:

$$a_1 = a, a_2 = 0, \quad \text{где } \delta_1(a) = 0 \quad (559)$$

$$a_2 = a, a_1 = 0, \quad \text{где } \delta_2(a) = 0 \quad (560)$$

Воспользовавшись выражениями (557) и (558) улучшенного первого приближения, убеждаемся, что колебания, соответствующие решению (559), будут совершаться с частотой  $\omega_f = \omega_1(a)$



и ее обертонами, а колебания, соответствующие (560), — с частотой  $\dot{\omega}_f = \omega_2(a)$  и ее обертонами.

Нетрудно усмотреть также, что колебания первого типа (с частотой  $\dot{\omega}_f$ ) будут устойчивы при условиях:

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial a} > 0, \delta_2 > 0$$

а колебания второго типа — при условиях:

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial a} > 0, \delta_1 > 0$$

Исследование общих решений рассматриваемых четырех уравнений (553), очевидно, приводится к исследованию трех уравнений первого порядка относительно неизвестных  $a_1, a_2$  и сдвига фаз  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$

### § 9. Принцип линеаризации и методы разложений по степеням малого параметра

Сделаем теперь в заключение несколько общих замечаний относительно способов образования уравнений первого приближения для поличастотных колебаний в квазигармонических колебательных системах.

Пусть мы имеем нелинейную колебательную систему, достаточно близкую к некоторой линейной системе без затухания.

Пусть в этой последней колебания рассматриваемой величины  $x$  имеют вид:

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad (561)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — гармонические колебания с некоторыми частотами:

$$x_1 = a_1 \cos(\dot{\omega}_1 t + \varphi_1)$$

. . . . .

$$x_n = a_n \cos(\dot{\omega}_n t + \varphi_n)$$

Подставим выражение (561) в характеристику нелинейного элемента

$$y = F(x) \quad (562)$$

\*) Здесь  $F(x)$ , вообще говоря, может зависеть не только от  $x$ , но и от его производных, так что  $F(x)$  в общем случае следует рассматривать не как функцию, а как функционал от  $x$ .

разложим результат подстановки в ряд Фурье и удержим в полученном разложении лишь гармоники с частотами  $\omega_1, \dots, \omega_n$  величин  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть  $y_1, \dots, y_n$  будут этими гармониками. Так как  $y_k$  будет гармонической функцией той же частоты, что и  $x_k$ , то мы можем положить:

$$y_k = S_k x_k$$

где  $S_k$  — некоторые вещественные или комплексные величины, зависящие от амплитуд  $a_1, \dots, a_n$ , а в некоторых случаях (напр., в случаях резонанса) — также и от фаз  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  величин  $x_1, \dots, x_n$ .

Учитывая в разложении  $y$  как функции времени лишь гармоники  $y_1, \dots, y_n$ , мы тем самым заменяем нелинейную характеристику (562) эквивалентной линейной:

$$y = y_1 + \dots + y_n = S_1 x_1 + \dots + S_n x_n \quad (563)$$

На основании только что сказанного, нетрудно заметить, что величины  $S_1, \dots, S_n$  (параметры эквивалентной линейной характеристики) могут быть определены из условия равенства основных гармоник (т. е. гармоник с частотами  $\omega_1, \dots, \omega_n$ ) у выражений (562) и (563) при колебаниях вида (561). (Обобщенный принцип гармонического баланса).

Найдя далее тем или иным путем частоты  $\omega_1^e, \dots, \omega_n^e$  и декременты  $\delta_1^e, \dots, \delta_n^e$  эквивалентной линейной системы, имеем уравнения первого приближения в обычной форме:

$$\frac{da_1}{dt} = -\delta_1^e a_1, \dots, \frac{da_n}{dt} = -\delta_n^e a_n$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1^e - \omega_1, \dots, \frac{d\varphi_n}{dt} = \omega_n^e - \omega_n$$

Для образования улучшенного первого приближения добавляем к правой части выражения:

$$x = x_1 + \dots + x_n \quad (564)$$

все гармоники  $x$ , происшедшие от отброшенных гармоник величин  $y = F(x)$ . При эффективном вычислении этих дополнительных гармоник считаем амплитуды  $a_1, \dots, a_n$  и фазы  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$



постоянными<sup>1)</sup> и, кроме того, трактуем вышеуказанные гармоники величины  $y$ , как внешние возмущения, действующие на линейную незатухающую систему и вызывающие в ней вынужденные колебания. Добавив эти вынужденные колебания к правой части выражения (564), мы и получаем улучшенное первое приближение.

Для удобства и простоты выкладок целесообразно вводить в рассмотрение „малый параметр“, которым отмечаются все достаточно малые<sup>2)</sup> величины. Введение малого параметра  $\epsilon$  следует осуществлять таким образом, чтобы, положив  $\epsilon = 0$ , мы получили линейную колебательную систему без затухания, и так, чтобы при  $\epsilon = 0$ , в случаях резонанса, соответствующие соотношения между собственными частотами были выполнены точно. При исследованиях линейных и эквивалентных линейных систем, особенно в случаях систем более или менее сложной структуры, целесообразно использовать ранее изложенные комплексные методы, основанные на понятиях импеданса и адмиттанса.

Так как при составлении уравнений первого приближения учитываются лишь величины первого порядка малости, то, определяя величины частот и декрементов  $\omega_1^e, \dots, \omega_n^e, \delta_1^e, \dots, \delta_n^e$ , из характеристического уравнения эквивалентной линейной системы можно отбрасывать члены порядка малости  $\epsilon^2$ , что обычно весьма упрощает вычисления и позволяет приходиться к более или менее компактным формулам.

Во всем предыдущем изложении нами широко использовался метод эквивалентной линеаризации.

Следует заметить, что метод ранее был нами обоснован лишь для случая колебательных систем, описываемых одним дифференциальным уравнением второго порядка (для систем с одной степенью свободы).

Метод эквивалентной линеаризации был, однако, применяем нами также и для более сложных колебательных систем с несколькими степенями свободы. Естественно поэтому может возникнуть вопрос о проверке допустимости этого метода как

---

<sup>1)</sup> Хотя, как показывают уравнения первого приближения, величины эти, вообще говоря, переменные, правда „достаточно медленно“ меняющиеся.

<sup>2)</sup> Величину, имеющую размерность, называем достаточно малой, если по приведении уравнений к безразмерному виду она становится достаточно малым числом.



средства построения приближенных решений в таких, более сложных случаях.

Рассмотрим некоторую линейную цепь с импедансом  $Z(j\omega)$ . Пусть по этой цепи протекает некоторый ток  $i$ , создающий между ее концами падение напряжения  $e$ .

Тогда, предполагая, что  $e$  и  $i$  являются гармоническими функциями времени с частотой  $\omega$ , имеем:

$$e = Z(j\omega) i \quad (565)$$

Представляя  $Z(j\omega)$  — рациональную <sup>1)</sup> функцию оператора  $Z(j\omega)$  — в виде частного двух полиномов:

$$Z(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (566)$$

можем написать также:

$$Q(j\omega) e = P(j\omega) i \quad (567)$$

откуда, вследствие основного свойства оператора  $j$ :

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) e = P\left(\frac{d}{dt}\right) i \quad (568)$$

Последнее соотношение (568), очевидно, остается в силе и тогда, когда  $e$  и  $i$  не будут уже гармоническими функциями времени.

Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, стоит лишь обратиться к первоначальному определению понятия импеданса линейной цепи.

Мы исходили там из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа, которые для рассматриваемого случая линейных цепей были линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Предполагая, что все входящие в них переменные величины (токи и напряжения) являлись гармоническими функциями времени с одной частотой  $\omega$ , мы заменяли  $\frac{d}{dt}$  на  $j\omega$ , и таким образом, исключая лишние неизвестные, приходили к соотношениям вида (567).

Ясно поэтому, что если бы рассматриваемые напряжения и токи не были гармоничны, то, исключая эти лишние неиз-

<sup>1)</sup> Мы предполагаем здесь, что рассматриваемая линейная цепь не содержит элементов с распределенными параметрами.



вестные без замены  $\frac{d}{dt}$  на  $j\omega$ , мы пришли бы вместо соотношения (567) к дифференциальному уравнению (568).

Заметив это, возьмем нелинейную колебательную систему типа  $\Sigma_N$  (см. фиг. 67). Представив импеданс  $Z(j\omega)$  линейной цепи данной системы в виде (566), имеем:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)i = Q\left(\frac{d}{dt}\right)e$$

Но, с другой стороны, величины  $i$  и  $e$  связаны характеристикой нелинейного элемента  $N$ :

$$e = -F(i)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение для рассматриваемой нелинейной колебательной системы будет:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)i = -Q\left(\frac{d}{dt}\right)F(i) \quad (569)$$

Изучая квазигармонические системы (т. е. системы, достаточно близкие к линейным системам без затухания) и вводя, как ранее было указано, малый параметр  $\varepsilon$ , приводим это уравнение к виду:

$$P\left(\frac{d}{dt}, \varepsilon\right)i = -\varepsilon Q\left(\frac{d}{dt}, \varepsilon\right)f(i) \quad (570)$$

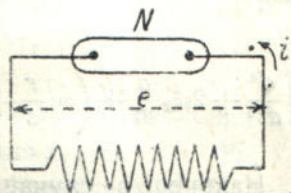
При  $\varepsilon = 0$  получаем однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$P\left(\frac{d}{dt}, 0\right)i = 0$$

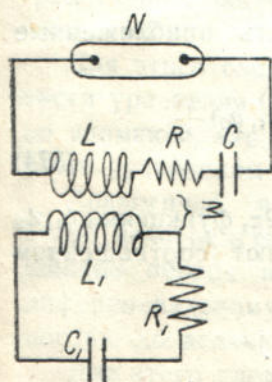
которое не должно содержать члены, вызывающие затухание.

Например, для колебательной системы, составленной по схеме фиг. 68, в нерезонансном случае, на основании (485) и (486) имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon\zeta_1 \frac{d}{dt} + \omega_1^2\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon\zeta_2 \frac{d}{dt} + \omega_2^2\right) i = \\ & = -\varepsilon C v^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon\zeta_1 v_1 \frac{d}{dt} + v_1^2\right) f(i) \end{aligned} \quad (571)$$



Фиг. 67.



Фиг. 68.

Аналогично, в случае демумльтипликативного резонанса:

$$\omega_2 = \frac{r}{S} \omega_1 + \varepsilon \alpha, \quad \frac{r}{S} \neq 1$$

получим:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon \xi_1 \frac{d}{dt} + \omega_1^2 \right) \cdot \quad (572)$$

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon \xi_2 \frac{d}{dt} + \left( \omega_1 \frac{r}{S} + \varepsilon \alpha \right)^2 \right] i = -\varepsilon C \nu^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\varepsilon \zeta_1 \nu_1 \frac{d}{dt} + \nu_1^2 \right) f(i)$$

Наконец, в случае основного резонанса:  $\omega_1 \cong \omega_2$ , сохраняя прежние обозначения, имеем:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon \zeta_1^* \nu \frac{d}{dt} + \nu^2 \right) \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon \zeta_1 \nu_1 (1 + \varepsilon \Omega) \frac{d}{dt} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \nu^2 (1 + \varepsilon \Omega)^2 \right] - \nu^4 \varepsilon^2 Q^2 \frac{d^4}{dt^4} \right\} i = \\ & = -\varepsilon C \nu^2 \frac{d}{dt} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \varepsilon \zeta_1 \nu (1 + \varepsilon \Omega) \frac{d}{dt} + \nu^2 (1 + \varepsilon \Omega)^2 \right] f(i) \quad (573) \end{aligned}$$

Возьмем уравнение (571) и будем искать приближенные решения в виде:

$$i = a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 + \varepsilon z_1(\phi_1, \phi_2, a_1, a_2) + \varepsilon^2 z_2(\phi_1, \phi_2, a_1, a_2) + \dots \quad (574)$$

где  $z$  являются периодическими, с периодом  $2\pi$ , функциями  $\phi_1, \phi_2$  и где переменные  $a_1, a_2, \phi_1, \phi_2$  удовлетворяют соотношениям вида:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \varepsilon X_0^*(a_1, a_2) + \varepsilon^2 X_1^*(a_1, a_2) + \dots \\ \frac{da_2}{dt} &= \varepsilon X_0^{**}(a_1, a_2) + \varepsilon^2 X_1^{**}(a_1, a_2) + \dots \\ \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \varepsilon Y_0^*(a_1, a_2) + \varepsilon^2 Y_1^*(a_1, a_2) + \dots \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \varepsilon Y_0^{**}(a_1, a_2) + \varepsilon^2 Y_1^{**}(a_1, a_2) + \dots \end{aligned} \quad (575)$$



Подставив соотношение (574) в уравнение (571) и принимая во внимание (575), разложим результат подстановки по возрастающим степеням малого параметра.

Приравняв коэффициенты при каждой степени  $\varepsilon$ , мы и получим систему равенств, из которых, аналогично тому, как это было сделано на стр. 131—135, и можно определить одно за другим выражения для  $z_1, z_2, \dots; X_0^*, X_1^*, \dots; X_0^{**}, X_1^{**}, \dots; Y^*, Y_1^*, \dots; Y_0^{**}, Y_1^{**}, \dots$ .

Произведя на самом деле соответствующие вычисления для коэффициентов при первой степени, т. е. для  $z_1, X_0^*, X_0^{**}, Y_0^*, Y_0^{**}$ , нетрудно заметить, что, отбрасывая в уравнениях (575) величины второго (и высших) порядка малости, мы приходим к уравнениям первого приближения, ранее выведенным на основе метода эквивалентной линеаризации.

Отбрасывая же величины второго порядка малости в формуле (574), получаем соответствующее выражение „улучшенного первого приближения“.

В том, что улучшенное первое приближение (577) удовлетворяет дифференциальному уравнению (571) с точностью до величин второго порядка малости, можно убедиться и непосредственно, независимо от схемы построения высших приближений.

Для этого следует лишь подставить выражение (517) в обе части уравнения (517), причем при дифференцировании принять во внимание, что величины  $a_1, a_2$ , входящие в (517), удовлетворяют уравнениям первого приближения (503).

Аналогично, в случае демультимпликативного резонанса, легко непосредственно проверить, что соответствующее улучшенное первое приближение (543) удовлетворяет основному дифференциальному уравнению колебательной системы с точностью до величин второго порядка малости.

Для этого следует лишь подставить выражение (543) в обе части дифференциального уравнения (572) и при дифференцировании принять во внимание, что величины амплитуд и фаз  $a_1, a_2, \psi_1, \psi_2$ , входящие в (543), удовлетворяют уравнениям первого приближения (541).

В рассматриваемом случае высшие приближения могут быть получены по следующей схеме.



Полагаем в уравнении (572):

$$i = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos\left(\frac{r}{S} \omega_1 t + \varphi_2\right) + \\ + \varepsilon z_1\left(\frac{\omega_1 t}{S}, \varphi_1, \varphi_2, a_1, a_2\right) + \quad (576) \\ + \dots + \varepsilon^k z_k\left(\frac{\omega_1 t}{S}, \varphi_1, \varphi_2, a_1, a_2\right) + \dots$$

где  $z$  являются периодическими функциями  $\frac{\omega_1 t}{S}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  с периодом  $2\pi$ . Чтобы выражение (576) удовлетворяло уравнению (572), образуем для неизвестных  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  уравнения вида:

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon X_0^*(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 X_1^*(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \\ \frac{da_2}{dt} = \varepsilon X_0^{**}(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 X_1^{**}(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon Y_0^*(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 Y_1^*(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \varepsilon Y_0^{**}(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 Y_1^{**}(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \quad (577)$$

где  $X, Y$  — периодические функции  $\varphi_1, \varphi_2$  с периодом  $2\pi$ .

Подставим (576) в обе части (572) и примем во внимание, при дифференцировании уравнения (577).

Тогда, разлагая результат подстановки по возрастающим степеням  $\varepsilon$  и приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях параметра, получим систему соотношений, позволяющую определять одно за другим искомые выражения  $z$ ,  $X$  и  $Y$ .

Произведя эффективно вычисление коэффициентов при первой степени  $\varepsilon$ , убедимся, что, отбросив члены второго порядка малости в уравнениях (577), мы получим уравнения первого приближения (541). Отбросив же указанные величины в формуле (576), получим улучшенное первое приближение (543).

Рассмотрим теперь уравнение (573), соответствующее случаю основного резонанса.

В этом случае образование приближенных решений можем вести по нижеследующей схеме.



Полагаем:

$$i = a_1 \cos(\nu t + \varphi_1) + a_2 \cos(\nu t + \varphi_2) + \varepsilon z_1(a, \nu t + \vartheta) + \\ + \varepsilon_1 z_2(a, \nu t + \vartheta) + \dots \quad (578)$$

где

$$a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2 = a \cos \vartheta, \quad a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 = a \sin \vartheta \quad (579)$$

и где величины  $z$  есть периодические функции  $\nu t + \vartheta$  с периодом  $2\pi$ .

Чтобы принятое выражение для  $i$  (578) удовлетворяло основному дифференциальному уравнению колебательной системы (573), построим для неизвестных амплитуд и фаз  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  уравнения вида:

$$\frac{da_1}{dt} = [\varepsilon X_0^*(a) + \varepsilon^2 X_1^*(a) + \dots] a_1$$

$$\frac{da_2}{dt} = [\varepsilon X_0^{**}(a) + \varepsilon^2 X_1^{**}(a) + \dots] a_2$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \varepsilon Y_0^*(a) + \varepsilon^2 Y_1^*(a) + \dots$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \varepsilon Y_0^{**}(a) + \varepsilon^2 Y_1^{**}(a) + \dots$$

Как ранее было указано, определяем коэффициенты  $z, X, Y$  наших разложений так, чтобы удовлетворить уравнению (573) с точностью до заданной степени малого параметра.

Найдя коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$ , можно заметить что отбрасывание величин высших порядков в формулах (580) и (578) приводит нас соответственно к уравнениям первого приближения (553) и к выражению улучшенного первого приближения (558), ранее полученным при помощи метода эквивалентной линеаризации.

Резюмируя все только что сказанное, мы приходим к заключению, что метод эквивалентной линеаризации, который мы развили независимо от основных дифференциальных уравнений колебательной системы, приводит к решениям, удовлетворяющим этим уравнениям с точностью до величин второго порядка малости.

Кроме того, исходя из рассмотрения получаемых этим методом уравнений первого приближения и выражения улучшенного первого приближения, можно построить схему для образования высших приближений, т. е. для нахождения решений,



удовлетворяющих основным дифференциальным уравнениям колебательной системы с точностью до заданной степени  $\epsilon$  (напр., с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots$  и т. д.).

Хотя данное обоснование метода эквивалентной линеаризации было проведено нами на конкретном примере колебательной системы с двумя степенями свободы, составленной по схеме фиг. 66, не представляет, однако, никаких принципиальных затруднений распространить его и на самые общие случаи квазигармонических систем с любым числом степеней свободы.

В самом деле, нетрудно заметить, что данное нами обоснование метода эквивалентной линеаризации базировалось не на каких-либо специальных особенностях рассмотренной колебательной системы, а исключительно на том факте, что при  $\epsilon = 0$  соответствующие дифференциальные уравнения вырождаются в линейные, описывающие незатухающие гармонические колебания.

## § 10. Влияние внешних периодических сил на квазигармонические колебательные системы

До сих пор мы рассматривали лишь такие колебательные системы, в которых все действующие силы не зависели явно от времени и для которых поэтому в соответствующие дифференциальные уравнения время  $t$  входило лишь через посредство операторов дифференцирования  $\frac{d^k}{dt^k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Эти колебательные системы, очевидно были изолированы от внешних влияний, вследствие чего все действующие силы и зависели только от динамического состояния самой системы.

Перейдем теперь к изучению влияния внешнего возмущения на характер колебаний, рассмотрев, в качестве примера, колебания, определяемые уравнением вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \epsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (581)$$

где  $m$  и  $k$  положительны и где

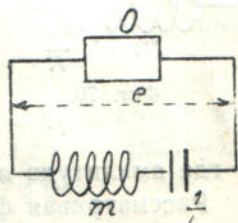
$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=1}^N \left[ f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cos \lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \sin \lambda_n t \right] \quad (582)$$



Здесь  $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторые полиномы по отношению к  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ ;  $\varepsilon$ , как обычно, — малый параметр.

Рассматриваемое уравнение (581) может быть, очевидно, интерпретировано как уравнение колебаний некоторой механической системы с массой  $m$ , коэффициентом упругости  $k$ , находящейся под воздействием нелинейной силы  $\varepsilon f$ , явно зависящей от времени.

Воспользовавшись основной электромеханической аналогией (см. стр. 173—174), мы можем заменить эту механическую систему электрической, рассматривая колебательный контур (фиг. 69), составленный из линейного импеданса:



Фиг. 69.

$$z = mj\omega + \frac{k}{j\omega} \quad (583)$$

(состоящего из самоиндукции  $m$  и емкости  $\frac{1}{k}$ ), замкнутого через нелинейный орган  $O$  с характеристикой вида:

$$e = \varepsilon f(t, x, i) \quad (584)$$

где

$e$  — напряжение между концами нелинейного органа,

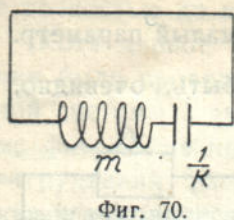
$$i = \frac{dx}{dt} \text{ — ток,}$$

$x$  — заряд на обкладках конденсатора.

Так как эта электрическая система, при достаточно малых значениях  $\varepsilon$ , очевидно, является квазигармонической, то для исследования колебаний мы попробуем применить метод эквивалентной линеаризации, сформулированный нами с достаточной общностью на стр. 237—239.

Прежде всего замечаем, что при  $\varepsilon = 0$  наша система вырождается в линейный колебательный контур (см. фиг. 70), состоящий из самоиндукции  $m$  и емкости  $\frac{1}{k}$ .

Таким образом, при  $\varepsilon = 0$  мы можем представить величины  $x, i$  в виде:



$$x = a \sin (\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = \frac{dx}{dt} = a \omega_0 \cos (\omega_0 t + \varphi) \quad (585)$$

где:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (586)$$

и где амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  — некоторые постоянные.

Рассматривая формулы (585) в случае  $\varepsilon$ , не равного нулю, но достаточно малого, как приближенные, подставим их в характеристику (584) нелинейного органа  $O$ . Получим:

$$e = \varepsilon f[t, a \sin (\omega_0 t + \varphi), a \omega_0 \cos (\omega_0 t + \varphi)] \quad (587)$$

Чтобы разложить величину  $e$  в ряд Фурье, заметим, что в виду полиномиального характера  $f_0, f_n^*, f_n^{**}$ , мы можем выражения

$$f_0(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi), f_n^*(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi), f_n^{**}(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi)$$

представить в форме конечных сумм Фурье:

$$f_0(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) = \sum_{k \geq 0}^{N'} [f_k(a) \cos k\psi + g_k(a) \sin k\psi]$$

$$f_n^*(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) = \sum_{k \geq 0}^{N'} [f_{n,k}^*(a) \cos k\psi + g_{n,k}^*(a) \sin k\psi] \quad (588)$$

$$f_n^{**}(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) = \sum_{k \geq 0}^{N'} [f_{n,k}^{**}(a) \cos k\psi + g_{n,k}^{**}(a) \sin k\psi]$$

Поэтому на основании (582) и (587) мы получаем:

$$e = \sum_{k=0}^{N'} [f_k(a) \cos k(\omega_0 t + \varphi) + g_k(a) \sin k(\omega_0 t + \varphi)] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N'} [g_{n,k}^*(a) + f_{n,k}^{**}(a)] \sin [(k\omega_0 + \lambda_n) t + k\varphi] +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N'} [f_{n,k}^*(a) - g_{n,k}^{**}(a)] \cos [(k\omega_0 + \lambda_n)t + k\varphi] + \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N'} [f_{n,k}^*(a) + g_{n,k}^{**}(a)] \cos [(k\omega_0 - \lambda_n)t + k\varphi] + \\
& + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^{N'} [g_{n,k}^*(a) - f_{n,k}^{**}(a)] \sin [(k\omega_0 - \lambda_n)t + k\varphi] \quad (589)
\end{aligned}$$

Рассмотрим сейчас нерезонансный случай, когда ни одна из комбинационных частот  $[k\omega_0 + \lambda_n]$ ,  $[k\omega_0 - \lambda_n]$  не равна (и не близка) частоте  $\omega_0$ :

$$[k\omega_0 + \lambda_n] \neq \omega_0, [k\omega_0 - \lambda_n] \neq \omega_0$$

В этом нерезонансном случае, как показывает только что полученная формула (589), единственной гармоникой напряжения  $e$ , обладающей частотой  $\omega_0$ , будет гармоника

$$e_1 = \varepsilon f_1(a) \cos(\omega_0 t + \varphi) + \varepsilon g_1(a) \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (590)$$

Воспользовавшись соотношениями (585), мы можем представить эту гармонику в виде:

$$e_1 = Z_e i$$

где

$$Z_e = \frac{\varepsilon}{\omega_0 a} [f_1(a) - g_1(a)j] \quad (591)$$

Таким образом, благодаря основному принципу метода эквивалентной линеаризации (обобщенный принцип гармонического баланса) мы можем заменить нелинейный элемент  $O$  эквивалентным линейным, с характеристикой вида:

$$e = Z_e i$$

Эквивалентная линейная система состоит, следовательно, из линейного импеданса  $m j\omega + \frac{k}{j\omega}$ , включенного последовательно с эквивалентным импедансом  $Z_e$ .

Характеристическое уравнение такой системы будет, очевидно:

$$z(p) = Z_e$$

т. е.

$$mp + \frac{k}{p} = \frac{\varepsilon}{\omega_0 a} [f_1(a) - jg_1(a)] \quad (592)$$

Тут

$$p = -\delta + j\omega \quad (593)$$

где  $\delta$  — декремент,  $\omega$  — частота эквивалентной линейной системы.

Подставляя (593) в уравнение (592), имеем:

$$(-\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2 = \frac{\varepsilon}{m\omega_0 a} [f_1(a) - jg_1(a)](-\delta + j\omega) \quad (594)$$

откуда, с точностью до величин второго порядка малости, получаем:

$$\delta = -\frac{\varepsilon}{2m\omega_0 a} f_1(a) \quad (595)$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2m\omega_0 a} g_1(a)$$

Внося найденные значения (595) в уравнения первого приближения:

$$\frac{da}{dt} = -\delta a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \omega_0$$

приводим их к виду:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2m\omega_0} f_1(a) \quad (596)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2m\omega_0 a} g_1(a)$$

или, что то же самое:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2m\omega_0} f_1(a) \quad (597)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2m\omega_0 a} g_1(a) = \omega(a),$$



где  $\phi$  — полная фаза колебания:

$$\phi = \omega_0 t + \varphi \quad (598)$$

Итак, в первом приближении

$$x = a \sin \phi \quad (599)$$

где  $a$  и  $\phi$  — решения уравнений (597).

Введем теперь в рассмотрение следующие величины:

$$\bar{\lambda} = -\frac{\varepsilon}{a \omega_0} f_1(a) = -\frac{\varepsilon}{a \omega_0 \pi} \int_0^{2\pi} f_0(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) \cos \psi d\psi \quad (600)$$

$$k_e^* = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_0(a \sin \psi, a \omega_0 \cos \psi) \sin \psi d\psi$$

Тогда, с точностью до величин второго порядка малости:

$$\omega^2 = \frac{k + k_e^*}{m} \quad (601)$$

и потому уравнения первого приближения могут быть представлены в виде:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\bar{\lambda}}{2m} a \quad (602)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega = \sqrt{\frac{k + k_e^*}{m}}$$

Продифференцируем выражение (599), принимая во внимание только что полученные соотношения (602). Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = a \omega \cos \phi - \frac{\bar{\lambda}}{2m} a \sin \phi$$

откуда:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \omega^2 \sin \phi - 2 \frac{\bar{\lambda}}{2m} a \omega \cos \phi - \frac{\bar{\lambda}}{2m} a^2 \frac{\partial \omega}{\partial a} \cos \phi +$$

$$+ \left( \frac{\bar{\lambda}}{2m} \right)^2 a^2 \sin \phi + \frac{\bar{\lambda}}{2m} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\bar{\lambda}}{2m} \right) a^2 \sin \phi$$

А потому, на основании (600), мы видим, что выражение первого приближения (599), с точностью до величин второго

порядка малости, удовлетворяет линейному однородному уравнению:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \bar{\lambda} \frac{dx}{dt} + (k + k_e^*)x = 0$$

Таким образом, для нелинейной колебательной системы, описываемой рассматривавшимся нами уравнением (581), эквивалентная линейная система может быть представлена как некоторая механическая колебательная система с массой  $m$ , коэффициентом трения  $\bar{\lambda}$  и коэффициентом упругости  $k + k_e^*$ .

Как показывают полученные выше формулы, в уравнении первого приближения (разумеется, в рассматриваемом нерезонансном случае) входит лишь свободный член  $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  разложения (582) возмущающей функции  $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ .

В частности, если в формуле (356) § 5 для эквивалентных коэффициентов трения и упругости, соответствующих случаю уравнения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (603)$$

не содержащего времени явно, подставить вместо  $f$  выражение  $f_0$ , то мы придем как раз к формулам (600) настоящего параграфа.

Заметим теперь, что на основании (582) имеем тождественно:

$$f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) d\tau$$

Следовательно, для получения уравнений первого приближения мы можем усреднить возмущающую силу по явно содержащемуся в ней времени.

Так как в рассматриваемом нерезонансном случае уравнения первого приближения имеют ту же форму, что и уравнения первого приближения для случая (603) не зависящей от времени силы, которые уже были нами подробно исследованы, то мы не будем здесь останавливаться на их изучении.

Укажем лишь несколько общих свойств первого приближения.



Амплитуда  $a$ , монотонно убывая или возрастая, приближается к стационарному значению.

Стационарные амплитуды  $\neq 0$  определяются из уравнения:

$$\bar{\lambda}(a) = 0$$

Если для корня  $a_0$  этого уравнения

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial a} > 0 \quad \left( \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial a} < 0 \right)$$

то соответствующие стационарные колебания устойчивы (неустойчивы).

Если

$$\bar{\lambda}(0) < 0$$

то имеет место самовозбуждение; если, наоборот,

$$\bar{\lambda}(0) > 0$$

то при достаточно малых начальных значениях амплитуды колебания затухают:

$$a(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

Возьмем в качестве примера обобщенное уравнение ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y - \varepsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dt} = E \sin \alpha t \quad (604)$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Чтобы привести это уравнение к виду (581), положим:

$$y = x + U \sin \alpha t \quad (605)$$

где  $U = \frac{E}{1 - \alpha^2}$ .

Тогда имеем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon [1 - (x + U \sin \alpha t)^2] \left[ \frac{dx}{dt} + U \alpha \cos \alpha t \right] \quad (606)$$

Для этого уравнения, очевидно:

$$m = 1, \quad k = 1, \quad f_0 \left( x, \frac{dx}{dt} \right) = \left( 1 - x^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) \frac{dx}{dt}$$

$$\bar{\lambda} = \varepsilon \left( 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2} \right)$$

и потому в первом приближении получаем:

$$x = a \sin(t + \varphi)$$

где  $\varphi = \text{const}$  и где

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{U^2}{2} \right) \quad (607)$$

Уравнение первого приближения (607) показывает, что при

$$U^2 < 2$$

система самовозбуждена и существует устойчивый стационарный режим колебаний, соответствующий амплитуде

$$a^2 = 4 - 2U^2$$

При

$$U^2 > 2$$

амплитуда  $a$  приближается к нулю с возрастанием  $t$ .

Построим теперь выражение улучшенного первого приближения. Для этого прежде всего заметим, что для получения уравнений первого приближения в формуле (589) для „напряжения“  $e$  мы учли лишь основную гармонику

$$\varepsilon [f_1(a) \cos(\omega_0 t + \varphi) + g_1(a) \sin(\omega_0 t + \varphi)]$$

пренебрегая всеми остальными.

На основании общего правила (см. стр. 238—239), нам нужно учесть влияние этих дополнительных гармоник напряжения, определив вынужденные колебания тока  $i$  в импедансе  $z = mj\omega + \frac{k}{j\omega}$ , считая при этом  $a$  и  $\varphi$  постоянными.

Но, если к концам импеданса  $z$  приложено напряжение

$$U \cos(\Omega t + \theta) \quad \text{или} \quad U \sin(\Omega t + \theta)$$

то вынужденное колебание тока будет:

$$\frac{U}{mj\omega - \frac{k}{j\omega}} \cos(\Omega t + \theta) = \frac{U\Omega}{m(\Omega^2 - \omega_0^2)} \sin(\Omega t + \theta)$$

или

$$\frac{U}{mj\omega + \frac{k}{j\omega}} \sin(\Omega t + \theta) = \frac{U\Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\Omega t + \theta)$$



Таким образом, благодаря (589), мы имеем следующее выражение для улучшенного первого приближения:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = i = & a \omega_0 \cos \psi + \varepsilon \sum_{q=2}^{N'} q \frac{[f_q(a) \sin q \psi - g_q(a) \cos q \psi]}{m \omega_0 (q^2 - 1)} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(q \omega_0 + \lambda_n) [f_{n,q}^*(a) - g_{n,q}^*(a)] \sin (q \psi + \lambda_n t)}{[(q \omega_0 + \lambda_n)^2 - \omega_0^2]} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(q \omega_0 - \lambda_n) (f_{n,q}^* + g_{n,q}^*) \sin (q \psi - \lambda_n t)}{(q \omega_0 - \lambda_n)^2 - \omega_0^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(q \omega_0 + \lambda_n) (f_{n,q}^* + g_{n,q}^*) \cos (q \psi + \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 + \lambda_n)^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} (q \omega_0 + \lambda_n) \frac{(g_{n,q}^* - f_{n,q}^*) \cos (q \psi - \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 - \lambda_n)^2} \quad (608)
 \end{aligned}$$

Аналогично для  $x$  получим:

$$\begin{aligned}
 x = & a \sin \psi + \frac{\varepsilon f_0}{k} + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{q=2}^{N'} \frac{f_q \cos q \psi + g_q \sin q \psi}{(1 - q^2) \omega_0^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(f_{n,q}^* - g_{n,q}^*) \cos (q \psi + \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 + \lambda_n)^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(f_{n,q}^* + g_{n,q}^*) \cos (q \psi - \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 - \lambda_n)^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(f_{n,q}^* + g_{n,q}^*) \sin (q \psi + \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 + \lambda_n)^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2m} \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{N'} \frac{(g_{n,q}^* - f_{n,q}^*) \sin (q \psi - \lambda_n t)}{\omega_0^2 - (q \omega_0 - \lambda_n)^2} \quad (609)
 \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее,

$$\psi = \omega_0 t + \varphi \quad (610)$$

причем входящие сюда величины  $a$  и  $\varphi$  являются решениями уравнений первого приближения (597).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выражение (609) удовлетворяет основному дифференциальному уравнению (581) с точностью до величин второго порядка малости.

Таким образом мы видим, что метод эквивалентной линеаризации оказывается применимым также и в том случае, когда колебательная система не изолирована от внешних влияний и когда, следовательно, действующие в системе силы могут явно зависеть от времени.

Для колебательных систем, описываемых дифференциальным уравнением (581), метод эквивалентной линеаризации дал нам возможность получить (в нерезонансном случае) приближенное решение, удовлетворяющее этому уравнению с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Построение высших приближений в рассматриваемом нерезонансном случае может быть совершено по следующей схеме (ср. с ранее приведенными схемами для изолированных колебательных систем).

Полагаем в уравнении (581):

$$x = a \sin \psi + \varepsilon z_1(t, \psi, a) + \varepsilon^2 z_2(t, \psi, a) + \dots \quad (611)$$

Здесь  $z_k(t, \psi, a)$  являются выражениями вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1} \dots \sum_{k_l} \sum_q \mathfrak{A}_{k_1, \dots, k_l, q}(a) \cos [(k_1 \lambda_1 + \dots + k_l \lambda_l) t + q \psi] + \\ & + \sum_{k_1} \dots \sum_{k_l} \sum_q \mathfrak{B}_{k_1, \dots, k_l, q}(a) \sin [(k_1 \lambda_1 + \dots + k_l \lambda_l) t + q \psi] \end{aligned} \quad (612)$$

где  $k_1, \dots, k_l, q$  — некоторые числа, для которых<sup>1)</sup>:

$$(k_1 \lambda_1 + \dots + k_l \lambda_l)^2 + (q^2 - 1)^2 \neq 0$$

Возьмем в формуле (611) величины  $a$  и  $\psi$  так, чтобы:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon F_0(a) + \varepsilon^2 F_1(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon \Phi_0(a) + \varepsilon^2 \Phi_1(a) + \dots \end{aligned} \quad (613)$$

<sup>1)</sup> Иначе говоря, суммы (612) не должны заключать гармоник  $\sin \psi$  и  $\cos \psi$ .



Подставив (611) в уравнение (581) и приняв во внимание (613), а также то условие, чтобы  $z_k(t, \psi, a)$  были выражениями вида (612), мы получим систему соотношений, которая и даст нам возможность определить последовательно функции:

$$z_1(t, \psi, a), F_0(a), \Phi_0(a); z_2(t, \psi, a), F_1(a), \Phi_1(a), \dots$$

В частности не представляет затруднений убедиться, что если в уравнениях (613) отбросить члены, начиная с членов второго порядка малости, то получаются уравнения первого приближения (597). Если же отбросим члены порядка малости  $\varepsilon^2$  в формуле (611), то придем к выражению улучшенного приближения (609).

Только что изложенная схема непосредственно применяется (в нерезонансном случае) и к уравнению с более сложной зависимостью от  $\varepsilon$ , например:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f_0\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \varepsilon^2 f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) + \dots \quad (614)$$

если, разумеется, выражения  $f_k\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)_{(k=0,1,\dots)}$  будут функциями типа (582).

Возвратимся теперь к рассмотрению формулы (609) для улучшенного первого приближения и заметим прежде всего, что благодаря присутствию делителей вида:

$$\omega_0^2 - (q\omega_0 + \lambda_n)^2, \quad \omega_0 - (q\omega_0 - \lambda_n)^2$$

резонансы имеют место, когда по крайней мере один из этих делителей является достаточно малой величиной.

Так как в выражения высших приближений, кроме частот внешнего возбуждения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , входят, вообще говоря, также и комбинационные частоты  $k_1\lambda + \dots + k_n\lambda_n$  (где  $k_1, \dots, k_n$  — целые числа), то в этих выражениях будут присутствовать и соответствующие делители

$$\omega_2^2 - (q\omega_0 + k_1\lambda_1 + \dots + k_n\lambda_n)^2$$

Если один из этих делителей будет достаточно малым, рассматриваемая формула высшего приближения становится непригодной (малость  $\varepsilon$  нейтрализуется малостью делителя), и мы имеем случай резонанса.

Назовем резонанс, появляющийся лишь при  $n$ -ой степени  $\varepsilon$ , резонансом  $n$ -го порядка. При достаточно малых значениях  $\varepsilon$  (настолько малых, что пренебрежение членами второго порядка законно) можно, очевидно, ограничиться лишь рассмотрением резонансов первого порядка.

Рассмотрим формулу (609) в случае стационарных колебаний. Тогда:

$$a = \text{const}, \psi = \omega(a)t + \theta, \theta = \text{const}$$

Таким образом колеблющаяся величина  $x$  состоит из собственного колебания с частотой  $\omega(a)$  (представляемого членом  $a \sin[\omega(a)t + \theta]$ ), вынужденных колебаний с частотами  $\lambda_n$  (члены при  $q=0$ ) и комбинационных колебаний с частотами  $q\omega(a) \pm \lambda_n$ .

Как видно, интенсивность комбинационного колебания с частотой  $q\omega \pm \lambda_n$  усиливается по мере приближения к соответствующему резонансу, т. е. по мере уменьшения делителя

$$\omega_0^2 - (q\omega_0 \pm \lambda_n)^2$$

Возьмем частный случай, когда собственные колебания отсутствуют, т. е. когда  $a=0$ .

Замечаем, что при  $a=0$  имеем тождественно:

$$f_q = 0, g_q = 0; q = 1, 2, \dots$$

$$f_{n,q}^* = 0, f_{n,q}^{**} = 0, g_{n,q}^* = 0, g_{n,q}^{**} = 0; q = 1, 2, \dots$$

и потому формула (609) вырождается в следующую:

$$x = \frac{\varepsilon}{m} \sum_{n=0}^N \frac{A_n \cos \lambda_n t + B_n \sin \lambda_n t}{\omega_0^2 - \lambda_n^2} + \frac{\varepsilon}{k} f_0(0, 0) \quad (615)$$

где для сокращения положено:

$$A_n = f_n^*(0, 0), B_n = f_n^{**}(0, 0)$$

Мы видим, следовательно, что при  $a=0$  имеются лишь одни вынужденные колебания с частотами внешнего возбуждения  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ .

Поэтому данный случай может быть назван случаем чисто вынужденных колебаний. Режимы колебаний, соответствующие формуле (615), называются иногда гетеропериодическими, ибо в данном случае периоды всех гармоник колебания навязаны системе извне.



Рассматривая в качестве примера обобщенное уравнение ван-дер-Поля (604) — (606), мы, на основании ранее сказанного, видим, что при

$$\left(\frac{E}{1-\alpha^2}\right)^2 < 2 \quad (616)$$

гетеропериодический режим колебаний является неустойчивым и потому физически не возможным. Наоборот, при

$$\left(\frac{E}{1-\alpha^2}\right)^2 > 2$$

гетеропериодический режим будет единственным устойчивым стационарным режимом, и всякое колебание приближается с течением времени к гетеропериодическому.

Из уравнения (602) мы видим, что, если для не зависящей явно от времени слагающей  $\varepsilon f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  возмущающей функции  $\varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  эквивалентный коэффициент затухания положителен:

$$\bar{\lambda}(a) > 0$$

то

$$a(t) \rightarrow 0$$

и потому в этом случае всякое колебание приближается к гетеропериодическому, так что гетеропериодический режим будет единственно возможным стационарным режимом.

Рассмотрим в виде примера уравнение

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + \lambda \frac{dy}{dt} + ky + \delta y^2 = E_1 \sin \alpha_1 t + E_2 \sin(\alpha_2 t + \gamma) \quad (617)$$

рассматриваемое в акустике при изучении проблемы комбинационных токов (см. § 1).

В этом уравнении:

$$m > 0, \lambda > 0, k > 0$$

причем величины  $\lambda$  и  $\delta$  являются весьма малыми<sup>1)</sup>. Поэтому, вводя параметр  $\varepsilon$ , полагаем

$$\lambda = \varepsilon \lambda^*, \delta = \varepsilon \delta^* \quad (618)$$

<sup>1)</sup> Точнее, численно весьма малыми являются величины

$$\frac{\delta y}{k} \text{ и } \frac{\lambda \omega_0}{k}$$

Чтобы привести (617) к виду уравнения (581), совершим замену неизвестной:

$$y = x + \frac{E_1 \sin \alpha_1 t}{m(\omega_2^2 - \alpha_1^2)} + \frac{E_2 \sin(\alpha_2 t + \gamma)}{m(\omega_0^2 - \alpha_2^2)} \quad (619)$$

Тогда получим:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon \left\{ -\lambda^* \frac{dx}{dt} - \frac{\lambda^* E_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 t}{m(\omega_0^2 - \alpha_1^2)} - \frac{\lambda^* E_2 \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \gamma)}{m(\omega_0^2 - \alpha_2^2)} - \delta^* \left[ x + \frac{E_1 \sin \alpha_1 t}{m(\omega_0^2 - \alpha_1^2)} + \frac{E_2 \sin(\alpha_2 t + \gamma)}{m(\omega_0^2 - \alpha_2^2)} \right]^2 \right\} \quad (620)$$

Нетрудно заметить, что в данном случае

$$\bar{\lambda} = \varepsilon \lambda^* = \lambda > 0$$

так что всякое колебание приближается к гетеропериодическому.

В соответствии с общей формулой (615) имеем следующее выражение для этого гетеропериодического колебания:

$$x = -\frac{\varepsilon \lambda^* E_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 t}{m^2 (\omega_0^2 - \alpha_1^2)^2} - \frac{\varepsilon \lambda^* E_2 \alpha_2 \cos(\alpha_2 t + \gamma)}{m^2 (\omega_0^2 - \alpha_2^2)^2} - \frac{\varepsilon \delta^* E_1^2}{2k [m(\omega_0^2 - \alpha_1^2)]^2} - \frac{\varepsilon \delta^* E_2^2}{2k [m(\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2} + \frac{\varepsilon \delta^* E_1^2 \cos 2\alpha_1 t}{2[m(\omega_0^2 - \alpha_1^2)]^2 m(\omega_0^2 - 4\alpha_1^2)} + \frac{\varepsilon \delta^* E_2^2 \cos 2(\alpha_2 t + \gamma)}{2[m(\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2 m(\omega_0^2 - 4\alpha_2^2)} - \frac{\varepsilon \delta^* E_1 E_2 \cos[(\alpha_2 - \alpha_1)t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2)(\omega_0^2 - \alpha_2^2)[\omega_0^2 - (\alpha_2 - \alpha_1)^2]} + \frac{\varepsilon \delta^* E_1 E_2 \cos[(\alpha_2 + \alpha_1)t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2)(\omega_0^2 - \alpha_2^2)[\omega_0^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)^2]} \quad (621)$$

В рассматриваемых в акустике случаях в виду малости коэффициента затухания пренебрегают его влиянием на форму гетеропериодического колебания.



Полагая поэтому в полученной формуле (621)

$$\lambda^* = 0$$

находим [см. формулу (618)]:

$$\begin{aligned}
 x = & -\frac{\delta E_1^2}{2k [m (\omega_0^2 - \alpha_1^2)]} - \frac{\delta E_2^2}{2k [m (\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2} + \\
 & + \frac{\delta E_1^2 \cos 2\alpha_1 t}{2m [m (\omega_0^2 - \alpha_1^2)]^2 (\omega_0^2 - 4\alpha_1^2)} + \frac{\delta E_2^2 \cos 2(\alpha_2 t + \gamma)}{2m [m (\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2 (\omega_0^2 - 4\alpha_2^2)} - \\
 & - \frac{\delta E_1 E_2 \cos [(\alpha_2 - \alpha_1) t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2) (\omega_0^2 - \alpha_2^2) [\omega_0^2 - (\alpha_2 - \alpha_1)^2]} + \\
 & + \frac{\delta E_1 E_2 \cos [(\alpha_2 + \alpha_1) t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2) (\omega_0^2 - \alpha_2^2) [\omega_0^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)^2]}
 \end{aligned}$$

что окончательно дает:

$$\begin{aligned}
 y = & \frac{E_1 \sin \alpha_1 t}{m (\omega_0^2 - \alpha_1^2)} + \frac{E_2 \sin (\alpha_2 t + \gamma)}{m (\omega_0^2 - \alpha_2^2)} + \\
 & + \frac{\delta E_1^2 \cos 2\alpha_1 t}{2m [m (\omega_0^2 - \alpha_1^2)]^2 (\omega_0^2 - 4\alpha_1^2)} + \\
 & + \frac{\delta E_2^2 \cos 2(\alpha_2 t + \gamma)}{2m [m (\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2 (\omega_0^2 - 4\alpha_2^2)} - \\
 & - \frac{\delta E_1 E_2 \cos [(\alpha_2 - \alpha_1) t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2) (\omega_0^2 - \alpha_2^2) [\omega_0^2 - (\alpha_2 - \alpha_1)^2]} + \\
 & + \frac{\delta E_1 E_2 \cos [(\alpha_2 + \alpha_1) t + \gamma]}{m^3 (\omega_0^2 - \alpha_1^2) (\omega_0^2 - \alpha_2^2) [\omega_0^2 - (\alpha_2 + \alpha_1)^2]} - \\
 & - \frac{\delta E_1^2}{2k [m (\omega_0^2 - \alpha_1^2)]^2} - \frac{\delta E_2^2}{2k [m (\omega_0^2 - \alpha_2^2)]^2}
 \end{aligned} \tag{622}$$

Мы видим отсюда, что при воздействии внешней силы, состоящей из нескольких гармоник, на слабозатухающую квазигармоническую систему вынужденные колебания совершаются не только с частотами гармоник внешней силы (в данном случае с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ), но и с комбинационными тонами, построенными из этих частот (в данном случае  $2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1$  и 0).

Обратим теперь наше внимание на то, что мы предполагали, что возмущающая функция  $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  в дифференциальном

уравнении (581) может быть представлена в виде конечной суммы (582):

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=0}^N \left[ f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cos \lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \sin \lambda_n t \right]$$

где  $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторые полиномы<sup>1)</sup>.

по отношению к  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ . Если бы мы сделали более общее допущение, а именно, что возмущающая функция может быть представлена в виде равномерного сходящегося ряда:

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cos \lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \sin \lambda_n t \right] \quad (623)$$

где  $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ ,  $f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторые произвольные, более или менее регулярные функции  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ , то в формулу улучшенного первого приближения вместо конечных двойных сумм (609) вошли бы двойные бесконечные ряды. Благодаря отсутствию делителей вида:

$$\omega_0^2 - (q \omega_0 \pm \lambda_n)^2$$

ряды эти, вообще говоря, являются расходящимися.

Пусть, например, возмущающая функция обладает по отношению к  $t$  некоторым периодом  $T$ . Тогда, очевидно, можем положить:

$$\lambda_0 = \alpha, \lambda_1 = 2\alpha, \lambda_2 = 3\alpha, \dots$$

<sup>1)</sup> Аналогичные, по существу, допущения делались и в предыдущих параграфах.



где  $\alpha = \frac{2\pi}{T}$ , и потому в этом случае в формуле улучшенного первого приближения мы будем иметь дело с рядами вида:

$$\sum_n \sum_q \frac{[\mathfrak{A}_{n,q} \cos(n\alpha t + q\psi) + \mathfrak{B}_{n,q} \sin(n\alpha t + q\psi)]}{\omega_0^2 - (q\omega_0 + n\alpha)^2} \quad (624)$$

где  $n$ ,  $q$  могут принимать как положительные, так и отрицательные целые значения. Рассматривая аналогично построенные разложения, Пуанкаре показал, что в общем случае<sup>1)</sup> при фиксированных  $\mathfrak{A}_{n,q}$ ,  $\mathfrak{B}_{n,q}$  точки расходимости по отношению к  $\alpha$  (т. е. значения  $\alpha$ , при которых ряд расходится) образуют повсюду плотное множество.

Каково бы ни было значение (вещественное, разумеется)  $\alpha$ , всегда можно найти сколь угодно близкое к нему значение  $\alpha_0$ , для которого ряд (624) расходится.

В виду этого, если при исследовании некоторой колебательной системы возмущающая функция является бесконечной суммой типа (623), целесообразно высшие слагаемые этой суммы, вследствие их малости, относить к высшим степеням  $\varepsilon$  и писать уравнение (581) в виде (614):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = \varepsilon f_0 \left( t, x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon^2 f_1 \left( t, x, \frac{dx}{dt} \right) + \dots$$

где  $f_0, f_1, \dots$  являются уже конечными суммами типа (582).

До сих пор мы рассматривали влияние внешнего возбуждения на колебательные системы с одной степенью свободы, описываемые одним дифференциальным уравнением второго порядка.

Применяя эквивалентную линеаризацию, мы предварительно привели данную колебательную систему к некоторой схеме, состоящей из линейного импеданса  $z$  и нелинейного элемента  $O$ .

Совершенно аналогично, пользуясь ранее изложенными методами, мы можем трактовать также и колебательные системы более сложной структуры, притом независимо от предварительного составления основных дифференциальных уравнений.

Возьмем в качестве примера электронный генератор томсоновского типа (т. е. представляющий квазигармоническую

<sup>1)</sup> Возможны, конечно, и исключения, — например, если  $\mathfrak{A}_{n,q}, \mathfrak{B}_{n,q}$  — все нули, начиная с некоторого значения ( $n$  или  $q$ ).

систему), на который действует внешнее моногармоническое возбуждение некоторой частоты  $\alpha$ .

Характеристика лампы может быть тогда представлена в виде:

$$i_a = f(E_0 + F \cos \alpha t + e) \quad (625)$$

где

$i_a$  — анодный ток,

$E = E_0 + F \cos \alpha t + e$  — полное управляющее напряжение,

$E_0$  — его постоянная слагающая,

$F \cos \alpha t$  — слагающая, вызываемая внешним возбуждением,

$e$  — слагающая управляющего напряжения, происходящая от собственных колебаний в контуре генератора.

Пусть этот линейный контур обладает одной собственной частотой  $\omega_0$ . В таком случае в первом приближении имеем для анодного тока следующее выражение:

$$i_a = f[E_0 + F \cos \alpha t + a \cos(\omega_0 t + \varphi)] \quad (626)$$

где  $a$  — амплитуда,  $\varphi$  — фаза напряжения  $e$ .

Чтобы получить эквивалентную систему, заменим нелинейный элемент — лампу — линейным с характеристикой вида:

$$i_a = S e \quad (627)$$

Согласно принципу гармонического баланса параметр  $S$  в соотношении (627) должен быть выбран так, чтобы основная гармоника выражения (626), т. е. гармоника с частотой  $\omega_0$ , была равна гармонике

$$S a \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Следовательно, в нерезонансном случае мы имеем:

$$S = \frac{1}{2a\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + F \cos \tau_1 + a \cos \tau_2) \cos \tau_2 dt_1 dt_2 \quad (628)$$

Но, как мы уже видели раньше, для частоты  $\omega$  и декремента  $\delta$  эквивалентной линейной системы, в которой к линейному контуру электронного генератора вместо лампы присоединен линейный элемент с характеристикой вида:

$$i_a = S e$$



имеем:

$$j\omega - \delta = j\omega_0 - \delta_0 \left(1 - \frac{S}{S_{cr}}\right) \quad (629)$$

где  $\delta_0$  — декремент затухания линейного контура, соответствующий частоте  $\omega_0$ , а  $S_{cr}$  — критическое значение (для самовозбуждения) „средней крутизны“  $S$ .

Таким образом в рассматриваемом случае уравнения первого приближения будут:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_0 \left(1 - \frac{S}{S_{cr}}\right) a \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (630)$$

где параметр  $S$  — средняя крутизна — определяется как функция амплитуды колебаний  $a$  при помощи формулы (628).

Полученные уравнения первого приближения можно было бы получить также, исходя из составленного основного дифференциального уравнения электронного генератора.

Возьмем, например, электронный генератор, составленный по схеме фиг. 71,

для которого это основное дифференциальное уравнение будет:

$$LC \frac{d^2 e}{dt^2} + e + \left[ \frac{L}{R} \frac{de}{dt} - (M - DL) \frac{d}{dt} f(E_0 + F \cos at + e) \right] = 0$$

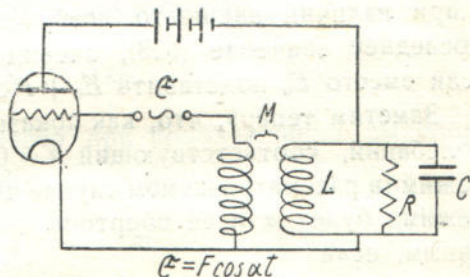
Положив:

$$-\frac{L}{R} (M - DL) \frac{d}{dt} f(E_0 + F \cos at + e) = \varepsilon f \left( t, e, \frac{de}{dt} \right)$$

и приведя, таким образом, уравнение (631) к виду уравнения (581), напишем для него ранее полученные уравнения первого приближения (596). После очевидных выкладок получаем:

$$\frac{da}{dt} = \frac{(M - DL)S - \frac{L}{R}}{2LC} a \quad (632)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$



Фиг. 71.

Но в рассматриваемом случае

$$\delta_0 = \frac{1}{2RC}, \quad S_{cr} = \frac{L}{R(M-DL)}$$

и потому уравнения (632) действительно могут быть представлены в виде (630).

Как видно, общие уравнения первого приближения (630) имеют ту же форму, что и при отсутствии внешнего возбуждения. Единственное отличие состоит в том, что при отсутствии внешнего возбуждения параметр  $S$  — средняя крутизна — выражается, как функция амплитуды  $a$  формулой вида:

$$S = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(E_0 + a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \quad (633)$$

а при наличии внешнего возбуждения — формулой (628). Это последнее значение (628), очевидно, можно получить из (633), если вместо  $E_0$  подставить  $E_0 + F \cos at$  и усреднить по  $t$ .

Заметим теперь, что, как показывает уравнение (630), режим колебаний, соответствующий  $a = 0$ , т. е. гетеропериодический режим (в рассматриваемом случае частота гетеропериодического режима будет  $\alpha$  и ее обертоны —  $2\alpha, 3\alpha, \dots$ ) является неустойчивым, если

$$S(0) > S_{cr} \quad (634)$$

или в более явной форме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos \tau) d\tau > S_{cr} \quad (634_1)$$

Полученное условие самовозбуждения собственных колебаний зависит от  $F$ . При  $F=0$ , т. е. при отсутствии внешнего возбуждения, имеем обычное условие:

$$f'(E_0) > S_{cr} \quad (635)$$

В зависимости от типа характеристики, т. е. от формы функции  $f(E)$ , может получиться, что условие (635) выполнено, а (634<sub>1</sub>) — нет. Тогда окажется, что генератор, являющийся самовозбужденным при отсутствии внешнего возбуждения, при наличии внешней силы  $F \cos at$  теряет самовозбуждение. В этом



случае говорят о нерезонансном, или асинхронном гашении. Разумеется, однако, что может представиться и противоположный случай асинхронного возбуждения.

### § 11. Случай резонанса при внешнем периодическом возбуждении

До сих пор мы рассматривали влияние внешних периодических сил на квазигармонические колебательные системы в нерезонансном случае.

Как мы имели уже возможность убедиться, резонансы в нелинейных системах весьма разнообразны. Вообще говоря, если данная квазигармоническая система обладает  $n$  линейными частотами:

$$\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_n^0$$

и если частоты внешнего возбуждения будут:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$$

то резонанс может иметь место при приближенном выполнении одного из равенств типа:

$$k_1\omega_1^0 + k_2\omega_2^0 + \dots + k_n\omega_n^0 + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \dots + m_q\lambda_q = 0$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_n; m_1, m_2, \dots, m_q$  — некоторые целые числа. Поэтому вообще исследование резонансных явлений быстро усложняется с увеличением числа частот.

Чтобы не загромождать настоящее изложение, мы ограничимся здесь рассмотрением простейшего случая, когда колебательная система обладает лишь одной собственной частотой и когда внешнее возбуждение чисто периодично, т. е. его частоты будут  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$

В этом случае надлежит рассматривать резонансы, соответствующие приближенному выполнению соотношений вида:

$$\omega_0 = \frac{r}{s} \alpha$$

где  $r$  и  $s$  — некоторые целые числа, которые, очевидно, можно предполагать взаимно простыми.

Для исследования этих резонансов, следуя нашему методу, мы будем полагать:

$$\omega_0 = \frac{r}{s} \alpha + \varepsilon \Omega \quad (636)$$

считая, следовательно, „расстройку“  $\omega_0 - \frac{r}{s} \alpha$  величиной первого порядка малости.

Чтобы остановиться на чем-нибудь определенном, возьмем в качестве примера только что рассмотренную выше квазигармоническую колебательную систему — электронный генератор с внешним возбуждением  $F \cos \alpha t$ .

Обозначая, как и раньше, через  $e$  слагающую управляющего напряжения, происходящую от собственных колебаний в контуре генератора, мы видим, что при  $\varepsilon = 0$  (т. е. в идеально линейном случае, при отсутствии затухания анодного тока и при  $\omega_0 = \frac{r}{s} \alpha$ ):

$$e = a \cos \left( \frac{r}{s} \alpha t + \psi \right) \quad (637)$$

Эту же формулу оставим в качестве первого приближения и в реальном случае при  $\varepsilon$ , не равном нулю, но достаточно малом.

Подставив (637) в характеристику лампы (625), имеем для анодного тока:

$$i_a = f \left[ E_0 + F \cos \alpha t + a \cos \left( \frac{r}{s} \alpha t + \psi \right) \right] \quad (638)$$

Чтобы образовать эквивалентную линейную систему, заменим нелинейный элемент — электронную лампу — некоторым линейным элементом с характеристикой вида:

$$i_a = S e \quad (639)$$

Согласно принципу гармонического баланса параметр  $S$  должен быть выбран так, чтобы основная гармоника выражения (638), т. е. в данном случае гармоника с частотой  $\frac{r}{s} \alpha \cong \omega_0$  (с частотой, ближайшей к собственной частоте контура), равнялась бы гармонике

$$S a \cos \left( \frac{r}{s} \alpha t + \psi \right) \quad (640)$$



Для этой основной гармоники имеем, очевидно, следующее выражение:

$$\frac{\alpha}{\pi S} \int_0^{\frac{2\pi S}{\alpha}} f \left[ E_0 + F \cos \alpha \tau + \right. \\ \left. + a \cos \left( \frac{r}{S} \alpha \tau + \varphi \right) \right] \left[ \cos \left( \frac{r}{S} \alpha \tau + \varphi \right) \left( \cos \frac{r}{S} \alpha t + \varphi \right) + \right. \\ \left. + \sin \left( \frac{r}{S} \alpha \tau + \varphi \right) \sin \left( \frac{r}{S} \alpha t + \varphi \right) \right] d\tau$$

или упрощая:

$$S_r a \cos \left( \frac{r}{S} \alpha \tau + \varphi \right) - S_i a \sin \left( \frac{r}{S} \alpha t + \varphi \right) \quad (641)$$

где

$$S_r = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f \left[ E_0 + F \cos \left( s\tau - \frac{S}{r} \varphi \right) + a \cos r\tau \right] \cos r\tau d\tau \quad (641_1)$$

$$S_i = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f \left[ E_0 + F \cos \left( s\tau - \frac{S}{r} \varphi \right) + a \cos r\tau \right] \sin r\tau d\tau$$

Выражение (641) для основной гармоники анодного тока мы можем представить также и в виде:

$$(S_r + jS_i) a \cos \left( \frac{r}{S} \alpha t + \varphi \right) \quad (642)$$

Приравнявая на основании принципа гармонического баланса гармоники (640) и (642) друг другу, имеем:

$$S = S_r + jS_i \quad (643)$$

Таким образом в рассматриваемом случае резонанса в отличие от нерезонансного случая параметр  $S$  является величиной комплексной и зависит не только от амплитуды  $a$ , но и от фазы  $\varphi$ .

Для определения частоты  $\omega$  и декремента  $\delta$  эквивалентной линейной системы подставим в формулу (629) найденное значение  $S$  из формулы (643).

Тогда, разделяя вещественные и мнимые части, получим:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \delta_0 \frac{S_i}{S_{cr}} \\ \delta &= \delta_0 \left( 1 - \frac{S_r}{S_{cr}} \right)\end{aligned}\quad (644)$$

Так как полная фаза собственного колебания в данном случае будет:

$$\psi = \frac{r}{s} \alpha t + \varphi$$

то уравнения первого приближения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\delta_0 \left( 1 - \frac{S_r}{S_{cr}} \right) a \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha + \delta_0 \frac{S_i}{S_{cr}}\end{aligned}\quad (645)$$

В отличие от нерезонансного случая переменные не разделены, и мы имеем два взаимно связанных уравнения для определения двух неизвестных  $a$  и  $\varphi$ .

Покажем сейчас, что при неограниченном возрастании  $r$  и  $S_i$  стремится к нулю, а  $S_r$  — к значению  $S$ , даваемому формулой (628).

В самом деле, рассмотрим разложение:

$$\begin{aligned}f(E_0 + F \cos \varphi_1 + a \cos \varphi_2) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} A_{n,m}(a) \cos(n\varphi_1 + m\varphi_2) + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} B_{n,m}(a) \cos(n\varphi_1 - m\varphi_2)\end{aligned}\quad (646)$$

и заметим, что в виду сделанного раньше допущения о полиномиальном характере функции  $f(E)$  входящие в эти разложения суммы конечны.

Из (646) имеем:

$$\begin{aligned}&f \left[ E_0 + F \cos \left( s\tau - \frac{s}{r} \varphi \right) + a \cos r\tau \right] = \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} A_{n,m}(a) \cos \left[ (ns + mr)\tau - \frac{ns}{r} \varphi \right] + \\ &+ \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} B_{n,m}(a) \cos \left[ (ns - mr)\tau - \frac{ns}{r} \varphi \right]\end{aligned}$$



Так как  $r$  и  $s$  взаимно простые, то равенство

$$ns - mr = \pm r; \text{ при } n \geq 1, m \geq 1$$

может иметь место лишь, если

$$n = qr, \quad m = qs \mp 1,$$

где

$$q = 1, 2, \dots$$

Поэтому на основании (641) получим:

$$\begin{aligned} a S_r &= A_{0,1}(a) + \sum_{q \geq 1} B_{qr, qs \mp 1}(a) \cos q\varphi \\ a S_i &= - \sum_{q \geq 1} B_{qr, qs \mp 1}(a) \sin q\varphi \end{aligned} \quad (647)$$

Однако по мере возрастания  $n$  и  $m$  коэффициенты

$$B_{n,m}$$

убывают. В виду конечности сумм (646) эти коэффициенты точно равны нулю для достаточно больших  $n$  и  $m$ .

Следовательно, при достаточно больших  $r$  и  $s$ :

$$B_{qr, qs \mp 1} = 0$$

и потому:

$$a S_e = A_{0,1}(a)$$

$$a S_i = 0$$

Но, как это вытекает из (646):

$$A_{0,1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + F \cos \tau_1 + a \cos \tau_2) \cos \tau_2 d\tau_1 d\tau_2$$

Итак, при достаточно больших  $r$  и  $s$ :

$$S_i = 0, \quad S = S_r = \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0 + F \cos \tau_1 + a \cos \tau_2) \cos \tau_2 d\tau_1 d\tau_2$$

и первое приближение в таком резонансном случае не отличается от нерезонансного.

Эффект резонанса сказывается, следовательно, вообще говоря, при небольших значениях чисел  $r$  и  $s$ .

Заметив это, возвратимся к рассмотрению уравнений первого приближения (645).

Так как правые части этих уравнений зависят и от  $a$  и от  $\varphi$ , то проинтегрировать их в замкнутом виде в общем случае не удастся. Качественный характер решений может быть, однако, исследован и в общем случае с помощью теории Пуанкаре, потому что здесь мы имеем дело с двумя уравнениями первого порядка.

Согласно основному результату этой теории, мы можем утверждать, например, что всякое решение <sup>1)</sup> уравнений (645) приближается с возрастанием времени или к постоянному решению

$$a = a_0, \quad \varphi = \varphi_0$$

где

$$\left[ 1 - \frac{S_r(a_0, \varphi_0)}{S_{cr}} \right] a_0 = 0, \quad \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha + \delta_0 \frac{S_i(a_0, \varphi_0)}{S_{cr}} = 0$$

или к периодическому.

Таким образом имеем два основных типа стационарных колебаний — колебания, соответствующие постоянному решению, или, как говорят, „точке равновесия“ уравнений (645), и колебания, соответствующие периодическому решению.

В первом случае колебание совершается с частотой, точно равной  $\frac{r}{s} \alpha$  и находящейся, следовательно, в простом рациональном соотношении с частотой возбуждения. Такой режим колебаний называется поэтому синхронным.

Если мы образуем выражение улучшенного первого приближения, то найдем, что в колебании, кроме основной частоты  $\frac{r}{s} \alpha$ , присутствуют, вообще говоря, и другие обертоны разделенной частоты  $\frac{\alpha}{s}$ . Заметим еще, что, если  $s \neq 1$ , то

$$S_i(0, \varphi) = 0; \quad S_r(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos \tau) d\tau$$

<sup>1)</sup> Здесь мы предполагаем, что для всякого решения величина  $a$  остается конечной и не увеличивается безгранично. Нетрудно заметить, что с физической точки зрения это ограничение должно всегда выполняться, ибо амплитуда колебаний в электронном генераторе не может неограниченно „раскачиваться“.



и потому в этом случае всегда существует постоянное решение типа:

$$a = 0$$

соответствующее отсутствию собственных колебаний. Выражение улучшенного первого приближения в данном случае будет то же, что и в нерезонансном случае, и представляет гетеропериодический режим колебаний.

Если теперь мы рассмотрим случай периодического решения уравнений (645), то заметим, что соответствующее колебание будет совершаться с двумя основными частотами — с частотой  $\omega$  или  $\frac{r}{s} \alpha + \Delta\omega$  и частотой биений  $\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  ( $T$  — период данного периодического решения). Такие колебания называются поэтому асинхронными.

Чтобы яснее представить себе характер синхронного и асинхронного режимов, возьмем пример, когда  $f(E_0 + u)$  есть кубический полином:

$$f(E_0 + u) = f(E_0) + S_0 u + S_1 u^2 - S_2 u^3$$

в котором

$$S_2 > 0$$

и когда  $r = 1$ ,  $s = 2$ , т. е., когда

$$\omega_0 \cong \frac{\alpha}{2}$$

В этом случае имеем:

$$S_r = S_0 - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\varphi - \frac{3}{4} S_2 a^2$$

$$S_i = -\frac{1}{2} S_1 F \sin 2\varphi$$

и потому уравнения первого приближения дадут:

$$\frac{da}{dt} = \delta_0 \frac{S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\varphi}{S_{cr}} a - \frac{\delta_0 \cdot 3 S_2}{4 S_{cr}} a^3 \quad (618)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta_0 S_1}{2 S_{cr}} F \sin 2\varphi$$

Так как во второе из полученных уравнений входит лишь одна неизвестная фаза  $\varphi$ , то его, очевидно, можно проинтегрировать с помощью простой квадратуры.

Не останавливаясь на этом, разберем два случая:

$$\left| \omega_0 - \frac{\alpha}{2} \right| < \left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2 S_{cr}} \right| \quad (I)$$

и

$$\left| \omega_0 - \frac{\alpha}{2} \right| > \left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2 S_{cr}} \right| \quad (II)$$

В первом случае мы видим, что

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi_0 \quad (649)$$

$t \rightarrow \infty$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left( 2 \frac{\omega_0 - \frac{\alpha}{2}}{\delta_0 S_1 F} \right) S_{cr} \quad (650)$$

причем постоянная арксинуса выбирается так, чтобы

$$\frac{\delta_0 S_1 F}{S_{cr}} \cos 2\varphi_0 > 0 \quad (651)$$

Рассматривая теперь первое из уравнений (648), мы видим, что благодаря (649) мы имеем также

$$a(t) \rightarrow a_0 \quad (652)$$

$t \rightarrow \infty$

где

$$\left( S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\varphi_0 \right) a_0 - \frac{3}{4} S_2 a_0^3 = 0 \quad (653)$$

Если

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \cos 2\varphi_0 < 0 \quad (654)$$

то, очевидно,

$$a_0 = 0 \quad (655)$$

Итак, при выполнении условий (I), (654) в рассматриваемой колебательной системе устанавливается гетеропериодический режим — единственно возможный в данном случае стационарный режим.



Если же, наоборот:

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_3 F \cos 2\varphi_0 > 0 \quad (656)$$

то нетрудно заметить, что решение (655) неустойчиво, и в системе имеется самовозбуждение.

Поэтому в уравнении (654) мы должны взять корень:

$$a_0 = \sqrt{\frac{4}{3S_2} \left[ \left( S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 \right) + \frac{1}{2} S_3 F \cos 2\varphi_0 \right]}$$

являющийся устойчивым.

Таким образом, при условиях (I), (656) в нашей системе устанавливается синхронный режим и в первом приближении:

$$x = a_0 \cos \left( \frac{\alpha}{2} t + \varphi_0 \right)$$

Следовательно, мы имеем колебания с постоянной амплитудой и фазой и с частотой, равной половине частоты возбуждения.

Как показывает условие (I), расстройка резонанса  $\left| \omega_0 - \frac{\alpha}{2} \right|$  не должна при этом превосходить некоторой величины, так что условие это всегда выполняется в достаточной близости к резонансу, т. е. при достаточно малых значениях расстройки.

Пусть теперь система находится, наоборот, „вдали“ от резонанса, так что выполненным является условие (II). Тогда, проинтегрировав второе из уравнений (648), мы можем представить  $\varphi$  в виде:

$$\varphi = \Delta\omega t + \theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta) \quad (657)$$

где  $\theta$  — произвольная постоянная [ $\Phi(\theta)$  — периодическая функция  $\theta$  с периодом  $2\pi$ ] и где:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left( \omega - \frac{\alpha}{2} \right) - \left| \frac{\partial_0 S_1 F}{2S_{cr}} \right| \sin 2\varphi} \quad (658)$$

В частности, если расстройка  $\left| \omega_0 - \frac{\alpha}{2} \right|$  велика по сравнению с  $\left| \frac{\delta_0 S_1 F}{2 S_{cr}} \right|$ , то мы приближенно имеем:

$$\varphi = \Delta\omega t + \theta + \frac{\delta_0 S_1}{4\Delta\omega S_{cr}} \cos(\Delta\omega t + \theta) \quad (659)$$

$$\Delta\omega = \omega_0 - \frac{\alpha}{2}$$

Внося значение  $\varphi$  из формулы (657) в правую часть первого из уравнений (648), получим для определения  $a$  одно уравнение первого порядка с периодическими коэффициентами.

Прежде всего замечаем, что это уравнение допускает тривиальное решение:

$$a = 0$$

соответствующее гетеропериодическому режиму. Поставим вопрос об его устойчивости. Вопрос этот, очевидно, решается в зависимости от знака выражения:

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 + \frac{1}{2} S_1 F \overline{\cos 2\varphi} \quad (660)$$

где  $\overline{\cos 2\varphi}$  означает усредненное значение  $\cos 2\varphi$  по периоду  $T$ :

$$\overline{\cos 2\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\varphi dt$$

Благодаря второму из уравнений (648), имеем, очевидно:

$$\int_0^T \cos 2\varphi dt = \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{\omega_0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta_0 S_1}{2S_{cr}} F \sin 2\varphi} d\varphi = 0$$

так что тождественно:

$$\overline{\cos 2\varphi} = 0$$

и поэтому выражение (660) может быть представлено в виде:

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 \quad (661)$$



Если знак (661) отрицателен, самовозбуждение отсутствует, и гетеропериодический режим  $a=0$  устойчив; если же этот знак положителен, имеют место самовозбуждение и неустойчивость гетеропериодического режима.

Нетрудно заметить, что полученное условие самовозбуждения

$$S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2 > 0 \quad (662)$$

то же, что и в нерезонансном случае [формула (634)].

При выполнении условия самовозбуждения можно показать, что

$$a(t) - A[(\Delta\omega t + \theta)] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

где  $A(\Delta\omega t + \theta)$  — соответствующее периодическое решение с периодом  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ .

В частности при достаточно больших значениях расстройки имеем приближенно:

$$A(\theta) \cong a_0 \quad (663)$$

где

$$a_0^2 = \frac{4}{3S_2} (S_0 - S_{cr} - \frac{3}{2} S_2 F^2)$$

Итак, в случае (II) при выполнении условия самовозбуждения устанавливается стационарный двухчастотный режим. В первом приближении для стационарных колебаний получаем:

$$x = A(\Delta\omega t + \theta) \cos \left[ \left( \frac{\alpha}{2} + \Delta\omega \right) t + \theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta) \right]$$

Основная частота колебаний, как видно, будет:

$$\frac{\alpha}{2} + \Delta\omega$$

амплитуда же

$$a = A(\Delta\omega t + \theta)$$

и фаза

$$\theta + \Phi(\Delta\omega t + \theta)$$

колеблются с частотой биений  $\Delta\omega$ .

На основании формул (659) и (663) нетрудно заметить, что при удалении от резонанса колебание (664) приближается к нерезонансному типу:

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$$

На рассмотренном простом примере мы обнаружили, что при отдалении от резонанса, т. е. при увеличении расстройки, формулы резонансного случая постепенно переходят в соответствующие формулы — нерезонансного.

Этот факт, очевидно, имеет место и в самом общем случае. Исследуя общие уравнения первого приближения (645), можно показать, что при увеличении расстройки  $\left(\omega_0 - \frac{r}{s} \alpha\right)$  „резонансное первое приближение“ непрерывно переходит в „нерезонансное“.

Как мы уже видели, при  $s \neq 1$  уравнения (645) допускают тривиальное решение  $a = 0$ , соответствующее гетеропериодическому режиму. Найдем теперь (для  $s \neq 1$ ) условие самовозбуждения, т. е. условие неустойчивости этого решения.

Для этого найдем из формул (641<sub>1</sub>) асимптотические значения для  $S_r, S_i$  при весьма малых  $\alpha$ .

Отбрасывая члены порядка малости  $\alpha$ , имеем, очевидно:

$$S_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f' \left[ E_0 + F \cos \left( s\tau - \frac{s}{r} \varphi \right) \right] \cos^2 r\tau d\tau \quad (665)$$

$$S_i = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f' \left[ E_0 + F \cos \left( s\tau - \frac{s}{r} \varphi \right) \right] \sin 2r\tau d\tau$$

Положим для сокращения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f' (E_0 + F \cos \tau) d\tau = L_0 \quad (666)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f' (E_0 + F \cos s\tau) \cos 2r\tau d\tau = L_1$$

Тогда из (665) получим:

$$S_r = L_0 + L_1 \cos 2\varphi$$

$$S_i = -L_1 \sin 2\varphi$$



Подставив эти значения в уравнения (645), имеем следующую систему уравнений, годную для достаточно малых  $a$ :

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) a + \frac{\delta_0 L_1}{S_{cr}} a \cos 2\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) - \frac{\delta_0 L_1}{S_{cr}} a \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (667)$$

Характер решений этих уравнений (667) и решает поставленный вопрос о самовозбуждении.

Если  $a(t) \rightarrow 0$ , то решение  $a=0$  устойчиво и самовозбуждения нет; если же, наоборот,  $a(t)$  возрастает неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ , то решение это неустойчиво, и мы имеем самовозбуждение.

Для исследования характера решений уравнений (667) введем новые переменные:

$$u = a \cos \varphi$$

$$v = a \sin \varphi$$

Дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{da}{dt} \cos \varphi - \frac{d\varphi}{dt} a \sin \varphi = \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) a \cos \varphi + \\ &+ \frac{\delta_0 L_1}{S_{cr}} a (\cos \varphi \cos 2\varphi + \sin \varphi \sin 2\varphi) - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) a \sin \varphi = \\ &= \delta_0 \left( \frac{L_0 + L_1}{S_{cr}} - 1 \right) u - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) v\end{aligned}$$

и аналогично:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{da}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} a \cos \varphi = \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) a \sin \varphi + \\ &+ \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) a \cos \varphi + \frac{\delta_0 L_1}{S_{cr}} a (\sin \varphi \cos 2\varphi - \cos \varphi \sin 2\varphi) = \\ &= \delta_0 \left( \frac{L_0 - L_1}{S_{cr}} - 1 \right) v + \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) u\end{aligned}$$

Итак, относительно переменных  $u$ ,  $v$  имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \delta_0 \left( \frac{L_0 + L_1}{S_{cr}} - 1 \right) u - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) v \\ \frac{dv}{dt} &= \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) u + \delta_0 \left( \frac{L_0 - L_1}{S_{cr}} - 1 \right) v \end{aligned} \quad (668)$$

Так как

$$a^2 = u^2 + v^2$$

то, на основании ранее сказанного, мы замечаем, что если вещественные части корней характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -p + \delta_0 \left( \frac{L_0 + L_1}{S_{cr}} - 1 \right) & - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) \\ \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right) & -p + \delta_0 \left( \frac{L_0 - L_1}{S_{cr}} - 1 \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (669)$$

соответствующего системе (668), все отрицательны, решение  $a = 0$  устойчиво и самовозбуждение отсутствует. Наоборот, если хотя бы у одного корня (669) вещественная часть положительна, то имеется самовозбуждение.

Раскрывая характеристическое уравнение (669), получаем:

$$\left[ -p + \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) \right]^2 - \left( \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right)^2 + \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right)^2 = 0$$

откуда:

$$-p + \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) = \sqrt{\left( \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right)^2 - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right)^2}$$

т. е.

$$p = \delta_0 \left( \frac{L_0}{S_{cr}} - 1 \right) \pm \sqrt{\left( \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right)^2 - \left( \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right)^2} \quad (670)$$

Рассмотрим два случая:

$$\left| \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right| \geq \left| \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right|$$

$$\left| \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right| < \left| \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right|$$



или в раскрытой форме [см. формулу (666)]:

$$\left| \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right| \geq \frac{\delta_0}{2\pi S_{cr}} \left| \int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos s\tau) \cos 2r\tau d\tau \right| \quad (671)$$

$$\left| \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha \right| < \frac{\delta_0}{2\pi S_{cr}} \left| \int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos s\tau) \cos 2r\tau d\tau \right| \quad (672)$$

В случае (671), как показывает формула (670), условие самовозбуждения будет:

$$L_0 > S_{cr} \quad (673)$$

т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos \tau) d\tau > S_{cr} \quad (673_1)$$

Итак, в случае (671) условие самовозбуждения (673<sub>1</sub>) будет то же, что и условие самовозбуждения (634<sub>1</sub>) для нерезонансного случая.

При выполнении неравенства (672) имеем, очевидно, условие самовозбуждения в следующей форме:

$$(L_0 - S_{cr})^2 + L_1^2 > \left( \frac{\omega_0 - \frac{r}{s} \alpha}{\delta_0} \right)^2 S_{cr}^2 \quad (674)$$

Как видно, неравенство (674) всегда удовлетворено, если удовлетворено неравенство (673). Кроме того, неравенство (674) может удовлетворяться и при невыполнении неравенства (673).

Мы можем поэтому утверждать, что нахождение частоты возбуждения  $\alpha$  в зоне

$$\frac{s}{r} \left( \omega_0 - \left| \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right| \right) < \alpha < \frac{s}{r} \left( \omega_0 + \left| \delta_0 \frac{L_1}{S_{cr}} \right| \right) \quad (675)$$

создает более благоприятные условия для самовозбуждения.

Эти зоны называют иногда зонами резонансного самовозбуждения. Для существования зоны резонансного самовозбуждения, очевидно, необходимо, чтобы

$$L_1 \neq 0$$

т. е. чтобы

$$\int_0^{2\pi} f'(E_0 + F \cos st) \cos 2r\tau d\tau \neq 0 \quad (676)$$

Это условие может быть выполнено лишь в том случае, когда  $2r$  делится на  $s$ , т. е. когда

$$\frac{r}{s} = \frac{k}{2}$$

где  $k$  целое.

Так как мы исключили из рассмотрения случаи, когда  $\frac{r}{s}$  целое, так как в этих случаях, вообще говоря, нет тривиального решения  $a=0$  уравнений первого приближения, то мы можем утверждать, что для существования зон резонанса необходимо, чтобы

$$\frac{r}{s} = \frac{2q+1}{2} \quad (677)$$

где  $q=0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим частный случай, когда амплитуда  $F$  внешнего возбуждения настолько мала, что можно принимать во внимание лишь первую степень  $F$ .

Тогда будем иметь:

$$L_1 = F \frac{f''(E_0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos st \cdot \cos 2r\tau d\tau$$

откуда:

$$L_1 = 0, \text{ если } s \neq 2r$$

$$L_1 = \frac{f''(E_0)F}{2}, \text{ если } s = 2r$$

Итак, при достаточно малых значениях амплитуды  $F$  внешнего возбуждения зона резонансного самовозбуждения может существовать лишь при „основном демумльтипликационном“ резонансе или, как его иногда называют, при „резонансе деления на два“, т. е. когда

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{2}; \quad \omega \cong \frac{\alpha}{2}$$

Благоприятность резонанса деления на два для самовозбуждения была отмечена еще лордом Релеем в его знаменитом

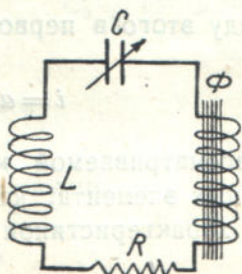


трактате о теории звука. В этом трактате „Theory of Sound“ лорд Релей обратил внимание на тот факт, что если в линейной колебательной слабозатухающей системе заставить колебаться некоторый параметр (напр., коэффициент упругости — емкость или массу — коэффициент самоиндукции) с частотой примерно в два раза большей, чем собственная частота рассматриваемой системы, то все происходит так, как если бы в эту систему было внесено отрицательное затухание.

Возьмем, например, обычный линейный слабозатухающий контур (фиг. 72). Заставляя колебаться  $L$  или  $C$  с частотой,



Фиг. 72.



Фиг. 73.

в два раза большей собственной частоты контура, мы можем достигнуть самовозбуждения, так что амплитуда собственных колебаний будет неограниченно возрастать.

На этом принципе построены некоторые электрические машины для генерации переменного тока при помощи такого синхронного возбуждения.

Чтобы ограничить сверху амплитуду собственных колебаний тока, необходимо присоединить к контуру нелинейный элемент, например, дополнительную катушку самоиндукции, содержащую железо.

Рассмотрим, таким образом, колебательную систему, составленную по схеме фиг. 73 и состоящую из обычной самоиндукции  $L$  катушки с характеристикой (магнитный поток — ток) вида:

$$\Phi = \Phi(i)$$

слабого омического сопротивления  $R$  и переменной емкости:

$$C = C_0(1 + \rho \sin \alpha t)$$

Чтобы рассматриваемая колебательная система была квазигармонической, мы берем обычную самоиндукцию  $L$  достаточно большой:

$$L(i) \gg \Phi(i)$$

по сравнению с „нелинейной самоиндукцией“ и коэффициент  $\rho$ , характеризующий „глубину изменения“ емкости, — достаточно малым. Кроме того принимаем, что система настроена на резонанс деления на два:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} \cong \frac{\alpha}{2}$$

В виду этого в первом приближении мы можем положить:

$$i = a \sin\left(\frac{\alpha}{2}t + \varphi\right) \quad (678)$$

В рассматриваемой колебательной системе имеется два<sup>1)</sup> нелинейных элемента: катушка с железным сердечником, обладающая характеристикой вида:

$$\Phi = \Phi(i) \quad (679)$$

и переменная емкость, для которой

$$e = -\frac{1}{C_0(1 + \rho \sin \alpha t)} \int idt \quad (680)$$

Как мы уже видели ранее (стр. 156), катушка с железным сердечником в случае колебаний приближенно синусоидальной формы может быть заменена линейным элементом

$$\Phi = L_m i$$

с эквивалентным коэффициентом самоиндукции

$$L_m = \frac{1}{a\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

<sup>1)</sup> К нелинейным элементам мы здесь относим не только элементы с характеристикой нелинейной в обычном смысле, но также и элементы с характеристикой хотя и линейной [напр., (680)], но заключающей явно зависящие от времени параметры. Вообще, когда мы говорим о линейных колебаниях, мы подразумеваем колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями с постоянными параметрами.



Заменим теперь соотношение (680) линейным

$$e = -\mathfrak{R}_m i$$

с постоянным параметром  $\mathfrak{R}_m$  (эквивалентный импеданс).

Для эффективного определения  $\mathfrak{R}_m$  мы должны, согласно принципу гармонического баланса, приравнять основную гармонику (в данном случае — гармонику частоты  $\frac{\alpha}{2} \cong \omega_0$ ) выражения

$$-\frac{1}{C_0(1+\rho \sin \alpha t)} \int a \sin \left( \frac{\alpha}{2} t + \varphi \right) dt = \frac{a \cos \left( \frac{\alpha}{2} t + \varphi \right)}{C_0 \frac{\alpha}{2} (1+\rho \sin \alpha t)}$$

гармонике

$$-\mathfrak{R}_m a \sin \left( \frac{\alpha}{2} t + \varphi \right)$$

Из этого условия обычным путем получим:

$$\mathfrak{R}_m = r_m + jx_m$$

где:

$$r_m = \frac{1}{\frac{\alpha}{\pi/2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta + \varphi) \cos(\theta + \varphi)}{C_0(1 + \rho \sin 2\theta)} d\theta \cong -\frac{\rho}{\alpha C_0} \cos 2\varphi$$

$$jx_m = \frac{1}{j\frac{\alpha}{\pi/2}} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\theta + \varphi)}{C_0(1 + \rho \sin 2\theta)} d\theta \cong \frac{1}{j\frac{\alpha}{2} C_0} \left( 1 - \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi \right)$$

Итак, переменная емкость [элемент с характеристикой (680)] может быть заменена эквивалентным импедансом  $\mathfrak{R}_m$ , состоящим из эквивалентного сопротивления  $r_m = -\frac{\rho}{\alpha C_0} \cos 2\varphi$ ,

и чисто мнимого импеданса  $jx_m = \frac{1}{j\frac{\alpha}{2} C_0} \left( 1 - \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi \right)$ , который

может быть рассматриваем, как происходящий от эквивалентной емкости

$$C_m = \frac{C_0}{1 - \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi} \cong C_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \rho \sin 2\varphi \right)$$

Мы видим, следовательно, что эквивалентную линейную систему в данном случае мы можем представить как колебательный контур, состоящий из последовательно включенных:

а) самоиндукции

$$L + L_m$$

б) сопротивления

$$R - \frac{\rho}{\alpha C_0} \cos 2\varphi$$

в) емкости

$$C_0 \left( 1 + \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi \right)$$

Частота  $\omega$  и декремент  $\delta$  эквивалентной линейной системы будут поэтому определяться из соотношений:

$$\delta = \frac{R - \frac{\rho}{\alpha C_0} \cos 2\varphi}{2(L + L_m)} \cong \frac{R}{2L} - \frac{\rho \omega_0}{4} \cos 2\varphi$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(L + L_m)C}} \cong \omega_0 \left[ 1 - \frac{L_m(a)}{2L} - \frac{\rho}{4} \sin 2\varphi \right]$$

откуда получаем уравнения первого приближения в виде:

$$\frac{da}{dt} = \left( \frac{\omega_0 \rho}{4} \cos 2\varphi - \frac{R}{2L} \right) a \quad (681)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left[ \omega_0 - \frac{L_m(a)}{2L} \omega_0 - \frac{\alpha}{2} \right] - \frac{\rho \omega_0}{4} \sin 2\varphi$$

Исходя из этих уравнений, мы и можем исследовать явление генерации переменного тока в рассматриваемой колебательной системе.

Образуем, например, условия самовозбуждения.

Заметим для этого, что уравнения (681) для малых колебаний дают:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{L_m(0)}{2L} \omega_0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\rho \omega_0}{4} \sin 2\varphi \quad (682)$$

$$a(t) = a(0) e^{\int_0^t \left( \frac{\omega_0 \rho}{4} \cos 2\varphi - \frac{R}{2L} \right) dt}$$



При помощи элементарного рассуждения можно отсюда установить, что условие самовозбуждения будет:

$$\left| 2 - \frac{L_m(0)}{L} - \frac{\alpha}{\omega_0} \right|^2 < \frac{\rho^2}{4} - \left( \frac{R}{L \omega_0} \right)^2$$

При выполнении этого неравенства, амплитуда  $a$  малых колебаний будет экспоненциально возрастать с увеличением  $t$ . Наоборот, если

$$\left| 2 - \frac{L_m(0)}{L} - \frac{\alpha}{\omega_0} \right|^2 > \frac{\rho^2}{4} - \left( \frac{R}{L \omega_0} \right)^2$$

то малые колебания будут затухать.

Уравнения (681) показывают, что при отсутствии катушки с железным сердечником, т. е. при  $L_m = 0$  уравнения (682) справедливы не только для малых колебаний, но и для больших, и потому в этом случае при выполнении условия самовозбуждения (683) амплитуда колебаний тока будет безгранично возрастать, что приведет с течением времени к пробое диэлектрика конденсатора.

Нелинейная самоиндукция (или какой-либо аналогичный нелинейный элемент) необходима, следовательно, для существования стационарных режимов.

Из уравнений (681) мы видим, что стационарные, не зависящие от времени значения, амплитуды и фазы определяются из соотношений:

$$\cos 2\varphi = 2 \frac{R}{L \omega_0 \rho} \quad (684)$$

$$\frac{L_m(a)}{L} = 2 - \frac{\alpha}{\omega_0} - \frac{\rho}{2} \sin 2\varphi$$

Условие устойчивости соответствующего стационарного режима будет, очевидно:

$$L'_m(a) \sin 2\varphi < 0 \quad (685)$$

В обычных случаях функция  $\Phi(i)$  имеет форму, схематически изображенную на фиг. 74, и мы можем поэтому положить:

$$L'_m(a) < 0, \quad L_m(\infty) = 0 \quad (686)$$

Тогда (685) дает следующее условие:

$$\sin 2\varphi > 0 \quad (687)$$

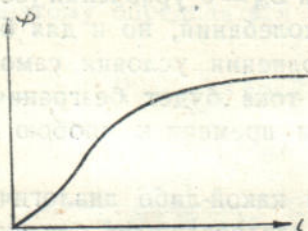
Из (686) и (687) вытекает, что уравнения (684) имеют решения, удовлетворяющие условию устойчивости, если

$$\frac{2R}{L\omega_0} > |\rho|$$

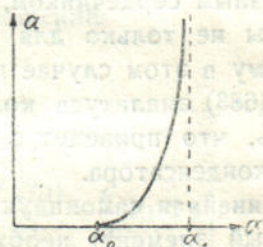
$$\sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \left(\frac{R}{L\omega_0}\right)^2} > 2 - \frac{L_m(0)}{L} - \frac{\alpha}{\omega_0} > \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \left(\frac{R}{L\omega_0}\right)^2} - \frac{L_m(0)}{L} \quad (688)$$

Если эти неравенства не выполнены, то устойчивые стационарные режимы с постоянными амплитудами и фазами невозможны.

Сравнивая (683) и (688), замечаем, что условие самовозбуждения не идентично с условиями существования устойчи-



Фиг. 74.



Фиг. 75.

вых стационарных режимов; возможны, например, стационарные режимы при отсутствии самовозбуждения; для их возникновения необходимо приложить к рассматриваемой колебательной системе достаточно сильный начальный импульс.

Рассмотрим теперь зависимость устойчивой стационарной амплитуды  $a$  от частоты возбуждения  $\alpha$ , т. е. так называемую кривую резонанса.

Заметим, что при

$$\alpha = \alpha_0 = \omega_0 \left[ 2 - \frac{L_m(0)}{L} - \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \left(\frac{R}{L\omega_0}\right)^2} \right]$$

амплитуда  $a$  равна нулю. Наоборот, при

$$\alpha = \alpha_1 = \omega_0 \left[ 2 - \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \left(\frac{R}{L\omega_0}\right)^2} \right]$$

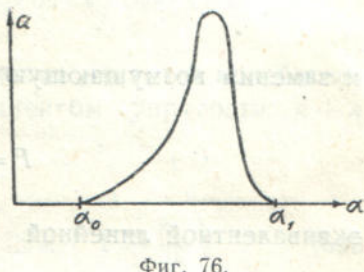
эта амплитуда бесконечно велика.

Поэтому кривая резонанса имеет форму типа фиг. 75.



Так как длина частотного интервала  $(\alpha_0, \alpha_1)$  равна  $\frac{L_m(0)}{L} \omega_0$ , то мы видим, что устойчивость генерации тока будет тем меньшей, чем меньше отношение  $\frac{L_m(0)}{L}$ , и наоборот. Это замечание, между прочим, также выявляет роль нелинейной самоиндукции для обеспечения регулярности генерации.

Рассматривая уравнения первого приближения (681), мы видим, что члены, происходящие от нелинейной самоиндукции, не входят непосредственно в выражение инкремента



Фиг. 76.

$\frac{da}{dt}$  амплитуды.

В данном случае эти нелинейные члены, воздействуют на амплитуду через посредство изменения фазы колебания.

Следует заметить между прочим, что, вводя в колебательный контур омические сопротивления, возрастающие вместе с амплитудой (напр., пропорциональные квадрату амплитуды), можно было бы непосредственно влиять на инкремент. В этих случаях кривая резонанса будет более регулярной, имея форму, аналогичную изображенной на фиг. 76.

Перейдем теперь к составлению уравнений первого приближения для колебательной системы, описываемой уравнением вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(\alpha t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (689)$$

в котором  $f\left(\alpha t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  — некоторая периодическая функция  $\alpha t$  с периодом  $2\pi$ .

Рассматривая случай резонанса, положим:

$$\omega_0 = \frac{r}{s} \alpha + \varepsilon \Omega \quad (690)$$

где  $r$  и  $s$  — некоторые целые числа, не имеющие общих делителей.

Интерпретируя данную систему как механическую, мы можем считать  $m$  массой,  $k$  — коэффициентом упругости,  $\varepsilon f$  — возмущающей силой (или соответственно:  $m$  — моментом инерции,  $k$  — коэффициентом жесткости,  $\varepsilon f$  — крутящим моментом).

Как обычно, возьмем в качестве первого приближения

$$x = a \sin \left( \frac{r}{s} \alpha t + \varphi \right)$$

и заменим возмущающую нелинейную силу

$$F = \varepsilon f \left( \alpha t, x, \frac{dx}{dt} \right)$$

эквивалентной линейной

$$F = -k_1 x - \lambda_1 \frac{dx}{dt}$$

Тогда параметры  $k_1$ ,  $\lambda_1$  (эквивалентные коэффициенты упругости и затухания) согласно принципу гармонического баланса мы должны определить из приравнивания основной гармоники (гармоники с частотой  $\frac{r\alpha}{s} \cong \omega$ ) выражения

$$F = \varepsilon f \left[ \alpha t, a \sin \left( \frac{r}{s} \alpha t + \varphi \right), a \frac{r}{s} \alpha \cos \left( \frac{r}{s} \alpha t + \varphi \right) \right]$$

гармонике

$$F = -k_1 a \sin \left( \frac{r}{s} \alpha t + \varphi \right) - \lambda_1 a \frac{r}{s} \alpha \cos \left( \frac{r}{s} \alpha t + \varphi \right)$$

Из этого условия после очевидных упрощений получаем:

$$k_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f \left( s\tau - \frac{s}{r} \varphi, a \sin r\tau, a \frac{r}{s} \alpha \cos r\tau \right) \sin r\tau d\tau \quad (691)$$

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \left( \frac{s}{r\alpha} \right) \int_0^{2\pi} f \left( s\tau - \frac{s}{r} \varphi, a \sin r\tau, a \frac{r}{s} \alpha \cos r\tau \right) \cos r\tau d\tau$$



или, что то же самое (с точностью до величин второго порядка малости):

$$k_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f\left(s\tau - \frac{s}{r}\varphi, a \sin r\tau, a\omega_0 \cos r\tau\right) \sin r\tau d\tau \quad (692)$$

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi \omega_0 a} \int_0^{2\pi} f\left(s\tau - \frac{s}{r}\varphi, a \sin r\tau, a\omega_0 \cos r\tau\right) \cos r\tau d\tau$$

Итак, эквивалентная линейная система является колебательной системой с массой  $m$ , коэффициентом упругости  $k+k_1$  и коэффициентом затухания  $\lambda_1$ .

Следовательно имеем:

$$\delta = \frac{\lambda_1}{2m}, \omega = \sqrt{\frac{k+k_1}{m}} \cong \omega_0 \left(1 + \frac{k_1}{2k}\right) \quad (693)$$

Из полученных соотношений (693) мы и выводим уравнения первого приближения:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1}{2m} a \quad (694)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{r}{s} \alpha = \omega_0 - \frac{r}{s} \alpha + \omega_0 \frac{k_1}{2k}$$

Подставляя сюда значения параметров  $k_1$ ,  $\lambda_1$  из формул (691) или (692), имеем в явном виде два уравнения первого порядка, не содержащие явно времени, для определения двух неизвестных —  $a$  и  $\varphi$ .

Возьмем в качестве примера стержень длины  $l$ , на конец которого действует осевая сила

$$F = H \sin \alpha t \quad (695)$$

Тогда дифференциальное уравнение в частных производных для поперечных колебаний стержня будет:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + H \sin \alpha t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (696)$$

где:

$y$  — поперечный прогиб;

$EJ$  — жесткость стержня;

$\gamma$  — вес единицы объема;

$A$  — площадь поперечного сечения;

$g$  — ускорение силы тяжести.

Допустим, что оба конца стержня шарнирно оперты. В этом случае имеем граничные условия в виде:

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0 \quad (697)$$

Благодаря граничным условиям (697) дифференциальное уравнение в частных производных (696) может быть приведено к уравнению в обычных производных.

В самом деле, положим в (696):

$$y = z(t) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (698)$$

Выражение (698), очевидно, удовлетворяет граничным условиям (697). Чтобы оно удовлетворяло и дифференциальному уравнению (696), следует определить  $z(t)$  как функцию времени из следующего уравнения в обычных производных:

$$\frac{\gamma A}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + EJ \frac{\pi^4}{l^4} \left( 1 - \frac{l^2 H}{EJ \pi^2} \sin \alpha t \right) z = 0 \quad (699)$$

Положим для сокращения:

$$\omega_0^2 = \frac{EJ \frac{\pi^4}{l^4}}{\gamma \frac{A}{g}} = \frac{EJ \pi^4 g}{\gamma A l^4}$$

$$F_{cr} = \frac{EJ \pi^2}{l^2}, S = \frac{H}{F_{cr}}$$

Физическое значение величин  $\omega_0$ ,  $F_{cr}$ ,  $\rho$  очевидно, а именно  $\omega_0$  есть собственная частота поперечных колебаний балки (основного тона колебаний),  $F_{cr}$  — критическая Эйлера нагрузка,  $\rho$  — отношение амплитуды  $H$  переменной осевой нагрузки  $F$  к критической.

Уравнение (699) дает в новых обозначениях:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 (1 - \rho \sin \alpha t) z = 0 \quad (700)$$

Приступим сейчас к рассмотрению основного демультипликативного резонанса (резонанса деления на два):

$$\omega_0 \cong \frac{\alpha}{2} \quad (701)$$

используя для этой цели ранее полученные уравнения первого приближения (694) для случая дифференциального уравнения (689).



После очевидных преобразований в первом приближении получим:

$$z = a \sin\left(\frac{\alpha}{2}t + \varphi\right) \quad (702)$$

где  $a$  и  $\varphi$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{4} \rho a \omega_0 \cos 2\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \rho \omega_0 \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (703)$$

Сравнивая (703) с ранее полученными уравнениями первого приближения для колебательного электрического контура с переменной емкостью, мы видим, что (703) представляют собой частный случай этих последних (681).

Именно, если в уравнениях (681) положить:

$$L_m = 0, R = 0$$

то мы, как раз получим соотношения (703).

Поэтому, используя ранее полученное условие самовозбуждения (683), мы видим, что в рассматриваемом случае стержня, находящегося под действием синусоидальной осевой нагрузки (с частотой  $\alpha \cong \frac{\omega_0}{2}$ ), условие самовозбуждения, т. е. условие неустойчивости неискривленной формы  $y=0$  оси стержня будет:

$$\left| 2 - \frac{\alpha}{\omega_0} \right| < \frac{\rho}{2} \quad (704)$$

Возвратимся теперь опять к уравнению (689) и положим:

$$r = 1, s = 1, \epsilon f\left(\alpha t, x, \frac{dx}{dt}\right) = -f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + E \sin \alpha t \quad (705)$$

Мы будем рассматривать, таким образом, основной резонанс

$$\alpha \cong \omega_0$$

в колебательной квазигармонической системе, описываемой уравнением вида:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = E \sin \alpha t \quad (706)$$

Колебательные системы такого типа играют значительную роль в машиностроении (см., напр. в начале этой монографии, уравнения гребного и пропеллерного валов).

На основании ранее установленного, в первом приближении имеем:

$$x = a \sin(\alpha t + \varphi) \quad (707)$$

причем:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1}{2m} a \quad (708)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{k+k_1}{m}} - \alpha$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} [f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) - E \sin(\tau - \varphi)] \cos \tau d\tau \quad (709)$$

$$k_1 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} [f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) - E \sin(\tau - \varphi)] \sin \tau d\tau$$

Положим для сокращения:

$$\lambda_e = \frac{1}{\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) \cos \tau d\tau, \quad (710)$$

$$k_e = k + \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) \sin \tau d\tau$$

и заметим, что введенные параметры  $\lambda_e(a)$ ,  $k_e(a)$  являются соответственно эквивалентным коэффициентом затухания и полным эквивалентным коэффициентом упругости для рассматриваемой колебательной системы в „свободном“ состоянии, при отсутствии внешнего возбуждения, т. е. для системы, описываемой уравнением вида:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k_e x + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (711)$$



Отсюда, на основании (709), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{2m} &= \frac{\lambda_e}{2m} + \frac{E}{2ma\omega_0} \sin \varphi \cong \frac{\lambda_e}{2m} + \frac{E}{2ma\alpha} \sin \varphi = \\ &= \delta_e + \frac{E}{2ma\alpha} \sin \varphi \end{aligned} \quad (712)$$

где

$$\delta_e = \frac{\lambda_e}{2m} \quad (713)$$

и совершенно аналогично:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k+k_1}{m}} - \alpha &\cong \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{k+k_1}{m} - \alpha^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{k_e}{m} - \alpha^2 - \frac{E}{ma} \cos \varphi \right) = \frac{1}{2\alpha} \left( \omega_e^2 - \alpha^2 - \frac{E}{ma} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (714)$$

где

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (715)$$

Соотношения (713) и (715) показывают между прочим, что  $\delta_e$  и  $\omega_e$  будут соответственно эквивалентным декрементом и эквивалентной частотой для нелинейных собственных колебаний, описываемых уравнением (711).

Подставив (712) и (714) в формулы (708), получаем окончательно уравнения первого приближения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\delta_e a - \frac{E}{2ma} \sin \varphi \\ 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_e^2 - \alpha^2 - \frac{E}{ma} \cos \varphi \end{aligned} \quad (716)$$

В приложениях особо важное значение имеют стационарные режимы колебаний, совершающиеся с постоянными по времени амплитудами и фазами.

\*) Так как величины

$$k_1 \sqrt{\frac{k}{m} - \alpha}, \sqrt{\frac{k+k_1}{m} - \alpha}$$

имеют первый порядок малости.

Поэтому мы и сосредоточим свое внимание на исследовании такого рода синхронных стационарных колебаний, в частности — на вопросе об их устойчивости.

Как показывают уравнения первого приближения, соответствующие стационарные значения амплитуды  $a$  и фазы  $\varphi$  определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} -E \sin \varphi &= 2 m a \alpha \delta_e \\ E \cos \varphi &= m a (\omega_e^2 - \alpha^2) \end{aligned} \quad (717)$$

откуда для амплитуды получаем:

$$m^2 a^2 [(\omega_e^2 - \alpha^2)^2 + 4\delta_e^2 \alpha^2] = E^2 \quad (718)$$

Мы пришли, таким образом, к тем же уравнениям, которые в классической линейной теории используются для определения амплитуды и фазы вынужденного колебания

$$x = a \sin(\alpha t + \varphi) \quad (719)$$

в системе с массой  $m$ , коэффициентом упругости  $k_e$ , коэффициентом затухания  $\lambda_e$  (и соответственно с частотой  $\omega_e = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$  и декрементом  $\delta_e = \frac{\lambda_e}{2m}$ ), находящейся под воздействием внешней синусоидальной силы  $E \sin \alpha t$ .

Поэтому мы имеем следующее общее правило.

Пусть нам дана некоторая нелинейная квазигармоническая система, на которую действует внешняя синусоидальная сила с частотой, близкой к собственной частоте системы, причем требуется найти значения амплитуды и фазы соответствующего стационарного синхронного колебания (719).

Для этого, линеаризуя данную колебательную систему в свободном состоянии (т. е. не принимая во внимание внешней силы), определяем в функции амплитуды эквивалентный декремент и эквивалентную частоту собственных колебаний.

Подставив найденные значения в классические соотношения линейной теории вынужденных колебаний (717) и (718), мы и получим уравнения для определения искомых величин амплитуды и фазы.

Хотя только что сформулированное правило установлено для частного случая колебательных систем, описываемых дифференциальным уравнением вида (706), его можно, однако, рас-



пространить и на гораздо более общие случаи колебательных систем.

Не останавливаясь на этом, перейдем к выводу условий устойчивости для рассматриваемых синхронных стационарных колебаний.

Положим для сокращения:

$$R(a, \varphi) = -\frac{E}{m} \sin \varphi - 2\alpha a \delta_e \quad (720)$$

$$\Phi(a, \varphi) = (\omega_e^2 - \alpha^2)a - \frac{E}{m} \cos \varphi$$

Тогда уравнения первого приближения (716) могут быть представлены в виде:

$$2\alpha \frac{da}{dt} = R(a, \varphi) \quad (721)$$

$$2\alpha a \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(a, \varphi)$$

а уравнения стационарных синхронных режимов (717) — соответственно в виде:

$$\begin{aligned} R(a, \varphi) &= 0 \\ \Phi(a, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (722)$$

Пусть  $a$  и  $\varphi$  — какие-либо решения этих последних уравнений. Для исследования вопроса об их устойчивости, образуем соответствующие этим решениям уравнения в вариациях.

На основании (721), уравнения в вариациях могут быть представлены в следующей форме:

$$2\alpha \frac{d\delta a}{dt} = R'_a \delta a + R'_\varphi \delta \varphi \quad (723)$$

$$2\alpha a \frac{d\delta \varphi}{dt} = \Phi'_a \delta a + \Phi'_\varphi \delta \varphi$$

Характеристическое уравнение для системы (723) будет:

$$ax^2 - (aR'_a + \Phi'_\varphi)x + R'_a \Phi'_\varphi - R'_\varphi \Phi'_a = 0$$

откуда находим условия устойчивости в виде:

$$aR'_a + \Phi'_\varphi < 0 \quad (724)$$

$$R'_a \Phi'_\varphi - R'_\varphi \Phi'_a > 0 \quad (725)$$

Раскроем теперь смысл обоих этих неравенств.  
Из (720) имеем:

$$a R'_a + \Phi'_\varphi = -2\alpha a \frac{\partial(a\delta_e)}{\partial a} + \frac{E}{m} \sin \varphi$$

откуда, принимая во внимание (717), получаем:

$$a R'_a + \Phi'_\varphi = -2\alpha a \frac{\partial(a\delta_e)}{\partial a} - 2\alpha a \delta_e = -2\alpha \frac{\partial(a^2\delta_e)}{\partial a} \quad (726)$$

Но

$$2\alpha a^2 \delta_e = \frac{a^2 \lambda_e}{m} \alpha = \frac{a\alpha}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) \cos \tau d\tau \quad (727)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} W(a) &= \frac{1}{2\pi} \alpha \omega_0 \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau, a \omega_0 \cos \tau) \cos \tau d\tau = \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} f[a \sin(\omega_0 t + \varphi), a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)] a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) dt \end{aligned}$$

Как видно,  $W(a)$  представляет среднюю мощность, рассеянную силой  $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  при колебаниях

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

и потому при обычных законах трения  $W(a)$  возрастает вместе с амплитудой, так что

$$W'(a) > 0 \quad (728)$$

В этом случае (на котором только мы и останавливаем наше внимание) условие (724), как показывают (727) и (728), будет автоматически удовлетворено.

Нам остается, следовательно, рассмотреть второе условие (725).

Для этого исследуем зависимость  $a, \varphi$  — решений уравнений (727):

$$R = 0, \quad \Phi = 0$$

— от частоты  $\alpha$ .



Дифференцируя по  $\alpha$ , получим:

$$R'_\alpha \frac{da}{d\alpha} + R'_\varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} = -R'_\alpha$$

$$\Phi'_\alpha \frac{da}{d\alpha} + \Phi'_\varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} = -\Phi'_\alpha$$

откуда:

$$\left( R'_\alpha \Phi'_\varphi - \Phi'_\alpha R'_\varphi \right) \frac{da}{d\alpha} = \Phi'_\alpha R'_\varphi - R'_\alpha \Phi'_\varphi \quad (729)$$

С другой стороны, (720) дает:

$$R'_\varphi = -\frac{E}{m} \cos \varphi$$

$$R'_\alpha = -2\delta_e a$$

$$\Phi'_\varphi = \frac{E}{m} \sin \varphi$$

$$\Phi'_\alpha = -2\alpha a,$$

откуда:

$$\begin{aligned} \Phi'_\alpha R'_\varphi - R'_\alpha \Phi'_\varphi &= 2\alpha a \frac{E}{m} \cos \varphi + 2\delta_e a \frac{E}{m} \sin \varphi = \\ &= 2a \left( \alpha \frac{E}{m} \cos \varphi + \delta_e \frac{E}{m} \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

Далее на основании (717) имеем:

$$\alpha \frac{E}{m} \cos \varphi + \delta_e \frac{E}{m} \sin \varphi = \alpha (\omega_e^2 - \alpha^2) a - 2\alpha \delta_e^2 a$$

и потому

$$\Phi'_\alpha R'_\varphi - R'_\alpha \Phi'_\varphi = 2\alpha a^2 [(\omega_e^2 - \alpha^2) - 2\delta_e^2]$$

Таким образом, из (729) вытекает, что

$$\left( R'_\alpha \Phi'_\varphi - \Phi'_\alpha R'_\varphi \right) \frac{da}{d\alpha} = 2\alpha a^2 [(\omega_e^2 - \alpha^2) - 2\delta_e^2]$$

Условие устойчивости (725):

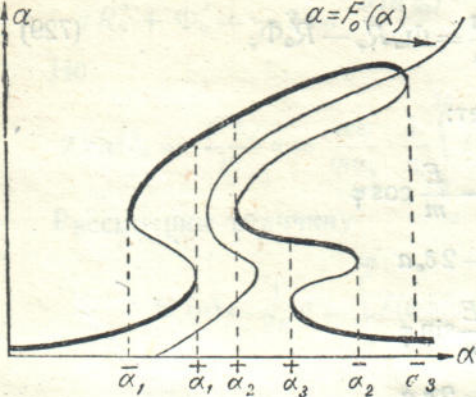
$$R'_\alpha \Phi'_\varphi - \Phi'_\alpha R'_\varphi > 0$$

может быть, следовательно, представлено в виде:

$$\frac{da}{d\alpha} > 0, \text{ если } \omega_e^2 > \alpha^2 + 2\delta_e^2$$

$$\frac{da}{d\alpha} < 0, \text{ если } \omega_e^2 < \alpha^2 + 2\delta_e^2$$
(730)

или, принимая во внимание, что  $\delta_e^2$  будет величиной второго порядка малости и потому может быть отброшено:



$$\frac{da}{d\alpha} > 0, \text{ если } \omega_e > \alpha$$

$$\frac{da}{d\alpha} < 0, \text{ если } \omega_e < \alpha$$
(731)

Как видно, полученное условие устойчивости (731) удобно для представления на графике.

В самом деле, начертим, исходя из уравнения:

Фиг. 77.

$$\left\{ \left[ \omega_e^2(a) - a^2 \right]^2 + 4\delta_e^2 a^2 \right\} a^2 + \frac{F_e^2}{m^2}$$

кривую

$$a = F(\alpha) \tag{732}$$

Построим также кривую

$$a = F_0(\alpha) \tag{733}$$

определяемую уравнением точного резонанса:

$$\omega_e(a) = \alpha$$

Тогда на ветви кривой (732), лежащей левее кривой (733), устойчивыми (т. е. соответствующими устойчивым амплитудам) будут те зоны, в которых  $a$  возрастает вместе с  $\alpha$ ; на ветви, лежащей правее кривой (733), устойчивыми будут, наоборот, те зоны, в которых  $a$  убывает с возрастанием  $\alpha$  (см. напр., фиг. 77, где устойчивые зоны очерчены жирной линией).

Такие диаграммы делают наглядной зависимость устойчивой стационарной амплитуды от частоты возбуждения и в частности позволяют определить точки срыва и скачка, обуславливающие гистерезисные явления (напр., в случае, соответствующем диаграмме фиг. 77, имеем три точки скачка  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и три точки



срыва  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$ , в случае, соответствующем фиг. 78, напр., в линейном случае, гистерезисных явлений нет).

Рассмотрим специально случай, когда  $f(x, x')$  не зависит от производных  $x'$ :

$$f(x, x') = f(x)$$

В этом случае мы имеем незатухающую колебательную систему с нелинейной упругостью.

На основании (710), (713) и (715) получаем:

$$\delta_e = 0$$

$$\omega_e^2 = \frac{1}{m} \left[ k + \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \sin \tau) \sin \tau d\tau \right] \quad (734)$$

и потому уравнение (718) дает:

$$\alpha = \pm \frac{E}{ma} + \omega_e(a) \quad (735)$$

Как показывает (717), при знаке плюс  $\varphi = \pi$ , при знаке минус  $\varphi = 0$ . Обращая кривую (735), мы и получим зависимость

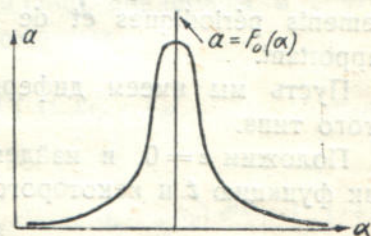
$$a = F(\alpha)$$

Из рассмотрения соотношения (735) можно убедиться, что если  $\omega_e(a)$  достаточно сильно возрастает или убывает вместе с  $a$ , например, если

$$\omega_e(a) = \omega_0 + \lambda a^2$$

где

$$\lambda \neq 0$$



Фиг. 78.

то при конечном  $\alpha$  амплитуда  $a$  не может обратиться в бесконечность.

Таким образом, и при полном отсутствии затухания нелинейная упругость может ограничить амплитуду. Это важное свойство некоторых типов нелинейных упругих связей (их можно было бы назвать, например, активно нелинейными в отличие от пассивно нелинейных, не ограничивающих амплитуды при отсутствии затухания) может, повидимому, сыграть значительную роль в машиностроении в вопросах борьбы с резонансными колебаниями.

## § 12. Заключение

Мы рассматривали до сих пор лишь колебательные системы, достаточно близкие к линейным, т. е. такие системы, для которых дифференциальные уравнения при нулевом значении „малого параметра“  $\varepsilon$  вырождались в линейные уравнения, с постоянными коэффициентами.

Имея в виду получение приближенных решений для достаточно малых значений  $\varepsilon$  (т. е. асимптотических формул, в окрестности  $\varepsilon = 0$ ) можно было бы значительно обобщить принятую постановку вопроса и рассматривать также и такие колебательные системы, для которых соответствующие дифференциальные уравнения при нулевом значении параметра остаются нелинейными, лишь бы они допускали возможность точного интегрирования в замкнутой форме.

Заметим мимоходом, что для такого рода систем, „достаточно близких к точно интегрирующимся“, проблемы построения методов разложений по степеням параметра  $\varepsilon$  были уже рассмотрены в нашей монографии „Méthodes approchées de la mécanique non-linéaire dans leur application a l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de resonance s'y rapportant“.

Пусть мы имеем дифференциальные уравнения для систем этого типа.

Положим  $\varepsilon = 0$ , и найдем соответствующие общее решение как функцию  $t$  и некоторого числа „произвольных постоянных“

$$x_1, \dots, x_n$$

Воспользовавшись соображениями метода вариации произвольных постоянных, мы можем применить полученные формулы и для интересующего нас случая  $\varepsilon \neq 0$ . Мы должны лишь считать в этих формулах величины  $x_1, \dots, x_n$  не постоянными, а некоторыми неизвестными функциями времени. Самые упомянутые формулы с этой точки зрения следует рассматривать как специальную замену переменных.

Рассуждая таким образом, мы должны, вообще говоря, получить для новых неизвестных  $x_1, \dots, x_n$  в случае  $\varepsilon \neq 0$  уравнения вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \\ k &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (736)$$



ибо при  $\varepsilon = 0$  величины  $x_k$  должны обращаться в постоянные. Возьмем, например, уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (737)$$

которое при  $\varepsilon = 0$  имеет общее решение вида:

$$x = x_1 \sin(\omega_0 t + x_1) \quad (738)$$

$$\frac{dx}{dt} = x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2)$$

где  $x_1, x_2$  — произвольные постоянные.

Рассматривая формулы (738) как некоторую специальную замену переменных, имеем, в общем случае  $\varepsilon \neq 0$ , следующую систему уравнений типа (736):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f[t, x, \sin(\omega_0 t + x_2), x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2)] \cos(\omega_0 t + x_2) \quad (739)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0 x} f[t, x_1 \sin(\omega_0 t + x_2), x_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + x_2)] \sin(\omega_0 t + x_2)$$

Возвращаясь к общим уравнениям (736), предположим<sup>1)</sup>, что коэффициенты при степенях  $\varepsilon$  в разложениях

$$X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (740)$$

будут функциями вида:

$$F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) = A_{k,s,0}(x_1, \dots, x_n) + \sum_r A_{k,s,r}(x_1, \dots, x_n) e^{i\lambda_{k,s,r} t} \quad (741)$$

где  $\lambda_{k,s,r}$  — некоторые постоянные (не зависящие от  $t, x_1, \dots, x_n$ ) вещественные числа, не равные нулю.

Мы допускаем таким образом, что  $F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$  по отношению к  $t$  являются суммами гармонических слагающих с не зависящими от  $x_1, \dots, x_n$  частотами. Принимая это допущение, укажем сейчас один общий формальный метод получения асимптотических формул для решений (736).

Сделаем лишь предварительно одну весьма существенную оговорку. Именно мы пока будем предполагать равномерно сходящимся всякий ряд, с которым будем иметь дело. В даль-

<sup>1)</sup> Допущение это выполняется во многих практически важных случаях, например, во всех случаях, рассмотренных в настоящей монографии.

нейшем мы от этого ограничения освободимся, ясно указав условия применимости излагаемого метода.

Введем еще для удобства изложения следующие определения:

Будем говорить, что некоторое выражение

$$f(t, x_1, \dots, x_n)$$

есть почти периодическая функция  $t$ , если его можно представить в виде:

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(x_1, \dots, x_n) + \sum_r e^{j\lambda_r t} f_r(x_1, \dots, x_n) \quad (742)$$

где  $\lambda_r$  — некоторые постоянные, не равные нулю, вещественные числа. Будем говорить также, что это выражение обладает базисом  $(\nu_q)$ , если числа  $\lambda_r$  в разложении (742) являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами, составленными из величин  $\nu_q$ , т. е., если:

$$\lambda_r = m_1 \nu_{r_1} + \dots + m_a \nu_{r_a}$$

где  $m_1, \dots, m_a$  — целые числа.

Так, например, если в уравнении (737)

$$f(t, x, x')$$

есть почти периодическая функция  $t$  с базисом  $[\alpha_q]$ , то правые части уравнений (739) будут почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\omega_0, \alpha_q]$ .

Заметив это, совершим в уравнениях (736) замену переменных, полагая:

$$x^{(1)} = x_k - \varepsilon \sum_r \frac{A_{k,0,r}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,0,r} t}}{j\lambda_{k,0,r}} \quad (743)$$

$$k=1, \dots, n$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{dx_k^{(1)}}{dt} = \frac{dx_k}{dt} - \varepsilon \sum_r A_{k,0,r}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,0,r} t} -$$

$$- \varepsilon \sum_r \sum_q \frac{\partial A_{k,0,r}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_q} \frac{dx_q}{dt} \cdot \frac{e^{j\lambda_{k,0,r} t}}{j\lambda_{k,0,r}}$$



Откуда, на основании (736), (740) и (741):

$$\frac{dx_k^{(1)}}{dt} = \varepsilon A_{k,0,0}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon^m F_k^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) - \\ - \varepsilon^2 \sum_r \sum_q \frac{\partial A_{k,0,r}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_q} X_q(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \frac{e^{j\lambda_{k,0,r}t}}{j\lambda_{k,0,r}}$$

С другой стороны, решая уравнения (743) относительно неизвестных  $x_1, \dots, x_n$ , т. е. выражая эти величины через  $x_k^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ , получим:

$$x_k = x_k^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m f_{k,m}(t, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \quad (745)$$

где

$$f_{k,m}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (746) \\ m = 1, 2, \dots$$

некоторые почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ . Например:

$$f_{k,1}(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_r \frac{A_{k,0,r}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,0,r}t}}{j\lambda_{k,0,r}} \quad (747)$$

$$f_{k,2}(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_q f_{q,1}(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f_{k,1}(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_q}$$

.....

Подставив (745) в правые части соотношений (744), получим уравнения вида:

$$\frac{dx_k^{(1)}}{dt} = \varepsilon A_{k,0,0}(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) + \varepsilon^2 X_k^{(1)}(t, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \varepsilon) \quad (748)$$

в которых

$$X_k^{(1)}(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_{k,1}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

где

$$F_{k,1}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

есть некоторые почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$

$$k = 1, \dots, n$$

$$s = 1, 2, \dots$$

$$r = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим разложения:

$$F_{k,1}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) = A_{k,s,0}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) + \\ + \sum_r A_{k,s,r}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,s,r}^{(1)} t}; \quad \lambda_{k,s,r}^{(1)} \neq 0$$

и совершим в уравнениях (748) замену переменных, полагая

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} - \varepsilon^2 \sum_r \frac{A_{k,0,r}^{(1)}(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) e^{j\lambda_{k,0,r}^{(1)} t}}{j\lambda_{k,0,r}^{(1)}} \quad (749) \\ k = 1, \dots, n$$

Тогда, при помощи только что использованного рассуждения можно показать, что введенные неизвестные

$$x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$$

удовлетворяют уравнениям вида:

$$\frac{dx_k^{(2)}}{dt} = \varepsilon A_{k,0,0}(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) + \varepsilon^2 A_{k,2}^{(1)}(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) + \\ + \varepsilon^3 X_k^{(2)}(t, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \varepsilon) \quad (750)$$

где

$$X_k^{(2)}(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_{k,2}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

и где

$$F_{k,2}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$k = 1, \dots, n; \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

— некоторые почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ .

Продолжая указанный процесс, приходим к системе уравнений относительно неизвестных  $x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}$ :

$$\frac{dx_k^{(m)}}{dt} = \varepsilon A_{k,0,0}(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) + \varepsilon^2 A_{k,2}^{(1)}(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) + \dots \\ \dots + \varepsilon^m A_{k,0,0}^{(m)}(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) + \varepsilon^{m+1} X_k^{(m)}(t, x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \varepsilon) \quad (751)$$



где

$$X_k^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_{k,m}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

и

$$F_{k,m}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

$$k = 1, \dots, n; \quad s = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

есть почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ :

$$F_{k,m}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) = A_{k,s,0}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) + \\ + \sum_q A_{k,s,q}^{(m)}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,s,q}^{(m)} t}; \quad \lambda_{k,s,q}^{(m)} \neq 0$$

Неизвестные

$$x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}$$

входящие в уравнения (751), выражаются через „предыдущие“ неизвестные при помощи итерационных соотношений:

$$x_k^{(m)} = x_k^{(m-1)} - \varepsilon^m \sum_q A_{k,0,q}^{(m-1)}(x_1^{(m-1)}, \dots, x_n^{(m-1)}) \frac{e^{j\lambda_{k,0,q}^{(m-1)} t}}{j\lambda_{k,0,q}^{(m-1)}} \quad (752)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Пользуясь этими соотношениями, мы можем выразить величины

$$x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}$$

через „первоначальные“ неизвестные

$$x_1, \dots, x_n$$

в виде:

$$x_k^{(m)} = x_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_{k,s}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (753)$$

где

$$\varphi_{k,s}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

— некоторые почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ , например:

$$\varphi_{k,1}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) = - \sum_q \frac{A_{k,0,q}^{(m)}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,0,q}^{(m)} t}}{j\lambda_{k,0,q}^{(m)}}$$

$$\varphi_{k,2}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) = - \sum_q \frac{A_{k,0,q}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) e^{j\lambda_{k,0,q}^{(1)} t}}{j\lambda_{k,0,q}^{(1)}}$$

.....

Решая соотношения (753) относительно

$$x_1, \dots, x_n$$

получим:

$$x_k = x_k^{(m)} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \psi_{k,s}^{(m)}(t, x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$$

где

$$\psi_{k,s}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

-- почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ . Имеем, например:

$$\begin{aligned} \psi_{k,1}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) &= -\varphi_{k,1}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) \\ \psi_{k,2}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) &= -\varphi_{k,2}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{q=1} \frac{\partial \varphi_{k,1}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_q} \varphi_{q,1}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Итак мы видим, что, если величины

$$y_1, \dots, y_n$$

удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dt} &= \varepsilon A_{k,0,0}(y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^2 A_{k,0,0}^{(1)}(y_1, \dots, y_n) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^m A_{k,0,0}^{(m-1)}(y_1, \dots, y_n) + \varepsilon^{m+1} X_k^{(m)}(t, y_1, \dots, y_n, \varepsilon) \end{aligned}$$

то выражения

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \psi_{k,s}^{(m)}(t, y_1, \dots, y_n)$$

будут решениями основных уравнений (736).

Отсюда заключаем, что если величины

$$y_1, \dots, y_n$$

удовлетворяют „укороченным“ уравнениям вида

$$\frac{dy_k}{dt} = \varepsilon A_{k,0,0}(y_1, \dots, y_n) + \dots + \varepsilon^m A_{k,0,0}^{(m-1)}(y_1, \dots, y_n) \quad (754)$$

то выражения

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s \psi_{k,s}^{(m)}(t, y_1, \dots, y_n) \quad (755)$$



будут удовлетворять основным уравнениям (736) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ .

В формулах (755) мы написали

$$\psi_{k,s}(t, x_1, \dots, x_n)$$

вместо

$$\psi_{k,s}^{(m)}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (756)$$

так как, очевидно, выражения (756) при  $s \leq m$  не зависят от  $m$ .

Если бы ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \psi_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n); \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s A_{k,0,0}^{(s-1)}(y_1, \dots, y_n) \quad (757)$$

оказались сходящимися, то тогда заменой переменных

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \psi_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n) \quad (758)$$

мы привели бы уравнения (736) к уравнениям вида:

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s A_{k,0,0}^{(s-1)}(y_1, \dots, y_n) \quad (759)$$

не содержащим явно переменной  $t$ .

Следует заметить, однако, что в действительности разложения (757) обычно оказываются расходящимися. Во всяком случае условия сходимости этих рядов гораздо более узки, чем условия сходимости рядов, представляющих функции

$$A_{k,0,0}^{(s-1)}(y_1, \dots, y_n), \quad \psi_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

при фиксированных значениях индексов  $k, s$ .

Тогда как сходимость рядов, представляющих эти функции, может быть обеспечена наложением на функции

$$X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \quad (760)$$

некоторых сравнительно общих условий<sup>1)</sup>, сходимость рядов (757) требует наложения на эти функции (760) настолько узких

<sup>1)</sup> Достаточно предположить, например, что разложения (741) состоят из конечного числа членов и их коэффициенты

$$A_{k,s,r}(x_1, \dots, x_n)$$

сколь угодно раз дифференцируемые функции переменных

$$x_1, \dots, x_n$$

условий, что они придают проблеме характер „случая исключения“ или „случая вырождения“.

Не имея возможности, таким образом, предполагать сходимость разложений (757) в общем случае, мы должны рассматривать замену переменных (758) и уравнения (759) как формальные.

Мы можем, например, утверждать, что если

$$y_1, \dots, y_n$$

удовлетворяют формальным уравнениям (759), то выражения (758) будут формальными решениями исходных уравнений (736).

Фактический смысл формальных решений состоит, очевидно, в том, что, останавливаясь в соответствующих (вообще говоря, расходящихся) разложениях на  $m$ -ом члене, мы получаем приближенное решение, удовлетворяющее нашим исходным уравнениям с точностью до величин порядка малости  $\epsilon^{m+1}$ .

Иначе говоря, формальное решение может быть рассматриваемо как источник для получения формул асимптотического приближения искомых точных решений в окрестности нулевого значения параметра  $\epsilon$ .

Останавливаясь на самом процессе эффективного определения выражений

$$A_{k,0,0}^{(s-1)}; \psi_{k,s} \quad (761)$$

в вышеизложенном методе (который можно было бы назвать методом последовательных преобразований), надлежит отметить излишнюю сложность, с которой было сопряжено это определение.

Так, чтобы построить выражения для величин (761) для значений индекса  $s = 1, 2, 3, \dots, m$ , при помощи указанного метода, необходимо произвести последовательно,  $m$  раз, замены переменных вида (752), решить системы уравнений (753) и т. п.

Всего этого можно было бы избежать, если поставить задачу о нахождении формального решения хотя бы следующим образом.

Определить функции

$$z_{k,s}(t, x_1, \dots, x_n); Y_{k,s}(x_1, \dots, x_n); k = 1, \dots, n; s = 1, 2, \dots, m, \dots$$

так, чтобы удовлетворить следующим условиям:

1)  $z_{k,s}(t, x_1, \dots, x_n)$  являются почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s}, r]$ .



2) Если  $y_1, \dots, y_n$  удовлетворяют формальным уравнениям

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n) \quad (762)$$

то выражения

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n) \quad (763)$$

будут формальными решениями основных уравнений (736).

Заметим прежде всего, что, как мы уже видели, функции

$$z_{k,s} = \psi_{k,s}; \quad Y_{k,s} = A_{k,o,o}^{(s-1)}$$

этим условиям удовлетворяют.

Наша задача поэтому заключается здесь в том, чтобы образовать метод для непосредственного определения таких функций, не требующий последовательных преобразований переменных.

Для этого подставим выражения (763) в уравнения (736) и при дифференцировании примем во внимание соотношения (762).

Получим уравнения вида:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{k,s} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \left\{ \frac{\partial z_{k,s}}{\partial t} + \sum_{q=1}^n \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r Y_{q,r} \right\} - \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_k^{(s)} \left\{ t, y_1 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{1,s}, \dots, y_n + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{n,s} \right\} = 0 \quad (764)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получим систему уравнений:

$$\frac{\partial z_{k,1}}{\partial t} = F_k^{(0)}(t, y_1, \dots, y_n) - Y_{k,1}(y_1, \dots, y_n)$$

$$\frac{\partial z_{k,m+1}}{\partial t} = S_{k,m}(t, y, z_1, \dots, z_m) - Y_{k,m+1} - \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1 \\ r \geq 1}} \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r} \quad (765)$$

Здесь для сокращения положено:

$$S_{k,m}(t, y, z_1, \dots, z_m) =$$

$$\frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} \sum_{s=0}^m \varepsilon^s F_k^{(s)} \left[ t, y_1 + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r z_{1,r}, \dots, y_n + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r z_{n,r} \right] \right\}_{\varepsilon=0} \quad (766)$$

Как видно

$$S_{k,m}(t, y, z_1, \dots, z_m)$$

есть функция переменных

$$t, y_1, \dots, y_n, z_{1,1}, \dots, z_{n,1}, \dots, z_{1,m}, \dots, z_{n,m}$$

$S_{k,m}$  по отношению к  $t$  почти периодически с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ , а по отношению к

$$z_{1,1}, \dots, z_{n,1}, \dots, z_{1,m}, \dots, z_{n,m}$$

является полиномом степени не выше  $m$ -й.

Заметим теперь, что так как для функций  $z_{k,s}; Y_{k,s}$ , удовлетворяющих уравнениям (765), само собой выполнены и формальные равенства (764), то мы видим, что если из уравнений (765) мы можем последовательно определить <sup>1)</sup> выражения

$$z_{k,m}(t, y_1, \dots, y_n); Y_{k,m}(y_1, \dots, y_n); m = 1, 2, 3, \dots$$

то поставленная нами задача решена.

Покажем, что эти выражения могут быть определены однозначно, если мы наложим на

$$z_{k,m}(t, y_1, \dots, y_n)$$

некоторое дополнительное условие <sup>2)</sup>, например, если мы потребуем, чтобы в обобщенных разложениях Фурье:

$$z_{k,m}(t, y_1, \dots, y_n) = z_{k,m}^{(0)}(y_1, \dots, y_n) + \sum_q z_{k,m}^{(q)}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,m}^{(q)} t}; \lambda_{k,m}^{(q)} \neq 0 \quad (767)$$

не содержалось постоянного (по отношению к  $t$ ) члена:

$$z_{k,m}^{(0)}(y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (768)$$

Рассмотрим, в самом деле, разложение

$$F_k^{(0)}(t, y_1, \dots, y_n) = A_{k,0,0}(y_1, \dots, y_n) + \sum_r A_{k,0,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,0,r} t}$$

и положим для сокращения:

$$A_{k,0,0} = A_k, \lambda_{k,0,r} = \lambda_{k,r}, A_{k,0,r} = A_{k,r}$$

<sup>1)</sup> Так, чтобы

$$z_{k,m}(t, y_1, \dots, y_n)$$

оказались почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\lambda_{k,s,r}]$ .

<sup>2)</sup> В дальнейшем мы будем упоминать это условие как условие (3).



Тогда первое из уравнений (765) может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{\partial z_{k,1}}{\partial t} = A_k(y_1, \dots, y_n) - Y_{k,1}(y_1, \dots, y_n) + \sum_r A_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,r}t} \quad (769)$$

Отсюда мы видим, что для почти периодичности  $z_{k,1}$  необходимо положить <sup>1)</sup>:

$$Y_{k,1}(y_1, \dots, y_n) = A_k(y_1, \dots, y_n) \quad (770)$$

Из (769) и (770) имеем:

$$\frac{\partial z_{k,1}}{\partial t} = \sum_r A_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,r}t}$$

Этому уравнению и наложенным на  $z$  условиям удовлетворим, положив:

$$z_{k,1} = \sum_r \frac{A_{k,r}(y_1, \dots, y_n)}{j\lambda_{k,r}} e^{j\lambda_{k,r}t} \quad (771)$$

Таким образом, из первого уравнения (765) мы можем определить:

$$z_{k,1}(t, y_1, \dots, y_n), Y_{k,1}(y_1, \dots, y_n)$$

Рассуждая совершенно аналогично, из последующих уравнений можем определить и высшие коэффициенты в формальных разложениях (762) и (763).

Покажем, например, что если мы определили из  $m$  первых уравнений (765) выражения

$$z_{k,r}(t, y_1, \dots, y_n); Y_{k,r}(y_1, \dots, y_n); r = 1, 2, \dots, m \quad (772)$$

удовлетворяющие всем наложенным условиям, то из  $(m+1)$ -го уравнения мы можем найти следующие выражения:

$$z_{k,m+1}(t, y_1, \dots, y_n); Y_{k,m+1}(y_1, \dots, y_n)$$

удовлетворяющие предписанным условиям.

<sup>1)</sup> В самом деле, если

$$z_{k,1}(t, y_1, \dots, y_n)$$

почти периодически, то в обобщенном разложении Фурье для производной

$$\frac{\partial z_{k,1}(t, y_1, \dots, y_n)}{\partial t}$$

не должно содержаться не зависящего от  $t$  члена, и потому

$$A_k - Y_{k,1} = 0$$

В самом деле, подставляя найденные значения (772) в выражение:

$$S_m(t, y, z_1, \dots, z_m) = \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r}$$

мы можем представить его в виде:

$$L_k(y_1, \dots, y_n) + \sum_s L_{k,s}(y_1, \dots, y_n) e^{j \lambda_{k,s} t}$$

где

$\lambda_{k,s}$  — некоторые линейные комбинации из базиса  $[\lambda_{k,s,r}]$ .

Таким образом  $(m+1)$ -ое уравнение (765) дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{k,m+1}}{\partial t} &= L_k(y_1, \dots, y_n) - Y_{k,m+1}(y_1, \dots, y_n) + \\ &+ \sum_s L_{k,s}(y_1, \dots, y_n) e^{j \lambda_{k,s} t} \end{aligned} \quad (773)$$

Отсюда мы видим, что для почти периодичности

$$z_{k,m+1}(t, y_1, \dots, y_n)$$

необходимо положить

$$Y_{k,m+1}(y_1, \dots, y_n) = L_k(y_1, \dots, y_n)$$

Но тогда из (773) получим:

$$\frac{\partial z_{k,m+1}}{\partial t} = \sum_s L_{k,s}(y_1, \dots, y_n) e^{j \lambda_{k,s} t}$$

Этому же уравнению, как и предписанным условиям, мы удовлетворим, положив:

$$z_{k,m+1} = \sum_s \frac{L_{k,s}(y_1, \dots, y_n)}{j \lambda_{k,s}} e^{j \lambda_{k,s} t} \quad (774)$$

Итак, исходя из системы уравнений (765), мы можем определять коэффициенты формальных разложений (762) и (763) до какого угодно высокого значения индекса  $s$ , разумеется, если ряды, получающиеся на каждом этапе рассматриваемого процесса, оказываются сходящимися.

Как мы уже указывали, основной смысл построенного формального решения состоит в том, что, останавливаясь на  $m$ -ом



члене, мы получаем асимптотические формулы для приближения искомого решения уравнений (736).

Именно, если величины

$$y_1, \dots, y_n$$

удовлетворяют уравнениям „ $m$ -го приближения“:

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

то выражения

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

удовлетворяют уравнениям (736) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ .

Заметим теперь, что на основании формул (766) выражения

$$S_m(t, y, z_1, \dots, z_m)$$

будут полиномами по отношению к

$$z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{n,1}$$

$$z_{1,2}, z_{2,2}, \dots, z_{n,2}$$

$$\dots$$

$$z_{1,m}, z_{2,m}, \dots, z_{n,m}$$

Поэтому, если обобщенные разложения Фурье:

$$F_k^{(s)}(t, y_1, \dots, y_n) = A_{k,s,0}(y_1, \dots, y_n) + \sum_r A_{k,s,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,s,r}t} \quad (775)$$

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_r z_{k,s}^{(r)}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,s}^{(r)}t}$$

для

$$s = 1, \dots, m$$

состоят из конечного числа членов, то и разложение

$$S_m(t, y, z_1, \dots, z_m) = \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r} = \\ = L_k(y_1, \dots, y_n) + \sum_r L_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,r}t}$$

также состоит из конечного числа членов. Следовательно, на основании (774), обобщенное разложение Фурье для

$$z_{k,m+1}(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_r \frac{L_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j \lambda_{k,r} t}}{j \lambda_{k,r}}$$

заключает лишь конечное число членов.

С другой стороны, если суммы в рядах (775) конечны, то в виду (771) обобщенное разложение Фурье для

$$z_{k,1}(t, y_1, \dots, y_n)$$

состоит из конечного числа членов.

Таким образом, с помощью индукции от  $m$  к  $m+1$  мы заключаем, что если все разложения (741) состоят из конечного числа членов, то на каждом этапе рассматриваемого процесса решения уравнений (765) для

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

а тем самым и для

$$Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

мы будем получать не бесконечные ряды, сходимость которых требует исследования, а простые конечные суммы.

Принимая во внимание ранее сказанное, убеждаемся в справедливости следующих теорем.

1) Теорема  $\alpha$ .

Если разложения

$$F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) = A_{k,0,s}(x_1, \dots, x_n) + \sum_q A_{k,q,s}(x_1, \dots, x_n) e^{j \lambda_{k,q,s} t}$$

$$k = 1, \dots, n$$

$$s = 1, \dots, m, \dots$$

состоят из конечного числа членов, и их коэффициенты:

$$A_{k,q,s}(x_1, \dots, x_n)$$

обладают конечными частными производными какого угодно высокого порядка, для всех значений переменных

$$x_1, \dots, x_n$$

то из уравнений (765) мы можем однозначно определить

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n), \quad Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

удовлетворяющие условиям (1), (2), (3), для какого угодно высокого значения индекса  $s$ .



## 2) Теорема β.

Если, в дополнение к условиям теоремы α для всякого положительного числа  $M$  можно указать такие положительные числа  $\varepsilon_0, K_m^M$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ), чтобы

$$\left| X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) - \sum_{s=1}^m \varepsilon^s F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) \right| \leq K_m^M \varepsilon^{m+1}$$

для

$$0 \leq t < +\infty, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad |x_k| \leq M, \quad k = 1, \dots, n$$

Если, кроме того, решения уравнений  $m$ -го приближения

$$y_1 = y_1(t), \dots, y_n = y_n(t)$$

равномерно ограничены (для  $0 \leq t < +\infty, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ), тогда можно указать такие положительные числа  $Q_m$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ), для которых выражения

$$x_k(t) = y_k(t) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{dx_k}{dt} - \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \right| \leq Q_m \varepsilon^{m+1}; \quad k = 2, \dots, n$$

для

$$0 \leq t < +\infty, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

Примечание. Если некоторые из переменных

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

например  $x_i'$ , циклические<sup>1)</sup>, то очевидно, заключение теоремы β остается в силе и тогда, когда соответствующие

$$y_i' = y_i'(t)$$

не будут ограничены, так как в случае, когда  $x_i'$  — циклическая переменная, выражения:

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n); \quad Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

являются периодическими функциями  $y_i'$  с периодом  $2\pi$ . Рассмотрим теперь некоторую функцию

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$$

<sup>1)</sup> Мы будем говорить, что некоторая переменная  $X_i'$  является циклической, если  $X_i(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ , а потому и все  $F_{k,r}^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$ , обладают по отношению к  $x_i'$  периодом  $2\pi$ .

переменных

$$t, x_1, \dots, x_n$$

обладающую конечными частными производными какого угодно высокого порядка, для всех значений этих переменных, и периодическую, с некоторым периодом  $T$  (не зависящим от  $x_1, \dots, x_n$ ) по отношению к  $t$ .

Образуем разложение Фурье:

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{-\infty < q < +\infty} e^{jqat} \Phi_q(x_1, \dots, x_n) \quad (776)$$

где

$$a = \frac{2\pi}{T}$$

При сделанных допущениях этот ряд сходится абсолютно и равномерно. Любой ряд, получающийся из (776) в результате почленного интегрирования и дифференцирования (сколько угодно раз) также сходится, абсолютно и равномерно.

Исходя из этого простого замечания, мы убеждаемся, что если выражения:

$$F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) \\ k=1, \dots, n; s=1, 2, \dots, m, \dots$$

будут неограниченно дифференцируемыми функциями, обладающими, по отношению к  $t$  некоторым постоянным периодом (не зависящим от  $k, s, x_1, x_2, \dots, x_n$ ), то при определении

$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n); Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n); k=1, \dots, n; s=1, 2, \dots, m, \dots$  удовлетворяющих условиям (1), (2) и (3) из уравнений (765), на каждом этапе нашего процесса мы будем получать лишь равномерно и абсолютно сходящиеся разложения.

Выражения

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

при этом, разумеется, окажутся периодическими функциями  $t$  с периодом  $T$ .

Таким образом, мы имеем следующие теоремы:

3) Теорема  $\gamma$ .

Если

$$F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$



будут неограниченно дифференцируемыми функциями, обладающими по отношению к  $t$  некоторым постоянным периодом  $T$ , то из уравнений (765) мы можем однозначно определить:

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n); Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

для какого угодно высокого значения индекса  $s$ .

При этом

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

будут периодическими функциями  $t$  с периодом  $T$ .

#### 4) Теорема $\delta$ .

Если, в дополнение к условиям предыдущей теоремы, для всякого положительного  $M$ , можно указать такие положительные  $\varepsilon_0, K_m^{(M)}$ , чтобы:

$$\left| X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) - \sum_{s=0}^m \varepsilon^s F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n) \right| \leq K_m^{(M)} \varepsilon^{m+1}$$

для

$$0 \leq t < +\infty$$

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

$$|x_k| \leq M; k=1, \dots, n$$

и если, кроме того, решения уравнений  $m$ -го приближения

$$y_k = y_k(t)$$

ограничены (равномерно, для  $0 \leq t < +\infty, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ), то можно указать такие положительные  $Q_m$ , что функции

$$x_k(t) = y_k(t) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

$$k=1, \dots, n$$

будут удовлетворять неравенствам:

$$\left| \frac{dx_k}{dt} - \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \right| \leq Q_m \varepsilon^{m+1}$$

$$0 \leq t < +\infty, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, k=1, \dots, n$$

По поводу этой теоремы можно, разумеется, сделать то же замечание, что и по поводу теоремы  $\beta$ .

Именно, если переменные  $x_i$  являются циклическими, то заключение теоремы  $\delta$  остается в силе и тогда, когда соответствующие

$$y_i = y_i(t)$$

стремятся к бесконечности вместе с  $t$ .

Мы будем поэтому говорить, что решения уравнений  $m$ -го приближения удовлетворяют условию ограниченности, если только те компоненты из

$$y_k(t)$$

рассматриваемого решения являются ограниченными (равномерно для  $0 \leq t < +\infty$ ,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ), для которых переменные  $x_k$  не являются циклическими.

Как видно из формулировок вышеприведенных теорем  $\alpha - \beta - \gamma - \delta$ , в основных, практически важных, случаях, если решения уравнений  $m$ -го приближения удовлетворяют условию ограниченности<sup>1)</sup>, то „ $m$ -ое приближение“

$$x_k^{(m)}(t) = y_k(t) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_{k,s}[t, y_1(t), \dots, y_n(t)] \quad (777)$$

действительно удовлетворяет исходным уравнениям (736) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$  и притом равномерно, по отношению к  $t$ , в интервале  $(0 \leq t < +\infty)$ .

Нетрудно заметить, что при образовании приближенных решений в настоящей монографии мы по существу пользовались именно только что изложенным методом<sup>2)</sup>, хотя он и не был там явно сформулирован в его общем виде.

В этой книге особое внимание было уделено первому приближению.

В рассматриваемом случае, исходя из обобщенного разложения Фурье:

$$F_k^{(0)}(t, y_1, \dots, y_n) = A_{k,0}(y_1, \dots, y_n) + \sum_r A_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,r}t} \quad (778)$$

где

$$\lambda_{k,r} \neq 0$$

мы на основании (770) и (771) имеем:

$$Y_{k,1} = A_{k,0}(y_1, \dots, y_n) \quad (779)$$

$$z_{k,1} = \sum_r \frac{A_{k,r}(y_1, \dots, y_n) e^{j\lambda_{k,r}t}}{j\lambda_{k,r}} \quad (780)$$

<sup>1)</sup> Выполнение этого последнего условия обычно можно показать, исходя из простых физических соображений, например, рассматривая энергетический баланс исследуемой колебательной системы.

<sup>2)</sup> См., напр., § 4, 9, 10,



и потому, уравнения первого приближения будут:

$$\frac{dy_k}{dt} = \varepsilon A_{k,0}(y_1, \dots, y_n) \quad (781)$$

С другой стороны, из (778) вытекает, что

$$A_{k,0}(y_1, \dots, y_n) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F_k^{(0)}(\tau, y_1, \dots, y_n) d\tau$$

и, следовательно, уравнения (781) могут быть представлены в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon M \left\{ F_k^{(0)}(\tau, y_1, \dots, y_n) \right\} \quad (782)$$

где вообще:

$$M \left\{ f(\tau) \right\}$$

обозначает среднее значение некоторой функции  $f(\tau)$ , взятое по бесконечному интервалу  $(0, +\infty)$ :

$$M \left\{ f(\tau) \right\} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau$$

Сравнивая уравнения первого приближения (782) с точными уравнениями (736), мы видим, что уравнения первого приближения могут быть получены, усредняя точные уравнения (при усреднении  $x_1, \dots, x_n$  рассматриваются как постоянные) по времени  $t$  и отбрасывая величины второго порядка малости по отношению к  $\varepsilon$ .

Это правило и является общей формой принципа усреднения. В частном случае, когда

$$F_k^{(0)}(t, y_1, \dots, y_n)$$

есть периодическая функция  $t$  с периодом  $T$ , то

$$M \left\{ F_k^{(0)}(\tau, y_1, \dots, y_n) \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T F_k^{(0)}(\tau, y_1, \dots, y_n) d\tau$$

и мы имеем принцип усреднения в той форме, как он был сформулирован нами в § 2.

Из (777) и (780) получаем выражение для первого приближения в виде:

$$x_k^{(1)}(t) = y_k + \varepsilon \sum_r \frac{A_{k,r}(y_1, \dots, y_n)}{j_{k,r}} e^{j_{k,r} t}$$

Как видно, полученное выражение является не чем иным, как „улучшенным первым приближением“ предыдущих параграфов.

Вообще следует заметить, что все соображения (напр., принцип эквивалентной линеаризации, принцип гармонического баланса и т. п.), которые мы приводили там в связи с теорией первого приближения, имели своей целью лишь разработку возможно более наглядной методики, допускающей простую физико-техническую интерпретацию, для эффективного образования как уравнений первого приближения, так и выражений „улучшенного первого приближения“.

Скажем сейчас несколько слов по поводу уравнений  $m$ -го приближения, которые, следуя изложенному методу, необходимо решить, чтобы получить явное выражение для  $m$ -го приближения. Сравнивая эти уравнения с точными (736), мы видим, что тогда как в точные уравнения переменная  $t$  входит явно, уравнения  $m$ -го приближения явно этой переменной не содержат.

Хотя исключение одной переменной и представляет собой некоторое упрощение задачи, может, однако, возникнуть вопрос, стоило ли для такой скромной цели, которая во многих случаях могла бы быть достигнута и обычными элементарными приемами, вводить в действие в достаточной мере громоздкий аппарат аппроксимационных методов.

В действительности, однако, задача решения уравнений  $m$ -го приближения дает весьма значительное упрощение по сравнению с задачей решения точных уравнений.

Во многих случаях уравнения  $m$ -го приближения могут быть даже проинтегрированы в квадратурах.

Возьмем, например, случай системы (739), эквивалентной уравнению второго порядка (737), и допустим, что

$$f(t, x, x')$$

является почти периодической функцией  $t$  с некоторым базисом  $(\alpha_q)$ . Положим для сокращения:



$$X_1(t, x_1, x_2) = \frac{1}{\omega_0} f(t, x_1 \sin x_2, x_1 \omega_0 \cos x_2) \cos x_2 \quad (783)$$

$$X_2(t, x_1, x_2) = -\frac{1}{\omega_0 x_1} f(t, x_1 \sin x_2, x_1 \omega_0 \cos x_2) \sin x_2$$

Тогда, очевидно, уравнения (739) могут быть представлены в следующей форме:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon X_1(t, x_1, \omega_0 t + x_2) \quad (784)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon X_2(t, x_1, \omega_0 t + x_2)$$

На основании (783) мы заключаем, что выражения

$$X_1(t, x_1, \omega_0 t + x_2), X_2(t, x_1, \omega_0 t + x_2)$$

будут почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\omega_0, \alpha_q]$  и периодическими функциями  $x_2$  с периодом  $2\pi$ . Переменная  $x_2$  будет, следовательно, циклической. Применяя к рассматриваемому случаю изложенный выше метод, имеем на основании (765) для определения выражений:

$$z_{k,s}; Y_{k,s}; k = 1, 2; s = 1, 2, \dots, m, \dots$$

следующие уравнения:

$$\frac{\partial z_{k,1}}{\partial t} = X_k(t, y_1, \omega_0 t + y_2) - Y_{k,1}$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial z_{k,m+1}}{\partial t} = S_{k,m}(t, y_2 + \omega_0 t, y_1, z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{1,m}, z_{2,m}) - \quad (785)$$

$$- Y_{k,m+1} - \sum_{q=1}^2 \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r}$$

где для сокращения положено:

$$S_{k,m}(t, \psi, y_1, z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{1,m}, z_{2,m}) = \quad (786)$$

$$= \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} X_k(t, y_1 + \sum_{r=1}^m \varepsilon^r z_{1,r} \psi + \sum_{r=1}^m \varepsilon^r z_{2,r}) \right\}_{\varepsilon=0}$$

Отсюда мы видим, что

$$S_{k,m}(t, \psi, y_1, z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{1,m}, z_{2,m})$$

будут почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $\alpha_1$ , периодическими функциями  $\psi$  с периодом  $2\pi$  и полиномами по отношению к

$$z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{1,m}, z_{2,m}$$

Приступая к исследованию уравнений (785), будем предполагать выполненными соответствующие условия, обеспечивающие равномерную сходимость всех разложений, получающихся при решении этих уравнений, например, условия теоремы  $\alpha^*$ ).

Рассмотрим сперва случай, когда  $\omega_0$  и  $\alpha_q$  не имеют общего базиса<sup>1)</sup>, т. е. являются линейно независимыми (нерезонансный случай, по терминологии, принятой в предыдущих параграфах).

Покажем, что в этом случае

$$z_{k,s}, Y_{k,s} \quad (787)$$

будут выражениями вида:

$$\begin{aligned} z_{k,s} &= z_{k,s}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) \\ Y_{k,s} &= Y_{k,s}(y_1) \end{aligned} \quad (788)$$

где

$$z_{k,s}(t, \psi, y_1)$$

являются почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\alpha_q]$  и периодическими функциями  $\psi$  с периодом  $2\pi$ .

Докажем предварительно следующее утверждение.

Пусть

$$U(t, \psi)$$

есть периодическая функция  $\psi$  с периодом  $2\pi$  и почти периодическая функция  $t$  с некоторым базисом  $[\alpha_q]$ .

Пусть  $\omega_0$  — некоторое число, не имеющее общего базиса с числами  $\alpha_q$ .

\* В рассматриваемом случае системы уравнений (784) эти условия, очевидно, будут выполнены, если обобщенное разложение Фурье почти периодической функции  $f(t, x, x')$  состоит из конечного числа членов и коэффициенты его являются полиномами по отношению к переменным  $x, x'$ .

<sup>1)</sup> Иначе говоря, нельзя указать таких не равных нулю целых чисел  $n_0, n_1, \dots, n_s$ , для которых

$$n_0 \omega_0 + n_1 \alpha_{q_1} + \dots + n_s \alpha_{q_s} = 0$$



Тогда, если  $Y$  есть постоянный член в обобщенном разложении Фурье функции

$$U(t, \omega_0 t + \varphi) = Y + \sum_r U_r e^{j\lambda_r t}; \lambda_n \neq 0$$

то  $Y$  не зависит от  $\varphi$ , и решение

$$u = \sum_r \frac{U_r}{j\lambda_r} e^{j\lambda_r t}$$

уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U(t, \omega_0 t + \varphi) - Y$$

будет выражением вида<sup>1)</sup>

$$u = \Phi(t, \omega_0 t + \varphi)$$

где

$$\Phi(t, \psi)$$

есть периодическая функция  $\psi$  с периодом  $2\pi$  и почти периодическая функция  $t$  с базисом  $[\alpha_q]$ .

Рассмотрим, в самом деле, обобщенное разложение Фурье:

$$U(t, \psi) = U_0(\psi) + \sum_s U_s(\psi) e^{j\nu_s t} \quad \nu_s \neq 0 \quad (789)$$

где  $\nu_s$  — линейные комбинации чисел  $\alpha_q$ .

Так как

$$U(t, \psi)$$

обладает по отношению к  $\psi$  периодом  $2\pi$ , то  $U_s(\psi)$  будут периодическими функциями этой переменной с периодом  $2\pi$ .

Используя обычные разложения Фурье, можем написать:

$$U_s(\psi) = \sum_n U_s^{(n)} e^{jn\psi}$$

откуда на основании (789) видим, что

$$U(t, \psi) = \sum_n U_0^{(n)} e^{jn\psi} + \sum_s \sum_n U_s^{(n)} e^{j(n\psi + \nu_s t)}$$

<sup>1)</sup> Разумеется, мы предполагаем, что ряд

$$\sum_r \left| \frac{U_r}{\lambda_r} \right|$$

сходящийся.

и потому

$$U(t, \omega_0 t + \varphi) = U_0^{(0)} + \sum_{n \neq 0} U_0^{(n)} e^{j(n\omega_0 t + n\varphi)} + \sum_s \sum_n U_s^{(n)} e^{j[(\nu_s + n\omega_0)t + n\varphi]} \quad (790)$$

Это и будет обобщенным разложением Фурье для функции

$$U(t, \omega_0 t + \varphi)$$

Так как  $\omega_0$  по определению не имеет общего базиса с  $\alpha_q$ , то все числа

$$\nu_s + n\omega_0$$

отличны от нуля. Следовательно  $U_0^{(0)}$  будет единственным постоянным членом в рассматриваемом разложении (790), и мы имеем

$$Y = U_0^{(0)}$$

что и доказывает первую часть сделанного утверждения.

Так как далее:

$$U(t, \omega_0 t + \varphi) - Y = \sum_{n \neq 0} U_0^{(n)} e^{jn(\omega_0 t + \varphi)} + \sum_s \sum_n U_s^{(n)} e^{j[(\nu_s + n\omega_0)t + n\varphi]}$$

то

$$u = \Phi(t, \omega_0 t + \varphi)$$

где

$$\Phi(t, \varphi) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{jn\omega_0} U_0^{(n)} e^{jn\varphi} + \sum_s \sum_n \frac{1}{j(\nu_s + n\omega_0)} U_s^{(n)} e^{j(\nu_s t + n\varphi)}$$

что также доказывает и вторую часть нашего утверждения.

Перейдем теперь к доказательству того, что

$$z_{k,s}; Y_{k,s}$$

будут выражениями вида (788).

Применяя только что доказанное положение к первому из уравнений системы (785), мы непосредственно убеждаемся, что  $z_{k,1}; Y_{k,1}$  действительно могут быть представлены в таком виде. Используя теперь индукцию от  $m$  к  $m+1$  допустим, что  $z_{k,s}; Y_{k,s}$  для  $s = 1, 2, \dots, m, \dots$  будут выражениями вида (788).



Тогда на основании (786) заключаем, что

$$S_{k,m}(t, y_2 + \omega_0 t, y_1, z_{1,1}, z_{2,1}, \dots, z_{1,m}, z_{2,m}) - \\ (187) \quad - \sum_{q=1}^2 \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \frac{\partial z_{k,s}}{\partial y_q} Y_q = F_{k,m}(t, \omega_0 t + y_2, y_1)$$

где:

$$F_{k,m}(t, \phi, y_1) =$$

периодические функции  $\phi$  с периодом  $2\pi$  и почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\alpha^q]$ .

Таким образом,  $(m+1)$ -ое уравнение системы (785) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial z_{k,m+1}}{\partial t} = F_{k,m}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) - Y_{k,m+1}$$

и потому благодаря вышесказанному положению мы убеждаемся, что

$$z_{k,m+1}; Y_{k,m+1}$$

также будут выражениями вида (788).

Итак, действительно:

$$z_{k,s} = z_{k,s}(t, \omega_0 t + y_2, y_1)$$

$$Y_{k,s} = Y_{k,s}(y_1)$$

$$k = 1, 2; s = 1, 2, \dots, m, \dots$$

где

$$z_{k,s}(t, \phi, y_1)$$

— почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\alpha^q]$  и периодические функции  $\phi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому формальное решение рассматриваемой системы уравнений (739) будет:

$$x_1 = y_1 + \varepsilon z_{1,1}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) + \varepsilon^2 z_{1,2}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) + \dots$$

$$x_2 = y_2 + \varepsilon z_{2,1}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) + \varepsilon^2 z_{2,2}(t, \omega_0 t + y_2, y_1) + \dots,$$

где:

$$\frac{dy_1}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{1,s}(y_1)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{2,s}(y_1)$$

или, что то же самое:

$$x_1 = a + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{1,s}(t, \psi, a) \quad (791)$$

$$x_2 + \omega_0 t = \psi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{2,s}(t, \psi, a)$$

где:

$$\frac{da}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{1,s}(a) \quad (792)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{2,s}(a)$$

Уравнения  $m$ -го приближения представляются, следовательно, в виде:

$$\frac{da}{dt} = \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(a) \quad (793)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(a)$$

Таким образом в рассматриваемом нерезонансном случае ( $\omega_0$  и  $\alpha_q$  не имеют общего базиса) переменные в уравнениях  $m$ -го приближения разделены и потому могут быть проинтегрированы в квадратуру:

$$t = \int_a^a \frac{da}{\sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(a)}$$

$$\psi = \int_a^a \frac{da}{\sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(a)} \left( \omega_0 + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(a) \right)$$

Исследование уравнений типа (793) может быть к тому же легко произведено при помощи различных графических приемов, о чем мы уже подробно говорили в первых параграфах настоящей монографии.

Кроме того, качественная структура решений этих уравнений весьма проста.



Именно (предполагая условие ограниченности выполненным), существует система „циклических“ решений с постоянной величиной  $a$ :

$$a = a_0$$

$$\psi = \left\{ \omega_0 + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(a_0) \right\} t + \varphi \quad (794)$$

где

$$\sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(a_0) = 0$$

каждое из которых зависит от одной произвольной угловой постоянной  $\varphi$ . Всякое другое решение

$$a = a(t), \quad \psi = \psi(t)$$

уравнений  $m$ -го приближения, при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к одному из таких циклических решений (794).

Подставляя формальные разложения (791) в формулы преобразования (738), имеем следующее выражение для формального решения уравнения второго порядка (737):

$$x = a \sin \psi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_s(t, \psi, a) \quad (795)$$

где

$$z_s(t, \psi, a) = \frac{1}{s!} \left\{ \frac{\partial^s}{\partial \varepsilon^s} \left( a + \sum_{r=1}^s \varepsilon^r z_{1,r} \right) \sin \left( \psi + \sum_{r=1}^s \varepsilon^r z_{2,r} \right) \right\}_{\varepsilon=0} \quad (796)$$

Выражения

$$z_s(t, \psi, a)$$

$$s = 1, 2, \dots, m, \dots$$

будут, очевидно, периодическими функциями  $\psi$  с периодом  $2\pi$  и почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\alpha_g]$ .

Те же выражения для

$$z_s(t, \psi, a)$$

можно было бы получить и независимо от преобразования уравнения (737) в систему (739).

Для этого стоило бы лишь подставить формальное решение (795) в обе части уравнения (737) и исключить производные величин  $a$  и  $\psi$  при помощи уравнений (792).

Разлагая обе части получаемого соотношения в ряд по степеням  $\varepsilon$  и приравнявая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях этого параметра, имеем систему уравнений для определения

$$z_s; Y_{1,s}; Y_{2,s}$$

аналогичную системе (785).

Об этом способе получения формального решения мы уже говорили в § 10.

Определив так или иначе выражения

$$z_s(t, \phi, a)$$

и останавливаясь в разложении (795) на  $m$ -ом члене, имеем „ $m$ -ое приближение“ в виде:

$$x^{(m)} = a \sin \phi + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_s(t, \phi, a) \quad (797)$$

где  $a$  и  $\phi$  — решения уравнений  $m$ -го приближения (793).

Это  $m$ -ое приближение удовлетворяет уравнению (737) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$  и притом равномерно в интервале  $(0 \leq t < +\infty)$ .

Из (797) вытекает, что циклическим решениям (794) уравнений  $m$ -го приближения, соответствует почти периодическое  $x^{(m)}$  (зависящее от одной угловой произвольной постоянной):

$$x^{(m)} = a_0 \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_s(t, \omega t + \varphi, a_0) \quad (798)$$

с базисом

$$\omega, \alpha_q$$

где

$$\omega = \omega_0 + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(a_0)$$

Так как всякое решение уравнений  $m$ -го приближения при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к одному из циклических, то мы видим, что любое приближенное решение  $x^{(m)}(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  приближается к одному из почти периодических решений (798). Условимся теперь называть свойством формального решения какое-либо свойство  $E$ , которым обладает  $m$ -ое приближенное решение  $x_m$  при любом значении индекса  $m$ .

Тогда на основании только что сказанного, имеем следующие основные качественные свойства формальных решений.



Существует система почти периодических формальных решений:

$$x = a \sin(\omega t + \varphi) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_s(t, \omega t + \varphi, a) \quad (799)$$

с базисом

$$\omega, \alpha_q$$

где:

$$\omega = \omega_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{2,s}(a)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{1,s}(a) = 0$$

Всякое формальное решение при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к одному из почти периодических (799).

В дальнейшем мы будем называть такого рода качественную структуру формальных решений нормальной. Именно мы будем говорить, что формальные решения обладают нормальной структурой, если:

- 1) имеется система почти периодических формальных решений;
- 2) всякое формальное решение, при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к одному из решений этой системы.

Нетрудно заметить, что случай нормальной структуры допускает простую физическую интерпретацию.

Например, почти периодические формальные решения соответствуют „стационарным состояниям“ данной колебательной системы, все же остальные — не стационарным, транзиторным (переходным) состояниям, приближающимся с течением времени к одному из стационарных.

Благодаря почти периодичности формальных решений соответствующих стационарным состояниям, стационарные колебания могут быть разложены на гармонические компоненты и обладают, таким образом, определенным гармоническим спектром.

Возможность гармонического анализа стационарных колебаний и связанная с этим возможность спектрального анализа энергии (и других физических величин) имеет, очевидно, основное физическое значение.

Возвращаясь к рассмотрению формального решения (799), мы видим, что частоты соответствующих стационарных колебаний

представляются линейными комбинация (с целочисленными коэффициентами) величин

$$\omega, \alpha_q.$$

Так как величины

$$\alpha_q$$

образуют частотный базис выражения

$$f(t, x, x')$$

как функции времени  $t$ , то мы можем интерпретировать эти величины как частотный базис внешних возмущающих сил.

Аналогично, величину

$$\omega = \omega_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{2,s}(a)$$

можно интерпретировать как соответствующую собственной частоте рассматриваемых стационарных колебаний.

В „случае вырождения“, в котором  $a = 0$ ,

$$z_s(t, \psi, a)$$

не зависят от  $\psi$ :

$$z_s(t, \psi, 0) = z_s(t)$$

и собственная частота не присутствует явно в соответствующем формальном решении:

$$x = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_s(t)$$

Здесь мы имеем, следовательно, случай гетеропериодических колебаний с частотным базисом внешних возмущающих сил.

До сих пор мы предполагали, что величины

$$\omega_0 \text{ и } \alpha_q$$

не имеют общего базиса.

Примем теперь обратное допущение (резонансный случай) и пусть  $[\beta_q]$  будет общим базисом этих величин.

Тогда из рассмотрения системы уравнений (785) убеждаемся, что выражения

$$z_{k,s}; Y_{k,s}$$

могут быть представлены в виде:

$$z_{k,s} = z_{k,s}(t, y_1, y_2)$$

$$Y_{k,s} = Y_{k,s}(y_1, y_2)$$



где:

$$z_{k,s}(t, y_1, y_2): Y_{k,s}(y_1, y_2)$$

являются периодическими функциями  $y_2$ , с периодом  $2\pi$  и где

$$z_{k,s}(t, y_1, y_2)$$

есть почти периодические функции  $t$  с базисом  $[\beta_q]$ .

Таким образом, формальное решение системы (739) представится в виде:

$$x_1 = a + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{1,s}(t, a, \varphi), \quad (800)$$

$$x_2 = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{2,s}(t, a, \varphi)$$

где:

$$\frac{da}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{1,s}(a, \varphi) \quad (801)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{2,s}(a, \varphi)$$

Подставляя разложения (800) в формулы преобразования (738) получаем формальное решение для исходного уравнения второго порядка (737):

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_s(t, a, \varphi) \quad (802)$$

где

$$z_s(t, a, \varphi) = \frac{1}{s!} \left\{ \frac{d^s}{ds^s} \left( a + \sum_{r=1}^s \varepsilon^r z_{1,r} \right) \sin \left( \omega_0 t + \varphi + \sum_{r=1}^s \varepsilon^r z_{2,r} \right) \right\}_{\varepsilon=0} \quad (803)$$

Как показывает соотношение (803), выражения

$$z_s(t, a, \varphi)$$

$$s = 1, \dots, m, \dots$$

будут периодическими функциями  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  и почти периодическими функциями  $t$  с базисом  $[\beta_q]$ .

По поводу полученного формального решения (802) уравнения (737) мы можем сделать те же замечания, что и по поводу формального решения (795) этого уравнения, соответствовавшему нерезонансному случаю.

Именно, мы можем утверждать что коэффициенты:

$$z_s(t, a, \varphi); \quad Y_{1,s}(a, \varphi); \quad Y_{2,s}(a, \varphi) \quad s = 1, 2, \dots, m, \dots$$

разложений (801) и (802) могли бы быть определены независимо от преобразования уравнения (737) в систему (739) путем непосредственной подстановки разложений (802) в обе части уравнения (737) и последующего исключения производных посредством уравнений (801).

Остановившись в рядах (801) и (802) на  $m$ -ом члене имеем „ $m$ -ое приближение“:

$$x^{(m)} = a \sin(\omega_0 t + \varphi) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_s(t, a, \varphi) \quad (804)$$

где:

$$\frac{da}{dt} = \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(a, \varphi) \quad (805)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(a, \varphi)$$

Это  $m$ -ое приближение удовлетворяет исходному уравнению второго порядка (737) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ , и притом равномерно в интервале  $(0, \infty)$ . Рассматривая уравнения  $m$ -го приближения (805), мы видим, что в отличие от нерезонансного случая разделения переменных не происходит и уравнения эти в общей форме не интегрируются.

Однако качественная структура решений уравнений  $m$ -го приближения, как в этом можно убедиться с помощью теории Пуанкаре, весьма проста.

Именно <sup>1)</sup>, существует система периодических решений <sup>2)</sup>, могущих вырождаться в постоянные <sup>3)</sup>, причем всякое иное решение,

<sup>1)</sup> При этом предполагается, что условие ограниченности выполнено.

<sup>2)</sup> Так как  $\varphi$  — угловая переменная, то периодическим называем не только периодическое решение в обычном смысле (периодическое решение первого рода), когда:

$$a(t+T) = a(t), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t)$$

но также и периодическое решение второго рода, когда

$$a(t+T) = a(t), \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2n\pi$$

где  $n$  — целое.

<sup>3)</sup> Постоянное решение  $x(t) = \text{const} = x$ ,  $y(t) = \text{const} = y$  соответствует, очевидно, точке равновесия системы (805):

$$\sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{1,s}(x, y) = 0; \quad \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{2,s}(x, y) = 0$$



при  $t \rightarrow +\infty$ , приближается<sup>1)</sup> к одному из решений этой системы.

Периодическим решениям в собственном смысле соответствуют почти периодические  $x^{(m)}$  с базисом  $[\Omega, \beta_q]$ , где  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$  и  $T$  — период решения.

Постоянным решениям соответствуют почти периодические  $x^{(m)}$  с базисом  $[\beta_q]$ .

Таким образом в рассматриваемом резонансном случае формальные решения (802) также обладают нормальной структурой.

Рассмотрим теперь в качестве дополнительного примера приложения изложенного метода построения приближенных решений случай консервативной колебательной системы, для которой соответствующие дифференциальные уравнения представлены в канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned} \quad (806)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

где

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s H_s(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad (807)$$

и где  $\rho$  — малый параметр.

Предположим, что мы имеем каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} p_k &= P_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \\ q_k &= Q_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \end{aligned} \quad (808)$$

<sup>1)</sup> Если все точки равновесия системы (805) являются центрами, фокусами или узлами, то термин „приближается“ имеет здесь обычный смысл, а именно — расстояние от точки  $a(t), \varphi(t)$  до одной из траекторий периодических решений стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . В общем же случае „приближение“ имеет более слабый характер:

$$\frac{1}{t} \int_0^t D_t dt \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

где  $D_t$  — расстояние точки  $a(t), \varphi(t)$  до ближайшей траектории периодического решения.

где

$$J_1, \dots, J_n$$

— переменные действия, а

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

— сопряженные угловые переменные, преобразующие гамильтониан

$$H_0(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

к виду:

$$H_0(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n) = G_0(J_1, \dots, J_n)$$

Тогда, переходя в уравнениях (806) с помощью формул (803) к переменным

$$J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n$$

получаем:

$$\frac{dJ_k}{dt} = - \sum_{s=1}^{\infty} \rho^s \frac{\partial G_s}{\partial \omega_k} \quad (809)$$

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \frac{\partial G_0(J_1, \dots, J_n)}{\partial J_k} + \sum_{s=1}^{\infty} \rho^s \frac{\partial G_s}{\partial J_k}$$

где

$$G_s = H_s(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n) = G_s(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n); s=1, 2, \dots, m, \dots$$

Эти уравнения (809) при  $\rho = 0$  точно интегрируются:

$$J_k = J_k^0, \quad \omega_k = \omega_k t + \varphi_k$$

где

$$\omega_k = G'_{0Jk}(J_1^0, \dots, J_n^0)$$

и где

$$J_1^0, \dots, J_n^0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

— произвольные постоянные.

Рассматривая случай  $\rho \neq 0$ , совершим в этих уравнениях замену переменных, полагая:

$$J_k = C_k + \varepsilon I_k, \quad \omega_k = \omega_k t + \varphi_k \quad (810)$$

где:

$$\varepsilon = \sqrt{\rho}, \quad \omega_k = G'_{0Jk}(c_1, \dots, c_n) \quad (811)$$



и где

$$c_1, \dots, c_n$$

— произвольные постоянные, а

$$I_1, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

— новые неизвестные.

Отсюда, очевидно, имеем:

$$\frac{dI_k}{dt} = - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{2s-1} \frac{\partial G_s(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)}{\partial \varphi_k}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = G'_{0Jk}(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n) - G'_{0Jk}(c_1, \dots, c_n) + \quad (812)$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{2s-1} \frac{\partial G_s(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)}{\partial I_k}$$

Положим для сокращения:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^{2s-1} G_s(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon) =$$

$$= \Gamma_1(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon)$$

$$G_0(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n) - G_0(c_1, \dots, c_n) - \varepsilon \sum_{q=1}^n I_q G'_{0Jq}(c_1, \dots, c_n) \quad (813)$$


---


$$= \Gamma_0(I_1, \dots, I_n, \varepsilon)$$

$$\Gamma_0(I_1, \dots, I_n, \varepsilon) + \Gamma_1(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon) = \Gamma(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon)$$

и заметим, что функции

$$\Gamma_1(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon), \quad \Gamma_0(I_1, \dots, I_n, \varepsilon), \quad \Gamma(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon)$$

могут быть разложены<sup>1)</sup> в ряды по возрастающим степеням  $\varepsilon$ .

Имеем, например:

$$\Gamma(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s g_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \quad (814)$$

<sup>1)</sup> Мы предполагаем, разумеется, что выражения:

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_s(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

$$P_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$Q_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

являются регулярными аналитическими функциями переменных

$$p, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n$$

где

$$g_s = \frac{1}{(s+2)!} \left\{ \frac{\partial^{s+2} G_0(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n)}{\partial \varepsilon^{s+2}} \right\}_{\varepsilon=0} +$$

$$+ \frac{1}{s!} \left\{ \frac{\partial^s}{\partial \varepsilon^s} \sum_{r=1}^s \varepsilon^{2(r-1)} G_r(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1, \dots, \omega_n) \right\}_{\varepsilon=0} \quad (815)$$

Воспользовавшись соотношениями (813), можем представить систему уравнений (812) в виде:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\varepsilon \frac{d\Gamma}{d\varphi_k} \quad (816)$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varepsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial I_k}$$

где

$$\Gamma = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s g_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$$

Так как выражения

$$g_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

являются периодическими функциями переменных

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

с периодом  $2\pi$ , то коэффициенты

$$g_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$$

в разложении гамильтониана  $\Gamma$  по степеням  $\varepsilon$ , будут почти периодическими функциями  $t$  с базисом

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

Как видно, система уравнений (816) является системой типа (736) и следовательно, для нахождения приближенных решений мы можем применять изложенный выше метод.

В соответствии с основным результатом этого метода формальное решение для системы (816) может быть представлено в следующей форме:

$$I_k = x_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s F_{k,s}(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \quad (817)$$

$$\varphi_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \Phi_{k,s}(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$



где:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s X_{k,s}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \quad (818)$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{k,s}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

Здесь

$$F_{k,s}, \quad \Phi_{k,s}$$

почти периодические функции  $t$  с базисом

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

Кроме того

$$F_{k,s}; \quad \Phi_{k,s}; \quad X_{k,s}; \quad Y_{k,s} \quad (819)$$

являются периодическими функциями угловых переменных

$$y_1, \dots, y_n$$

с периодом  $2\pi$ .

На основании (765) имеем следующую систему уравнений для последовательного определения выражений (819):

$$\frac{\partial F_{k,1}}{\partial t} = - \frac{\partial g_0(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)}{\partial y_k} - X_{k,1}$$

$$\frac{\partial \Phi_{k,1}}{\partial t} = \frac{\partial g_0(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)}{\partial x_k} - Y_{k,1}$$

.....

$$\frac{\partial F_{k,m+1}}{\partial t} = - \frac{\partial \Pi_{k,m}}{\partial y_k} - \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \left\{ \frac{\partial F_{k,s}}{\partial x_q} X_{q,r} + \frac{\partial F_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r} \right\} - X_{k,m+1} \quad (820)$$

$$\frac{\partial \Phi_{k,m+1}}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_{k,m}}{\partial x_k} + \sum_{q=1}^n \sum_{\substack{s+r=m+1 \\ s \geq 1, r \geq 1}} \left\{ \frac{\partial \Phi_{k,s}}{\partial x_q} X_{q,r} + \frac{\partial \Phi_{k,s}}{\partial y_q} Y_{q,r} \right\} - Y_{k,m+1}$$

.....

где

$$\begin{aligned} \Pi_{k,m} &= \Pi_{k,m}(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, F_{1,1}, \dots, F_{n,1}, \Phi_{1,1}, \dots, \Phi_{n,1}, \dots, F_{1,m}, \dots, F_{n,m}) = \\ &= \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial \varepsilon^m} \sum_{s=0}^m \varepsilon^s g_s(x_1 + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r F_{1,r}, \dots, x_n + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r F_{n,r}, \omega_1 t + y_1 + \right. \\ &\left. + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r \Phi_{1,r}, \dots, \omega_n t + y_n + \sum_{r=1}^{m-s} \varepsilon^r \Phi_{n,r}) \right\}_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (818)$$

Предположим, что выполнены условия (например, условия теоремы  $\alpha$ ), обеспечивающие возможность однозначного определения выражений

$$F_{k,s}; \quad \Phi_{k,s}; \quad X_{k,s}; \quad Y_{k,s}$$

удовлетворяющих нашим требованиям. Мы будем поэтому предполагать абсолютно и равномерно сходящимися все те разложения, которые получаются при последовательном решении уравнений системы (820).

Рассмотрим теперь специально случай, когда величины

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

являются линейно независимыми (нерезонансный случай), т. е. когда между этими величинами не существует ни одного соотношения вида

$$n_1 \omega_1 + \dots + n_n \omega_n = 0$$

где

$$n_1, \dots, n_n$$

— некоторые целые числа, не равные тождественно нулю.

Покажем, что в этом нерезонансном случае выражения:

$$F_{k,s}, \quad \Phi_{k,s}, \quad X_{k,s}, \quad Y_{k,s}$$

могут быть представлены в следующей форме:

$$F_{k,s} = L_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)$$

$$\Phi_{k,s} = M_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)$$

$$X_{k,s} = 0 \quad (822)$$

$$Y_{k,s} = \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$



где:

$$L_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$M_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

— периодические функции переменных

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

с периодом  $2\pi$ .

В самом деле, рассмотрим кратные разложения Фурье:

$$g_0(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n) = \\ = A(x_1, \dots, x_n) + \sum_{m_1^2 + \dots + m_n^2 \neq 0} \dots \sum A_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) e^{j\{m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n\}}$$

и представим два первых уравнения системы (820) в виде:

$$\frac{\partial F_{k,1}}{\partial t} = -X_{k,1} -$$

$$- \sum_{m_1^2 + \dots + m_n^2 \neq 0} \dots \sum A_{m_1, \dots, m_n} j m_k e^{j\{m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n\}t} e^{j\{-m_1 y_1 + \dots + m_n y_n\}}$$

$$\frac{\partial \Phi_{k,1}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x_k} Y_{k,1} +$$

$$+ \sum_{m_1^2 + \dots + m_n^2 \neq 0} \dots \sum \frac{\partial A_{m_1, \dots, m_n}}{\partial x_k} e^{j\{m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n\}t} e^{j\{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n\}}$$

Следовательно, мы получим:

$$X_{k,1} = 0$$

$$Y_{k,1} = \frac{\partial A}{\partial x_k}$$

$$F_{k,1} = - \sum_{m_1^2 + \dots + m_n^2 \neq 0} \dots \sum \frac{m_k A_{m_1, \dots, m_n}}{m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n} e^{j\{m_1 \psi_1 + \dots + m_n \psi_n\}}$$

$$\Phi_{k,1} = \sum_{m_1^2 + \dots + m_n^2 \neq 0} \dots \sum \frac{\partial A_{m_1, \dots, m_n}}{j\{m_1 \omega_1 + \dots + m_n \omega_n\}} e^{j\{m_1 \psi_1 + \dots + m_n \psi_n\}}$$

где

$$\psi_n = \omega_n t + y_n$$

Таким образом мы видим, что соотношения (812) доказаны для  $s=1$ . Применяя способ индукции от  $m$  к  $m+1$ , убеждаемся в справедливости этих соотношений и для всех остальных значений индекса  $s=1, 2, 3, \dots, m, \dots$

Формальное решение системы (816) может быть, следовательно, представлено в виде:

$$I_k = x_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)$$

$$\varphi_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \omega_1 t + y_1, \dots, \omega_n t + y_n)$$

где:

$$\frac{dx_k}{dt} = 0$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{dx_k}$$

или, что то же самое:

$$I_k = x_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n) \quad (823)$$

$$\omega_k = \varphi_k + \omega_k t = \psi_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n),$$

где:

$$\frac{dx_k}{dt} = 0 \quad (824)$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{dx_k}$$

В частности уравнения  $m$ -го приближения будут:

$$\frac{dx_k}{dt} = 0$$

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \omega_k + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{dx_k}$$

т. е.

$$x_k = \text{const} \quad (825)$$

$$\psi_k = \nu_k t + \theta_k$$



где:

$$\nu_k = \omega_k + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

$$\theta_k = \text{const}$$

Итак, в рассматриваемом нерезонансном случае консервативных колебательных систем решение уравнений  $m$ -го приближения тривиально.

В виду цикличности общего решения (825) этих уравнений убеждаемся, что в рассматриваемом случае формальные решения обладают нормальной структурой, причем при любых значениях „произвольных постоянных“ формальное решение соответствует стационарному состоянию.

Заметим теперь, что на основании (824) мы можем представить формальное решение системы (816) в следующей форме:

$$I_k = x_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \nu_1 t + \theta_1, \dots, \nu_n t + \theta_n)$$

$$\omega_k = \omega_k t + \varphi_k =$$
(826)

$$= \nu_k t + \theta_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s M_{k,s}(x_1, \dots, x_n, \nu_1 t + \theta_1, \dots, \nu_n t + \theta_n)$$

где:

$$\nu_k = \omega_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \frac{\partial \Omega_s(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

и где

$$x_1, \dots, x_n, \theta_1, \dots, \theta_n$$

— произвольные постоянные.

Подставляя (826) в формулы преобразования (810) и (808), получим формальное решение, для исходной системы дифференциальных уравнений (806), зависящее от  $3n$  произвольных постоянных:

$$c_1, \dots, c_n, x_1, \dots, x_1, \theta_1, \dots, \theta_n$$

Так как общее решение этой системы (806) должно характеризоваться лишь  $2n$  произвольными постоянными, то величинами

$$x_1, \dots, x_n$$

можем распоряжаться по нашему усмотрению.

В частности можем положить, например:

$$x_1 = 0, \dots, x_n = 0$$

С другой стороны, не трудно убедиться, что тождественно <sup>1)</sup>:

$$L_{k,s}(0, \dots, 0, \omega_1, \dots, \omega_n) = 0$$

для четных значений  $s$ , и

$$M_{k,s}(0, \dots, 0, \omega_1, \dots, \omega_n) = 0$$

$$\Omega'_{s,x_k}(0, \dots, 0) = 0$$

для нечетных значений этого индекса.

Поэтому мы можем написать:

$$L_{k,s}(0, \dots, 0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} R_{k,m}(c_1, \dots, c_n, \omega_1, \dots, \omega_n), & \text{если } s = 2m - 1 \\ 0 & \text{если } s = 2m \end{cases}$$

$$M_{k,s}(0, \dots, 0, \omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{cases} \overset{*}{R}_{k,m}(c_1, \dots, c_n, \omega_1, \dots, \omega_n), & \text{если } s = 2m \\ 0 & \text{если } s = 2m - 1 \end{cases}$$

$$\Omega'_{s,x_k}(0, \dots, 0) = \begin{cases} v_{k,m}(c_1, \dots, c_n), & \text{если } s = 2m \\ 0 & \text{если } s = 2m - 1 \end{cases}$$

и представить, таким образом, общее формальное решение для (806) в следующей форме:

$$p_k = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^m P_{k,m}(c_1, \dots, c_n, v_1 t + \theta_1, \dots, v_n t + \theta_n) \quad (827)$$

$$q_k = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^m Q_{k,m}(c_1, \dots, c_n, v_1 t + \theta_1, \dots, v_n t + \theta_n)$$

$$v_k = \omega_k(c_1, \dots, c_n) + \sum_{s=1}^{\infty} \rho^m v_{k,m}(c_1, \dots, c_n) \quad (828)$$

где:

$$P_{k,m} = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{d\rho^m} P_k(c_1 + \sum_{s=1}^m \rho^s R_{1,s}, \dots, c_n + \sum_{s=1}^m \rho^s R_{n,s}, \omega_1 + \sum_{s=1}^m \rho^s \overset{*}{R}_{1,s}, \dots, \omega_n + \sum_{s=1}^m \rho^s \overset{*}{R}_{n,s}) \right\}_{\rho=0}$$

$$Q_{k,m} = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{d\rho^m} Q_k(c_1 + \sum_{s=1}^m \rho^s R_{1,s}, \dots, c_n + \sum_{s=1}^m \rho^s R_{n,s}, \omega_1 + \sum_{s=1}^m \rho^s \overset{*}{R}_{1,s}, \dots, \omega_n + \sum_{s=1}^m \rho^s \overset{*}{R}_{n,s}) \right\}_{\rho=0}$$

<sup>1)</sup> См. формулы (813), (817) (820) и (821).



## Коэффициенты

$$P_{k,m}; Q_{k,m}; \nu_{k,m}$$

(829)

разложений (827) и (828) могли бы быть определены и независимо от изложенных выше рассуждений.

Мы могли бы, например, подставить разложения (827) в обе части уравнений системы (806), разложить результат подстановки по возрастающим степеням  $\rho$  и приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых степенях  $\rho$ .

Полученная система соотношений вместе с условиями периодичности

$$P_{k,m}(c_1, \dots, c_n, \omega_1, \dots, \omega_n); Q_{k,m}(c_1, \dots, c_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

по отношению к переменным (с периодом  $2\pi$ )

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

и позволит определить <sup>1)</sup> выражения (829).

Этот способ есть, очевидно, не что иное, как известный в теории возмущений метод Линшtedта.

Мы видим, таким образом, что из вышеизложенного метода <sup>2)</sup>, как частный случай, получается метод Линшtedта.

Применяя наш метод к резонансному случаю (случай вырождения, по терминологии, принятой в теории возмущений), получим формальные решения рассматриваемых уравнений (806) в виде рядов, расположенных по квадратным корням параметра  $\rho$ , аналогичных разложениям известного метода Боленy.

Не останавливаясь сейчас на рассмотрении этих случаев, заметим, что при  $i$ -кратном резонансе, т. е. при выполнении  $i$  независимых друг от друга соотношений вида:

$$n_1^{(1)}\omega_1 + \dots + n_1^{(1)}\omega_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n_i^{(i)}\omega_1 + \dots + n_i^{(i)}\omega_n = 0$$

(где  $n_k^{(q)}$  — целые), задача интегрирования уравнений  $m$ -го приближения сводится к задаче интегрирования системы  $2i$  канонических уравнений.

<sup>1)</sup> См., напр., § 4, где аналогичные вычисления были произведены для элементарного случая уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x + \varepsilon P(x) = 0$$

<sup>2)</sup> В применении к нерезонансному случаю консервативных систем.

В частности для резонанса простой (единичной) кратности надлежит проинтегрировать каноническую систему двух уравнений с гамильтонианом, не зависящим от времени, что в виду существования „интеграла энергии“ может быть выполнено в квадратурах.

На рассмотренных выше примерах мы видели, что во многих важных случаях решение уравнений  $m$ -го приближения не представляет затруднений.

Следует, однако, подчеркнуть, что все же, в общем случае, практическое применение изложенного метода наталкивается на трудности интегрирования уравнений  $m$ -го приближения.

Сделаем теперь ряд критических замечаний по поводу этого метода.

Заметим, например, что хотя при известных ограничительных условиях (например, при условиях теоремы  $\beta$  или  $\delta$ ) и получаются приближенные решения  $x_k^{(m)}$ , удовлетворяющие исходным уравнениям с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ , равномерно по отношению  $kt$ , но это, разумеется, никоим образом не означает, что указанные приближенные решения  $x_k^{(m)}$  равномерно по отношению к  $t$  представляют самые решения  $x_k$  рассматриваемых уравнений с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^{m+1}$ .

В самом деле, из неравенства вида:

$$\left| \frac{dx_k^{(m)}}{dt} - \varepsilon X_k(t, x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \varepsilon) \right| \leq Q_m \varepsilon^{m+1}$$

которым удовлетворяют получаемые приближенные решения, можно вообще лишь заключить, что

$$\left| x_k^{(m)} - x_k \right| \leq Q_m \varepsilon^{m+1} \left\{ \frac{e^{\varepsilon \lambda_m t} - 1}{\varepsilon \lambda_m} \right\} \quad (830)$$

$$\lambda_m \leq \max \sum_{q=1}^m \left| \frac{\partial X_k}{\partial x_q} \right|$$

и где  $x_k$  — решения рассматриваемых уравнений при начальных условиях

$$x_k = x_k^{(m)}, \text{ для } t = 0$$



Разумеется, эти неравенства (830) могут быть значительно улучшены, однако убрать  $t$  из экспоненциала, вообще говоря, не удастся, за исключением того случая, когда  $x_k^{(m)}$  соответствует гетеропериодическим колебаниям.

По поводу возможности равномерного приближения точных решений, следует, вообще говоря, заметить, что вряд ли можно построить какой-либо метод, дающий такое приближение в общем случае.

Дело в том, что приближать равномерно (по отношению к  $t$ ) даже самую простую периодическую функцию, напр.  $\sin \omega t$ , можно лишь такими периодическими функциями  $f_m(t)$ , периоды которых точно соизмеримы с периодом  $\frac{2\pi}{\omega}$  функции  $\sin \omega t$ .

В самом деле, если  $f_m(t)$  есть какая-либо периодическая функция с периодом, не соизмеримым с  $\frac{2\pi}{\omega}$ , то очевидно:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t < +\infty} |f_m(t) - \sin \omega t| &\geq \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f_m(t) - \sin \omega t|^2 dt =} \\ &= \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f_m(t)|^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} > \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Поэтому, чтобы равномерно аппроксимировать какие-либо почти периодические решения, надо, вообще говоря, точно знать частоты их гармонических компонентов, что вряд ли можно требовать от какого бы то ни было аппроксимационного метода.

Может, конечно, представиться случай исключения, если дело идет о гетеропериодических колебаниях, т. е. о почти периодических решениях с заданным а priori базисом частот.

Заметим еще, что если  $\varepsilon$  хотя и достаточно мало, но фиксировано, а  $m \rightarrow \infty$ , получаемые приближенные решения  $x_k^{(m)}$ , вообще говоря, не стремятся к искомым точным решениям и потому при помощи вышерассмотренного метода нельзя при фиксированном  $\varepsilon$  получить какую угодно большую точность. Впрочем, это может рассматриваться как препятствие для практической эффективности метода, так как на практике число  $m$  не только

не стремится к бесконечности, а берется равным 1, 2, 3, вообще малым (так как при большом  $m$  вычисления становятся слишком сложными).

С теоретической точки зрения, однако, отсутствие сходимости, при  $m \rightarrow \infty$ , представляет серьезное препятствие для изучения качественной структуры точных решений, так как при отсутствии сходимости получаемые формальные решения не являются решениями наших уравнений в обычном смысле, представляя собой в сущности лишь собрания формул для асимптотической аппроксимации этих решений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому свойства формальных решений есть по существу лишь свойства этих асимптотических формул, а не точных решений. Так например, из того факта, что формальные решения обладают нормальной структурой, никоим образом не вытекает, что такова будет и структура настоящих решений.

В частности и то соответствие, о котором мы говорили, между стационарными состояниями колебательной системы и почти периодическими формальными решениями имеет лишь приближенный асимптотический характер (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Возникает, таким образом, вопрос об изучении взаимоотношений между качественными свойствами формальных, т. е. приближенных, решений и соответствующими качественными свойствами точных решений. Вопрос этот для случая уравнений вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

где  $f(t, x, x')$  — периодическая функция  $t$ , был рассмотрен в нашей монографии „Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний“,

В несколько более общем виде вопрос этот исследуется в мемуаре, который будет нами опубликован в одном из ближайших выпусков „Записок Кафедры Математической Физики“.

Все же в общем случае проблема изучения соответствия между качественными свойствами формальных и точных решений остается пока совершенно открытой.

Заметим, наконец, что в наших рассуждениях мы предполагали, что  $\varepsilon$  „как угодно“ мал. В приложениях же параметр этот обычно хотя и „малая“, но фиксированная постоянная величина.



Кроме того, во многих случаях, параметр  $\varepsilon$  не фигурирует явно в уравнениях, и его введение является искусственным приемом, а иногда и просто гипотезой, находящей свое оправдание в совпадении теоретического результата с экспериментом.

В виду всех этих трудностей, с которыми сопряжено исследование колебательных процессов путем построения асимптотических приближений, выдвигается, по нашему мнению, на первый план проблема непосредственного качественного изучения решений дифференциальных уравнений, нелинейной механики не аппроксимационными, а теоретико-множественными и топологическими методами. Так, весьма интересно было бы установить, что в достаточно общем случае точные решения имеют некоторые свойства, подобные свойствам нормальной структуры формальных решений, как например, существование системы „стационарных“ решений, обладающих определенным гармоническим спектром, приближение (при  $t \rightarrow +\infty$ ) всякого решения к одному из „стационарных“ и т. п.

Следует заметить, что при физическом или техническом исследовании колебательных систем, свойства эти обычно прямо постулируются, как очевидные. Однако строгое математическое их обоснование представляет весьма значительные трудности и требует привлечения аппарата современной теории меры (теории абсолютно-аддитивных функций множеств), теории конвексных пространств и эргодической теории В. Коорман'а — J. v. Neumann'а — Е. Нор'а — G. Birkhoff'а.

Ближайшие номера „Сборника трудов Кафедры математической физики“ будут посвящены изложению наших исследований в этой области.

## RÉSUMÉ

Cette monographie est consacrée à l'exposition systématique des méthodes approchées pour l'étude des oscillations non linéaires dans les systèmes dynamiques voisins des systèmes linéaires.

Nous considérons donc les systèmes oscillants régis par les équations différentielles qui contiennent un paramètre  $\varepsilon$ , qui ne peut prendre que des valeurs suffisamment petites, et cela de façon que pour sa valeur nulle ces équations dégénèrent en équations différentielles linéaires avec les coefficients constants.

Vu la petitesse des termes non linéaires, proportionnelle à celle de  $\varepsilon$ , le problème qui se pose ici consiste dans la recherche des solutions approchées vérifiant les équations considérées avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$ ,  $m=1, 2, 3 \dots$

Il s'agit donc de la formation des formules asymptotiques pour les solutions cherchées au voisinage de la valeur nulle de  $\varepsilon$ .

Il semble du premier abord qu'on pourrait y appliquer les procédés usuels pour le développement des solutions dans les séries ordonnées suivant les puissances du paramètre  $\varepsilon$ .

Or, les séries ainsi formées possèdent un caractère commun qui s'oppose à leur emploi dans les calculs pour les grandes valeurs du temps  $t$ .

En effet ces séries contiennent, en général, les termes dits séculaires, dans lesquels le temps  $t$  sort du signe de sinus, et de cosinus. Grâce à ces termes l'erreur, avec laquelle la solution approchée (obtenue en s'arrêtant au  $m^{\text{ème}}$  terme dans les séries considérées) vérifie les équations différentielles données, tout en étant de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$  pour les valeurs fixes de  $t$ , croît indéfiniment avec l'augmentation de  $t$ . Les séries obtenues ne sont par conséquent utilisables que pour les durées suffisamment petites du temps.

Or, dans la mécanique non linéaire il s'agit surtout de l'étude des oscillations pendant de longues durées de temps. On pose



donc le problème concernant l'élaboration des méthodes pour la formation des solutions approchées vérifiant les équations différentielles données avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) uniformément par rapport à  $t$ .

Des questions tout à fait analogues ont été rencontrées déjà dans la théorie de la perturbation de la mécanique céleste.

On doit remarquer cependant que les systèmes dynamiques considérés dans cette théorie sont conservatifs et se trouvent régis par les équations canoniques de Hamilton—Jacobi. Les méthodes d'approximation établies par les chercheurs pour les problèmes traités dans la mécanique céleste comme, par exemple, celles de Linstedt, Gylden, Bolin, sont essentiellement fondées sur ce caractère canonique des équations différentielles.

Au contraire, dans la mécanique non linéaire, visant surtout les applications aux problèmes de la technique, ce sont justement les systèmes dynamiques non conservatifs qui jouent le rôle principal, car on doit y tenir compte des forces d'amortissement et parfois aussi des forces provenant des sources d'énergie (dans le cas des systèmes oscillants auto-entretenus).

Pour cette raison les méthodes mentionnées de la théorie de perturbation ne pouvaient être adaptées directement aux problèmes de la mécanique non linéaire et on se trouve devant la nécessité d'élaborer de nouvelles méthodes d'approximation.

La présente monographie contient justement l'exposition de ces méthodes de développement, suivant les puissances du petit paramètre, ne contenant pas de termes séculaires et fournissant les solutions approchées qui vérifient les équations différentielles des systèmes oscillants non conservatifs avec des erreurs de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$  uniformément par rapport à  $t$ .

Une attention toute particulière est consacrée à l'étude de la première approximation vu que la formation effective des approximations supérieures nécessite des calculs qui se compliquent rapidement avec l'augmentation de  $m$  (degré de l'approximation) et aussi vu que dans bien des cas la première approximation est à elle seule suffisante pour se rendre compte des propriétés essentielles des oscillations considérées.

En étudiant les procédés de la formation effective de la première approximation nous avons réussi à établir une règle générale que nous avons appelée „la méthode de la linéarisation équivalente“ permettant d'obtenir les équations définissant cette appro-



ximation en partant directement des données physiques du problème, même sans avoir formé préalablement les équations différentielles exactes du système oscillant considéré.

Cette méthode de linéarisation équivalente réduit le problème de la formation des équations de la première approximation à l'étude d'un système linéaire équivalent obtenu en remplaçant dans le système non linéaire donné, les éléments non linéaires par les éléments linéaires.

Les paramètres de ces éléments linéaires sont définis à l'aide d'un procédé spécial, que nous avons appelé le principe du bilan harmonique, admettant une interprétation physique très simple.

Cela étant, remarquons que dans bien des problèmes se rapportant à la technique des vibrations, les chercheurs, — pour la plupart des ingénieurs et des physiciens — ont déjà utilisé depuis longtemps les concepts fondamentaux de la méthode de la linéarisation équivalente, sans tenir compte, bien entendu, de la connexion étroite de cette méthode avec les méthodes de développement suivant les puissances du petit paramètre.

Mentionnons par exemple les recherches de K. Heegner sur les oscillations non linéaires dans les circuits électriques contenant du fer et surtout la théorie dite quasi-linéaire du fonctionnement de l'oscillateur à lampes.

Cette dernière théorie élaborée par Barkhausen et Möller pour l'étude des oscillations auto-entretenues propres a été étendue tout récemment dans les recherches du Prof. Kobsareff à l'étude de divers phénomènes de résonance provenant des influences extérieures sur l'oscillateur à lampes.

Néanmoins il n'existait pas jusqu'ici une théorie générale de linéarisation, ni des règles rigoureuses au point de vue mathématique, les efforts des chercheurs se concentrant sur l'étude pratique de tel ou tel cas concret.

Grâce à ces circonstances, les ingénieurs, en effectuant la linéarisation, faisaient parfois des erreurs assez grossières (se rapportant surtout à la détermination adéquate des paramètres des systèmes linéaires équivalents) qui suscitaient de vives critiques, visant fréquemment non seulement ces erreurs mais aussi la méthode de la linéarisation en général.

Vu cet état des choses il semble utile d'essayer d'élaborer une théorie de linéarisation plus ou moins générale, ce que nous avons fait dans cette monographie.



Une attention particulière a été donnée au problème de la relation entre la méthode de la linéarisation équivalente et les méthodes des développements asymptotiques suivant les puissances du petit paramètre.

Dans cette direction nous avons montré, par exemple, que la „première approximation améliorée“ obtenue à l'aide de la méthode de linéarisation, vérifie les équations exactes du système oscillant avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^2$ .

Nous espérons que le développement ultérieur de la méthode de la linéarisation équivalente peut donner un appareil mathématique effectif pour l'étude pratique des oscillations non linéaires.

Faisons maintenant un court résumé des sujets traités dans cette monographie.

Dans le § 1 on déduit quelques équations différentielles des systèmes oscillants non linéaires qui seront utilisées plus loin comme des exemples pour l'application des méthodes exposées dans cette monographie.

Dans le § 2 nous considérons la théorie élémentaire de la première approximation pour les systèmes oscillants régis par une équation différentielle de la forme:

$$1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Les formules obtenues de la première approximation, à savoir:

$$x = a \sin \psi$$

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon \Phi(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \nu + \varepsilon \Omega(a)$$

où

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi a\nu} \int_0^{2\pi} f(a \sin \varphi, a\nu \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

sont appliquées à divers exemples concrets pour l'étude des oscillations propres, non linéaires.

Le §.3 est consacré à diverses améliorations des formules de la première approximation et à leurs applications.

Nous avons obtenu, par exemple, l'expression dite „de la première approximation améliorée“:

$$\text{II) } x = a \sin \psi - \frac{\varepsilon}{\nu^2} (a) + \frac{\varepsilon}{\nu^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \cos n\psi + g_n(a) \sin n\psi}{n^2 - 1}$$

où  $f_n(a), g_n(a)$  sont les coefficients de Fourier dans le développement:

$$f(a \sin \tau, a \nu \cos \tau) = f_0(a) + \sum_{n=2}^{\infty} \{ f_n(a) \cos n\tau + g_n(a) \sin n\tau \}$$

Nous avons montré aussi que cette expression (II) vérifie l'équation différentielle considérée (I) avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^2$ .

Pour le cas spécial des équations de la forme:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0$$

des formules plus précises ont été obtenues, par exemple, la formule suivante pour le calcul de la fréquence propre des oscillations stationnaires avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^3$

$$\text{III) } \omega = \nu \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2\nu^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 - 1} \left[ \frac{F_n^*(a)}{a} \right]^2 \right\}$$

où  $F_n^*(a)$  sont les coefficients de Fourier dans le développement

$$F(a \cos \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \cos n\tau$$

et où

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

Les formules ont été appliquées pour l'étude de quelques systèmes oscillants utilisés dans la technique de T. S. E., par exemple au cas de l'oscillateur à lampe.

Dans le § 4 nous considérons les questions se rattachant à la formation des approximations supérieures vérifiant l'équation différentielle (I) avec des erreurs de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$



Ces approximations s'obtiennent en s'arrêtant au  $m$ -ème terme dans les développements spéciaux (ordonnés suivant les puissances croissantes du petit paramètre) ne contenant pas les termes séculaires.

Nous avons considéré d'abord le cas des systèmes conservatifs quand la fonction

$$f(\bar{x}, x')$$

ne dépend que de  $x$ .

Nous avons passé ensuite à la formation des développements pour les solutions stationnaires (périodiques) de l'équation (I) pour le cas où cette fonction dépend de  $x$  et de  $x'$ .

Enfin nous avons élaboré une méthode pour le développement des solutions dans le cas général (cas des oscillations non stationnaires dans les systèmes non conservatifs).

Dans cette méthode on présente les solutions de l'équation considérée sous la forme:

$$x = a \sin \psi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_s(a, \psi)$$

où  $z_s(a, \psi)$  sont les fonctions périodiques de  $\psi$  avec la période  $2\pi$ , et où les variables  $a, \psi$  vérifient les équations

$$\frac{da}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s A_s(a)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s B_s(a)$$

Si on néglige dans ces équations les puissances supérieures de  $\varepsilon$ , on arrive à des équations de la première approximation.

Les formules approchées obtenues dans ce paragraphe ont été appliquées à l'étude de quelques systèmes oscillants concrets qui jouent un rôle important dans la technique des vibrations.

Dans le § 5 en poursuivant l'étude des systèmes oscillants régis par l'équation différentielle de la forme:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

on développe la méthode de la linéarisation équivalente et le principe du bilan harmonique.

Ces raisonnements sont basés sur la simple remarque suivante:— la première approximation, formée dans le § 2:

$$x = a \sin \psi$$

vérifie avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^2$  „l'équation linéaire équivalente“

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + (k + k_1) x = 0$$

où les grandeurs  $\lambda$ ,  $k_1$  (dites respectivement les coefficients équivalents d'amortissement et d'élasticité) sont définies comme fonctions de l'amplitude des oscillations  $a$ , en égalant la première harmonique de l'expression

$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  où  $x = a \sin(\nu t + \varphi)$ ,  $\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $a = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ .  
à l'harmonique de la forme

$$\lambda \frac{dx}{dt} + k_1 x$$

La méthode de la linéarisation équivalente est illustrée dans ce paragraphe par de nombreux exemples tirés de la technique des vibrations.

Le § 6 commence par une exposition sommaire des principes fondamentaux du calcul symbolique de Heaviside.

En combinant les procédés de ce calcul avec notre théorie de la linéarisation équivalente nous avons élaboré une méthode pratique, pour la formation de la première approximation, qui pourrait être considérée comme une extension du calcul symbolique de Heaviside aux systèmes oscillants non linéaires. Dans ce paragraphe la méthode mentionnée a été développée d'abord pour l'étude des oscillations stationnaires et étendue ensuite aussi à l'étude des oscillations non stationnaires dans le cas des systèmes avec une seule fréquence propre.

Un des traits essentiels de cette méthode symbolique de linéarisation est que, pour être appliquée, elle ne nécessite pas une formation préalable des équations différentielles exactes du système oscillant considéré, étant indépendante de l'appareil des équations différentielles qui y est remplacé par celui du calcul symbolique.

Dans le § 7 nous avons généralisé la méthode symbolique de la linéarisation pour le cas des systèmes oscillants avec plusieurs fréquences propres.

Pour plus de clarté dans l'exposition nous avons développé nos raisonnements sur un exemple, assez typique paraît-il, à savoir, sur l'exemple du système oscillant formé par un circuit électrique



( $L, R, C$ ) contenant une „résistance non linéaire“ (en série avec  $R$ ) et couplé par l'induction  $M$  avec un autre circuit électrique ( $L_1, R_1, C_1$ ).

Les oscillations dans ce système sont régies par une équation différentielle non linéaire du 4-ème ordre:

$$\left\{ \left( L_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + R_1 C_1 \frac{d}{dt} + 1 \right) \left( LC \frac{d^2}{dt^2} + RC \frac{d}{dt} + 1 \right) - M^2 C C_1 \frac{d^4}{dt^4} \right\} i = \\ = - C \left\{ L_1 C_1 \frac{d^3}{dt^3} + R_1 C_1 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} \right\} F(i)$$

où  $i$  est le courant dans le circuit ( $L, R, C$ ), et où

$$e = F(i)$$

est la caractéristique de la résistance non linéaire.

Il est à remarquer pourtant que les formules approchées ont été obtenues dans ce paragraphe sans avoir recours à cette équation différentielle assez compliquée.

Dans le § 8 nous avons étudié les cas de résonance qui ont lieu quand les fréquences propres  $\omega_1, \omega_2$  du système considéré dans le paragraphe précédent vérifient approximativement les relations de la forme

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r}{s}$$

où  $r, s$  étant des entiers.

Le § 9 contient l'exposition des principes fondamentaux de la méthode symbolique de linéarisation, conçus dans leur forme la plus générale.

Nous y avons considéré aussi le problème de la relation de cette méthode avec les méthodes de développement en séries des puissances du petit paramètre  $\varepsilon$ .

Dans cette direction nous avons montré, par exemple, que dans le cas général des systèmes oscillants avec plusieurs fréquences propres la première approximation améliorée obtenue à l'aide de la méthode symbolique de linéarisation vérifie les équations différentielles exactes avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^2$ .

Dans le § 10 nous passons à l'étude des systèmes oscillants influencés par des forces périodiques extérieures dans le cas de non-résonance.

Une attention particulière est portée à l'examen des systèmes régis par l'équation différentielle de la forme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

où  $f(t, x, x')$  est une fonction presque périodique de  $t$  (dont les fréquences ne dépendent pas des variables  $x$  et  $x'$ ).

Dans ce cas de non-résonance nous avons montré par exemple que les équations de la première approximation sont les mêmes que celles relatives au système régi par l'équation ne contenant pas la variable  $t$  explicitement:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon \bar{f}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

où  $\bar{f}(x, x')$  est la valeur moyenne de  $f(t, x, x')$  par rapport à  $t$ :

$$\bar{f}(x, x') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, x') dt$$

Le § 11 est consacré à l'étude des cas de résonance entre la fréquence propre et celle de l'excitation extérieure.

Nous avons considéré d'abord l'oscillateur à lampe triode et le circuit électrique contenant du fer et la capacité variable. Nous y avons considéré aussi les systèmes oscillants régis par une équation de la forme:

$$\text{IV) } m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(\alpha t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

et se trouvant à l'état de résonance:

$$\nu \cong \frac{r}{s} \alpha, \quad \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad r$$

et  $s$  sont des entiers.

Dans l'équation (IV)  $f(\alpha t, x, x')$  est une fonction périodique de  $\alpha t$  avec la période  $2\pi$ .

Les formules de la première approximation sont dans ce cas:

$$x = a \sin\left(\frac{r}{s} \alpha t + \varphi\right)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda_1}{2m} a$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu - \frac{r}{s} \alpha + \frac{k_1}{2k}$$



Ici  $\lambda_1, k_1$ , — coefficients équivalents d'amortissement et d'élasticité, — sont données en fonction de l'amplitude  $a$  et de la phase  $\varphi$  de l'oscillation par les formules suivantes.

$$\lambda_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi a v} \int_0^{2\pi} f\left(st - \frac{s\varphi}{r}, a \sin rt, a v \cos rt\right) \cos rt dt$$

$$k_1 = -\frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f\left(st - \frac{s\varphi}{r}, a \sin rt, a v \cos rt\right) \sin rt dt$$

Les résultats obtenus sont appliqués dans ce paragraphe pour l'étude des vibrations d'une barre se trouvant sous l'action d'une force périodique longitudinale et aussi pour l'étude des oscillations stationnaires dans le cas où

$$\frac{r}{s} = 1, \varepsilon f = E \sin at - f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Ce dernier cas, qui correspond à des systèmes mécaniques excités par une force sinusoïdale, est considéré surtout au point de vue de l'influence de l'élasticité non linéaire sur le phénomène de résonance.

Dans cette direction on a montré que sous certaines conditions l'élasticité non linéaire à elle seule (sans tenir compte de l'effet de l'amortissement) peut diminuer l'acuité dangereuse de la résonance.

Le § 12 (conclusion) contient l'exposition des méthodes générales de développement en séries des puissances du petit paramètre pour les solutions des équations différentielles voisines à des équations „aisément intégrables“.

Nous partons ici de la considération des équations mises sous la forme:

$$V) \quad \frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon); \quad k = 1, \dots, n$$

où

$$X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

et où

$$F_k^{(s)}(t, x_1, \dots, x_n)$$

sont les fonctions presque périodiques de  $t$ , dont les fréquences ne dépendent pas des variables

$$x_1, \dots, x_n$$

Il est à remarquer que souvent dans les cas les plus importants les équations différentielles voisines à des équations „aisément intégrables“ peuvent réellement être mises sous la forme (V).

Envisageons par exemple le système canonique

$$\text{VI) } \begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_k} \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned} \quad k=1, 2, \dots, n$$

dont l'hamiltonien est développé en séries suivant les puissances d'un petit paramètre  $\rho$ :

$$H = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s H_s(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$$

et supposons qu'on connaît la transformation canonique

$$p_k = P_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$q_k = Q_k(J_1, \dots, J_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

qui réduit l'hamiltonien

$$H_0(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_1)$$

à une fonction ne dépendant que des variables d'action:

$$H_0(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n) = \Gamma(J_1, \dots, J_n)$$

Effectuons la transformation canonique:

$$p_k = P_k(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$$

$$q_k = Q_k(c_1 + \varepsilon I_1, \dots, c_n + \varepsilon I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$$

où

$$\varepsilon = \sqrt{\rho}, \quad \omega_k = \frac{\partial \Gamma(c_1, \dots, c_n)}{\partial c_k}$$

$c_1, \dots, c_n$  sont les constantes arbitraires, et où

$$I_1, \dots, I_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

sont les variables canoniques nouvelles.

Alors le système considéré (VI) se réduit au système suivant:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial \varphi_k}$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial I_k}$$



où

$$G = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s G_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$$

et où

$$G_s(I_1, \dots, I_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$$

sont les fonctions périodiques des variables

$$\omega_1, \dots, \omega_n$$

avec la période  $2\pi$ .

Comme on voit bien, ce dernier système est justement de la forme désirée (V).

Remarquons de plus que les équations différentielles que nous avons considérées dans les paragraphes précédents, peuvent, elles aussi, être mises sous cette forme (V).

Cela étant, après avoir exposé la méthode des itérations successives, très simple au point de vue de son idée directrice, mais assez incommode pour les calculs pratiques, nous avons été amenés à présenter la solution générale de (V) sous la forme:

VII)

$$x_k = y_k + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

où

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

Ici

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n)$$

sont les fonctions presque-périodiques de  $t$  dont les fréquences sont les combinaisons linéaires de celles des

$$F_k^{(s)}(t, y_1, \dots, y_k); \quad s=1, 2, 3, \dots; \quad k=1, \dots, n$$

Les expressions de

$$z_{k,s}(t, y_1, \dots, y_n); \quad Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n); \quad k=1, \dots, n$$

peuvent être définies successivement pour  $s=1, 2, 3, \dots$  à l'aide d'un système spécial des conditions que nous avons étudié dans ce paragraphe.

Quotque en général les séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{k,s}; \quad \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s Y_{k,s}$$

ne sont pas convergentes, nous avons montré que, moyennant certaines conditions assez larges, les grandeurs

$$x_k = y_k(t) + \sum_{s=1}^m \varepsilon^s z_{k,s}(t, y_1(t), \dots, y_n(t))$$

où

$$y_k = y_k(t)$$

sont les solutions des équations „de la  $m$ -ème approximation“:

$$\frac{dy_k}{dt} = \sum_{s=1}^m \varepsilon^s Y_{k,s}(y_1, \dots, y_n)$$

vérifient les équations considérées (I) avec une erreur de l'ordre de petitesse de  $\varepsilon^{m+1}$ , et cela uniformément par rapport à  $t$ .

Autrement dit, il est possible d'indiquer une telle constante  $Q_m$ , que

$$\left[ \frac{dx_k}{dt} - \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \right] \leq Q_m \varepsilon^{m+1}$$

pour toutes les valeurs positives de  $t$ .

La solution formelle (VII) présente donc une source pour obtenir des approximations asymptotiques au voisinage de la valeur nulle du petit paramètre.

En étudiant cette méthode nous avons montré qu'elle contient comme cas particuliers tous les procédés que nous avons développés dans les paragraphes précédents.

Il est à signaler aussi qu'en appliquant la méthode proposée pour les systèmes conservatifs on obtient comme cas particuliers les méthodes bien connues de la mécanique céleste, par exemple celle de Linstedt et de Bolin.

En terminant notre monographie nous avons discuté quelques remarques critiques concernant les méthodes de développement en séries suivant les puissances du petit paramètre, et en nous appuyant sur cette discussion nous avons proposé quelques problèmes pour les recherches ultérieures.





## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE DES TRAVAUX

du Prof. Dr. Nicolas Kryloff et Prof. Dr. Nicolas Bogoliouboff dans le domaine de la Mécanique non linéaire et de ses différentes applications

1. „Quelques exemples d'oscillations non linéaires“. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 194, p. 967 (14. III 1932).
2. „Sur le phénomène de l'entraînement en radiotechnique“. Ibid., t. 194, p. 1064 (21. III 1932).
3. „Les phénomènes de démultiplication de fréquence en radiotechnique“. Ibid., t. 194, p. 1119 (29. III 1932).
4. „Sur quelques propriétés générales des résonances dans la Mécanique non linéaire“. Ibid., t. 197, p. 903 (23. X 1933).
5. „Problèmes fondamentaux de la Mécanique non linéaire“. Revue Générale des Sciences (N° du 15. I 1933).
6. „Recherches sur la stabilité dynamique des machines synchrones“. (Monographie. En langue russe avec une préface en français), 100 pp., Kieff, 1932.
7. „Recherches sur la stabilité longitudinale des avions. (Monographie en russe avec un résumé en français). 60 pp. Kieff, 1932.
8. „Recherches sur la stabilité statique et la stabilité dynamique des machines synchrones“. Rapport No 14 à la 3-ième Section du Congrès International d'Électricité, Paris, 1932.
9. „Problèmes fondamentaux de la Mécanique non linéaire“ (en russe). Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, N°4, 1933.
10. „Fundamental Problems of the Non Linear Mechanics.“ Congrès International des Mathématiciens, Zurich, 1932.
11. „Méthodes nouvelles de la Mécanique non linéaire dans leur application à l'étude du fonctionnement de l'oscillateur à lampè. Partie première. Etude des régimes stationnaires dans le cas de l'absence des forces extérieures périodiques (en russe avec une préface en français). 242 pp., 1934, Moscou, Edit. tech.-théor. d'Etat.
12. „Les méthodes symboliques de la Mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de résonance dans l'oscillateur“ (en russe). Bull. de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1934.
13. „Ueber einige Methoden der nicht linearen Mechanik in ihren Anwendungen zur Theorie der nicht linearen Resonanz“, Bauzeitung, 1934, Bd. 102, N°3 u. 3.
14. „Sur quelques développements formels en séries dans la Mécanique non linéaire (Monographie en ukrainien avec un résumé en français). 99 pp., Kieff, 1934.
15. „L'application des méthodes de la Mécanique non linéaire à la théorie des perturbations des systèmes canoniques (Monographie en français). 56 pp., Kieff, 1934.



16. „Méthodes de la Mécanique non linéaire appliquées à l'étude des oscillations stationnaires“. (Monographie en russe avec un résumé en français), 112 pp., Kieff, 1934.

17. „Sur les solutions quasi-périodiques des équations de la Mécanique non linéaire“. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 199, p. 1592.

18. „Sur l'étude du cas de résonance dans les problèmes de la Mécanique non linéaire“. Ibid., t. 200, p. 113.

19. „Méthodes de la Mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires“. Kieff 1934.

20. Zpravy o druhém sjezdu matematiku zemi slovanskych, 1935.

20. Méthodes approchées de la Mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant“. (Monographie en français), 114 pp., Kieff, 1935.

21. „Новые методы нелинейной механики в их приложении к исследованию родольной устойчивости самолетов“, Труды Аэродинамической конференции. Москва 1935.

22. „Расчет вибраций рамных конструкций с учетом нормальных сил при помощи методов Нелинейной Механики“, Сборник статей Укр. Науч.-иссл. ин-та сооружений. Киев 1935.

23. „Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня“. (Там же).

24. „Upon some new results in the domain of non linear mechanics“. Proceedings of the Indian Academy of Sciences, 1936.

25. „Application de la mécanique non linéaire à quelques problèmes de la Radiotechnique moderne“. Onde Electrique, 1936.

26. „Sur quelques théorèmes de la théorie générale de la mesure“ Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 201.

27. „Les mesures invariantes et la transitivité“. Ibid. t. 201.

28. „Les mouvements stationnaires généraux dans les systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire“. Ibid. t. 202

29. „La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire“. Annals of Mathematics, 1936.

30. „Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky“, Bull. de la Soc. Math. de France, 1936.





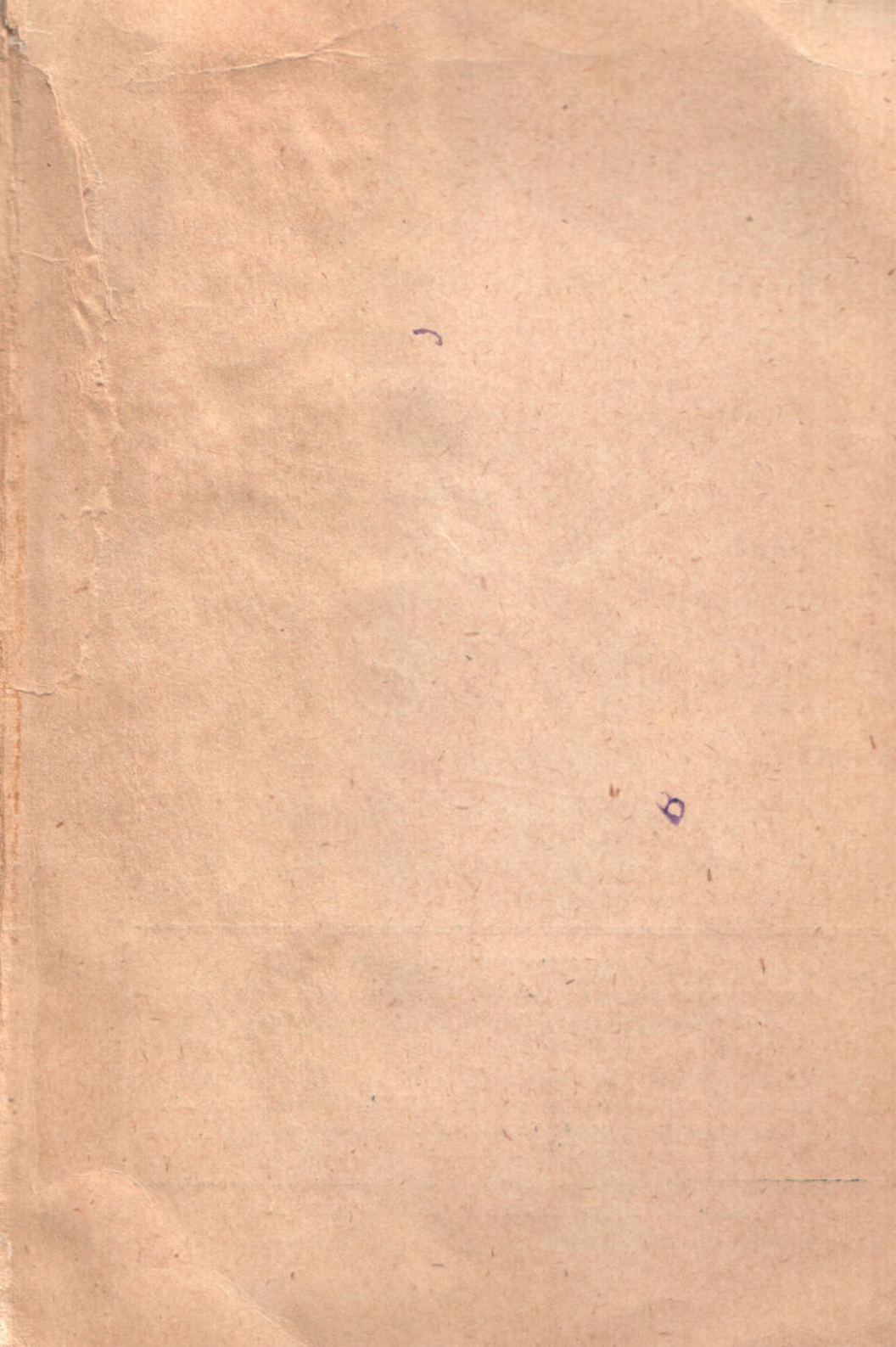
## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
§ 1. Вывод дифференциальных уравнений для некоторых нелинейных колебательных систем . . . . .	12
§ 2. Элементарная теория первого приближения . . . . .	38
§ 3. Уточнение первого приближения . . . . .	89
§ 4. Построение высших приближений . . . . .	106
§ 5. Линеаризация нелинейных колебательных систем квазилинейного типа . . . . .	142
§ 6. Символические методы и их применение для квазигармонических колебательных систем . . . . .	163
§ 7. Исследование колебательных процессов со многими частотами . . . . .	208
§ 8. Случай резонанса собственных частот . . . . .	224
§ 9. Принцип линеаризации и методы разложений по степеням малого параметра . . . . .	237
§ 10. Влияние внешних периодических сил на квазигармонические колебательные системы . . . . .	246
§ 11. Случай резонанса при внешнем периодическом возбуждении . . . . .	267
§ 12. Заключение . . . . .	302
Résumé . . . . .	350
Index bibliographique . . . . .	363

ОТВАРЖЕННЯ

Уповн. Головліту № 349. Зам. № 25. Вид. № 8. Тир. 1000. Ф. пап. 72×110 см.  
Вага 50,5 кг. Пап. арк. 11<sup>7/16</sup>. Друк. зн. в 1 пап. арк. 82 т. Здано до друкарні 11/І 1937 р.  
Підписано до друку 20/ІІІ 1937 р.





---

**ПРИЕМ ЗАКАЗОВ И ПОД**  
на все издания Академии Наук УССР по  
распространения Издательства Ака  
Киев, ул. Чудновской

**ПРОДАЖА ИЗДАНИ**  
в магазине научной книги Академии Наук  
и во всех книжных магазинах  
Книгоцентра ОГИЗ-а и Книго

---

Тило-литография Академии Наук