

Кухнюк О. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

АПРОКСИМАЦІЯ ПРОГИНІВ ЗГИНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Пропонується метод лінійної апроксимації епюри прогинів зігнутих залізобетонних елементів на основі узагальненої інформації по випробуванням залізобетонних балок на згин. Наведено приклад розрахунку, що базується на стандартизованих методиках [6].

Ключові слова: прогин; залізобетонні елементи; зосереджене навантаження; діаграми деформування.

Вступ. Прогин є важливим розрахунковим параметром для конструкцій, що підлягають експлуатаційним навантаженням. Важливість отримання точної інформації щодо правильності отриманих результатів під час проведення дослідів або спостережень за об'єктом дослідження є одним із основних параметрів для перевірки критеріїв працездатності конструкції і забезпечення надійних рішень по розрахунку таких елементів.

Аналіз останніх досліджень. При проведенні експериментальних досліджень більшість дослідників стикаються з певними труднощами при визначенні так званих «зламних» точок на діаграмах деформування залізобетонних балок. Після виникнення тріщин в тілі залізобетонних елементів – залежності прогинів від навантаження набувають певної кривизни, яка потребує додаткового математичного та статистичного обґрунтування.

Сам процес тріщиноутворення відбувається одночасно з руйнуванням розтягнутої зони бетону і є незворотнім. Причому алгоритм та логіка утворень тріщин в подальшому формує весь напружено-деформований стан залізобетонних елементів [8]. І саме момент тріщиноутворення (первинні тріщини) є одним із визначальних параметрів, по якому можна судити про подальшу відповідність реальних і розрахункових значень розкриття тріщин, кривизни елементів, а в ширшому розумінні може бути критерієм «правильності» моделі деформативності елемента.

Постановка мети та задач досліджень. Класичний графік

залежності прогинів залізобетонних елементів від прикладених зусиль в загальному випадку наведено на рисунку 1.

Так, точки 2 та 3 характеризуються скачкоподібним утворенням тріщин, а точка 2 визначає початок процесу тріщинотворення згинальних залізобетонних елементів. Слід відмітити, що саме цей параметр значною мірою впливає на розуміння всіх подальших деформативних процесів.

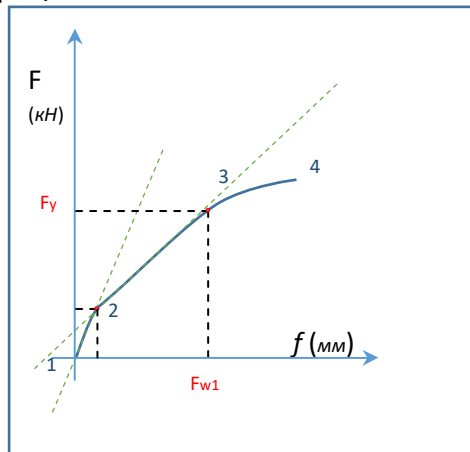


Рис. 1. Графік прогинів залізобетонних балок

Більшість науковців поділяють твердження, що ділянка 1–2 описується прямою лінією, яка моделює поведінку залізобетону до появи тріщин в тілі залізобетону. Що стосується ділянок 2–3 та наступної 3–4, пропонуються різноманітні моделі, які так чи інакше описуються криволінійними моделями [1; 2]. Проте при використанні тієї чи іншої моделі на практиці, виникає одна із найважливіших вимог – її простота (безумовно при гарантії її статистичної прогнозованості).

На нашу думку, приймаючи за умову, що згинальний залізобетонний елемент працює в межах експлуатаційних рівнів навантажень – $\approx 0,8$ від руйнівного, опис залежності прогинів від прикладеного зусилля можна замінити на лінійні залежності на кожній із наведених ділянок (див. рис. 1).

Методика досліджень. Пропонована методика лінійності базувалась на обробці результатів проведених експериментальних досліджень як вітчизняними [3; 4; 8], так і закордонними дослідниками [1; 2].

Під час проведення теоретичних досліджень було проаналізовано результати експериментальних досліджень по більш

як 20 статично визначеним залізобетонним балкам. Ці дослідження різнилися за часом проведення, конструкцією згинальних елементів (процент армування, різноманітні наповнювачі залізобетону), дослідними лабораторіями (вітчизняними або закордонними), проте фіксація прогинів залізобетонних балок проявили абсолютну схожість загальної картини.

Результати досліджень

Так, наприклад, в роботі [1] були наведені експериментальні дослідження залізобетонних балок і запропонована модель знаходження моменту інерції з урахуванням деформаційних ефектів.

При цьому було досліджено шість серій балок з різними ступенями армування, конструкцій та схемами прикладених зусиль. Практично незалежно від вище перерахованих умов, характер розвитку прогинів був практично незмінним. Для демонстрації розглянемо дослідження залізобетонної вільно опертої балки при зосередженому навантаженні в середині прольоту із співвідношенням ($L/H=7,5$) (Nurnbergerova та ін.)

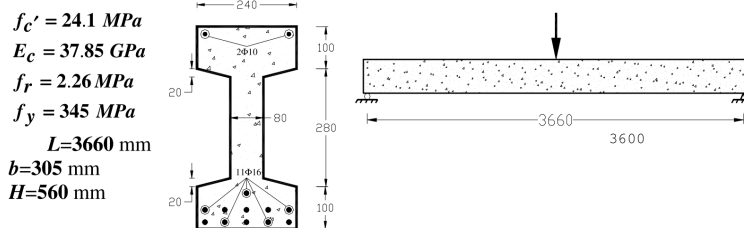


Рис. 2. Конструкція, схема навантаження та характеристики дослідних балок

За результатами випробувань були отримані наступні графіки прогинів досліджуваних балок (рис. 3).

В таблиці 1 наведено дані за різними методами прогнозування (моделі), отже, для подальшого аналізу обираємо тільки експериментальні дані.

Наведені чисельні і графічні дані дають змогу прогнозувати, що з достатньою вірогідністю зміну прогинів згинального залізобетонного елемента f від рівня навантаження P на різних ділянках можна описати лінійними залежностями.

Тому для опису скористаємось методикою встановлення градувальних залежностей і оцінка їх похибок, наведеною в [6; 7].

Рівняння залежності P - f запишемо у вигляді

$$P_{tr} = P_0 + kf \quad (1)$$

Початкове значення прогинів обчислюємо за формулою

$$P_0 = \bar{P}_{e(N)} - k \bar{f}_{e(N)}. \quad (2)$$

де $\bar{f}_{e(N)}$, $\bar{P}_{e(N)}$ – середні значення прогинів і відповідних рівнів навантаження за експериментальними даними:

$$\bar{f}_{e(N)} = \frac{\sum_{i=1}^N f_{ei}}{N}; \quad (3)$$

$$\bar{P}_{e(N)} = \frac{\sum_{i=1}^N P_{ei}}{N}. \quad (4)$$

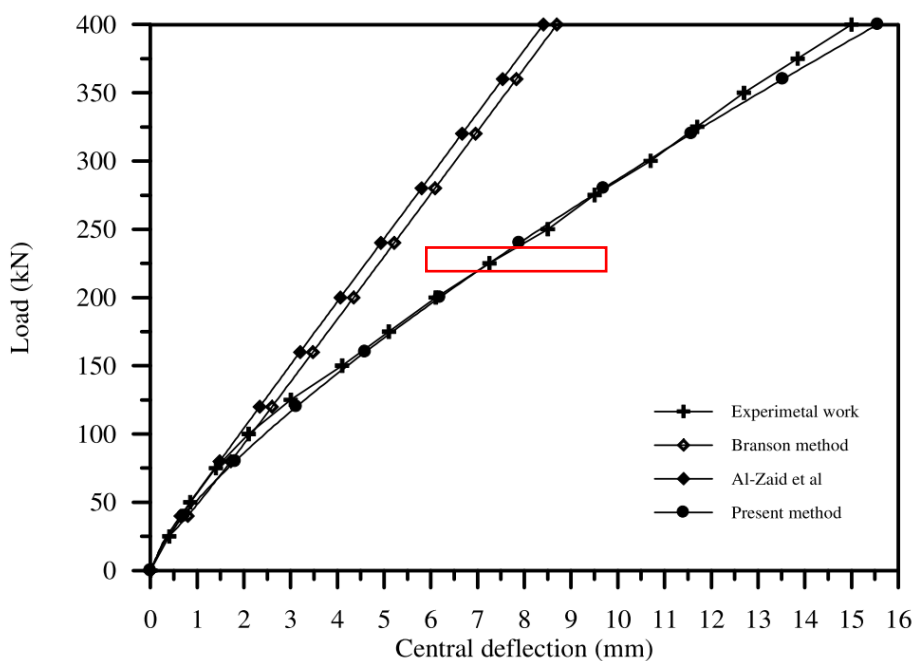


Рис. 3. Криві навантаження прогинів в середині прольоту залізобетонної балки на двох опорах із однією зосередженою силою

Результати навантаження-прогину залізобетону під зосередженим навантаженням в середині прольоту / Load-deflection results of reinforced concrete simply supported beam under concentrated load at mid span

Load (kN)	Deflection (mm)			
	Experimental results	Branson method	Al-Zaid, et al. method	Present Study
0.0	0.00	0.00	0	0
25.0	0.40	0.39	0.35	0.38
50.0	0.85	1.04	0.85	0.96
75.0	1.40	1.60	1.37	1.66
100.0	2.10	2.16	1.91	2.45
125.0	3.00	2.70	2.44	3.29
150.0	4.10	3.25	2.98	4.21
175.0	5.10	3.80	3.53	5.18
200.0	6.10	4.35	4.07	6.19
225.0	7.25	4.89	4.61	7.24
250.0	8.50	5.43	5.15	8.33
275.0	9.50	5.16	4.87	7.79
300.0	10.70	6.52	6.23	10.63
325.0	11.7	7.07	6.77	11.82
350.0	12.70	7.61	7.32	13.04
375.0	13.85	8.15	7.86	14.29
400.0	15.00	8.69	8.40	15.56

Коефіцієнт рівняння k знаходимо за формулою

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_{e(N)})(P_i - \bar{P}_{e(N)})}{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_{e(N)})} \quad (5)$$

На ділянках, де необхідно встановлення перетину з початком координат, тобто $P_{tr} = P_0 + kf$ – де $P_0=0$ проходження через точку (0;0) коефіцієнт рівняння k знаходимо за формулою

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (\bar{P}_{e(N)})}{\sum_{i=1}^N (\bar{f}_{e(N)})} \quad (5.1)$$

Після знаходження градувальної залежності проводимо коригування залежності (1) вибракуванням окремих результатів випробування, які не задовольняють умову

$$\left| \frac{P_{ei} - P_{tr,i}}{S} \right| \leq 2, \quad (6)$$

де $P_{tr,i}$ – значення сили, знайдений за формулою (1) для відповідного

рівня навантаження;

S – залишкове середнє квадратичне відхилення, яке визначаємо за формулою

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (P_{ei} - P_{tr,i})^2}{N-2}}. \quad (7)$$

Якщо відбулося відбраковування окремих результатів, залежність встановлюють заново за формулами (1), (2), (5) за результатами, що залишились.

Залежність можна вважати достовірною, якщо відносна похибка

$$\frac{S}{P_{e(N)}} \cdot 100\% \leq 12\%. \quad (8)$$

Таким чином, за наведеними результатами досліджень (табл. 1) та наведеною стандартною методикою встановимо теоретичні значення навантаження $P_{tr,i}$, що відповідають встановленим прогинам.

Для ділянки 1–2 за формулами (1)–(8) знаходимо рівняння $P_{tr} = kf$:

$$P_{tr} = 56,60 \cdot f, \quad (9)$$

відповідні значення наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Визначення дослідних значень прогинів,
що підлягають перевірці на ділянці 1–2 (рис. 1, 6)

№ точки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умов	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні $P_{tr,i}$	$(P_{ei} - P_{tr,i})/S \leq 2$	$\frac{S}{P_{e(N)}} \cdot 100\% \leq 12\%$
			Формула (6)	Формула (8)
1	0	0,00	0,00	9,824213429
2	25	22,64	0,55	9,824213429
3	50	48,11	0,73	9,824213429
4	75	79,25	0,18	9,824213429
5	100	110,53	1,46	14,41375151
6	125	145,16	1,69	19,13857674
7	150	181,65	1,84	22,98706915

Аналіз отриманих даних для першої ділянки: наведено розрахунок для семи точок, отриманих від початку експерименту, де

точки 5, 6, 7 (див. табл. 2) відбраковуюються за вимогою *недостовірності отриманої залежності* (8), хоча вони і пройшли перевірку на вибракування окремих результатів випробування (6).

Отже, за результатами перевірок можна вважати достовірною залежність (9) для перших чотирьох точок, які відповідають умовно прийнятій ділянці 1–2 (рис. 4).

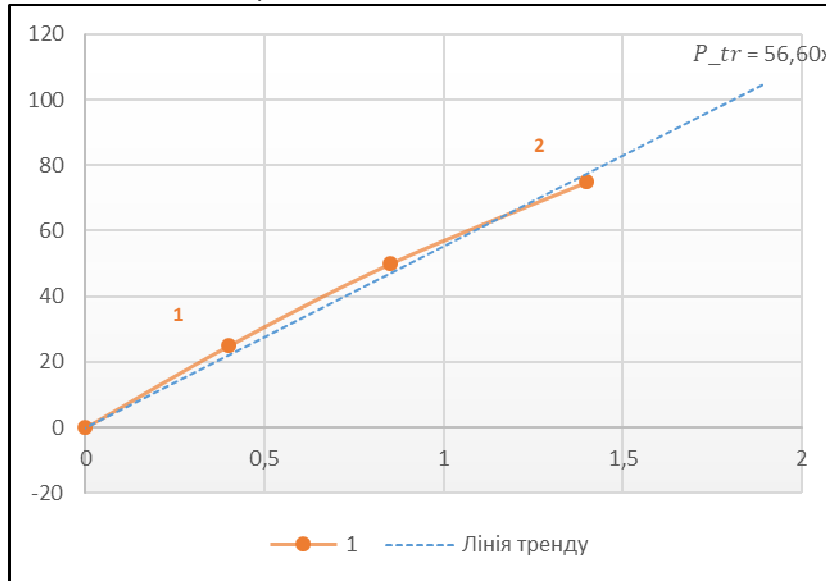


Рис. 4. Інтерпретація першої ділянки лінійною регресією за методикою встановлення градувальних залежностей і оцінці їх похибки [6]

Перевірка отриманих даних проводилась методиками статистичного аналізу проводились за допомогою програмного комплексу Statistica і результати наводимо на рис. 5.

Для ділянки 2–3 за формулами (1)–(8) знаходимо рівняння $P_{tr} = P_0 + kf$:

$$P_{tr} = 23,051 + 55,663 \cdot f, \quad (10)$$

відповідні значення наведені в таблиці 3.

Аналіз отриманих даних для другої ділянки: усі дослідні точки, окрім віднесених до вищенаведеної залежності були віднесені до ділянки 2 – 3 і були прораховані за тією ж методикою, причому вони дали відразу відмінний результат – при перевірці за вимогами як *достовірності отриманої залежності* (8), так і при перевірці на *вибракування окремих результатів випробування* (6).

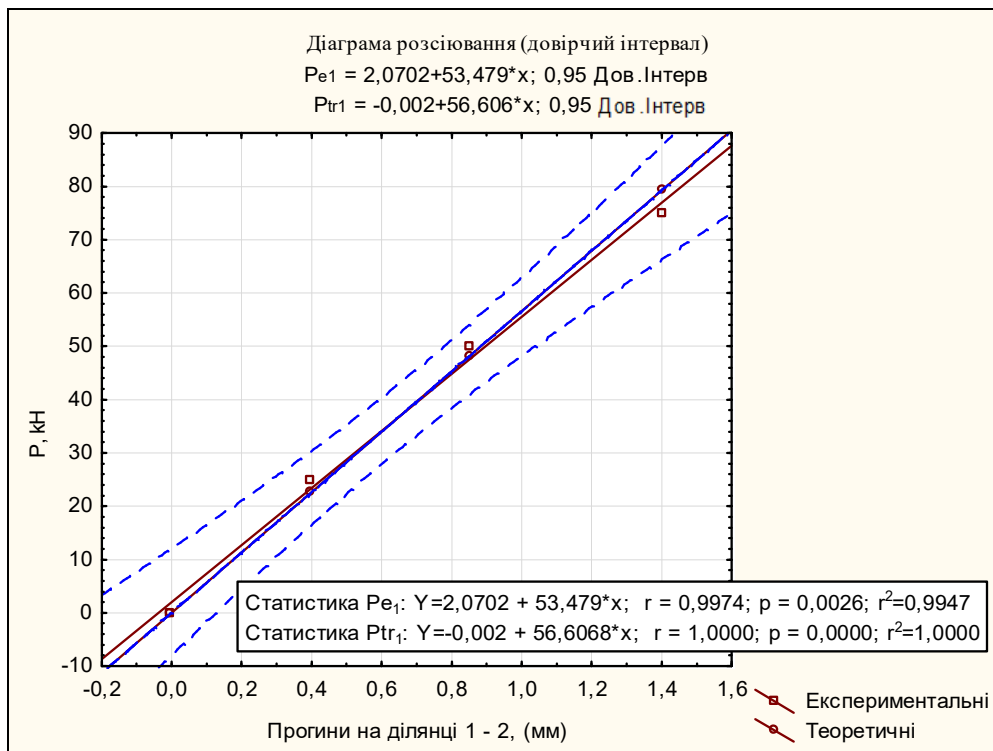


Рис. 5. Діаграма розсіювання (довірчі інтервали значень) для ділянки 1–2 отримані статистичними методами

Тому залежність (10) також приймається достовірною для всіх експериментальних значень і їх відповідність теоретичним. В таблиці 3 наведені перевірочні значення. Слід звернути увагу на наближення точки 5 (табл. 3) до критичного значення при перевірці на першу умову $(P_{ei} - P_{tr,i})/S < 2$. На нашу думку, це підтверджує наявність точки «зламу» між точками 4 (яка увійшла до першої ділянки) та 5 (яка включена до другої ділянки), тобто на переході між двома отриманими лінійними регресіями і відбувається первинна деформація розтягнутої зони залізобетонного елемента (рис. 6).

Визначення дослідних значень прогинів,
що підлягають вибраковці на ділянці 2–3 (рис. 1, 6)

№ точки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умови	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні $P_{tr,i}$	$(P_{ei} - P_{tr,i})/S \leq 2$	$\frac{S}{P_{e(N)}} \cdot 100\% \leq 12\%$
			Формула (6)	Формула (8)
5	100	104,1	1,9	0,863727186
6	125	124,8	0,1	0,863727186
7	150	150,2	0,1	0,863727186
8	175	173,2	0,8	0,863727186
9	200	196,3	1,7	0,863727186
10	225	222,8	1,0	0,863727186
11	250	251,6	0,7	0,863727186
12	275	274,6	0,2	0,863727186
13	300	302,3	1,1	0,863727186
14	325	325,4	0,2	0,863727186
15	350	348,4	0,7	0,863727186
16	375	374,9	0,0	0,863727186
17	400	401,4	0,7	0,863727186

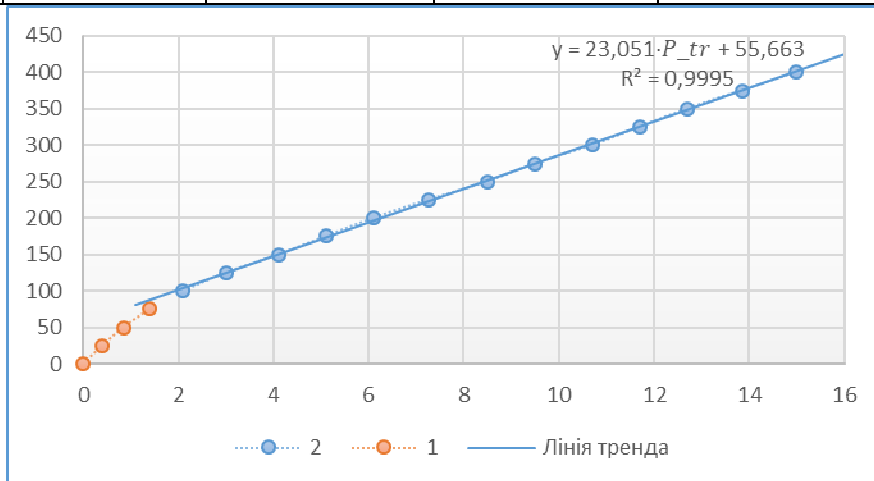


Рис. 6. Інтерпретація другої ділянки лінійною регресією за методикою встановлення градувальних залежностей і оцінці їх похибки [6]

Перевірка отриманих даних проводилась методиками статистичного аналізу за допомогою програмного комплексу Statistica і результати наводимо на рис. 7.

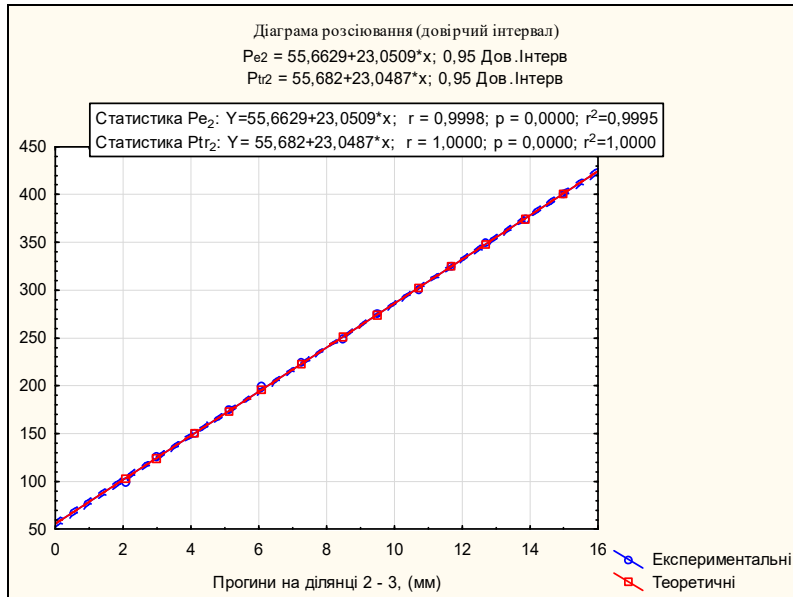


Рис. 7. Діаграма розсіювання (довірчі інтервали значень) для ділянки 2–3 отримані статистичними методами

Висновки

1. Наведені вище результати показують, що при застосуванні методики, передбаченої в ДБН [6], можна описати розвиток прогинів прямолінійними ділянками, розбивши на певні етапи, при розвитку деформацій залізобетонних елементів. Під етапами розуміється похилі ділянки до і після утворення тріщин в тілі залізобетону.

2. В результаті отримуємо математично простий і надійний інструмент, який дозволяє до з одного боку провести перевірку коректності отриманих експериментальних даних, а з іншого – за отриманими залежностями легко знаходити зусилля, які впливають на подібні конструкції, в умовах реальної експлуатації.

1. Dr. Haider K. Ammash, mr. Muthana H. Muhaisin. Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect Al-Qadisiya. *Journal For Engineering Sciences*. 2009. Vol. 2. No. 2. Pp.108–128.

2. Al-Zaid R. Z. and Al-Shaikh A.H. and Abu-Hussein M. Effect of Loading Type on The Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams. *ACI, Struct. J.* March April 1991. Vol. 88, No. 2. Pp. 184–190. 3. Мельник І. В., Добрянський Р. З., Канафоцький Р. І., Давидовський Н. Б. Експериментальні дослідження залізобетонних балок з поздовжньою арматурою класу А500С, підсилених композитною системою Ruredil X Mesh Gold. *Вісник*

Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. *Наука та прогрес транспорту*. 2011. № 39. С. 104–109. **4.** Мельник І. В., Добрянський Р. З., Давидовський Н. Б., Крет В. О. Експериментальні дослідження деформативності залізобетонних балок, підсилених під навантаженням композитною системою Sika CarboDur. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Теорія і практика будівництва*. 2012. № 742. С. 124–130. **5.** ДСТУ Б В.2.7-224:2009. Бетони правила контролю міцності. Київ : Мінрегіонбуд України, 2010. 23 с. **6.** ДСТУ Б В.2.7-220:2009. Бетони визначення міцності механічними методами неруйнівного контролю. Київ : Мінрегіонбуд України, 2010. 20 с. **7.** ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. Київ : Мінрегіонбуд України, 2011. 71 с. **8.** Талят Азізов, Дмитро Кочкар'юв. Про нелінійність деформування залізобетонних згинальних елементів. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. № 42. Рівне : НУВГП, 2022. 402 с.

REFERENCES:

1. Dr. Haider K. Ammash, mr. Muthana H. Muhaisin. Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect Al-Qadisiya. *Journal For Engineering Sciences*. 2009. Vol. 2. No. 2. Pp.108–128.
2. Al-Zaid R. Z. and Al-Shaikh A.H. and Abu-Hussein M. Effect of Loading Type on The Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams. *ACI, Struct. J.* March April 1991. Vol. 88, No. 2. Pp. 184–190.
3. Melnyk I. V., Dobrianskyi R. Z., Kanafotskyi R. I., Davydovskyi N. B. Eksperymentalni doslidzhennia zalizobetonnykh balok z pozdovzhnoiu armaturoiu klasu A500S, pidsylenykh kompozytnoiu systemoiu Ruredil X mesh Gold. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu. Nauka ta prohres transportu*. 2011. № 39. S. 104–109.
4. Melnyk I. V., Dobrianskyi R. Z., Davydovskyi N. B., Kret V. O. Eksperymentalni doslidzhennia deformatyvnosti zalizobetonnykh balok, pidsylenykh pid navantazhenniam kompozytnoiu systemoiu Sika CarboDur. *Visnyk Natsionalnoho universytetu «Lvivska politekhnika»*. *Teoriia i praktyka budivnytstva*. 2012. № 742. S. 124–130.
5. DSTU B V.2.7-224:2009. Betony pravyla kontroliu mitsnosti. Kyiv : Minrehionbud Ukrainy, 2010. 23 s.
6. DSTU B V.2.7-220:2009. Betony vyznachennia mitsnosti mekhanichnymy metodamy neruinivnoho kontroliu. Kyiv : Minrehionbud Ukrainy, 2010. 20 s.
7. DBN V.2.6-98:2009. Betonni ta zalizobetonni konstruksii. Osnovni polozhennia. Kyiv : Minrehionbud Ukrainy, 2011. 71 s.
8. Taliat Azizov, Dmytro Kochkarov. Pro neliniinist deformuvannia zalizobetonnykh zghynalnykh elementiv. *Resursoekonomni materialy, konstruksii, budivli ta sporudy*. № 42. Rivne : NUVHP, 2022. 402 s.

**Kukhniuk O. M., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor,
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)**

APPROXIMATION OF DEFLECTIONS OF FLEXIBLE REINFORCED CONCRETE ELEMENTS UNDER THE ACTION OF CONCENTRATED LOAD

Deflection is an important calculation parameter for structures subject to operational loads. The importance of obtaining accurate information about the correctness of the results obtained during experiments or observations of the research object is one of the main parameters for checking the criteria for the performance of the structure and providing reliable solutions for the calculation of such elements.

After the appearance of cracks in the body of reinforced concrete elements – the dependence of deflections on the load acquires a certain curvature, which requires additional mathematical and statistical justification.

In our opinion, assuming that the flexural reinforced concrete element works within operational load levels – ≈ 0.8 from the destructive one, the description of the dependence of the deflections on the applied force can be replaced by linear dependences in each of the given areas (see Fig. 1). The proposed linearity technique was based on processing the results of experimental studies conducted by both domestic [3; 4; 8] and foreign researchers [1; 2].

In this article, experimental data obtained by researchers in work [1] were selected for further analysis.

For statistical description, the technique of establishing grading dependencies and estimating their errors, given in [6; 7], was used.

The theoretical values of the load P_{tr} corresponding to the experimental values of the deflections were determined based on the results of the research (Table 1) and the standard methodology.

The verification of the obtained data was carried out using statistical analysis techniques using the Statistica software package.

The obtained results show that when applying the methodology provided for in [6], it is possible to describe the development of deflections by rectilinear sections, divided into certain stages, during the development of deformations of reinforced concrete elements. Stages are understood as sloping areas before and after the formation of cracks in the body of reinforced concrete.

As a result, we get a mathematically simple and reliable tool that allows, on the one hand, to check the correctness of the obtained experimental data, and on the other hand, based on the obtained dependencies, it is easy to find the forces that affect similar structures in real operation conditions.

***Keywords:* deflection; reinforced concrete elements; concentrated load; deformation diagrams.**
