



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ
МАТЕМАТИКА

Книга 7

Графы

Часть 4

Киев
«Освіта України»
2015



Кононюк Анатолий Ефимович



Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук





Национальный университет
водного хозяйства
и рыбного хозяйства

Кононюк А.Е. Графы

УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПИ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Графы. К.7, Ч.4 (в 7 частях)).—В 15-и кн. Кн 7,— К.: Освіта України. 2015.494с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 7)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единую методологически взаимосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)

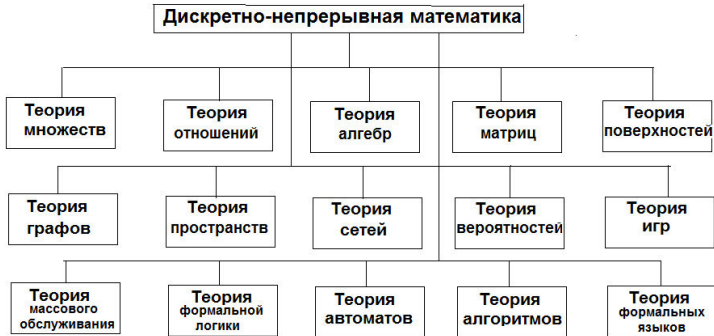
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание) © Кононюк А. Е.,

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 7) © Освіта України, 2015



Структура
открытой развивающейся панмединой системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

1. Полусные графы.....	9
1.1. Физические системы с сосредоточенными компонентами.....	9
1.2. Полусные графы.....	10
1.3. Электрические цепи.....	13
1.4. Механические поступательные системы.....	15
1.5. Механические вращательные системы.....	18
1.6. Пневматические системы.....	20
1.7. Аналогии.....	22
1.8. Нелинейные и параметрические компоненты.....	24
2. Многополусные графы.....	29
2.1. Полусный граф многополусника.....	29
2.2. Уравнения многополусника.....	31
2.3. Электронный триод.....	33
2.4. Транзистор.....	34
2.5. Трансформатор.....	35
2.6. Механические многополусники.....	38
2.7. Дифференциальный редуктор.....	40
2.8. Двигатель постоянного тока.....	41
2.9. Гидромеханические многополусники.....	43
2.10. Схемные модели многополусных компонентов.....	45
3. Системы координат.....	50
3.1. Математические модели физических систем.....	50
3.2. Топологические уравнения.....	52
3.3. Уравнения сечений.....	57



3.4. Уравнения контуров.....	60
3.5. Преобразование источников.....	62
3.6. Транзисторная схема.....	65
3.7. Электромеханическая система.....	72
3.8. Узловые уравнения.....	76
3.9. Уравнения ячеек.....	78
3.10. Системы с двумя сторонами.....	81
4. Неоднородный координатный базис.....	86
4.1. Формирование уравнений.....	86
4.2. Преобразование компонентной матрицы.....	87
4.3. Гидромеханическая система.....	89
4.4. Иерархия дуг.....	91
4.5. Переменные состояния.....	92
4.6. Уравнения переменных состояния.....	94
4.7. Линейные системы.....	96
4.8. Нелинейные системы.....	102
4.9. Выходное уравнение.....	109
4.10. Ограничения и обобщения.....	109
4.11. Исключение зависимых дифференциальных переменных.....	112
5. Сокращенный координатный базис.....	122
5.1. Начальные положения.....	122
5.2. Уравнения в сокращенном координатном базисе.....	124
5.3. Матрично-векторные параметры.....	125
5.4. Оптимальное разбиение дуг.....	127
5.5. Определение матрично-векторных параметров.....	129
5.6. Операции над столбцами.....	131
5.7. Уравнения переменных состояния.....	135
5.8. Особенности сокращенного координатного базиса.....	140
5.9. Обобщенная процедура.....	142
5.10. Введение реактивных параметров.....	145
5.11. Разделение переменных.....	147
6. Блочные группы как средство описания графов.....	151
6.1. Понятия блочных групп и операции над ними.....	151
6.2. Свойства блочных групп.....	157
6.2.1. Делители нуля.....	157
6.2.2. Делимость блочных групп.....	157
6.3. Геометрическое изображение блочной группы.....	163
6.4. Дополнительная блочная группа и геометрическое обратное изображение.....	165
6.5. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы.....	170



6.6. Детерминантная функция блочной группы.....	173
6.7. Функция совпадения блочной группы.....	175
6.8. Понятие ряда и последовательности блочных групп.....	180
7. Блочные группы и графы высших рангов.....	182
7.1. Определение блочной группы второго ранга.....	183
7.1.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы второго ранга.....	186
7.2. Блочные группы k -го ранга.....	189
7.2.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы k -го ранга.....	192
7.2.2. Геометрическое изображение блочной группы k -го ранга.....	194
7.3. Правила организации контурных графов.....	196
7.4. Правила организации сечений графа.....	198
7.5. Блочная группа графа с замкнутыми вершинами.....	200
7.6. Блочная группа разомкнутого графа.....	204
7.7. Преобразование графа.....	206
7.8. Графы второй категории (модуль-графы).....	214
7.8.1. Определение модуль-графа.....	214
7.8.2. Блочная группа модуль-графа.....	216
7.8.3. Дерево второго ранга.....	226
7.8.4. Модуль-граф с выделенными элементами.....	233
7.8.5. Преобразования модуль-графов.....	238
7.8.6. Перемещение нижних индексов.....	244
7.8.7. Графы k -го ранга.....	248
8. Полные блочные группы и замещающие графы.....	250
8.1. Полные блочные группы.....	251
8.2. Замещающие графы.....	260
8.3. Полная блочная группа модуль-графа.....	276
8.4. Деревья и деревья высших рангов модуль-графа.....	294
9. Анализ структур средствами блочных групп и модуль-графами.....	302
9.1. Анализ структур, представленных пассивными цепями...303	303
9.1.1. Анализ пассивного четырехполюсника.....	303
9.1.2. Анализ пассивного двухполюсника.....	322
9.1.3. Анализ произвольных цепей.....	325
9.2. Анализ активных цепей.....	330
9.2.1. Анализ цепи, содержащей один зависимый источник напряжения.....	330
9.2.2. Анализ цепи, содержащей два зависимых источника напряжения.....	335
9.2.3. Формулы для расчета цепи, содержащей N	



зависимых источников напряжения.....	340
9.3. Анализ электрических модуль-схем методом блочных групп.....	345
9.3.1. Введение.....	345
9.3.2. Детерминантная функция модуль-схемы.....	348
9.3.3. Входной импеданс модуль-схемы.....	356
9.3.4. Коэффициент передачи напряжения модуль-схемы.....	364
9.3.5. Схемы замещения.....	386
9.3.6. Преобразование активных модуль-схем.....	393
9.4. Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем и методом циклов.....	396
9.4.1. Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем.....	396
9.4.1.1. Переключающая схема.....	396
9.4.1.2. Анализ пассивных схем.....	399
9.4.1.3. Анализ активных цепей.....	402
9.4.1.4. Образование деревьев схемы ZI.....	411
9.4.2. Анализ электрических схем методом циклов.....	412
10. Синтез структур средствами блочных групп и модуль-графами.....	416
10.1. Синтез структур, представленных пассивными двухполюсниками.....	418
10.2. Синтез пассивного RLC-четырёхполюсника.....	424
10.2.1. Предварительные сведения.....	424
10.2.2. Определение знаков слагаемых функции совпадения.....	431
10.2.3. Синтез четырёхполюсника средствами ЭВМ.....	436
10.2.4. Метод расчёта элементов четырёхполюсников.....	448
Приложение.....	453
Литература.....	494



1. ПОЛЮСНЫЕ ГРАФЫ

1.1. Физические системы с сосредоточенными компонентами.

Графы широко используются как структурные модели физических систем, допускающих идеализированное представление в виде *схем с сосредоточенными компонентами*. Соединение компонентов между собой осуществляется исключительно путем объединения их полюсов, образующих узлы схемы. В зависимости от числа полюсов различают двухполюсные и многополюсные компоненты, которые называют соответственно *двухполюсниками* и *многополюсниками*. Так, схема рис. 1.1 представляет собой соединение двух трехполюсников (*A* и *B*), четырехполюсника (*C*) и трех двухполюсников (*D*, *E*, *F*).

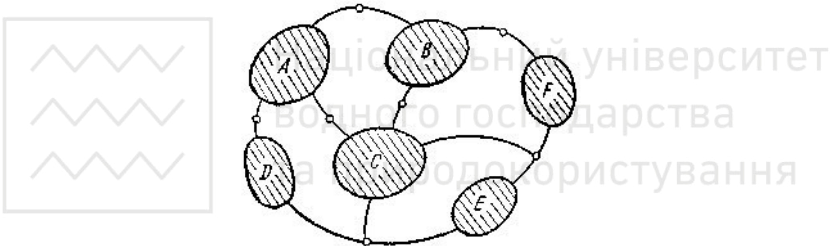


Рис. 1.1. Схема с многополюсными компонентами.

Наиболее типичными представителями физических систем, допускающих представление схемами с сосредоточенными компонентами, могут служить электрические и электронные цепи. Резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности являются двухполюсниками, а трансформаторы, транзисторы — многополюсниками. Аналогичные компоненты можно выделить в системах различной физической природы: механических, акустических, гидравлических, тепловых и т. д.

Для математического описания состава и структуры физической системы (точнее, соответствующей ей схемы с сосредоточенными компонентами) обычно используются два типа соотношений:

- 1) *полюсные уравнения*, характеризующие индивидуальные свойства каждой компоненты безотносительно к возможным соединениям с другими компонентами;
- 2) *уравнения связей*, отражающие характер соединения различных компонент в схеме безотносительно к их индивидуальным свойствам.



Компонентным уравнением двухполосника служит функциональная зависимость между двумя физическими величинами, характеризующими его состояние (например, между током и напряжением электрического двухполосника, силой и скоростью механического двухполосника и т. п.). Функция, описывающая *нелинейный двухполосник*, может задаваться аналитическим выражением, графиком или таблицей. Линейный двухполосник характеризуется *параметром*, который является либо постоянной величиной (*стационарный двухполосник*), либо функцией времени (*нестационарный двухполосник*).

Многополосник описывается системой уравнений, связывающей физические величины на его полюсах. Часто многополосные компоненты представляются *схемной моделью*, состоящей из двухполосных компонентов, каждый из которых описывается ответствующей функциональной зависимостью. Но в отличие от обычных двухполосников, такие зависимости могут содержать величины, связанные с другими компонентами схемной модели. В конечном счете, физическая система с сосредоточенными компонентами всегда может быть представлена схемой, состоящей из двухполосников.

В роли уравнений связи обычно выступают фундаментальные физические законы, выражающие условия равновесия и непрерывности — (законы Кирхгофа для электрических цепей, принцип Даламбера для механических систем и т. п.). В каждом конкретном случае эти уравнения получают из рассмотрения структуры схемы, причем они должны содержать те же величины, что и компонентные уравнения, которыми характеризуются состояния двухполосников. Тем самым обеспечивается совместимость исходных уравнений, преобразование которых позволяет получить математическую модель системы в требуемой форме.

1.2. Полюсные графы

Схема с двухполосными компонентами, независимо от ее конкретной физической природы, может быть представлена *полюсным графом*. Между схемой, состоящей из двухполосников, и ее графом имеет место взаимно-однозначное соответствие: узлам схемы соответствуют вершины, а двухполосникам — ребра графа. Ориентация ребра связывается с направлением отсчета физических величин, характеризующих состояние двухполосника.

Полюсный граф является универсальной топологической моделью физических систем с сосредоточенными компонентами. Путь к такой



модели лежит через идеализацию системы (схема) и ее абстрагирование (полусный граф). Основная ценность топологических моделей состоит в том, что их свойства и методы использования можно изучать и разрабатывать независимо от физической природы систем. Специфика конкретной области проявляется на начальном этапе при построении графа и на заключительном этапе истолкования полученных результатов.

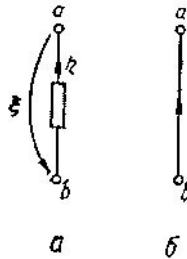


Рис.1.2. Двухполюсник (а) и его полюсный граф (б).

Для любого двухполюсника (рис. 1.2, а) полюсным графом служит дуга с двумя концевыми вершинами (рис. 1.2, б). В общем случае уравнение двухполюсника $\varphi(\eta, \xi) = 0$ содержит две переменные η и ξ . Одна из них, например η , характеризует состояние двухполюсника относительно поперечного сечения и противоположно направлена к каждому из его полюсов. Такие переменные называют *поперечными* (например, электрический ток или магнитный поток, сила или момент, расход жидкости или газа, тепловой поток и т. п.). Другая величина ξ характеризует состояние двухполюсника относительно его полюсов (например, электрическое напряжение, линейная или угловая скорость, перемещение, давление, разность температур и т. п.). Такие переменные называют *продольными* и их направления связывают с направлением пути от одного полюса к другому. Часто поперечные переменные называют *последовательными*, а продольные — *параллельными* переменными. Если уравнение двухполюсника представимо в явном виде относительно поперечной переменной $\eta = f_\eta(\xi)$, то соответствующая ему дуга называется *y-дугой*, причем величину η можно рассматривать как реакцию на воздействие ξ . Аналогично, если уравнение двухполюсника представимо в виде $\xi = f_\xi(\eta)$, то соответствующая ему дуга называется *z-дугой*, причем величину ξ можно рассматривать как реакцию на воздействие η . Двухполюсники, допускающие описание относительно обеих переменных, называются *взаимоопределенными*, а соответствующие им дуги — *w-дугами*.



Поскольку из двух переменных η и ξ одна характеризует воздействие, а другая реакцию, то их положительные направления считаются взаимно противоположными. Обычно направления дуг отождествляют с положительными направлениями отсчетов поперечных переменных, а положительные направления отсчета продольных переменных принимают обратными ориентации дуг.

Полюсный граф системы строится таким образом, чтобы обеспечивались наиболее простые отношения между его структурой и уравнениями связей. Обычно уравнения связей формируются для поперечных и продольных переменных в следующем виде:

1) алгебраическая сумма поперечных переменных для любой вершины графа равна нулю:

$$\sum \eta(t) = 0$$

2) алгебраическая сумма продольных переменных для любого контура графа равна нулю:

$$\sum \xi(t) = 0$$

При алгебраическом суммировании переменных они считаются положительными при совпадении их направлений с выбранным направлением относительно вершины или контура и отрицательными, если направления переменных противоположны с выбранными направлениями (рис. 1.3).

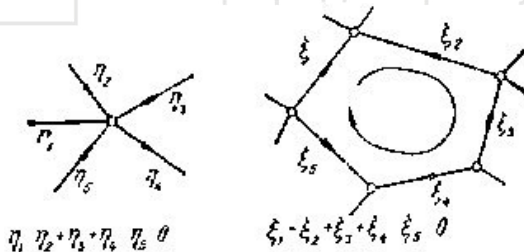


Рис.1.3. Уравнения связей для вершины и контура.

Здесь рассматриваются методы построения полюсных графов различных физических систем с двухполюсными компонентами. В дальнейшем эти методы обобщаются на системы с многополюсниками. Для простоты компоненты предполагаются линейными и стационарными.



1.3. Электрические цепи

Существуют три типа пассивных электрических двухполюсников: сопротивление, емкость и индуктивность. Они рассеивают или накапливают энергию и поэтому называются пассивными компонентами.

Сопротивление (рис. 1.4, а) — это такой компонент, в котором происходит необратимое преобразование электрической энергии в тепло. Зависимость между током (поперечная переменная) и напряжением (продольная переменная) может быть представлена в одной из двух форм (или в любой из них, если двухполюсник взаимопределенный):

$$i_R(t) = G u_R(t); \quad u_R(t) = R i_R(t),$$

где параметры G и R называются соответственно *проводимостью* и *сопротивлением* ($G = R^{-1}$ и $R = G^{-1}$).

Емкость (рис. 1.4, б) — компонент, накапливающий электрическую энергию. Заряд $q(t)$ связан с напряжением $u_C(t)$ на линейной емкости соотношением $q(t) = C u_C(t)$, где C — параметр, называемый *емкостью*. Ток $i_C(t)$, протекающий через емкость, выражается как производная заряда по времени, следовательно:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = S \int i_C(t) dt,$$

где $S = C^{-1}$ называют *инверсной емкостью*.

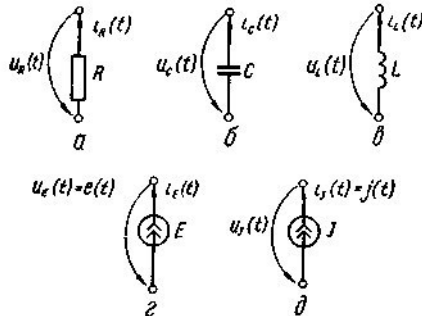


Рис. 1.4. Идеальные электрические двухполюсники:

а — резистор; б — конденсатор; в — катушка индуктивности ;
г — источник напряжения; д — источник тока.

Индуктивность: (рис. 1.4, в) — компонент, накапливающий магнитную энергию. Магнитный поток $\psi(t)$ линейной индуктивности пропорционален протекающему в ней току $i_L(t)$, т. е. $\psi(t) = L i_L(t)$, где L



параметр, называемый *индуктивностью*. Напряжение $u_L(t)$ на индуктивности равно скорости изменения магнитного потока во времени, следовательно:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt};$$
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \Gamma \int u_L(t) dt,$$

где $\Gamma = L^{-1}$ называют *инверсной индуктивностью*.

Источники энергии в электрических цепях представляются идеальными двухполюсниками двух типов. *Источник напряжения*— это двухполюсник (рис. 1.4, *з*), напряжение в котором определяется некоторой функцией времени $e(t)$ и не зависит от протекающего по нему тока, т. е. $u_E(t) = e(t)$. *Источник тока* — это двухполюсник (рис. 1.4, *д*), ток в котором также определяется некоторой функцией времени $j(t)$ и не зависит от приложенного напряжения, т. е. $i_J(t) = j(t)$

Для построения графа электрической схемы достаточно ее узлы рассматривать как вершины, а каждый двухполюсник заменить ребром, сохраняя отношение инцидентности. Например, граф электрической схемы (рис. 1.5, *а*) изображен на рис. 1.5, *б*. Следует иметь в виду, что при изображении электрических схем линии означают проводники без сопротивления, и узлы, соединенные такими линиями, являются по существу одним узлом (узел *f* на рис. 1.5, *а*). Узлы, с которыми связаны только два двухполюсника, на схемах обычно не отмечаются (рис. 1.5, *а*, узел *а*). На графах же каждая отмеченная точка рассматривается как его вершина и никаких линий, кроме дуг, не должно быть.

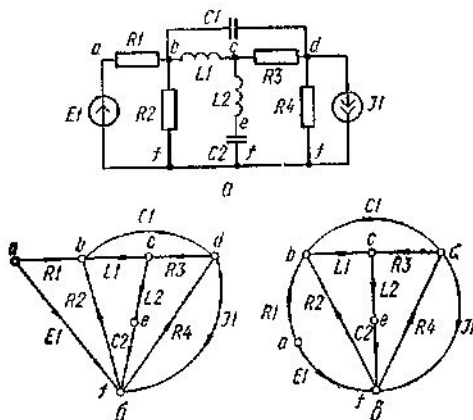


Рис. 1.5. Электрическая схема (*а*) и ее изоморфные графы (*б* и *в*).



Направления дуг пассивных двухполюсников можно выбирать произвольно. Дуги активных двухполюсников ориентируются по направлению источника тока и противоположно направлению источника напряжения (это связано с тем, что направление дуги указывает на положительное направление тока и противоположно положительному направлению напряжения).

Удобный практический прием построения графа для данной схемы состоит в следующем. На схеме выделяется внешний контур и изображается замкнутой линией (например, окружностью), на которой размещаются соответствующие вершины. Затем граф дополняется теми ребрами и вершинами, которые отсутствуют во внешнем контуре. Так, на рис. 1.5, в показан изоморфный граф, построенный по этому способу.

Уравнения связи выражаются законами Кирхгофа, представляющими условие непрерывности для токов и условие равновесия для напряжений в любой момент времени t :

1) алгебраическая сумма токов для любой вершины равна нулю (первый закон Кирхгофа), т. е.

$$\sum i(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма напряжений в любом контуре равна нулю (второй закон Кирхгофа), т. е.

$$\sum u(t) = 0.$$

1.4. Механические поступательные системы

Идеальные пассивные двухполюсники механических систем - это механическое сопротивление, масса и упругость. Перемещение $x(t)$ и скорость $v(t)$ являются продольными переменными, а сила $f(t)$ — поперечной переменной.

Сопротивление (рис. 1.6, а) представляет собой компонент, который отражает превращение механической энергии в тепло. В простейшем случае предполагается, что это превращение происходит в результате вязкого трения, сила которого $f_B(t)$ пропорциональна относительной скорости $v_B(t)$ трущихся тел, т. е.

$$f_B(t) = B \frac{dx_B(t)}{dt} = Bv_B(t); \quad v_B(t) = \frac{1}{B} f_B(t).$$

Здесь B — параметр, называемый *механическим поступательным сопротивлением*, а $1/B$ — *инверсное сопротивление* или *податливость*. Полюсы элемента сопротивления соответствуют твердым телам, между которыми имеет место вязкое трение.

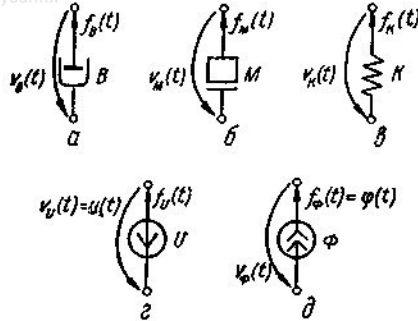


Рис. 1.6. Идеальные механические (поступательные) двухполюсники: *a* — сопротивление; *б* - масса; *в*- упругость; *г* - источник скорости, *д* - источник силы.

Масса (рис. 1.6, б) — компонент, накапливающий кинетическую энергию и, следовательно, обладающий механической инерцией. Зависимость между силой инерции $f_M(t)$ и перемещением $x_M(t)$ или скорости $v_M(t)$ массы M относительно выбранной точки отсчета выражается соотношениями:

$$f_M(t) = M \frac{d^2 x_M(t)}{dt^2} = M \frac{dv_M(t)}{dt};$$

$$v_M(t) = \frac{1}{M} \int f_M(t) dt,$$

где $1/M$ называется *инверсной массой*. Один из полюсов компонента массы связан с движущимся телом, а другой — с неподвижной или равномерно движущейся системой координат (точкой отсчета перемещения и скорости).

Упругость (рис. 1.6, в) – компонент накапливающий потенциальную энергию. Этот двухполюсник можно представить как пружину, концы которой соответствуют его полюсам. В линейном случае предполагается, что такая пружина не обладает массой и сила $f_k(t)$ реакции пропорциональна относительно перемещению $x_k(t)$ ее концов, т.е.

$$f_k(t) = Kx_k(t) = K \int v_k(t) dt; \quad v_k(t) = \frac{1}{K} \cdot \frac{df_k(t)}{dt},$$

где K - параметр, называемый *жесткостью*; $1/K$ —*гибкостью*. Идеальные источники механической энергии могут быть двух типов. Задающая скорость $u(t)$ какой-либо точки системы представляется



источником скорости (рис. 1.6, ε), один полюс которого связан с этой точкой, а другой — с той точкой системы, относительно которой эта скорость задается. Скорость такого двухполюсника не зависит от приложенных сил, т. е. $v_u(t)=u(t)$. Источник силы изображается двухполюсником (рис. 1.6, δ), полюсы которого соответствуют точкам приложения силы и ее реакции, причем сила в этом двухполюснике определяется некоторой функцией времени $\varphi(t)$ и не зависит от скорости, т.е.

$$f\varphi(t) = \varphi(t)$$

На основании приведенных определений можно построить схему механической поступательной системы. При этом узлы схемы соответствуют соединениям компонент системы, которые могут рассматриваться как единое целое, а соединяющие линии — жестким связям между компонентами. Переход от механической схемы к ее графу, как и для электрической схемы, на основе соответствия между инцидентностью идеальных двухполюсников узлам схемы и инцидентностью дуг и вершин графа. Направления дуг для пассивных двухполюсников принимаются в соответствии с выбранной системой отсчета (противоположно направлению перемещений x), а ориентация дуг источников определяется заданными направлениями (для источников силы они совпадают, а для источников скорости — противоположны).

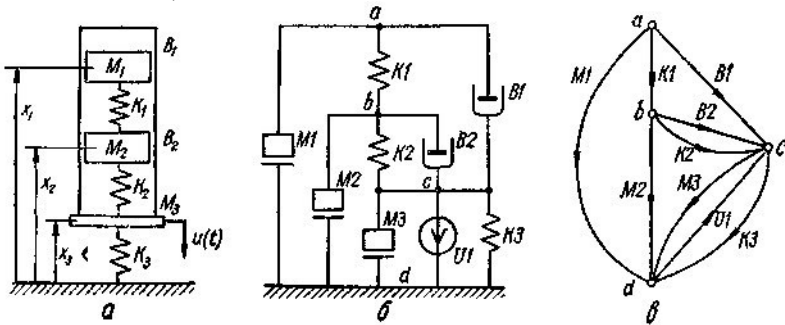


Рис.1.7. Механическая поступательная система (а), ее схема (б) и ее граф (в).

Пусть, например, в системе (рис. 1.7, а), движение которой может совершаться только по вертикали, платформа массой M_3 движется с заданной скоростью $u(t)$. Схема этой системы показана на рис. 1.7, б, а ее граф — на рис. 1.7, в. При достаточном навыке граф можно



построить и непосредственно из рассмотрения условного изображения механической поступательной системы без промежуточного вычерчивания ее схемы.

Уравнения связей механической поступательной системы выражают условие равновесия сил и условие непрерывности для скоростей (или перемещений):

1) алгебраическая сумма сил для любой вершины равна нулю (*принцип Даламбера*):

$$\sum f(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма скоростей (перемещений) в любом контуре равна нулю:

$$\sum v(t) = 0.$$

1.5. Механические вращательные системы

Соотношения для механических вращательных систем аналогичны соотношениям для поступательных систем. Перемещению $x(t)$ соответствует угол поворота $\varphi(t)$, линейной скорости $v(t)$ — угловая скорость $\omega(t)$, силе $f(t)$ — вращающий момент $\mu(t)$. Соответственно для механических вращательных систем имеем три пассивные компоненты и два идеальных источника, для обозначения которых можно использовать те же символы, что и для поступательных систем. *Вращательное сопротивление* (рис. 1.8, а) характеризует рассеивание механической энергии в тепло за счет вязкого трения:

$$\mu_B(t) = B \frac{d\varphi_B(t)}{dt} = B\omega_B(t); \quad \omega_B(t) = \frac{1}{B} \mu_B(t),$$

где B — *крутильное сопротивление*; $1/B$ — *инверсное сопротивление*.

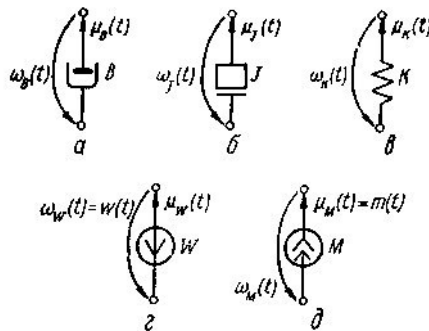


Рис. 1.8. Идеальные механические (вращательные) двухполюсники: а — вращательное сопротивление; б — вращающаяся масса;



ϵ — вращательная упругость; z — источник угловой скорости;
 δ — источник момента.

Вращающаяся масса (рис. 1.8, б) — компонент, характеризующий кинетическую энергию вращательного движения:

$$\mu_J(t) = J \frac{d^2\varphi_J(t)}{dt^2} = J \frac{d\omega_J(t)}{dt}; \quad \omega_J(t) = \frac{1}{J} \int \mu_J(t) dt,$$

где J — момент инерции.

Вращательная упругость (рис. 1.8, в) — компонент, накапливающий потенциальную энергию вращательного движения:

$$\mu_k(t) = K\varphi_k(t) = K \int \omega_k(t) dt; \quad \omega_k(t) = \frac{1}{K} \frac{d\mu_k(t)}{dt},$$

где K — крутильная жесткость; $1/K$ — гибкость.

Идеальный источник может быть *источником угловой скорости* (рис. 1.8, з), характеризующимся задающей угловой скоростью $\omega(t)$ и *источником момента* (рис. 8.8, д), характеризующимся задающим моментом $m(t)$.

Пример построения схемы и графа механической вращательной системы показан на рис. 1.9. Узлы графа соответствуют вращающимся массам, а направления ребер принимаются в соответствии с выбранным положительным направлением отсчета угла поворота. Параметры J_1 и J_2 , означают моменты инерции роторов, B_1 и B_2 — вязкое трение в опорах, а K_I — жесткость вала.

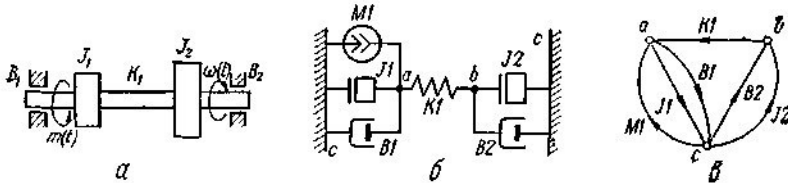


Рис. 1.9. Механическая вращательная система (а), ее схема (б) и граф (в).

Уравнения связей механической вращательной системы выражают условие равновесия моментов и условие непрерывности угловых скоростей (или углов поворота):

1) алгебраическая сумма моментов для любой вершины равна нулю:

$$\sum \mu(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма угловых скоростей (углов поворота) в любом контуре равна нулю:

$$\sum \omega(t) = 0.$$



1.6. Пневматические системы

Движение газа в ограниченной среде характеризуется зависимостью между давлением $p(t)$ и потоком $g(t)$, который выражается как количество молекул, проходящих в единицу времени. Используются три пассивные двухполюсные компоненты, представляющие собой идеализированные свойства пневматических систем: сопротивление, инертность и упругость. При этом поток рассматривается как поперечная величина, а давление (разность давлений) — как продольная величина.

Сопротивление (рис. 1.10, а) — двухполюсник, учитывающий рассеивание энергии за счет вязкого трения. Его уравнение может быть представлено в одной из двух форм:

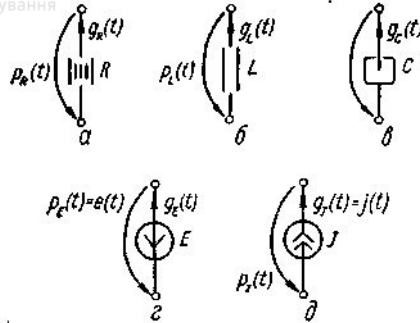
$$g_R(t) = G p_R(t); \quad p_R(t) = R g_R(t),$$

где параметры G и R называются соответственно *пневматической проводимостью* и *сопротивлением* ($G = R^{-1}$, $R = G^{-1}$). Величина $p_R(t)$ представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке $g_R(t)$. Примерами пневматических компонент с явно выраженным сопротивлением являются трубки с тонкими отверстиями (капилляры), сужающие устройства (сопла), щели и различные препятствия на пути движения газа.

Инертность (рис. 1.10, б) является двухполюсником, который характеризует противодействие изменению потока газа в среде и описывается соотношениями:

$$p_L(t) = L \frac{dg_L(t)}{dt};$$
$$g_L(t) = \frac{1}{L} \int p_L(t) dt,$$

где L — параметр, называемый *пневматической инертностью*. Величина $p_L(t)$ представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке $g_L(t)$. Пневматическая инертность заметно сказывается в трубопроводах при существенных изменениях потока газа во времени.



Ряс. 1.10. Идеальные пневматические двухполюсники:
а — сопротивление; б — инертность; в - упругость; г — источник давления; д — источник потока

Упругость (рис. 1.10,в) - двухполюсник, характеризующий свойство идеального газа, заключенного в некотором объеме (камере): изменение концентрации молекул пропорционально изменению давления (предполагается, что процесс изотермический, т. е. происходит при постоянной температуре). Так как изменение концентрации определяется потоком газа, то для этого двухполюсника можно записать соотношения:

$$g_c(t) = C \frac{dp_c(t)}{dt}; \quad p_c(t) = \frac{1}{C} \int g_c(t) dt,$$

где C — параметр, называемый *пневматической упругостью*. Величина $p_c(t)$ представляет собой давление газа в объеме относительно давления, которое принимается за нулевое (например, относительно атмосферного давления или вакуума). ПОЭТОМУ один из полюсов рассматриваемого двухполюсника связан с данным объемом, а второй - со средой, выбранной за начало отсчета давления.

Между пневматическими и электрическими системами существует глубокая аналогия. Поток соответствует току, давление — потенциалу, разность давлений — напряжению, избыточная концентрация молекул (по сравнению с условным уровнем) — заряду. Поэтому и соответствующие параметры пневматических и электрических двухполюсников обозначают обычно теми же буквами (R , L , C). Инертность часто называют *пневматической индуктивностью*, а упругость — *пневматической емкостью*.

Источники энергии в пневматических системах представляются идеальными двухполюсниками ДПУХ типов: *источником давления* (рис. 1.10, г) и *источником потока* (рис. 1.10, д), которые определяются



соответственно задающими давлением $e(t)$ и потоком $j(t)$, а также положительными направлениями этих величин.

При построении схемы пневматической системы узлы соответствуют объемам газа с различными давлениями, причем одни из них соответствует окружающей среде. На рис. 1.11 показан пример пневматической системы, ее схема и граф

Уравнения связей пневматической системы выражают условие непрерывности потоков и условие равновесия разностей давлений:

1) алгебраическая сумма потоков для любой вершины равна нулю:

$$\sum g(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма разностей давлений в любом контуре равна нулю:

$$\sum p(t) = 0.$$

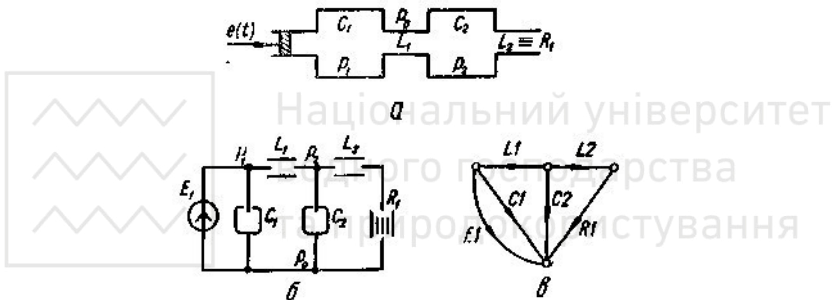


Рис. 1.11. Пневматическая система (а), ее схема (б) и граф (в).

Приведенные соотношения применимы также к акустическим и гидравлическим системам лишь с тем отличием, что поток $g(t)$ обычно рассматривается как изменение объема в единицу времени (объемный расход). Иногда под этой величиной понимают весовой (массовый) расход.

1.7. Аналогии

Из рассмотренного выше видно, что для систем различной физической природы имеет место аналогия между их компонентами и переменными, характеризующими состояния системы. Идя по пути обобщения, лучше всего было бы принять некоторую нейтральную терминологию для поперечных и продольных величин, а также для трех типов идеальных двухполюсников. Однако из-за отсутствия единой договоренности в этом вопросе чаще всего в качестве



основной принимают терминологию электрических цепей. Отсюда возникли электромеханические, электропневматические, электрогидравлические и другие аналогии (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Аналогии электрических величин

Физическая система	Перемен		
	Поперечные		Продоль
	Ток $i(t)$	Заряд $q(t)$	Напряжение $u(t)$
	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$	$q(t) = \int i(t) dt$	$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$
Механическая поступательная	Сила	Импульс силы	Скорость
Механическая вращательная	Вращающий момент	Импульс момента	Угловая скорость
Пневматическая	Молекулярный поток	Концентрация молекул	Давление (разность давлений)
Гидравлическая	Объемный поток	Объем жидкости	Давление (разность давлений)
Тепловая	Теплоотдача (тепловой поток)	Количество тепла	Температура (разность температур)



тип	Идеальные двухполюсники		
тип			
Потокосцепление $\psi(t)$	Сопротивление R	Емкость C	Индуктивность L
$\psi(t) = \int u(t) dt$	$u(t) = \frac{1}{R} u(t)$ $u(t) = Ri(t)$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$; $u(t) = \frac{1}{C} \int di(t) dt$	$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$; $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
Перемещение	Инверсное сопротивление (демпфер)	Масса (инертность)	Упругость (пружина)
Угол поворота	Инверсное сопротивление	Вращающаяся масса (момент инерции)	Вращательная упругость
Импульс давления	Пневматическое сопротивление	Пневматическая емкость (упругость)	Пневматическая индуктивность (инертность)
Импульс давления	Гидравлическое сопротивление	Гидравлическая емкость (резервуар)	Гидравлическая индуктивность
—	Тепловая проводимость	Теплоемкость	—

В первой строке табл. 1.1 приведены основные соотношения в обозначениях, принятых в теории электрических цепей. Для рассматриваемой системы соответствующие соотношения можно получить, заменив электрические величины и параметры аналогичными величинами и параметрами, которые указаны в остальных строках таблицы.

Приведенная таблица может быть расширена и на другие системы, не рассматривавшиеся выше, для этого необходимо на основе законов равновесия выяснить, какие величины являются поперечными и какие продольными. Затем, сравнивая компонентные уравнения двухполюсников данной системы с уравнениями электрических двухполюсников, установить аналогии между соответствующими компонентами.

1.8. Нелинейные и параметрические компоненты

Характер компонентных уравнений не влияет на вид полюсного графа системы, но методы использования этого



графа при построении математической модели системы в значительной мере определяются свойствам компонент. Поэтому уместно привести основные соотношения для нелинейных и параметрических компонент в терминах электрических цепей.

В общем случае зависимость между током и напряжением резистивного компонента выражается функцией $\varphi(i, u) = 0$, которая может быть представлена в одной из двух форм:

$$i = \varphi_G(u); \quad u = \varphi_R(i).$$

Первое соотношение описывает резистор (проводимость), представляемый напряжением и представляемый u -дугой, а второе — резистор (сопротивление), управляемый потоком, и представляемый z -дугой. На рис. 1.12, а, б, показаны характеристики двухполюсников, допускающих единственное представление. Если характеристика монотонно возрастающая (рис. 1.12, в), то ее можно выразить однозначной функцией как тока, так и напряжения.

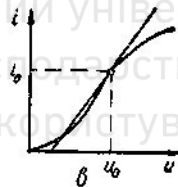
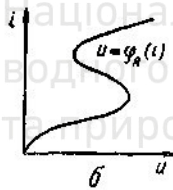
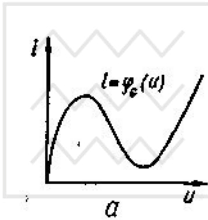


Рис 1.12. Характеристики нелинейных резисторов:

а — управляемого напряжением (а), током (б) и взаимопределенного (в)

Соответствующий двухполюсник является взаимопределенным и представляется w -дугой.

Нелинейные резистивные компоненты часто используются в *квазилинейном режиме*, при котором токи и напряжения изменяются относительно некоторой точки покоя (i_0, u_0) , причем эти изменения настолько малы, что рабочий участок характеристики можно считать линейным. Разлагая функцию $i = \varphi_G(u)$ в ряд Тейлор и ограничиваясь членом с первой производной, можно записать:

$$i = \varphi_G(u_0) + \varphi'_G(u_0)(u - u_0) = i_0 + \varphi'_G(u_0)(u - u_0)$$

или

$$\Delta i = G_d \Delta u; \quad \Delta u = \frac{1}{G_d} \Delta i = R_d \Delta i.$$

Здесь $\Delta i = i - i_0$ и $\Delta u = u - u_0$ - изменения тока и напряжения относительно точки покоя. Величина G_d численно равна производной



функции в этой точке и называется *динамической проводимостью*, а обратная ей величина R_D — *динамическим сопротивлением*:

$$G_D = \varphi'_G(u_0) = \left(\frac{di}{du} \right)_{u=u_0}; \quad R_D = \frac{1}{\varphi'_G(u_0)} = \left(\frac{du}{di} \right)_{i=i_0}.$$

Соотношения для параметрического резистора линейны, но его проводимость и сопротивление являются функциями времени, т. е.

$$i_G(t) = G(t)u_G(t), \quad u_R(t) = R(t)i_R(t)$$

Нелинейный емкостный двухполюсник характеризуется обычно зависимостью заряда от напряжения на этом двухполюснике $q(t) = q(u_C(t))$. Дифференцируя по времени, получаем выражение для тока в виде:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(u_C)}{du_C} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C(u_C) \frac{du_C(t)}{dt},$$

где $C(u_C)$ определяет *динамическую емкость*, зависящую от приложенного напряжения u_C . Емкость параметрического (линейного, но не стационарного) двухполюсника является функцией от времени. Поэтому, дифференцируя соотношение $q(t) = C(t)u_C(t)$, имеем:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt} (C(t)u_C(t)) = \frac{dC(t)}{dt} u_C(t) + C(t) \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Нелинейный индуктивный двухполюсник можно охарактеризовать зависимостью потокосцепления от тока в индуктивности $\psi(t) = \psi(i_L(t))$. Дифференцируя по времени, получаем выражение для напряжения в виде:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\psi(i_L)}{di_L} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L(i_L) \frac{di_L(t)}{dt},$$

где функция $L(i_L)$ определяет *динамическую индуктивность*, зависящую от протекающего тока i_L . Индуктивность параметрического двухполюсника является функцией от времени. Поэтому дифференцируя соотношение $\psi(t) = L(t)i_L(t)$ имеем:

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} (L(t)i_L(t)) = \frac{dL(t)}{dt} i_L(t) + L(t) \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Приведенные соотношения можно рассматривать как аналоги для нелинейных и параметрических двухполюсников любой физической природы, если понимать под входящими в эти соотношения символами величины в соответствии с табл. 1.1.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие дуги графа на рис. 1.5, *в* являются *у-дугами*, *z-дугами* и *w-дугами*?



- К каким типам дуг относятся дуги пассивных двухполюсников (электрических, механических, пневматических) при условии, что их уравнения не должны содержать интегралов?
- Определите ранг и цикломатическое число графа электрической схемы (рис. 1.5, в) и запишите уравнения по законам Кирхгофа для вершин и контуров, охватывающих ячейки графа.
- Определите ранг и цикломатическое число графа механической схемы (рис. 1.7, в) и запишите уравнения по принципу Даламбера для вершин и уравнения из условия непрерывности для скоростей по контурам, охватывающим ячейки графа.
- Постройте граф двойной Т-схемы (рис. 1.13). Является ли полученный граф плоским?

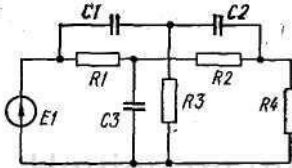


Рис. 1.13. Двойная Т-схема..

- При моделировании человеческого тела используется механическая модель, изображенная на рис. 1.14.

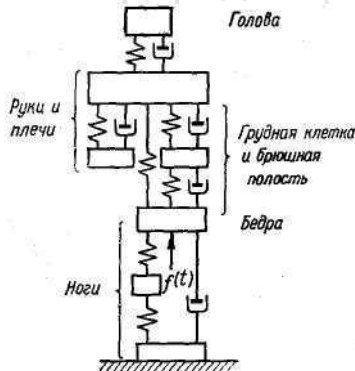


Рис. 1.14. Механическая модель человеческого тела.

Постройте граф этой модели с учетом сил тяжести, приложенных к массам частей тела и силы $f(t)$, действующей на тело в сидячем положении. Определите ранг и цикломатическое число полученного графа.



7. Постройте схему и граф механической системы (рис. 1.15).

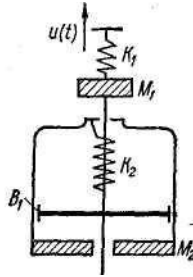


Рис. 1.15. Механическая поступательная система.

Масса M_1 подвешена к пружине, жесткость которой K_1 . К массе M_1 присоединен демпфер, состоящий из катаракта, пружины и массы. Шток, на нижний конец которого насажен поршень катаракта, жестко соединен с массой M_2 . Камера катаракта, масса которой M_2 , опирается на пружину с жесткостью K_2 . Противоположный конец этой пружины прикреплен к поршню катаракта. Вязкое трение в катаракте характеризуется сопротивлением B_1 . Верхнему концу пружины K_1 сообщается возвратно-поступательное движение, скорость которого задается функцией $u(f)$.

8. На рис. 1.16 дано упрощенное изображение системы подвески автомобиля. Предполагается, что на каждое из четырех колес действуют одинаковые усилия $\varphi(f)$, и вибрации происходят в вертикальном направлении. Параметры компонент указаны на рисунке. Постройте схему и граф этой системы.

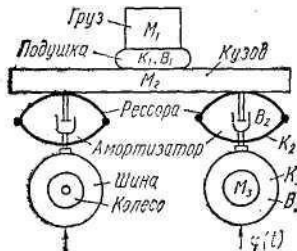


Рис. 1.16. Система подвески автомобиля.

9. Постройте граф гидравлической системы, изображенной на рис. 1.17.

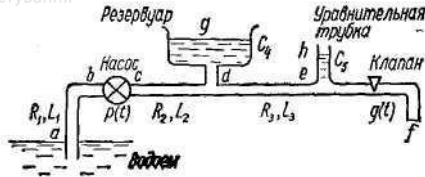


Рис. 1.17. Гидравлическая система.

Три участка водопровода характеризуются гидравлическими сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и инертностями (индуктивностями) L_1, L_2, L_3 (влиянием остальных участков пренебрегаем). Резервуар и уравнительная трубка характеризуются соответственно емкостями C_4 и C_5 . Насос является источником разности давлений $p(t)$, а клапан регулирует поток жидкости по закону $g(t)$ и может рассматриваться как источник потока. Давление в точках a, f, g, h одинаково и равно атмосферному давлению.

10. Воспользовавшись табл. 1.1, запишите нелинейные и параметрические соотношения для механических и пневматических двухполюсников и дайте им соответствующие истолкования.

2. МНОГОПОЛЮСНЫЕ ГРАФЫ

2.1. Полюсный граф многополюсника

Компонент, имеющий $m + 1$ полюсов, посредством которых он может объединяться с другими компонентами, характеризуется m независимыми поперечными переменными $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ и m независимыми продольными переменными $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$.

Действительно, с каждым полюсом связана поперечная переменная (рис. 2.1, а), но поскольку алгебраическая сумма поперечных переменных равна нулю, то одна из них зависима и выражается через остальные m переменных. Каждая продольная переменная связана с парой полюсов и отображается соответствующим ребром. Совокупность ребер независимых переменных должна образовать дерево на множестве $m + 1$ полюсов многополюсника (рис. 2.1, б). Любое другое ребро, связывающее пару каких-либо полюсов, образует с совокупностью ветвей дерева контур, и, следовательно, любая другая продольная переменная может быть выражена через некоторую совокупность независимых продольных переменных.

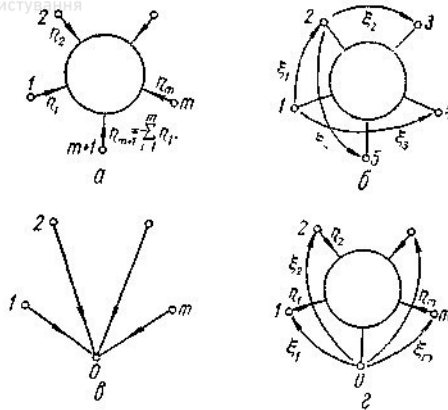


Рис. 2.1 Представление многополюсника.

a — поперечные переменные; b — продольные переменные;
 v — полюсный граф; z — поперечные и продольные переменные,
соответствующие полюсному графу.

В качестве стандартного представления совокупности независимых переменных многополюсника удобно принять звездное дерево с центром в некотором полюсе, называемом *базисным* (рис. 2.1, б). Остальные вершины этого дерева соответствуют m полюсам многополюсника (кроме базисного) и нумеруются порядковыми числами от 1 до m , а базисному полюсу обычно присваивается обозначение 0. Ветви дерева ориентируются одинаково относительно базисного полюса; чаще всего они направляются к базисному узлу, что соответствует направлению поперечных переменных внутрь многополюсника и продольных переменных — от базисного полюса к соответствующим полюсам (рис. 2.1, з) Таким образом, с каждым небазисным полюсом связаны продольная и поперечная переменные, которые нумеруются теми же числами, что и соответствующий полюс, и называются *полюсными переменными*.

Звездное дерево с m ветвями, направленными к базисному полюсу (рис. 2.1, в), представляет собой *полюсный граф* компоненты с $m + 1$ полюсами. Каждая ветвь этого графа характеризуется соответствующим уравнением системы m уравнений, связывающих независимые поперечные и продольные переменные многополюсней компоненты.

Если продольные временные заданы произвольным деревом, то они легко могут быть выражены через полюсные переменные. Так, для



продольных переменных пятиполюсника (рис. 2.1, б) при базисном узле 5 имеем:

$$\xi_1 = \xi'_2 - \xi'_1, \quad \xi_2 = \xi'_3 - \xi'_2, \quad \xi_3 = \xi'_4 - \xi'_3, \quad \xi_4 = -\xi'_4,$$

где полюсные переменные отмечены штрихами.

2.2. Уравнения многополюсника

Для описания линейной компоненты с $m+1$ полюсами используются три различные формы n соотношений, называемые *полюсными уравнениями*. Уравнения, записанные относительно поперечных переменных, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= Y_{11}\xi_1 + Y_{12}\xi_2 + \dots + Y_{1m}\xi_m \\ \eta_2 &= Y_{21}\xi_1 + Y_{22}\xi_2 + \dots + Y_{2m}\xi_m \\ &\vdots \\ \eta_m &= Y_{m1}\xi_1 + Y_{m2}\xi_2 + \dots + Y_{mm}\xi_m \end{aligned} \right\},$$

или в матричной форме

$$\eta_d = Y_d \xi_d,$$

где

$\eta_d = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ — вектор поперечных переменных;
 $\xi_d = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — вектор продольных переменных (оба вектора входят в уравнения как столбцевые матрицы); Y_d — квадратная матрица m -го порядка

$$Y_d = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m1} & Y_{m2} & \dots & Y_{mm} \end{bmatrix}.$$

Уравнения, записанные относительно продольных переменных, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= Z_{11}\eta_1 + Z_{12}\eta_2 + \dots + Z_{1m}\eta_m \\ \xi_2 &= Z_{21}\eta_1 + Z_{22}\eta_2 + \dots + Z_{2m}\eta_m \\ &\vdots \\ \xi_m &= Z_{m1}\eta_1 + Z_{m2}\eta_2 + \dots + Z_{mm}\eta_m \end{aligned} \right\},$$

или в матричной форме

$$\xi_d = Z_d \eta_d,$$

где Z_d — квадратная матрица m -го порядка



$$Z_d = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix}.$$

Матрицы Y_d и Z_d однозначно характеризуют многополюсник относительно принятой нумерации полюсов и выделенного базисного полюса и являются его обобщенными параметрами. Они связаны зависимостями

$$Y_d = Z_d^{-1}; \quad Z_d = Y_d^{-1}.$$

Обе матрицы существуют в случае, когда каждая из них неособенная. Если же матрица Y_d (или Z_d) особенная, то матрица Z_d (или Y_d) не существует.

В смешанной (гибридной) форме часть уравнений выражены относительно продольных переменных, объединенных в векторе ξ'_d , а остальная часть — относительно поперечных переменных, объединенных в векторе η''_d , т.е.

$$\begin{bmatrix} \xi'_d \\ \eta''_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix} = H_d \begin{bmatrix} \eta'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix},$$

где гибридная матрица H_d записать в блочном виде через субматрицы H_{11} , H_{12} , H_{21} и H_{22} . Решив это уравнение относительно векторов η'_d и η''_d , получим

$$\begin{bmatrix} \eta'_d \\ \eta''_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1}H_{12} \\ H_{21}H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix},$$

что равносильно уравнению $\eta_d = Y_d \xi_d$. Таким образом, получаем соотношение для матрицы Y_d через блоки матрицы H_d :

$$Y_d = \begin{bmatrix} H_{11}^{-1} & -H_{11}^{-1}H_{12} \\ H_{21}H_{11}^{-1} & H_{22} - H_{21}H_{11}^{-1}H_{12} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для матрицы Z находим:

$$Z_d = \begin{bmatrix} H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{21} & H_{12}H_{22}^{-1} \\ -H_{22}^{-1}H_{21} & H_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Дуга полюсного графа многополюсника описывается тем уравнением, которое представлено относительно связанной с ней поперечной или продольной переменной (в первом случае она относится к y -дугам, а во втором — к z -дугам). В отличие от уравнения дуги двухполюсной компоненты, правая часть уравнения дуги полюсного графа



многополюсника может содержать любые переменные, связанные с дугами этого графа.

Ниже рассматриваются полюсные графы и уравнения наиболее часто встречающиеся многополюсных компонент.

2.3. Электронный триод

Идеальный электровакуумный триод (рис. 2.2, а) в квазилинейном режиме без сеточных токов при выборе катода в качестве базисного полюса представляется полюсным графом с двумя дугами (рис. 2.2, б), уравнения которых:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0 \\ i_2 &= S u_1 + G_i u_2 \end{aligned} \right\},$$

где параметры S и G_i называют соответственно *крутизной* и *внутренней проводимостью*.

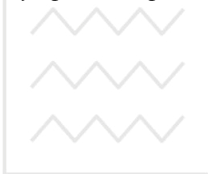


Рис. 2.2. Электронный триод (а) и его полюсный граф (б)

Дуга 1 полюсного графа отображает двухполюсник с бесконечно большим сопротивлением (разомкнутая дуга) и ее роль сводится к фиксации напряжения u_2 между сеткой и катодом триода. Уравнение дуги 2 можно представить в виде:

$$u_2 = -\frac{S}{G_i} u_1 + \frac{1}{G_i} i_2 = -\mu u_1 + R_i i_2,$$

где

$$\mu = \frac{S}{G_i} \text{ — статический коэффициент усиления;}$$

$$R_i = \frac{1}{G_i} \text{ — внутреннее сопротивление.}$$

Как видно, Y -матрица идеального электровакуумного триода является особенной (ее первая строка состоит из нулевых элементов)



$$Y_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S & G_t \end{bmatrix},$$

поэтому Z_d -матрица для этого многополюсника не существует. Граф схемы с электронными триодами (рис. 2.3, а) показан на рис. 2.3, б, где первый триод представлен дугами 1' и 2', а второй— дугами 1'' и 2'', которые выделены жирными линиями.

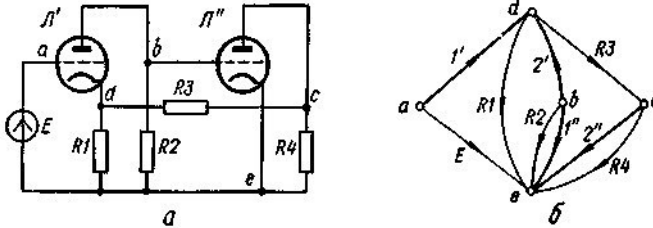


Рис 2.3. Схема с электронными триодами (а) и ее граф (б).

Дуги полюсных графов и источника напряжения имеют строго определенную ориентацию, а дуги пассивных двухполюсников ориентированы произвольно.

2.4. Транзистор

Уравнения низкочастотного транзистора (рис. 2.4, а) в квазилинейном режиме обычно представляются в трех формах:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

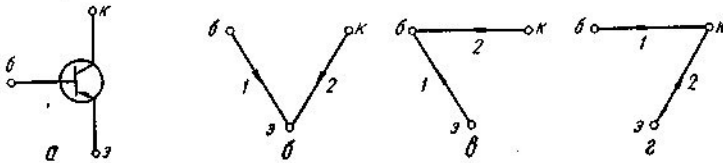


Рис. 2.4. Транзистор (а) и его полюсные графы при выборе в качестве общего полюса эмиттера (б), базы (в) и коллектора (г).

Им соответствуют три системы параметров, которыми служат матрицы g , r , h этих уравнений. Переход от одной системы параметров к другой осуществляется на основе следующих зависимостей:



$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|r|} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & |h| \end{bmatrix};$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|g|} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} |h| & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix};$$

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & |g| \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} |r| & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix},$$

где через $|g|$, $|r|$ и $|h|$ обозначены определители соответствующих матриц, т. е. $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ и т.п.

В зависимости от того, какой из трех полюсов транзистора выбран базисным (общим), имеем три типа полюсных графов: с общим эмиттером (рис. 2.4, б), с общей базой (рис. 2.4, в) и с общим коллектором (рис. 2.4, г). Для описания дуг каждого из этих полюсных графов пригодна любая из трех форм уравнений. Разумеется, численные значения параметров для различных полюсных графов отличаются между собой, поэтому параметры отличают индексами (α , β , κ) соответственно схеме, в которой они определены.

Вид графа транзисторной схемы зависит от выбора базисных полюсов транзисторов. Так, для схемы (рис. 2.5, а) при общей базе для первого транзистора и общем эмиттере для второго транзистора получаем граф, изображенный на рис. 2.5, б (дуги полюсных графов транзисторов выделены жирными линиями).

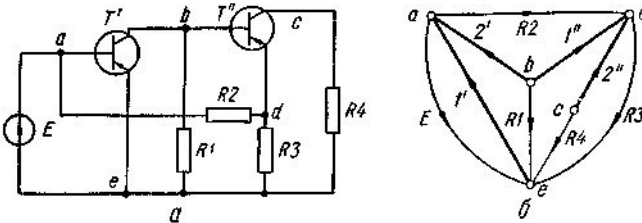


Рис. 2.5. Транзисторная схема (а) и ее граф (б).

2.5. Трансформатор

Простейший трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки (рис.2.6, а), полюсные уравнения которых в линейном приближении имеют вид:



$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\},$$

где L_1 и L_2 — индуктивности катушек; M — взаимная индуктивность. Величина M входит в эти уравнения со знаком плюс, если токи в катушках одинаково направлены относительно одноименных полюсов, и со знаком минус, если токи относительно одноименных полюсов направлены противоположно (одноименные полюсы обычно отмечаются жирными точками).

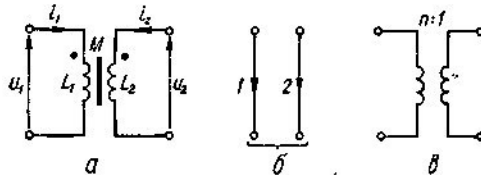


Рис. 2.6. Трансформатор (а), его полюсный граф (б) и идеальный трансформатор (в).

Представив каждую катушку ее полюсным графом (дугой), получим полюсный граф трансформатора, который состоит из двух топологически несвязанных дуг (рис. 2.6, б). Полюсные уравнения трансформатора можно представить в операторной форме следующими способами:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho L_1 & \rho M \\ \rho M & \rho L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = Y_{\text{д}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\rho(L_1 L_2 - M^2)} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Z_{\text{д}} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} & \frac{M}{L_2} \\ -\frac{M}{L_2} & \frac{1}{\rho L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H_{\text{д}} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Квадратные матрицы $Y_{\text{д}}$, $Z_{\text{д}}$ и $H_{\text{д}}$ в этих уравнениях являются обобщенными параметрами трансформатора. Для характеристики трансформаторов используются также две величины — коэффициент связи k и коэффициент трансформации n , выражаемые соотношениями:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$



Из физических соображений следует, что $k^2 < 1$. В предельном (теоретическом) случае при $k = 1$ говорят о *полной связи*, причем уравнения трансформатора преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & \frac{1}{pL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

и представляют собой модель *совершенного трансформатора*. Как видно, в таком трансформаторе отношение напряжений равно коэффициенту трансформации, т. е.

$$u_1 = nu_2, \quad u_1 / u_2 = n.$$

Аналогичное соотношение для токов имеет место при условии $1/pL_2 \rightarrow 0$, т. е. $L_2 \rightarrow \infty$. Для того, чтобы величина n оставалась конечной, необходимо принять также $L_1 \rightarrow \infty$. Тогда $i_2 = -ni_1$ и уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Компонент, описываемый этими уравнениями, называют *идеальным трансформатором*. Его можно понимать как трансформатор с полной связью и бесконечно большими индуктивностями, отношение которых конечно и равно n^2 . Условное обозначение идеального трансформатора показано на рис. 2.6, в. Его полюсный граф имеет тот же вид, что и в общем случае (рис. 2.6, б), но уравнения могут быть представлены только в смешанной форме. Поэтому в полюсном графе идеального трансформатора дуга 1 является z-дугой, а дуга 2 — y-дугой.

В общем случае произвольного числа m индуктивно связанных двухполюсников их уравнения записываются в виде:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_m \end{bmatrix},$$

где $Z_{ij} = pL_{ij}$, причем L_{ij} — *собственные индуктивности* и L_{ij} ($i \neq j$) — *взаимные индуктивности* двухполюсников.

Полюсный граф схемы с двухполюсниками при наличии индуктивных связей между ними строится так же, как и для обычных схем без индуктивных связей, т. е. каждый двухполюсник представляется дугой, и соединения дуг в графе соответствуют соединениям



двухполюсников в схеме. Единственное различие состоит в том, что граф схемы с индуктивными связями может быть несвязным.

2.6. Механические многополюсники

Изложенный метод представления многополюсных компонент применим к системам любой физической природы. Ниже приводятся полюсные уравнения и полюсные графы простейших механических многополюсников.

Рычаг (рис. 2.7, а) при малых перемещениях представляется полюсным графом (рис. 2.7, б) и описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + n_{21} f_2 + n_{31} f_3 \\ x_2 &= -n_{21} x_1 \\ x_3 &= -n_{31} x_1 \end{aligned} \right\},$$

где f_1, f_2, f_3 — силы; x_1, x_2, x_3 — перемещения в точках a, b, c рычага; M — масса, приведенная в точке a ; n_{21}, n_{31} — отношения плеч рычага:

$$n_{21} = l_2/l_1, \quad n_{31} = l_3/l_1$$

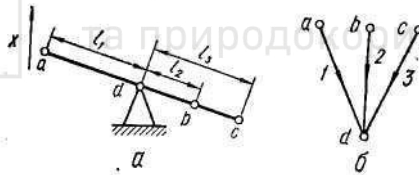


Рис. 2.7. Рычаг (а) и его полюсный граф (б).

Зубчатая передача (рис. 2.8, а) представляется полюсным графом (рис. 2.8, б) и описывается следующими полюсными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= (B_1 + n_{21}^2 B_2) \frac{d\varphi_1}{dt} + (\tau_1 + n_{21}^2 \tau_2) \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + n_{12} \mu_2 \\ \varphi_2 &= -n_{12} \varphi_1 \end{aligned} \right\},$$

где μ_1, μ_2 — моменты и φ_1, φ_2 — углы поворота первого и второго валов; B_1, B_2 — крутильные сопротивления и τ_1, τ_2 — моменты инерции валов; n_{12} — передаточное число, равное отношению количества зубьев шестерен:

$$n_{12} = \frac{m_1}{m_2}.$$

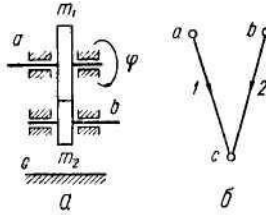


Рис. 2.8. Зубчатая передача (а) и ее полюсный граф (б).

Натяжной ролик (рис. 2.9, а) преобразует вращательное движение в поступательное, и его полюсный граф состоит из двух отдельных дуг (рис.2.9,б).

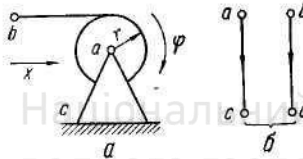


Рис. 2.9. Натяжной ролик (а) и его полюсный граф (б).

Полюсные уравнения натяжного ролика записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= B \frac{d\varphi_1}{dt} + \tau \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - r f_3 \\ x_2 &= r \varphi_1 \end{aligned} \right\},$$

где B — крутильное сопротивление; τ — момент инерции и r — радиус ролика.

Блок (рис. 2.10, а), характеризующийся массой M , моментом инерции τ , радиусом r и сопротивлением трения B , представляется полюсным графом с тремя дугами (рис. 2.10, б) и описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{B}{r^2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2} \frac{d^2x_1}{dt^2} + f_2 \frac{B}{r^2} \frac{dx_3}{dt} - \left(M + \frac{\tau}{r^2} \right) \frac{d^2x_3}{dt^2} \\ x_2 &= -x_1 + 2x_3 \\ f_3 &= -\frac{B}{r^2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2} \frac{d^2x_1}{dt^2} - 2f_2 + M \frac{d^2x_3}{dt^2} \end{aligned} \right\},$$

где f_1, f_2, f_3 — силы, приложенные в точках a, b, c ; x_1, x_2, x_3 — перемещения этих точек.

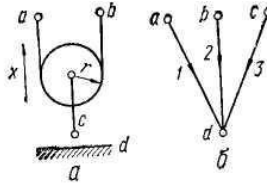


Рис. 2.10. Блок (а) и его полюсный граф (б).

На рис. 2.11 изображена схема с механическими многополюсниками и ее граф.

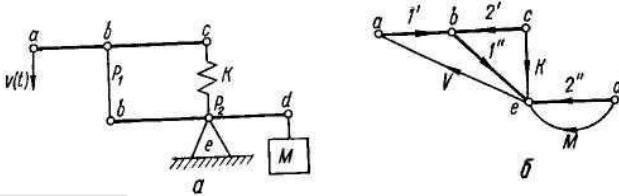


Рис. 2.11. Механическая система с многополюсными компонентами (а) и ее граф (б).

Рычаг P_1 , представлен на графе дугами $1'$ и $2'$, а рычаг P_2 — дугами $1''$ и $2''$ (эти дуги выделены жирными линиями).

2.7. Дифференциальный редуктор

В качестве примера вращательного механического многополюсника рассмотрим дифференциальный редуктор, называемый обычно *дифференциалом* (рис. 2.12, а). Его полюсами являются три вала, которые осуществляют связь с другими компонентами. Скорость ω_0 пропорциональна разности скоростей ω_a и ω_b , т. е. $\omega_c = n(\omega_a - \omega_b)$. Коэффициент пропорциональности n определяется соотношением между числом зубьев конических зубчатых колес.

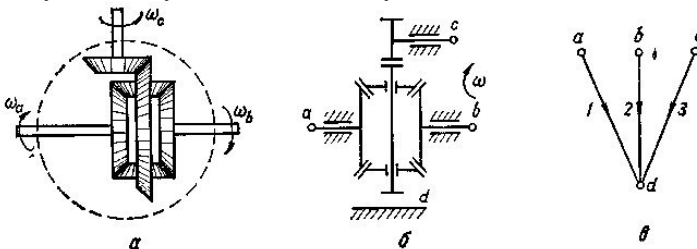


Рис. 2.12. Дифференциал (а), его кинематическая схема (б) и полюсный граф (в).



Кинематическая схема дифференциала показана на рис. 2.12, б, а его полюсный граф – на рис. 2.12, в. Для вывода полюсных уравнений воспользуемся соотношениями динамики для трех валов (без учета трения в подшипниках и упругости валов):

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \mu_1 - \mu; \quad J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mu_2 - \mu; \quad J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \mu_3 - \frac{\mu}{n},$$

где J_1, J_2, J_3 – моменты инерции валов вместе с насаженными на них коническими шестернями (J_3 учитывает также момент инерции непосредственно сцепленной с валом c части дифференциала), μ_1, μ_2, μ_3 – внешние вращательные моменты, μ – эквивалентный момент нагрузки, приложенный к первому валу со стороны дифференциала.

Соотношение угловых скоростей при выбранном положительном направлении ω (рис. 2.12,а) имеет вид $\omega_3 = -n(\omega_1 + \omega_2)$.

Подставляя значение ω_3 в последнее выражение, находим:

$$\mu = n^2 J_3 \left(\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} \right) + n \mu_3.$$

Заменив в первых двух соотношениях μ через полученное выражение и присоединив соотношение для угловых скоростей, получим полюсные уравнения дифференциала в виде:

$$\mu_1 = (J_1 + n^2 J_3) \frac{d\omega_1}{dt} + n^2 J_3 \frac{d\omega_2}{dt} + n \mu_3;$$

$$\mu_2 = n^2 J_3 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_2 + n^2 J_3) \frac{d\omega_2}{dt} + n \mu_3;$$

$$\omega_3 = -n\omega_1 - n\omega_2.$$

Им соответствует матричное уравнение в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(J_1 + n^2 J_3) & pn^2 J_3 & n \\ pn^2 J_3 & p(J_2 + n^2 J_3) & n \\ -n & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix},$$

где квадратная матрица третьего порядка является гибридной матрицей дифференциала. Как видно, полюсные уравнения нельзя представить относительно моментов, и, следовательно, матрица Y_d для дифференциала не существует. Они могут быть преобразованы к уравнениям для угловых скоростей, но тогда матрица Z_d будет содержать интегральные операторы.

2.8. Двигатель постоянного тока

При рассмотрении систем с электромеханическим преобразованием энергии в качестве многополюсных компонент фигурируют электрические машины. Они обычно представляются несвязными



поллюсными графами, а их поллюсные уравнения выражают зависимости между электрическими и механическими величинами. Одним из наиболее простых примеров электрических машин является *двигатель постоянного тока* (рис. 2.13,а).

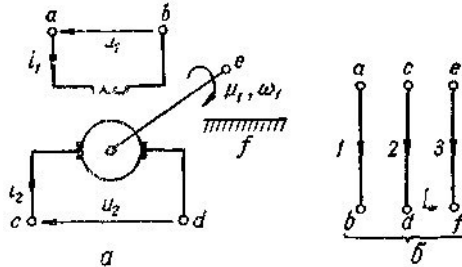


Рис. 2.13. Двигатель постоянного тока (а) и его поллюсный граф(б).

Он представляется поллюсным графом (рис. 2.13,б), дуги которого соответствуют обмотке возбуждения, электрическому входу и механическому выходу. Поллюсные уравнения двигателя имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 &= G \omega_3 i_1 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ u_3 &= -G i_1 i_2 + B \omega_3 + J \frac{d\omega_3}{dt} \end{aligned} \right\},$$

где R_1, L_1 — сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения; R_2, L_2 — сопротивление и индуктивность цепи якоря; G — коэффициент, зависящий от параметров машины. Два из этих уравнений нелинейны, так как в них входят произведения переменных.

В частном случае, при постоянном напряжении возбуждения ($u_1 = \text{const}$) и отсутствии реакции якоря, ток возбуждения также постоянен ($i_1 = i_0$). Уравнения становятся линейными и в матричной форме принимают вид:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 + pL_2 & Gi_0 \\ -Gi_0 & B + pJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Соответственно, двигатель представляется четырехполлюсником, и его поллюсный граф содержит только дуги 2 и 3.



2.9. Гидромеханические многополюсники

В технике широко используются различные гидромеханические системы в качестве исполнительных механизмов, усилителей, гидроприводов и т. п. Их можно также рассматривать как соединение многополюсных компонент. Приведем некоторые примеры гидромеханических многополюсников.

Управляющий золотник (рис. 2.14, а) представляет собой многополюсник с механическим входом, характеризующимся силой f_1 и перемещением x , и гидравлическим выходом, характеризующимся разностью давления p_2 и объемным потоком жидкости g_2 .

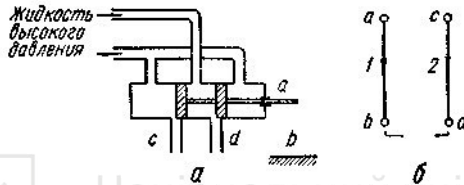


Рис. 2.14. Управляющий золотник (а) и его полюсный граф (б).

Полюсный граф (рис. 2.14, б) состоит из двух дуг, первая из которых отображает механический вход, а вторая — гидравлический выход. Полюсные уравнения управляющего золотника имеют вид:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 + B_1 \frac{d}{dt} + M_1 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

где B_1 и M_1 — соответственно вязкое сопротивление и масса золотникового поршня; R_2 — гидравлическое сопротивление; k_1 и k_{21} — коэффициенты, определяемые из эксперимента.

Силовой цилиндр (рис. 2.15, а) служит для преобразования гидравлического давления в механическую силу.

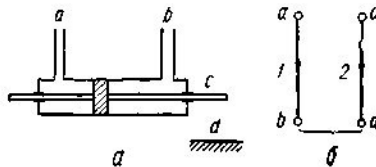


Рис. 2.15. Силовой цилиндр (а) и его полюсный граф.



Дуги полюсного графа (рис. 2.15, б) соответствуют гидравлическому входу (объемный поток g_1 и давление p_1) и механическому выходу (сила f_2 и перемещение x_2 поршня). Полюсные уравнения силового цилиндра можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \frac{d}{dt} \\ -S B_2 \frac{d}{dt} + M_2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где S — площадь поршня; B_2 и M_2 — соответственно вязкое сопротивление и масса поршня.

Управляющий золотник и силовой цилиндр образует совместно гидравлический исполнительный механизм (рис. 2.16, а), позволяющий при небольших управляющих усилиях и перемещениях на входе золотника получать значительные силы и перемещения на выходе силового цилиндра.



Рис. 2.16. Гидравлический исполнительный механизм (а) и его графы (б, в).

Необходимая для этого энергия поступает от внешнего источника давления гидравлической системы. Граф гидравлического исполнительного механизма (рис. 2.16, б) получается объединением полюсных графов его компонентов (дуги управляющего золотника отмечены штрихом, а дуги силового цилиндра — двумя штрихами).

Гидравлический исполнительный механизм также можно рассматривать как многополюсный компонент с механическим входом (f_1, x_1) и выходом (f_2, x_2) и представить соответствующим полюсным графом (рис. 2.16, в). Исключая из уравнений золотника и силового цилиндра переменные $g_1 = g_2$ и $p_1 = p_2$ получаем полюсные уравнения, соответствующие этому графу:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + B_1 \frac{d}{dt} + M_1 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21} R_2 S & (-R_2 S^2 + B_2) \frac{d}{dt} + M_2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



В гидроусилителе (рис. 2.17, а) гидравлический механизм используется совместно с рычагом в качестве обратной связи между входом и выходом, которая обеспечивает автоматическое закрытие золотника, когда силовой поршень занимает требуемое положение. В полюсном графе гидроусилителя (рис. 2.17, б) дуги 1' и 2' изображают гидравлический механизм, дуги 1'' и 2'' — рычаг, а дуги 1 и 2 — соответственно входное и выходное усилия.

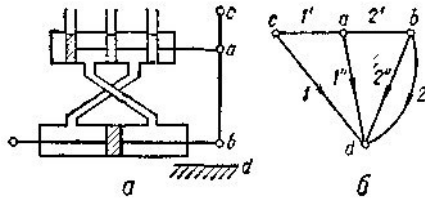


Рис. 2.17. Гидроусилитель (а) и его полюсный граф (б).

2.10 Схемные модели многополюсных компонентов

Один из распространенных методов представления многополюсных компонентов основан на использовании их схемных моделей, состоящих из двухполюсников и называемых часто *схемами замещения* или *эквивалентными схемами*. Вид схемной модели компонента зависит от режима его работы, требуемой точности описания его свойств и поставленной задачи.

В качестве примера на рис. 2.18 показаны две схемные модели транзистора.

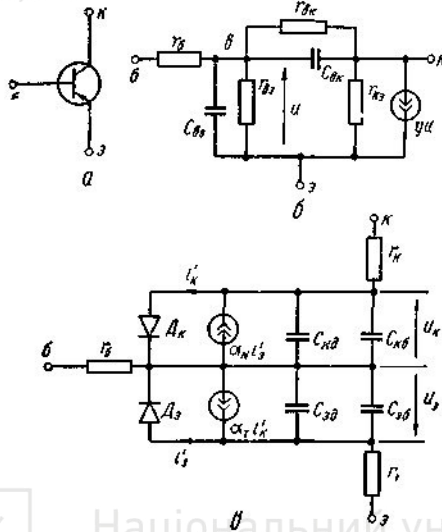


Рис. 2.18. Схемные модели транзистора (а), высокочастотная модель в квазилинейном режиме (б) и нелинейная модель Эберса-Молла (в).

Одна из них (рис. 2.18,б) является высокочастотной моделью в квазилинейном режиме (при слабых сигналах). Она содержит линейные резистивные и емкостные двухполюсники и источник, ток которого $j = gi$ линейно зависит от напряжения u между узлами b и $э$. Модель Эберса-Молла (рис. 2.18, в) представляет транзистор в режиме больших сигналов и содержит нелинейные емкости ($C_{кб}$, $C_{эб}$, $C_{кд}$, $C_{эд}$) и резисторы (D_k , $D_э$), а также источники, токи которых выражаются через токи i'_k и $i'_э$ посредством коэффициентов α_N и α_T .

Характерной особенностью схемных моделей многополюсных компонентов являются наличие в них *зависимых источников*, токи или напряжения которых могут зависеть от токов или напряжений в любой части схемы. На рис. 2.19 показаны четыре основных типа зависимых источников: источники тока, управляемые током (рис. 2.19, а) или напряжением (рис. 2.19, б), и источники напряжения, управляемые током (рис. 2.19, в) или напряжением (рис. 2.19, г) Величины α , g , r , μ , являющиеся коэффициентами пропорциональности в уравнениях зависимых источников, называют *управляющими параметрами*.

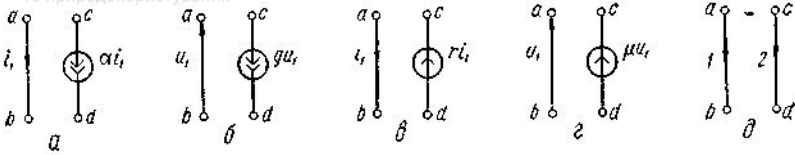


Рис. 2.19. Типы зависимых источников (а, б, в, г) и их полюсный граф (д).

Полюсный граф зависимого источника, в отличие от обычного двухполюсника, состоит из двух дуг (рис. 2.19, д). Первая из них отображает величину (ток или напряжение), которая управляет зависимым источником и называется *управляющей дугой*. Вторая представляет собственно источник и называется *управляемой дугой*. Чаще всего управляющие величины связаны с некоторыми двухполюсниками схемы (например, величину u на рис. 2.18, б можно рассматривать как напряжение на двухполюсниках $C_{вз}$ или $r_{вз}$, а управляющие токи i'_K и i'_3 на рис. 2.18, в — как токи двухполюсников D_K и D_3 . В таких случаях роль управляющей дуги играет дуга того двухполюсника, ток или напряжение которого управляет зависимым источником.

В общем случае управляющие величины фиксируются в полюсном графе коротко-замкнутыми (для тока) и разомкнутыми (для напряжения) дугами. Аналогичные дуги можно вводить в полюсный граф для фиксации любых токов и напряжений, непосредственно не связанных с компонентами, но представляющих интерес при анализе системы (например, входные и выходные величины, напряжение между любой парой узлов, ток в любом проводнике и вообще, любая искомая величина). Если требуется выделить фиксирующие дуги, то для них используются специальные обозначения (рис. 2.20), причем направление дуги всегда совпадает с направлением тока (поперечной величины).

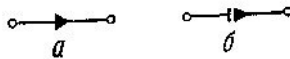


Рис. 2.20. Условные обозначения короткозамкнутой (а) и разомкнутой (б) дуг.

Короткозамкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается уравнением $u = 0$ и поэтому всегда является z -дугой. Разомкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается уравнением $i = 0$ и относится к y -дугам. Управляемые дуги зависимых источников тока в соответствии с их уравнениями $i_2 = \alpha i_1$ или $i_2 = g u_1$ являются y -дугами, а



управляемые дуги зависимых источников напряжения в соответствии с уравнениями $u_2 = r i_1$ или $u_2 = \mu u_1$ являются z -дугами.

Представление многополюсных компонентов схемными моделями применимо не только к электронным, но и к другим системам, а изложенные здесь положения распространяются на них по аналогии.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразить продольные переменные пятиполюсника (см. рис. 2.1, б) через поперечные переменные при условии, что в качестве базисного узла выбран узел 3.

2. Изменится ли полюсный граф многополюсника при изменении:

а) формы уравнений многополюсника;

б) базисного полюса?

3. Какие дуги полюсного графа системы с многополюсными компонентами имеют:

а) фиксированные направления;

б) произвольные направления?

4. К какому типу (y, z, w) относятся дуги полюсного графа электровакуумного триода?

5. К какому типу относятся дуги полюсного графа транзистора при условии, что он описывается:

а) r -параметрами;

б) g -параметрами;

в) h -параметрами?

6. Значения h -параметров транзистора в схеме с общей базой следующие:

$h_{116} = 62 \text{ Ом}$; $h_{126} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$; $h_{216} = -0,97 \text{ Ом}$; $h_{226} = 10^{-6} \text{ Ом}$. Определите g -параметры и r -параметры в схеме с общей базой, воспользовавшись зависимостями, приведенными в (2.4).

7. Покажите, что r -параметры транзистора в схемах с общим эмиттером и общим коллектором выражаются через r -параметры в схеме с общей базой зависимостями:

$$r_{\text{э}} = \begin{bmatrix} r_{116} & r_{116} - r_{126} \\ r_{116} - r_{216} & r_{116} - r_{126} - r_{216} + r_{226} \end{bmatrix};$$

$$r_{\text{к}} = \begin{bmatrix} r_{226} & r_{226} - r_{216} \\ r_{226} - r_{216} & r_{116} - r_{126} - r_{216} + r_{226} \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись этими зависимостями, определите численные значения r -параметров в схемах с общим эмиттером и общим коллектором по значениям r -параметров в схеме с общей базой, полученным в задаче 6.



8. Постройте графы транзисторной схемы (см. рис. 2.5, а) при следующих вариантах выбора базисных полюсов транзисторов:
- а) T_1 с общим коллектором и T_2 с общей базой;
 - б) T_1 с общей базой и T_2 с общим коллектором;
 - в) T_1 и T_2 с общим эмиттером.
9. Постройте граф схемы с индуктивными связями (рис. 2.20) и запишите уравнения индуктивно связанных двухполюсников.

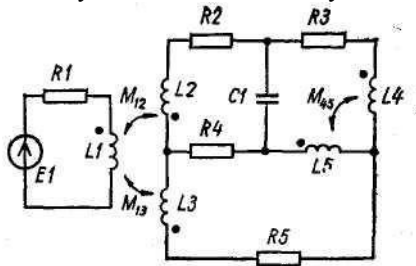


Рис. 2.20. Схема с индуктивными связями.

10. Постройте граф механической системы (рис. 2.21), используя полюсные графы рычага и блока.

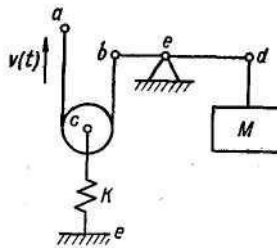


Рис. 2.21. Механическая система с многополюсными компонентами.

11. Постройте граф гидравлической системы (рис. 2.22) при условии, что насос создает постоянное давление в заданных потоках g_1 , g_2 , g_3 .

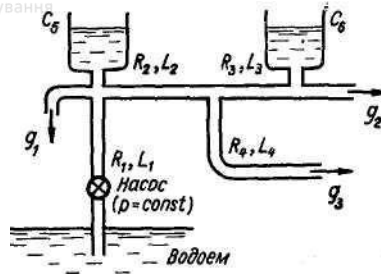


Рис. 2.22. Гидравлическая система.

12. Постройте графы схемных моделей транзистора (см. рис. 2.18, б, в) и укажите, какие из дуг имеют фиксированные направления.
13. В графы, построенные в задаче 12, введите разомкнутые и короткозамкнутые управляющие дуги. Сформулируйте правило выбора направлений управляющих дуг.



3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Университет
водного хозяйства

3.1. Математические модели физических систем

При построении математической модели физической системы исходные данные должны содержать сведения о структуре системы и свойствах входящих в нее компонентов. Полусный граф совместно с уравнениями связей позволяет получить зависимости между переменными, которые связаны с выбранной надлежащим образом совокупностью независимых сечений и контуров. Эти зависимости отражают структурные свойства системы и называются *топологическими уравнениями*, причем сечения и контуры играют роль *системы координат*, в которой представляется математическая модель. Совокупность полусных уравнений, связывающих переменные отдельных компонентов, составляет *компонентные уравнения*.

Топологические и компонентные уравнения дают полное описание системы и путем их преобразования можно получить математические модели различных типов. Естественно стремление к таким моделям, которые содержат возможно меньшее число переменных, наиболее удобны по форме и требуют минимальных усилий при их построении. Часто имеется возможность сформировать математическую модель в *однородной системе координат*, в качестве которых выступают



сечения или контуры. Соответственно получаем *уравнения сечений* и *уравнения контуров*. Однако в общем случае приходится прибегать к *неоднородным системам координат*, когда переменные связаны как с контурами, так и с сечениями. Система координат называется *сокращенной*, если используется только часть сечений и контуров полюсного графа.

В результате целенаправленного преобразования топологических и компонентных уравнений получаем систему уравнений, которую можно представить в матричной форме следующим образом:

$$W X = FQ$$

Квадратная матрица W и матрица Q , элементы которых выражаются через параметры компонентов и интегродифференциальные операторы, полностью определяют систему уравнений относительно *вектора переменных* X . Вектор F содержит в качестве своих компонент заданные функции, характеризующие независимые источники.

Решение уравнения $W X = FQ$ относительно вектора X позволяет получить совокупность независимых переменных, через которые определяются и любые другие переменные, характеризующие состояние системы. Часто возникает задача представления модели физической системы относительно ее *сторон* – входов и выходов. Тогда уравнение $W X = FQ$ преобразуется к такому виду, чтобы оно содержало только входные и выходные переменные, а остальные переменные были исключены.

Если требуется получить математическую модель в дифференциальной форме, то необходимо обеспечить такую процедуру ее формирования, чтобы матрица W не содержала интегральных операторов. Обычно эта цель достигается в неоднородных системах координат или принимаются какие-либо специальные методы преобразования полюсных графов и полюсных уравнение компонентов системы. Уравнение $W X = FQ$ в дифференциальной форме может быть преобразовано в *уравнение переменных состояния*, которое для линейной системы имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv,$$

где x — вектор переменных состояния и v — задающий вектор, связанные между собой матрицами A и B .

Общая процедура преобразования исходных данных к математическим моделям системы показана на рис. 3.1.



Рис. 3.1 Преобразование исходных данных к математическим моделям системы.

3.2. Топологические уравнения

Уравнения связей для вершин (p, q) -графа можно записать в матричной форме

$$A_0 \eta_d = 0,$$

где A_0 — сокращенная матрица инцидентности; $\eta_d = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$ — вектор поперечных величин дуг графа.

Действительно, строка матрицы A_0 , соответствующая некоторой вершине, содержит элементы ± 1 в столбцах инцидентных этой вершине дуг, а знак учитывает направление дуги относительно вершины. Произведение строки на вектор η_d дает соответствующее уравнение связи, причем написанное выше уравнение представляет $p - 1$ таких уравнений, и все они независимы. Ясно, что замена матрицы A_0 матрицей сечений Π не нарушает равенства. Поэтому уравнения связей для независимых сечений в матричной форме имеют вид:

$$\Pi \eta_d = 0$$

Аналогично уравнение связей для $q - p + 1$ независимых контуров получим как произведение матрицы контуров P на вектор продольных переменных $\xi_d = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$, т. е.

$$P \xi_d = 0$$

Уравнения связей для поперечных и продольных переменных относительно сечений и контуров образуют совокупность *топологических уравнений*. Если дуги графа упорядочены так, что сначала следуют ветви фундаментального дерева, а за ними хорды, то в системе сечений и контуров, определяемых этим деревом, топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$[1 \ \pi] \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = 0; \quad [p \ 1] \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = 0,$$



где переменные ветвей дерева отмечены индексом T , а переменные хорд — индексом N . Выполнив умножение блочных матриц и векторов, получим

$$\eta_T + \pi \eta_N = 0, \quad \rho \xi_T + \xi_N = 0,$$

откуда

$$\eta_T = -\pi \eta_N = \rho^t \eta_N; \quad \xi_N = -\rho \xi_T = \pi^t \xi_T.$$

Полученные соотношения показывают, что поперечные величины дерева выражаются через поперечные величины дополнения, а продольные величины дополнения — через продольные величины дерева. Таким образом, из $2q$ переменных топологически независимыми являются только $p - 1$ поперечных и $q - p + 1$ продольных переменных, т. е. всего q величин. Остальные q переменных легко определяются с помощью матрицы π или ρ . Из выражений

$$\eta_d = \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^t \\ 1 \end{bmatrix} \eta_N;$$

$$\xi_d = \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi^t \end{bmatrix} \xi_T.$$



следуют важные формулы:

$$\eta_d = P^t \eta_N; \quad \xi_d = \Pi^t \xi_T.$$

Рассмотрим в качестве примера граф транзисторной схемы (см. рис. 2.5, б), в который введена дополнительная разомкнутая дуга Q для фиксации напряжения между вершинами b и c (рис. 3.2).

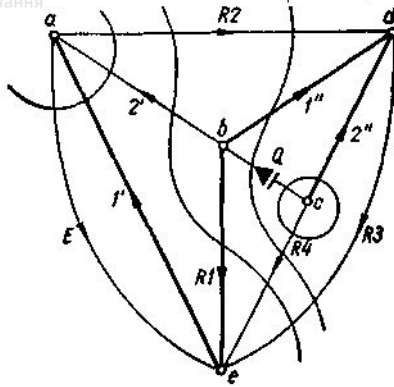


Рис. 3.2. Граф транзисторной схемы с разомкнутой дугой Q, фиксирующей искомое напряжение.

Системы независимых сечений и контуров определяются выбранным фундаментальным деревом (ветви выделены жирными линиями). При этом

$$\pi = \begin{bmatrix} E & R2 & R3 & R4 & Q \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} I' \\ R1 \\ I'' \\ 2'' \end{matrix}$$

$$\rho = -\pi^t = \begin{bmatrix} I' & R1 & I'' & 2'' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} E \\ 2' \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ Q \end{matrix}$$

Топологические уравнения в выбранной системе координат имеют вид:



$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} i'_1 \\ i_{R1} \\ i''_1 \\ i''_2 \\ i_E \\ i'_2 \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \\ i_Q \end{bmatrix} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u'_1 \\ u_{R1} \\ u''_1 \\ u'_2 \\ u_E \\ u''_2 \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \\ u_Q \end{bmatrix} = 0.$$

Зависимости между переменными выражаются соотношениями:

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i_{R1} \\ i''_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ i'_2 \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \\ i_Q \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_E \\ u''_2 \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u_{R1} \\ u''_1 \\ u'_2 \end{bmatrix}.$$



3. Компонентные уравнения. В зависимости от того, какая переменная (поперечная ИЛИ продольная) дуги выражается ее полюсным уравнением через другие переменные, множество дуг полюсных графов компонентой разбивается на y -дуги и z -дуги. Соответственно разбиваются и векторы поперечных и продольных переменных:

$$\eta_Y = (\eta_y, \eta_z) \text{ и } \xi_X = (\xi_y, \xi_z).$$

Следует обратить внимание на то, что в отличие от векторов η_d и ξ_d векторы η_X и ξ_X содержат переменные, связанные не со всеми дугами графа, а только с дугами полюсных графов компонент.

В общем случае следует считать, что поперечные переменные y -дуг и продольные переменные z -дуг могут выражаться через любую совокупность переменных. Поэтому компонентные уравнения в матричной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_Y &= Y_d \xi_Y + N_d \eta_Z + N_d' \eta_Y + Y_d' \xi_Z; \\ \xi_Z &= M_d \xi_Y + Z_d \eta_Z + Z_d' \eta_Y + M_d' \xi_Z. \end{aligned}$$

Входящие в эти уравнения матрицы определяются на основании полюсных уравнений компонент рассматриваемой системы. Компонентные уравнения можно представить и в неявной форме



$$[V_\xi, V_\eta] \begin{bmatrix} \xi_X \\ \eta_X \end{bmatrix} = 0,$$

где $V = [V_\xi, V_\eta]$ — матрица размера $q_X \times 2q_X$, если под q_X понимать число дуг полюсных графов компонент.

Независимые источники, характеризуемые заданными поперечными $v(t)$ и продольными $\varepsilon(t)$ величинами, относятся соответственно к j -дугам и e -дугам и представляются уравнениями:

$$\eta_j = \vartheta(t); \quad \xi_e = \varepsilon(t).$$

Разомкнутые дуги описываются уравнением $\eta=0$. Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями поперечных величин, либо как резистивные y -дуги с нулевой проводимостью. Короткозамкнутые дуги описываются уравнением $\xi = 0$. Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями продольных величин, либо как резистивные z -дуги с нулевым сопротивлением.

Запишем, например, компонентные уравнения дуг графа рис. 3.2. Пусть, резистивные двухполюсники представлены их сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и R_4 , уравнения транзистора $T1$ выражены через g -параметры (дуги $1'$ и $2'$), а уравнения транзистора $T2$ — через h -параметры (дуги $1''$ и $2''$), т. е.



$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_1'' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix}.$$

На основе этих соотношений имеем:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_1'' \\ i_2' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} \\ 0 & h_{22} & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1}' \\ i_1'' \\ i_{R2}' \\ i_{R3}' \\ i_{R4}' \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{R1}' \\ u_1'' \\ u_{R2}' \\ u_{R3}' \\ u_{R4}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1}' \\ i_1'' \\ i_{R2}' \\ i_{R3}' \\ i_{R4}' \end{bmatrix}.$$

Как видно, в рассматриваемом примере матрицы N'_d , Y'_d , Z'_d , M'_d оказались нулевыми.

В неявной форме компонентные уравнения представляются матрицей:

$$V = \begin{array}{cccccccccccccccc} u_1' & u_{R1}' & u_1'' & u_2'' & u_2' & u_{R2}' & u_{R3}' & u_{R4}' & i_1' & i_{R1}' & i_1'' & i_2'' & i_2' & i_{R2}' & i_{R3}' & i_{R4}' \\ \hline g_{11} & & & & g_{12} & & & & -1 & & & & & & & & i' \\ & -1 & & & & & & & & R_1 & & & & & & & R1 \\ & & -1 & h_{12} & & & & & & & h_{11} & & & & & & i'' \\ & & & h_{22} & & & & & & & h_{21} & -1 & & & & & 2'' \\ g_{21} & & & & g_{22} & & & & & & & & -1 & & & & 2' \\ & & & & & -1 & & & & & & & & & R_2 & & R2 \\ & & & & & & -1 & & & & & & & & & R_3 & R3 \\ & & & & & & & -1 & & & & & & & & & R_4 \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & & R4 \end{array}$$

Дуга E независимого источника напряжения описывается уравнением $u_E = e(t)$, а разомкнутая дуга Q , фиксирующая напряжение между вершинами b и c , — уравнением $i_Q = 0$.

3.3. Уравнения сечений

Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как u -дуги, поперечные переменные которых выражаются через



продольные переменные, то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\eta_Y = Y_d \xi_Y.$$

Представим матрицу сечений как $\Pi = [\Pi_Y, \Pi_J]$, где субматрицы Π_Y и Π_J соответствуют столбцам Y -дуг и задающих источников поперечных величин, т. е. J -дуг (предполагается, что задающие источники продольных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[\Pi_Y, \Pi_J] \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем

$$\Pi_Y \eta_Y = -\Pi_J \eta_J \text{ или } \Pi_Y Y_d \xi_Y = -\Pi_J \delta.$$

Подставив

$\xi_Y = \Pi_Y^t \xi_T$, приходим к уравнениям сечений в матричной форме

$$(\Pi_Y Y_d \Pi_Y^t) \xi_T = -\Pi_J \delta.$$

или

$$Y \xi_T = J.$$

Здесь

$Y = \Pi_Y Y_d \Pi_Y^t$ и $J = -\Pi_J \delta$ — матрично-векторные параметры математической модели в однородной системе координат (сечений). Определив из этого уравнения вектор продольных переменных дерева ξ_T , остальные переменные можно найти по формулам

$$\xi_N = \pi^t \xi_T \text{ и } \eta_{i_Y} = Y_d \xi_Y.$$

Так как число независимых сечений графа $v = p - k$, то матричное уравнение сечений соответствует v скалярным уравнениям.

Входящие в выражения для Y и J матрицы обычно сильно разреженные, поэтому вместо умножения матриц можно воспользоваться правилами непосредственной записи матрично-векторных параметров на основе графа системы и полусных уравнений.

Для вектора J такое правило очень простое и непосредственно следует из выражения $J = -\Pi_J \delta$. Ясно, что k -я компонента вектора J равна со знаком минус произведению k -й строки матрицы Π_J на вектор δ , т. е.

$J_k = -\Pi_{J(k)} \delta$. А это значит, что она может быть записана как алгебраическая сумма задающих поперечных величин тех источников, дуги которых инцидентны k -му сечению, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если дуга направлена противоположно сечению, и со знаком минус, если направления дуги и сечения совпадают.



Правило записи матрицы Y получим, представив входящую в ее выражение матрицу Π_Y через векторы-столбцы, т. е.

$$Y = [\Pi_Y^{(1)}, \Pi_Y^{(2)}, \dots, \Pi_Y^{(m)}] \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_Y^{(1)t} \\ \Pi_Y^{(2)t} \\ \dots \\ \Pi_Y^{(m)t} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Pi_Y^{(i)} y_{ij} \Pi_Y^{(j)t} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(j)t}) y_{ij}$$

где $m=q_y$ означает число y -дуг.

Произведение i -го столбца $\Pi_Y^{(i)}$ матрицы Π_Y на транспонированный j -й столбец (т. е. строку) $\Pi_Y^{(j)t}$ равно квадратной матрице v -го порядка:

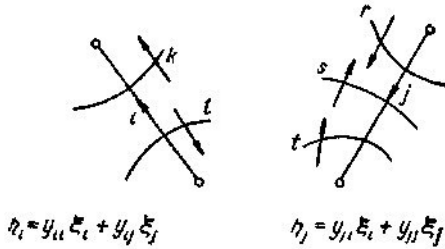
$$\Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(j)t} = \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i} \\ \Pi_{Y2i} \\ \dots \\ \Pi_{Yvi} \end{bmatrix} [\Pi_{Y1j}, \Pi_{Y2j}, \dots, \Pi_{Yvj}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Y1i} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Y1i} \Pi_{Yvj} \\ \Pi_{Y2i} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Y2i} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Y2i} \Pi_{Yvj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{Yvi} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Yvi} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Yvi} \Pi_{Yvj} \end{bmatrix}$$

Сумма таких матриц, умноженных на соответствующие скаляры y_{ij} (параметры компонентов), и дает в результате матрицу системы Y . Очевидно, y_{ij} появится в тех клетках матрицы Y , которым соответствуют ненулевые значения приведенной выше матрицы. Собственный параметр y_{ij} i -й дуги записывается на пересечении строк и столбцов матрицы Y , которые соответствуют инцидентным этой дуге сечениям (со знаком плюс, если относительно данной дуги направления рассматриваемых сечений совпадают, и со знаком минус, если эти направления противоположны). Взаимный (управляющий) параметр y_{ij} дуг с номерами i и j записывается в матрицу Y на пересечении строк, соответствующих тем сечениям, которые инцидентны i -й дуге, и столбцов, соответствующих тем сечениям, которые инцидентны j -й дуге. При этом знак, с которым вписывается y_{ij} , зависит от того, как направлены дуги относительно рассматриваемых сечений. Если эти направления одинаковы, т. е. одновременно совпадают или противоположны, то y_{ij} вписывается в соответствующую клетку матрицы Y со знаком плюс. Если же эти направления различные, т. е. направление одной дуги совпадает с направлением рассматриваемого инцидентного ей сечения, а направление другой противоположно с рассматриваемым инцидентным



ей сечением, то y_{ij} вписывается со знаком минус. Приведенное правило иллюстрируется на рис. 3.3.



	k	l	r	s	t
k	y_{kk}	$-y_{li}$	y_{ij}	$-y_{lj}$	$-y_{lj}$
l	$-y_{ki}$	y_{ii}	$-y_{ij}$	y_{ij}	y_{ij}
r	y_{ji}	$-y_{ji}$	y_{jj}	$-y_{jj}$	$-y_{jj}$
s	$-y_{js}$	y_{js}	$-y_{jj}$	y_{jj}	y_{jj}
t	$-y_{jt}$	y_{jt}	$-y_{jj}$	y_{jj}	y_{jj}

Рис. 3.3. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу Y.

3.4. Уравнения контуров

Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как z-дуги, продольные переменные которых выражаются через поперечные переменные, то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\xi_Z = Z_d \eta_Z$$

Представим матрицу контуров как $P = [P_Z, P_E]$, где субматрицы P_Z и P_E содержат соответственно столбцы z-дуг и задающих источников продольных величин, т. е. e-дуг (предполагается, что задающие источники поперечных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[P_Z, P_E] \begin{bmatrix} \xi_Z \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем

$$P_Z \xi_Z = -P_E \xi_E \text{ или } P_Z Z_d \eta_Z = P_E \xi.$$

Подставив



$$\eta_Z = P_Z^t \eta_N,$$

приходим к уравнениям контуров в матричной форме

$$(P_Z Z_d P_Z^t) \eta_N = -P_E \varepsilon,$$

или

$$Z \eta_N = E.$$

Здесь $Z = P_Z Z_d P_Z^t$ и $E = -P_E \varepsilon$ — матрично-векторные параметры математической модели в однородной системе координат (контуров). Определив из этого уравнения вектор поперечных переменных дополнения η_N , остальные переменные можно найти по формулам $\eta_T = \rho^t \eta_N$ и $\xi_Z = Z_d \eta_Z$. Так как число независимых контуров графа равно $\sigma = q - p + k$, то матричное уравнение контуров соответствует σ скалярным уравнениям.

Легко заметить дуальность математических моделей в однородных системах координат (сечений или контуров). Все соотношения для одной из них можно получить из другой простой заменой дуальных терминов и величин:

Сечение \leftrightarrow контур

y -дуга \leftrightarrow z -дуга

j -дуга \leftrightarrow e -дуга

Поперечная переменная \leftrightarrow продольная переменная

Матрица сечений \leftrightarrow матрица контуров

Матрица $Y_d \leftrightarrow$ матрица Z_d

Матрица $Y \leftrightarrow$ матрица Z

Вектор $J \leftrightarrow$ вектор E

В частности, используя дуальность терминов и величин, можно сформулировать правила записи матрицы Z и вектора E непосредственно из рассмотрения графа системы и полюсных уравнений компонентов. Так, k -я компонента e_k вектора E равна алгебраической сумме задающих продольных величин тех источников, дуги которых инцидентны k -му контуру, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если направления дуги и контура совпадают, и со знаком минус, если их направления противоположны. Правило записи матрицы Z иллюстрируется на рис. 3.4.



$$\xi_i = z_{ki} q_i + z_{lj} q_j$$



$$\xi_j = z_{ri} q_i + z_{sj} q_j$$

	k	l	r	s	t
k	z_{ki}	$-z_{ki}$	z_{ij}	$-z_{ij}$	$-z_{ij}$
l	$-z_{li}$	z_{li}	$-z_{ij}$	z_{ij}	z_{ij}
r	z_{ri}	$-z_{ri}$	z_{jj}	$-z_{jj}$	$-z_{jj}$
s	$-z_{si}$	z_{si}	$-z_{jj}$	z_{jj}	z_{jj}
t	$-z_{ti}$	z_{ti}	$-z_{jj}$	z_{jj}	z_{jj}

Рис.3.4. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу Z.

3.5. Преобразование источников

До сих пор предполагалось, что в системе действуют источники только одного типа. Однако нетрудно обобщить математические модели в однородных системах координат на случаи, когда имеются задающие источники как продольных, так и поперечных величин, описываемые соответственно уравнениями $\xi_E = e(t)$ и $\eta_j = j(t)$.

Рассмотрим сначала уравнения сечений. Выберем фундаментальное дерево так, чтобы все дуги независимых источников продольных величин (e -дуги) вошли в это дерево, а все дуги независимых источников поперечных величин (j -дуги) — в дополнение. Это всегда возможно, так как источники продольных величин не могут образовать контуров, а источники поперечных величин — сечений. Если бы это условие было нарушено, то некоторые из источников в силу топологических уравнений для таких сечений и контуров уже не являлись бы независимыми, что свидетельствовало бы о некорректной постановке задачи.

Расположив дуги графа так, что за e -дугами следуют u -дуги, а затем j -дуги, запишем топологические уравнения для сечений в матричной форме:



$$\begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_Y \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь матрица сечений представлена через субматрицы, полученные разбиением ее строк на два подмножества (e, y_T) и столбцов на три подмножества (e, y, j). Единичная субматрица отражает тот факт, что e -дуги инцидентны только своим сечениям, так как все они включены в фундаментальное дерево. Из топологического уравнения имеем два матричных соотношения:

$$\eta_E = -\Pi_{EY}\eta_Y - \Pi_{EJ}\eta_J; \quad \Pi_{YY}\eta_Y = -\Pi_{YJ}\eta_J.$$

Подставив сюда

$$\eta_Y = Y_d \xi_Y \quad \text{и} \quad \eta_J = \vartheta,$$

а также выразив ξ_Y через продольные величины дерева ξ_T , т. е.

$$\xi_Y = \Pi'_{YT}\xi_T = [\Pi'_{EY}, \Pi'_{YY}] \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \Pi'_{EY}\epsilon + \Pi'_{YY}\xi_{YT},$$

получим

$$\begin{aligned} \eta_E &= -\Pi_{EY}Y_d(\Pi'_{EY}\epsilon + \Pi'_{YY}\xi_{YT}) - \Pi_{EJ}\vartheta; \\ (\Pi_{YY}Y_d\Pi'_{YY})\xi_{YT} &= -\Pi_{YJ}\vartheta - (\Pi_{YY}Y_d\Pi'_{EY})\epsilon. \end{aligned}$$

Первое выражение может быть использовано для определения поперечных величин e -дуг (если это требуется). Второе соотношение представляет собой уравнение сечений, которое в краткой записи выражается следующим образом:

$$Y\xi_{YT}=J$$

Матрицу

$$Y = \Pi_{YY}Y_d\Pi'_{YY}$$

можно записать по правилу, приведенному в (3.4) с тем различием, что учитывается инцидентность у-дуг только сечениям, определяемым у-ветвями дерева (у-сечениям).

Вектор

$$J = -\Pi_{YJ}\vartheta - (\Pi_{YY}Y_d\Pi'_{EY})\epsilon$$

учитывает источники обоих типов, представленные величинами ϑ и ϵ . Первое слагаемое $-\Pi_{YJ}\vartheta$ представляет собой вектор, компонентами которого служат алгебраические суммы задающих поперечных величин дуг источников, инцидентных соответствующим у-сечениям. Второе слагаемое $-(\Pi_{YY}Y_d\Pi'_{EY})\epsilon$ учитывает воздействие источников продольных величин, для записи матрицы $Y' = \Pi_{YY}Y_d\Pi'_{EY}$ также можно воспользоваться правилом, аналогичным приведенному в (3.4) с тем



различием, что при вписывании параметра u_{ij} рассматривается инцидентность i -й дуги u -сечениям и инцидентность j -й дуги e -сечениям.

Для получения уравнений контуров при наличии источников обоих типов необходимо, как и ранее, выбрать фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все e -дуги, а все j -дуги оказались в дополнении. Топологическое уравнение записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_Z \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

С учетом соотношений

$$\xi_Z = Z_d \eta_Z, \quad \xi_E = \varepsilon \quad \text{и} \quad \eta_J = \vartheta$$

получаем:

$$(P_{ZZ} Z_d P'_{ZZ}) \eta_{ZN} = -P_{ZE} \varepsilon - (P_{ZZ} Z_d P'_{JZ}) \vartheta;$$

$$\xi_J = -P_{JZ} Z_d (P'_{JZ} \vartheta + P'_{ZZ} \eta_{ZN}) - P_{JE} \varepsilon.$$

Первое из них представляет собой уравнение контуров, которое в краткой записи выражается следующим образом

$$Z \eta_{ZN} = E,$$

где

$$Z = P_{ZZ} Z_d P'_{ZZ} \quad \text{и} \quad E = -P_{ZE} \varepsilon - (P_{ZZ} Z_d P'_{JZ}) \vartheta.$$

Для записи матрично-векторных параметров Z и E можно воспользоваться правилами, дуальными приведенным выше правилам записи матрицы Y и вектора J .

Матрицу

$$Y' = \Pi_{YY} Y_d \Pi_{\varepsilon Y}$$

размера $q_Y \times q_E$ можно рассматривать как оператор, преобразующий источники продольных величин в задающие поперечные переменные. Аналогично матрицу

$$Z' = P_{ZZ} Z_d P'_{JZ}$$

размера $q_z \times q_J$ можно рассматривать как оператор, преобразующий источники поперечных величин в задающие продольные величины.

Так как переменными уравнений в однородных системах координат служат векторы ξ_{YT} и η_{ZN} , то при наличии q_E источников продольных величин и q_J источников поперечных величин число скалярных уравнений сечений равно $\nu = q_E = p - k - q_E$, и число скалярных уравнений контуров равно $\sigma = q_J = q - p + k - q_J$.

При формировании уравнений сечений короткозамкнутые дуги




целесообразно представить как e -дуги, а разомкнутые — как y -дуги. Все эти дуги вводятся в дерево. Тогда искомые поперечные переменные определяются из уравнения для η_E , а искомые продольные переменные — из уравнений сечений как компоненты вектора ξ_{YT} . При формировании уравнений контуров короткозамкнутые дуги целесообразно представить как z -дуги, а разомкнутые — как j -дуги. Все эти дуги вводятся в дополнение. Тогда искомые поперечные переменные определяются из уравнений контуров как компоненты вектора η_N , а искомые продольные переменные — из уравнения для ξ_J .

3.6. Транзисторная схема

Проиллюстрируем методы формирования уравнений в однородных системах координат на примере транзисторной схемы (см. рис. 2.5, а), используя ее граф (см. рис. 3.2).

При выводе уравнений сечений необходимо дугу E источника напряжения $e(t)$ и разомкнутую дугу Q ввести в дерево, а также представить транзисторы g -параметрами и резисторы — проводимостями. Выбрав дерево, как показано на рис. 3.5, запишем матрицу сечений с разбиением на блоки:



$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} =$$

	E	$R1$	I''	Q	Z''	$R2$	I'	Z'	$R3$	$R4$	
E	1					1	-1	-1			
$R1$		1				-1		1	1	1	
I''			1		1				-1		
Q				1	1						1

Как видно, субматрицы Π_{EJ} и Π_{YJ} отсутствуют, так как граф не содержит дуг независимых источников тока (j -дуг). Матрица проводимостей дуг полюсных графов компонентов Y_d , входящая в компонентное уравнение $i_Y = Y_d u_Y$, записывается в виде:



	$R1$	I''	Q	$2''$	$R2$	I'	$2'$	$R3$	$R4$	
$Y_A =$	G_1									$R1$
		$g''_{11\vartheta}$		$g''_{12\vartheta}$						I''
										Q
		$g''_{21\vartheta}$		$g''_{22\vartheta}$						$2''$
					G_2					$R2$
						$g'_{11\vartheta}$	$g'_{12\vartheta}$			I'
						$g'_{21\vartheta}$	$g'_{22\vartheta}$			$2'$
								G_3		$R3$
									G_4	$R4$

Матрично-векторные параметры уравнения сечений $Y_{шГТ} = J$ определяется формулами:

$$Y = \Pi_{Y\gamma} Y_A \Pi'_{Y\gamma} \text{ и } J = -\Pi_{Y\gamma} j - Y' e = -Y' e, \text{ где } Y' = \Pi_{Y\gamma} Y_A \Pi'_{E\gamma}.$$

Перемножив соответствующие матрицы, получим:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & R1 & I'' & Q \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline g'_{22\vartheta} + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -G_2 - G_3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_1 \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline -G_2 - G_3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g''_{11\vartheta} + g''_{12\vartheta} + g''_{21\vartheta} + g''_{22\vartheta} + G_2 + G_3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g''_{12\vartheta} + g''_{22\vartheta} \\ \hline \end{array} \\ \hline & \begin{array}{|c|} \hline G_4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g''_{21\vartheta} + g''_{22\vartheta} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline g''_{22\vartheta} + G_4 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} R1 \\ I'' \\ Q \end{array}$$

$$Y' = \begin{array}{|c|} \hline -G_2 - g'_{21\vartheta} - g'_{22\vartheta} \\ \hline G_2 \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} R1 \\ I'' \\ Q \end{array}$$

Таким образом, имеем уравнения сечений в матричной форме:



$$\begin{bmatrix} g'_{226} + G & -G_2 - G_1 & G_1 \\ -G_2 - G_3 & g''_3 + G_2 + G_3 & g''_{123} + g''_{223} \\ G_4 & g''_{213} + g''_{223} & g''_{223} + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{R'} \\ u_1 \\ u_Q \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} G_2 + g'_{216} + g'_{226} \\ -G_2 \\ 0 \end{bmatrix} e,$$

где

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4; \quad g''_3 = g''_{113} + g''_{123} + g''_{213} + g''_{223}.$$

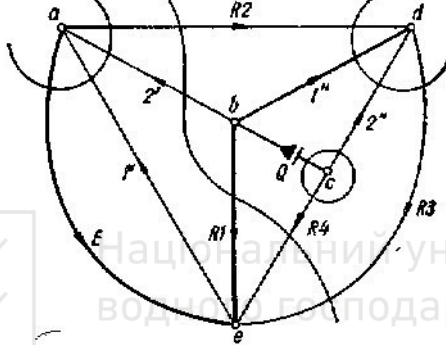


Рис. 3.5. Граф транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений сечений.

Матрицы Y и Y' можно также записать по приведенным ранее правилам. Например, проводимость G_2 записывается на пересечении строк и столбцов соответствующих сечениям $R1$ и $1''$, так как дуга $R2$ инцидентна этим сечениям, причем симметрично от главной диагонали проводимость G_2 записывается со знаком минус вследствие противоположности направлений сечений $R1$ и $1''$ относительно дуги $R2$. Взаимная проводимость g''_{123} дуги $1''$ транзистора $T2$ записывается на пересечении второй строки с вторым и третьим столбцами, так как дуга $1''$ инцидентна сечению $1''$, а дуга $2''$ — сечениям $1''$ и Q . Поскольку направление дуги $2''$ совпадает с инцидентными ей сечениями $1''$ и Q , то g''_{123} везде вписывается со знаком плюс. Аналогично вписываются в матрицу проводимости и другие параметры компонентов. Собственная проводимость g'_{116} дуги $1'$ транзистора $T1$ не вошла в матрицы Y и Y' , так как эта дуга не инцидентна u -сечениям.

Тройные матричные произведения удобно также получать суммированием строк и столбцов матрицы Y_d . Так как в выражении



$Y = P_{YY} Y_d P_{YY}^t$ ненулевые элементы матрицы P_{YY} равны ± 1 , то умножение Y_d на P_{YY} слева соответствует алгебраическому суммированию строк, а умножение на P_{YY}^t справа — алгебраическому суммированию столбцов матрицы Y_d . Какие именно строки и столбцы и с каким знаком суммируются указывают ненулевые элементы соответствующих строк матрицы P_{YY} . При получении матрицы $Y' = P_{YY} Y_d P_{EY}^t$ операции над строками матрицы Y_d определяются матрицей P_{YY} , а операции над столбцами — матрицей P_{EY} .

В рассматриваемом примере для получения первой строки произведения $P_{YY} Y$ необходимо из первой строки матрицы Y_d вычесть пятую и прибавить к ней седьмую, восьмую и девятую строки. Вычитая восьмую строку из суммы второй, четвертой и пятой, получаем вторую строку произведения $P_{YY} Y_d$. Наконец, сумма третьей, восьмой и девятой строк дает третью строку произведения $P_{YY} Y_d$. В результате имеем:

	$R1$	$1''$	Q	$2''$	$R2$	$1'$	$2'$	$R3$	$R4$	
$P_{YY} Y_d =$	G_1				$-G_2$	g'_{216}	g'_{226}	g'_{23}	G_4	$R1$
		$g''_{113} + g''_{213}$		$g''_{123} + g''_{223}$	G_2			$-G_3$		$1''$
		g''_{213}		g''_{223}					G_3	Q

Выполнив такие же операции над столбцами этой матрицы, получим матрицу Y . Для определения матрицы Y' необходимо из пятого столбца произведения $P_{YY} Y_d$ вычесть шестой и седьмой столбцы и результат записать как единственный (в данном случае) столбец матрицы Y' .

Искомое напряжение u_Q МОЖНО определить из решения уравнения сечений, например по правилу Крамера :

$$u_Q = \frac{1}{\Delta} [(G_2 + g'_{216} + g'_{226}) \Delta_{13} - G_2 \Delta_{23}] e(t),$$

где Δ — определитель матрицы Y ; Δ_{13} и Δ_{25} — алгебраические дополнения (индексы алгебраических дополнений соответствуют естественной порядковой нумерации строк и столбцов матрицы Y).

При формировании уравнений контуров фундаментальное дерево должно, как и ранее, включать дугу E источника напряжения, но разомкнутую дугу Q целесообразно представить как j -дугу и оставить ее в дополнении. Отвечающее этим требованиям дерево и определяемая им совокупность независимых контуров показаны на рис. 3.6.

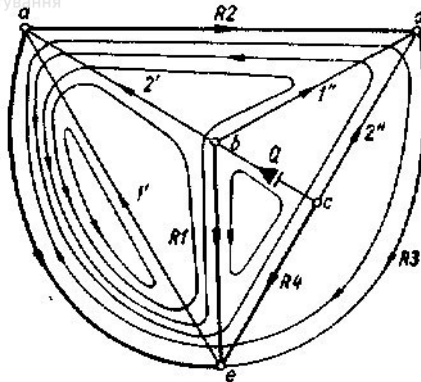


Рис.3.6. Граф транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений контуров.

Матрица контуров записывается в виде:



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$P = \begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & I \end{bmatrix} =$$

	E	R1	R2	R4	I''	2''	I'	2'	R3	Q	
	1	-1	-1		1						I''
	1		-1	-1		1					2''
	1						1				I'
	1	-1						1			2'
	-1		1						1		R3
		1		-1						1	Q

Дуги полюсных графов всех компонентов должны быть z-дугами, для этого транзисторы представляются r-параметрами, а резисторы — сопротивлениями. Матрица Z_д входящая в компонентное уравнение $u_z = Z_d i_z$, запишется следующим образом:



$$Z_{\alpha} =$$

	R_1	R_2	R_3	$1''$	$2''$	$1'$	$2'$	R_3	
R_1									R_1
		R_2							R_2
			R_3						R_3
				$r''_{11\alpha}$	$r''_{12\alpha}$				$1''$
				$r''_{21\alpha}$	$r''_{22\alpha}$				$2''$
						$r'_{11\beta}$	$r'_{12\beta}$		$1'$
						$r'_{21\beta}$	$r'_{22\beta}$		$2'$
								R_3	R_3

Матрично-векторные параметры уравнения контуров $Zi_{ZN} = E$ определяются формулами:

$$Z = P_{ZZ}Z_{\alpha}P_{ZZ}^t \quad \text{и} \quad E = -P_{ZEE} - Z'j = -P_{ZEE}(f)$$

(так как $j = 0$). Матрицу Z получим путем алгебраических операций над строками и столбцами матрицы Z_{α} , которые определяются ненулевыми элементами строк матрицы P_{ZZ} :



$$P_{ZZ}Z_d =$$

	R_1	R_2	R_4	$1''$	$2''$	$1'$	$2'$	R_3	
	$-R_1$	$-R_2$		r''_{11s}	r''_{12s}				$1''$
		$-R_2$	$-R_4$	r''_{21s}	r''_{22s}				$2''$
						r'_{116}	r'_{126}		$1'$
						r'_{216}	r'_{226}		$2'$
								R_3	R_3

$$Z =$$

	$1''$	$2''$	$1'$	$2'$	R_3	
	$R_1 + R_2 + r''_{11s}$	$-R_2 + r''_{12s}$		R_1	$-R_2$	$1''$
	$R_2 + r''_{21s}$	$R_2 + R_4 + r''_{22s}$			$-R_2$	$2''$
			r'_{116}	r'_{126}		$1'$
	R_1		r'_{216}	$R_1 + r'_{226}$		$2'$
	$-R_2$	$-R_2$			$R_2 + R_3$	R_3

Таким образом, уравнение контуров получаем в виде:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + r''_{11s} & R_2 + r''_{12s} & 0 & R_1 & -R_2 \\ R_2 + r''_{21s} & R_2 + R_4 + r''_{22s} & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & r''_{116} & r'_{126} & 0 \\ R_1 & 0 & r'_{216} & R_1 + r'_{226} & 0 \\ -R_2 & -R_2 & 0 & 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \\ i'_1 \\ i'_2 \\ i_{R3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t).$$

Определив из этого уравнения вектор токов хорд

$$i_{ZN} = (i''_1, i''_2, i'_1, i'_2, i_{R3}),$$



искомое напряжение u_Q найдем по формуле для $u_j = u_Q$:

$$u_Q = -P_{JZ}Z_{\pi}(P_{JZ}^t I + P_{ZZ}^t i_{ZN}) - P_{JE}e(t).$$

Так как $j = 0$ и $P_{JE} = 0$, то

$$u_Q = -(P_{JZ}Z_{\pi}P_{ZZ}^t) i_{ZN} = -Z' i_{ZN}.$$

Матрица Z' получается из Z_{π} суммированием ее строк в соответствии с P_{JZ} и столбцов в соответствии с P_{ZZ} , т. е.

$$P_{JZ}Z_{\pi} = \begin{array}{c} R1 \quad R2 \quad R4 \quad I'' \quad Z'' \quad I' \quad Z' \quad R3 \\ \hline R1 \quad | \quad | \quad -R4 \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad Q; \end{array}$$

$$Z' = P_{JZ}Z_{\pi}P_{ZZ}^t = \begin{array}{c} I'' \quad Z'' \quad I' \quad Z' \quad R3 \\ \hline -R1 \quad | \quad R4 \quad | \quad | \quad -R1 \quad | \quad | \quad Q. \end{array}$$

На основании полученной матрицы Z' находим:

$$u_Q = -Z' i_{ZN} = R_1 i_1'' - R_4 i_2'' + R_1 i_2' = R_1 (i_1'' + i_2') - R_4 i_2''.$$

3.7. Электромеханическая система

Рассмотрим в качестве еще одного примера электромеханическую систему (рис. 3.7, а), состоящую из двигателя постоянного тока, трех упругих валов и двух маховиков. Граф системы показан на рис. 3.7, б, где 1 — дуга приложенного напряжения (e -дуга); 2, 3 — дуги полюсного графа двигателя; 4, 6, 8 — дуги валов; 5, 7 — дуги маховиков и 9 — дуга момента нагрузки $\mu_0(j$ -дуга).

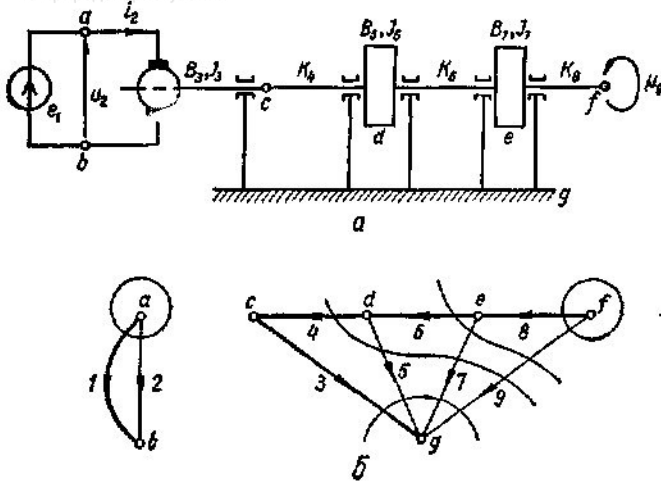


Рис. 3.7. Электромеханическая система (а) и ее граф (б)

Пусть требуется сформировать математическую модель системы в однородной системе координат так, чтобы переменными в уравнениях были продольные величины $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_8$ (углы скручивания валов, в том числе и вала двигателя φ_3). Естественно исходить из системы сечений, стремясь включить дуги валов и выходную дугу двигателя в дерево. Так как граф несвязный, то деревья выбираем в каждом из двух его компонентов связности, причем, наряду с дугами 3, 4, 6, 8, включаем в лес дугу 1 источника напряжения. В соответствии с выбранным лесом матрица сечений имеет вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YU} & \Pi_{UJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
3			1		1		1		1
4				1	1				1
6						1	1		1
8								1	1



Так как при формировании уравнений сечений полюсные графы компонентов должны быть представлены как u -дуги, то полюсные уравнения двигателя необходимо разрешить относительно поперечных переменных тока i_2 и момента μ_2 , а в качестве продольных переменных принять напряжение u_2 и угол поворота φ_3 . Пренебрегая индуктивностью цепи якоря ($L = 0$), получаем (p -оператор дифференцирования):

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -p \frac{C}{R} \\ -\frac{C}{R} & p \left(\frac{C}{R} + B_3 \right) + p^2 J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

где R — сопротивление цепи якоря; B_3 и J_3 — соответственно сопротивление трения в двигателе и момент инерции якоря.

Полюсные уравнения валов (пренебрегая моментами инерции) и маховиков имеют вид:

$$\mu_i = K_i \varphi_i \quad (i = 4, 6, 8);$$

$$\mu_j = (pB_j + p^2 J_j) \varphi_j = Y_j \varphi_j \quad (j = 5, 7),$$

где K_i — упругости валов; B_j и J_j — соответственно сопротивления трения и моменты инерции маховиков.

Таким образом, компонентное уравнение $Y_{ДП\Upsilon} = \xi_Y$ для рассматриваемой системы запишется следующим образом:

i_2	y_{22}	y_{23}					u_2
μ_2	y_{32}	y_{33}					φ_3
μ_4			K_4				φ_4
μ_5				Y_5			φ_5
μ_6					K_6		φ_6
μ_7						Y_7	φ_7
μ_8							φ_8



Матрицы

$$Y = \Pi_{YY} Y_d \Pi_{YY}^t \text{ и } Y' = \Pi_{YY} Y_d \Pi_{EY}^t$$

найдем суммирование строк и столбцов компонентной матрицы Y_d :

	2	3	4	5	6	7	8		
$\Pi_{YY} Y_d =$		y_{32}	y_{33}		Y_5		Y_7		3
				K_4	Y_5		Y_7		4
						K_6	Y_7		6
								K_8	8

	3	4	6	8		2	
$Y =$	$y_{32} + Y_5 + Y_7$	$Y_3 + Y_7$	Y_7			y_{32}	3
	$Y_5 + Y_7$	$K_4 + Y_5 + Y_7$	Y_7				4
	Y_7	Y_7	$K_6 + Y_7$				6
				K_8			

Определив вектор J по формуле

$$J = -\Pi_{YJ} \mu_{\text{н}} - Y' e_1,$$

получим уравнение сечений рассматриваемой системы:

$$\begin{bmatrix} y_{32} + Y_5 + Y_7 & Y_5 + Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_5 + Y_7 & K_4 + Y_5 + Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_7 & Y_7 & K_6 + Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_6 \\ \varphi_8 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_{\text{н}} - \begin{bmatrix} y_{32} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1.$$

Ему соответствует система четырех дифференциальных уравнений:



$$\begin{aligned} & \left(\frac{C}{R} + B_3 + B_5 + B_7 \right) \frac{d\varphi_3}{dt} + (J_3 + J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + \\ & + (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_4}{dt} + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_3 - \frac{C}{R} e_1 = 0; \\ & (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_5}{dt} + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_5}{dt^2} + K_4\varphi_4 + (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_4}{dt} + \\ & + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_5 = 0; \\ & B_7 \frac{d\varphi_3}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_4}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + K_6\varphi_6 + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + \\ & + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_6 = 0; \\ & K_8\varphi_3 + \mu_8 = 0. \end{aligned}$$

3.8. Узловые уравнения

Простейшую (каноническую) систему сечений связного (p, q) -графа образуют $p - 1$ центральных разрезов, причем можно считать, что она определяется звездным деревом, состоящим из разомкнутых дуг с центром в базисной вершине (рис. 3.8, а).

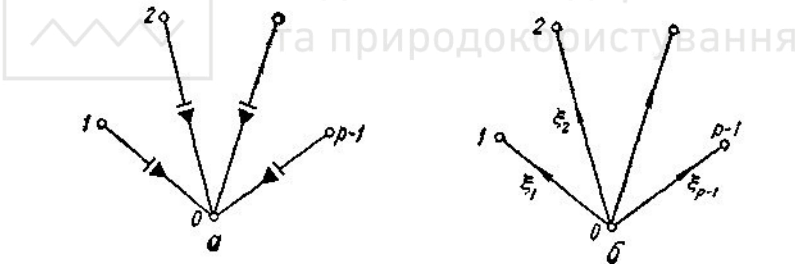


Рис. 3.8. К определению канонической системы сечений:
а — звездное дерево из разомкнутых дуг; б — узловые продольные переменные.

Ясно, что введение в граф разомкнутых дуг не нарушает значений переменных и их роль сводится только к фиксированию некоторой совокупности продольных переменных. Разомкнутые дуги звездного дерева фиксируют *узловые продольные переменные*, которые направлены от базисной вершины к остальным вершинам графа (рис. 3.8, б) и образуют вектор

$$\xi^* = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}).$$



При этом дуги полюсных графов всех компонентов оказываются в дополнении.

Топологическое уравнение в канонической системе сечений запишется следующим образом:

$$[I \ A_0] \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = 0,$$

где A_0 — сокращенная матрица инцидентности.

Так как $\eta_T = 0$ и $\eta_N = \eta_1$, то имеем

$$A_0 \eta_1 = 0.$$

Справедливо также соотношение

$$\xi_d = A_d^t \xi,$$

которое наряду с компонентным уравнением

$$\eta_T = Y_d \xi_T$$

используется для получения уравнений сечений.

Таким образом, в канонической системе сечений роль матрицы Π играет матрица инцидентности A_0 , т. е. матрично-векторные параметры уравнения $Y_\xi = J$ выражаются формулами:

$$Y = A_T Y_d A_T^t; \quad J = -A_J \Phi,$$

где A_T и A_J — субматрицы, образованные из столбцов матрицы A_0 , соответствующих полюсным графам компонентов (u -дугам) и источникам поперечных величин (j -дугам).

Правила записи матрично-векторных параметров в этом случае существенно упрощаются, так как каждая дуга инцидентна не более, чем двум сечениям (дуги, связанные с базисной вершиной, инцидентны только одному сечению). Вместо сечений можно рассматривать вершины графа (положительным направлением является направление от вершины). В связи с этим уравнения в канонической системе сечений называют также *уравнениями вершин* или *узловыми уравнениями*.

Если, наряду с u -дугами, граф содержит только дуги источников поперечных величин (j -дуги), то каноническая система сечений однозначно определяется выбором базисной вершины и нумерацией остальных вершин. Компонентам вектора ξ_T (узловым продольным величинам) присваиваются номера соответствующих им вершин. При непосредственной записи матрично-векторных параметров удобно вместо нумерации дуг обозначать их собственные параметры u_{ij} . Взаимные параметры y_{ij} обозначаются рядом со стрелками, направленными от i -й к j -й дуге. Пусть, например, в транзисторной



схеме (см. рис. 2.5, а) вместо источника напряжения действует источник тока $j(t)$.

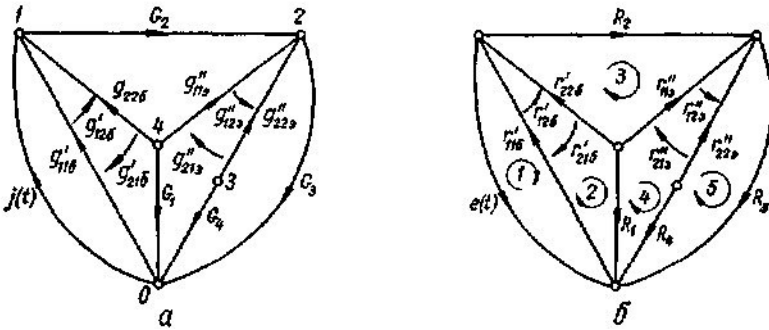


Рис. 3.9. Граф транзисторной схемы, используемый для записи: а — узловых уравнений; б — уравнений ячеек.

Тогда ее граф, подготовленный для записи узловых уравнений, будет выглядеть, как показано на рис. 3.9, а, а сами уравнения получаем в виде:

$G_2 + g'_{116} + g'_{216} +$ $+ g'_{216} + g'_{216}$	$-G_3$	$-g'_{126}$ $-g'_{216}$	u_1	$j(t)$
$-G_3$	$G_2 + G_3 + g''_{113} +$ $+ g''_{123} + g''_{213} + g''_{223}$	$-g''_{123}$ $-g''_{223}$	u_2	
	$-g''_{213} - g''_{223}$	$G_3 + g''_{223}$ g''_{213}	u_3	
$-g'_{216} - g'_{226}$	$-g''_{113} - g''_{123}$	g'_{123} $-G_1 -$ $-g'_{216} -$ $+ g''_{113}$	u_4	

3.9. Уравнения ячеек

Для плоского графа, содержащего, наряду с z-дугами, дуги только источников продольных величин (e-дуги) каноническая система контуров определяется совокупностью ячеек. Ячейки и узлы являются



взаимно дуальными понятиями, а матрица контуров для ячеек B_0 дуальна матрице A_0 . Обычно принимают направления контуров, определяемых ячейками, по часовой стрелке, а роль базисной ячейки играет внешний контур графа (рис. 3.10).

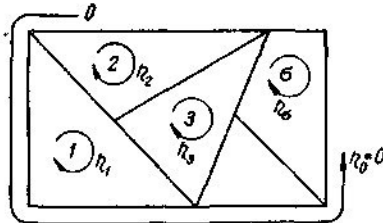


Рис. 3.10. Каноническая схема контуров (ячеек).

В связи с этим все соотношения и правила для математической модели в канонической системе контуров дуальны соответствующим соотношениям и правилам для канонической системы сечений.

Матрично-векторные параметры уравнение $Z\eta = E$ определяются формулами:

$$Z = B_Z Z_d B_Z^t; E = -B_E \varepsilon,$$

где B_Z и B_E — субматрицы, образованные из столбцов матрицы B_0 , соответствующих полюсным графам компонентов (z -дугам) и источникам продольных величин (e -дугам). Вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_0)$ содержит в качестве своих компонентов *контурные поперечные переменные*, которые связаны с ячейками (поперечная переменная внешнего контура принимается равной нулю). Уравнения в системе контуров называют *уравнениями ячеек* или *контурными уравнениями*. Определив вектор η , остальные переменные находим по формулам

$$\eta_d = B_0 \eta \text{ и } \xi_Z = Z_d \eta_Z.$$

Для непосредственной записи матрицы Z и вектора E достаточно пронумеровать ячейки и воспользоваться простыми правилами, которые вытекают из общих правил (3.5) с учетом того, что любая дуга графа инцидентна не более чем двум ячейкам, а дуги внешнего контура — только одной ячейке. Запишем, например, уравнения ячеек для транзисторной схемы (см. рис. 2.5, а) при воздействии на нее источника напряжения $e(t)$. Граф, подготовленный для этой задачи, изображен на рис. 3.9, б, а сами уравнения получаем в виде:



r'_{116}	$-r'_{116} + r'_{126}$	$-r'_{126}$			i_1	$e_1(t)$
$-r'_{116} + r'_{116}$	$R_1 + r'_{116} - r'_{126} - r'_{216} + r'_{226}$	$r'_{126} - r'_{226}$	$-R_3$		i_2	
$-r'_{216}$	$r'_{216} - r'_{226}$	$R_2 + r'_{226} + r'_{119}$	$-r''_{119} + r''_{129}$	$-r''_{129}$	i_3	
	$-R_1$	$-r''_{119} + r''_{219}$	$R_1 + R_3 + r''_{119} - r''_{129} - r''_{219} + r''_{229}$	$r''_{129} - r''_{229} - R_4$	i_4	
		$-r''_{219}$	$r''_{219} - r''_{229} - R_4$	$r''_{229} + R_3 + R_4$	i_5	

Особенно просто записываются уравнения для систем, состоящих из двухполюсников. Например, для механической системы (см. рис. 1.7, а) в соответствии с ее графом (рис. 3.11),

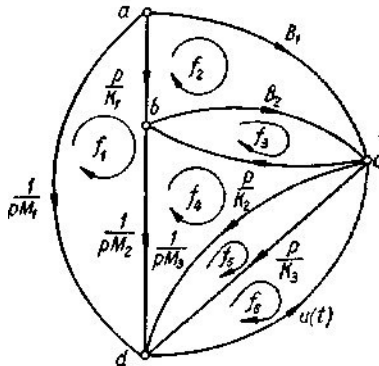


Рис. 3.11. Граф механической системы, используемый для записи уравнений ячеек.



на котором указаны параметры в операторной форме, имеем:

$\frac{p}{K_1} + \frac{1}{p} \times$ $\times \left(\frac{1}{M_1} + \right.$ $\left. + \frac{1}{M_2} \right)$	$-\frac{p}{K_1}$		$-\frac{1}{pM_2}$			f_1	
$-\frac{p}{K_1}$	$B_1 + B_2 +$ $+\frac{p}{K_1}$	$-B_2$				f_2	
	$-B_2$	$B_2 + \frac{p}{K_2}$	$-\frac{p}{K_2}$			f_3	
$-\frac{1}{pM_2}$		$-\frac{p}{K_2}$	$\frac{p}{K_2} + \frac{1}{p} \times$ $\times \left(\frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_3} \right)$	$-\frac{1}{pM_3}$		f_4	
			$-\frac{1}{pM_3}$	$\frac{p}{K_3} + \frac{1}{pM_3}$	$-\frac{p}{K_3}$	f_5	
				$-\frac{p}{K_3}$	$\frac{p}{K_3}$	f_6	$-u(t)$

Контурные силы f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) представляют собой условные расчетные величины, через которые выражаются силы (реакции) двухполосников. Например, сила двухполосника M_3 равна $f_4 - f_3$ и т.д.

3.10. Системы с двумя сторонами

Часто требуется получить математическую модель системы, характеризующую ее относительно двух сторон: входа, к которому приложено воздействие (независимый источник), и выхода, с которым связаны искомые величины (рис. 3.12, а).

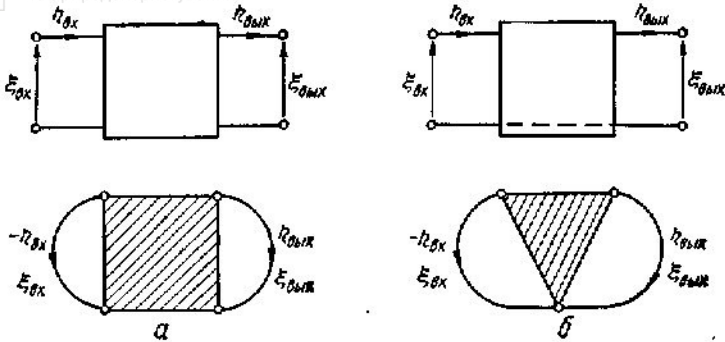


Рис. 3.12. Схема с двумя сторонами:

а — с различными входными и выходными вершинами; б — с общей вершиной для входа и выхода.



При этом предполагается, что внутри самой системы независимые источники отсутствуют. Системы с двумя сторонами называют *четырёхполюсниками*.

Входная и выходная стороны могут быть представлены внешними дугами, которые характеризуются соответственно входными $-\eta_{вх}, \xi_{вх}$ и выходными $\eta_{вых}, \xi_{вых}$ величинами (знак минус при входной поперечной величине $\eta_{вх}$ появляется в связи с тем, что ее обычно принятое направление противоположно направлению входной дуга).

Внешние дуги связаны с графом системы (заштрихованная часть) парами входных и выходных вершин. Случай, когда вход и выход имеют общую вершину, показан на рис. 3.12, б.

Для получения уравнений относительно внешних величин в однородной системе сечений необходимо внешние дуги представить как дуги источников поперечных величин (j -дуги) и ввести их в дерево. Без потери общности внешние дуги можно расположить перед u -дугами графа. Тогда в уравнении сечений $Y\xi_T = J$, где

$$\xi_T = \begin{bmatrix} \xi_{вх} \\ \xi_{вых} \\ \xi_{yT} \end{bmatrix}; \quad J = -\Pi_j \vartheta = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\eta_{вх} \\ \eta_{вых} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{вх} \\ -\eta_{вых} \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, имеем:



$$Y \begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВМХ} \\ \xi_{VT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ -\eta_{ВМХ} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где, как и ранее в (3.4),

$$Y = \Pi_Y Y_d \Pi_Y^t.$$

Записав решение этого уравнения относительно продольных внешних переменных по правилу Крамера, находим

$$\xi_{BX} = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \eta_{BX} - \Delta_{ba} \eta_{ВМХ});$$

$$\xi_{ВМХ} = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{ab} \eta_{BX} - \Delta_{bb} \eta_{ВМХ}),$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВМХ} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ \eta_{ВМХ} \end{bmatrix},$$

где Δ —определитель матрицы Y ; индексы a и b алгебраических дополнений этой матрицы равны порядковым номерам строк и столбцов, которые соответствуют сечениям, определяемым входной и выходной дугами. В общем случае a и b могут принимать любые значения, а при расположении этих сечений первыми $a = 1$ и $b = 2$.

Полученные уравнения описывают четырехполюсник относительно продольных величин. Они могут быть представлены и относительно поперечных величин. Для этого сложим первое уравнение, умноженное на Δ_{bb} , со вторым, умноженным на $-\Delta_{ba}$:

$$\frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \eta_{BX} = \Delta_{bb} \xi_{BX} - \Delta_{ba} \xi_{ВМХ},$$

а также сложим первое уравнение, умноженное на Δ_{ab} , со вторым, умноженным на $-\Delta_{aa}$:

$$\frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \eta_{ВМХ} = \Delta_{ab} \xi_{BX} - \Delta_{aa} \xi_{ВМХ}.$$

Множитель в левых частях полученных равенств преобразуется по формуле

$$\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba} = \Delta_{aa, bb},$$

где $\Delta_{aa, bb}$ — двукратное алгебраическое дополнение. В результате получаем

$$\begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ \eta_{ВМХ} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{aa, bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВМХ} \end{bmatrix},$$

комбинируя попарно внешние параметры, уравнение четырехполюсника можно представить шестью различными способами (табл. 3.1).



Внешние параметры системы с двумя сторонами

Уравнение	Внешние параметры	
	В системе сечений ($\Delta = \det Y$)	В системе контуров ($\Delta = \det Z$)
$\begin{bmatrix} \eta_{ВХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \xi_{ВЫХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa, bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \xi_{ВЫХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{ВХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa, bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \eta_{ВХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ВЫХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{aa, bb} \\ \Delta & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & \Delta \\ \Delta_{aa, bb} & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{ВЫХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \eta_{ВХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & -\Delta_{aa, bb} \\ -\Delta & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta \\ -\Delta_{aa, bb} & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{ВХ} \\ \xi_{ВЫХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa, bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa, bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \eta_{ВХ} \\ \xi_{ВЫХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{ВХ} \\ \eta_{ВЫХ} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa, bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa, bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$

Элементы матриц этих уравнений, называемые *внешними параметрами четырехполюсника*, выражаются через определитель и алгебраические дополнения матрицы $Y = \Pi_Y Y_d \Pi_Y^t$. Аналогичные выражения можно получить и в однородной системе контуров через матрицу $Z = P_Z Z_d P_Z^t$. Для этого необходимо внешние дуги представить как e -дуги и отнести их к дополнению. Выполнив преобразования, дуальные приведенным выше, получим требуемые выражения (табл. 3.1).

3.10. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите топологические уравнения для графа (см.рис.3.2) относительно сечений и контуров, определяемых фундаментальным деревом $T = \{E, 1'', R2, Q\}$.
2. Запишите компонентные уравнения дуг, входящих в граф (см.рис.3.2) при условии, что:
 - а) уравнения транзисторов представлены через h -параметры, а резистивные двухполюсники — через сопротивления;



- б) уравнения транзисторов представлены через r -параметры, а резистивные двухполюсники — через проводимости.
3. Пользуясь дуальностью математических моделей в однородных системах координат, сформулируйте и выведите правило записи матрицы Z непосредственно из рассмотрения графа и полюсных уравнений z -дуг.
4. Покажите, что фундаментальное дерево всегда может быть построено так, что в него войдут все e -дуги, и оно не будет содержать j -дуг, т. е. все e -дуги являются ветвями дерева, а j -дуги — хордами. Что означала бы невозможность такого построения?
5. Сформулируйте и докажите правила записи матриц Y' и Z' , преобразующих независимые источники одного типа в другой.
6. Воспользовавшись свойствами матрицы инцидентности A_0 , сформулируйте и докажите правило записи матрично-векторных параметров Y и J уравнения $Y\zeta = J$ в канонической системе сечений.
7. Сформулируйте правило записи матрично-векторных параметров Z и E уравнения $Z\eta = E$ в системе ячеек, дуальное правилу записи Y и J , полученному в задаче 6.
8. Покажите, что матрицы Y и Z в уравнениях сечений и контуров для систем, состоящих из двухполюсных компонентов, всегда симметричны.
9. Покажите, что для систем, состоящих из двухполюсников, элементы матриц Y и Z в канонических системах координат (узловые и контурные уравнения) характеризуются следующими свойствами:
- диагональные элементы положительны и каждый из них равен сумме параметров двухполюсников, дуги которых инцидентны соответствующему узлу (или ячейке);
 - элементы, расположенные на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i \neq j$) отрицательны и каждый из них по абсолютной величине равен сумме параметров двухполюсников, дуги которых одновременно инцидентны узлам (или ячейкам), соответствующим данной строке и столбцу.
10. Покажите, что в канонических системах координат параметры компонентов входят не более чем в четыре клетки матриц Y и Z . Рассмотрите частные случаи для собственных и взаимных параметров.
11. Какие типы зависимых источников допустимы при формировании математической модели в однородных системах координат?
12. Запишите уравнения сечений и контуров для электрической схемы, изображенной на рис. 1.5.



13. Запишите уравнения сечений для механических систем, изображенных на рис. 1.7 и 1.9,
14. Запишите узловые уравнения для ламповой схемы (см. рис. 2.3) и определите напряжение на резисторе $R4$.
15. Запишите уравнения сечений и контуров для транзисторной схемы (см. рис. 2.5) непосредственно по правилам, изложенным в (2.4) и (3.5).

4. НЕОДНОРОДНЫЙ КООРДИНАТНЫЙ БАЗИС

4.1. Формирование уравнений

Ограничения, накладываемые на компонентные уравнения при использовании однородных систем координат, заставляют в общем случае прибегать к неоднородному координатному базису, который образуется некоторой совокупностью независимых сечений и контуров графа. Наиболее простой алгоритм формирования уравнений в неоднородной системе координат основан на подстановке в компонентные уравнения векторов продольных ξ_X и поперечных η_X переменных дуг графа, полученных из топологических уравнений.

Выберем фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все e -дуги, а все j -дуги остались в дополнении. С учетом зависимости $P=[-\pi' \ 1]$ топологические уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{EX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} -\pi'_{EX} & -\pi'_{XX} & 1 & 0 \\ -\pi'_{EJ} & -\pi'_{XJ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

Так как

$$\eta_J = \vartheta \text{ и } \xi_E = \varepsilon$$

выражаются через заданные величины (функции времени), то отсюда находим

$$\eta_{XT} = -\pi_{XX}\eta_{XN} - \pi_{XJ}\vartheta; \quad \xi_{XN} = \pi'_{XX}\xi_{XT} + \pi'_{EJ}\varepsilon.$$

Эти выражения подставляем в компонентное уравнение, которое в неявной форме имеет вид:

$$[V_{\xi T}, V_{\xi N}, V_{\eta T}, V_{\eta N}] \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = 0,$$



или

$$V_{\xi T} \xi_{XT} + V_{\xi N} \xi_{XN} + V_{\eta T} \eta_{XT} + V_{\eta N} \eta_{XN} = 0.$$

Тогда получаем выражение

$$(V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}) \xi_{XT} + (V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}) \eta_{XN} = -V_{\xi N} \pi'_{EX} \varepsilon + V_{\eta T} \pi_{XJ} \vartheta,$$

которое и представляет собой математическую модель системы в неоднородном координатном базисе. Оно может быть представлено также в виде:

$$[V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}, V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}] \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = [-V_{\xi N} \pi'_{EX}, V_{\eta T} \pi_{XJ}] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в сокращенной записи $WX=QF$ матрицы W и Q выражаются следующим образом:

$$W = [V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}, V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}];$$

$$Q = [-V_{\xi N} \pi'_{EX}, V_{\eta T} \pi_{XJ}].$$

Полученное уравнение соответствует

$$n = \nu + \sigma - (q_E + q_J) \text{ ска-}$$

лярным уравнениям, где ν и σ — соответственно ранг и цикломатическое число графа, а q_E и q_J — количества дуг источников продольных и поперечных величин. Поскольку $\nu = p - k$ и $\sigma = q - p + k$, то $n = q - (q_E + q_J) + q_X$ — числу дуг графа системы (без дуг источников). Матрица W — квадратная порядка q_X , а Q — прямоугольная размера $q_X \times (q_E + q_J)$.

Решив уравнение $WX = QF$ относительно вектора $X = (\xi_{XT}, \eta_{XN})$, можно определить векторы η_{XN} и ξ_{XT} по приведенным выше формулам. Из топологических уравнений следуют также соотношения:

$$\eta_E = -\pi_{EX} \eta_{XN} - \pi_{EJ} \vartheta; \quad \xi_J = \pi'_{XJ} \xi_{XT} + \pi'_{EJ} \varepsilon,$$

которые используются для определения векторов η_E и ξ_J (если это требуется).

4.2. Преобразование компонентной матрицы

Матрицу W можно рассматривать как результат преобразования компонентной матрицы

$$V = [V_{\xi T}, V_{\xi N}, V_{\eta T}, V_{\eta N}]$$

в соответствии с матрицей π_{XX} , которая служит оператором этого преобразования. Легко понять, что i -й столбец выражения $V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}$ получается алгебраическим суммированием с i -м столбцом матрицы $V_{\xi T}$ тех столбцов матрицы $V_{\xi T}$, которые соответствуют ненулевым элементам i -й строки матрицы π_{XX} со знаками этих элементов.



Аналогично, i -й столбец выражения $V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}$ получается путем алгебраического суммирования с i -м столбцом матрицы $V_{\eta N}$ тех столбцов матрицы $V_{\eta T}$, которые соответствуют ненулевым элементам i -ГО столбца матрицы π_{XX} с противоположными знаками этих элементов (в обоих случаях i принимает значения всех номеров матриц $V_{\eta T}$ и $V_{\eta N}$).

При реализации алгоритма формирования математической модели на вычислительных машинах сильно разреженную матрицу сечений удобно представлять в сжатой форме списками дуг, инцидентных сечениям. В таких условиях целесообразно оперировать со строками матрицы π_{XX} и для получения выражения $V_{\eta N} - V_{\eta T}\pi_{XX}$. Это значит, что i -й столбец матрицы $V_{\eta T}$ должен суммироваться с теми столбцами матрицы $V_{\eta N}$, которые соответствуют ненулевым элементам i -й строки матрицы π_{XX} с противоположными знаками этих элементов. Процедура преобразования матрицы V для получения матрицы W иллюстрируется на рис. 4.1.

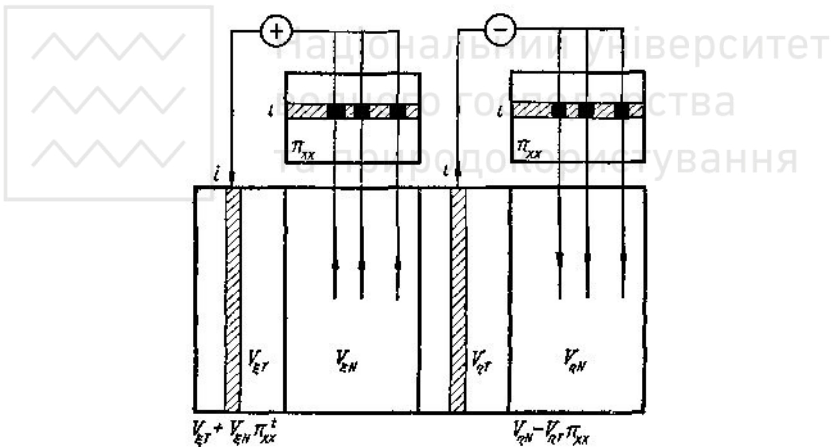


Рис. 4.1. Процедура формирования матрицы W .

Подобным способом можно сформировать и матрицу Q , при этом операторами преобразования матрицы V служат матрицы π_{EX} и π_{XL} . При машинной реализации изложенного алгоритма для экономии оперативной памяти может оказаться целесообразным осуществлять преобразование матрицы V построчно, выполняя суммирование ее элементов последовательно в каждой строке и формируя одновременно соответствующие строки матриц W и Q .



4.3. Гидромеханическая система

Сформируем уравнения для гидромеханической системы (рис.4.2, а), которая состоит из поршня, рычага и механических двухполосников. Задающими переменными принимаются давление на входе поршня $p_1(t)$ и перемещения в точках e и f (начало отсчета давления связывается с точкой a , перемещений — с точкой g). Так как полюсный граф рычага содержит дуги различных типов (y и z), то необходимо прибегнуть к неоднородному координатному базису.

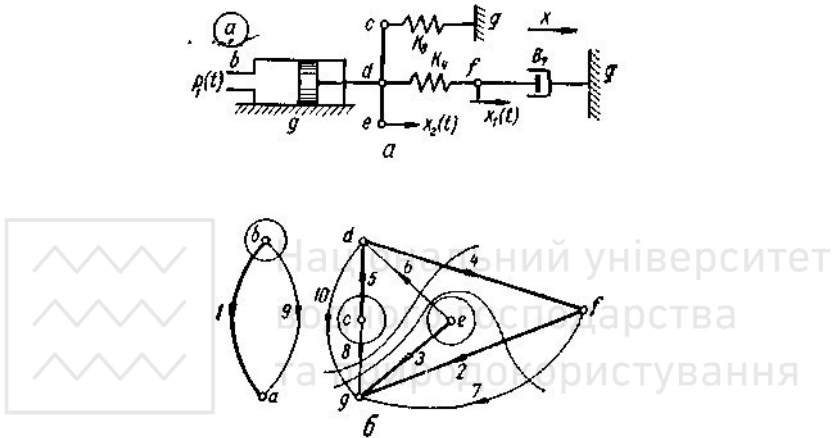


Рис. 4.2. Гидр механическая система (а) и ее граф (б).

Граф системы изображен на рис. 4.2, б, где 1 — дуга источника давления на входе поршня; 2 и 3—дуги источников перемещения (все они являются e -дугами, так как давление и перемещение — продольные переменные); 4 и 5 — дуги пружин с параметрами K_4 и K_8 , 5 и 6 — дуги механического рычага; 7 — дуга демпфера с параметром B_7 ; 9 и 10 — дуги гидравлического поршня. Выбрав фундаментальный лес (граф несвязный) так, чтобы в него вошли все e -дуги 1, 2, 3, запишем матрицу сечений:



$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{EX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1									1	1
2		1				-1	1	1			1
3			1			1					
4				1		-1		1			1
5					1			1			

Так как в системе нет источников поперечных величин, матрицы π_{EJ} и π_{XJ} отсутствуют. Полусные уравнения идеального рычага и гидравлического поршня имеют вид:

$$\begin{bmatrix} f_6 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6 \\ f_6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} v_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_9 \\ x_{10} \end{bmatrix},$$

где n — отношение плеч рычага; S — площадь поперечного сечения поршня.

Используя эти соотношения совместно с уравнениями двухплюсников, записываем компонентную матрицу (не смешивать оператор дифференцирования p в матрице с обозначением давления):

	x_1	x_5	x_6	x_7	x_8	p_9	x_{10}	f_4	f_6	f_8	f_7	f_8	v_9	f_{10}		
$V =$	$-K_4$							1							4	
		1	n												5	
									$-n$	1					6	
				$-pB_7$							1				7	
					$-K_8$							1			8	
						$-S$							1		9	
							S							1	10	
		$V_{\xi T}$				$V_{\xi N}$			$V_{\eta T}$				$V_{\eta N}$			

Сформировав матрицы W и Q путем преобразования матрицы V в соответствии с матрицами π_{XX} , π_{EJ} и π_{XJ} , приходим к уравнению:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -K_3 & & 1 & & -1 & -1 \\ \hline -n & 1 & & & & \\ \hline & & 1 & & n & \\ \hline & & & 1 & & \\ \hline -K_8 & -K_8 & & 1 & & \\ \hline -S & & & & 1 & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ v_9 \\ f_{10} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & n & -n \\ \hline & pB_7 & \\ \hline & K_8 & \\ \hline & S & \\ \hline -S & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} p_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array}$$

Решив это уравнение (например, с помощью алгоритма Гаусса или LU разложения), получим выражения для переменных через задающие вершины p_1, x_2, x_3 .

4.4. Иерархия дуг

При формировании математической модели по изложенному алгоритму накладывается обязательное условие: все дуги независимых источников продольных величин (e -дуги) должны быть включены в дерево, а дуги независимых источников поперечных величин (j -дуги) — в дополнение. Как уже отмечалось в (3.6), для корректно поставленной задачи это условие всегда выполнимо, так как e -дуги не могут образовать контуров, а j -дуги — сечений (в противном случае некоторые из них были бы зависимыми от других в соответствии с уравнениями связей).

Дуги полюсных графов (y -дуги и z -дуги), вообще говоря, могут быть распределены между деревом и дополнением произвольно. Однако в зависимости от того, как решается этот вопрос, матрица W может иметь более или менее удобную для дальнейшего анализа форму. Поскольку решение или преобразование уравнений осуществляется чаще всего методами исключения, то наиболее желательной является такая форма матрицы W , когда элементы ее главной диагонали не равны нулю, а еще лучше равны единице (регулярная форма).

Для достижения этой цели необходимо, прежде всего, записывать строки компонентной матрицы V в таком же порядке, в каком расположены столбцы в ее субматрицах V_ξ и V_η . Очевидно, единичные элементы компонентных уравнений (в неявной форме) должны попасть в $V_{\xi T}$ и $V_{\eta N}$ — субматрицы, которые при преобразовании матрицы V не претерпевают изменений. А это значит, что z -дуги целесообразно включить в дерево, а y -дуги — в дополнение.



Взаимоопределенные ветви дерева целесообразно представить как z-дуги а взаимопределенные хорды — как у-дуги.

Приведенное правило не всегда может быть выполнено полностью, однако его соблюдение всегда приводит к матрице W в наиболее удобной удобной форме. Например, дугу 4 графа гидромеханическом системы (рис. 4.2, б) следовало бы включить в дополнение, так как она представлена как у-дуга компонентным уравнением $f_4 = K_4 x_4$. По тогда вместо нее пришлось бы ввести в дерево одну из дуг 6, 8 или 10. Дуги 6 и 10 являются существенно у-дугами, а дуга 8 относится к тому же типу, что и дуга 4. Если быть до конца последовательным, то следовало бы воспользоваться тем обстоятельством, что дуга 4 взаимопределенная и представить ее как z-дугу уравнением $x_4 = (1/K)f_4$.

Для получения математической модели системы в дифференциальной форме необходимо использовать только те полюсные уравнения, которые выражают поперечные или продольные переменные через производные. Соответствующие компоненты в первом случае представляются у-дугами (емкости, массы), а во втором z-дугами (индуктивности, пружины). При несоблюдении этого условия математическая модель может содержать интегральные операторы.

4.5. Переменные состояния

Переходя к изложению вопросов, связанных с формированием уравнений переменных состояния, будем пользоваться терминами и обозначениями электрических величин. Соответствующие соотношения для других физических систем легко получаются на основе электрических аналогий (см.табл. 1.1).

Так как дифференциальные уравнения переменных состояния должны содержать только производные первого порядка, то для емкостных и индуктивных дуг используются полюсные уравнения в виде:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; i_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Напряжения на емкостях u_C и токи в индуктивностях i_L , производные которых входят в полюсные уравнения, называют дифференциальными переменными. В отличие от них переменные, которые не содержатся под знаком производной, называются алгебраическими переменными. Ясно, что совокупность переменных состояния системы образуется из всех тех дифференциальных переменных u_C и i_L , которые являются взаимно независимыми. Поскольку в общем случае векторы u_C и i_L могут содержать зависимые переменные, то необходимо выяснить



условия такой зависимости и способы выбора взаимно независимой совокупности дифференциальных переменных.

Если некоторый контур содержит только задающие источники напряжения и емкости (рис. 4.3, а), то напряжения на одной из них выражаются через напряжения источников и напряжения на других емкостях контура.

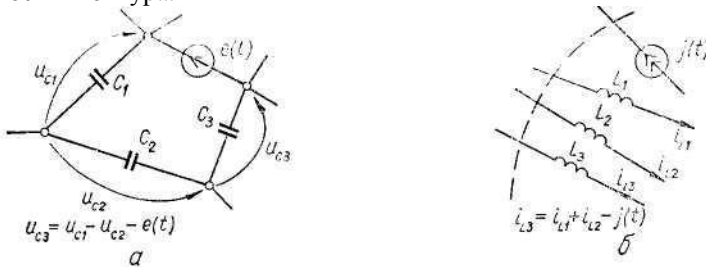
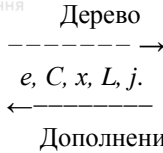


Рис. 4.3. Особые контур (а) и сечение (б).

Аналогично при наличии сечения, образованного только задающими источниками тока и индуктивностями (рис. 4.3, б), ток в одной из индуктивностей выражается через токи источников и токи в других индуктивностях сечения. Контур и сечения, обуславливающие зависимость переменных состояния, будем называть *особыми*. Так как эта зависимость связана исключительно со структурой схемы, то соответствующие переменные будем называть *топологически зависимыми*.

Уравнения в неоднородном координатном базисе будут содержать все независимые напряжения на емкостях и токи в индуктивностях при условии, что они входят в векторы u_{XT} и i_{XN} . Это можно обеспечить на этапе формирования фундаментального дерева, включая в него все задающие источники напряжения и максимально возможное число емкостных дуг (С-дуг). В то же время все задающие источники тока и максимально возможное число индуктивных дуг (L-дуг) должно остаться в дополнении. Тогда переменные состояния представляются векторами напряжений на емкостных ветвях дерева u_{CT} и токов в индуктивных хордах i_{LN} .

Итак, при формировании уравнений переменных состояния необходимо выделить из множества дуг компонентов системы подмножества С-дуг и L-дуг, которые будем называть *реактивными дугами*, а остальные будем рассматривать как х-дуги. Очевидно, изложенное выше требование о распределении реактивных дуг между деревом и дополнением будет обеспечено, если фундаментальное дерево формировать в соответствии со следующей иерархией дуг:



Иерархию внутри x -дуг целесообразно (ходя и не обязательно) принять в соответствии с приведенной в п.(4.4).

4.6. Уравнения переменных состояния

Топологические уравнения в системе координат, которая определяется выбранным в соответствии с изложенными требованиями фундаментальным деревом, запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{EC} & \pi_{EN} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XN} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ i_{Cj} \\ i_{Xj} \\ i_{Lj} \\ i_{CN} \\ i_{XN} \\ i_{LN} \\ i(t) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\pi'_{EC} & -\pi'_{CC} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi'_{EX} & -\pi'_{CX} & -\pi'_{XX} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\pi'_{EL} & -\pi'_{CL} & -\pi'_{XL} & -\pi'_{LL} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\pi'_{EJ} & -\pi'_{CJ} & -\pi'_{XJ} & -\pi'_{LJ} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u_{Cj} \\ u_{Xj} \\ u_{Lj} \\ u_{CN} \\ u_{XN} \\ u_{LN} \\ u_{j} \end{bmatrix} = 0$$

Каждому из них соответствуют четыре матричных уравнения, образующие четыре пары взаимно дуальных соотношений. Компонентное уравнение для x -дуг в неявной форме имеет вид:

$$[V_{UT}, V_{UN}, V_{jT}, V_{jN}] \begin{bmatrix} u_{XL} \\ u_{XN} \\ i_{Xj} \\ i_{XN} \end{bmatrix} = 0.$$



Подставив сюда выражения векторов u_{XN} и i_{XT} из топологических уравнений, получим уравнение для безреактивных компонентов:

$$\begin{bmatrix} V_{UT} + V_{UN}\pi'_{XX}, & V_{IN} - V_{II}\pi_{XX} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} -V_{UN}\pi'_{CX}, & V_{II}\pi_{XL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_{UN}\pi'_{EX}, & V_{II}\pi_{XI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v.$$

Матрицы W_0 , Q_1 и Q_2 определяются полученными выше выражениями и могут быть найдены преобразованием компонентной матрицы V для x -дуг с помощью субматриц матрицы сечений. Вектор алгебраических переменных x_0 , вектор переменных состояния x и задающий вектор v выражаются следующим образом:

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнения переменных состояния можно сформулировать на основе соотношений, следующих из топологических уравнений:

$$\begin{aligned} i_{CT} + \pi_{CC}i_{CN} &= -\pi_{CX}i_{XN} - \pi_{CL}i_{LN} - \pi_{CJ}j(t); \\ u_{LN} - \pi'_{LL}u_{LT} &= \pi'_{XL}u_{XT} + \pi'_{CL}u_{CT} + \pi'_{EL}e(t). \end{aligned}$$

Объединяя эти соотношения в одно матричное уравнение и вводя векторы q и ψ , выражающиеся через заряды для емкостей и потокосцепления индуктивностей

$$q = q_{CT} + \pi_{CC}q_{CN}; \quad \psi = \psi_{LN} - \pi'_{LL}\psi_{LT}.$$

находим:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CX} \\ \pi'_{XL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi'_{CL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi'_{EL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v.$$

Решив уравнение

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v$$

относительно вектора x_0 и подставив его значение

$$x_0 = W_0^{-1} (Q_1 x + Q_2 v) = Q'_1 x + Q'_2 v$$

в дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (\Theta_0 Q'_1 + \Theta_1) x + (\Theta_0 Q'_2 + \Theta_2) v = \Theta'_1 x + \Theta'_2 v.$$



Вектор x_0 можно исключить с помощью алгоритма Гаусса— Жордана над блочной матрицей Λ (по столбцам матрицы W_0):

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ \hline W_0 & Q_1 & Q_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \Theta'_1 & \Theta'_2 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 \\ \hline \end{array}.$$

Вектор $x = (q, \psi)'$ выражается через заряд q и потокосцепление ψ , которые, в свою очередь, являются функциями напряжений на емкостях и токах в индуктивностях:

$$q = \varepsilon_C(u_C); \quad \psi = \varphi_L(i_L).$$

Алгоритм формирования уравнений переменных состояния имеет свои особенности для линейных и нелинейных систем, которые рассматриваются ниже.



4.7. Линейные системы

Для линейных систем $q_C = C u_C$ и $\psi_L = L i_L$, где C и L — квадратные матрицы, элементами которых являются емкости и индуктивности реактивных двухполюсников. Матрицы C и L (при отсутствии индуктивных связей) диагональны, а если имеются индуктивно связанные двухполюсники, то L не диагональна, но симметрична. Переменные q и ψ можно выразить следующим образом:

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN} = [1 \quad \pi_{CC}] \begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC} q_C = \Pi_{CC} C u_C;$$

$$\psi = \psi_{LN} - \pi'_{LL} \psi_{LT} = [-\pi'_{LL} \quad 1] \begin{bmatrix} \psi_{LT} \\ \psi_{LN} \end{bmatrix} = P_{LL} \psi_L = P_{LL} L i_L.$$

Из топологических уравнений следуют соотношения

$$u_{CN} = \pi'_{CC} u_{CT} + \pi'_{EC} e \quad \text{и} \quad i_{LT} = -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} j,$$

на основании которых выразим векторы u_C и i_L :

$$u_C = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ u_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi'_{CC} \end{bmatrix} u_{CT} + \begin{bmatrix} 0 \\ \pi'_{EC} \end{bmatrix} e(t) = P'_{CC} u_{CT} + P'_{EC} e(t);$$

$$i_L = \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi_{LJ} \\ 1 \end{bmatrix} i_{LN} - \begin{bmatrix} \pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} j(t) = P'_{LL} i_{LN} + P'_{LJ} j(t).$$

Подставляя эти выражения в формулы для q и ψ , получаем:



$$q = (\Pi_{CC}C\Pi'_{CC}) u_{CT} + \Pi_{CC}C\Pi'_{EC}e(t);$$

$$\psi = (P_{LL}LP'_{LL}) i_{LN} + P_{LL}LP'_{LJ}j(t),$$

на основании чего можно записать

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{CC}C\Pi'_{CC} & 0 \\ 0 & P_{LL}LP'_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{CC}C\Pi'_{EC} & 0 \\ 0 & P_{LL}LP'_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} =$$

$$= W_x x + \Theta_3 v.$$

Приравняв производную этого выражения полученному ранее соотношению, находим:

$$W_x \frac{dx}{dt} = \Theta_1 x + \Theta_2 v - \Theta_3 \frac{dv}{dt},$$

откуда получаем уравнения переменных состояния линейной системы в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv + B' \frac{dv}{dt},$$

где

$$A = W_x^{-1}Q_1, \quad B = W_x^{-1}Q_2, \quad B' = W_x^{-1}B'$$

Вместо обращения матрицы W_x можно применить алгоритм Гаусса—Жордана по ее столбцам над блочной матрицей Λ_x :

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c|c|c} W_x & \Theta_1 & \Theta_2 & -\Theta_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c} I & A & B & B' \end{array} \right].$$

Общая процедура формирования уравнений переменных состояния линейных систем иллюстрируется на рис. 4.4.

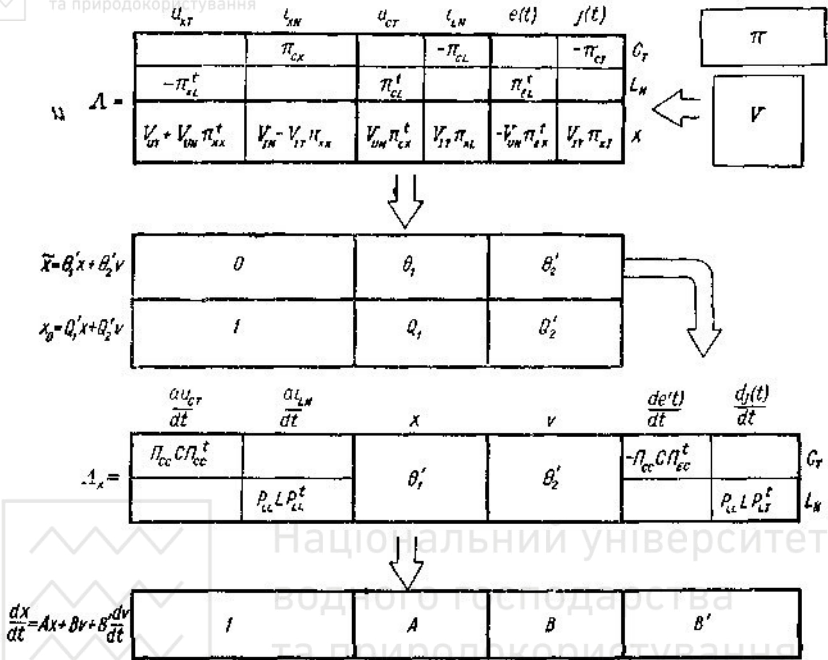


Рис. 4.4. Процедура формирования уравнений переменных состояния линейных систем.

Появление производной вектора v в уравнении переменных состояния обусловлено особыми контурами и сечениями с задающими источниками. Если такие источники в особых контурах отсутствуют, то $\pi_{cc}=0$ и $\pi_{ll}=0$, следовательно, $\Theta_3=0$

При отсутствии особых контуров вообще все дифференциальные переменные независимы и входят в векторы u_{CT} и l_{LN} , а матрицы π_{cc} и π_{ll} исчезают. Тогда $\pi_{cc}=1$ и $\pi_{ll}=1$, вследствие чего матрица W_x имеет квазидиагональную структуру:

$$W = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix},$$

а при отсутствии индуктивных связей W_x —диагональная матрица, элементами которой являются параметры реактивных двухполюсников. В таких случаях умножение на обратную матрицу W_x^{-1} соответствует делению каждого уравнения переменных состояния на соответствующий диагональный элемент матрицы W_x

Рассмотрим в качестве примера электрическую схему рис. 4.5, а.

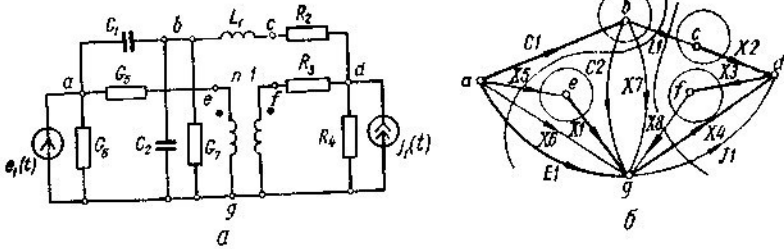


Рис. 4.5. Электрическая схема с идеальным трансформатором (а) и ее граф (б).

В соответствии с выбранным фундаментальным деревом графа (рис. 4.5, б) запишем матрицу сечений для хорд:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EC} & \pi_{LX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \end{bmatrix}$$

	C1	X5	X6	X7	X8	J1	I	
I	1	1	1	1		1		F1
C1	-1					1		
X1				-1				
X2			-1					
X3							1	
X4					1			
X8					-1	1		

Компонентная матрица для х-дуг в неявной форме имеет вид:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	1							-n								
X2		1							-R ₂							
X3			1							-R ₃						
X4				1							-R ₄					
X5					-G ₅								1			
X6						-G ₆								1		
X7							-G ₇								1	
X8								n								1
	V_{UT}				V_{UN}				V_{IT}				V_{IN}			

Преобразовав эту матрицу в соответствии с субматрицами матрицы сечений, запишем блочную матрицу Λ :



	u_{x1}	u_{x2}	u_{x3}	u_{x4}	i_{x5}	i_{x6}	i_{x7}	i_{x8}	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$h_1(t)$	
							-1			1			$C1$
		1		-1					-1		1		$L1$
	1		n	n									$X1$
		1								R_2			$X2$
$\Delta =$			1				$-R_3$						$X3$
				1			$-R_4$		$-R_4$			$-R_4$	$X4$
	G_5				1						G_6		$X5$
						1					G_6		$X6$
							1		$-G_7$		G_7		$X7$
					n			1					$X8$

Пусть параметры компонентов схемы имеют следующие нормативные значения: $R_2 = R_3 = R_4 = 1$; $G_5 = G_6 = G_7 = 0, 5$; $n = 2$; $C_1 = C_2 = 0,05$;

$L_1 = 0,2$. Подставив эти значения в матрицу Δ и применив процедуру исключения по столбцам субматрицы W , получим:



u_{x1}	u_{x2}	u_{x3}	u_{x4}	i_{x5}	i_{x6}	i_{x7}	i_{x8}	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$j_1(t)$	
								-0,5	1	0,5		$C1$
								-1	-1,6	0,8	-0,6	$L1$
1									0,4	0,8	0,4	$X1$
	1								1			$X2$
		1							0,4	-0,2	0,4	$X3$
			1						-0,6	-0,2	-0,6	$X4$
				1					-0,2	0,1	-0,2	$X5$
					1					0,5		$X6$
						1		-0,5		0,5		$X7$
							1		0,8		0,8	$X8$

Отсюда имеем уравнения для векторов \tilde{x} и x_0 :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & -1,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix};$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \\ i_{x5} \\ i_{x6} \\ i_{x7} \\ i_{x8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & -0,6 \\ 0 & -0,2 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0 \\ 0,2 & -0,6 \\ 0,2 & -0,6 \\ 0,1 & -0,2 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с заданными значениями емкостей и индуктивностей сформируем матрицы:



$$\Pi_{CC} \Pi'_{CC} = [1 \ -1] \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [C_1 + C_2] = [0, 1];$$

$$P_{LL} L P'_{LL} = [1] [L_1] [1] = [L_1] = [0, 2];$$

$$\Pi_{CC} \Pi'_{CC} = [1 \ -1] \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [-C_2] = [-0, 05].$$

Полученные матрицы имеют первый порядок, так как схема характеризуется только ДВУМЯ переменными состояния — напряжением на емкости u_{C1} и током в индуктивности i_{L1} . Матрица $P_{LL} L P'_{LL}$ отсутствует, поскольку нет особых сечений с источниками тока. Матрица Λ_x имеет вид:

$$\Lambda_x = \begin{array}{cccccccc} \frac{du_{C1}}{dt} & \frac{di_{L1}}{dt} & u_{C1} & i_{L1} & e_1(t) & i_1(t) & \frac{de_1(t)}{dt} & \frac{di_1(t)}{dt} & \\ \hline 0,1 & & -0,5 & 1 & -1,1 & 0,2 & 0,05 & & C1 \\ \hline & 0,2 & -1 & -1,6 & 0,8 & -0,6 & & & L1 \end{array}$$

Разделив первую строку на 0,1, а вторую на 0,2, получим слева единичную матрицу, и, следовательно, уравнения переменных состояния имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ i_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt}.$$

4.8. Нелинейные системы

Изложенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния легко обобщается на нелинейные системы. При формировании фундаментального дерева из дуг безреактивных компонентов выделяются дуги нелинейных двухполюсников, причем управляемые током дуги помещаются в дерево (после e -дуг и C -дуг), а управляемые напряжением — в дополнение (перед L -дугами и j -дугами). Тогда матрица сечений запишется в виде:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EH} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CH} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{HX} & \pi_{HH} & \pi_{HL} & \pi_{HJ} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XH} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} \end{bmatrix},$$

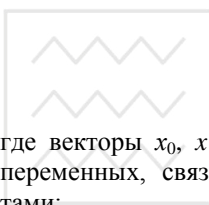


где индекс H относится к нелинейным безреактивным дугам, а в рамку заключена субматрица матрицы сечений для безреактивных дуг.

Из топологических уравнений, определяемых этой матрицей, следует соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CA} \\ \pi'_{XI} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi'_{CI} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi'_{EJ} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CH} \\ \pi'_{HL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} i_{HI} \\ u_{HI} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HA} \\ \pi'_{AI} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XI} \\ i_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HI} \\ \pi'_{CI} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HJ} \\ \pi'_{EJ} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HN} \\ \pi'_{HL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

или в краткой записи



$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v + \Theta_3 x_H; \\ y_H &= \Omega_0 x_0 + \Omega_1 x + \Omega_2 v + \Omega_3 x_H, \end{aligned}$$

где векторы x_0 , x и v определены, как и ранее; x_H и y_H — векторы переменных, связанных с нелинейными безреактивными компонентами:

$$x_H = \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}; \quad y_H = \begin{bmatrix} i_{HI} \\ u_{HT} \end{bmatrix}.$$

Вектор x_0 можно исключить из этих выражений на основе уравнения для переменных безреактивных линейных компонентов

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v + Q_3 x_H,$$

которое отличается от линейного (4.6) только наличием в правой части слагаемого $Q_3 x_H$, где:

$$Q_3 = [-V_{UN} \pi'_{HX}, V_{HI} \pi_{XH}].$$

Для исключения вектора x_0 удобно, как и ранее, применить алгоритм Гаусса—Жордана (но теперь блочная матрица Λ имеет более общий вид):



$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \hline -\Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \hline W_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 \\ \hline 0 & \Omega'_1 & \Omega'_2 & \Omega'_3 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \\ \hline \end{array}.$$

Таким образом, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \Theta'_1 x + \Theta'_2 v + \Theta'_3 x_H; \\ y_H &= \Omega'_1 x + \Omega'_2 v + \Omega'_3 x_H; \\ x_0 &= Q'_1 \lambda + Q'_2 v + Q'_3 x_H. \end{aligned}$$

Если нелинейными являются только безреактивные компоненты, то первое уравнение таким же способом, как и линейное, может быть приведено к нормальной форме, но теперь оно содержит член с вектором x_H переменных нелинейных компонентов. Уравнение переменных состояния совместно с нелинейным алгебраическим уравнением образует систему

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = Ax + Bv + Fx_H \\ y_H = \Omega'_1 x + \Omega'_2 v + \Omega'_3 x_H \end{array} \right\},$$

решение которой при заданных нелинейных функциях $\varphi(x_H, y_H) = 0$, векторе v и начальных условиях $x(t_0) = x_0$ позволяет найти векторы x и x_H , а значит и вектор x_0 .

При наличии нелинейных реактивных компонентов обычно используется уравнение для производной вектора \tilde{x} . Оно решается совместно с нелинейным алгебраическим уравнением каким-либо численным методом, причем вектор \tilde{x} определяется на каждом шаге интегрирования на основе заданных функций $q_C(u_C)$ и $\psi_L(i_L)$ или $C(u_C)$ и $L(i_L)$.

Не останавливаясь на численных методах решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, проиллюстрируем формирование уравнений переменных состояния на примере транзисторного усилителя (рис. 4.6, а).

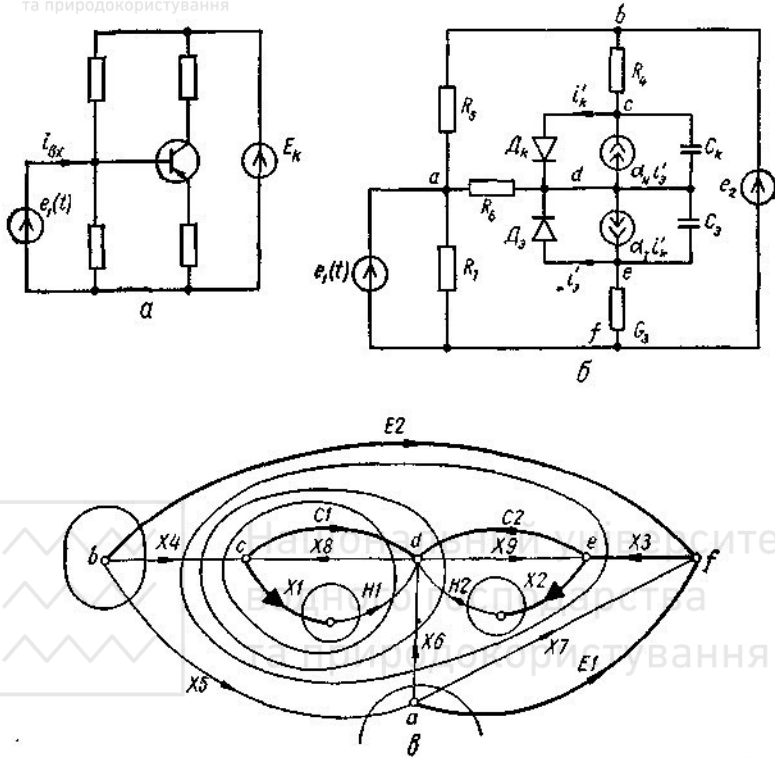


Рис. 4.6. Транзисторный усилитель (а), его схема замещения (б) и граф (в).

Замещая транзистор нелинейной схемной моделью (см. рис. 2.18,б), получаем схему рис. 4.6, б. Нелинейные безреактивные компоненты D_k и D_3 , задаются уравнениями:

$$i'_k = i_{k0}(e^{\gamma u_k} - 1); \quad i'_3 = i_{30}(e^{\gamma u_3} - 1),$$

а нелинейные емкости выражаются функциями

$$C_k = C_{k0} + C_{k0}e^{\gamma u_k}; \quad C_3 = C_{30} + C_{30}e^{\gamma u_3},$$

где i_{k0} , i_{30} , C_{k0} , C_{30} , C_{k0} , C_{30} и γ — величины, выражающиеся через физические параметры транзистора и определяемые соответствующими вычислениями или экспериментальным путем.

Так как зависимые источники тока управляются токами нелинейных двухполюсников D_k и D_3 , то для разделения линейных и нелинейных компонентов введем управляющие короткозамкнутые дуги по току.



Граф схемы с выбранным деревом показан на рис. 4.6, в. Матрица сечений для хорд имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} & \pi_{EH} \\ \pi_{CX} & \pi_{CH} \\ \pi_{XX} & \pi_{XH} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc|c} & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & H1 & H2 & \\ \hline & & -1 & 1 & 1 & & & & & E1 \\ & 1 & 1 & & & & & & & E2 \\ -1 & & & & & & -1 & 1 & & C1 \\ 1 & & & 1 & & & -1 & & 1 & C2 \\ & & & & & & & -1 & & X1 \\ & & & & & & & & -1 & X2 \\ 1 & & & 1 & & & & & & X3 \end{array}$$

Компонентная матрица Γ для линейных безреактивных дуг представляется следующим образом (для короткозамкнутых дуг $u_{X1} = 0$ и $u_{X2} = 0$):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc|c} X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & X1 \\ & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & X2 \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & X3 \\ & & & -G_1 & & & & & & & & & & & & & & & & X4 \\ & & & & -G_5 & & & & & & & & & & & & & & & X5 \\ & & & & & -G_6 & & & & & & & & & & & & & & X6 \\ & & & & & & -G_7 & & & & & & & & & & & & & X7 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & X8 \\ & & & & & & & & & & -\alpha_N & & & & & & & & & X9 \\ & & & & & & & & & -a_I & & & & & & & & & & X9 \\ \hline & V_{U1} & & & & & V_{UN} & & & & & & V_{H1} & & & & & & & V_{IN} \end{array}$$

Сформировав соответствующие матрицы, запишем блочную матрицу Λ :



$u_{X1} \ u_{X2} \ u_{X3} \ \iota_{X4} \ \iota_{X5} \ \iota_{X6} \ \iota_{X7} \ \iota_{X8} \ \iota_{X9} \ u_{C1} \ u_{C2} \ e_1(t) \ e_2 \ \iota_{H1} \ \iota_{H2}$

			-1				-1						-1		C1	
			i		1			-1							-1	C2
1									1							H1
	1									1						H2
i																X1
	1															X2
		1	R_3		R_7											X3
		$-G_4$	1						$-G_4$	G_1			G_1			X4
				1								$-G_5$	G_1			X5
		$-G_6$			1					G_6	G_6					X6
						1					G_7					X7
							1									α_N X8
								1						α_j		X9

При формировании общих соотношений для формирования матрицы Λ следует иметь в виду, что в рассматриваемом примере некоторые из топологических субматриц отсутствуют или нулевые. Применив алгоритм исключения и обозначив $\beta = 1 + R_3(G_4 + G_6)$, получим:



	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	e_2	t_{H1}	t_{H2}	
0	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_0)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_1G_0}{\beta}$	$\frac{G_1(1+R_3G_0)}{\beta}$	-1	α_N	C1
	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{G_4+G_0}{\beta}$	$-\frac{G_0}{\beta}$	$-\frac{G_4}{\beta}$	α_1	-1	C2
0	1						H1
		1					H2
1							X1
							X2
	$\frac{R_3G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3}{\beta}(G_4+G_0)$	$-\frac{R_3G_0}{\beta}$	$-\frac{R_3G_1}{\beta}$			X3
	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_0)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_1G_0}{\beta}$	$\frac{G_1(1+R_3G_0)}{\beta}$			X4
			$-G_0$	G_5			X5
	$\frac{R_3G_1G_0}{\beta}$	$\frac{G_0}{\beta}$	$\frac{G_0(1+R_3G_1)}{\beta}$	$-\frac{R_3G_1G_0}{\beta}$			X6
			G_7				X7
						α_N	X8
						α_1	X9

Отсюда имеем уравнения переменных состояния вместе с нелинейными алгебраическими уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C1} \\ q_{C2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} -G_4(1+R_3G_0) & G_4 \\ G_4 & -(G_4+G_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$



$$+ \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} -R_3 G_4 G_6 & G_4 (1 + R_3 G_6) \\ -G_6 & -G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & \alpha_N \\ \alpha_j & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{H1} \\ u_{H2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}.$$

Остальные строки преобразованной матрицы Λ дают уравнения для алгебраических переменных линейных компонентов.

4.9. Выходное уравнение

Подлежащие определению переменные можно рассматривать как составляющие искомого вектора y , который выражается *выходным уравнением* через вектор переменных состояний x , задающим вектор v и (в случае нелинейных систем) вектор x_H , т. е.

$$y = Cx + Dv + Hx_H.$$

Если искомые переменные входят в векторы x , x_0 и y_H , то выходное уравнение формируется непосредственно из соответствующих строк преобразованной матрицы Λ . Так как вектор x_0 содержит напряжения ветвей дерева u_{XT} и токи хорд i_{XN} , то целесообразно включать в дерево (если это возможно) x -дуги искомым напряжений и в дополнение — x -дуги искомым токов. В общем случае можно получить уравнение для искомой переменной линейной комбинацией строк преобразованной матрицы Λ . Например, для входного тока $i_{вх}$ усилителя (рис. 4.6, *a*) имеем:

$$i_{вх} = -i_{E1} = -i_5 + i_6 + i_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} RG_4 G_6 & G_6 \\ -\frac{R_3 G_4 G_6}{\beta} & \frac{G_6}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \left[G_6 + G_7 + \frac{G_6 (1 + R_3 G_4)}{\beta} \quad -G_5 - \frac{R_3 G_4 G_6}{\beta} \right] \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Вхождение искомым переменных в вектр x_0 всегда можно обеспечить, вводя фиксирующие короткозамкнутые ветви дерева для токов и разомкнутые хорды для напряжений.

4.10. Ограничения и обобщения

Как видно, что при изложении алгоритма формирования уравнений переменных состояния допускался ряд условий, которые специально



не оговаривались, но подразумевались при записи основных соотношений.

Предполагалось, что управляемыми и управляющими являются только дуги безреактивных компонентов, к которым отнесены также короткозамкнутые и разомкнутые дуги, фиксирующие управляющие токи и напряжения. При этом число управляющих величин для данной дуги не ограничивается, но управляющие параметры рассматриваются как постоянные величины.

Ограничение на характер управляющих двухполюсников легко снимается, если функции управления возложить на дополнительно вводимые дуги, фиксирующие управляющие переменные. Последовательно с управляющим по току двухполюсником вводится короткозамкнутая дуга, а параллельно с управляющим по напряжению двухполюсником — разомкнутая дуга (рис.4.7.).

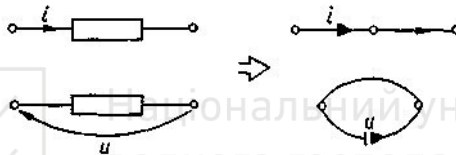


Рис. 4.7. Введение в граф дополнительных управляющих дуг.

Обобщение на случаи управления по нелинейной зависимости достигается введением дуг, фиксирующих управляющие переменные, и отнесением их к множеству дуг нелинейных компонентов.

При этом в векторе x_H следует положить нулю компоненты, соответствующие управляющим дугам, что равносильно их удалению совместно с соответствующими столбцами матриц Θ'_3 , Ω'_3 и Q'_3 . Алгоритм формирования уравнений переменных состояния можно обобщить и на случаи управления по производной. Для этого необходимо представить дугу, управляющую по производной тока, в виде последовательного соединения двух емкостей с равными (например, единичными) и противоположными по знаку значениями (общая емкость равна бесконечности, и, следовательно, напряжение дуги равно нулю). Параллельно положительной емкости вводится разомкнутая дуга, управляющая по напряжению $u = di/dt$ (рис. 4.8, а).

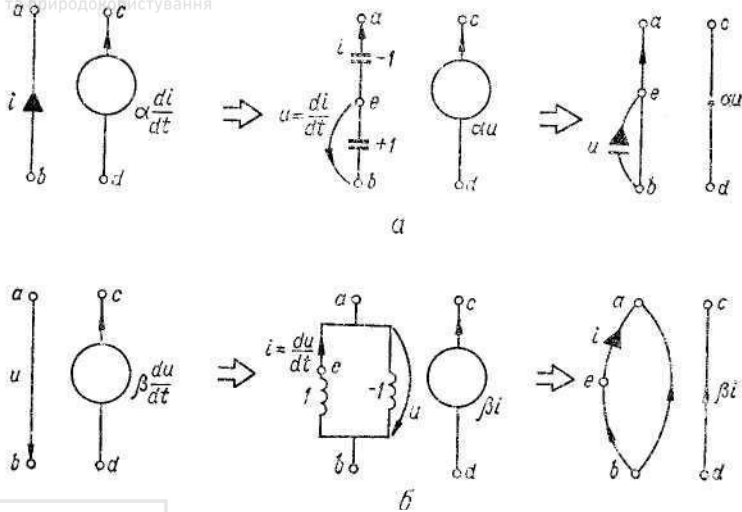


Рис. 4.8. Схемы и графы зависимых источников, управляемых переменных по току (а) и напряжению (б).

Аналогично решается вопрос и с управлением по производной напряжения (рис. 4.8, б). Ясно, что при этом появляются зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

При моделировании нелинейных систем по изложенному алгоритму дуги всех нелинейных управляемых током компонентов должны войти в дерево, а дуги всех нелинейных управляемых напряжением компонентов — в дополнение (распределение взаимоопределенных дуг нелинейных компонентов между деревом и дополнением произвольное). Это требование является топологическим ограничением, которое служит одним из *условий детерминированности* системы, т. е. возможности получения для искомых переменных однозначного решения при заданных воздействиях и начальных условиях. Невыполнение этого требования служит признаком того, что система может оказаться недетерминированной. В таких случаях требуются более тонкие методы исследования.

В соответствии с принятой иерархией управляющие по току короткозамкнутые дуги вводятся в дерево после емкостных дуг, а управляющие по напряжению разомкнутые дуги — в дополнение после индуктивных дуг (для нелинейных систем дуги нелинейных



компонентов имеют преимущества перед управляющими лугами линейных компонентов).

При этом в дерево попадает минимально возможное число емкостных дуг, а в дополнение — максимальное число индуктивных дуг. Как правило, тем самым обеспечивается вхождение в уравнения только независимых переменных, которые составляют совокупность переменных состояния. Однако при наличии особых контуров с короткозамкнутыми дугами и особых сечений с разомкнутыми дугами (см. рис. 4.3) в дерево войдут все емкости таких контуров, а в дополнение — все индуктивности таких сечений. Вследствие этого векторы i_{CT} и i_{LN} будут содержать зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

4.11. Исключение зависимых дифференциальных переменных

При наличии зависимых переменных математическую модель линейной системы удобно строить на основании одновременного использования уравнений для дифференциальных и алгебраических переменных в виде:

$$\left. \begin{aligned} W_x \frac{dx}{dt} - \Theta_0 x_0 - \Theta_1 x - \Theta_2 v + \Theta_3 \frac{dv}{dt} &= 0 \\ W_0 x_0 - Q_1 x - Q_2 v &= 0 \end{aligned} \right\},$$

которым соответствует матрица

$$\tilde{A} = \begin{array}{c|ccc|c} \frac{dx}{dt} & x_0 & x & v & \frac{dv}{dt} \\ \hline W_x & -\Theta_0 & -\Theta_1 & -\Theta_2 & \Theta_3 \\ \hline 0 & W_0 & -Q_1 & -Q_2 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \hline \end{array}$$

Для получения уравнений относительно вектора dx/dt и x_0 необходимо преобразовать матрицу \tilde{A} к такому виду, чтобы \tilde{A}_1 была единичной (с точностью до перестановки строк и столбцов). Этого можно достигнуть с помощью алгоритма Гаусса-Жордана. В развернутом виде матрица \tilde{A} записывается следующим образом:



	$\frac{du_C}{dt}$	$\frac{di_L}{dt}$	u_{XT}	i_{XV}
$\tilde{A} =$	$\Pi_{CC} C \Pi_{CC}^t$			π_{CX}
		$P_{LL} L P_{LL}^t$	$-\pi_{XL}^t$	
			$V_{UT} + V_{UN} \pi_{XX}^t$	$V_{IN} - V_{IT} \pi_{XX}$

\tilde{A}_1

u_C	i_L	$e(t)$	$j(t)$	$\frac{de(t)}{dt}$	$\frac{dj(t)}{dt}$
	π_{CL}		τ_{CJ}	$\Pi_{CC} C \Pi_{EC}^t$	
$-\pi_{CL}^t$					$P_{LL} L P_{LL}^t$
$V_{UA} \pi_{CX}^t$	$-V_{IT} \pi_{XL}$	$V_{UN} \pi_{EX}^t$	$-V_{IT} \pi_{XI}$		

\tilde{A}_2

В процессе преобразования \tilde{A}_1 к единичной матрице в ней может появиться нулевая (вырожденная) строка, что препятствует завершению этого преобразования и является признаком зависимости дифференциальных переменных. Соответствующее этой вырожденной строке уравнение не содержит алгебраических переменных и производных, а связывает только дифференциальные переменные и задающие функции времени. Оно и используется для исключения зависимых дифференциальных переменных из уравнений системы. Проиллюстрируем исключение зависимых дифференциальных переменных на примере схемы рис. 4.8, а, ее граф изображен на рис. 4.8, б.

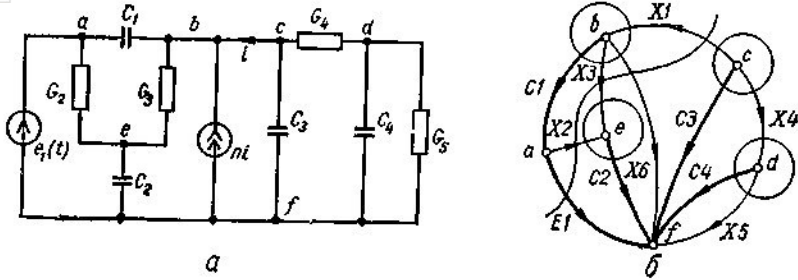


Рис. 4.8. Схема с зависимыми дифференциальными переменными (а) и ее граф (б).

Как видно, граф содержит особый контур с коротко-замкнутой управляющей дугой и источником напряжения (E1, C1, C3, X1). Поэтому все емкостные дуги этого контура попали в дерево, хотя напряжение одной из них (u_{C1} или u_{C3}) зависимо (например, $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$). По той же причине короткозамкнутая дуга X1 не может быть включена в дерево. Для выбранного фундаментального дерева матрица сечений имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} \\ \pi_{CX} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc|l} & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & \\ \hline & -1 & 1 & 1 & & & & 1 & E1 \\ & -1 & & 1 & & & & 1 & C1 \\ & & -1 & -1 & & & & & C2 \\ & 1 & & & 1 & & & & C3 \\ & & & & -1 & 1 & & & C4 \end{array}$$

Компонентная матрица имеет следующий вид:



	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
V =	1												X1
		-G ₂						1					X2
			-G ₃						1				X3
				-G ₄						1			X4
					-G ₅						1		X5
							n					1	X6

Так как дуги всех безреактивных компонентов вошли в дополнение, то субматрицы V_{UT} и V_{IT} (как и субматрица π_{XX}) отсутствуют. Формируем блочную матрицу \tilde{A} (штрихами отмечены производные):

u'_{C1}	u'_{C2}	u'_{C3}	u'_{C4}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	u_{C3}	u_{C4}	$e_1(t)$	
C_1				-1		1			1						C1
	C_2			-1	-1										C2
		C_3		1		1									C3
			C_4			-1	1								C4
										-1		1		-1	X1
					1						G_2			- G_1	X2
						1				- G_3	G_1			- G_3	X3
							1					- G_4	G_4		X4
								1						- G_5	X5
															X6
				-n					1						

Здесь сразу же обнаруживается вырожденная строка, соответствующая уравнению для X1 (ее элементы набраны жирным шрифтом), поэтому имеем зависимость

$$-u_{C1} + u_{C3} - e_1(t) = 0.$$

Исключим, например, переменную $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$, что соответствует прибавлению столбца для u_{C3} к столбцам для u_{C1} и $e_1(t)$. Для исключения производной u'_{C3} необходимо продифференцировать полученное соотношение, в результате чего возникает производная по задающему напряжению, т. е.



$$\frac{du_{C_3}}{dt} = \frac{du_{C_1}}{dt} + \frac{de_1(t)}{dt}.$$

Образовав для производной $e'_1(t)$ дополнительный столбец, необходимо столбец для u'_{C_3} прибавить к столбцам для u'_{C_1} и $e'_1(t)$. Итак, вырожденная строка дает информацию об операциях, которые необходимо выполнить по столбцам матрицы $\tilde{\Lambda}$ для исключения зависимостей переменной. Разумеется, после этого столбец исключаемой переменной и вырожденную строку следует удалить из матрицы $\tilde{\Lambda}$.

Пусть в нашем примере заданы следующие нормированные значения параметров компонентой (значение управляющего параметра n будет дано позже):

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2}; C_2 = 2; C_4 = \frac{25}{14}; G_2 = G_3 = 1; G_4 = \frac{5}{4}; G_5 = \frac{10}{7}.$$

Подставив эти значения в матрицу $\tilde{\Lambda}$ вместе с добавленным столбцом для $e'_1(t)$, после выполнения указанных операций над столбцами и удаления вырожденной строки, получим:

u'_{C_1}	u'_{C_2}	u'_{C_3}	e'_{X_1}	e'_{X_2}	e'_{X_3}	e'_{X_4}	e'_{X_5}	e'_{X_6}	u_{C_1}	u_{C_2}	u_{C_4}	$e_1(t)$	$e_1(t)$		
1			-1		1				1						C_1
2															
	2			-1	-1										C_2
1			1			1								1	C_3
2													2		
		$\frac{25}{14}$				-1	1								C_4
				1						1			-1		X_2
					1				-1	1			-1		X_3
						1			$\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$			X_4
							1					$\frac{10}{7}$			X_5
			$-n$						1						X_6



Применяя алгоритм исключения Гаусса-Жордана, приходим к матрице (опорные элементы отмечены жирными цифрами):

u_{C1}	u_{C2}	u_{C4}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_{C1}	u_{C2}	u_{C4}	$e_1(t)$	$e_1'(t)$		
1								1	$\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	$C1$	
	1								$-\frac{1}{2}$	1		-1		$C2$	
			1						$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$C3$
		1							$\frac{7}{10}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{10}$		$C4$	
				1						1		-1		$X2.$	
					1				-1	1		-1		$X3$	
						1			$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$		$X4$	
							1				$\frac{1}{7}$			$X5$	
								$1-\frac{n}{2}$	$\frac{1}{8}n$	$\frac{1}{2}n$	$-\frac{5}{8}n$	$\frac{1}{8}n$	$\frac{1}{4}n$	$X6$	

Дальнейший ход решения задачи зависит от численного значения управляющего параметра. При $n \neq 2$ завершается процедура исключения с опорным элементом в последней строке. При $n=2$ имеем вырожденную строку, которой соответствует уравнение

$$\frac{1}{4}u_{C1} + u_{C2} - \frac{5}{4}u_{C4} + \frac{1}{4}e_1(t) + \frac{1}{2}\frac{de_1(t)}{dt} = 0.$$

Это свидетельствует о зависимости дифференциальных переменных, но здесь эта зависимость обусловлена не структурой схемы, а численными значениями параметров компонентов. Поэтому ее естественно называть *компонентной зависимостью* переменных. Исключение компонентно зависимой переменной, например u_{C4} , проводится тем же способом, что и при топологической зависимости, на основе уравнений



$$u_{C4} = \frac{1}{5} u_{C1} + \frac{4}{5} u_{C2} + \frac{1}{5} e_1(t) + \frac{2}{5} \frac{de_1(t)}{dt};$$

$$\frac{du_{C4}}{dt} = \frac{1}{5} \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{4}{5} \frac{du_{C2}}{dt} + \frac{1}{5} \frac{de_1(t)}{dt} + \frac{2}{5} \frac{d^2e_1(t)}{dt^2}.$$

Вводя в матрицу \tilde{A} дополнительный столбец для второй производной, после выполнения соответствующих операций над столбцами (столбцы для u_{C4} и u'_{C4} прибавляются к другим столбцам с коэффициентами, определяемыми уравнениями для исключаемой переменной и ее производной) имеем:

	u'_{C1}	u'_{C2}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	$e''_1(t)$	
1								1	2	-2	2			C1
	1								$-\frac{1}{2}$	1	-1			C2
		1						$-\frac{1}{2}$						C3
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$								$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	C4
			1						1	-1				X2
				1					-1	1	-1			X3
					1				-1	1	-1	1		X4
						1			$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		X5

Завершая процедуру исключения, получаем окончательно



	u_{C1}	u_{C2}	i_{X1}	i_{X2}	i_{X3}	i_{X4}	i_{X5}	i_{X6}	u_{C1}	u_{C2}	$e_1(t)$	$e_1'(t)$	$e_1''(t)$	
1										2	2	4	2	$C1$
	1								$-\frac{1}{2}$	1	-1			$C2$
		1							1	-2		-2	-1	$C3$
								1	2	-4		-4	-2	$C4$
			1						1	-1				$X2$
				1					-1	1	-1			$X3$
					1				-1	1	-1	$\frac{1}{2}$		$X4$
						1			$\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		$X5$

Как видно, $\tilde{\Lambda}$ преобразовалась в матрицу, из которой можно получить единичную матрицу перестановкой строк и столбцов (в нашем примере достаточно переставить столбец для i_{X6}). В результате можно записать уравнения переменных состояния и выражение для алгебраических переменных:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d^2e_1(t)}{dt^2};$$

$$\begin{bmatrix} i_{X1} \\ i_{X6} \\ i_{X2} \\ i_{X3} \\ i_{X4} \\ i_{X5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{2}{7} & \frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt}.$$

Из рассмотренного примера видно, что особые контуры с короткозамкнутыми дугами (как и особые сечения с разомкнутыми дугами) сильно усложняют процедуру формирования уравнений переменных состояния. К счастью, подобные случаи в практике встречаются крайне редко.



4.11. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Приведите примеры многополюсных компонентов, наличие которых в физической системе приводит к необходимости использования неоднородного координатного базиса.
2. Изобразите процесс формирования матрицы $Q = [-V_{EN}\pi_{EX}^t, V_{NT}\pi_{XJ}]$ схемой, аналогичной указанной на рис. 4.1 для матрицы W ,
3. Сформируйте уравнения системы (см. рис. 4.2) в неоднородном координатном базисе, включив в фундаментальный лес, наряду с e -дугами 1, 2, 3, дуги b и 10 . Сравните результат с полученным в (4.3) и объясните, почему матрица W получилась в нерегулярной форме.
4. Почему при формировании математической модели в неоднородном координатном базисе взаимопределенные ветви дерева целесообразно представить как z -дуги, а взаимопределенные хорды — как y -дуги?
5. Сформируйте уравнения в неоднородном координатном базисе для механической системы рис. 2.11.

6. Переменные $q = q_{CT} + \pi_{CC}q_{CN}$ и $\psi = \psi_{LN} - \pi_{LL}^t\psi_{LN}$ называют соответственно зарядами сечений и потокосцеплениями контуров. Почему?

7. Покажите, что при отсутствии индуктивных связей вектор \tilde{x} можно представить в виде:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T + \pi_{CC}C_N\pi_{CC}^t & 0 \\ 0 & L_N + \pi_{LL}^tL_T\pi_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_{CC}C_N\pi_{EC}^t & 0 \\ 0 & \pi_{LL}^tL_T\pi_{LJ}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

В какой мере можно ослабить условие для индуктивных связей, чтобы это выражение еще было справедливо?

8. Запишите выражение для вектора \tilde{x} при отсутствии особых контуров и сечений.
9. Выведите уравнения переменных состояния для электрической схемы (см. рис. 1.5, а).
10. Выведите уравнения переменных состояния для механической системы (см. рис. 1.7).
11. Сформируйте уравнения переменных состояния для электрической схемы (см. рис. 4.5) при заданных численных значениях параметров, выполнив все операции в скалярной форме без применения матриц, для чего:

а) составьте по законам Кирхгофа топологические уравнения для всех независимых сечений и контуров, определяемых выбранным фундаментальным деревом;



- б) запишите полюсные уравнения для безреактивных компонентой схемы в неявной форме;
- в) выразите напряжения безреактивных хорд и токи безреактивных ветвей дерева из уравнений сечений и контуров и подставьте их в полюсные уравнения;
- г) решите систему полюсных уравнений относительно алгебраических переменных — напряжений ветвей дерева и токов хорд безреактивных компонентов;
- д) выразите из топологических уравнений токи емкостных дуг и напряжения индуктивных дуг и подставьте в ЭТИ уравнения найденные в предыдущем пункте алгебраические величины;
- е) воспользовавшись полюсными уравнениями реактивных компонентов замените токи емкостных дуг через производные их напряжений и напряжения индуктивных дуг через производные их токов;
- ж) исключите из системы уравнений для реактивных компонентов, полученных в предыдущем пункте, зависимые дифференциальные переменные — напряжения емкостных хорд и токи индуктивных ветвей дерева;
- з) запишите уравнения переменных состояния и сравните их с полученными в (4.7).
12. Объясните причины отсутствия некоторых субматриц в матрице сечения для графа, изображенного на рис. 4.6, в.
13. Введите в граф (рис. 4.6, в) короткозамкнутую дугу, фиксирующую входной ток i_{ex} и получите уравнения переменных состояния и выходное уравнение.
14. Изменяется ли вид уравнений переменных состояния при введении фиксирующих дуг для искомым величин? Если нет, то почему?
15. Почему изложенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния не допускает:
- а) включения в дерево короткозамкнутых дуг, если они принадлежат особому контуру?
- б) включения в дополнение разомкнутых дуг, если они принадлежат особому сечению?
16. Перечислите все особенности, которые вносят в процедуру формирования уравнений переменных состояния, особые контуры и сечения, состоящие:
- а) только из реактивных двухполюсников;
- б) из реактивных двухполюсников и источников;
- в) из реактивных двухполюсников и фиксирующих дуг;



г) из реактивных двухполюсников, источников и фиксирующих дуг.

17. Сформируйте уравнения переменных состояния для схемы рис. 4.8, а при заданных численных значениях, исключив зависимые дифференциальные переменные u_{C1} и u_{C2} , и сравните результат с полученным в (4.11).

18. По аналогии с электрическими цепями сформулируйте основные положения формирования уравнений переменных состояния для механических и гидравлических систем.

5. СОКРАЩЕННЫЙ КООРДИНАТНЫЙ ВАЗИС

5.1. Начальные положения

При формировании математической модели в неоднородном координатном базисе размеры матрично-векторных параметров определяются в основном числом дуг полюсных графов компонентов системы, В тех случаях, когда система содержит большое число компонентов, это может принести к серьезным трудностям даже при использовании вычислительных машин. Поэтому большое практическое значение имеют вопросы, связанные с сокращением координатного базиса, в котором представляются уравнения системы. Один из путей решения этой задачи основан на подстановке полюсных уравнений в топологические уравнения, которые организуются специальным образом.

Ясно, что компонентные уравнения должны быть представлены в явной форме. При этом для их упрощения можно считать, что u – дуги не управляют по поперечным величинам, а z -дуги не управляют по продольным величинам. Если такое управление в системе имеет место, то указанные дуги освобождаются от него введением дополнительных управляющих дуг: последовательно с u -дугой короткозамкнутой дуги, управляющей по поперечной величине, а параллельно с z -дугой - разомкнутой дуги, управляющей по продольной величине.

В дальнейшем короткозамкнутые дуги объединяются в множество s -дуг и представляются уравнением $\xi_s=0$. Разомкнутые дуги объединяются в множество q -дуг и представляются уравнением $\eta_Q=0$. Итак, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что дуги полюсных графов компонентов системы управляются продольными величинами u -дуг ζ_U , поперечными величинами z -дуг η_Z , поперечными величинами s -дуг η_S , и продольными величинами q -дуг ξ_Q . Тогда компонентные уравнения имеют вид



$$\begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_D & Y_D \\ Z_D & M_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$X' = V_0 X'' + V_D X_D.$$

Дерево теперь формируется в соответствии со следующей иерархией дуг:



и называется *нормальным деревом*. В него входят все e -дуги и S -ДУГИ, а все q -дуги и j -дуги попадают в дополнение (нарушение этого положения свидетельствовало бы о некорректности постановки задачи). Топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Pi_{EY} & \Pi_{EZ} & \Pi_{Ej} & \Pi_{Ej} \\ 0 & 1 & \Pi_{SY} & \Pi_{SZ} & \Pi_{SQ} & \Pi_{Sj} \\ 0 & 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} & \Pi_{YQ} & \Pi_{Yj} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{ZZ} & \Pi_{ZQ} & \Pi_{Zj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_S \\ \eta_Y \\ \eta_Z \\ \eta_Q \\ \eta_j \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} P_{YE} & P_{YS} & P_{YY} & 0 & 0 & 0 \\ P_{ZE} & P_{ZS} & P_{ZY} & P_{ZZ} & 0 & 0 \\ P_{QE} & P_{QS} & P_{QY} & P_{QZ} & 1 & 0 \\ P_{jE} & P_{jS} & P_{jY} & P_{jZ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_S \\ \xi_Y \\ \xi_Z \\ \xi_Q \\ \xi_j \end{bmatrix} = 0.$$

В этих уравнениях

$$\eta_Q = 0, \eta_j = \phi, \xi_E = \varepsilon \text{ и } \xi_S = 0.$$

Благодаря специфической структуре, обусловленной способом построения нормального дерева, топологические уравнения вместе с компонентными позволяют сформировать математическую модель в сокращенном координатном базисе.



5.2. Уравнения в сокращенном координатном базисе

Из топологических уравнений для сечений и контуров, определяемых u -дугами и z -дугами, имеем соотношения:

$$\begin{aligned}\Pi_{YY}\eta_Y + \Pi_{YZ}\eta_Z + \Pi_{YJ}\vartheta &= 0; \\ P_{ZZ}\xi_Z + P_{ZY}\xi_Y + P_{ZE}\varepsilon &= 0,\end{aligned}$$

которые объединяются в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & P_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} \\ P_{ZY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YJ} \\ P_{ZE} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F = 0.$$

Из топологических уравнений для сечений, определяемых s -дугами, и для контуров, определяемых q -дугами, имеем соотношения:

$$\begin{aligned}\eta_S + \Pi_{SY}\eta_Y + \Pi_{SZ}\eta_Z + \Pi_{SJ}\vartheta &= 0; \\ \xi_Q + P_{QZ}\xi_Z + P_{QY}\xi_Y + P_{QE}\varepsilon &= 0,\end{aligned}$$

которые записываются в виде матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{SY} & 0 \\ 0 & P_{QZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{SZ} \\ P_{QY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{SJ} \\ P_{QE} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} = 0$$

или

$$X_D + \Theta_4 X' + \Theta_5 X'' + \Theta_6 F = 0.$$

Подставляя в записанные соотношения компонентное уравнение $X' = V_0 X'' + V_D X_D$, после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}(\Theta_1 V_0 + \Theta_2) X'' + \Theta_1 V_D X_D + \Theta_3 F &= 0; \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) X'' + (1 + \Theta_4 V_D) X_D + \Theta_6 F &= 0.\end{aligned}$$

Составляющие вектора X'' выражаются из топологических зависимостей через продольные величины ветвей дерева и поперечные величины хорд:

$$\begin{aligned}\xi_Y &= \Pi_Y^t \xi_T = \{\Pi_{EY}^t \quad \Pi_{YV}^t\} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \Pi_{EY}^t \varepsilon + \Pi_{YV}^t \xi_{YT}; \\ \eta_Z &= P_Z^t \eta_N = [P_{ZZ}^t \quad P_{JZ}^t] \begin{bmatrix} \eta_{ZN} \\ \vartheta \end{bmatrix} = P_{ZZ}^t \eta_{ZN} + P_{JZ}^t \vartheta,\end{aligned}$$

что приводит к соотношению



$$\begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{YY}^t & 0 \\ 0 & \Pi_{ZZ}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{YT} \\ \eta_{ZN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{EY}^t & 0 \\ 0 & \Pi_{JZ}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

или

$$X'' = \Theta_1^t X_0 + \Theta_7 F.$$

Это преобразование, которое получено благодаря специфической структуре системы координат, и составляет главный момент формирования математической модели в сокращенном координатном базисе. Теперь осталось подставить выражение для X'' в полученные выше соотношения, в результате чего имеем:

$$\begin{aligned} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_1^t X_0 + \Theta_1 V_D X_D &= -[(\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 + \Theta_3] F; \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_1^t X_0 + (1 + \Theta_4 V_D) X_D &= -[(\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 + \Theta_6] F. \end{aligned}$$

Объединяя эти уравнения, можно записать:

$$\begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_1^t & \Theta_1 V_D \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_1^t & 1 + \Theta_4 V_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 + \Theta_3 \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 + \Theta_6 \end{bmatrix} F$$

или в сокращенной записи $WX = QF$.

Вектор F в качестве своих компонентов содержит задающие продольные ε и поперечные ϑ величины, а вектор X — продольные переменные y -ветвей дерева, поперечные переменные z -хорд, а также поперечные переменные короткозамкнутых дуг и продольные переменные разомкнутых дуг, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{YT} \\ \eta_{ZN} \\ \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система координат включает только сечения, определяемые s -дугами и y -ветвями дерева, и контуры, определяемые z -хордами и q -дугами. Сокращение числа координат, а следовательно, и порядка квадратной матрицы W численно равно количеству y -хорд и z -ветвей дерева.

5.3. Матрично-векторные параметры

Формально матрично-векторные параметры уравнения $WX = QF$ могут быть вычислены по формулам:



$$W = \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_1' & \Theta_1 V_D \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_1' & 1 + \Theta_4 V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{00} W_{0D} \\ W_{D0} W_{DD} \end{bmatrix};$$

$$Q = - \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 + \Theta_3 \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 + \Theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_D \end{bmatrix}.$$

Однако такой путь не целесообразен, так как входящие в эти формулы матрицы содержат нулевые блоки. Поэтому имеет смысл перейти к более подробной записи, сделав по пути некоторые преобразования. Рассмотрим сначала блок

$$W_{00} = (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_1' = \Theta_1 V_0 \Theta_1' + \Theta_2 \Theta_1' =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & P_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi'_{YY} & 0 \\ 0 & P'_{ZZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} \\ P_{ZY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi'_{YY} & 0 \\ 0 & P'_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{ZZ} \\ P_{ZZ} M_0 \Pi'_{YY} & P_{ZZ} Z_0 P'_{ZZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} P'_{ZZ} \\ P_{ZY} \Pi'_{YY} & 0 \end{bmatrix}.$$

Из общего свойства $PP^t=0$ следует, что произведение любой строки матрицы Π на любой столбец матрицы P^t (или строку матрицы P) дает нулевую матрицу. Поэтому в нашем случае можно записать:

$$\{00\Pi_{YY}\Pi_{YZ}\Pi_{YZ}\Pi_{YQ}\Pi_{YJ}\} \{P_{ZE}P_{ZS}P_{ZY}P_{ZZ}00\}' = 0,$$

откуда

$\Pi_{YY}P^t_{ZY} + \Pi_{YZ}P^t_{ZZ} = 0$, т.е. $\Pi_{YY}P^t_{ZY} = -\Pi_{YZ}P^t_{ZZ}$. Обозначив $\Pi_{YZ}P^t_{ZZ} = \Theta_0$, можно записать $\Pi_{YY}P^t_{ZY} = -\Theta_0$ или $P_{ZY}\Pi'_{YY} = -\Theta'_0$. Таким образом, рассматриваемый блок преобразуется к виду:

$$W_{00} = \begin{bmatrix} \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{ZZ} + \Theta_0 \\ P_{ZZ} M_0 \Pi'_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ} Z_0 P'_{ZZ} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая аналогично остальные блоки, получаем развернутые выражения для матрично-векторных параметров:

$$W = \begin{matrix} & \xi_{YT} & \eta_{ZN} & \eta_S & \xi_Q \\ \begin{bmatrix} \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{ZZ} + \Theta_0 & \Pi_{YY} N_D & \Pi_{YY} Y_D \\ P_{ZZ} M_0 \Pi'_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ} Z_0 P'_{ZZ} & P_{ZZ} Z_D & P_{ZZ} M_D \\ \Pi_{SY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{SY} N_0 P'_{ZZ} + \Pi_{SZ} P'_{ZZ} & 1 + \Pi_{SY} N_D & \Pi_{SY} Y_D \\ P_{QZ} M_0 \Pi'_{YY} + P_{QY} \Pi'_{YY} & P_{QZ} Z_0 P'_{ZZ} & P_{QZ} Z_D & 1 + P_{QZ} M_D \end{bmatrix} & & & & \end{matrix};$$



$$Q = \begin{array}{|c|c|} \hline \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{EY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{JZ} + \Pi_{YJ} \\ \hline P_{ZZ} M_0 \Pi'_{EY} + P_{ZE} & P_{ZZ} Z_0 P'_{JZ} \\ \hline \Pi_{SY} N_D \Pi'_{EY} & \Pi_{SY} Y_D P'_{JZ} + \Pi_{SJ} \\ \hline P_{QZ} Z_D \Pi'_{EY} + P_{QE} & P_{QZ} M_D P'_{JZ} \\ \hline \end{array}$$

Определив матрицы W и Q , из решения уравнения $WX = QF$ можно найти вектор X . Если интерес представляют только искомые величины, зафиксированные короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, достаточно определить вектор X_D .

В частном случае, когда управляющие короткозамкнутые и разомкнутые дуги отсутствуют, матрично-векторные параметры выражаются значительно проще

$$W = \begin{array}{|c|c|} \hline \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{ZZ} + \Theta_0 \\ \hline P_{ZZ} M_0 \Pi'_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ} Z_0 P'_{ZZ} \\ \hline \end{array}, \quad Q = \begin{array}{|c|c|} \hline \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{EY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{JZ} + \Pi_{YJ} \\ \hline P_{ZZ} M_0 \Pi'_{EY} + P_{ZE} & P_{ZZ} Z_0 P'_{JZ} \\ \hline \end{array}$$

а вектор X содержит только компоненты векторов ξ_{YT} и η_{ZN} .

5.4. Оптимальное разбиение дуг

Использование сокращенного координатного базиса имеет смысл тогда, когда достигается значительное уменьшение размеров матрицы W . Заметим, что уже при сокращении числа координат на 30% количество клеток матрицы уменьшается примерно вдвое раз. Естественно стремиться достигнуть максимально возможного сокращения координатного базиса, что осуществляется с помощью *оптимального разбиения* взаимопределенных дуг между множествами y -дуг и z -дуг.

Прежде чем излагать алгоритм оптимального разбиения взаимопределенных дуг, найдем общее соотношение для количества сокращаемых координат при заданном разбиении. Так как вектор X не содержит составляющих векторов ξ_{YT} и η_{ZN} , то ясно, что сокращаются сечения, определяемые z -ветвями дерева (z -сечения), и контуры, определяемые y -хордами (y -контуры).



Рассмотрим суграф, содержащий только e - и u -дуги (а также все p вершин) исходного графа. Пусть он состоит из k_s компонентов (изолированные вершины также считаются компонентами суграфа), а число всех e - и u -дуг равно q_s . Поскольку фундаментальное дерево формируется с преимуществом e - и u -дуг, то все сечения этого суграфа несокращаемые, а все контуры сокращаемые. Очевидно, количество таких сокращаемых контуров равно цикломатическому числу суграфа, т. е. $\sigma' = q_s - p + k_s$. Количество несокращаемых сечений равно рангу суграфа $p - k_s$, а сокращается $v' = v - (p - k_s)$ сечений. Следовательно, общее число сокращаемых координат

$$\mu = \sigma' + v' = (q_s - p + k_s) + (v - p + k_s) = q_s + 2k_s + v - 2p.$$

Из соотношения для ранга исходного графа $v - p - k$, где k — число его компонентов, следует $p = v + k$, на основе чего полученную формулу для числа сокращаемых координат можно представить в виде:

$$\mu = q_s + 2(k_s - k) - v = q_s + 2\Delta k - v,$$

где Δk — превышение по числу компонентов e - и u -суграфа над исходным графом.

Ранг v является характеристикой графа, которая не зависит от типа дуг. Поэтому число сокращаемых координат данного графа определяется только значениями величин q_s и Δk , т. е. разбиением взаимопределенных дуг. Каждая новая u -дуга увеличивает μ на единицу, а объединение двух частей суграфа (т. е. уменьшение Δk на единицу) уменьшает μ на два. Отсюда ясно, что к u -дугам следует относить, прежде всего, те взаимопределенные дуги, которые не связывают отдельных частей данного графа. Дуги, связывающие какие-либо две части суграфа, целесообразно относить к u -дугам, если их не меньше двух.

Практически оптимальное разбиение удобно осуществлять на w -графе взаимопределенных дуг, который получается из исходного графа сокращением (стягиванием) e - и u -дуг и удалением z -, j -дуг (разумеется, короткозамкнутые s -дуги также сокращаются, а разомкнутые q -дуги удаляются). К u -дугам следует отнести петли и параллельные дуги w -графа. Каждая новая u -дуга сокращается, и процесс заканчивается тогда, когда в w -графе не останется петель и параллельных дуг. Оставшиеся дуги w -графа после этого относятся к z -дугам.

Например, для графа на рис. 5.1, а (u -дуги изображены сплошными тонкими линиями, z -дуги — штриховыми, а w -дуги — жирными линиями) получаем граф взаимопределенных дуг, приведенный на рис. 5.1, б.

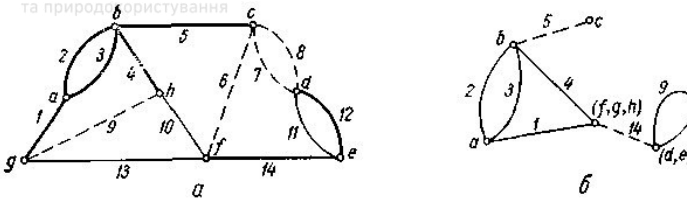


Рис. 5.1. Оптимальное разбиение взаимопределенных дуг:
а — исходный граф; б — граф взаимопределенных дуг с разбиением на y -дуги (1, 2, 3, 4, 9) и z -дуги (5, 14).

К y -дугам относим, прежде всего, петлю 9 и параллельные дуги 2 и 3. После их закорачивания снова появляются параллельные дуги 1 и 4, которые также относим к y -дугам. Дуги 5 и 14 идентифицируются как z -дуги. При полученном разбиении $\mu=8+2\cdot 2-7=5$.

5.5. Определение матрично-векторных параметров

Итак, при моделировании в сокращенном координатном базисе целесообразно предварительно провести оптимальное разбиение взаимопределенных дуг. К таким дугам относятся обычно дуги двухполюсных компонентов. Однако если требуется получить уравнения в дифференциальной форме, то дуги реактивных двухполюсников идентифицируются как y -дуги или z -дуги в соответствии с их полюсными уравнениями, которые выражают соответственно поперечные или продольные переменные через производные.

Матрично-векторные параметры системы W и Q можно определить путем операций над гомологическими и компонентными субматрицами в соответствии с выражениями, полученными в (5.3). В качестве примера рассмотрим гидромеханическую систему (рис. 4.2, а), граф которой с нормальным деревом изображен на рис. 5.2, а.

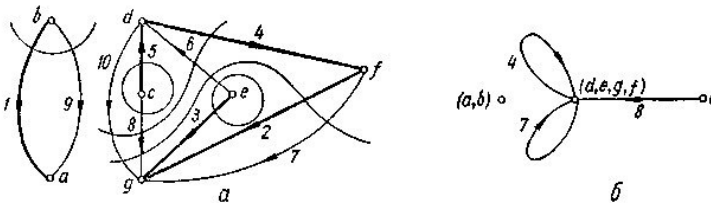


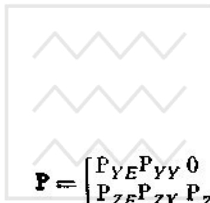
Рис. 5.2. Граф гидромеханической системы (а) и граф взаимопределенных дуг (б).



Как видно из графа взаимопределенных дуг (рис. 5.2, б), получающегося из графа системы закорачиванием e -дуг (1, 2, 3) и y -дуг (6, 9, 10), а также удалением z -дуги (5), по условию оптимального разбиения дуги 4, 7 идентифицируются как y -дуги, а 8 — как z -дуга. При этом $q_s = 8$, $\Delta k_s = 1$, $v = 5$, следовательно, число сокращаемых координат $\mu = 8 + 2 \cdot 1 - 5 = 5$. Топологические матрицы имеют вид:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EZ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} \\ 0 & 0 & \Pi_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8
1	1						1			
2		1			-1	1		1		1
3			1		1					
4				1	-1			1		1
5									1	1



$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{YE} & P_{YY} & 0 \\ P_{ZE} & P_{ZY} & P_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8
6		1	-1	1	1					
7		-1				1				
9	-1						1			
10		-1		-1				1		
8		-1		-1					-1	1

Компонентная матрица V_0 запишется следующим образом (матрица V_D отсутствует, так как граф не содержит короткозамкнутых и разомкнутых управляющих дуг):



$$V_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} =$$

	4	6	7	9	10	5	8	
K_4								4
						n		6
			ρB_7					7
					S			9
				$-\zeta$				10
		$-n$						5
							$\frac{1}{K_8}$	8

Тройные произведения матриц, входящие в блоки матрично-векторных параметров W и Q , можно получить путем операций над строками и столбцами соответствующих блоков компонентной матрицы V_0 подобно тому, как это делалось при формировании математической модели в однородных системах координат (5.5). Так как

$$\Theta_0 = \Pi_{YZ} P'_{ZZ} = |0 \ 1| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1],$$

то записав матрицу W и вектор Q , приходим к уравнениям в сокращенном координатном базисе:

K_4	$n+1$
$-n-1$	$1/K_8$

 $=$

x_4	S	
f_8		$n+1$
		$-n$

 $=$

$p_1(t)$
$x_2(t)$
$x_8(t)$

5.6. Операции над столбцами

Обычно компонентные матрицы V_0 и V_D сильно разреженные, а их размеры определяются числом q_x для полюсных графов компонентов



и числом q_D управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг (матрица V_0 квадратная q_x -го порядка, V_D имеет размер $q_x \times q_D$). Работать с такими матрицами неудобно, особенно, если система содержит большое число компонентов.

Заслуживает внимания другой способ определения матрично-векторных параметров системы в сокращенном координатном базисе. Он основан на непосредственном введении параметров каждой дуги в топологические уравнения:

$$\begin{aligned}\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F &= 0; \\ X_D + \Theta_4 X' + \Theta_5 X'' + \Theta_6 F &= 0.\end{aligned}$$

которые удобно представить в объединенной форме:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \\ X_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_6 \end{bmatrix} F = 0.$$

Компонентные уравнения линейных систем выражают каждую составляющую x'_k вектора X' через составляющие x_r векторов X'' и X_D в виде суммы

$$x'_k = \sum_r w_{kr} x_r,$$

где w_{kr} — параметр, который характеризует зависимость x'_k от x_r (для реактивных компонентов w_{kr} содержит операторы дифференцирования или интегрирования). Для исключения переменной x'_k из топологического уравнения достаточно соответствующий этой переменной столбец матрицы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix}$$

умножить на параметр w_{kr} и сложить со столбцом, соответствующим переменной x_r (для всех значений r , при которых w_{kr} отлично от нуля). После этого столбец, соответствующий переменной x_k , удаляется из матрицы Θ , а переменная x_k исключается из вектора X' . Таким способом можно ввести параметры всех компонентов, в результате чего вектор X' исключается из исходных топологических уравнений, и они преобразуются к виду:

$$[\Lambda_X \Lambda_D] \begin{bmatrix} X'' \\ X_D \end{bmatrix} + \Lambda_F F = 0.$$

После этого остается подставить

$$X'' = \Theta'_1 X_0 + \Theta'_2 F$$

и в результате получаем



$$[\Lambda_X \Theta_1' \Lambda_D] \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = -(\Lambda_X \Theta_7 + \Lambda_F) F,$$

что соответствует уравнению системы $WX=QF$ в сокращенном координатном базисе, где

$$W = [\Lambda_X \Theta_1' \Lambda_D]; \quad Q = -(\Lambda_X \Theta_7 + \Lambda_F).$$

И на этом этапе алгебраические операции над матрицами можно заменить операциями над столбцами матрицы $[\Lambda_X, \Lambda_D, \Lambda_F]$.

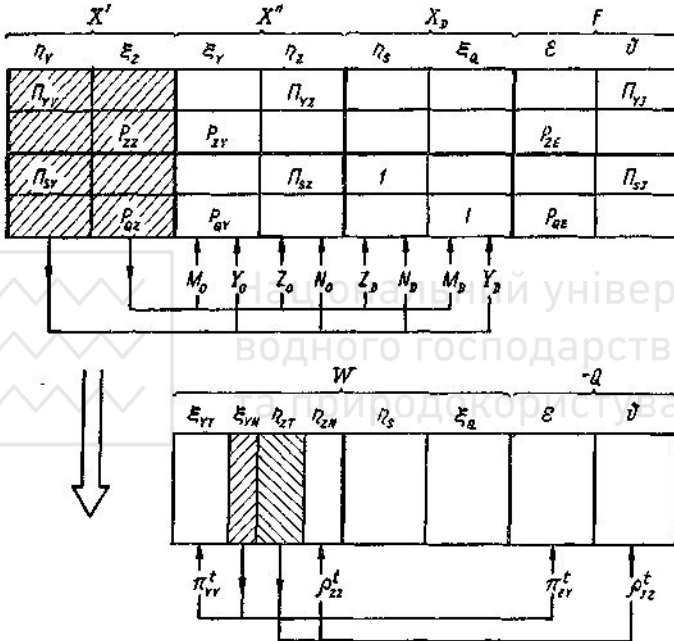


Рис. 5.3. Определение матрично-векторных параметров линейной системы в сокращенном координатном базисе,

Для этого достаточно столбцы матрицы Λ_X преобразовать согласно уравнению

$$X'' = \Theta_1' X_0 + \Theta_7 F,$$

которому соответствуют соотношения:

$$\xi_Y = \Pi_{YY}' \xi_{YT} + \Pi_{EY}' \epsilon; \quad \eta_Z = \rho_{ZZ}' \eta_{ZN} + \rho_{JZ}' \vartheta$$

или

$$\xi_{YN} = \pi_{YV}^t \xi_{YT} + \pi_{EY}^t \epsilon; \quad \eta_{ZT} = \rho_{ZZ}^t \eta_{ZN} + \rho_{JZ}^t \vartheta.$$



В результате в матрице Λ_X останутся только столбцы для вектора $X_0 = (\xi_{YT}, \eta_{ZN})$, которые совместно с матрицей Λ_D образуют матрицу W , а матрица Λ_F преобразуется в матрицу $-Q$. Изложенный способ определения матрично-векторных параметров иллюстрируется на рис. 5.3, а его применение к рассмотренной в (5.5) гидромеханической системе — на рис. 5.4.

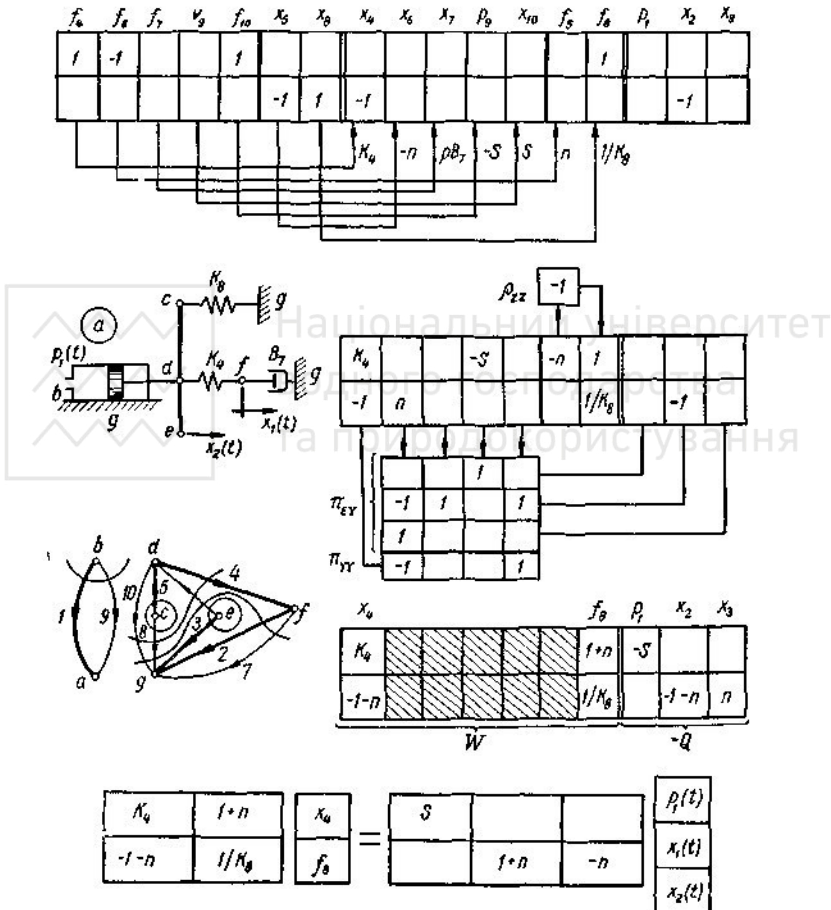


Рис. 5.4. Определение матрично-векторных параметров гидромеханической системы.



5.7. Уравнения переменных состояния

Разобьем множество u -дуг на реактивные (емкостные) C -дуги и безреактивные G -дуги, а множество z -дуг — на реактивные (индуктивные) L -дуги и безреактивные R -дуги. Нормальное дерево строится в соответствии с иерархией дуг (E, S, C, G, R, L, Q, J), и матрица сечений имеет вид:

$$\Pi = \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & \pi_{EC} & \pi_{EG} & \pi_{ER} & \pi_{EL} & \pi_{EQ} & \pi_{EJ} \\ & 1 & & & & \pi_{SC} & \pi_{SG} & \pi_{SR} & \pi_{SL} & \pi_{SQ} & \pi_{SJ} \\ & & 1 & & & \pi_{CC} & \pi_{CG} & \pi_{CR} & \pi_{CL} & \pi_{CQ} & \pi_{CJ} \\ & & & 1 & & & \pi_{GG} & \pi_{GR} & \pi_{GL} & \pi_{GQ} & \pi_{GJ} \\ & & & & 1 & & & \pi_{RR} & \pi_{RL} & \pi_{RQ} & \pi_{RJ} \\ & & & & & & & & \pi_{LL} & \pi_{LQ} & \pi_{LJ} \end{array}$$

На основании этой матрицы, учитывая, что $\eta_Q = 0$ и $\xi_S = 0$, а также используя зависимость $\rho = -\pi^t$, можно записать две системы топологических уравнений. Одна из них служит исходной для формирования уравнений переменных состояния в сокращенном координатном базисе:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_S + \pi_{SC}\eta_{CN} + \pi_{SG}\eta_{GN} + \pi_{SR}\eta_{RN} + \pi_{SL}\eta_{LN} + \pi_{SJ}\delta = 0; \\ \eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} + \pi_{CG}\eta_{GN} + \pi_{CR}\eta_{RN} + \pi_{CL}\eta_{LN} + \pi_{CJ}\delta = 0; \\ \eta_{GT} + \pi_{GG}\eta_{GN} + \pi_{GR}\eta_{RN} + \pi_{GL}\eta_{LN} + \pi_{GJ}\delta = 0; \\ \xi_{RN} - \pi_{RR}^t \xi_{RT} - \pi_{GR}^t \xi_{GT} - \pi_{CR}^t \xi_{CT} - \pi_{ER}^t \varepsilon = 0; \\ \xi_{LN} - \pi_{LL}^t \xi_{LT} - \pi_{RL}^t \xi_{RT} - \pi_{GL}^t \xi_{GT} - \pi_{CL}^t \xi_{CT} - \pi_{EL}^t \varepsilon = 0, \\ \xi_Q - \pi_{LQ}^t \xi_{LT} - \pi_{RQ}^t \xi_{RT} - \pi_{GQ}^t \xi_{GT} - \pi_{CQ}^t \xi_{CT} - \pi_{EQ}^t \varepsilon = 0. \end{array} \right\}$$

Параметры безреактивных компонентов можно вводить, как и ранее, преобразованием столбцов матрицы, соответствующей этой системе уравнений. Параметры реактивных компонентов вводятся в соответствии с компонентными уравнениями:



$$\eta_C = C \frac{d\xi_C}{dt}; \quad \xi_L = L \frac{d\zeta_L}{dt},$$

где C и L — емкости и индуктивности электрических компонентов или их аналоги для компонентов другой физической природы.

Другая система топологических уравнений, соответствующая сокращаемым координатам, используется для удаления из исходной системы (после введения параметров компонентов) зависимых переменных η_{RT} , η_{LN} , ξ_{CN} и ξ_{GN} :

$$\eta_{RT} = -\pi_{RR}\eta_{RN} - \pi_{RL}\eta_{LN} - \pi_{RJ}\vartheta; \quad \eta_{LT} = -\pi_{LL}\eta_{LN} - \pi_{LJ}\vartheta;$$

$$\xi_{GN} = \pi_{GG}'\xi_{GT} + \pi_{C\gamma}'\xi_{CT} + \pi_{E\epsilon}'\epsilon; \quad \xi_{CN} = \pi_{CC}'\xi_{CT} + \pi_{EC}'\epsilon.$$

Зависимые дифференциальные переменные исключаются на основании продифференцированных уравнений для η_{LN} и ξ_{CN} :

$$\frac{d\eta_{LT}}{dt} = -\pi_{LL} \frac{d\eta_{LN}}{dt} - \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi_{CC}' \frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{EC}' \frac{d\epsilon}{dt}.$$

При этом могут появиться производные задающих функций $\vartheta(t)$ и $\epsilon(t)$ источников, для которых отводится необходимое количество столбцов (по числу ненулевых столбцов матриц π_{LJ} и π_{EC}).

Так как зависимые переменные η_{CN} и ξ_{LT} не входят в уравнения для G-сечений и R-контуров, то соответствующие члены можно исключить в соответствии с соотношениями для поперечных переменных:

$$\pi_{SC}\eta_{CN} = \pi_{SC}C_N \frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi_{SC}C_N \pi_{CC}' \frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{SC}C_N \pi_{EC}' \frac{d\epsilon}{dt};$$

$$\eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} = [1 \ \pi_{CC}] \begin{bmatrix} \eta_{CT} \\ \eta_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC}\eta_C =$$

$$= \Pi_{CC}C_N \pi_{CC}' \frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{CC}C_N \pi_{EC}' \frac{d\epsilon}{dt};$$

и для продольных переменных:

$$\xi_{LN} - \pi_{LL}'\xi_{LT} = [-\pi_{LL}' \ 1] \begin{bmatrix} \xi_{LT} \\ \xi_{LN} \end{bmatrix} =$$

$$= P_{LL} \xi_L = P_{LL} L_T \pi_{LL}' \frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi_{LL}' L_T \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\pi_{LQ}'\xi_{LT} = \pi_{LQ}' L_T \frac{d\eta_{LT}}{dt} = \pi_{LQ}' L_T \pi_{LL}' \frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi_{LQ}' L_T \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt},$$

где $\Pi_{CC} = [1 \ \pi_{CC}]$; $P_{LL} = [-\pi_{LL}' \ 1]$; C и L — матрицы параметров реактивных компонентов (при отсутствии индуктивных связей они диагональны), а C_N и L_T — их субматрицы, образованные соответственно из столбцов для C-хорд и L-ветвей дерева. Приведенные



соотношения пригодны и для случаев, когда имеются индуктивные связи.

Процедура формирования уравнений для линейных систем с использованием сокращенного координатного базиса иллюстрируется рис. 5.5.

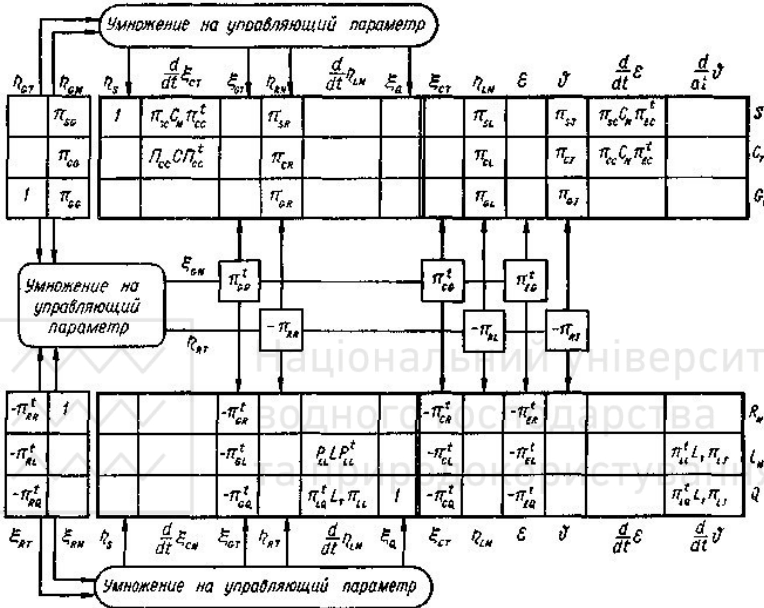


Рис. 5.5. Формирование уравнений линейной системы в сокращенном координатном базисе.

После объединения преобразованных матриц достаточно разделить алгебраические и дифференциальные переменные, применив алгоритм

Гаусса—Жордана по столбцам для η_S , $\frac{d\varepsilon}{dt}$, ε_{CT} , η_{RN} , $\frac{d\eta_{LN}}{dt}$, ε_Q .

В результате квадратная матрица из этих столбцов преобразуется в единичную, а остальная часть преобразованной матрицы содержит необходимую информацию для записи уравнений переменных состояния и выходных уравнений.

Пусть после применения алгоритма Гаусса—Жордана получена матрица:



$$\eta_S \quad \frac{d\varepsilon_{CT}}{dt} \quad \varepsilon_{GT} \quad \eta_{RN} \quad \frac{d\eta_{LN}}{dt} \quad \varepsilon_Q \quad \varepsilon_{CT} \quad \eta_{LN} \quad \varepsilon \quad \vartheta \quad \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \frac{d\eta}{dt}$$

1						W_{SC}	W_{SL}	W_{SE}	W_{SJ}	W'_{SE}	W'_{SJ}
	1					W_{CC}	W_{CL}	W_{CE}	W_{CJ}	W'_{CE}	W'_{CJ}
		1				W_{GC}	W_{GL}	W_{GE}	W_{GJ}	W'_{GE}	W'_{GJ}
			1			W_{RC}	W_{RL}	W_{RE}	W_{RJ}	W'_{RE}	W'_{RJ}
				1		W_{LC}	W_{LI}	W_{LE}	W_{LJ}	W'_{LE}	W'_{LJ}
					1	W_{QC}	W_{QL}	W_{QE}	W_{QJ}	W'_{QE}	W'_{QJ}

Тогда уравнения переменных состояния запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{CC} & W_{CL} \\ W_{LC} & W_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{CE} & W_{CJ} \\ W_{LE} & W_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W'_{CE} & W'_{CJ} \\ W'_{LE} & W'_{LJ} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Выходное уравнение получается из тех строк, которые соответствуют искомым переменным. Если все искомые переменные зафиксированы короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, то оно формируется из соответствующих строк уравнения:

$$\begin{bmatrix} \eta_S \\ \varepsilon_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{SC} & W_{SL} \\ W_{QC} & W_{QI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{SE} & W_{SJ} \\ W_{QE} & W_{QJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W'_{SE} & W'_{SJ} \\ W'_{QE} & W'_{QJ} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.6 изложенный алгоритм иллюстрируется для электрической схемы, которая рассматривалась в (4.7).

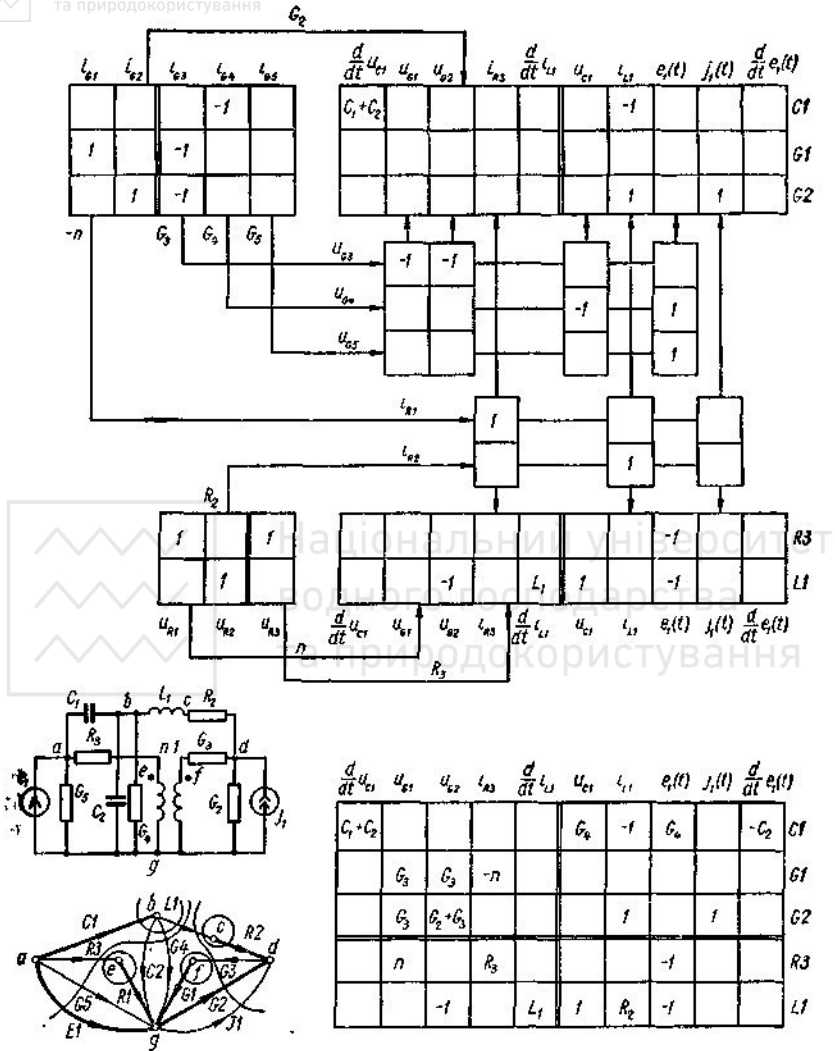


Рис. 5.6. Формирование уравнений электрической схемы.

Нормальное дерево выбрано в соответствии с оптимальным разбиением взаимопределенных дуг. Матрица сечений для хорд имеет вид:



	$C2$	$G3$	$G4$	$G5$	$R3$	$L1$	$J1$	
$\pi =$	1		1	1	1	1		$E1$
	-1		-1			-1		$C1$
		-1						$G1$
		-1				1	1	$G2$
					-1			$R1$
						-1		$R2$

После преобразования полученной матрицы в сокращенном координатном базисе с помощью алгоритма Гаусса—Жордана легко записать уравнения переменных состояния и требуемые выходные уравнения.

5.8. Особенности сокращенного координатного базиса

Главная положительная особенность моделирования систем в сокращенном координатном базисе состоит в том, что топологически зависимые переменные (дифференциальные ξ_{CN} , η_{LT} и алгебраические ξ_{GN} , η_{RT}) исключаются путем алгебраического суммирования столбцов матриц без применения алгоритма Гаусса—Жордана или подобной ему процедуры. При этом ход вычислительного процесса подсказывается самой структурой системы и осуществляется наилучшим образом с учетом всех ее особенностей. Дальнейшее исключение переменных вплоть до получения уравнений переменных состояния и выходных уравнений проводится на матрице минимальных размеров, благодаря чему уменьшается опасность накопления ошибок вычислений за счет неудачного выбора опорных элементов. Разумеется, существенно снижается и общий объем вычислительной работы. Даже в таком простом примере, как на рис. 5.6, порядок матрицы, которую требовалось преобразовать к единичной, уменьшился вдвое по сравнению с полученной в (4.7).



При реализации изложенного алгоритма в сокращенном координатном базисе на вычислительных машинах достигается предельно возможная экономия оперативной памяти. Для матрицы схемы отводится требуемый массив памяти, а столбцы для переменных η_G и ξ_R (рис. 5.5) могут вызываться поочередно по мере введения параметров компонентов. Размеры матрицы схемы и каждого из ее блоков известны уже после формирования дерева, и поэтому при программировании можно воспользоваться динамическим распределением делением памяти, отводя в каждом случае для этой матрицы столько ячеек, сколько требуется в соответствии с характером решаемой задачи.

Благодаря тому, что нормальное дерево формируется с преимуществом короткозамкнутых дуг перед емкостными и индуктивными дуг перед разомкнутыми, в сокращенном координатном базисе отсутствуют топологически зависимые дифференциальные переменные даже в тех случаях, когда имеются особые контуры с короткозамкнутыми дугами и особые сечения с разомкнутыми дугами.

Например, для схемы рис. 4.8, рассмотренной в (4.11), нормальное дерево показано на рис. 5.7 (по условию оптимального разбиения все резисторы представляются G-дугами).

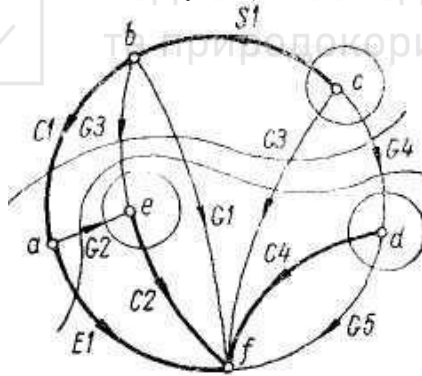


Рис. 5.7. Нормальное дерево графа схемы с особым контуром, содержащим короткозамкнутую дугу.

Так как в дерево не вошла дуга $C3$, то ее напряжение u_{C3} заведомо будет отсутствовать в уравнениях схемы и при формировании математической модели не потребуется ее исключение (при $n = 2$ будет иметь место компонентная зависимость переменных, которая исключается по изложенному ранее способу).



Изложенный алгоритм (см. рис. 5.5) построен при некоторых ограничениях на характер управляющих дуг. Кроме короткозамкнутых и разомкнутых дуг, ими могут быть только безреактивные дуги полюсных графов компонентов, причем G -дуги не должны управлять по поперечной величине (току), а R -дуги — по продольной величине (напряжению). Это весьма слабое ограничение, так как в любом случае можно ввести необходимое количество управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг. Кроме того, чаще всего управляющими являются взаимоопределенные дуги и их можно отнести к R -дугам, если они управляют по поперечной величине, или к G -дугам, если они управляют по продольной величине.

5.9. Обобщенная процедура

Обобщим изложенную процедуру формирования уравнений переменных состояния на нелинейные системы, сняв одновременно ограничения на характер управляющих дуг. При этом воспользуемся обозначениями и терминами электрических величин, распространяя полученные результаты на другие физические системы по аналогии. При формировании фундаментального дерева, определяющего систему координат, дуги нелинейных двухполюсников распределяются между деревом и дополнением следующим образом: дуги управляемых током двухполюсников помещаются в дерево (после C -дуг), а управляемых напряжением — в дополнение (перед L -дугами). Взаимоопределенные дуги распределяются между деревом и дополнением произвольно. При этом матрица сечений имеет вид:



	I	S	C_T	H_T	G_T	R_T	L_T	C_N	G_N	R_N	H_N	L_N	e	i	
$\Pi =$	1							π_{LC}	π_{EG}	π_{EP}	π_{EH}	π_{EI}	π_{EQ}	π_{EI}	E
		1						π_{SI}	π_{SG}	π_{SR}	π_{SH}	π_{SI}	π_{SQ}	π_{SI}	S
			1					π_{CC}	π_{CG}	π_{CR}	π_{CH}	π_{CI}	π_{CQ}	π_{CI}	C_T
				1					π_{HG}	π_{HR}	π_{HH}	π_{HL}	π_{HQ}	π_{HI}	H_T
					1			π_{GG}	π_{GR}	π_{GH}	π_{GI}	π_{GQ}	π_{GI}		G_T
						1			π_{RR}	π_{RH}	π_{RL}	π_{RQ}	π_{RI}		R_T
							1					π_{LI}	π_{LQ}	π_{LI}	L_T

Для исключения топологически зависимых алгебраических переменных наряду с соотношениями

$$u_{CN} = \pi_{CC}^t u_{CT} + \pi_{EC}^t e(t); \quad i_{LT} = -\pi_{LL}^t i_{LN} - \pi_{LJ}^t j(t),$$

используются соотношения:

$$u_{GH} = \pi_{GG}^t u_{GT} + \pi_{HG}^t u_{HI} + \pi_{CG}^t u_{CT} + \pi_{EG}^t e(t);$$

$$i_{RT} = -\pi_{RR}^t i_{RN} - \pi_{RH}^t i_{HN} - \pi_{RI}^t i_{LN} - \pi_{RJ}^t j(t).$$

Обобщенная процедура формирования уравнений нелинейной системы в сокращенном координатном базисе показана на рис. 5.8.

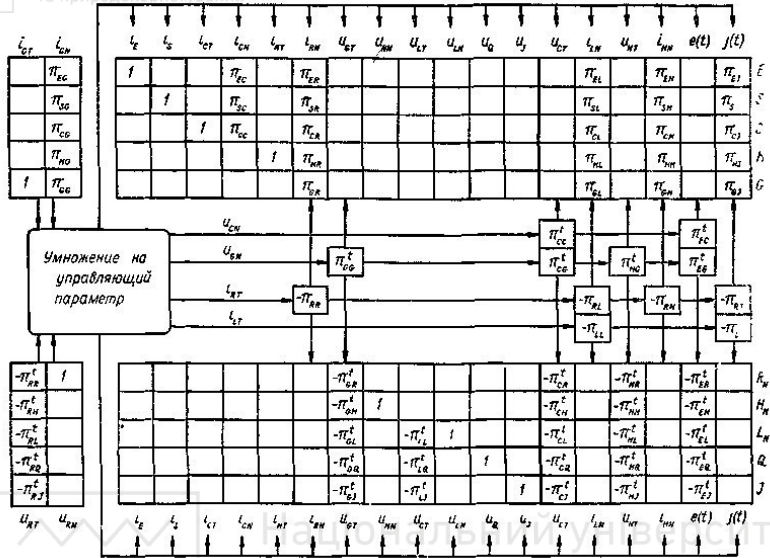


Рис. 5.8. Обобщенная процедура формирования математической модели в сокращенном координатном базисе.

На этом этапе вводятся параметры только безреактивных компонентов, представленных G-дугами и R-дугами. Управляющей может быть любая дуга, в том числе и дуги источников. Единственное ограничение на характер управляющих дуг состоит в том, что G-дуги не должны управлять по току, а R-дуги — по напряжению. Это ограничение не существенно для резисторов, так как управляющие по току резисторы можно всегда представить как R-дуги, а управляющие по напряжению резисторы — как G-дуги (при этом такие резисторы исключаются из множества взаимопределенных w-дуг и не подлежат оптимальному разбиению).

Управляемые G-дуги зависимых источников тока могут управлять другими источниками только по напряжению, а управляемые R-дуги зависимых источников напряжения — только по току. Таким образом, остается наложить запрет на управление G-дугами зависимых источников тока по току и R-дугами зависимых источников напряжения — по напряжению. Если такая ситуация все же имеет место, то она легко устраняется на этапе подготовки данных путем преобразования управляющих параметров. Пусть, например, зависимый источник тока, управляемый напряжением u_j , некоторого двухполюсника и описываемый уравнением $i_k = gu_j$, сам управляет по



току источником напряжения. Тогда последний можно представить уравнением $u_s = ri_k = rgi_j = tu_i$, и считать, что он также управляется напряжением u_j , двухполюсника с управляющим параметром $m = rg$. Аналогично преобразуются управляющие параметры и в других подобных случаях.

Излагаемая процедура формирования уравнений допускает управление зависимыми источниками и со стороны независимых источников как по току, так и по напряжению. Однако если независимые источники напряжения не управляют по току, а независимые источники тока — по напряжению, то переменные i_E и u_J можно исключить из системы уравнений путем удаления соответствующих им столбцов и строк. Это обусловлено тем, что в столбцах для таких переменных имеется единственный ненулевой элемент (единица), расположенный в исключаемой строке.

5.10. Введение реактивных параметров

После введения параметров безреактивных двухполюсников по процедуре, представленной на рис. 5.8, получаем матричное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \Lambda_E i_E + \Lambda_S i_S + \Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} + \Lambda_{HT} i_{HT} + \Lambda_{RN} i_{RN} + \Lambda_{GT} i_{GT} + \\ & + \Lambda'_{HN} u_{HN} + \Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} + \Lambda'_{Q} u_Q + \Lambda'_{J} u_J + \Lambda'_{CT} u_{CT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} + \\ & + \Lambda'_{HT} u_{HT} + \Lambda_{HN} i_{HN} + \Lambda_E e(t) + \Lambda_J j(t) = 0. \end{aligned}$$

Реактивные параметры вводятся в соответствии с соотношениями для емкостей:

$$i_{CT} = C_T \frac{du_{CT}}{dt};$$

$$i_{CN} = C_N \frac{du_{CN}}{dt} = C_N \frac{d}{dt} (\pi_{CC}^t u_{CT} + \pi_{EC}^t e) = C_N \pi_{CC}^t \frac{du_{CT}}{dt} + C_N \pi_{EC}^t \frac{de}{dt}$$

и для индуктивностей

$$u_{LT} = L_T \frac{di_{LT}}{dt} = L_T \frac{d}{dt} (-\pi_{LL}^t i_{LN} - \pi_{LJ}^t j) = -L_T \pi_{LL}^t \frac{di_{LN}}{dt} - L_T \pi_{LJ}^t \frac{dj}{dt};$$

$$u_{LN} = L_N \frac{di_{LN}}{dt}.$$

Здесь C_T и C_N — матрицы емкостей; L_T и L_N — матрицы индуктивностей реактивных дуг фундаментального дерева и дополнения. С учетом приведенных соотношений слагаемые для реактивных переменных преобразуются следующим образом:



$$\Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} = (\Lambda_{CT} C_T + \Lambda_{CN} C_N \pi_{CC}^t) \frac{du_{CT}}{dt} + \Lambda_{CN} C_N \pi_{EC}^t \frac{de}{dt};$$

$$\Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} = (\Lambda'_{LN} L_N - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LL}) \frac{di_{LN}}{dt} - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LJ} \frac{dj}{dt}.$$

Появление производных задающих напряжений $e(t)$ и токов $j(t)$ обусловлено наличием особых контуров и сечений, что индицируется ненулевыми субматрицами π_{EC} и π_{LL} .

Матрицы C_T и C_N диагональные, а при отсутствии индуктивных связей диагональными являются также матрицы L_T и L_N . Поэтому реактивные параметры можно ввести по схеме, приведенной на рис. 5.9.

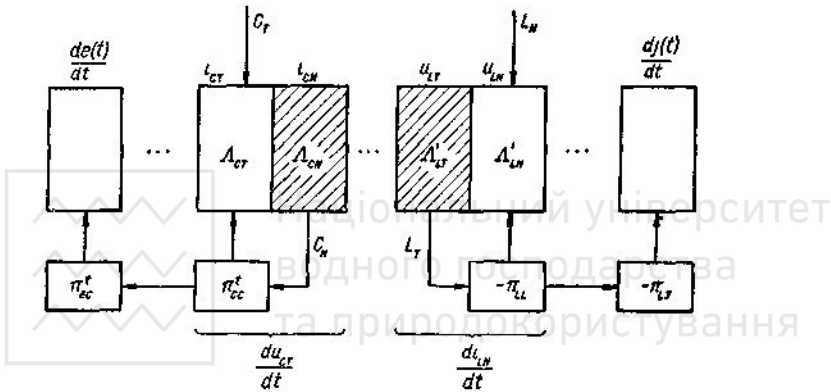


Рис. 5.9. Введение параметров реактивных компонентов.

Столбцы для токов емкостных дуг умножаются на соответствующие емкости, после чего столбцы для емкостных хорд суммируются со столбцами для емкостных ветвей дерева в соответствии с субматрицей π_{CC}^t . В результате получаем столбцы для производных напряжений емкостных ветвей дерева. Столбцы для производных независимых источников напряжения получаются в соответствии с оператором, которым служит субматрица π_{EC}^t . Аналогично вводятся и параметры индуктивных двухполюсников.

Если между двухполюсниками дерева и дополнения имеются индуктивные связи, то необходимо исходить из соотношения

$$\begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} = L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix},$$

где L — матрица, элементами которой являются собственные и взаимные индуктивности.



Тогда члены полученного ранее матричного уравнения, которые содержат напряжения на индуктивностях, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] \begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} = \\ &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} i \\ i_{LN} \end{bmatrix} = \\ &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \begin{bmatrix} -\pi_{LL} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{di_{LN}}{dt} - [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \begin{bmatrix} -\pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

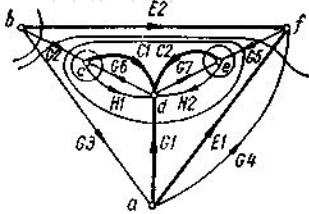
5.11. Разделение переменных

Формирование математической модели в пространстве переменных состояния завершается разделением переменных. Эта процедура сводится по существу к решению уравнений в сокращенном координатном базисе относительно производных переменных состояния u_{CT} и i_{LN} , переменных нелинейных компонентов i_{HT} и u_{HN} , а также токов i_E , i_S , i_{RN} и напряжений u_J , u_Q , u_{GT} .

Если параметры реактивных компонентов постоянны, то для разделения переменных можно использовать алгоритм Гаусса — Жордана по соответствующим столбцам. В результате, получаем уравнения переменных состояния вместе с присоединенными к ним нелинейными и выходными уравнениями.

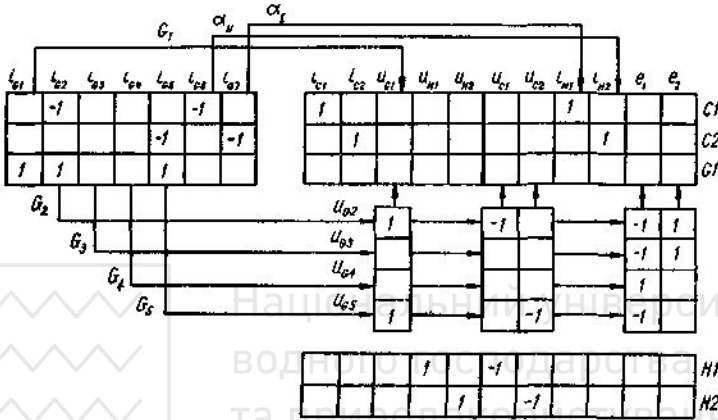
Если физическая система содержит нелинейные или параметрические реактивные компоненты, то целесообразно из ее уравнений, полученных с помощью обобщенной процедуры (см. рис. 5.8), исключить алгебраические переменные i_E , i_{RN} , u_{GT} , u_J , а также те переменные из i_S и u_Q , которые не являются выходными величинами. После этого на каждом шаге интегрирования вводятся реактивные параметры и полученные уравнения решаются методами неявного интегрирования или преобразуются к уравнениям переменных состояния.

На рис. 5.10. показано применение обобщенной процедуры формирования уравнений в сокращенном координатном базисе для транзисторного усилителя, рассмотренного в (4.8).



$$\pi =$$

	G2	G3	G4	G5	G6	G7	H1	H2	
E1	-1	-1	1	-1					
E2	1	1							
C1	-1				-1		1		
C2				-1	-1		1		
G1			1						



	i_{c1}	i_{c2}	u_{c1}	u_{m1}	u_{m2}	u_{c1}	u_{c2}	l_{m1}	l_{m2}	e_1	e_2	
C1	1		$-G_2$			G_2		1	$-\alpha_m$	G_2	$-G_2$	
C2		1	$-G_3$			G_3	$-\alpha_1$	1	G_3			
G1			$G_1 + G_2 + G_3$			$-G_2$	$-G_3$		$-G_2 - G_3$	G_2		
H1				1		-1						
H2					1		-1					

	$\frac{du_m}{dt}$	$\frac{du_{c1}}{dt}$	u_{m1}	u_{m2}	u_{c1}	u_{c2}	l_{m1}	l_{m2}	e_1	e_2	
C1					$\frac{G_2}{G}(G_1 + G_3)$	$-\frac{G_2 G_3}{G}$	1	$-\alpha_m$	$-\frac{G_1 G_2}{G}$	$\frac{G_3}{G}(G_1 + G_3)$	C1
C2					$-\frac{G_1 G_3}{G}$	$\frac{G_3}{G}(G_1 + G_2)$	$-\alpha_1$	1	$\frac{G_1 G_3}{G}$	$\frac{G_2 G_3}{G}$	C2
G1			1		$-\frac{G_2}{G}$	$-\frac{G_3}{G}$			$-\frac{G_2 + G_3}{G}$	$\frac{G_2}{G}$	G1
H1				1	-1						H1
H2					-1						H2

Рис. 5.10. Формирование уравнений транзисторного усилителя в сокращенном координатном базисе.



По условию оптимального разбиения все линейные резисторы представлены G -дугами, причем для них приняты другие обозначения по сравнению с теми, которые приведены в (4.8): дуги $X3, X4, X5, X6, X7$ обозначены соответственно через $G5, G2, G3, G1, G4$, а их проводимости — через G_5, G_2, G_3, G_1, G_4 . Зависимые источники тока представлены дугами $G6$ и $G7$, которые ранее были обозначены через $X8$ и $X9$. На основе полученной матрицы математическая модель в пространстве переменных состояния записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_2}{C_1 G} (G_1 + G_5) & \frac{G_2 G_5}{C_1 G} \\ \frac{G_2 G_5}{C_2 G} & -\frac{G_5}{C_2 G} (G_1 + G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{\alpha_N}{C_1} \\ \alpha_1 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{G_1 G_2}{C_1 G} & \frac{G_2}{C_1 G} (G_1 + G_5) \\ -\frac{G_1 G_5}{C_2 G} & -\frac{G_2 G_5}{C_2 G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{H1} \\ u_{H2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}.$$


5.12. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

- Покажите, что матрица W в сокращенном координатном базисе для систем, состоящих только из двухполюсных компонентов, всегда кососимметрична.
- Выведите из уравнения $WX = QP$ в сокращенном координатном базисе уравнения в однородных системах координат, как частные случаи, когда граф системы содержит только:
 - y -дуги, управляемые продольными величинами;
 - z -дуги, управляемые поперечными величинами.
- Определите количество сокращаемых координат, и для графа на рис.5.1, a при следующих разбиениях взаимоопределепных дуг:
 - y -дуги — 1, 2, 3, 9; z -дуги — 4, 5, 14.
 - y -дуги — 1, 4, 9; z -дуги — 2, 3, 5, 14.
 Сравните результаты со значением μ полученным при оптимальном разбиении взаимоопределенных дуг.
- Из уравнений для гидромеханической системы в неоднородном координатном базисе, полученных в (4.3), выразите переменные x_4, f_8 и сравните с уравнениями в сокращенной системе координат (5.5).



5. Сформируйте уравнение в сокращенном координатном базисе для механической системы (см. рис. 2.11, *a*).
6. Для электрической схемы (см. рис. 4.5, *a*) выполните оптимальное разбиение взаимопределенных дуг и сравните выбор дерева, определяющего неоднородный (рис. 4.5, *b*) и сокращенный (рис. 5.6) координатный базис. Объясните различие между этими деревьями.
7. Покажите, что матрица электрической схемы (рис. 4.5, *a*) в сокращенном координатном базисе (рис. 5.6) при заданных численных значениях параметров (в новых обозначениях $G_2 = G_3 = 1$; $G_4 = G_5 = 0,5$; $R_1 = 1$; $R_2 = 2$; $n = 2$) приводится к виду:

$\frac{du_{C1}}{dt}$	u_{G1}	u_{G2}	i_{R3}	$\frac{di_{L1}}{dt}$	u_{C1}	i_{L1}	$e_1(t)$	$j_1(t)$	$\frac{de_1(t)}{dt}$
1					5	-10	-5		0,5
	1					-0,2	-0,4	-0,2	
		1				0,6	-0,2	0,6	
			1			0,2	-0,1	0,2	
				1	5	8	-4	3	

Запишите уравнения переменных состояния и выходные уравнения, если искомыми величинами являются u_{G2} и i_{R1} .

8. Дайте полное обоснование всех операций алгоритма формирования уравнений переменных состояния в сокращенном координатном базисе (см. рис. 5.5) на основе топологических и компонентных уравнений.
9. Сформируйте уравнения в сокращенном координатном базисе для электрической схемы (см. рис. 5.6) без использования матриц, для чего:
 - а) составьте уравнения по законам Кирхгофа для несокращающихся сечений и контуров;
 - б) подставьте в полученные соотношения выражения для переменных из полюсных уравнений;
 - в) выразите все переменные через продольные величины u -ветвей дерева и поперечные величины z -хорд и подставьте их в уравнения, полученные в предыдущем пункте;
 - г) запишите полученную систему уравнений в матричной форме и сравните результат с приведенным на рис. 5.6.
10. Покажите, что в графе (рис. 5.4) по условию оптимального разбиения все резисторы должны быть представлены G -дугами.



Какие варианты нормальных деревьев, кроме представленного на рис. 5.7, возможны? Какое число координат сокращается?

11. Сформируйте уравнения переменных состояния для схемы (см. рис. 4.8, а) с помощью сокращенной системы координат, определяемой нормальным деревом (рис. 5.7), выполнив все процедуры в соответствии с рис. 5.5.

12. Постройте процедуру формирования уравнений в сокращенном координатном базисе для линейных систем как частный случай, приведенный на рис. 5.8, и дополните ее вплоть до получения уравнений переменных состояния и выходных уравнений.

6. Блочные группы как средство описания графов

6.1. Понятия блочных групп и операции над ними

Пусть \mathcal{X} — подмножество абстрактного пространства \mathcal{Z} .

Элементы множества \mathcal{X} обозначим

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \dots \in \mathcal{X}$$

Рассмотрим систему элементов в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1} & \alpha_{m_2} & \dots & \alpha_{m_n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Будем рассматривать эту систему как совокупность столбцов a_k , т. е.

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_k \}. \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j). \quad (2)$$

(Столбцы a_k в свою очередь представляют собой неупорядоченные множества элементов α_{ik}

$$a_k = \{ \alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{m_k k} \}, \quad \alpha_{ik} \neq \alpha_{jk}, \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Столбцы будем считать равными, если они содержат одинаковые элементы. Положим по определению, что система (1) не



содержит одинаковых столбцов. Систему типа (1) будем рассматривать как элемент новой алгебры — алгебры блочных групп. Согласно определениям абстрактной алгебры, алгебру блочных групп можно отнести к категории операторных алгебр, т. е. ее можно характеризовать упорядоченной тройкой

$$\langle E, \Omega, e \rangle,$$

где E — носитель алгебры (в нашем случае семейство множеств); Ω — двухэлементное множество операторов ω_1, ω_2 , определяющих сумму и произведение; e — результат, т. е. функция, которая выражению $A\omega B$ ставит в соответствие элемент $C \in E$, являющийся результатом действия.

Введем вспомогательное понятие, которое используем при определении блочной группы.

Рассмотрим последовательность элементов x_i , необязательно различных:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \rangle. \quad (4)$$

Обозначим через $r(x_k)$ — число одинаковых элементов последовательности (4).

Блочной группой будем называть систему элементов α_{ik} вида (1) [с учетом (2) и (3)], удовлетворяющая следующим определениям.

Определение 1. Две блочные группы считаются равными ($A = B$) тогда и только тогда, когда $(a \in A) \Leftrightarrow (a \in B)$ или

$$A = B \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B). \quad (5)$$

Определение 2. Суммой блочных групп A и B называется блочная группа

$$C = \{x | (x \in A) \vee (x \in B), x \notin A \cap B\} = A \underline{\Delta} B; \quad (6)$$

в этом случае можно написать $C = A + B$.

Выражение $A \underline{\Delta} B$ в формуле (6) означает симметрическую разность множеств A и B .

Определение 3. Произведением блочных групп A и B называется блочная группа

$C = \{a \cup b | a \cap b = \emptyset, r(a \cup b) \in \{1, 2, \dots\}, a \in A, b \in B\}$, (7) которое записывается в виде $C = AB$.

В соответствии с определением суммы при сложении блочных групп опускаются столбцы, одновременно присутствующие в обоих блочных группах A и B , а в соответствии с определением произведения при умножении блочных групп A и B опускаются те столбцы $a \cup b$, в которых какой-либо элемент повторяется, т. е. для которых $a \cap b \neq \emptyset$.



Можно заметить, что равенство блочных групп представляет собой отношение эквивалентности, т. е. является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Далее будут приведены примеры действий с блочными группами, элементы которых $a_{ik} \in X$ представляют собой натуральные числа (этот случай имеет большое значение для применения алгебры блочных групп), а также даны словесные формулировки действий с блочными групп, которые менее точны, чем вышеприведенные, однако более понятны для читателей.

Пример 1. Равенство блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Две блочные группы равны, если содержат идентичные столбцы, независимо от порядка элементов в столбцах и порядка столбцов.

Пример 2. Сложение блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Суммой двух блочных групп A и B называется блочная группа, содержащая все столбцы чисел A и B , за исключением идентичных столбцов, и не содержащее других столбцов.

Пример 3. Умножение блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Произведением двух блочных групп A и B называется блочная группа, столбцы которой представляют собой суммы (согласно понятиям теории множеств) всех возможных комбинаций столбцов A и B , за исключением наибольшего четного числа идентичных столбцов и таких столбцов, в которых какой-либо элемент повторяется (произведение других столбцов не содержит).

Из определения суммы и произведения блочных групп следует, что эти операции всегда можно выполнить на множестве этих блочных групп. Из тех же определений можно сделать вывод,



что сложение и умножение блочных групп коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения. Для трех произвольных блочных групп имеют место следующие соотношения, подобные тем, которые справедливы для элементарной алгебры:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ AB &= BA, \\ A(BC) &= (AB)C, \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем различать блочную группу $[\emptyset]$, содержащую один столбец, который является пустым множеством \emptyset , и блочную группу $[\]$, не содержащую ни одного столбца. Заметим, что блочная группа $[\]$ служит модулем суммирования и для произвольной блочной группы A выполняется равенство

$$A + [\] = A,$$

поэтому блочную группу $[\]$ будем обозначать символом 0 , записывая ее в виде

$$[\] = 0. \quad (9)$$

Блочная группа $[\emptyset]$ в свою очередь есть модуль умножения, так как

$$A [\emptyset] = A, \quad (10)$$

поэтому блочную группу $[\emptyset]$ обозначим символом 1 , записав

$$[\emptyset] = 1. \quad (11)$$

Для любой A имеет место соотношение

$$A [\] = [\].$$

Рассмотрим блочную группу вида

$$A = \{\emptyset, a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}, \quad (12)$$

т. е. блочную группу, содержащую один пустой столбец.

Легко заметить, что для такой блочной группы справедливо равенство

$$AA = 1.$$

Для блочных групп, не содержащих пустого столбца,

$$AA = 0.$$

Если множество блочных групп вида (12) обозначить как \mathcal{A} , а множество всех остальных блочных групп — как \mathcal{B} , то можно написать

$$(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow AA = 1,$$

$$(A \in \mathcal{B}) \Rightarrow AA = 0. \quad (13)$$

Следовательно, как легко заметить, что для произвольной блочной группы



$$\underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ раз}} = \begin{cases} A & \text{при нечетном числе слагаемых } n, \\ 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (13a)$$

Таким образом,

$$A + A = 0. \quad (13b)$$

Из соотношения (13) следует, что равенство $AB = 0$

не требует в общем случае равенств $A = 0$ или $B = 0$, т. е. множество блочных групп содержит делители нуля. Пару блочных групп, для которой выполняется равенство $AB = 0$, назовем *особой парой*.

Пример 4. Особую пару представляют собой следующие блочные группы A и B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{так как} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$

Блочная группа $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = 0$ в сочетании с любой блочной группой дает особую пару.

Обобщая изложенные свойства блочных групп, можно сформулировать следующие утверждения.

Утверждение 1. Множество блочных групп, на котором определены операции сложения и умножения, образует коммутативное кольцо. Это кольцо обычно содержит делители нуля.

Из определения суммы и произведения следуют соотношения, справедливые для любой блочной группы:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m_k k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m_k k} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m_k} \alpha_{ik} = \prod_{i=1}^{m_k} s_{\alpha_{ik}}, \quad (14)$$

где $s_{i_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_k} \end{bmatrix}$ — одноэлементная блочная группа.



Утверждение 2. Блочную группу A всегда можно представить в виде

$$A = \sum_k \prod_i s_{\alpha_{ik}}, \quad (15)$$

где $s_{\alpha_{ik}} = [\alpha_{ik}]$.

Отметим, что выражение (15) в алгебре блочных групп играет роль, аналогичную выражению $z = a + ib$ в теории функций комплексного переменного, с помощью которой можно записать любое комплексное число $z = \langle a, b \rangle$.

Блочную группу $s_{\alpha_{ik}} = [\alpha_{ik}]$ будем называть *структурной единицей*, которая служит аналогом действительной или мнимой единицы в области комплексных чисел.

Рассмотрим две произвольные блочные группы A и B . Из определения равенства и суммы блочных групп следует, что существует только одна блочная группа, удовлетворяющая равенству

$$B + X = A, \quad (16)$$

которую вследствие коммутативности суммирования блочных групп можно переписать как

$$X + B = A. \quad (16a)$$

Блочную группу X , удовлетворяющую равенствам (16) и (16a), будем называть *разностью* блочных групп A и B :

$$X = A - B.$$

Действие нахождения разности блочных групп будем называть вычитанием. Легко заметить, что разность блочных групп A и B есть блочная группа $X = A - B$. Действительно, подставляя в выражение (16) $X = A - B$, получаем уравнение

$$B + (A - B) = A,$$

которое в соответствии с (16) представляет собой тождество. Таким образом, получаем обоснованное соотношение

$$A - B = A + B, \quad (17)$$

которое в случае $A = 0$ записывается в виде

$$-B = B. \quad (18)$$

Из сказанного следует, что на множестве блочных групп вычитание всегда можно заменить сложением. Вычитание, следовательно, определено однозначно и всегда, выполнимо, поэтому множество блочных групп замкнуто по отношению к суммированию и вычитанию.

Подводя итог рассмотренным свойствам блочных групп, можно заключить, что кольцо блочных групп 1) не содержит степеней и



2) не содержит коэффициентов (кроме 0 и 1); а 3) сложение идентично вычитанию.

6.2. Свойства блочных групп

6.2.1. Делители нуля

Пусть \mathbf{A}^* — множество блочных групп X , удовлетворяющее уравнению

$$AX = 0,$$

где A — некоторая блочная группа, и пусть A^* — элементы этого множества. Тогда

$$AX = 0 \Rightarrow X = A^*_i \in \mathbf{A}^*. \quad (19)$$

Блочные группы $A^* \in \mathbf{A}^*$, удовлетворяющие уравнению $AX = 0$, называются сопряженными по отношению к A или *делителями нуля*.

Следствие. Если две блочные группы X_1 и X_2 удовлетворяют равенству $AX = 0$, то такому же равенству удовлетворяет их линейная комбинация $C_1X_1 + C_2X_2$, а также произведение CX_1X_2 , где C_1, C_2, C — произвольные блочные группы, включая 0 и 1. Тогда

$$X_1, X_2 \in \mathbf{A}^* \Rightarrow C_1X_1 + C_2X_2 \in \mathbf{A}^*; CX_1X_2 \in \mathbf{A}^*. \quad (20)$$

Полагая в выражении (20) $C_1 = C_2 = C = 1$, приходим к выводу, что к \mathbf{A}^* относятся сумма $X_1 + X_2$ и произведение X_1X_2 блочных групп X_1 и X_2 , удовлетворяющих уравнению $AX = 0$.

Множество \mathbf{A}^* решений уравнения $AX = 0$ можно в общем случае определить с помощью выражения, записанного в символах математической логики:

$$(AX = 0) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, x \in X \{[a \cap x \neq \emptyset] \vee [r(a \cup x) \in \{0, 2, \dots\}]\}. \quad (21)$$

Свойство (21) следует непосредственно из определения произведения блочных групп.

6.2.2. Делимость блочных групп

Если для двух блочных групп A и B существует такая блочная группа X , что

$$A = XB, \quad (22)$$

то A делится на B , или B — делитель блочной группы A , т. е.

$$B \mid A \text{ и } A \neq 0. \quad (23)$$



Каждая блочная группа $A \neq 1$ и $A \neq 0$ имеет самое малое два делителя, а именно 1 и A ; блочная группа 1 , в свою очередь, имеет лишь один кратный делитель.

Блочные группы $A \not\equiv \emptyset$, содержащие только один делитель A , называются простыми блочными группами; любая другая блочная группа называется сложной. Каждый делитель, представляющий собой однострочную блочную группу, называется основным делителем.

Утверждение 3. Блочная группа B представляет собой делитель блочной группы A тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $AB = 0$;
- 2) все столбцы блочной группы A являются подмножествами некоторых столбцов блочной группы B .

Доказательство. Если блочная группа B есть делитель блочной группы A , то существует такая X , что

$$BX = A.$$

Но это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все столбцы блочной группы A представляют собой подмножества некоторых столбцов блочной группы B , а B — элемент, сопряженный с A . Следовательно,

$$B|A \Leftrightarrow (AB=0) \wedge [\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (a_k \supset b_k)], \quad (24)$$

Заметим, что деление, определенное на множестве блочных групп, обладает свойством

$$A|B \quad \text{и} \quad B|C \Rightarrow A|C. \quad (25)$$

Деление также представляет собой слабо симметричное отношение, т. е. $(A|B \text{ и } B|A) \Rightarrow A = B$, что вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 4. Если блочная группа B — делитель блочной группы A , а блочная группа A — делитель B , то $A = B$.

Доказательство. Положим, что одновременно имеет место

$$B|A \quad \text{и} \quad A|B.$$

Из утверждения 3 следует, что тогда могут быть одновременно выполнены условия

$$\{\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (a_k \supset b_k)\} \wedge \{\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (b_k \supset a_k)\}$$

что может иметь место только при $A = B$.

Для блочных групп имеет место правило сокращения, т. е. если $CA = CB$, то $A = B$. Это положение можно обосновать.



Утверждение 5. Уравнение $AB = AX$ имеет общее решение на множестве блочных групп

$$X = B + A^*,$$

где A^* — произвольный сопряженный элемент A . Тогда

$$(AB = AX) \Leftrightarrow (X = B + A^*; A^* \in \mathbf{A}^*). \quad (26)$$

Доказательство. Из уравнения $AB = AX$ следует, что $A(B+X) = 0$ и $B + X$ — блочная группа, сопряженная с A , а соответственно и $X=B+A^*$, где A^* — произвольный элемент множества решений уравнения $AX=0$. Подставляя число $X=B+A^*$ в уравнение $AB=AX$, убеждаемся, что это число действительно удовлетворяет данному уравнению.

Утверждение 6. Каждая сложная блочная группа имеет по крайней мере один делитель, представляющий собой простую блочную группу, не равную единице.

Доказательство. В соответствии с определением сложной блочной группы блочная группа A имеет делители, отличные от 1 и A . Положим в таком случае, что B — один из этих делителей, т. е.

$$A = X_0 B, \quad X_0 \neq 1, \quad B \neq 1. \quad (27)$$

Если B — непростая блочная группа, то ее можно представить как

$$B = X_1 B_1. \quad \text{При этом получим}$$

$$A = B_1 X_0 X_1 X_2 \dots X_l. \quad (28)$$

Но для $A \neq 0$ должно выполняться неравенство

$$l \leq m_A, \quad (29)$$

где m_A — число элементов в столбце блочной группы A , содержащем наименьшее количество элементов. Множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots, l\}$ имеет наибольший элемент l_{\max} , поэтому $B_{l_{\max}}$ есть простой делитель блочной группы A . Для $A = 0$ неравенство (29) не должно выполняться, но, согласно изложенному, из произвольного делителя блочной группы A (сложной, ненулевой) можно извлечь простой делитель, что и доказывает утверждение 6.

Утверждение 7. Каждая блочная группа представляет собой простую блочную группу или произведение простых блочных групп.

Правильность этого положения следует из утверждения 6. Действительно, если блочную группу A можно представить в виде (28) с простым делителем B_l , то на простые делители можно разложить каждый дополнительный делитель $X_0, X_1, X_2, \dots, X_l$. Тогда блочную группу можно всегда представить в виде произведения простых блочных групп

$$A = P_1 P_2 \dots P_r. \quad (30)$$



В случае, когда A сама будет простой блочной группой (не равной единице), произведение сводится к одному сомножителю. Разложение блочной группы A на простые блочные группы запишем тогда в следующем виде:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{array} \Bigg| A \quad (31)$$

Заметим, что блочные группы имеют следующие свойства:

1. Любая блочная группа, состоящая из разных (неповторяющихся) элементов и содержащая более одного столбца, есть простая блочная группа.
3. Каждая блочная группа, состоящая из одной строки, простая.
3. Каждая блочная группа, состоящее из одного столбца, сложная ($n > 1$).
4. Сумма простых блочных групп может быть сложной блочной группой, сумма сложных блочных групп может быть простой блочной группой.

Пример 5.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix} + [\alpha_1] = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = [\alpha][\beta_1 \beta_2],$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

В данном примере, суммируя вначале две простые блочные группы, получаем сложную блочную группу; затем, суммируя сложную блочную группу, получаем простую блочную группу. Следствием второго свойства блочных групп является то, что множество простых блочных групп бесконечно, если бесконечно множество X , из которого взяты элементы блочных групп. Разложение блочных групп на простые имеет специфические особенности, отличные, например, от особенностей разложения в области натуральных чисел. Одна из этих особенностей рассматривается в следующем утверждении.



Утверждение 8. Каждая сложная блочная группа имеет бесконечное множество способов разложения на простые блочные группы.

Доказательство. Положим, что $A = P_1 P_2 \dots P_r$. Легко заметить, что величина этого произведения не изменится, если любую из блочных групп P_i дополнить столбцами, содержащими некоторые элементы всех столбцов одного из оставшихся сомножителей.

Так как число таких возможных дополнений бесконечно, то каждая сложная блочная группа может быть разложена на простые бесконечно большим числом способов.

Пример 6.

$$[1] [2] = [1] [2 \ 1] = [1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = [1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix} = \dots$$

Рассмотрим свойства блочных групп с одинаковым числом элементов в строках и одинаковым числом элементов в столбцах, которые представляют наибольший интерес для применения алгебры блочных групп в анализе и синтезе систем.

Определение 4. Разложение блочной группы с одинаковым числом элементов в строках на простые блочные группы также с одинаковым числом элементов в строках, содержащих только элементы блочной группы A , называется *каноническим разложением*.

Очевидно, что каждая сложная блочная группа с равным числом элементов в строках имеет конечное число канонических разложений. Это имеет большое практическое значение, например, в случае применения алгебры блочных групп к синтезу структур.

Утверждение 9. Если блочная группа с одинаковым числом элементов в строках $A \neq 0$ (с m строками) имеет каноническое разложение

$$A = \prod_{i=1}^m P_i, \quad (32)$$

то все остальные канонические разложения блочной группы A на простые однострочные блочные группы имеют вид

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad (33)$$

где числа ε_{ij} принимают только значения 0 или 1.

Доказательство. Положим, существует разложение



$$A = \prod_{j=1}^m P'_j,$$

отличное от (32). Тогда, перемножая A и любое P'_j , получим

$$AP'_j = P'_j \prod_{i=1}^m P_i = 0.$$

Далее, $P'_j = (P_1 P_2 \dots P_m)^*_{,j}$, т. е. P'_j — сопряженный элемент по отношению к $\prod_{i=1}^m P_i$. Однако можно заметить, что в классе однострочных блочных групп P_i справедливо соотношение

$$(P_1 P_2 \dots P_m)^*_{,j} = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = 0, 1. \quad (34)$$

Тогда, действительно,

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Непосредственно из утверждения 9 следует, что двустрочная сложная блочная группа имеет лишь три возможных канонических разложения на однострочные блочные группы

$$A = P_1 P_2 = P_1 (P_1 + P_2) = P_2 (P_1 + P_2). \quad (35)$$

Несмотря на то, что известен общий вид канонического разложения, определение общего числа возможных канонических разложений m -строчной сложной блочной группы — довольно трудная комбинаторная задача.

Утверждение 10. Число возможных канонических разложений отличной от нуля сложной блочной группы с m строками на однострочные сомножители удовлетворяет неравенству

$$R_m < 1 + k + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots m}{(m-1)!}, \quad (36)$$

где $k = m(m-1)$.

Доказательство. Если блочная m -строчная группа не имеет разложения на однострочные сомножители, неравенство (36) полностью удовлетворяется. В случае когда имеется возможное разложение, она имеет вид (33).

На основе этого разложения можно выделить $(m-1)^2 + 1$ множеств разложений блочных групп A , ставя в соответствие каждому отдельному множеству те разложения, которые имеют



одинаковое число нулевых блочных групп ε_{ij} . В общем в выражении (33) имеем m^2 блочных групп ε_{ij} , причем нулевое значение может одновременно принимать не более чем $k = m^2 - m = m(m - 1)$ блочных групп ε_{ij} . С другой стороны, нулевое значение должно иметь минимум $m - 1$ блочных групп ε_{ij} , так как в противном случае в разложении (33) имелись бы идентичные сомножители и $A = 0$. Обозначая через e число нулевых значений ε_{ij} , имеем неравенство

$$m - 1 \leq e \leq m(m - 1) = k.$$

Таким образом, Δe выделенных множеств разложений блочных групп A равно

$$\Delta e = (m - 1)m - (m - 1) + 1 = (m - 1)^2 + 1.$$

6.3. Геометрическое изображение блочной группы

До сих пор мы рассматривали блочные группы как элементы переменного кольца и его общие свойства, исходя из определения действий сложения, умножения и т. д. Дадим геометрическую интерпретацию блочной группы. Отметим, что геометрическая интерпретация встречается также и в других случаях, например в случае комплексных чисел, которым ставятся в соответствие некоторые точки плоскости Гаусса.

Геометризация блочной группы имеет для нас значение прежде всего для ее применения при отображении графов блочными группами.

Определение 5. Если столбцы блочной группы A взаимно однозначно соответствуют деревьям графа Γ так, что каждый столбец представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дерева, то граф Γ называется геометрическим изображением блочной группы A и записывается в виде

$$\Gamma = \text{ob}(A). \quad (37)$$

Следовательно, геометрическим изображением блочной группы A служит любой детерминированный граф, удовлетворяющий условию (37), или класс графов подобных структур. Из принятого определения следует, что геометрическое изображение блочной группы — не однозначное понятие, так как блочной группе может соответствовать многоэлементное семейство графов, составляющих класс с подобной структурой. Однако это в известном смысле может явиться достоинством метода, так как



становится возможным, например в задачах синтеза систем, нахождение не одного, а множества вариантов систем, удовлетворяющей заданным условиям.

Не каждая блочная группа изображается связным графом — топологической цепью. Определение условий, при которых существует изображение блочной группы в виде связного графа, имеет принципиальное значение для применения метода моделирования систем с использованием блочных групп. Эти условия будут сформулированы в утверждении 12.

Утверждение 11. Блочная группа A с одинаковым числом элементов в строках, геометрическим изображением которого служит связный граф с вершинами p_1, p_2, \dots, p_n , равна произведению $n - 1$ простых односторонних сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_{n-1} \quad (38)$$

причем сомножители состоят из значений описывающей функции ребер, инцидентных произвольно выбранной вершине p_i ($p_i \neq p_j$, если $i \neq j$) графа Γ .

Доказательство. Равенство (38) справедливо в случае графов с одной и двумя вершинами. Рассмотрим произвольный связный граф с n вершинами. Соединим в нем две произвольные вершины ребром α_k . Положим, что выражение (38) справедливо для образованного таким образом графа Γ^* , т. е. что блочная группа равна

$$A^* = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1} = (P'_1 + P'_2) A^{**},$$

где

$$P_1 = P'_1 + [\alpha_k], \quad P_2 = P'_2 + [\alpha_k].$$

Найдем блочную группу

$$A' = P_1 P_2 A^{**} = (P'_1 + P'_2) A^{**} [\alpha_k] + P'_1 P'_2 A^{**} = A^* [\alpha_k] + A''. \quad (39)$$

Блочную группу A графа Γ с несоединенными вершинами и висячим ребром α_k можно представить в виде

$$A = A^* [\alpha_k] + A^0, \quad (40)$$

поскольку множество деревьев графа Γ^* (с замкнутым ребром α_k), дополненное элементом α_k , представляет собой множество всех деревьев графа Γ с ребром α_k . В выражении (40) символ A^0 обозначает блочную группу, составленную из всех столбцов блочной группы A , не содержащих α_k . Просуммировав равенства (39) и (40), получим

$$A + A' = A^0 + A'', \quad (40a)$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от выбора ребра α_k , а правая часть не содержит α_k , значит, для каждого из следующих уравнений имеем



$$A + A'_1 = A^0_1 + A''_1 \nexists \alpha_1,$$

$$A + A'_2 = A^0_2 + A''_2 \nexists \alpha_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A + A'_n = A^0_n + A''_n \nexists \alpha_n$$

Отсюда левая часть равенства (40а) не содержит обозначений ребра графа G и равна нулю. Тогда

$$A = A' = P_1 P_2 \dots P_{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем утверждение об условиях, при которых блочная группа имеет связное изображение.

Утверждение 12. Необходимые и достаточные условия существования геометрического изображения блочной группы в виде связного графа состоят в том, чтобы блочная группа A имела разложение на простые однострочные сомножители

$$A = P_1 P_2 \dots P_m, \quad (41)$$

причем произвольный элемент α_{ik} должен встречаться самое большее в двух простых блочных группах P_i, P_j .

Доказательство. Разложение (41) непосредственно следует из утверждения 11 и не требует специального обоснования. Условие того, что элемент α_{ik} встречается максимум в двух блочных группах P_i, P_j , тоже очевидно, так как в графе имеют место лишь ребра с двумя концами (одномерные симплексы).

В задачах синтеза систем при определении алгоритма образования блочных групп на компьютерах удобно добавить к приведенным условиям следующие дополнительные условия, подтверждающие отличие блочной группы от нуля:

1) в произведении $A = P_1 P_2 \dots P_m$ не может быть одинаковых сомножителей, т. е.

$$P_i \neq P_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (i \neq j); \quad (42)$$

2) любой сомножитель P_k произведения (41) не может быть равен сумме произвольного числа остальных сомножителей, т. е.

$$P_i \neq \sum_k P_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (k \neq i). \quad (43)$$

Из утверждения 12 следует, что блочная группа, у которой число элементов в строках различно, не имеет связного геометрического изображения. Условие имеет не только теоретическое значение. Оно однозначно, например, условию физического соответствия матрицы полных проводимостей и пассивной электрической структурной цепи.



6.4. Дополнительная блочная группа и геометрическое обратное изображение

Определение 6. Дополнительной блочной группой для данной блочной группы A называется блочная группа A^d , столбцы которой представляют собой дополнения столбцов блочной группы A до множества элементов α_{ik} , из которых состоит блочная группа A .

Если обозначить множество элементов α_{ik} , из которых состоит блочная группа A , через L , то столбцы C_i^d блочной группы A^d определим как разность (в смысле понятий алгебры множеств)

$$C_1^d = L - C_1, C_2^d = L - C_2, \dots, C_n^d = L - C_n, \quad (44)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n — столбцы блочной группы A .

Дополнительную блочную группу можно в таком случае записать в виде

$$A^d = \{b_k \mid (b_k = L - a_k) \Delta (a_k \in A)\} \quad (44a)$$

или иначе

$$A^d = \{\alpha_{ik} - a_{pk} \mid \alpha_{ik} \in L, a_{pk} \in A\}. \quad (44b)$$

Отметим справедливость такого свойства

$$(A + B)^d = A^d + B^d, \quad L = L_A \cup L_B, \quad (45)$$

которое означает, что дополнение — операция аддитивная. Дополнительную блочную группу можно также определить по отношению к другому множеству L^* , такому, что $L \subset L^*$, и тогда

$$A_{L^*}^d = \{L^* - a_k \mid a_k \in A\}. \quad (44в)$$

Способ получения дополнительной блочной группы проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 7. Определить блочную группу A^d по отношению к блочной группе

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Множество элементов блочной группы L таково:

$$L = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}.$$

Дополнительная блочная группа равна



$$A^d = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, что для блочной группы удобно иметь дуальное геометрическое изображение, поэтому введем понятие обратного изображения геометрической блочной группы.

Определение 7. Граф Γ называется обратным изображением блочной группы A , если столбцы блочной группы A взаимно однозначно соответствуют дополнениям деревьев графа Γ так, что столбец блочной группы A представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дополнения дерева. Тогда напомним

$$\Gamma = \text{cob}(A). \quad (46)$$

Нетрудно заметить, что обратное изображение дополнительной блочной группы A^d одновременно служит изображением блочной группы A и наоборот.

Обратное изображение — это граф дуальной структуры по отношению к геометрическому изображению и иной блочной группы. Связное обратное изображение существует для любой блочной группы, имеющей связное изображение.

Таким образом, блочной группе ставится в соответствие пара графов дуальной структуры. Один из них служит геометрическим изображением, другой — обратным изображением.

Приведем примеры изображений простейших блочных групп.



Примеры геометрических изображений и обратных изображений блочных групп.

Порядковый номер	Блочная группа	Геометрическое изображение	Обратное геометрическое изображение
1	$[\alpha]$		
2	$[\alpha_1, \alpha_2]$		
3	$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$		
4	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$		
5	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_3, \alpha_4 \end{bmatrix}$		
6	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \end{bmatrix}$		
7	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$		
8	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \\ \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \end{bmatrix}$		
9	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \\ \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \\ \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12} \end{bmatrix}$		



Для обратного изображения сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 13. Блочная группа A с одинаковым числом элементов в строках, геометрическое обратное изображение которой суть связный граф G , характеризующийся цикломатическим числом m , равняется произведению m простых однострочных сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_m,$$

соответствующих линейно независимым контурам графа G .

Доказательство. Докажем это утверждение методом индукции.

Утверждение верно для графа с одним и двумя контурами.

Такой граф всегда может быть упрощен и приведен к виду, показанному на рис.1, *а* или рис.1, *б*, где ребра 1, 2, 3 — суммы соответствующих ребер графа с двумя контурами.



Рис.1. Граф с двумя циклами.

Для графа (рис.1, *а*) имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

т. е. действительно $A = [1 \ 2] [1 \ 3]$.

Для случая, изображенного на рис.1, *б*, утверждение также справедливо, так как

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1] [2].$$

Можно доказать, что утверждение справедливо и тогда, когда ребра 1, 2, 3 заменены последовательным соединением произвольного числа ребер.

Положим, что утверждение справедливо для графа с цикломатическим числом $m - 1$. Тогда можно доказать, что оно справедливо и для графа с числом контуров m .



Таким образом, утверждение справедливо для графов с произвольным числом независимых контуров и произвольной структурой.

Утверждения 11 и 13 будут особенно важны для применения метода блочных групп к анализу систем. Они будут служить основой анализа блочных групп, соответствующих заданным графам, представляющим структуру рассматриваемой блочной группы.

6.5. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы

На множестве блочных групп можно определить различные операции; такой операцией является, например, — операция алгебраической производной.

Определение 8. Алгебраической производной блочной группы называется блочная группа $\partial A/\partial \alpha$, определенная как

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A \quad (47)$$

(столбцы, содержащие элемент α , опущены.)

Если блочную группу представить как совокупность множеств, то производная

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \{b_k | b_k = a_k - \{\alpha\}, \alpha \in a_k, a_k \in A\}. \quad (47a)$$

Ниже приведены зависимости, аналогичные «обычной» производной:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 + A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} A_1.$$

Алгебраическую производную обозначим как A_α , т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A_\alpha. \quad (49)$$

Заметим, что для одноэлементной блочной группы

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha] = 1. \quad (50)$$



Пример 8. Найдем алгебраическую производную блочной группы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

По аналогии с математическим анализом нахождение производной будем называть дифференцированием.

Дифференцирование блочной группы имеет простую геометрическую интерпретацию, сформулированную ниже.

Свойство 1. Геометрическое изображение блочной группы $\delta A/\delta \alpha$ представляет собой геометрическое изображение блочной группы A с замкнутым ребром α .

Свойство 1 обосновано утверждениями 11 и 13. Действительно, если положить, что опорным узлом служит любой узел цепи, неинцидентный с ребром α , то элемент α будет встречаться в двух простых сомножителях P_1 и P_2 , т. е.

$$A = P_1(\alpha) P_2(\alpha) P_3(\alpha) \dots P_{n-1}(\alpha).$$

где n — число вершин графа.

Отсюда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} P_2 \dots P_{n-1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha} P_1 P_3 \dots P_{n-1}.$$

Так как для однострочных простых чисел P_1 и P_2 справедливо, что $\partial P_1/\partial \alpha = \partial P_2/\partial \alpha = 1$, то

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1}. \quad (51)$$

Это означает замыкание ребра α в геометрическом изображении или отключение (или однополюсное отключение) ребра α в обратном геометрическом изображении (тогда $n - 1 = m$ — цикломатическое число графа). Поскольку величина блочной группы не зависит от выбора опорного узла, полученный результат носит общий характер.

Кроме алгебраической производной, сформулируем для блочных групп еще одно понятие (в известном смысле дуальное по отношению к производной) — понятие **обратной алгебраической производной**.

Алгебраической обратной производной блочной группы называется блочная группа $\delta A/\delta \alpha$, равная



$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A \quad (52)$$

(столбцы, содержащие элемент α , опущены.)

Воспользовавшись способом записи блочной группы в виде семейства множеств, можно записать обратную производную как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = a_k \mid \alpha \notin a_k, a_k \in A. \quad (52a)$$

Для обратной алгебраической производной имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 + A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} A_2 + \frac{\delta A_2}{\delta \alpha} A_1 + A_1 A_2. \end{aligned} \quad (53)$$

справедливые для произвольных блочных групп A_1 и A_2 . Кроме того,

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} (A_1 A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}. \quad (53a)$$

Для одноэлементной блочной группы имеем

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha = 0. \quad (54)$$

Соотношение алгебраических производной и обратной производной можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} (A \alpha) = \frac{\delta A}{\delta \alpha}. \quad (53b)$$

Алгебраическую обратную будем обозначать как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A^\alpha. \quad (55)$$

Пример 9. Выполним расчет алгебраической обратной производной:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$



Алгебраическая обратная производная имеет простую геометрическую интерпретацию.

Свойство 2. Геометрическое изображение блочной группы $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ представляет собой геометрическое изображение блочной группы A , в котором ребро отсоединено в одной вершине и замкнуто в петлю. Обратное геометрическое изображение блочной группы $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ представляет собой обратное изображение геометрической блочной группы A с замкнутым ребром a . Правильность этого свойства следует из определений изображения, обратного изображения блочной группы и обратной производной.

Вследствие простых соотношений между алгебраическими действиями, выраженными через операции производной и обратной производной, и действиями на графе, который является геометрической интерпретацией блочной группы, эти операции особенно важны в приложениях алгебры блочных групп, например, к анализу систем.

Отметим, что для блочной группы числа A всегда имеет место соотношение

$$A = \frac{\delta A}{\delta \alpha} + [\alpha] \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad (56)$$

где α — элемент блочной группы A .

6.6. Детерминантная функция блочной группы

Аналогично с матричным исчислением на множестве блочных групп можно определить различные функции, например детерминантную функцию.

Определение 9. *Детерминантной функцией* блочной группы A называется функция



$$\det_Z A = \det_Z \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1,1} & \alpha_{m_2,2} & \dots & \alpha_{m_n,n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} z_{\alpha_{ik}}, \quad (57)$$

где Z — заданное множество комплексных чисел $z_{\alpha_{ik}}$, т. е.

$z_{\alpha_{ik}} \in Z$. Определение этой функции следующее. Нужно перемножить комплексные числа, поставленные в соответствие индексам столбцов, и просуммировать полученные выражения, соответствующие столбцам.

Эта функция может быть кратко названа определителем или детерминантом блочной группы.

По аналогии с теорией матриц для ее обозначения используем

также символ $\det_Z A$

$$|A| \text{ или } \det_Z A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1,1} & \alpha_{m_2,2} & \dots & \alpha_{m_n,n} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Пример 10. Нахождение определителя.

Вычислить определитель блочной группы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

по отношению к комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \in Z$.

$$\det_Z A = z_1 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_5 + z_1 z_4 z_8 + z_2 z_3 z_4.$$

Раскрытие определителя матрицы немного сложнее, чем раскрытие определителя блочной группы.

Определитель блочной группы имеет следующие свойства:

$$(A_1 = A_2) \Rightarrow (\det_Z A_2 = \det_Z A_1),$$



$$\det_z \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \left[\det_z A \right].$$

6.7. Функция совпадения блочной группы

Кроме ранее введенных операций сложения и умножения блочных групп, определим еще одну операцию — **конъюнкцию**.
Определение 10. Конъюнкцией $A \cap B$ блочных групп A и B называется блочная группа, содержащая общие столбцы блочных групп A и B и не содержащая других столбцов.

Пример 11.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \cap B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определим на множестве блочных групп еще одну функцию, важную для применения алгебры блочных групп в теории систем, — **функцию совпадения** и обозначим

$$\underset{z}{\text{Sim}}(A, B)^{\varphi\psi}, \quad z_{\alpha_{ik}} \in Z.$$

Функция совпадения равна

$$\begin{aligned} \underset{z}{\text{Sim}}(A, B)^{\varphi\psi} &= \det_z(A \cap B) \text{ при } \varphi^-, \\ &= \det_z(A \cap B) \text{ при } \psi. \end{aligned} \quad (59)$$

При этом, имеется в виду случай $A \cap B \neq 0$.

Формула (59) дает общее определение функции совпадения, однако в прикладном значении этой функции наиболее важна частная форма записи функции совпадения: эта функция относится к блочной группе A , геометрическое обратное изображение которой содержит два ориентированных ребра α и β .

Определение 11. Функцией совпадения

$$\underset{z}{\text{Sim}} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad z_{\alpha_{ik}}, z_{\alpha}, z_{\beta} \in Z \quad (60)$$



блочной группы A , обратное геометрическое изображение которой имеет два ориентированных ребра α и β , называется функцией, обладающая следующими свойствами:

1) функция (60) — линейная комбинация выражений, имеющих в определителях $\det_z(\partial A/\partial \alpha)$ и $\det_z(\partial A/\partial \beta)$;

2) если исключить из обратного изображения ребра, определенные данным выражением, получим цикл, в котором ребра α и β ориентированы согласно или встречно, то слагаемое имеет соответственно коэффициент $+1$ или -1 (рис. 2).

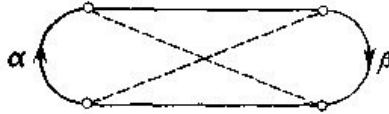


Рис. 2. Пояснение определения функции совпадения.

Функцию совпадения (60) можно в таком случае записать

$$Sim_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = \det_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$

когда ребра α и β ориентированы согласно,

$$-\det_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$

когда ребра α и β ориентированы встречно.

(61)

Пример 12. Определить функции совпадения блочной группы A , обратное изображение которой есть граф

$$Sim_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$

изображенный на рис. 3 ($\alpha = 1$, $\beta = 7$).



Столбцы, общие для $\partial A/\partial 1$ и $\partial A/\partial 7$, взяты в рамки.

При рассмотрении графа на рис. 3 замечаем, что при исключении ребер 5 2 6, 5 3 6, 5 8 3, 5 8 6 граф сводится к графу с одним контуром, в котором ребра $\alpha = 1$ и $\beta = 7$ ориентированы согласно. С другой стороны, при исключении из графа ребер 2 3 4 в полученном контуре ребра 1 и 7 ориентированы встречно.

Поэтому выражения $z_5 z_2 z_6$, $z_5 z_3 z_6$, $z_5 z_8 z_3$, $z_5 z_8 z_6$ имеют знак плюс, $z_2 z_3 z_4$ — знак минус.

Окончательно получим

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 7} \right) = z_5 z_2 z_6 + z_5 z_3 z_6 + z_5 z_8 z_3 - z_2 z_3 z_4$$

Можно также обосновать свойство, согласно которому при исключении из обратного изображения блочной группы ребер, определенных столбцами $\partial A/\partial \alpha \cap \partial A/\partial \beta$, граф всегда сводится к такому графу, у которого цикломатическое число $m=1$. Определение ориентации ребер α и β по отношению друг к другу не встречает трудностей.

Не каждый граф отображает систему, в которой не могут присутствовать лишние элементы. Для определения класса графов, с которыми мы будем иметь дело при анализе систем, введем общее определение **соответственного** или сильно связанного графа.

Определение 12. Граф называется соответственным, если каждые две его вершины принадлежат хотя бы одному элементарному контуру.

Для соответственного графа справедливо следующее свойство.

Свойство 3. Граф (мультиграф) будет соответственным тогда и только тогда, когда он служит обратным изображением блочной группы A , удовлетворяющего условию

$$\exists \alpha \in A \forall \beta \in A \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \neq 0 \right]. \quad (62)$$

Это свойство следует из определения функции совпадения, согласно которому столбцы

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

соответствуют ребрам, исключение которых приводит к упрощению графа обратного изображения к одному циклу с ребрами α и β .



На рис. 4 показано несколько графов, из которых только один граф соответственный.

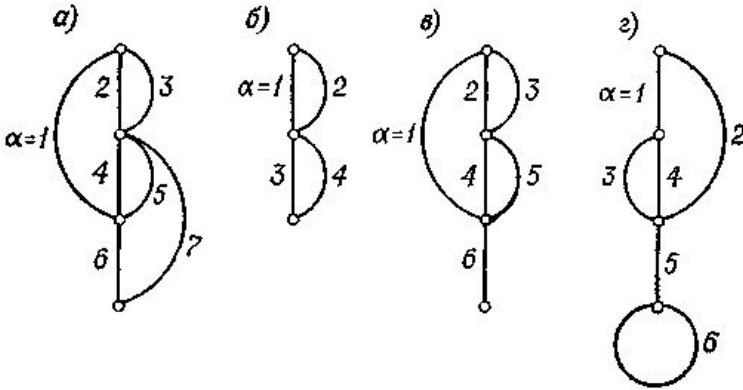


Рис. 4. Примеры графов: а) соответственный; б, в, г) несоответственные.

Если применить условие (62), например к графу, показанному на рис. 4, б, получим

$$A = [1 \ 2] [3 \ 4] = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 34 & 34 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4] \neq 0,$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 3} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} = 0.$$

т. е. условие (62) не выполняется для графа (рис. 4, б) и этот граф не соответственный. Применение условия (62) для определения характера графа излишне, если известна его структура. Из рассмотрения контуров графа можно непосредственно сделать вывод о том, выполняется ли условие (62). Это условие весьма ценно, если известно только блочная группа, не разложенная на первичные сомножители, а также для использования при синтезе систем с помощью блочных групп на ЭВМ.



6.8. Понятие ряда и последовательности блочных групп

Если натуральным числам поставить в соответствие блочные группы, то можно сказать, что таким образом определена последовательность блочных групп, записываемая в виде

$$\langle A_n \rangle = A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

Понятия сходимости и пределы последовательности блочных групп основываются на понятии метрики. Положим, дана блочная группа

$$A = \{a_k \mid \alpha_{ij} \in a_k, i, j, k = 1, 2, 3, \dots\},$$

где мощность множеств a и A конечная, а α_{ij} — элементы нормированного пространства.

Введем сначала понятие нормы множества a , которую обозначим как $\|a\|$. Введем определение

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v\} \Rightarrow \|a\| = \sqrt{\|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \dots + \|\alpha_v\|^2}, \|\emptyset\| = 0,$$

где $\|\alpha_i\|$ — норма элемента α_i .

Норму блочной группы определим как

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda} \|\alpha_{\lambda}\|^2}$$

где λ проходит все столбцы, имеющиеся в блочной группе A . Метрику на множестве блочных групп определим как

$$\rho(A, B) = \|A \underline{\Delta} B\|,$$

где $\underline{\Delta}$ — означает симметричную разность множеств. Из этого определения следует, что метрика $\rho(A, B)$ удовлетворяет следующим основным условиям:

$$\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A),$$

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C).$$

Для двух произвольных блочных групп справедливо неравенство

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

которое следует из неравенства Буняковского — Шварца.

Если для последовательности блочных групп A_n существует блочная группа A , удовлетворяющее равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0,$$

то блочная группа A называется пределом последовательности блочных групп A_n и записывается в виде



$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Последовательность A_n называется сходящейся, если существует предел, и, наоборот, расходящейся, если таковой отсутствует. Кроме сходимости по отношению к метрике, введем и другие понятия сходимости последовательности блочных групп, которые обозначаются

$$\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } A_n \quad \text{и} \quad \text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } A_n$$

и определяются с помощью изображения и обратного изображения блочной группы:

$$(\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } A_n = A) \Leftrightarrow [\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{ob } (A)],$$

$$(\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } A_n = A) \Leftrightarrow [\text{Lim}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{cob } (A)],$$

Примером сходимости последовательности A_n по отношению к обратному изображению может служить структура в виде цепи, метрический граф которой имеет ступенчатую структуру с равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$ вершинами (рис. 5).

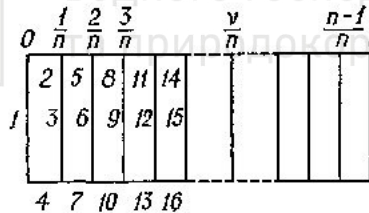


Рис. 5. Лестничный граф с равномерно распределенными вершинами.

Если увеличить число делений отрезка $[0, 1]$, то при $n \rightarrow \infty$ граф преобразуется в структуру с густым (однако четным) множеством ребер. Нумеруя грани графа, например, как показано на рис. 5, можно определить следующую последовательность блочных групп:

$$A_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$A_2 = [1 \ 2 \ 3 \ 4] [3 \ 5 \ 6 \ 7],$$

$$A_3 = [1 \ 2 \ 3 \ 4] [3 \ 5 \ 6 \ 7] [6 \ 8 \ 9 \ 10],$$

.....

обратным изображением которой и служит граф.



Эта последовательность сходится к обратному изображению блочной группы

$$A = \text{cob}^{-1} \sigma, \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

где S_n — последовательность цепей (метрических графов) вида изображенных на рис. 5.

Рядом блочных групп будем называть выражение

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Блочные группы A_1, A_2, A_3, \dots называются составляющими ряда, блочные группы же

$$S_1 = A_1,$$

$$S_2 = A_1 + A_2,$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$

.....

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

есть частичные суммы ряда. Бесконечный ряд блочных групп называется сходящимся, если последовательность частичных сумм сходится. Предел последовательности частичных сумм называется суммой ряда блочных групп. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7. Блочные группы и графы высших рангов

Различного класса системы состоят из элементов, взаимодействующих друг с другом различным образом. Например, структуры физических систем могут состоять из многополюсных элементов (многополюсников); их также можно рассматривать как системы, состоящие из блоков или подблоков. Топологические модели таких систем представим в виде графов второго ранга, построенных из двумерных континуумов (блоков) с выделенными точками, называемыми полюсами. Блоки соответствуют ребрам линейных графов первого ранга. Блочные группы блок-графов назовем блочными группами высших рангов



второго, третьего и т. д. Эти блочные группы, подобно матрицам, состоящим из блочных матриц, представляют собой семейства блочных групп низшего ранга. Основываясь на определении операций над блочными группами первого ранга, определим в соответствии с теорией множеств, теории графов и теорией математической логики операции над блочными группами высшего ранга и графами высшего ранга.

7.1. Определение блочной группы второго ранга

В общем определении блочных групп не уточнялись характерные черты множеств элементов, из которых состоит эта блочная группа, поэтому можно рассмотреть случаи, когда эти элементы также являются блочными группами. В связи с этим введем понятие блочная группа 2A второго ранга следующим образом.

Определение 1. Блочная группа второго ранга 2A есть семейство множеств 2a_j

$${}^2A = \{ {}^2a_j \}_{j=1, 2, \dots, n}. \quad (1)$$

где

$${}^2a_j = \{ A_{ij} \}_{i=1, 2, \dots, m},$$

$\forall_i \forall_j A_{ij}$ — блочная группа первого ранга.

Блочную группу первого ранга можно также записать в виде

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

или

$${}^2A = [A_{ij}]_{\substack{i=1, 2, \dots, m, \\ j=1, 2, \dots, n}} \quad (3)$$

где элементы A_{ij} — блочные группы первого ранга.

Введем понятие замещающей блочной группы первого ранга для блочной группы второго ранга.

Определение 2. Замещающей блочной группой для блочной группы второго ранга 2A называется блочная группа первого



ранга A , полученная применением операций алгебры блочных групп над элементами A_{ij} числа 2A :

$$A = \sum_{i=1}^n \prod_{i=1}^m A_{ij}, \quad {}^2A = [A_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}} \quad (4)$$

Обозначим соотношение соответствия замещающей блочной группы A блочной группе 2A через

$$A \stackrel{e}{=} {}^2A \quad \text{или} \quad {}^2A \stackrel{e}{=} A. \quad (5)$$

Поясним способ нахождения замещающей блочной группы следующим примером:

$${}^2A = \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{c} [1 \ 1] \\ [2 \ 3] \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array} \right] \\ \hline [1 \ 2 \ 4] & \left[\begin{array}{c} [15] \\ [26] \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{c} [6] \\ [5] \end{array} \right] & [\emptyset] \end{array} \right] \stackrel{e}{=} \left[\begin{array}{c} [1 \ 1] \\ [2 \ 3] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [1 \ 2 \ 4] \\ [6] \\ [5] \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} [1 \ 5] \\ [26] \end{array} \right] [\emptyset] \stackrel{e}{=} \left[\begin{array}{c} [1 \ 1] \\ [2 \ 3] \\ [4 \ 4] \\ [5 \ 5] \\ [6 \ 6] \end{array} \right] \stackrel{e}{=} A, \quad {}^2A \stackrel{e}{=} A.$$

Определим для блочной группы второго ранга понятие равенства, а также операции сложения и умножения:

$$({}^2A = {}^2B) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} (A = B), \quad (6)$$

$${}^2A + {}^2B \stackrel{e}{=} A + B, \quad (7)$$

$${}^2A \cdot {}^2B \stackrel{e}{=} AB, \quad (8)$$

где $A \stackrel{e}{=} {}^2A$, $B \stackrel{e}{=} {}^2B$.

Таким образом, соотношение $\stackrel{e}{=}$ представляет собой гомеоморфизм.

Для блочных групп второго ранга справедливы следующие соотношения:

$$\{({}^2A \subset {}^2B) \wedge ({}^2B \subset {}^2A)\} \Rightarrow ({}^2A = {}^2B), \quad (9)$$

$$\{{}^2C = ({}^2A \underline{\Delta} {}^2B)\} \Rightarrow ({}^2C = {}^2A + {}^2B), \quad (10)$$

$$[{}^2C = \{{}^2c \mid ({}^2c = {}^2a \cup {}^2b) \wedge ({}^2a \in {}^2A) \wedge ({}^2b \in {}^2B) \wedge ({}^2a \cap {}^2b = \emptyset) \} \wedge$$

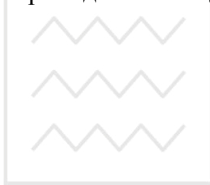


$$\wedge (r({}^2a \cup {}^2b) = 2k - 1) \Rightarrow ({}^2C - {}^2A \cdot {}^2B), \quad (11)$$

где $\underline{\Delta}$ означает симметрическую разность, r — функция повторений, а k — натуральное число.

Заметим, что равенство блочных групп второго ранга рефлексивно, симметрично и транзитивно, операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно по отношению к сложению.

Модуль сложения ${}^2[] = 0$ блочных групп второго ранга есть всякая блочная группа второго ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем сложения $[]$ блочных групп первого ранга; а модуль умножения $[\emptyset] = 1$ блочных групп второго ранга представляет собой всякую блочную группу второго ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем умножения $[\emptyset]$ блочных групп первого ранга. При этом справедливы следующие соотношения:



$$1. \quad [AA \dots A]_{2 \dots n} = \begin{cases} = A & \text{при нечетном } n, \\ = 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (12)$$

$$2. \quad \left[\begin{array}{c} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{array} \right]_{n \text{ раз}} = \begin{cases} = 0 & \text{при } A \in \aleph, \\ = 1 & \text{при } A \in \aleph, n \text{ четное}, \\ = A & \text{при } A \in \aleph, n \text{ нечетное}. \end{cases} \quad (13)$$

где \aleph — множество блочных групп вида

$$A = \{ [\emptyset], a_1, a_2, \dots \}$$

$$3. \quad ([A_1 \dots A_j \dots A_n = 0] \Leftrightarrow \{ (A_j = [A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n]) \vee (A_1 = A_2 = \dots = A_j = \dots = A_n = 0) \}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

$$4. \quad \left(\left[\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right] = 0 \right) / \Rightarrow (A_1 = 0 \vee A_2 = 0). \quad (15)$$

где $/ \Rightarrow$ обозначает отрицание импликации

5. Равенство



$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (16)$$

не имеет единственного решения для A_1 и A_2 .

$$6. \left(\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} \right) / \Rightarrow (A_2 = A_3). \quad (17)$$

Блочную группу второго ранга ${}^2A^d$, элементы которой — дополнительные блочные группы $A^{d_{ij}}$, назовем дополнительной блочной группой второго ранга. Для дополнительных блочных групп второго ранга применяем те же самые операции, что и для блочных групп первого ранга, поэтому приведенные выше определения и соотношения справедливы также и для дополнительных блочных групп второго ранга ${}^2A^d$.

Если в блочной группе 2A все элементы A_{ij} заменить на их дополнительные блочные группы $A^{d_{ij}}$, то получим дополнительную блочную группу второго ранга $({}^2A)^{d*}$, замещающая блочная группа которой A^{d*} в общем случае не равна дополнению A^d замещающей блочной группы A для блочной группы 2A , т. е.

$$A^{d*} \neq A^d, \quad A^{d*e} = ({}^2A)^{d*}, \quad A = {}^2A,$$

а следовательно,

$${}^2A^d \neq ({}^2A)^{d*}.$$

7.1.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы второго ранга

Алгебраическую производную и обратную производную определим на основе понятий производной и обратной производной замещающей блочной группы.

Определение 3. Алгебраической (обратной) производной $\partial({}^2A)/\partial\alpha \cdot [\delta({}^2A)/\delta\alpha]$ блочной группы второго ранга 2A по элементу α называется всякая блочная группа второго ранга, замещающая блочная группа которой $\partial A/\partial\alpha \cdot (\delta A/\delta\alpha)$ есть производная (обратная производная) замещающей блочной группы A для блочной группы 2A по элементу α . Это определение можно представить в виде соотношений



$$\frac{\partial(\delta^2 A)^e}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad \frac{\delta(\delta^2 A)^e}{\delta \alpha} = \frac{\delta A}{\delta \alpha}, \quad {}^2 A^e = A. \quad (18)$$

На основании правил для производной и обратной производной суммы и произведения блочных групп первого ранга можно написать следующие соотношения для блочных групп второго ранга:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [A_1 A_2] = \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \right], \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} & A_2 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} [A_1 A_2] = \left[\frac{\delta A_1}{\delta \alpha} \quad \frac{\delta A_2}{\delta \alpha} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta \alpha} \\ \frac{\delta A_2}{\delta \alpha} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Следовательно, обратная производная $\delta(\delta^2 A)/\delta \alpha$ — операция аддитивная и мультипликативная.

На основе этих соотношений можно определить алгебраические производную и обратную производную по элементу α , любой блочной группы второго ранга.

Пример 1.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} & A_1 & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} & A_2 \\ A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha} & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial \alpha} \end{bmatrix}.$$

Если, например, блочные группы A_1 и A_2 не содержат элемента α , то



$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{\partial A_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial A_4}{\partial \alpha} \end{bmatrix}.$$

По этим же правилам находятся алгебраическая производная и обратная производная дополняющих блочных групп второго ранга.

Для определения алгебраической производной блочной группы второго ранга 2A по элементу блочной группы первого или второго ранга принимаем следующие правила:

$$\frac{\partial A}{\partial [\alpha_1 \alpha_2]} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}} \stackrel{df}{=} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \quad (23)$$

из которых следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial(^2A)}{\partial [A_1 A_2]} &= \frac{\partial(^2A)}{\partial [A_1 + A_2]} = \frac{\partial(^2A)}{\partial A_1} + \frac{\partial(^2A)}{\partial A_3}, \\ \frac{\partial(^2A)}{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}} &= \frac{\partial(^2A)}{\partial (A_1 A_2)} = \frac{\partial^2(^2A)}{\partial A_1 \partial A_2} \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\frac{\partial(^2A)}{\partial(^2B)} = \frac{\partial(^2A)}{\partial(B)} \stackrel{e}{=} \frac{\partial A}{\partial B} = (A^d B)^d, \quad A \stackrel{e}{=} {}^2A, \quad B \stackrel{e}{=} {}^2B, \quad (25)$$

как естественное обобщение соотношения $\partial A / \partial \alpha = (A^d [\alpha])^d$, а также

$$\frac{\partial(^2A)}{\partial A} \stackrel{e}{=} \frac{\partial A}{\partial A} = \begin{cases} 1 & \text{для нечетного количества столбцов блочной группы } A, \\ 0 & \text{для четного количества столбцов блочной группы } A, \end{cases} \quad (26)$$

где $A \stackrel{e}{=} {}^2A$.

Пример 2. Найдем алгебраическую производную блочной группы второго ранга

$${}^2A = \begin{bmatrix} [1 \ 1] & [2 \ 5] \\ [2 \ 3] & [4 \ 6] \\ [4] & [3 \ 8] \end{bmatrix}$$



по блочной группе первого ранга $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решение

$$\frac{\partial(\partial^2 A)}{\partial A} = \frac{\partial^2(\partial^2 A)}{\partial 1 \partial 2} + \frac{\partial^2(\partial^2 A)}{\partial 1 \partial 3} = \frac{\partial}{\partial 2} \left[\frac{\partial}{\partial 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right] + \frac{\partial}{\partial 3} \left[\frac{\partial}{\partial 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right] = 4 + 4 = 0.$$

7.2. Блочные группы k -го ранга

Блочные группы k -го ранга построим из блочных групп $(k - 1)$ -го ранга подобно тому, как были построены блочные группы 2-го ранга. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 4. Блочной группой k -го ранга ${}^k A$ называется семейство множеств ${}^k a_j$

$${}^k A = \{ {}^k a_j \}_{j=1,2,\dots,n}, \quad (27)$$

где

${}^k a_j = \{ {}^{k-1} A_{ij} \}_{i=1,2,\dots,m}$,
 ${}^{k-1} A_{ij}$ - блочная группа $(k - 1)$ -го ранга. Блочную группу k -го ранга можно также записать в виде

$${}^k A = \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_{11} & \dots & {}^{k-1} A_{1n} \\ {}^{k-1} A_{21} & \dots & {}^{k-1} A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{k-1} A_{m1} & \dots & {}^{k-1} A_{mn} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

или

$${}^k A = [{}^{k-1} A_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}} \quad (29)$$

где элементы ${}^{k-1} A_{ij}$ — блочные группы $(k - 1)$ -го ранга.

Введем понятие замещающей блочной группы для блочной группы $(k - 1)$ -го ранга.

Определение 5. Замещающей блочной группой для блочной группы k -го ранга ${}^k A$ называется блочная группа 1-го ранга A ,



полученная применением операций алгебры блочных групп над замещающими блочными группами для блочных групп $(k - 1)$ -го ранга, являющимися элементами блочной группы ${}^k A$:

$$A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m A_{ij}, \quad {}^k A = [{}^{k-1} A_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}} \quad (30)$$

где A_{ij} — замещающая блочная группа для ${}^{k-1} A_{ij}$. Обозначим соотношение соответствия замещающей блочной группы A блочной группе ${}^k A$ через

$$A \stackrel{e}{=} {}^k A \quad \text{или} \quad {}^k A \stackrel{e}{=} A. \quad (31)$$

Для блочной группы k -го ранга определим понятие равенства, а также операции сложения и умножения

$$\left. \begin{aligned} ({}^k A = {}^k B) &\stackrel{df}{\Leftrightarrow} A = B, \\ {}^k A + {}^k B &\stackrel{e}{=} A + B, \\ {}^k A \cdot {}^k B &\stackrel{e}{=} AB, \end{aligned} \right\} A \stackrel{e}{=} {}^k A, B \stackrel{e}{=} {}^k B. \quad (32)$$

Таким образом, соотношение $\stackrel{e}{=}$ представляет собой гомеоморфизм.

Для блочной группы k -го ранга справедливы следующие соотношения:

$$({}^k A \subset {}^k B) \wedge ({}^k B \subset {}^k A) \Rightarrow ({}^k A = {}^k B), \quad (33)$$

$$\{ {}^k C = ({}^k A \underline{\Delta} {}^k B) \} \Rightarrow ({}^k C = {}^k A + {}^k B), \quad (34)$$

$$\begin{aligned} [{}^k C = \{ {}^k c \mid ({}^k c = {}^k a \cup {}^k b) \wedge ({}^k a \in {}^k A) \wedge ({}^k b \in {}^k B) \wedge ({}^k a \cap {}^k b = \emptyset) \wedge \\ \wedge (r({}^k a \cup {}^k b) = 2n - 1) \}] \Rightarrow ({}^k C = {}^k A \cdot {}^k B), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\underline{\Delta}$ есть симметричная разность, r — функция повторений, а n — натуральное число.

Формулы (32) можно обобщить на блочные группы разных рангов ${}^k A$ и ${}^m B$ ($k > 1$, $m > 1$):



$$\left. \begin{aligned} &({}^k A = {}^m B) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} A = B, \\ &{}^k A + {}^m B = A + B, \\ &{}^k A \cdot {}^m B = AB, \end{aligned} \right\} A = {}^e k A, B = {}^e m B. \quad (36)$$

Подобно блочным группам 2-го ранга, равенство блочных групп k -го ранга рефлексивно, симметрично и транзитивно, операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения. Поэтому можно написать следующие соотношения:

$$[{}^k A_1 | {}^k A_2 | {}^k A_3] = [{}^k A_1 | {}^k A_2] [{}^k A_3] = [{}^k A_1 | {}^k A_2 | {}^k A_3],$$

$$\begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ [{}^k A_2] \\ [{}^k A_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^k A_1] \\ [{}^k A_2] \\ [{}^k A_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^k A_1] \\ [{}^k A_2] \\ [{}^k A_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [{}^k A_1] \\ [{}^k A_2 | {}^k A_3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{}^k A_1 | {}^k A_1] \\ [{}^k A_2 | {}^k A_3] \end{bmatrix}.$$

Модуль сложения ${}^k [] = 0$ блочных групп k -го ранга есть всякая блочная группа k -го ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем сложения $[]$ блочных групп первого ранга.

Модуль умножения ${}^k [\emptyset] = 1$ блочных групп k -го ранга представляет собой всякую блочную группу k -го ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем умножения $[\emptyset]$ блочных групп первого ранга. При этом справедливы следующие соотношения и соответствия:

$$1. [{}^k A | {}^k A | \dots | {}^k A]_{12\dots n} = \begin{cases} {}^e k A & \text{при нечетном } n, \\ 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (37)$$

$$2. \left[n \text{ раз } \begin{Bmatrix} {}^k A \\ {}^k A \\ \vdots \\ {}^k A \end{Bmatrix} \right] = \begin{cases} 0 & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, \\ 1 & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, n \text{ четное}, \\ {}^e A & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, n \text{ нечетное}. \end{cases} \quad (38)$$

где \mathfrak{N} — множество блочных групп k -го ранга

$$3. ([{}^k A_1 | \dots | {}^k A_j | \dots | {}^k A_n] = 0) \Leftrightarrow \{({}^k A_j = [{}^k A_1 | \dots | {}^k A_{j-1} | {}^k A_{j+1} | \dots | {}^k A_n]) \vee$$



$$\vee \{ {}^k A_1 = {}^k A_2 = \dots = {}^k A_j = \dots = {}^k A_n = 0 \},$$

$$j = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

$$4. \left(\begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = 0 \right) / \Rightarrow ({}^k A_1 = 0 \vee {}^k A_2 = 0). \quad (40)$$

где $/ \Rightarrow$ обозначает отрицание импликации

5. Равенство

$$\begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (41)$$

не имеет единственного решения.

$$6. \left(\begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_3 \end{bmatrix} \right) / \Rightarrow ({}^k A_2 = {}^k A_3). \quad (42)$$

Если элементы блочной группы k -го ранга ${}^k A^d$ являются дополнительными блочными группами $(k-1)$ -го ранга ${}^{k-1} A^d_i$

$${}^k A^d = \{ {}^k a^d_{ij} \}_{j=1,2,\dots,n}, \quad {}^k a^d_{ij} = \{ {}^{k-1} A^d_i \}_{i=1,2,\dots,m} \quad (43)$$

то блочная группа ${}^k A^d$ называется дополнительной блочной группой k -го ранга.

Для дополнительных блочных групп k -го ранга справедливы те же операции, что и для блочных групп k -го ранга.

7.2.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы k -го ранга

Подобно блочным группам второго ранга, определим алгебраическую производную и обратную производную блочных групп k -го ранга с помощью понятий производной и обратной производной замещающей блочной группы.

Определение 6. Алгебраической производной (обратной производной) $[\partial({}^k A)/\partial \alpha]$ $[\delta({}^k A)/\delta \alpha]$ блочной группы k -го ранга ${}^k A$ по элементу α называется всякая блочная группа k -го ранга, замещающая блочная группа которой $(\delta A/\delta \alpha)$ $(\delta A/\delta \alpha)$ есть алгебраическая производная (обратная производная) замещающей блочной группы A для блочной группы ${}^k A$ по элементу α . Это определение можно представить в виде следующих соотношений:



$$\frac{\partial^{(k)} A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad \frac{\delta^{(k)} A}{\delta \alpha} = \frac{\delta A}{\delta \alpha}, \quad {}^k A = A. \quad (44)$$

На основании правил для производной и обратной производной суммы и произведения блочных групп первого ранга можно написать следующие соотношения для блочных групп k -го ранга:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [{}^{k-1} A_1 {}^{k-1} A_2] = \left[\frac{\partial^{(k-1)} A_1}{\partial \alpha} \frac{\partial^{(k-1)} A_2}{\partial \alpha} \right], \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_1 \\ {}^{k-1} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{(k-1)} A_1}{\partial \alpha} & A_2 \\ {}^{k-1} A_2 & \frac{\partial^{(k-1)} A_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} [{}^{k-1} A_1 {}^{k-1} A_2] = \left[\frac{\delta^{(k-1)} A_1}{\delta \alpha} \frac{\delta^{(k-1)} A_2}{\delta \alpha} \right], \quad (47)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_1 \\ {}^{k-1} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta^{(k-1)} A_1}{\delta \alpha} \\ \frac{\delta^{(k-1)} A_2}{\delta \alpha} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Из правил (23) для алгебраической производной блочных групп по сумме и произведению одноэлементных блочных групп имеем

$$\frac{\partial^{(k_1)} A}{\partial^{(k_2)} A_1 + {}^{k_2} A_2} = \left[\frac{\partial^{(k_1)} A}{\partial^{(k_2)} A_1} \frac{\partial^{(k_1)} A}{\partial^{(k_2)} A_2} \right], \quad (49)$$

$$\frac{\partial^{(k_1)} A}{\partial^{(k_2)} A_1 {}^{k_2} A_2} = \frac{\partial^2({}^{k_1} A)}{\partial^{(k_2)} A_1 \partial^{(k_2)} A_2}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial^{(k)} A}{\partial^{(r)} B} = \frac{\partial A}{\partial B} = (A^d B)^d, \quad A = {}^e A, \quad B = {}^r B. \quad (51)$$

Эти зависимости представляют собой обобщения формул (24) и (25). Обобщения формул (19) и (20) в виде



$$\frac{\partial^{(k_1 A_1 k_1 A_2)}}{\partial^{(k_2 A)}} = \left[\frac{\partial^{(k_1 A_1)}}{\partial^{(k_2 A)}} \frac{\partial^{(k_1 A_2)}}{\partial^{(k_2 A)}} \right], \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial^{(k_2 A)}} \begin{bmatrix} k_1 A_1 \\ k_1 A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{(k_1 A_1)}}{\partial^{(k_2 A)}} k_1 A_1 \\ k_1 A_2 \frac{\partial^{(k_1 A_2)}}{\partial^{(k_2 A)}} \end{bmatrix} \quad (53)$$

также справедливы.

Пример 3.

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} k A_1 \\ k A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} r A_{11} & r A_{12} \\ r A_{21} & r A_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial^{(r A_{21})}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{(k A_1)}}{\partial^{(r A_{11})}} k A_1 \\ k A_2 \frac{\partial^{(k A_2)}}{\partial^{(r A_{11})}} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial^{(r A_{22})}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{(k A_1)}}{\partial^{(r A_{12})}} k A_1 \\ k A_2 \frac{\partial^{(k A_2)}}{\partial^{(r A_{12})}} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 (k A_1)}{\partial (r A_{11}) \partial (r A_{21})} & \frac{\partial (k A_1)}{\partial (r A_{11})} & \frac{\partial (k A_1)}{\partial (r A_{21})} & k A_1 \\ \frac{\partial (k A_2)}{\partial (r A_{21})} & \frac{\partial (k A_2)}{\partial (r A_{11})} & \frac{\partial^2 (k A_2)}{\partial (r A_{11}) \partial (r A_{13})} & k A_2 \end{array} \right] +$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 (k A_1)}{\partial (r A_{12}) \partial (r A_{22})} & \frac{\partial (k A_1)}{\partial (r A_{12})} & \frac{\partial (k A_1)}{\partial (r A_{22})} & k A_1 \\ \frac{\partial (k A_2)}{\partial (r A_{12})} & \frac{\partial (k A_2)}{\partial (r A_{12})} & \frac{\partial^2 (k A_2)}{\partial (r A_{12}) \partial (r A_{22})} & k A_2 \end{array} \right].$$

7.2.2. Геометрическое изображение блочной группы k -го ранга

Обозначим $\tilde{\Gamma}$ класс подобных графов, представляющих собой геометрическое изображение блочной группы первого ранга A , определенной на конечном множестве элементов a_{ij} , и \tilde{f} — функцию гомеоморфного преобразования (отображения).

$$\tilde{f}: \tilde{\Gamma} \rightarrow A. \quad (54)$$

Пусть A — множество всех равных блочных групп ранга $k > 1$.

$$A = \{ {}^k A \mid {}^k A = A \}, \quad k=2, 3, \dots \quad (55)$$



Преобразование $\tilde{\varphi}$ класса $\tilde{\Gamma}$ подобных графов в множество \mathbf{A} блочных групп определим как

$$(\tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A}) \equiv (\tilde{f} : \tilde{\Gamma} \rightarrow A), \quad A = {}^e kA. \quad (56)$$

Это означает, что геометрическое изображение блочной группы k -го ранга kA есть граф, представляющий собой изображение

замещающей блочной группы A ($A = {}^e kA$), а также что данный граф служит изображением и всех других блочных групп ранга $k > 1$, которые имеют ту же самую замещающую блочную группу. Известно, что преобразование пространства конечных блочных групп первого ранга в пространство конечных графов не является непрерывной функцией, поэтому не каждая блочная группа k -го ранга имеет геометрическое изображение. Очевидно, для существования геометрического изображения блочной группы k -го ранга необходимо и достаточно существование геометрического изображения ее замещающей блочной группы.

Для существования геометрического изображения блочной группы недостаточно существования изображений ее элементов. Например, блочная группа второго ранга

$${}^2A = \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \ 5 \\ \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 1 \\ 2 \ 3 \ 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

не имеет геометрического изображения, несмотря на то что все его элементы обладают такими изображениями, так как ее замещающая блочная группа

$$A = \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 2 \ 4 \\ 3 \ 5 \end{array} \right]$$

не имеет изображения. Наоборот, блочная группа второго ранга

$${}^2A = \left[\left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 2 \ 4 \\ 3 \ 5 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ 3 \ 4 \\ 4 \ 5 \end{array} \right] \right]$$



обладает геометрическим изображением, так как ее замещающая блочная группа

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

имеет изображение, хотя оба ее элемента таких изображений не имеют. С точки зрения использования алгебры блочных групп в теории систем важны блочные группы k -го ранга kA , имеющие геометрическое изображение и построенные из блочных групп, которые также имеют геометрическое изображение. В этом случае геометрическое изображение блочной группы kA может рассматриваться как иерархическое изображение, состоящее из подизображений, которые в свою очередь тоже могут быть иерархическими изображениями. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в последующих разделах.

7.3. Правила организации контурных графов

Для произвольного контурного графа Γ , состоящего из ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, можно написать

$$A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k] = 0, \quad (57)$$

где $A^d = C_1 C_2 \dots C_m$ — дополнительная блочная группа графа Γ . Это равенство следует из того, что однострочная блочная группа

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k]$$

равна одной из блочных групп C_1, C_2, \dots, C_m , представляющих собой первичные сомножители блочной группы A^d , или сумме некоторых из этих блочных групп.

Заменим в выражении (57) дополнительную блочную группу A^d блочной группой A графа Γ . Для этого запишем ее в следующей форме:

$$(A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k])^d = 0$$

или

$$(A^d [\alpha_1] + A^d [\alpha_2] + \dots + A^d [\alpha_k])^d = 0,$$

тогда

$$((A^d [\alpha_1])^d + (A^d [\alpha_2])^d + \dots + (A^d [\alpha_k])^d) = 0.$$



Так как $\partial A / \partial \alpha = (A^d [\alpha])^d$, то последнее выражение представим в виде

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial A}{\partial \alpha_k} = 0, \quad (58)$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_k} \right] = 0 \quad (59)$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k]} = 0.$$

Пример 4. Блочная группа графа, изображенного на рис. 1, равна

$$A = [1 \ 2] [2 \ 3 \ 4] [4 \ 5].$$

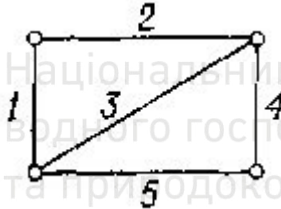


Рис. 1.

Для контура из ребер 1, 2, 3 имеем

$$\frac{\partial A}{\partial 123} = \left[\frac{\partial A}{\partial 1} \quad \frac{\partial A}{\partial 2} \quad \frac{\partial A}{\partial 3} \right] = \begin{bmatrix} 234 & 134 & 12 \\ 45 & 45 & 45 \end{bmatrix} = 0.$$

Если обозначения ребер произвольного контура графа записать как столбцовую блочную группу

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^k \alpha_i, \quad (61)$$

то можно убедиться, что



$$\frac{\partial A}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^k \alpha_i} = \frac{\partial^k A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_k} = 0, \quad (62)$$

а также

$$A^d \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = A^d \prod_{i=1}^k \alpha_i = 0. \quad (63)$$

Равенство (62) непосредственно следует из определения дерева, согласно которому дерево не содержит контуров; равенство же (63) следует из тождества

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = 0.$$

Соотношения (57) — (60) будем называть правилами организации контуров (структур) графа. Эти правила представляют собой, например, топологические эквиваленты второго закона Кирхгофа для организации контуров (структур) электрических цепей.

7.4. Правила организации сечений графа

Для произвольного сечения графа Γ топологической сферой, пересекающей его ребра $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, справедливо равенство

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p] = 0, \quad (64)$$

где $A = P_1 P_2 \dots P_m$ — блочная группа графа Γ . Это равенство следует из того, что однострочная блочная группа

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p]$$

равна одной из блочных групп P_1, P_2, \dots, P_m , представляющих собой простые сомножители блочной группы A или сумму



некоторых из них. Аналогично правилу организации контуров (структур) графа (59) можно получить следующие выражения:

$$\left[\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_1} \frac{\partial A^d}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial A^d}{\partial \alpha_p} \right] = 0 \quad (65)$$

или

$$\frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]} = 0, \quad (66)$$

где A^d — дополнительная блочная группа графа Γ .

Пример 5. Для сечения p графа топологической сферой, изображенного на рис. 2, на основании формул (64) и (65) запишем

$$A [1] + A [2] = 0, \quad \text{т.е.} \quad A[1]=A[2],$$

а также



$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} + \frac{\partial A^2}{\partial 2} = 0,$$

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} = \frac{\partial A^2}{\partial 2},$$

где A и A^d — блочная группа и дополнительная блочная группа графа.

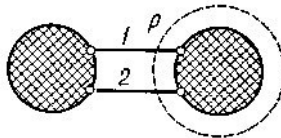


Рис. 2. Сечение графа топологической сферой.

Если обозначения ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ сечения графа Γ записать в виде столбцовой блочной группы

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^p \alpha_i, \quad (67)$$

то убедимся, что



$$A^d \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = A \prod_{i=1}^p \alpha_i = 0. \quad (68)$$

а также

$$\frac{\partial A^d}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}} = \frac{\partial A^d}{\partial \prod_{i=1}^p \alpha_i} = \frac{\partial^p A^d}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_p} = 0. \quad (69)$$

Эти соотношения непосредственно следуют из того, что блочная группа несвязного графа равна нулю.

Выражения (64) — (66), (68) и (69) будем называть *правилами выполнения сечений графа*. Эти правила, как пример, представляют собой топологические эквиваленты первого закона Кирхгофа для структур электрических цепей.

7.5. Блочная группа графа с замкнутыми вершинами

Правила организации контурных графов позволяют найти блочную группу $A_{\mu_1 \mu_2}^d$ графа с двумя произвольными замкнутыми вершинами μ_1 и μ_2 . Пусть произвольный путь, соединяющий вершины μ_1 и μ_2 , состоит из ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$. Тогда на основании правила организации контурных графов (60) блочная группа $A_{\mu_1 \mu_2}^d$ замкнутого графа равна

$$A_{\mu_1 \mu_2}^d = \frac{\partial A}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d]} = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial A}{\partial \alpha_d}, \quad (70)$$



где A — блочная группа незамкнутого графа. Согласно выражению (57), дополнительная блочная группа $A_{\mu_1\mu_2}^d$ замкнутого графа имеет вид

$$A_{\mu_1\mu_2}^d = A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d], \quad (71)$$

где A^d — дополнительная блочная группа незамкнутого графа.

Пример 6. Рассчитаем блочную группу $A_{\mu_1\mu_2}$ при замыкании вершин μ_1 и μ_2 в графе рис. 3.

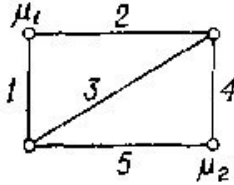


Рис. 3.

Блочная группа незамкнутого графа $A = [1 \ 2] [2 \ 3 \ 4] [4 \ 5]$, поэтому

$$A_{\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A}{\partial 1} + \frac{\partial A}{\partial 5} = [2 \ 3 \ 4] [4 \ 5] + [1 \ 2] [2 \ 3 \ 4] = [2 \ 3 \ 4] [1 \ 2 \ 4 \ 5].$$

Тот же самый результат получим, выбирая другой путь между вершинами μ_1 и μ_2 .

Рассмотрим случай замыкания нескольких вершин графа.

Обозначим через $d_{\mu_i\mu_j}$ произвольный путь, соединяющий вершины μ_i и μ_j (рис. 4).

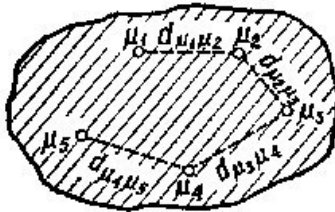


Рис. 4. Пути в графе,

Если этот путь состоит из ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$, то

$$\alpha_{\mu_i\mu_j} = [\alpha_1 \alpha_2, \dots \alpha_d] = \sum_{i=1}^d \alpha_i. \quad (72)$$



Замкнем в графе Γ вершины $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Обозначим $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ блочную группу замкнутого таким образом графа. Рассматривая поочередное замыкание вершин для блочной группы $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$, получим

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = \frac{\partial^{k-1} A}{\partial [d_{\mu_1\mu_2}] \partial [d_{\mu_2\mu_3}] \dots \partial [d_{\mu_{k-1}\mu_k}]}, \quad (73)$$

где A — блочная группа незамкнутого графа,

В выражении (73) $d_{\mu_1\mu_2}, d_{\mu_2\mu_3}, \dots, d_{\mu_{k-1}\mu_k}$ образуют путь, проходящий через промежуточные вершины $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{k-1}$ и соединяющий вершины μ_1 и μ_k незамкнутого графа Γ . Так как каждый из участков пути $d_{\mu_1\mu_2}, d_{\mu_2\mu_3}, \dots, d_{\mu_{k-1}\mu_k}$ при замыкании вершин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ образует в графе Γ контур, дополнительная блочная группа замкнутого графа равна

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}^d = A^d [d_{\mu_1\mu_2}] [d_{\mu_2\mu_3}] \dots [d_{\mu_{k-1}\mu_k}]. \quad (74)$$

Согласно правилу организации контурных графов, для произвольного участка пути имеем

$$\frac{\partial A}{\partial [d_{\mu_i\mu_j}]} = \frac{\partial A}{\partial [d_{\mu_{i-1}\mu_i}]} + \frac{\partial A}{\partial [d_{\mu_{i-1}\mu_j}]}. \quad (75)$$

Используя выражение (75), обобщим соотношения (73) и (74):

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^{k-1} d_i}, \quad (76)$$

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}^d = A^d \prod_{i=1}^{k-1} d_i, \quad (77)$$

где d_1, d_2, \dots, d_{k-1} — участки пути, образующие произвольное дерево, касающееся вершин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Произведение



$$D_k = \prod_{i=1}^{k-1} d_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{k-1} \end{bmatrix} \quad (78)$$

представляет собой замещающую блочную группу для блочной группы второго ранга, описывающего дерево, касающееся вершин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$.

Число участков пути, замыкающих граф, равное порядку производной блочной группы незамкнутого графа, будем называть порядком замыкания графа.

Пример 7. Найдем блочную группу графа $\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$, образованную замыканием вершин $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ графа Γ (рис. 5).

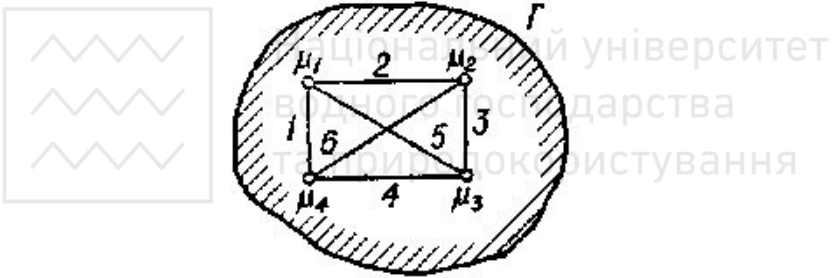


Рис. 5. Граф с выделенными ребрами.

Имеем

$$A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 5} = \text{и т.д.}$$

$$A^d_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = A^d \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A^d \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \text{и т.д.}$$

Из соотношений (76) и (77) сформулируем следующие следствия.



Следствие 1. Производные блочной группы графа по блочным группам деревьев ее подграфа равны.

Следствие 2. Произведения дополнительной блочной группы графа на блочные группы ее подграфов равны.

Примечание. Здесь подграф — связная часть графа, не имеющая общих ребер с его остальной частью.

В случае замыкания всех v вершин графа Γ блочная группа $A_{(v-1)}$ равна

$$\frac{\partial A}{\partial K_i} = 1, \quad (79)$$

где K_i — произвольный столбец блочной группы A , а дополнительная блочная группа равна

$$A^d K_i = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{bmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ — обозначения всех ребер графа Γ .

7.6. Блочная группа разомкнутого графа

Из формулы для блочной группы A графа Γ

$$A = P_1 P_2 \dots P_{v-1},$$

где P_i — однострочная блочная группа, состоящая из обозначений всех ветвей, инцидентных вершине μ_i , непосредственно следует, что блочная группа разомкнутого графа, полученная из графа Γ отсоединением от произвольной вершины μ_i одного конца ребра α , равна

$$A = A [\alpha] = \begin{bmatrix} A \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (80)$$

где A — блочная группа неразомкнутого графа Γ ; дополнительная же блочная группа равна

$$A^{da} = \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \quad (81)$$

где A^d — дополнительная блочная группа Γ .



Таким образом, при отсоединении от вершин графа Γ по одному концу ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ блочная группа полученного разомкнутого графа $\Gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$ имеет вид

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} A \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}^e = A \prod_{i=1}^r \alpha_i, \quad (82)$$

дополнительная же блочная группа имеет вид

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = \frac{\partial A^d}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}} = \frac{\partial A^d}{\partial \prod_{i=1}^r \alpha_i} = \frac{\partial^r A^d}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_r}. \quad (83)$$

Заметим, что при отсоединении от какой-либо вершины всех инцидентных с ней ребер граф станет несвязным, а его блочная группа — равной нулю. То же самое произойдет, если от вершины графа топологической сферой отсоединить концы всех ребер произвольного сечения графа.

Рассмотрим деление вершины графа.

Пример деления вершины μ графа Γ приведен на рис. 6.

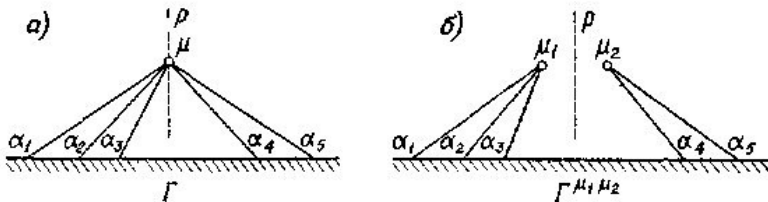


Рис. 6. Деление вершины графа: а) исходный граф; б) граф с разделенной вершиной.

Пусть ребра $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_p$ инцидентны вершине μ . Осуществим деление вершины на две вершины μ_1 и μ_2 так, что



вершине μ_1 остаются инцидентны ребра $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$, а вершине μ_2 — $\alpha_j, \dots, \alpha_p$. Согласно правилу сечения графа,

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_p] = 0,$$

т. е.

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i] = A[\alpha_j, \dots, \alpha_p].$$

Следовательно, подобно случаю отсоединения одного конца ребра, для блочной группы графа $\Gamma^{\mu_1\mu_2}$ с разделенной вершиной $\mu = \mu_1 + \mu_2$ имеем

$$A^{\mu_1\mu_2} = A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i] = A[\alpha_j, \dots, \alpha_p], \quad (84)$$

а для дополнительной блочной группы этого графа

$$A^{d\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A^d}{\partial[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i]} = \frac{\partial A^d}{\partial[\alpha_j, \dots, \alpha_p]}. \quad (85)$$

Пример 8. Для графа, изображенного на рис. 6, б, имеем

$$A^{\mu_1\mu_2} = A[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] = A[\alpha_4\alpha_5], \quad A^{d\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A^d}{\partial[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]} = \frac{\partial A^d}{\partial[\alpha_4\alpha_5]}.$$

где A (A^d) — блочная (дополнительная) группа графа, представленного на рис. 6, а.

7.7. Преобразование графа

Правила организации контурных графов и правила выполнения сечения графа, а также полученные из них соотношения для замыкания и размыкания графа позволяют определить блочную группу преобразованного графа. Рассмотрим в качестве примера следующие преобразования графов:

- соединение двух графов;
- отделение части графа;
- перемещение части графа.

а) Соединение двух графов

Пусть даны два графа Γ_1 и Γ_2 (рис. 7, а), для которых известны блочные группы A_1 и A_2 .

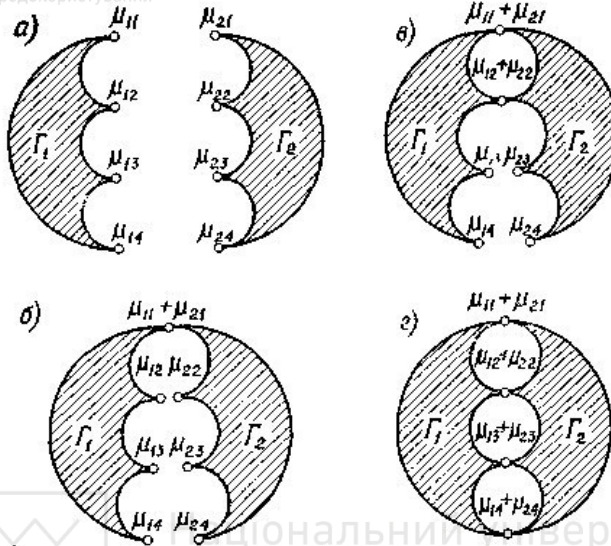


Рис. 7. Поочередное соединение вершин двух графов.

Соединим эти два графа, объединяя пары вершин: μ_{11} с μ_{21} , μ_{12} с μ_{21} , μ_{13} с μ_{23} и μ_{14} с μ_{24} .

Соединив вершины μ_{11} и μ_{21} , получим связный граф с одной общей точкой $\mu_{11} + \mu_{21}$ (рис. 7, б), блочные группы которой равны

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^e,$$

а дополнительная блочная группа

$$A_1^d A_2^d = \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \end{bmatrix}^e.$$

Соединив вершины μ_{12} и μ_{22} (рис. 7, в), получим граф, блочная группа которого

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \left[\begin{bmatrix} d_{\mu_{11}\mu_{12}} \\ d_{\mu_{21}\mu_{22}} \end{bmatrix} \right]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \left[d_{\mu_{11}\mu_{12}} \right]} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial \left[d_{\mu_{21}\mu_{22}} \right]} \end{bmatrix},$$



где $d_{\mu_1\mu_2}$ — произвольный путь графа G_1 между вершинами μ_1 и μ_2 , а $d_{\mu_2\mu_2}$ — произвольный путь графа G_2 между вершинами μ_2 и μ_2 .

Соединяя пары вершин μ_{13} с μ_{23} и μ_{14} с μ_{24} , окончательно получим граф G , состоящий из двух подграфов G_1 и G_2 (рис. 7, г), блочная группа которого имеет вид





$$\begin{aligned}
 {}^2A &= \partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\
 &= \partial \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] & [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \\ [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] & [d_{\mu_{22}\mu_{23}}] \\ [d_{\mu_{13}\mu_{14}}] & [d_{\mu_{23}\mu_{24}}] \end{bmatrix} & \partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}]} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} \\
 A_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}]} & \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} & \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \\
 &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} & \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}]} & \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}] \partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}]}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



Аналогично можно поступить и при большем числе объединяемых вершин нескольких графов.

б) Отделение части графа (подграфа)

Рассмотрим отделение от графа Γ его части (подграфа) Γ_2 (рис. 8, а). В результате получим граф Γ_1 (рис. 8, в).

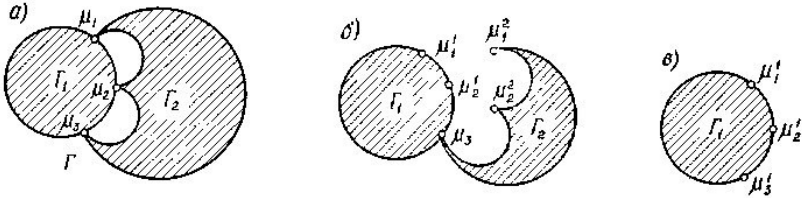


Рис. 8. Поочередное отделение части графа.

Если вершине μ_1^2 подграфа Γ_2 инцидентны ребра этого подграфа $\alpha_{211}^2, \alpha_{212}^2, \dots, \alpha_{21m1}^2$, а вершине μ_2^2 — ребра $\alpha_{221}^2, \alpha_{222}^2, \dots, \alpha_{22m2}^2$, причем

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= [\alpha_{211}^2 \alpha_{212}^2 \dots \alpha_{21m1}^2] \\ \mu_2^2 &= [\alpha_{221}^2 \alpha_{222}^2 \dots \alpha_{22m2}^2] \end{aligned}$$

то, согласно правилам разделения вершин графа, блочная группа графа, полученная разделением вершин μ_1 и μ_2 графа Γ (рис. 8, б), равна

$$A[\mu_1^2] [\mu_2^2] \quad (\text{или } A[\mu_1^1] [\mu_2^1]) \quad (\text{а})$$

а дополнительная блочная группа

$$\frac{\partial^2 A^d}{\partial [\mu_1^2] \partial [\mu_2^2]} \quad (\text{или } \frac{\partial^2 A^d}{\partial [\mu_1^1] \partial [\mu_2^1]}) \quad (\text{б})$$

где $A (A^d)$ — блочная (дополнительная) группа графа Γ .

Граф (рис. 8, б) имеет одну общую вершину, поэтому его блочную группу можно представить в виде произведения блочных групп A_1 и A_2 , а его дополнительную блочную группу — в виде произведения дополнительных блочных групп A_1^d и A_2^d . Так как оба подграфа Γ_1 и Γ_2 не имеют общих ребер, т. е.

$$\frac{\partial A_1}{\partial D_2} = 0, \quad \frac{\partial A_1^d}{\partial D_2^d} = 0,$$



$$\frac{\partial A_2}{\partial D_2} = 1, \quad \frac{\partial A_2^d}{\partial D_2^d} = 1,$$

где D_2 — блочная группа произвольного дерева подграфа Γ_2 , а D_2^d — блочная группа произвольного дополнения дерева подграфа Γ_2 , то

$$A_1 = \frac{\partial A_1 A_2}{\partial D_2}$$

и

$$A_1^d = \frac{\partial A_1^d A_2^d}{\partial D_2^d}$$

Заменяя в этих равенствах произведения $A_1 A_2$ и $A_1^d A_2^d$ выражениями (а) и (б), получим

$$A_1 = \frac{\partial A[\mu_1^2][\mu_2^2]}{\partial D_2} \quad (\text{или } A_1 = \frac{\partial A[\mu_1^1][\mu_2^1]}{\partial D_2}),$$

$$A_1^d = \frac{\partial A^d[\mu_1^2][\mu_2^2]}{\partial D_2^d} \quad (\text{или } A_1^d = \frac{\partial A^d[\mu_1^1][\mu_2^1]}{\partial D_2^d}).$$

В общем случае, когда подграфы Γ_1 и Γ_2 соединены p вершинами, последние выражения принимают вид

$$A_1 = \frac{\partial \left(A \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_1^2] \right)}{\partial D_2} \quad (\text{или } A_1 = \frac{\partial \left(A \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_1^1] \right)}{\partial D_2}), \quad (86)$$

$$A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial \left(D_2^d \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_1^2] \right)} \quad (\text{или } A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial \left(D_2^d \prod_{i=1}^{p-1} [\mu_1^1] \right)}) \quad (87)$$

Пример 9. Найдем блочную группу графа Γ (рис. 9) при отключении узла μ с инцидентными ребрами 1, 2, 3.

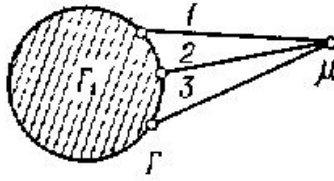


Рис. 9. Граф с выделенной вершиной μ .

Согласно выражениям (86) и (87), имеем

$$A_1 = \frac{\partial \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}{\partial \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{\partial^3 \left(A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 3} \cdot 1 + \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 3} \cdot 2 + \frac{\partial A}{\partial 3},$$

$$A^d_1 = \frac{\partial^2 A^d}{\partial 1 \partial 2} \quad (\text{так как } D^d_2 = 1).$$

в) Перемещение части графа (подграфа)

Под перемещением подграфа будем понимать изменение вершин соединения подграфа с остальной частью графа. Пример перемещения подграфа Γ_1 показан на рис. 10, где пунктирной линией изображен подграф Γ_1 после перемещения.

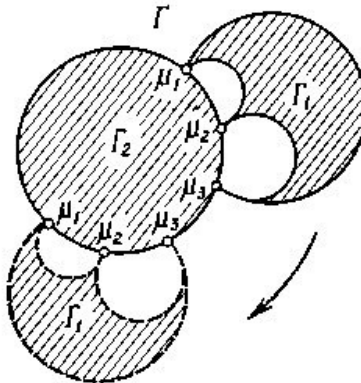


Рис. 10. Перемещение подграфа Γ_1



Блочная группа графа, полученная в результате перемещения подграфа Γ_1 , рассчитывается следующим образом: сначала определяется блочная группа графа Γ_2 после отключения подграфа Γ_1 от графа Γ ; затем присоединяется подграф Γ_1 к другим вершинам графа Γ_2 и находится блочная группа образованного таким образом графа, при этом используются формулы из примеров а) и б).

Для иллюстрации этого метода приведем пример перемещения ребра α графа Γ (рис. 11).

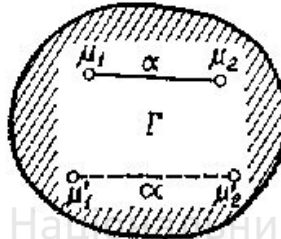


Рис. 11. Перемещение ребра α .

Блочная группа графа Γ с отключенным от вершин μ_1 и μ_2 ребром α , согласно соотношениям (86), равна

$$A_1 = \frac{\partial(A \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\delta A}{\delta \alpha}.$$

После присоединения конца отключенного ребра α к новой вершине μ'_1 графа Γ его блочная группа будет равна

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha.$$

Если присоединить другой конец ребра α к вершине μ'_2 , то

$$A' = \frac{\partial \left(\frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha \right)}{\partial \left[\alpha \left[d_{\mu_1 \mu_2} \right] \right]} = \frac{\delta A}{\delta \alpha} + \frac{\partial \left(\frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha \right)}{\partial \left[d_{\mu'_1 \mu'_2} \right]},$$

где $d_{\mu'_1 \mu'_2}$ — произвольный путь графа Γ между вершинами μ'_1 и μ'_2 , а A' — блочная группа графа Γ с перемещенным ребром α .



7.8. Графы второй категории (модуль-графы)

7.8.1. Определение модуль-графа

Если определить связный граф Γ как упорядоченную тройку

$$\Gamma = \langle P, U, \varepsilon \rangle \quad (88)$$

(где P — множество вершин графа Γ , U — множество ребер графа Γ , ε — двухаргументное соотношение инциденции) и выделить в этом графе его связную часть

$$\Gamma_1 = \langle P_1, U_1, \varepsilon_1 \rangle,$$

а оставшуюся часть (необязательно связную) определить как

$$\Gamma_2 = \langle P_2, U_2, \varepsilon_2 \rangle,$$

то для подграфа Γ_1 графа Γ можно записать следующее определение.

Определение 7. Подграф $\Gamma_1 = \langle P_1, U_1, \varepsilon_1 \rangle$ графа $\Gamma = \langle P, U, \varepsilon \rangle$ есть связная часть графа Γ , удовлетворяющая вместе с остальной частью $\Gamma_2 = \langle P_2, U_2, \varepsilon_2 \rangle$ этого графа следующим условиям:

$$(P_1 \cap P_2 = P_k \neq 0) \wedge (P_1 \cup P_2) \wedge (U_1 \cap U_2 = 0) \wedge (U_1 \cup U_2 = U) \wedge \\ \wedge (\varepsilon_1 \subset \varepsilon) \wedge (\varepsilon_2 \subset \varepsilon) \wedge (\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \varepsilon), \quad (89)$$

где $P_k \subset P_1 \subset P$; P_{k_1} — множество концов (выделенных вершин) подграфа F_1 .

Граф может состоять из большого числа g подграфов, для которых выполняется соотношение

$$\{ \forall i, j (U_i \cap U_j = 0) \} \wedge \left(\bigcup_{i=1}^g U_i = U \right) \wedge \left(\bigcup_{i=1}^g P_i = P \right) \wedge \\ \wedge \left(\bigcup_{i=1}^g \varepsilon_i = \varepsilon \right) \wedge \{ \forall j \exists i (P_i \cap P_j \neq 0) \}, \quad i, j=1, 2, \dots, g. \quad (89a)$$

Подграфы будем изображать на плоскости в виде одномерных и двумерных континуумов с выделенными (по крайней мере двумя) точками, называемыми полюсами, входами, зажимами. Эти континуумы будем называть **модулями**. Описанный таким образом граф, состоящий из модулей, назовем графом второго



ранга или модуль-графом и определим как упорядоченную тройку

$$\Gamma = \langle P, Z, \varepsilon \rangle, \quad (90)$$

где P — множество вершин графа, Z — множество модулей, ε — многоаргументное соотношение инциденции.

Рис. 12 иллюстрирует способ изображения модуль-графов.

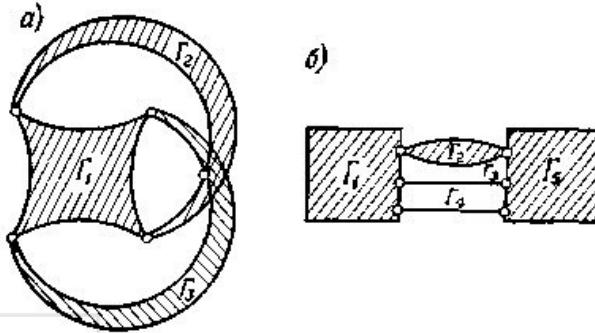


Рис. 12. Примеры модуль-графов.

На рис. 12, *а* модуль Γ_1 четырехполюсный, а модули Γ_2 и Γ_3 трех-полюсные; на рис. 12, *б* модули Γ_1 и Γ_5 трехполюсные, модуль Γ_2 двухполюсный, а двухполюсные модули Γ_3 и Γ_4 образуют ребра (одномерные континуумы). Если все модули — одномерные континуумы и соотношение ε инциденции есть функция двух аргументов, то получаем линейный граф (первого ранга); его модули представляют собой ребра. Следовательно, линейный граф — лишь частный случай модуль-графов. Любой линейный граф можно преобразовать в модуль-граф, заменив каждое его ребро двумерным, двухполюсным модулем. Можно поступить и наоборот, т. е. модуль-граф преобразовать в линейный граф, заменив каждый его модуль линейным графом (подграфом).

Примечание. Модуль-граф можно преобразовать в линейный граф, если заменить каждый модуль графа вершиной линейного графа, а каждую его вершину соответствующим числом ребер линейного графа, равным числу полюсов модулей в вершине, минус единица.



7.8.2. Блочная группа модуль-графа

Модули $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$ модуль-графа представляют собой подграфы, блочные группы которых обозначим через A_1, A_2, \dots, A_g , а дополнительные блочные группы — $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_g$. Найдем блочную группу A и дополнительную блочную группу A^d модуль-графа с помощью блочных групп его модулей A_1, A_2, \dots, A_g или их дополнительных блочных групп $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_g$. С этой целью введем понятие **скелета модуль-графа**.

Определение 8. Скелетом Γ_0 модуль-графа Γ называется граф, полученный в результате замены каждого модуля Γ_k графа Γ деревом D_k , составленным из отрезков, соединяющих полюсы и касающихся всех полюсов модуля. Ребра дерева D_k соответствуют произвольным путям между полюсами модуля Γ_k .

Это определение можно записать следующим образом:

$$\Gamma_0 = \langle P, Z_0, \varepsilon \rangle, \quad (91)$$

где P — множество вершин модуль-графа Γ , Z_0 — множество деревьев D_k модулей графа Γ , ε — многоаргументное соотношение инциденции графа Γ .

В качестве примера (рис. 13) изображены скелеты: модуль-графов, показанных на рис. 12.

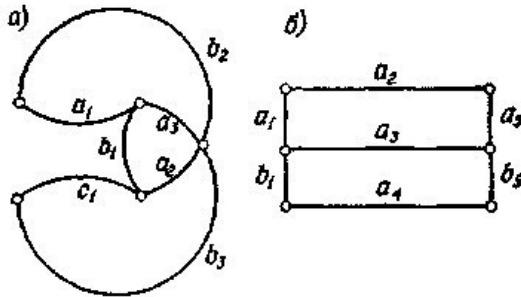


Рис. 13. Скелеты модуль-графов, изображенных на рис. 12.

Ребра a_1, b_1, c_1 (рис. 13. а) образуют дерево D_1 модуля Γ_1 , ребра a_2, b_2 — дерево D_2 модуля Γ_2 , а ребра a_3, b_3 — дерево D_3 модуля Γ_3 графа (рис. 12, а).

Число ребер, образующих дерево D_k модуля Γ_k , равно $v_k - 1$, где v_k — число полюсов этого модуля.

Скелет графа Γ имеет p ребер, причем



$$p = \sum_{k=1}^g (v_k - 1), \quad (92)$$

где g — число модулей графа Γ .

Цикломатическое число M скелета графа Γ равно

$$M = \sum_{k=1}^g (v_k - 1) - (v - 1) = \sum_{k=1}^g v_k - v - g + 1, \quad (93)$$

где v — число вершин графа Γ . Например, для графа, изображенного на рис. 12, а, цикломатическое число скелета Γ_0

$$M = (4 + 3 + 3) - 5 - 3 + 1 = 3.$$

Заметим, что для всех скелетов модуль-графа Γ число ребер p , число вершин v и цикломатическое число M постоянны.

Как следует из формулы (94), для линейного (состоящего из ребер) графа можно построить лишь один скелет ($\Gamma_0 = 1$), который изоморфен рассматриваемому графу. Лишь один скелет также соответствует графу, состоящему из двухполюсных модулей.

Представление пути d ребром a скелета Γ_0 выражается в виде

$$[a] = [d].$$

Например, для ребра дерева D_k (рис. 14, пунктирная линия) напомним

$$[a_k] = [1 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$[b_k] = [4 \ 6 \ 7] \text{ (рис. 14, а) или } [b_k] = [4 \ 3 \ 5 \ 7] \text{ (рис. 14, б),}$$

$$[c_k] = [8 \ 9] \text{ (рис. 14, а) при } [c_k] = [8 \ 10 \ 11 \ 12] \text{ (рис. 14, б).}$$

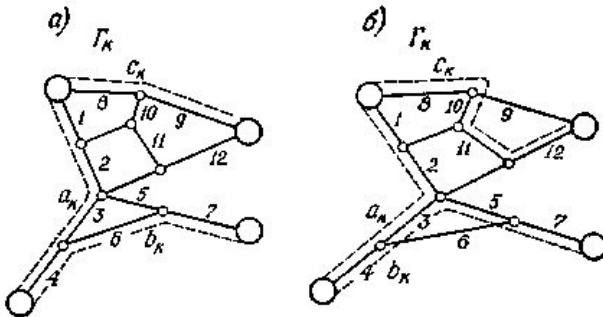


Рис. 14. Представление ребра подграфа Γ_k ребрами дерева D_k (пунктир), концы подграфа выделены.

Приведем утверждение для модуль-графов.

Утверждение 1. Блочную группу A модуль-графа Γ всегда можно записать в виде



$$A = \frac{\prod_{i=1}^g A_i}{\partial A_0^{\partial}}, \quad (95)$$

а дополнительная блочная группа A^d этого графа в виде

$$A^d = A_0^d \prod_{i=1}^g A_i^d, \quad (96)$$

где A_1, A_2, \dots, A_g — блочные группы модулей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$ графа Γ ; $A_1^d, A_2^d, \dots, A_g^d$ — дополнительные блочные группы модулей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$ графа Γ ; A_0^d — дополнительная блочная группа скелета графа Γ ; g — число модулей графа Γ .

Докажем утверждение методом полной математической индукции.

Скелет Γ_0 графа Γ преобразуем в граф Γ_0^1 , не содержащий контуров. Для этого выполним однополюсное отключение M ребер l_1, l_2, \dots, l_M произвольного дополнения графа Γ^1 .

Блочная группа A^1 графа Γ^1 , полученная путем преобразования модуль-графа Γ (подобно преобразованию графа Γ_0 в граф Γ_0^1), равна

$$A^1 = \prod_{i=1}^g A_i, \quad (a)$$

так как граф Γ^1 имеет общие точки, соединяющие отдельные модули.

В этом выражении A_1, A_2, \dots, A_g — блочные группы модулей $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$ рассматриваемого графа Γ . Заметим, что

произведение $\prod_{i=1}^g A_i$ не имеет так называемого дефекта

произведения, так как блочные группы A_1, A_2, \dots, A_g не содержат общих элементов.

В графе Γ_0^1 будем поочередно присоединять отключенные ранее концы ребер дополнения. Присоединив концы ребра l_1 ,



получим первый контур, состоящий из последующих ребер графа $\overset{2}{\Gamma}_0$:

$$l_1, l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1\alpha}$$

Блочная группа $\overset{2}{A}$ соответственно преобразованного графа $\overset{2}{\Gamma}$ [согласно выражению (70), при замыкании вершин графа] равно

$$\overset{0}{A} = \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_1} + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{11}} + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{12}} + \dots + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{1\alpha}}, \quad (6)$$

а дополнительная блочная группа $\overset{2}{A}_0^d$ графа $\overset{2}{\Gamma}_0$ равна

$$\overset{2}{A}_0^d = [l_1 l_{11} l_{12} \dots l_{1\alpha}]. \quad (в)$$

Учитывая в равенстве (6) соотношения (а) и (в), получим

$$\overset{0}{A} = \frac{\partial \prod_{i=1}^g \overset{1}{A}_i}{\partial \overset{d}{A}_0}$$

Граф $\overset{M-1}{\Gamma}_0$, образованный путем присоединения $M - 1$ ребер дополнения l_1, l_2, \dots, l_{M-1} , имеет $M - 1$ независимых контуров.

Пусть для преобразованного таким образом графа $\overset{M-1}{\Gamma}$

блочная группа $\overset{M-1}{A}$ равна

$$\overset{M-1}{A} = \frac{\partial \prod_{i=1}^g \overset{1}{A}_i}{\partial \overset{d}{A}_0^{M-1}},$$

где $\overset{d}{A}_0^{M-1} = C_1 C_2 \dots C_{M-1}$; C_1, C_2, \dots, C_{M-1} — блочные группы независимых контуров графа $\overset{M-1}{\Gamma}_0$.



Замечание. Блочная группа контура графа — однострочная блочная группа, элементы которой представляют собой обозначения всех ребер этого контура.

Присоединив последнее ребро l_M , получим скелет Γ_0 графа Γ . Ребро l_M замыкает M -ый независимый контур, состоящий из ребер

$$l_M, l_{M_1}, l_{M_2}, \dots, l_{M_\zeta}.$$

На основании формулы замыкания вершин графа блочная группа A графа Γ равна

$$A = \frac{\partial A}{\partial l_M} + \frac{\partial A}{\partial l_{M_1}} + \frac{\partial A}{\partial l_{M_2}} + \dots + \frac{\partial A}{\partial l_{M_\zeta}},$$

а дополнительная блочная группа A^d_0 скелета Γ_0 равна

$$A^d_0 = A^{d_0} [l_M l_{M_1} l_{M_2} \dots l_{M_\zeta}]. \quad (e)$$

Учитывая равенство (г) и (е), из выражения (д) получим

$$A = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial \left(A^d_0 [l_M l_{M_1} l_{M_2} \dots l_{M_\zeta}] \right)} = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial A^d_0},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать формулу (96) для дополнительной блочной группы A^d модуль-графа Γ .

Выражения (95) и (96) можно записать в виде блочных групп второго ранга

$$A^{e^2} A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}, \quad (97)$$



$$A^d = {}^e A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Этот способ записи более нагляден и удобен на практике. Сравнивая блочные группы 2A и ${}^2A^d$ произвольного модуль-графа, заметим, что их элементы связаны соотношением

$$(A_{ij})^d = A^d_{ij}.$$

Тогда

$$({}^2A)^{d*} = {}^2A^d,$$

т. е.

$$A^d = A^d, A = {}^2A, A^d = {}^e A^d, (A^d)^d = ({}^2A)^{d*}.$$

Проиллюстрируем способ расчета блочной группы модуль-графа на примере.

Пример 10. Найдем блочную группу модуль-графа рис. 15, а, скелет Γ_0 которого приведен на рис. 15, б.

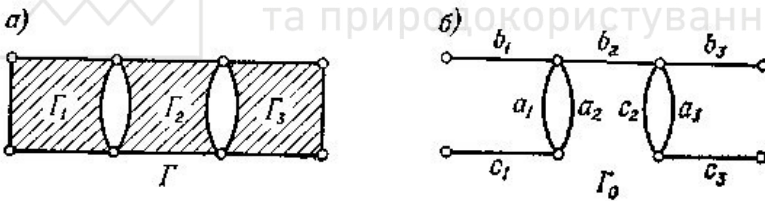


Рис. 15.

Дополнительная блочная группа модуль-графа скелета Γ_0 равна

$$A^d_0 = a_1 a_2 \quad c_2 a_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ c_2 & a_3 & c_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

а блочная группа A графа Γ равна



$$A = {}^e_2 A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & A_1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_2 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial c_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \\ A_3 \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} \end{bmatrix}.$$

Для первого столбца этой блочной группы второго ранга найдем алгебраическую производную

$$\frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} a_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 (A_1 A_2 A_3)}{\partial a_1 \partial c_2} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \frac{\partial (A_1 A_2 A_3)}{\partial c_2} \right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_1 A_3 + A_2 \frac{\partial (A_1 A_3)}{\partial c_2} \right\}$$

Так как путь c_2 принадлежит только модулю Γ_2 , то

$$A_2 \frac{\partial (A_1 A_3)}{\partial c_2} = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_1 A_3 \right) = \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 + A_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 \right)$$

Поскольку путь a_1 принадлежит только модулю Γ_1 , то

$$A_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 \right) = 0$$

и последнее выражение приводится к виду



$$\frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

На основании этого примера алгебраическую производную

$$\frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}$$

можно определить, применяя следующие правила:

1) Если обозначить столбцы дополнительной блочной группы A^d_0 скелета модуль-графа как $K^d_1, K^d_2, \dots, K^d_{T_s}$, то

$$\frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial K^d_1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial K^d_2} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \dots \frac{\partial}{\partial K^d_{T_s}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \right].$$

Следовательно, блочная группа второго ранга 2A имеет g строк, где g — число модулей графа Γ .

2. Столбцы K^d_i дополнительной блочной группы A^d_0 содержат элементы, представляющие собой обозначения путей в отдельных модулях графа Γ , и не содержат путей, общих для разных модулей. Поэтому если предположить, что произвольный столбец K^d_i содержит элементы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k_1}$ — из модуля Γ_1 ,

$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k_2}$ — из модуля Γ_2 ,

.....

$a_{g1}, a_{g2}, \dots, a_{gk_g}$ — из модуля Γ_g ,



причем число элементов некоторых модулей может быть равно нулю ($k_i=0$), то

$$\frac{\partial}{\partial K^d_i} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{k_1} A_1}{\partial a_{11} \partial a_{12} \cdots \partial a_{1k_1}} \\ \frac{\partial^{k_2} A_2}{\partial a_{21} \partial a_{22} \cdots \partial a_{2k_2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^{k_g} A_g}{\partial a_{g1} \partial a_{g2} \cdots \partial a_{gk_g}} \end{bmatrix}.$$

Для $k_i = 0$ примем $(\partial^0 A_i / \partial 0) = A_i$.

Из этого выражения вытекают следующие следствия.

Следствие 3. Число столбцов блочной группы второго ранга 2A модуль-графа Γ равно числу столбцов дополнительной блочной группы A^d_0 скелета графа Γ .

Следствие 4. Сумма порядков производных блочных групп модуль-графа Γ в каждом столбце блочной группы второго ранга 2A графа Γ одинакова и равна числу строк дополнительной блочной группы A^d_0 скелета графа Γ (или цикломатическому числу этого скелета).

Вернемся к примеру 10. Найдем дополнительную блочную группу второго ранга ${}^2A^d$ модуль-графа рис. 15, а. Согласно (98),

$$\begin{aligned} {}^2A^d &= A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ c_2 & a_3 & c_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A^d_1 & a_1 & A^d_1 & a_1 & A^d_1 & A^d_1 \\ A^d_2 & c_2 & A^d_2 & A^d_2 & a_2 & c_3 & A^d_2 & a_2 \\ A^d_3 & A^d_3 & a_3 & A^d_3 & A^d_3 & A^d_3 & a_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Заметим, что блочная группа второго ранга ${}^2A^d$ имеет те же свойства, что и блочная группа 2A , с той лишь разницей, что вместо производных блочных групп модулей ее элементы есть произведения дополнительных блочных групп и путей отдельных модулей графа.

Как следует из (94), для модуль-графа можно составить один или несколько скелетов Γ_0 , поэтому из утверждения 1 вытекает следующее.

Следствие 5. Блочная группа A модуль-графа Γ не зависит от выбора скелета Γ_0 , т. е. она тождественно равна для всех Γ_0 скелетов данного графа Γ .

Пример 11. Найти блочную группу A графа рис. 16, а по двум разным его скелетам Γ_0 и Γ_0^* (рис. 16, б и в).

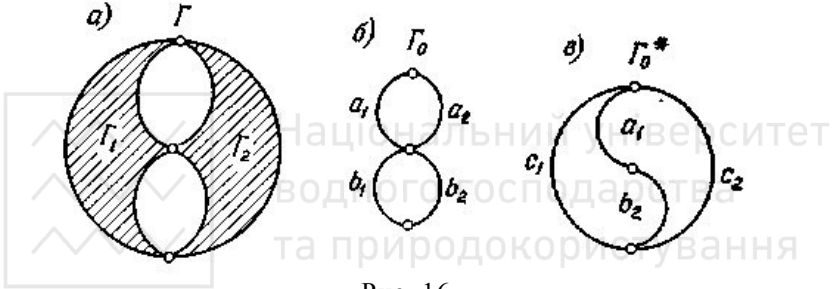


Рис. 16.

Решение.

$$\begin{aligned}
 {}^2A &= \frac{\partial}{\partial A_0^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На основании правила построения контных графов напомним



$$\frac{\partial A_1}{\partial c_1} = \frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1}{\partial b_1},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial c_2} = \frac{\partial A_2}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2}{\partial b_2},$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial c_1} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1},$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial b_2 \partial c_2} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2}.$$

Подставив эти соотношения в выражения блочной группы ${}^2A^*$, получим

$${}^2A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$${}^2A = {}^2A^*.$$

7.8.3. Дерево второго ранга

Геометрическое изображение столбца блочной группы первого ранга представляет собой дерево, а геометрическое изображение дополнительной блочной группы — дополнение дерева или дерево обратного изображения блочной группы.

Столбец блочной группы второго ранга 2A модуль-графа Γ можно рассматривать как блочную группу — столбец второго ранга, геометрическое изображение которого будем называть деревом второго ранга. Скелет дерева второго ранга назовем



обобщенным деревом скелета Γ_0 . В качестве примера рассмотрим модуль-граф рис. 17, а, скелет которого представлен на рис. 17, б.

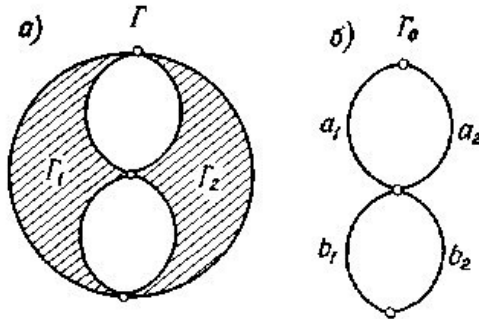


Рис. 17.

Блочная группа второго ранга 2A этого графа равна



$${}^2A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \end{bmatrix}.$$

На рис. 18, а изображены деревья второго ранга графа Γ , представляющие собой геометрические изображения отдельных столбцов блочной группы 2A , а на рис. 18, б — обобщенные деревья скелета графа Γ .

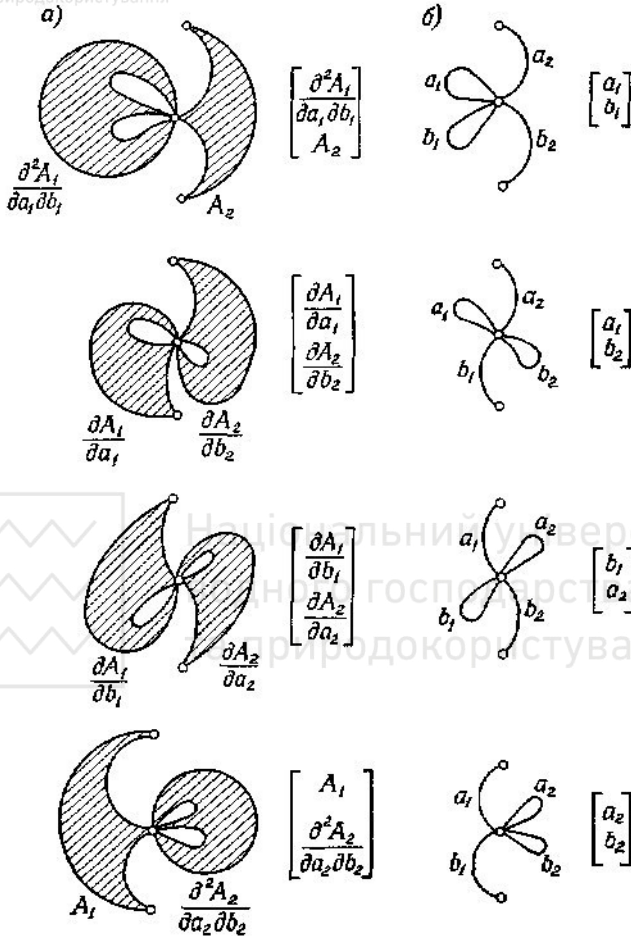


Рис. 18.

Учитывая, что модули графа Γ не содержат общих ребер, определим дерево второго ранга.

Определение 9. Деревом второго ранга графа Γ или геометрическим изображением столбца блочной группы второго ранга 2A этого графа называется связный граф, имеющий $g - 1$ общих точек, соединяющих g модулей, которые служат геометрическими изображениями (или обратными изображениями) блочных групп, составляющих столбцы



блочной группы 2A . Блочные группы дерева второго ранга представляют собой модули графа Γ , по-разному преобразованные путем замыкания их полюсов.

Так как модули дерева второго ранга можно соединять общими точками разными способами, то столбец блочной группы 2A как блочная группа второго ранга соответствует классу деревьев второго ранга. Поэтому под числом деревьев второго ранга T графа Γ понимается число классов этих деревьев.

Очевидно, что при преобразовании графа в дерево второго ранга постоянны следующие величины: g — число модулей, v — число вершин и M — цикломатическое число графа, в то время как при преобразовании графа в дерево первого ранга постоянно лишь число вершин u .

Аналогично определим обобщенное дерево скелета графа Γ .

Определение 10. Обобщенное дерево скелета Γ_0 есть связный граф, имеющий $g - 1$ общих точек, соединяющих g графов, полученных путем соответствующего преобразования деревьев отдельных модулей, входящих в состав дерева второго ранга.

Подобно дереву второго ранга графа Γ , под числом T обобщенных деревьев скелета Γ_0 понимается число классов этих деревьев.

Как и ранее, при преобразовании скелета Γ_0 в обобщенное дерево постоянны: g — число ребер, v — число вершин, M — цикломатическое число скелета.

Число T классов подобных деревьев второго ранга графа Γ , равное числу классов подобных обобщенных деревьев скелета Γ_0 (а также числу деревьев скелета Γ_0), можно определить на основании формулы Трента, применимой к скелету Γ_0

$$T = \text{Det}|\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i| = \text{Det}(U^{v-1}_{v-1}), \quad (99)$$

где ε — матрица инцидентий вершин (матрица соединений вершин) скелета Γ_0 , ε_i — транспонированная матрица ε , U^{v-1}_{v-1} — квадратная симметричная матрица порядка $v-1$, элементы которой удовлетворяют равенству

$$u^i_j = -(-1)^{-\delta_{ij}} \text{card}(\{P_{\mu_i}\} \cap \{P_{\mu_j}\}) = \begin{cases} +\text{card}\{P_{\mu_i}\} & | i = j, \\ -\text{card}(\{P_{\mu_i}\} \cap \{P_{\mu_j}\}) & | i \neq j, \end{cases}$$

где b_{ij} — символ Кронекера, $\{P_{\mu_i}\}(\{P_{\mu_j}\})$ — множество ребер, инцидентных вершине μ_i (μ_j) скелета Γ_0 , v — число вершин скелета.



Для планарных скелетов число T можно определить по формуле

$$T = \text{Det}(U_M^M), \quad (100)$$

где U_M^M — квадратная симметричная матрица порядка M , элементы которой

$$u_{ij}^i = -(-1)^{-\delta_{ij}} \text{card}(\{C_i\} \cap \{C_j\}) = \begin{cases} +\text{card}\{C_i\} & |i = j, \\ -\text{card}(\{C_i\} \cap \{C_j\}) & |i \neq j, \end{cases}$$

где $\{C_i\}$ ($\{C_j\}$) — множество ребер, составляющих контур i (j) скелета Γ_0 , M — цикломатическое число скелета.

Замечание. Вышеприведенные формулы справедливы для любых линейных графов.

Следует отметить, что для различных скелетов Γ_0 данного графа Γ число T может быть разным. Однако существует наименьшее число T_{\min} для графа Γ , которое соответствует скелету Γ_0 , дополнительная блочная группа которого A_0^d содержит наименьшее количество столбцов.

Если граф содержит только двухполюсные модули, то ему соответствует один скелет, каждое ребро которого служит деревом для двухполюсного модуля. Пример такого графа Γ и его скелета Γ_0 приведен на рис. 19.

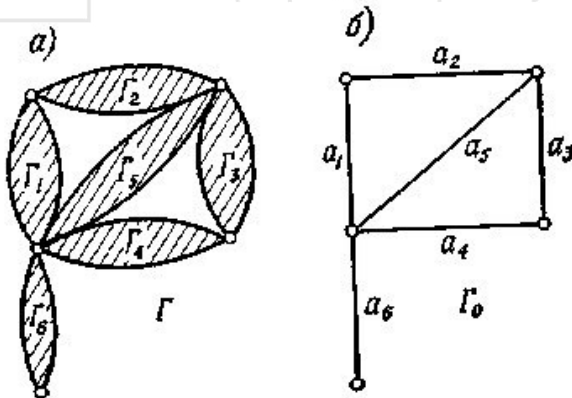


Рис. 19. Граф, состоящий из двухполюсных модулей: а) граф; б) скелет графа.

Пример 12. Найти для графа рис. 19, а блочную группу 2A .
Имеем



$$A_0^d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_2 & a_5 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_3 & a_4 & a_5 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},$$

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A_0^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & A_2 & A_2 \\ \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 \\ A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} & A_4 & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} & A_4 & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} \\ A_5 & A_5 & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & A_5 & A_5 & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} \\ A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой блочной группы представляют собой деревья второго ранга графа G ; первые два столбца вместе с соответствующими обобщенными деревьями скелета G_0 изображены на рис. 20.

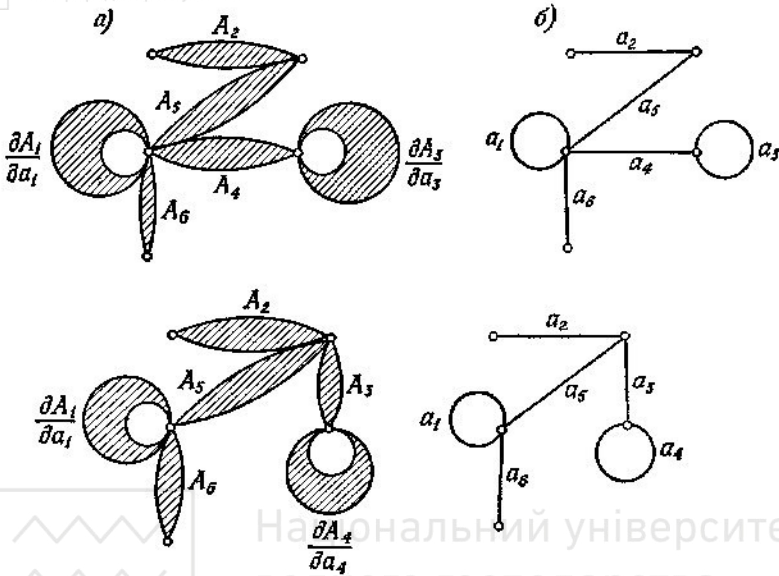


Рис. 20. Деревья второго ранга модуль-графа: а) деревья графа рис. 19, а; б) обобщенные деревья скелета графа рис. 9, б.

Если предположить, что двухполюсные модули графа Γ (рис. 19, а) — ребра, то деревья второго ранга этого линейного графа будут изоморфны обобщенным деревьям скелета Γ_0 , два из которых приведены на рис. 20, б. Блочные группы A и A^d для линейного графа, изоморфного его скелету (рис. 19, б), соответственно равны

$$A^e = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2 & 2 \\ \emptyset & 3 & 3 & \emptyset & 3 & 3 & \emptyset & 3 \\ 4 & \emptyset & 4 & 4 & \emptyset & 4 & 4 & \emptyset \\ 5 & 5 & \emptyset & 5 & 5 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}^e,$$



так как $\frac{\partial A_1}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial_1} 1 = \emptyset = 1, \frac{\partial}{\partial_2} 2 = \emptyset = 1$ и т. д;

$$A = \begin{matrix} e \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \\ 3 & \emptyset & \dots \\ \emptyset & 4 & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} e \\ \begin{bmatrix} 111222 & 34 \\ 34534555 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

так как $A^d_1 = \emptyset, \frac{\partial A^d_1}{\partial a_1}$ и т. д.

Как следует из примера 12, формулы для блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа справедливы также и для линейных графов с двухаргументным соотношением инциденции s . Столбцы полученной блочной группы соответствуют обобщенным деревьям, представляющим собой деревья с присоединенными петлями дополнения.

7.8.4. Модуль-граф с выделенными элементами

Часто возникает необходимость анализа графа с выделенными (конкретными) элементами, и осуществлять анализ этих графов не вникая в их структуру. В этих случаях будем пользоваться формулами для расчета блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа.

Рассмотрим несколько примеров.

а. Граф с выделенными ребрами (рис. 21)

На рис. 21 изображен граф Γ с выделенными ребрами α, β и γ . Обозначим через A_1 блочную группу этого графа без ребер α, β и γ , а через A блочную группу графа Γ с этими ребрами.

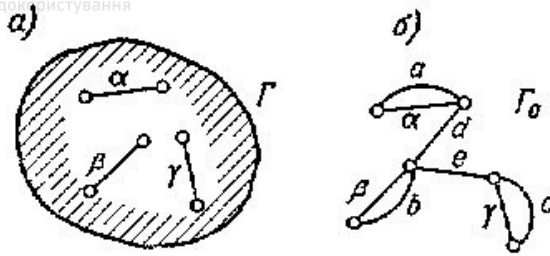


Рис. 21. Модуль-граф с выделенными ребрами: а) граф; б) скелет графа.

Представим граф Γ в виде модуль-графа, состоящего из 4 модулей: шестиполусного модуля Γ_1 (граф Γ без ребер α , β и γ) и двухполюсных модулей α , β и γ . Скелет G_0 этого графа приведен на рис. 21, б. В скелете G_0 дерево модуля Γ_1 состоит из путей a , b , c , d и e . Дополнительная блочная группа A^d_0 скелета G_0 равна

$$A^d_0 = \begin{matrix} \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \\ \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \\ \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \\ \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \\ \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \\ \alpha\alpha & \beta\beta & \gamma\gamma \end{matrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & b & \beta & b & \beta & b & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma & c & \gamma & c & c & \gamma \end{bmatrix}.$$

Блочная группа второго ранга 2A графа Γ имеет вид

$${}^2A = \frac{\partial}{A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial c} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial c} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b \partial c} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b \partial c} \\ \alpha & \emptyset & \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \alpha & \beta & a \\ \beta & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \beta & \gamma & \gamma & \beta \\ \gamma & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \gamma \end{bmatrix}.$$

а дополнительная блочная группа графа равна

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} A^d_0 A^d_1.$$



Если ребра α , β и γ образуют контур (треугольник), то

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial c} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial b \partial c}, \quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b \partial c} = 0,$$

$$A_1^d a b = A_1^d a c = A_1^d b c, \quad A_1^d a b c = 0.$$

В этом случае блочная группа графа Γ

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial c} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} \\ \emptyset & \alpha & \beta & \gamma & A_\Delta \end{bmatrix}.$$

где $A_\Delta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \gamma \end{bmatrix}$ — блочная группа графа, представляющая

собой контур (треугольник), состоящий из ребер α , β и γ .
Дополнительная блочная группа этого графа равна

$${}^2A^d = A_1^d \begin{bmatrix} \alpha & a & \alpha & \alpha & a \\ \beta & \beta & b & \beta & b \\ \gamma & \gamma & \gamma & c & A_\Delta^d \end{bmatrix}.$$

где $A_\Delta^d = \alpha \beta \gamma$

Тот же результат получим, непосредственно рассчитав блочную группу и дополнительную блочную группу графа Γ (рис. 22, а). Скелет этого графа показан на рис. 22, б).

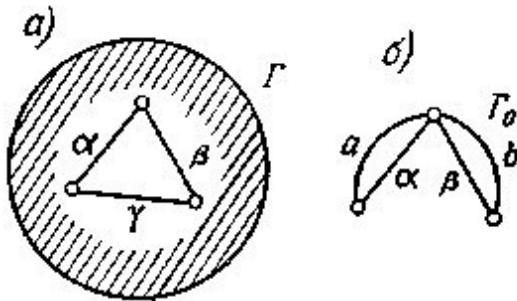


Рис. 22. Модуль-граф с выделенными ребрами, образующими цикл: а) граф; б) скелет графа.



Граф, состоящий из ребер α , β и γ , обозначим через Γ_{Δ} , где блочная группа A_{Δ} равна

$$A_{\Delta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \gamma \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа равна

$$A^d_{\Delta} = [\alpha\beta\gamma].$$

Для графа Γ , состоящего из двух модулей, имеем

$$A^d_0 = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix},$$

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ A_{\Delta} & \alpha\gamma & \beta\gamma & \emptyset \end{bmatrix}.$$

Так как $\frac{\partial A_1}{\partial c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} \end{bmatrix}$, этот результат совпадает с полученным ранее. Дополнительная блочная группа графа Γ имеет вид

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & a & \alpha & \alpha & a & a & \alpha & a \\ b & \alpha & b & b & \beta & b & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \beta & \beta & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} A^d_1.$$

На основании правила формирования контурного графа имеем

$$\begin{bmatrix} a & \alpha \\ \alpha & b \\ \beta & \beta \end{bmatrix} A^d_1 = A^d_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \alpha \beta = A^d_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{bmatrix},$$

т. е. получаем результат, совпадающий с полученным ранее.

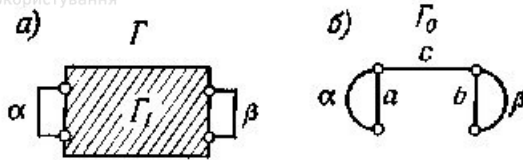


Рис. 23. Модуль-граф с выделенными двумя ребрами: а) граф; б) скелет графа.

Для графа Γ с двумя выделенными ребрами α и β (рис. 23, а) блочную группу A и дополнительную блочную группу A^d найдем следующим образом:

$$A^d = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix}$$

(согласно скелету Γ_0 , изображенному на рис. 23, б),

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ \alpha & \alpha & \beta & \emptyset \\ \beta & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix},$$

$$A^d = A^d {}_0A^d = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix} A^d {}_1.$$

б. Граф с выделенной вершиной (рис. 24, а)

Граф Γ (рис. 24, а) представим в виде графа, состоящего из двух модулей Γ_1 и графа Γ_w , блочная группа которого равна

$$A_w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа имеет вид

$$A_w^d = [\emptyset] = 1.$$

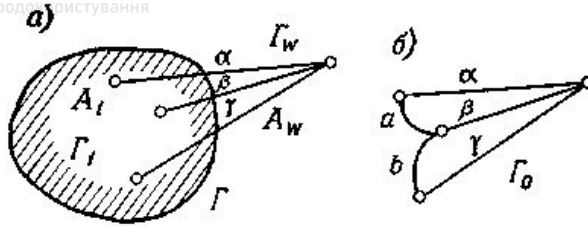


Рис. 24. Модуль-граф с выделенной вершиной: а) граф, б) скелет графа.

Дополнительная блочная группа скелета Γ_0 (рис. 24, б) равна

$$A^d_0 = a \alpha \beta \ b \beta \gamma = \begin{bmatrix} a & a & a & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ b & \beta & \gamma & b & \beta & \gamma & b & \gamma \end{bmatrix},$$

поэтому блочная группа графа Γ имеет вид

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 & A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta & \gamma & \beta & \alpha \\ \beta & \gamma & \beta & \gamma & \gamma & \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta & \gamma & \gamma & \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} = A^d_0 A^d_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ b & \beta & \gamma & b & \beta & \gamma & b & \gamma \end{bmatrix} A^d_1.$$

Аналогично рассчитываются блочные группы и дополнительные блочные группы графов с большим количеством выделенных элементов.

7.8.5. Преобразования модуль-графов

Каждому преобразованию модуль-графа Γ , состоящему из замыкания или деления его вершин, можно поставить в соответствие определенное преобразование его скелета Γ_0 ; например, замыканию вершин модуль-графа Γ соответствует замыкание вершин его скелета Γ_0 . Если обозначить через A_p блочную группу преобразованного графа Γ_p , а $A^d_{0_p}$ — дополнительную блочную



группу соответственно преобразованного скелета графа Γ_{Cp} , то можно написать

$${}^2 A_p = \frac{\partial}{\partial A_{0p}^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad (101)$$

и аналогично

$${}^2 A_p^d = \frac{\partial}{\partial A_{0p}^d} \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \\ \vdots \\ A_g^d \end{bmatrix}, \quad (102)$$

где A_1, A_2, \dots, A_g ($A_1^d, A_2^d, \dots, A_g^d$) — блочные (дополнительные) группы модулей непреобразованного графа Γ .

Заметим, что в преобразованном скелете Γ_{Op} преобразованные модули в общем случае не соответствуют их деревьям.

Дополнительную блочную группу A_{Op}^d преобразованного скелета Γ_{Op} можно найти по правилам преобразования линейных графов.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим два вида преобразований модуль-графа: а) замыкание вершин графа, б) деление вершин графа.

а. Замыкание вершин модуль-графа

Используя формулу (77) для дополнительной блочной группы графа $\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$, образованного замыканием вершин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$

в графе Γ , для блочной группы ${}^2 A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ и дополнительной

блочной группы ${}^2 A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}^d$ модуль-графа с замкнутыми вершинами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ можно написать



$${}^2 A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = \frac{\partial}{\partial \left(A^d_0 \prod_{i=1}^{k-1} d_i \right)} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \prod_{i=1}^{k-1} d_i}, \quad (103)$$

$${}^2 A^d_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = A^d_0 \left(\prod_{i=1}^{k-1} d_i \right) \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix} = {}^2 A^d \prod_{i=1}^{k-1} d_i. \quad (104)$$

Здесь A^d_0 — дополнительная блочная группа скелета Γ_0 незамкнутого графа Γ ; ${}^2 A$ (${}^2 A^d$) — блочная (дополнительная) группа незамкнутого графа Γ ; A_1, A_2, \dots, A_g ($A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_g$) — блочные (дополнительные) группы блоков незамкнутого графа Γ ; d_1, d_2, \dots, d_{k-1} — пути скелета Γ_0 (незамкнутого), образующие произвольное дерево, касающееся вершин $\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0k}$.

Заметим, что на основании правила формирования контурных графов в приведенных выше формулах d_1, d_2, \dots, d_{k-1} также представляют собой пути модуль-графа Γ , образующие дерево, касающееся вершин $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$.

Пример 13. Найти блочную группу ${}^2 A_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ и дополнительную блочную группу ${}^2 A^d_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ графа $\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ образованного замыканием вершин μ_1, μ_2, μ_3 в модуль-графе Γ [рис. 25, а (пунктиром обозначены пути замыкания вершин)].

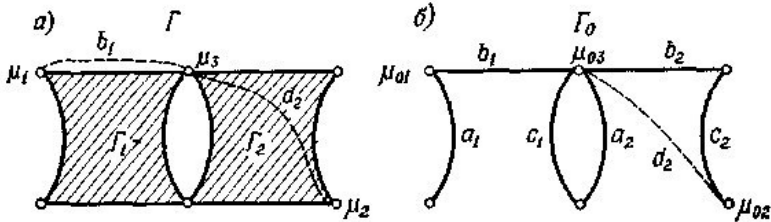


Рис. 25.



Дополнительная блочная группа A^d_0 скелета Γ_0 (рис. 25, б) незамкнутого графа Γ равна

$$A^d_0 = [c_1 a_2],$$

поэтому блочная группа графа Γ имеет вид

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial c_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа равна

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d_1 c_1 & A^d_1 \\ A^d_2 & A^d_2 a_2 \end{bmatrix}.$$

В скелете Γ_0 выберем пути между вершинами $\mu_{0\bar{a}}$ и $\mu_{03} - [b_1]$ и вершинами μ_{03} и $\mu_{02} - [b_2 c_2]$.

Тогда для замкнутого графа $\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ имеем

$$\begin{aligned} {}^2A^d_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} &= \frac{\partial^2 ({}^2A)}{\partial b_1 \partial b_2 c_2} = \frac{\partial}{\partial b_2 c_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial c_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial c_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если в графе Γ выбрать пути b_1 и d_2 (рис. 25, а), то получим

$${}^2A^d_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \frac{\partial^2 ({}^2A)}{\partial b_1 \partial d_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial d_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial d_2} \end{bmatrix}.$$


Этот результат совпадает с предыдущим, так как



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial d_2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2 \partial c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial d_2} \end{bmatrix}.$$

Дополнительная блочная группа замкнутого графа $\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ равна



$${}^2 A^d_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = [b_1] [d_2] ({}^2 A^d) = \begin{bmatrix} A^d_1 \begin{bmatrix} c_1 \\ b_1 \end{bmatrix} & A^d_1 b_1 \\ A^d_2 d_2 & A^d_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

б. Деление вершин модуль-графа

Используя формулы (84), (85), (101) и (102) для блочной группы $A^{\mu_1 \mu_2}$ и дополнительной блочной группы $A^{d \mu_1 \mu_2}$ графа $\Gamma^{\mu_1 \mu_2}$, образованного делением вершины $\mu = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \alpha_j \dots \alpha_p]$ графа Γ на две части $\mu_1 = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i]$ и $\mu_2 = [\alpha_j \dots \alpha_p]$, получим следующие выражения для блочной группы $A^{\mu_1 \mu_2}$ и дополнительной блочной группы $A^{d \mu_1 \mu_2}$ модуль-графа $\Gamma^{\mu_1 \mu_2}$:

$${}^2 A^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{A^d_0}{\partial \mu_{01}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{A^d_0}{\partial \mu_{02}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = {}^2 A_{\mu_1} = {}^2 A_{\mu_2}, \quad (105)$$



$$A^{d\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A^d_{\mu_0}}{\partial \mu_{01}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial A^d_{\mu_0}}{\partial \mu_{02}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 A^d}{\partial \mu_1} = \frac{\partial^2 A^d}{\partial \mu_2}, \quad (106)$$

где $[\mu_{01}]$ и $[\mu_{02}]$ — однострочные блочные группы двух частей вершины μ_0 скелета Γ_0 , соответствующие частям μ_1 и μ_2 вершины μ в графе Γ ; $[\mu_1]$ и $[\mu_2]$ — однострочные блочные группы обеих частей вершины μ графа Γ , рассматриваемого как линейный граф и состоящего из подграфов, представленных модулями (граф с известной структурой модулей).

Пример 14. Найти блочную группу ${}^2A^{\mu_1\mu_2}$ графа $\Gamma^{\mu_1\mu_2}$, образованного делением вершины μ графа Γ (рис. 26, а) на две части μ_1 и μ_2 .

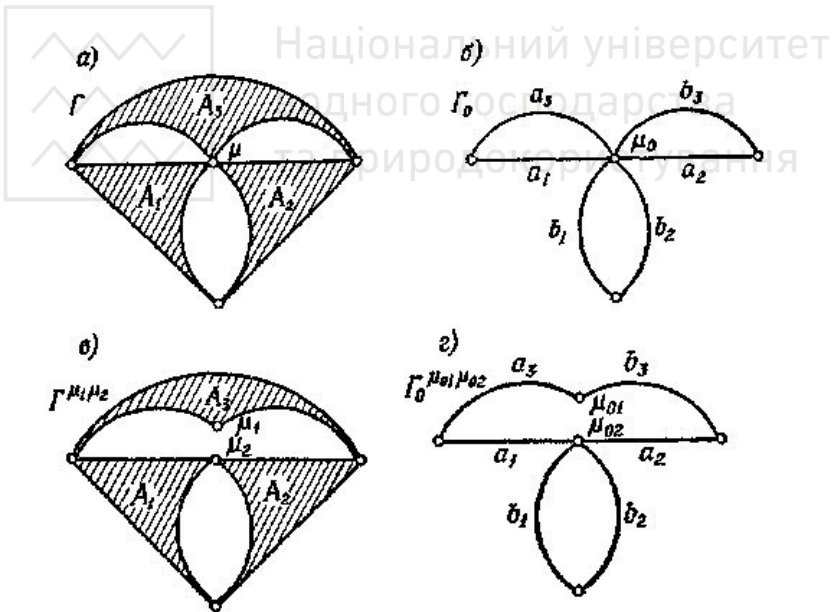


Рис. 26.

Дополнительная блочная группа $A^d_{\mu_0}$ скелета Γ_0 (рис. 26, б)



$$A^d_0 = [a_1 a_3] [b_1 b_2] [a_2 b_3], \quad \mu_{01} = [a_3 b_3], \quad \mu_{02} = [a_1 a_2 b_1 b_2],$$

$$\frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{01}} = \frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{02}} = b_1 b_1 a_2 b_3 a_1 a_3 = \left[\begin{array}{c} b_1 b_1 a_1 b_1 a_2 b_3 a_1 b_1 \\ a_2 b_3 b_1 a_3 b_2 b_3 b_2 a_3 \end{array} \right],$$

Поэтому

$${}^2 A^{\mu_1 \mu_2} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{01}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 & A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & \\ \frac{\partial A_2}{\partial a_2} A_2 & A_2 & A_2 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \\ A_3 \frac{\partial A_3}{\partial b_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial b_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & \end{array} \right].$$

Аналогичный результат получим, рассчитывая блочную группу ${}^2 A^{\mu_1 \mu_2}$ графа $\Gamma^{\mu_1 \mu_2}$ на основании его скелета $\Gamma_0^{\mu_{01} \mu_{02}}$, изображенного на рис. 26, з.

7.8.6 Перемещение нижних индексов

Пусть дан граф Γ , представляющий собой геометрическое изображение блочной группы A и обратное изображение блочной группы A^d .

Для упрощения записи введем условное обозначение алгебраической производной блочной группы A

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A_\alpha \quad (107)$$

а также дополнительной блочной группы A^d

$$[\alpha] A^d = A^d_{\alpha} \quad (108)$$

Кроме того, обозначим

$$\frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} = A_{k\alpha}, \quad (109)$$

$$[\alpha_k] A^d_k = A^d_{k\alpha} \quad (110)$$

где индекс k в обозначении α_k указывает, что ребро α_k (или путь α_k) принадлежит модулю Γ_k с блочной группой A_k и дополнительной блочной группой A^d_k .



Операцию, описываемую уравнениями (107) и (108) или (6.109) и (110), назовем перемещением нижних индексов и обозначим стрелкой \downarrow ; тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \alpha \downarrow A = A_{\alpha}, \quad (111)$$

$$[\alpha]A^d = [\alpha]\downarrow A^d = A^d_{\alpha}, \quad (112)$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} = [\alpha_k]\downarrow A_k = A_{k\alpha}, \quad (113)$$

$$[\alpha_k]A^d_k = [\alpha_k]\downarrow A^d_k = A^d_{k\alpha}. \quad (114)$$

Применяя операцию перемещения нижних индексов для блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа, выражения



и

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}$$

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix},$$

запишем в следующем виде:

$${}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad u \quad {}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Учитывая свойства производной и произведения блочных групп, имеем

$$[a_k]\downarrow A_{ka} = A_{kaa} = 0, \quad (116)$$

$$[a_k]\downarrow A_l = A_l, \quad k \neq l, \quad (117)$$



$$[a_k] \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (118)$$

где $[a_k]$ — произвольная блочная группа, связанная с графом Γ_k , а также

$$\begin{bmatrix} a_k \\ a_l \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_l \\ A_k \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = a_l \downarrow \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_{la} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (119)$$

$$a_k a_l \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = a_l a_k \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} & A_k \\ A_l & A_{la} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Для иллюстрации применения операции перемещения нижних индексов блочной группы модуль-графа приведем следующие примеры.

Пример 15.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ a_2 & c_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_2 \\ A_{3b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2ab} \\ A_{3b} & A_{3bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3bc} \end{bmatrix}.$$

Пример 16.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{2a} \\ A_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & b_2 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{2a} \\ A_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_{2ab} \\ 0 & A_{3a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \end{bmatrix}.$$

Пример 17.

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \begin{bmatrix} a_1 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = a_1 \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$



Пример 18.

$$a_1 a_2 \downarrow \begin{bmatrix} A^d_{1b} & A^d_{1c} \\ A^d_{2b} & A^d_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d_{1ab} & A^d_{1ac} & A^d_{1b} & A^d_{1c} \\ A^d_{2b} & A^d_{2d} & A^d_{2ab} & A^d_{2ad} \end{bmatrix}.$$

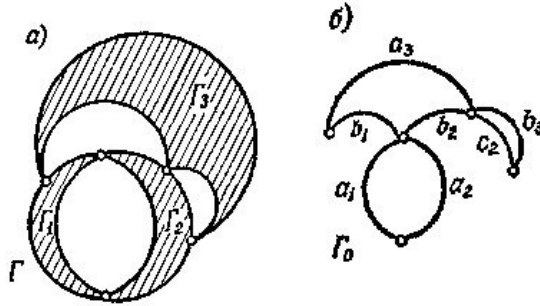


Рис. 27.

Пример 19. Найти блочную группу 2A модуль-графа Γ (рис. 27, а), скелет которого Γ_0 изображен на рис. 27, б:

$$A^d_0 = [a_1 a_2] [b_1 b_2 b_3] [c_2 b_3] = \begin{bmatrix} a_1 a_1 a_1 b_1 a_2 a_2 a_1 a_1 a_1 b_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 c_2 a_2 b_2 c_2 b_1 b_2 a_3 a_2 b_2 a_3 \\ c_2 c_2 a_3 c_2 c_2 a_3 b_3 b_3 b_3 b_3 b_3 b_3 \end{bmatrix},$$

$${}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2c} & A_{2bc} & A_{2c} & A_{2ac} & A_{2abc} & A_{2ac} & A & A_{2b} & A_2 & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_{3a} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} \end{bmatrix}.$$

Дополнительная блочная группа ${}^2A^d$ находится аналогично, так как

$${}^2A^d = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix}.$$

Операция замыкания вершин графа при использовании перемещения нижних индексов выглядит следующим образом: замкнуть граф Γ (рис. 27, а) по пути a_j . Тогда



$${}^2A_{a_1} = \begin{bmatrix} A^d & \\ & 0 \\ & & a_1 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = a_1 \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2ac} & A_{2abc} & A_{2ac} & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} \end{bmatrix}.$$

Аналогично провести любые другие преобразования модуль-графа. Приведенные примеры показывают, что применение операции перемещения нижних индексов приводит к существенному упрощению записи блочной группы модуль-графа.

7.8.7. Графы k -го ранга

Объединяя модули графа второго ранга, получим граф третьего ранга. Повторяя это объединение для графа третьего ранга, получим граф четвертого ранга. Граф k -го ранга определяется следующим образом:

$${}^k\Gamma = \langle {}^kP, {}^kZ, {}^k\varepsilon \rangle, \quad (121)$$

где kP — множество вершин графа ${}^k\Gamma$; kZ — множество модулей графа ${}^k\Gamma$, представляющих собой графы $(k-1)$ -го или более низкого ранга; ${}^k\varepsilon$ — многоаргументное соотношение инциденции модулей графа ${}^k\Gamma$.

Последовательное объединение модулей дает ряд графов с растущими рангами. Заметим, что для данного ряда справедливы соотношения

$${}^kP \subset {}^{k-1}P, \quad \text{card } {}^kZ < \text{card } {}^{k-1}Z, \quad {}^k\varepsilon \subset {}^{k-1}\varepsilon. \quad (122)$$

Блочную группу k -го ранга kA графа ${}^k\Gamma$ определим аналогично блочным группам графов второго ранга, используя понятие скелета этого графа.

В качестве примера на рис. 28, б приведен граф третьего ранга ${}^3\Gamma$, полученный в результате объединения модулей графа второго ранга ${}^2\Gamma$ (рис. 28, а).

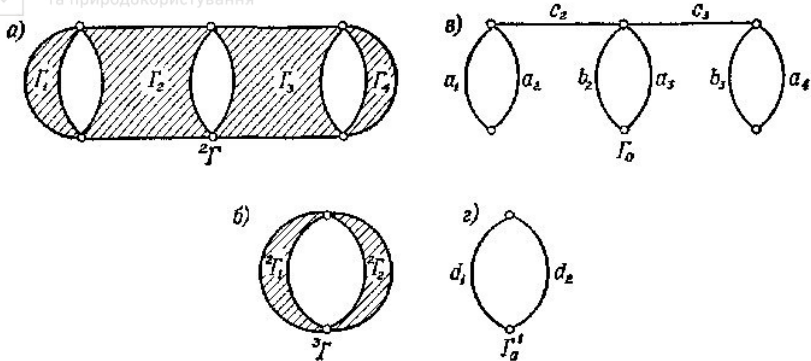


Рис. 28. Объединение графов второго ранга: а) граф второго ранга; б) граф третьего ранга; в) скелет графа второго ранга; г) скелет графа третьего ранга.

Модуль ${}^2\Gamma_1$ графа ${}^3\Gamma$ образован объединением модулей Γ_1 и Γ_2 графа ${}^2\Gamma$, а модуль ${}^2\Gamma_2$ — объединением модулей Γ_3 и Γ_4 графа ${}^2\Gamma$. В соответствии со скелетом Γ'_o (рис. 28, г) графа ${}^3\Gamma$ найдем блочную группу третьего ранга 3A этого графа

$${}^2A = d_1 d_2 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2A_{1d} & {}^2A_1 \\ {}^2A_2 & {}^2A_{2d} \end{bmatrix}.$$

Для преобразования блочной группы 3A в блочную группу второго ранга 2A графа ${}^2\Gamma$ найдем элементы блочной группы 3A по скелетам подграфов графа ${}^2\Gamma$, представленным модулями ${}^2\Gamma_1$ и ${}^2\Gamma_2$ графа ${}^3\Gamma$ (рис. 28, в):

$${}^2A_1 = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}, \quad {}^2A_2 = \begin{bmatrix} A_{3b} & A_3 \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Так как $d_1 = b_2$, а также $d_2 = a_3$, имеем

$${}^2A_{1d} = {}^2A_{1b_2} = b_2 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix},$$

$${}^2A_{2d} = {}^2A_{2a_3} = a_3 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{3ab} & A_{3a} \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix},$$

и, следовательно, согласно выражению (а), блочная группа 2A графа ${}^2\Gamma$ равна



$${}^2 A = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3b} & A_3 \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3ab} & A_{3a} \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix}.$$

Объединение модулей графа и операция с графами высшего ранга часто упрощают анализ модуль-графов.

Поскольку способ расчета блочных групп графов различных рангов одинаков, то для упрощения записи при обозначении графов буквой Γ не будем указывать их ранг.

8. Полные блочные группы и замещающие графы

Блочные группы второго или высшего ранга модуль-графа можно привести к замещающим блочным группам первого ранга, применяя операции алгебры блочных групп над их элементами. При этом должны быть известны блочные группы модулей графа, т. е. их структура. Однако в практических применениях, например при анализе или синтезе структурных схем систем, не всегда возможно или необходимо знать структуру модулей графа. Иногда удобно рассматривать модуль-схему системы, не углубляясь в структуру отдельных ее модулей, называемых многополюсниками. Например, эти многополюсники могут представлять собой «черные ящики» с выделенными полюсами (входами, выходами, зажимами), в которых могут находиться неизвестные структуры с различными типами связей, с распределенными или сосредоточенными параметрами и т. д. В таком случае достаточно измерить входные величины многополюсника, например напряжения или силу на его зажимах или входные импедансы, или задать эти величины при исследовании системы. При определении блочной группы модуль-графа по правилам рассматриваемой ранее алгебры блочных групп необходимо иметь сведения о структуре отдельных модулей графа. Эти сведения не нужны, если применить видоизмененную алгебру, основанную на операциях, подобных операциям обычной алгебры, элементы которой назовем *полными блочными группами*. Принципы этой алгебры будут изложены ниже, а также изложены замещающие графы и способ определения с помощью этих графов полных блочных групп для графов высших рангов.



8.1. Полные блочные группы

Неупорядоченный набор элементов x , не обязательно различных, удовлетворяющих некоторой функции $\Phi(x)$, обозначим

$$X = \langle x \mid \Phi(x) \rangle. \quad (8.1)$$

Через $r_X(x)$ обозначим число, определяющее, сколько раз элемент x встречается в системе X . Рассмотрим две системы X и Y :

$$X = \langle x \mid \Phi(x) \rangle, \quad Y = \langle y \mid \Phi(y) \rangle. \quad (a)$$

Обозначим

$$(X \subset_r Y) \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \stackrel{df}{=} \exists_{y \in Y} \{ [r_X(x) \leq r_Y(y)] \wedge (x = y) \}. \quad (8.2)$$

Две системы вида (a) будем считать равными, если

$$(X = Y) \Leftrightarrow (X \subset_r Y) \wedge (Y \subset_r X). \quad (8.3)$$

Суммой систем X и Y вида (a) назовем систему, содержащую все элементы обеих этих систем:

$$S = (X \cup_r Y) \stackrel{df}{=} \langle s \mid (s \in X) \vee (s \in Y) \wedge (r_s(s) = r_X(s) + r_Y(s)) \rangle. \quad (8.4)$$

Пересечением систем X и Y вида (a) назовем систему, определяемую следующим образом:

$$Z = (X \cap_r Y) \stackrel{df}{=} \langle z \mid (z \in X) \wedge (z \in Y) \wedge (r_z(z) = \min[r_X(z), r_Y(z)]) \rangle. \quad (8.5)$$

Введем определение полной блочной группы.

Определение 1. Полной блочной группой A называется неупорядоченная система наборов вида (a)

$$A = \langle a_k \mid a_k = \langle a_{ik} \mid a_{ik} \in N \rangle \rangle_{\substack{i=1,2,\dots,n, \\ k=1,2,\dots,m}} \quad (8.6)$$

где N — множество натуральных чисел при следующих условиях:

1. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset_r B) \wedge (B \subset_r A)$,
2. $A + B = A \cup_r B$, (8.7)
3. $A \cdot B = (a \cup_r b \mid (a \in A) \wedge (b \in B))$.

Из этого определения следуют известные соотношения элементарной алгебры

$$\left. \begin{array}{l} A + B = B + A, \\ AB = BA \end{array} \right\} \text{(коммутативность),}$$



$$\left. \begin{aligned} A+(B+C) &= (A+B)+C, \\ A(BC) &= (AB)C \end{aligned} \right\} \text{(ассоциативность),} \quad (8.8)$$

$$A(B+C) = AB+AC. \quad \text{(дистрибутивность).}$$

Нетрудно заметить, что *модулем сложения полных блочных групп* служит блочная группа $\langle \rangle$, которая представляет собой пустую систему, а *модулем умножения* — блочная группа $\langle \emptyset \rangle$, содержащая одно и только одно пустое число a . Для произвольной блочной группы A :

$$\left. \begin{aligned} A+\langle \rangle &= A, \\ A\langle \emptyset \rangle &= A. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

В соответствии с этим блочную группу $\langle \rangle$ обозначим через 0, а блочную группу $\langle \emptyset \rangle$ — через 1:

$$\langle \rangle = 0, \quad \langle \emptyset \rangle = 1. \quad (8.10)$$

Уравнение

$$A+B=0 \quad (8.11)$$

имеет решение

$$A=-B. \quad (8.12)$$

Блочную группу $-B$ будем называть *отрицательной полной блочной группой*.

Разность блочных групп $A-B$ определяем как операцию, обратную по отношению к сложению, т. е.

$$C+B=A \Rightarrow C=A-B. \quad (8.13)$$

Эту разность можно отыскать, если исключить из блочной группы A все системы a , равные системам блочной группы B .

Следствие 8.1. Разность полных блочных групп $A-B$ существует тогда и только тогда, когда

$$B \subset_r A$$

В противном случае разность двух блочных групп может быть лишь упрощена путем вычитания из обеих блочных групп разности их пересечения $A \cap_r B$.

Выражение $A-B$ в общем случае имеет следующие свойства:

$$(A-B) \Leftrightarrow (A+D=C+B),$$

$$(A-B)+(C-D) = (A+C)-(B+D)$$

$$(A-B)+(C-D) = (A \cap C + B \cap D) = (A \cap D + B \cap C).$$

Если обозначить



$$\underbrace{A + A + \dots + A}_{N} = NA, \quad (8.15)$$

$$\underbrace{AA \dots A}_{N} = A^N, \quad (8.16)$$

где N — произвольное натуральное число. Заметим, что для двух произвольных натуральных чисел N и M справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} NA + MA &= (N + M)A, \\ M(NA) &= (MN)A, \\ A^N A^M &= A^{N+M}, \\ (A^N)^M &= A^{(NM)}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

а также

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2, \\ (A+B)(A-B) &= A^2 - B^2. \end{aligned}$$

Допустим, что полную блочную группу A можно представить в виде произведения

$$A = P_1 P_2 \dots P_n. \quad (8.19)$$

Блочные группы P_1, P_2, \dots, P_n назовем *делителями* блочной группы P . Полную блочную группу P , имеющую только два делителя 1 и P , назовем *простой полной блочной группой*. Заметим, что каждая полная блочная группа P , представляющая собой систему одноэлементных наборов, имеет только два делителя: 1 и P , т. е. будет простой полной блочной группой.

Делители, представляющие собой простые полные блочные группы, будем называть *простыми сомножителями блочной группы A* .

Если для двух данных полных блочных групп A и B существует такая полная блочная группа X , что

$$BX = A, \quad (8.20)$$

то можно написать

$$X = \frac{A}{B} \quad \text{или} \quad X = A : B \quad (8.21)$$

т. е.

$$(BX = A) \Leftrightarrow \left(X = \frac{A}{B}\right), \quad B \neq 0. \quad (8.22)$$

Условием существования *частного* X , кроме $B \neq 0$, будет требование, чтобы множество простых сомножителей блочной



группы B было подмножеством простых сомножителей блочной группы A , т. е.

$$\{P'_1 P'_2 \dots P'_m\} \subset \{P_1 P_2 \dots P_n\},$$

где

$$A = P_1 P_2 \dots P_n, B = \dots \quad (8.23)$$

Введем следующее обобщение.

Пару блочных групп (A, B) будем записывать в виде A/B , если

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \right) &\Leftrightarrow (AD = BC), \\ \frac{A}{B} + \frac{C}{D} &= \frac{AD + BC}{BD}, \\ \frac{A}{B} \frac{C}{D} &= \frac{AC}{BD}. \end{aligned} \right\} B \neq 0, D \neq 0. \quad (8.24)$$

Для полных блочных групп справедливы тождества

$$\frac{A^M}{A^N} = A^{M-N}, \quad A^0 = 1. \quad (8.25)$$

В соответствии с определением (8.6) полную блочную группу A можно также записать в виде матрицы

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{m1} \alpha_{m2} \dots \alpha_{mn} \end{array} \right\} \quad (8.26)$$

и рассматривать как неупорядоченную систему столбцов a_k (не обязательно различных), состоящих из неупорядоченных элементов (также не обязательно различных)



$$\left. \begin{aligned}
 &A = \langle a_1 a_2 \cdots a_n \rangle \\
 &\text{где} \\
 &a_k = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{array} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Равенство, а также способ получения суммы и произведения полных блочных групп, записанных в виде матрицы, проиллюстрируем следующими примерами:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1222 \\ 2334 \\ 3445 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1342 \\ 2253 \\ 3424 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 13 \\ 24 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 14 \\ 25 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 13\ 14 \\ 24\ 25 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 13 \\ 24 \end{array} \right\} \bullet \left\{ \begin{array}{c} 14 \\ 25 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 11\ 44 \\ 22\ 55 \\ 13\ 13 \\ 24\ 24 \end{array} \right\}.$$

Для полных блочных групп справедливо следующее утверждение.

Утверждение 8.1. *Полную блочную группу можно всегда записать в канонической форме*

$$A = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \langle \alpha_{ik} \rangle. \quad (8.28)$$

Действительно, согласно принятым определениям операций, имеем



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\cdots\alpha_{mn} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \langle \alpha_{ik} \rangle.$$

Обозначая

$$\langle \alpha_{ik} \rangle = a_{ik}, \tag{8.29}$$

формулу (8.28) можно записать в виде

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ik}. \tag{8.30}$$

Выражение a_{ik} в формуле (8.29) назовем *полной блочной единицей*.

Если полная блочная группа \bar{A} имеет все столбцы, такие же, как блочная группа A , то можно написать

$$\bar{A} = A. \tag{8.31}$$

Это равенство симметрично, т. е.

$$(\bar{A} = A) \Leftrightarrow (A = \bar{A}) \tag{8.32}$$

и, кроме того, имеют место следующие зависимости:

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{A} = A_1) \wedge (A_1 = A_2) \Rightarrow (\bar{A} = A_2), \\ (A = \bar{A}_1) \wedge (\bar{A}_1 = \bar{A}_2) \Rightarrow (A = \bar{A}_2). \end{array} \right\}. \tag{8.33}$$

Применяя соотношение

$$(k_A = \bar{A}) \Leftrightarrow \{(A = \bar{A}) \wedge (A = k_A)\}$$

и предполагая, что $A = \bar{A}$, запишем в случае необходимости блочную группу A графа Γ в виде полной блочной группы \bar{A} .

Определим алгебраическую производную полной блочной группы \bar{A} по элементу a .

Определение 8.2. Алгебраическая производная полной блочной группы $\bar{A} = \langle a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n}$, $a_k = \langle \alpha_{ik} \rangle_{i=1, 2, \dots, m}$ по элементу a

представляет собой полную блочную группу $\frac{\partial \bar{A}}{\partial a}$,

определенную следующим образом:



$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_{ik}} = \langle a'_k | (\langle a'_k \rangle = \langle a_k \rangle - \langle \alpha_{ik} \rangle) \wedge [r_{\partial A / \partial \alpha_{ik}}(a'_k) = r_A(a_k) \bullet r_{\alpha_{ik}}(\alpha_{ik})] \rangle_{k=1,2,\dots,n}. \quad (8.34)$$

Алгебраическая производная полной блочной группы по элементу α находится по правилам дифференцирования алгебраических многочленов. Эту производную можно также рассчитать путем дифференцирования полной блочной группы, записанного в канонической форме (8.28) или (8.30).

Пример 8.1.

$$\frac{\partial}{\partial 2} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 121 & 11 & \\ 2 & 2 & 2 & 21 \\ 3 & 2 & 2 & 24 \end{array} \right\} = \frac{\partial}{\partial 2} \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle + 3 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle^2 + \langle 2 \rangle^3 + \langle 1 \rangle^2 \langle 4 \rangle \} =$$

$$= \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle + 6 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle + 3 \langle 2 \rangle^2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 11 & 11 & 11 & 1222 \\ 3 & 2 & 2 & 2222 \end{array} \right\}.$$

Если $A \stackrel{s}{=} A$, то

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial \alpha}. \quad (8.35)$$

Для алгебраической производной суммы, произведения и частного полных блочных групп справедливы те же соотношения, что и при дифференцировании алгебраических многочленов, а именно

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A + B) = \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (AB) = A \frac{\partial B}{\partial \alpha} + B \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{B \frac{\partial A}{\partial \alpha} - A \frac{\partial B}{\partial \alpha}}{B^2}, \quad B \neq 0. \end{array} \right\}. \quad (8.36)$$

С целью упрощения формы записи полных блочных групп будем применять *операцию переноса нижних индексов* в соответствии со следующими правилами:



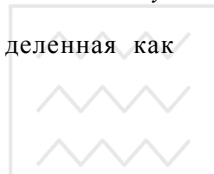
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= A_{\alpha}, \\ \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} &= A_{k\alpha}, \\ A^d[\alpha] &= A^d_{\alpha}, A^d = A^d, \\ A^d_k[\alpha_k] &= A^d_{k\alpha}, A^d_k = A^d_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Определим обратную алгебраическую производную полной блочной группы.

Определение 8.3. Обратной производной полной блочной группы

$$A = \langle a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n}, \quad a_k = \langle \alpha_{ik} \rangle_{i=1, 2, \dots, m}$$

по элементу α называется полная блочная группа $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$, определенная как



$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_{ik}} \stackrel{\text{df}}{=} A - \langle a_k \mid \alpha_{ik} \in a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n} \quad (8.38)$$

Это означает, что обратную производную $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ составляют лишь

те столбцы блочной группы A , которые не содержат элемента α .

Пример 8.2.

$$\frac{\partial}{\partial 2} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right\}$$

Если $A = A^s$, то

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \frac{\delta A^s}{\delta \alpha} \quad (8.39)$$

Для обратной производной суммы, произведения и частного полных блочных групп справедливы следующие соотношения:



$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\alpha}(A+B) &= \frac{\delta A}{\delta\alpha} + \frac{\delta B}{\delta\alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta\alpha}(AB) &= \frac{\delta A}{\delta\alpha} \frac{\delta B}{\delta\alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta\alpha}\left(\frac{A}{B}\right) &= \frac{\delta A / \delta\alpha}{\delta B / \delta\alpha}, \quad B \neq 0, \quad \frac{\delta B}{\delta\alpha} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Можно доказать, что между действиями над блочными группами и действиями над полными блочными группами имеют место следующие соотношения:

$$1. \quad A + B = \overset{s}{A} + \overset{s}{B} - 2(A \cap_r B), \quad A = \overset{s}{A}, \quad B = \overset{s}{B}. \quad (8.41)$$

Выражение $2(A \cap_r B)$ будем называть *дефектом суммы* блочных групп A и B . Если

$A \cap_r B = 0$,
(если $A = \overset{s}{A}$ и $B = \overset{s}{B}$, то пересечение $A \cap_r B$ запишем в виде $A \cap B$)
т. е.

$$A \cap B = 0,$$

то будем говорить, что сумма блочных групп A и B не обладает дефектом суммы, т. е. $A + B = \overset{s}{A} + \overset{s}{B}$.

$$2. \quad AB = \overset{s}{A} \overset{s}{B} - D, \quad (8.42)$$

где

$$a_0 D = \sum \langle a_0 \rangle + \sum_i \left(\left\{ k_i - \frac{1}{2} [1 + (-1)^{k_i-1}] \right\} \langle a_i \rangle \right);$$

$a_i \neq a_0$ — столбцы произведения $\overset{s}{A} \overset{s}{B}$, имеющие по крайней мере два идентичных элемента $r_{a_0}(a) \geq 2$;

k_i — число идентичных столбцов a_i в произведении $\overset{s}{A} \overset{s}{B}$.

Полную блочную группу D в выражении (8.42) будем называть *дефектом произведения* блочных групп A и B . Заметим, что

$$D = [] = 0 \quad (8.44)$$

при условии



$$D = \langle \text{al}(\exists_{\alpha \in a} r_a(\alpha) > 1) \vee (r_D(a) = 2k) \rangle, \quad (8.45)$$

где k — натуральное число.

Если $D = 0$, то произведение блочных групп A и B не обладает

дефектом, т. е. $AB = A^s B$.

Произведение блочных групп A_1, A_2, \dots, A_g модулей модуль-графа не имеет дефекта, т. е.

$$\prod_{i=1}^g A_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^g A_i, \quad \forall i(A_i = A_i^s), \quad (8.46)$$

так как эти блочные группы не имеют общих элементов.

8.2. Замещающие графы

В заданном графе Γ с v вершинами выделим v_z вершин, причем $2 \leq v_z \leq v$.

Определение 8.4. Замещающим графом графа Γ называется полный граф Γ_z (полный многогранник), построенный на v_z вершинах, соответствующих v_z выделенным вершинам графа Γ в предположении, что полная блочная группа A_z графа Γ_z равна блочной группе A графа Γ :

$$A_z = A. \quad (8.47)$$

Граф Γ_z имеет $g = v_z(v_z - 1)/2$ граней. Замещающий граф можно рассматривать как скелет модуль-графа Γ_z^* , построенного из двухполюсных модулей. На рис. 8.1 изображен граф Γ с $v_z = 4$ выделенными вершинами, его замещающий граф Γ_z , а также модуль-граф Γ_z^* . A_1, A_2, \dots, A_6 — блочные группы отдельных модулей графа Γ_z^* .

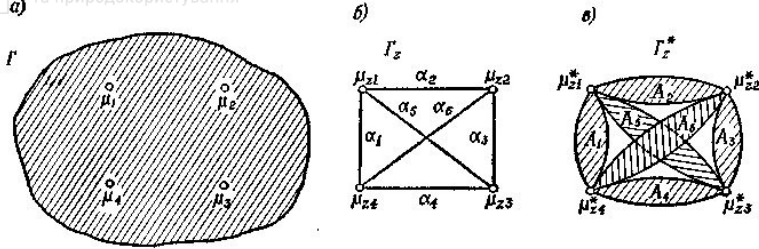


Рис. 8.1. Замещающий граф с выделенными вершинами: а) граф с выделенными четырьмя вершинами; б) замещающий граф; в) эквивалентный граф.

Модуль-граф Γ_z^* эквивалентен графу Γ при выполнении равенства

$$A_z^* = A, \quad (8.48)$$

где A_z^* означает полную блочную группу графа Γ_z^* . Из равенств (8.47) и (8.48) следует, что

$$A_z = A_z^*. \quad (8.49)$$

Это равенство справедливо, если в полную блочную группу вместо элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$, обозначающих ребра замещающего графа Γ_z , подставить соответствующие выражения, которые называются дендритными весами ребер замещающего графа.

Обозначим: A_z^d — дополнительную блочную группу графа Γ_z , состоящую из элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$, обозначающих его ребра; $A_z^*_{z(v_z-1)}$ — полную блочную группу графа $\Gamma_z^*_{z(v_z-1)}$, полученную в результате замыкания всех вершин эквивалентного графа Γ_z^* ; A'_z — полную блочную группу графа Γ_z , в котором вместо обозначений ребер $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ графа F_z используются следующие выражения

$$a'_1 = \frac{A_1}{A_{1\alpha}}, a'_2 = \frac{A_2}{A_{2\alpha}}, \dots, a'_g = \frac{A_g}{A_{g\alpha}}, \quad (8.50)$$

где $A_g = A_1, A_g = A_2, \dots, A_g = A_g$ — блочные группы модулей графа Γ_z^* , а

$$A_{1\alpha} = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}, A_{2\alpha} = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}, \dots, A_{g\alpha} = \frac{\partial A_g}{\partial \alpha_g}$$



Используя эти обозначения, можно написать следующее выражение для блочной группы графа Γ^*_z :

$${}^2A^*_z = [A^d_z] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} A'_z A^*_{z(v_z-1)}, \quad (8.51)$$

причем

$$A^*_{z(v_z-1)} = A_{1\alpha} A_{1\alpha} \cdots A_{g\alpha}, \quad (8.52)$$

так как модуль-граф $\Gamma^*_{z(v_z-1)}$ — слабо связный граф, в котором все закороченные модули присоединены к одной вершине (точке сочленения).

Формула (8.51) следует из сравнения блочных групп ${}^2A^*_z$ и ${}^2A'_z$, имеющих одинаковое число столбцов. В каждом столбце блочной группы ${}^2A^*_z$ содержится n элементов типа $A_{i\alpha}$ и $g - n$ элементов типа A_j , в то время как в каждом столбце блочной группы ${}^2A'_z$ содержится $g - n$ элементов типа a'_j .

Формула (8.51) справедлива также для всех закороченных графов $\Gamma^*_{z(p)}$ порядка p (порядок замыкания — это порядок производной блочной группы закороченного графа):

$$A^*_{z(p)} \stackrel{s}{=} A'_{z(p)} A^*_{z(v_z-1)} \quad (8.53)$$

где $A^*_{z(p)}$ — блочная группа закороченного графа $\Gamma^*_{z(p)}$, $A'_{z(p)}$ — полная блочная группа графа $\Gamma_2(p)$.

Число элементов a'_i в отдельных столбцах блочной группы $A'_{z(p)}$ равно

$$v_z - p - 1.$$

Если предположить, что

$$A^*_{z(p)} \stackrel{s}{=} A_{z(p)},$$

то элементы блочной группы $A_{z(p)}$ можно записать в виде

$$a_{k(p)} = \frac{A_k}{A_{k\alpha}} (A^*_{z(v_z-1)})^{1/(v_z-p-1)}. \quad (8.54)$$

Для $p = v_z - 2$ имеем

$$a_{k(v_z-2)} = \frac{A_k}{A_{k\alpha}} A^*_{z(v_z-1)}. \quad (8.55)$$



Выразив $a_{k(p)}$ с помощью $a_{k(v_z-2)}$, получим

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(v_z-2)} \rangle (A_{z(v_z-1)}^*)^{(p+2-v_z)/(v_z-p-1)}. \quad (8.56)$$

Полагая

$$A_{z(p)}^* = A_{z(p)}^s = A_{(p)} \quad (8.57)$$

(где $A_{(p)}$ — блочная группа графа $\Gamma_{(p)}$, полученная в результате замыкания выделенных вершин графа Γ таким образом, что их блочная группа уменьшилась на p), выражение (8.56) можно записать в виде

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(v_z-2)} \rangle (A_{(v_z-1)})^{(p+2-v_z)/(v_z-p-1)}, \quad (8.58)$$

где

$$A_{(v_z-1)}^s = A_{v_z-1}.$$

Величина $a_{k(p)}$ — дендритный вес ребра α_k замещающего графа $\Gamma_{z(p)}$. Из выражения (8.58) следует, что дендритные веса ребер замещающего графа зависят от порядка p замыкания графа Γ .

Определим далее дендритный вес $a_{k(v_z-2)}$ с помощью блочной группы графа Γ .

Пусть ребра $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ графа Γ_z одновременно обозначают произвольные пути в графе Γ , соединяющие его соответствующие выделенные вершины. Выберем в графе Γ_z произвольный элементарный цикл, включающий все v_z вершин этого графа (так называемый *гамильтоновский цикл*) и состоящий из ребер

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{v_z}.$$

Этот цикл изображен на рис. 8.2.

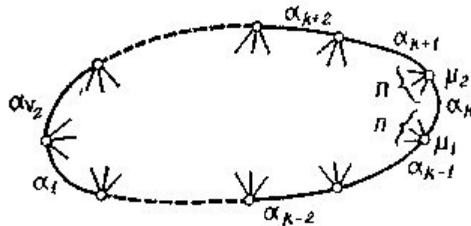


Рис. 8.2. Цикл Гамильтона.



Рассматривая графы $\Gamma_{z(v_z-2)}^*$ и Γ_{v_z-2} , на основании формул (8.51) и (8.55) можно написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_{k+1} \dots \alpha_{v_z}} &= \mathbb{A}_{z \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_{k+1} \dots \alpha_{v_z}}^* = \\ \mathbb{A}_{k-1} \frac{\mathbb{A}_{z(v_z-1)}^*}{\mathbb{A}_{k-1\alpha}} + \mathbb{A}_k \frac{\mathbb{A}_{z(v_z-1)}^*}{\mathbb{A}_{k\alpha}} + \sum_{j=v_z+1}^{v_z+n} \mathbb{A}_j \frac{\mathbb{A}_{z(v_z-1)}^*}{\mathbb{A}_{j\alpha}} &= \\ = \langle \alpha_{k-1(v_z-2)} \rangle + \langle \alpha_{k(v_z-2)} \rangle + \sum_{j=v_z+1}^{v_z+n} \langle \alpha_{j(v_z-2)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.59)$$

где α_{k-1} , α_k , α_{v_z+1} , α_{v_z+2} , \dots , α_{v_z+n} — обозначения всех ребер графа Γ_z , инцидентных вершине μ_1 (рис. 8.2).

Аналогично можно написать

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} &= \\ = \langle \alpha_{k(v_z-2)} \rangle + \langle \alpha_{k+1(v_z-2)} \rangle + \sum_{i=v_z+n+1}^{v_z+2n} \langle \alpha_{i(v_z-2)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.60)$$

где α_k , α_{k+1} , α_{v_z+n+1} , α_{v_z+n+2} , \dots , α_{v_z+2n} — обозначения всех ребер графа Γ_z , инцидентных вершине μ_2 (рис. 8.2). Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} &= \\ = \langle \alpha_{k-1(v_z-2)} \rangle + \langle \alpha_{k+1(v_z-2)} \rangle + \sum_{j=v_z+1}^{v_z+n} \langle \alpha_{j(v_z-2)} \rangle + \sum_{i=v_z+n+1}^{v_z+2n} \langle \alpha_{i(v_z-2)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Решив систему уравнений (8.59) — (8.61), получим выражение для дендритного веса ребра α_k замещающего графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$

$$\begin{aligned} \alpha_{k(v_z-2)} &= \frac{1}{2} (\mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_{k+1} \dots \alpha_{v_z}} + \\ + \mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} - \mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}}), \end{aligned} \quad (8.62)$$

где $\mathbb{A} = A$ — блочная группа графа Γ :

$$\mathbb{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_{k+1} \dots \alpha_{v_z}} = \frac{\partial^{v_z-2} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_{k+1} \dots \partial \alpha_{v_z}},$$



$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} = \frac{\partial^{v_z-2} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-1} \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}},$$

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} = \frac{\partial^{v_z-3} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_k \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}}$$

Чтобы упростить запись, примем обозначение

$$A_{v_z-3} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} = \frac{\partial^{v_z-3} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}}. \quad (8.63)$$

Тогда формула (8.62) для дендритного веса ребра α_k примет вид

$$\alpha_{k(v_z-2)} = \frac{1}{2} (A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} + A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} - A_{(v_z-3)\alpha_k}), \quad (8.64)$$

Причем

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k+1}},$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} = \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k-1}},$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_k} = \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_k}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На основе правила для циклов

$$A_{v_z-3} = \frac{\partial A}{\partial D^{\alpha_k}} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^{v_z-3} [\alpha_i]} \quad (8.65)$$

где $D^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{v_z-3} [\alpha_i]$ — блочная группа произвольного дерева,

касающегося всех вершин графа Γ_z , кроме вершин μ_1 и μ_2 ребра α_k (рис. 8.2).

Рассмотрим два утверждения, относящиеся к дендритному весу $\alpha_{k(v_z-2)}$ ребра α_k графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$.



Утверждение 8.2. Дендритный вес $a_{k(v_z-2)}$ ребра α_k замещающего графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$ для произвольного графа Γ представляет собой полную топологическую блочную группу $\langle a_{k(v_z-2)} \rangle \geq 0$.

Доказательство. Замещающий граф $\Gamma_{z(v_z-3)}$ с замкнутыми ребрами

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{v_z}$$

гамильтоновского цикла (рис. 8.2) имеет в своем составе цикл, состоящий из ребер $\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}$, для которого правило циклов принимает вид

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} + A_{(v_z-3)\alpha_k} + A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = 0, \quad (a)$$

где A — блочная группа графа Γ , а $A_{(v_z-3)}$ рассчитывается по формуле (8.65). Разделим блочную группу из выражения (a) на $2^3 - 1 = 7$ частей X_1, X_2, \dots, X_7 , не содержащих идентичных столбцов:

$$\forall i, j \in M \quad (X_i \cap X_j = 0), \quad i \neq j, \quad M = (1, 2, \dots, 7), \quad (б)$$

и составим из них следующую таблицу:

$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}}$	X_1	X_2	X_3		X_5		
$A_{(v_z-3)\alpha_k}$	X_1	X_2		X_4		X_6	
$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}}$	X_1		X_3	X_4			X_7

На основании этой таблицы выражение (a) можно записать $[X_1 X_2 X_3 X_5] + [X_1 X_2 X_4 X_5] + [X_1 X_3 X_4 X_7] = [X_1 X_5 X_6 X_7] = 0$.

Из условия (б) следует

$$X_1 = X_5 = X_6 = X_7 = 0.$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$A_{(v_z-3)\alpha_k} = X_2 + X_4.$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} = X_2 + X_3,$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = X_3 + X_4,$$



где

$$X_2 = X_2, X_3 = X_3, X_4 = X_4.$$

Решив эту систему уравнений с тремя неизвестными, получим

$$X_3 = \frac{1}{2} (A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} + A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} - A_{(v_z-3)\alpha_k}) \quad (в)$$

и аналогичные выражения для X_2 и X_4 .

Поскольку X_2 , X_3 и X_4 — части блочных групп $A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}}$, $A_{(v_z-3)\alpha_k}$, $A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}}$, они представляют собой положительные блочные группы, и выражение (в), идентичное выражению (8.64) для дендритного веса $a_{k(v_z-2)}$, также является положительной полной блочной группой, что и требовалось доказать.

Из приведенной таблицы также следует, что

$$a_{k(v_z-2)} = A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} \cap A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k-1}} \cap \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k+1}} \quad (8.66)$$

или в явном виде

$$a_{k(v_z-2)} = \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_1}} \cap \frac{\partial}{\partial D^{\mu_2}} \quad (8.67)$$

где D^{μ_1} — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин графа Γ_z , кроме вершины μ_1 , инцидентной ребру α_k ;

D^{μ_2} — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин графа Γ_z , кроме вершины μ_2 , инцидентной ребру α_k .

Таким образом, дендритный вес $a_{k(v_z-2)}$ ребра α_k замещающего графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$ можно рассчитывать двумя способами: либо по формуле (8.64), либо по формуле (8.67).

Утверждение 8.3. Дендритные веса $a_{k(v_z-2)}$ и $a_{l(v_z-2)}$ двух произвольных ребер α_k и α_l замещающего графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$ не имеют одинаковых столбцов, т. е.

$$\forall k, l \{ \langle a_{k(v_z-2)} \rangle \cap \langle a_{l(v_z-2)} \rangle = \emptyset \}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, g. \quad (8.68)$$

Доказательство. Ребра α_k и α_l могут быть расположены в графе Γ_z двумя способами:



- 1) $\alpha_k, \alpha_l \in \mu_i$, где μ_i — произвольная вершина графа Γ_z ;
- 2) $(\alpha_k \in \mu_j) \wedge (\mu_i \neq \mu_j)$.

В первом случае используем формулу (8.59), которая применительно к произвольной вершине μ_i графа Γ_z запишется в виде

$$\frac{\partial A}{\partial D^{\mu_i}} = \sum_i^s \langle a_{i(v_z-2)} \rangle, \quad (8.69)$$

где $D^{\mu_i} = \prod_{j=1}^{v_z-2} [\alpha_j]$ — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин графа Γ_z , кроме вершины μ_i .

Это равенство означает, что сумма дендритных весов $a_{i(v_z-2)}$ (как полных блочных групп) всех ребер, инцидентных вершине μ_i , равна блочной группе закороченного графа $\Gamma_{z(v_z-2)}$.

Так как блочная группа $\partial A / \partial D^{\mu_i}$ не содержит идентичных столбцов (а согласно утверждению 8.2, все полные блочные группы $a_{i(v_z-2)}$ положительны), то из формулы (8.69) для них можно написать равенство (8.68).

Для случая расположения ребер a_k и a_l в графе Γ_z по второму способу применим формулу (8.61), которую запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial (D^{\alpha_j} [\alpha_j])} = \sum_p^s \langle a_{p(v_z-2)} \rangle \quad (8.70)$$

где $D^{\alpha_j} = \prod_{n=1}^{v_z-3} [\alpha_n]$ — блочная группа произвольного дерева,

касающегося всех вершин графа Γ_z , кроме вершин μ_k и μ_l , инцидентных ребру α_j ; $\sum_p \langle a_{p(v_z-2)} \rangle$ — сумма дендритных весов (как

полных блочных групп) всех ребер сечения графа Γ_z топологической сферой p , охватывающей только вершины μ_i и μ_j (рис. 8.3).

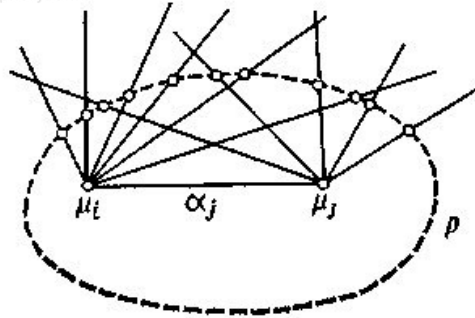


Рис. 8.3. Сечение замещающего графа топологической сферой p , охватывающей вершины μ_i и μ_j .

На основании равенства (8.70) по тем же соображениям, что и в первом случае, для всех $a_{p(v_z-2)}$ можно написать равенство (8.68),

Так как в полном графе Γ_z для произвольных вершин μ_i и μ_j всегда существует ребро α_p , соединяющее их, то среди ребер α_p сечения p существуют ребра α_k и α_l , т. е. то, что и требовалось доказать.

Равенство (8.68) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^g [a_{k(v_z-2)}] = \sum_{k=1}^g \langle a_{k(v_z-2)} \rangle. \quad (8.71)$$

Утверждения 8.2 и 8.3 справедливы также и для дендритных весов $a_{k(p)}$, рассчитанных по формуле (8.58).

Если обозначить через $\mathbb{A}''_{z(p)}$ полную блочную группу замещающего графа $\Gamma_{z(p)}$, полученную путем замены ребер α_i на дендритные веса $a_{i(v_z-2)}$, то на основании формулы (8.58) блочную группу $A_{(p)}$ графа $\Gamma_{(p)}$ можно записать

$$A_{(p)} = \mathbb{A}''_{z(p)} (\mathbb{A}_{(v_z-1)})^{p+2-v_z} \quad (8.72)$$

Проиллюстрируем метод расчета дендритных весов ребер замещающего графа Γ_z .

Пример 8.3. Рассчитаем дендритные веса ребер замещающего графа с четырьмя вершинами F_z (рис. 8.4, б) для графа Γ (рис. 8.4, а).

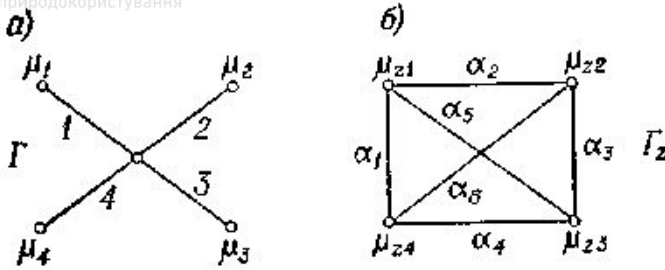


Рис. 8.4.

Запишем блочную группу A графа Γ



$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Из формулы (8.67)

$$a_{1(2)}^s = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \cap \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_4} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \alpha_3} \cap \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_3 \alpha_4},$$

$$\alpha_2 \alpha_3 = 12 \ 23 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 33 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 \alpha_4 = 12 \ 23 = \begin{bmatrix} 2 & 23 \\ 3 & 44 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$a_{1(2)}^s = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Аналогично рассчитаем дендритные веса остальных ребер графа $\Gamma_{z(2)}$; в результате получим

$$a_{2(2)}^s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_{3(2)}^s = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_{4(2)}^s = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$



$$a_{5(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_{6(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\forall i, j \{ \langle a_{i(2)} \rangle \cap \langle a_{j(2)} \rangle \} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Теперь рассчитаем дендритные веса ребер замещающего графа $\Gamma_{z(p)}$. Для этого вначале вычислим блочную группу $A_{(v_z-1)}$. Выбираем дерево графа Γ_z , состоящее из путей α_1 , α_2 и α_3 . Имеем

$$[\alpha_1] [\alpha_2] [\alpha_3] = [1 \ 4] [1 \ 2] [2 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$A_{(v_z-1)} = A_{(3)} = \frac{\partial^3 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = [3 \ 2 \ 4 \ 1].$$

В соответствии с формулой (8.58)

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(2)} \rangle \langle 1 \ 2 \ 3 \ 4 \rangle^{(p-2)/(3-p)}$$

Для $p = 0$ (незамкнутый граф) имеем

$$a_k = \langle a_{k(2)} \rangle \langle 1 \ 2 \ 3 \ 4 \rangle^{-2/3},$$

откуда, например, при $k=1$

$$a_1 = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right\rangle \langle 1 \ 2 \ 3 \ 4 \rangle^{-2/3}.$$

Для проверки полученных результатов рассчитаем блочную группу графа Γ , используя дендритные веса a_k графа Γ_z . С этой целью определим полную блочную группу графа Γ_z , выраженную через обозначения его ребер α_i :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_6 \alpha_6 \alpha_6 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_6 \end{matrix} \right\},$$

и далее заменим все элементы α_i на дендритные веса a_i . Получим



$$A_z'' = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 1 & 1 & 111 & 11111111 \\ 1222 & 12222 & 21221111 \\ 22222 & 233222331222 \\ 23233 & 3433332332 \\ 343 & 3444343343343 \\ 4444444444444444 \end{pmatrix} \langle 1234 \rangle^{-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A.$$

Граф, рассмотренный в примере, имеет значительно более простой вид, чем замещающий граф, поэтому данный пример может служить лишь иллюстрацией построения замещающего графа. Преимущества применения данного метода очевидны в том случае, когда замещающий граф более простой, чем рассматриваемый.

Пример 8.4. Рассчитаем дендритные веса $a_{1(1)}$, $a_{2(1)}$, $a_{3(1)}$ ребер α_1 , α_2 , α_3 замещающего графа Γ_z (рис. 8.5, б) для графа Γ , изображенного на рис. 8.5, а.

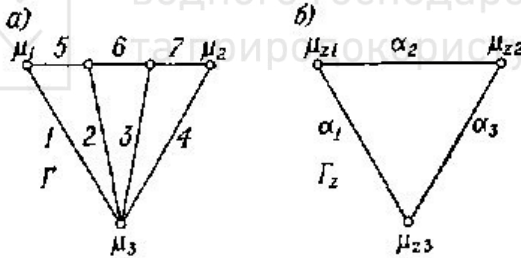


Рис. 8.5.

По формуле (8.67) напишем

$$a_{1(2)} = \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_3} = \left(\frac{\partial A}{\partial 1} + \frac{\partial A}{\partial 4} \right) \cap \left(\frac{\partial A}{\partial 4} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} \right) + \frac{\partial A}{\partial 4} = \left(\frac{\partial}{\partial 1} \frac{\delta A}{\delta 4} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 4} \frac{\delta A}{\delta 1} \right) + \frac{\partial A}{\partial 4}.$$

Блочная группа графа Γ равна

$$A = [1 \ 5] [2 \ 5 \ 6] [3 \ 6 \ 7] [4 \ 7].$$

Подставив выражение блочной группы A графа Γ в выражение для $a_{1(1)}$, получим



$$a_{1(1)} = ([2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7] [7]) \cap ([5] [2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7]) +$$

$$+ [1\ 5] [2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7] = \begin{bmatrix} 11\ 11\ 1\ 1\ 111223 \\ 2223\ 55363555 \\ 367567675676 \end{bmatrix}.$$

Аналогично рассчитаем $a_{2(1)}$ и $a_{3(1)}$:

$$a_{2(1)} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} = \left(\frac{\partial}{\partial 1} \delta A \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 4} \delta A \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$a_{3(1)} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = \left(\frac{\partial A}{\partial 1} \right) \cap \left(\frac{\partial A}{\partial 4} + \frac{\partial A}{\partial 1} \right) = \frac{\partial A}{\partial 1} +$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial 1} \delta A \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 4} \delta A \right) \right\} = 256\ 367\ 47 + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 222344342233 \\ 3444\ 55463656 \\ 467567677777 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\langle a_{1(1)} \rangle \cap \langle a_{2(1)} \rangle = \langle a_{2(1)} \rangle \cap \langle a_{3(1)} \rangle = \langle a_{1(1)} \rangle \cap \langle a_{3(1)} \rangle = 0.$$

Пример 8.5. Используя замещающий граф Γ_z с четырьмя вершинами (рис. 8.6, б), рассчитаем полную блочную группу A_α графа Γ_{α_1} , полученного в результате замыкания вершин μ_1 и μ_3 в графе Γ (рис. 8.6, а).

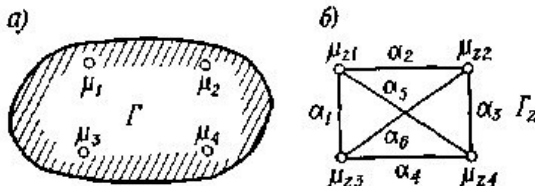


Рис. 8.6.



Дендритные веса ребер графа $\Gamma_{z(2)}$ определяются из уравнений (8.64) и (8.65):

$$\left. \begin{aligned} a_{1(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_2\alpha_3} + A_{\alpha_3\alpha_4} - A_{\alpha_1\alpha_3}, \\ a_{2(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_3\alpha_4} + A_{\alpha_1\alpha_4} - A_{\alpha_2\alpha_4}, \\ a_{3(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1\alpha_4} + A_{\alpha_1\alpha_2} - A_{\alpha_1\alpha_3}, \\ a_{4(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_1\alpha_3} - A_{\alpha_2\alpha_4}, \\ a_{5(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_3\alpha_6} + A_{\alpha_1\alpha_6} - A_{\alpha_5\alpha_6}, \\ a_{6(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1\alpha_5} + A_{\alpha_3\alpha_5} - A_{\alpha_5\alpha_6}. \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$



Заметим, что

$$\begin{aligned} A_{\alpha_2\alpha_5} &= A_{\alpha_3\alpha_5} = A_{\alpha_2\alpha_3}, & A_{\alpha_1\alpha_4} &= A_{\alpha_4\alpha_5} = A_{\alpha_1\alpha_5}, \\ A_{\alpha_1\alpha_2} &= A_{\alpha_2\alpha_6} = A_{\alpha_1\alpha_6}, & A_{\alpha_3\alpha_4} &= A_{\alpha_3\alpha_6} = A_{\alpha_4\alpha_6}. \end{aligned}$$

Блочная группа A_z графа Γ_z равна

$$A_z = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_5] [\alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_6] [\alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5],$$

поэтому блочная группа $A_{z\alpha_1}$ замкнутого графа $\Gamma_{z\alpha_1}$ равна

$$A_{z\alpha_1} = \frac{\delta A_z}{\delta \alpha_1} = [\alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_6] [\alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5] = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_3\alpha_3\alpha_4\alpha_5 \\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_6\alpha_6 \end{bmatrix}$$

Согласно уравнению (8.72), для блочной группы A_{α_1} графа

Γ_{α_1} получим

$$A_{\alpha_1} = \frac{s}{A_{(3)}} = \frac{A_{z\alpha_1}^n}{A_{(3)}} = \frac{(\langle a_{2(2)} \rangle + \langle a_{6(2)} \rangle)(\langle a_{3(2)} \rangle + \langle a_{4(2)} \rangle + \langle a_{5(2)} \rangle) + (\langle a_{3(2)} \rangle)(\langle a_{4(2)} \rangle + \langle a_{5(2)} \rangle)}{A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}.$$

Подставив выражения (a) в эту формулу и упростив, окончательно будем иметь



$$A_{\alpha_1}^s = \frac{1}{4A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} (2A_{\alpha_1\alpha_4} + A_{\alpha_3\alpha_4} + A_{\alpha_2\alpha_5} - A_{\alpha_2\alpha_4} - A_{\alpha_5\alpha_6}) \times \\ \times (A_{\alpha_1\alpha_4} + 3A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_2\alpha_3} + A_{\alpha_3\alpha_4} - A_{\alpha_1\alpha_3} - A_{\alpha_5\alpha_6} - A_{\alpha_2\alpha_4}) + \\ + (A_{\alpha_1\alpha_4} + A_{\alpha_1\alpha_2} - A_{\alpha_1\alpha_3})(2A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_2\alpha_3} + A_{\alpha_3\alpha_4} - A_{\alpha_2\alpha_4} - A_{\alpha_5\alpha_6}).$$

где

$$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^s = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{\partial^3 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \alpha_3},$$

$$A_{\alpha_1\alpha_4}^s = A_{\alpha_1\alpha_4} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_4} \text{ и т. д.}$$

Пример 8.6. Рассчитаем полную блочную группу \mathbb{A} графа Γ с тремя выделенными вершинами μ_1, μ_2, μ_3 (рис. 8.7, а) с помощью замещающего графа Γ_z , имеющего три вершины (рис. 8.7, б).

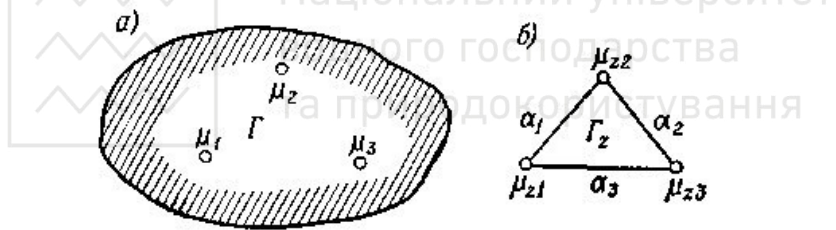


Рис. 8.7.

Дендритные веса графа $\Gamma_{z(1)}$, согласно уравнениям (8.64) и (8.65), равны

$$a_{1(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3} - A_{\alpha_1},$$

$$a_{2(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_1} + A_{\alpha_3} + A_{\alpha_2},$$

$$a_{3(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} - A_{\alpha_3},$$

так как

$$A_{(v_z-3)} = A_{(3-3)} = A_{(0)} = A.$$

Применив формулу (8.72), находим



$$A = A_z^s A_z^{-1} \quad (2).$$

Блочную группу A_z^s получим, подставив в блочную группу графа Γ_z

$$A_z^s = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

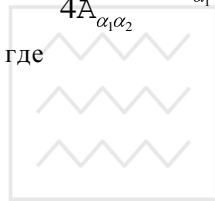
вместо ребер α_1 , α_2 и α_3 их дендритные веса $a_{1(1)}$, $a_{2(1)}$ и $a_{3(1)}$. В результате получаем

$$A_2^s = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3},$$

и окончательно

$$A = \frac{1}{4A_{\alpha_1 \alpha_2}^s} (2A_{\alpha_1} A_{\alpha_3} + 2A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} + 2A_{\alpha_2} A_{\alpha_3} - A_{\alpha_1}^2 - A_{\alpha_2}^2 - A_{\alpha_3}^2).$$

где



$$A_{\alpha_1 \alpha_2}^s = A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^s = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$A_{\alpha_1}^s = A_{\alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \quad \text{и т. д.}$$

8.3. Полная блочная группа модуль-графа

Рассмотрим *два метода* расчета полной блочной группы A модуль-графа.

Метод 1. Блочная группа второго ранга 2A модуль-графа, определенное двумя тождественными формулами:

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A_0^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad {}^2A = \left[A_0^d \right] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}.$$



может быть преобразовано в замещающую блочную группу A (первого ранга)

$$A = {}^e A,$$

если применить операции алгебры блочных групп над ее элементами A_{ij} в соответствии с выражением

$$A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^g A_{ij}$$

(здесь $n = T$ — количество столбцов блочной группы 2A , равное числу деревьев скелета Γ_0 модуль-графа, а g — количество строк блочной группы 2A , равное числу модулей модуль-графа).

На практике при расчете блочных групп модуль-графов часто вместо операций алгебры блочных групп применяют операции алгебры полных блочных групп.

Чтобы преобразовать блочную группу 2A модуль-графа в полную блочную группу \bar{A} , следует заменить все элементы A_{ij} блочной группы 2A , представляющие собой блочные группы модулей графа Γ , полными блочными группами

$$A_{ij} = \bar{A}_{ij}$$

с учетом дефекта суммы столбцов блочной группы 2A

$$\sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^g A_{ij} \right).$$

Произведения элементов столбцов

$$\prod_{i=1}^g A_{ij}$$

не обладают дефектом произведения, поскольку модули графа Γ не содержат общих ребер.

Как известно, элементы блочной группы 2A модуль-графа Γ представляют собой алгебраические производные блочных групп отдельных модулей Γ_i графа Γ

$$A_{ij} = A_{i(p_{ij})},$$

где p_{ij} — порядок производной блочной группы A_{ij} , A_i — блочная группа модуля Γ_i .

Заметим, что все столбцы блочной группы упорядочены в соответствии с номерами модулей



$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{1(p_{11})} & A_{1(p_{12})} & \cdots & A_{1(p_{1n})} \\ A_{2(p_{21})} & A_{1(p_{22})} & \cdots & A_{1(p_{2n})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{g(p_{g1})} & A_{g(p_{g2})} & \cdots & A_{g(p_{gn})} \end{bmatrix}. \quad (8.73)$$

Составим из элементов p_{ij} матрицу, построенную аналогично блочной группы 2A :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{g1} & p_{g2} & \cdots & p_{gn} \end{pmatrix}. \quad (8.74)$$

Эту матрицу назовем *матрицей порядков* блочной группы 2A модуль-графа. Порядок элементов p_{ij} в ней аналогичен порядку элементов в блочной группе 2A . Тогда отношение R преобразования блочной группы 2A в матрицу порядков P определим следующим образом:

$$({}^2ARP) \Leftrightarrow \forall_i \forall_j (A_{i(p_{ij})} \Leftrightarrow p_{ij}), \quad i=1,2,\dots,g, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (8.75)$$

Заметим, что суммы элементов в отдельных столбцах матрицы P равны между собой и равны цикломатическому числу скелета модуль-графа.

Определим понятие идентичности двух столбцов матрицы порядков P .

Определение 8.5. Два столбца K_{j_1} и K_{j_2} матрицы порядков P идентичны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(K_{j_1} = K_{j_2}) \Leftrightarrow \forall_i (p_{ij_1} = p_{ij_2}), \quad i = 1,2,\dots,g. \quad (8.76)$$

Если теперь сгруппировать столбцы матрицы порядков в соответствии с критерием идентичности, а потом таким же образом перегруппировать столбцы блочной группы 2A , то можно написать следующее равенство:

$${}^2A = {}^2A^I + {}^2A^{II} + \dots + {}^2A^N + {}^2A^M, \quad (8.77)$$

где ${}^2A^I, {}^2A^{II}, \dots, {}^2A^N$ — блочные группы второго ранга, содержащие по крайней мере два столбца и имеющие матрицу порядков, построенную из идентичных столбцов; ${}^2A^M$ — блочная



группа, матрица порядков которой не имеет идентичных столбцов.

Отметим, что сумма, представленная выражением (8.77), не обладает дефектом и ее можно записать в виде

$$A = A^I + A^{II} + \dots + A^N + A^M, \quad (8.78)$$

причем

$$\begin{aligned} A &= A^s = {}^e A^2, \\ A^I &= A^I = {}^e A^I, \\ A^{II} &= A^{II} = {}^e A^{II}, \\ &\dots \\ A^N &= A^N = {}^e A^N \end{aligned}$$

а также

$$A^M = \sum_{k=1}^{n'} \prod_{i=1}^g A_{ik}, \quad (8.79)$$

где n' — количество столбцов блочной группы ${}^2 A^M$ и $A_{ik} = A_{ik}^s$.

Из равенств (8.78) и (8.79) следует, что для определения полной блочной группы A модуль-графа Γ необходимо рассчитать полные блочные группы

$$A^I, A^{II}, \dots, A^N.$$

Замену блочных групп ${}^2 A^I, {}^2 A^{II}, \dots, {}^2 A^N$ на полные блочные группы можно произвести, используя замещающие графы отдельных модулей графа Γ и следующие формулы (см. предыдущий раздел):

$$A_{i(p)} = A_{iz(p)}^s, \quad (8.80)$$

где $A_{i(p)}$ — блочная группа модуля Γ_i при замыкании его p путей; $A_{iz(p)}$ — полная блочная группа замещающего графа с замкнутыми p путями, элементы которого — дендритные веса $a_{ik(p)}$ ребер этого графа (обозначим эти ребра символами дендритных весов a_{ik} при $p = 0$);



$$a_{ik(p)} = \frac{1}{2} (A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} + A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} - A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}) (A_{i(v_{iz}-1)})^{\frac{p_i+2-v_{iz}}{v_{iz}-p_i-1}} \quad (8.81)$$

или

$$a_{ik(p)} = (A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} \cap A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}}) (A_{i(v_{iz}-1)})^{\frac{p_i+2-v_{iz}}{v_{iz}-p_i-1}}. \quad (8.82)$$

При этом

$$A_{i(v_{iz}-3)}^s = A_{i(v_{iz}-3)} = \frac{\partial A_i}{\partial D_i^{a_{ik}}}, \quad (8.83)$$

где $D_i^{a_{ik}}$ — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин замещающего графа Γ_{iz} , кроме вершин, инцидентных ребру a_{ik} ;

$$A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}^s = \frac{\partial^2 A_i}{\partial D_i^{a_{ik}} \partial a_{ik+1}}, \quad (8.84)$$

$$A_{i(v_{iz}-1)}^s = A_{i(v_{iz}-1)} = \frac{\partial A_i}{\partial D_i}. \quad (8.85)$$

где D_i — блочная группа произвольного дерева замещающего графа Γ_{iz} (ребра этого графа одновременно представляют собой соответствующие пути модуля Γ_i).

Дополняя деревья отдельных модулей, содержащиеся в скелете модуль-графа, получаем их замещающие графы в виде полных графов (полных многоугольников). Пусть, например, блочная группа ${}^2A^I$ выражения (8.77) равна

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1(p_{11})} & A_{1(p_{12})} & \cdots & A_{1(p_{1n}I)} \\ A_{2(p_{21})} & A_{1(p_{22})} & \cdots & A_{1(p_{2n}I)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{g(p_{g1})} & A_{g(p_{g2})} & \cdots & A_{g(p_{gn}I)} \end{bmatrix}, \quad (a)$$

причем

$$\forall_{i,j,k} (p_{ij} = p_{ik} = p_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad j, k=1, 2, \dots, n^I.$$

Подставив вместо элементов $A_{i(p_{ij})}$, в выражении (a) блочные группы $A_{iz(p_{ij})}$ замещающих графов модулей, в соответствии с



канонической формой приведем полученную блочную группу второго ранга к замещающей блочной группе первого ранга A^I :

$$A^I = \sum_{j=1}^{n^I} \prod_{i=1}^g A_{iz(p_{ij})}. \quad (6)$$

Далее по формулам (8.81) или (8.82) рассчитаем дендритные веса $a_{ik(p_{ij})}$ ребер замещающих графов $\Gamma_{iz(p_{ij})}$ и подставим их в выражение (6). Таким образом, получим полную блочную группу \bar{A}^I , выраженную с помощью полных блочных групп отдельных модулей.

Аналогично вычислим полные блочные группы A^I, A^{II}, \dots, A^N и после суммирования с блочной группой A^M найдем полную блочную группу A модуль-графа Γ .

Проиллюстрируем на примерах метод 1 определения полной блочной группы модуль-графа.

Пример 8.7. Определим полную блочную группу A модуль-графа Γ , изображенного на рис. 8.8, а.

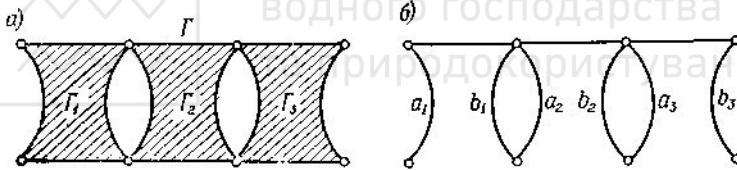


Рис. 8.8.

Дополнительная блочная группа A_0^d скелета Γ_0 (рис. 8.8, б) равна

$$A_0^d = [a_2 \ b_1] [a_3 \ b_2] = \begin{bmatrix} a_2 & a_2 & b_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 & a_3 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, блочная группа 2A графа Γ имеет вид

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_1 & A_{1b} & A_{1b} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_2 & A_{2b} \\ A_{3a} & A_3 & A_{3a} & A_3 \end{bmatrix}. \quad (8.86)$$

Матрица порядков



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не содержит идентичных столбцов, следовательно, полная блочная группа A графа Γ , согласно выражению (8.79), имеет вид

$$A = A_1 A_{2a} A_{3a} + A_1 A_{2ab} A_3 + A_{1b} A_2 A_{3a} + A_{1b} A_{2b} A_3, \quad (8.87)$$

где

$$A_1^s = A_1, \quad A_2^s = A_2, \quad A_3^s = A_3, \quad A_{1b}^s = A_{1b} = \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \quad \text{и т. д.}$$

Заметим, что для рассмотренного в этом примере типа графов в виде цепочки с произвольным количеством модулей матрица порядков никогда не содержит идентичных столбцов, поэтому полная блочная группа определяется по формуле (8.79) без применения замещающих графов.

Пример 8.8. Рассчитаем полную блочную группу A модуль-графа Γ , изображенного на рис. 8.9, а.

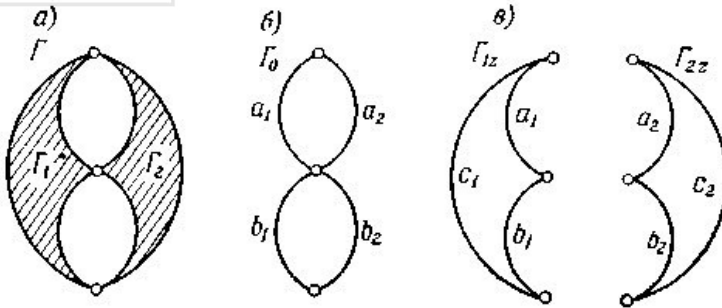


Рис. 8.9.

Дополнительная блочная группа A_0^d скелета Γ_0 (рис. 8.9, б) имеет вид

$$A_0^d = [a_1 \ a_2] [b_1 \ b_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$



поэтому блочная группа 2A графа Γ равна

$${}^2A = \begin{bmatrix} A^d & \\ & 0 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2b} & A_{2a} & A_{2ab} \end{bmatrix},$$

а матрица порядков имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ X & X & & \end{pmatrix}.$$

В этой матрице содержатся два идентичных столбца (обозначенные снизу буквой X), поэтому, согласно уравнению (8.77), имеем

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_1 \\ A_2 & A_{2ab} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Блочная группа равна

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_1 \\ A_2 & A_{2ab} \end{bmatrix}^s = A_{1ab}A_2 + A_1A_{2ab}. \quad (б)$$

Блочную группу

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} \quad (в)$$

заменим полной блочной группой, используя замещающие графы Γ_{1z} и Γ_{2z} модуль-графа Γ (фиг. 8.9, в). Для этих графов можно написать

$$\begin{aligned} A_{1a} &= [b_{1(1)} \quad c_{1(1)}], \\ A_{1b} &= [a_{1(1)} \quad c_{1(1)}], \\ A_{2a} &= [b_{2(1)} \quad c_{2(1)}], \\ A_{2b} &= [a_{2(1)} \quad c_{2(1)}]. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (в), получим

$$\begin{aligned} {}^2A^I &= \begin{bmatrix} [b_{1(1)} \quad c_{1(1)}][a_{1(1)} \quad c_{1(1)}] \\ [a_{2(1)} \quad c_{2(1)}][b_{2(1)} \quad c_{2(1)}] \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} b_{1(1)} b_{1(1)} c_{1(1)} \times_{1(1)} a_{1(1)} a_{1(1)} c_{1(1)} \times_{1(1)} \\ a_{2(1)} c_{2(1)} a_{2(1)} \times_{2(1)} b_{2(1)} c_{2(1)} b_{2(1)} \times_{2(1)} \end{bmatrix}^s \\ &= A_{1a}A_{2b} + A_{1b}A_{2a} - 2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle, \end{aligned}$$

так как



$$A_{1a}^s = A_{1a}, \quad A_{1b}^s = A_{1b},$$

$$2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle A_{2a}^s = A_{2a}, \quad A_{2b}^s = A_{2b},$$

а $2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle$ — дефект суммы столбцов блочной группы A^I (вычеркнуты два идентичных столбца). Дендритные веса $c_{1(1)}$ и $c_{2(1)}$ определяются из выражения (8.81)

$$c_{1(1)} = \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}),$$

$$c_{2(1)} = \frac{1}{2}(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),$$

так как

$$v_{1z} = v_{2z} = 3, \quad p_1 = p_2, \quad A_{i(0)} = A_i,$$

$$(A_{i(v_{iz}-1)})^{v_{iz}-p_i-1} = A_{i(2)}^{01} = 1, \quad i=1,2.$$

Полную блочную группу A графа Γ (рис. 8.9, а) подсчитаем по формуле

$$A = A^M + A^I = A_{1ab}A_2 + A_1A_{2ab} + A_{1a}A_{2b} + A_{1b}A_{2a} - \frac{1}{2}A_{1a} + A_{1b} - A_{1c} \quad A_{2a} + A_{2b} - A_{2c} \quad (8.88)$$

где

$$A_{1ab} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1}, \quad A_{2ab} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \quad \text{и т. д.}$$

Пусть, например, граф Γ имеет вид, представленный на рис. 8.10, а. Модули (подграфы) Γ_1 и Γ_2 изображены на рис. 8.10, б, а их замещающие графы Γ_{1z} и Γ_{2z} — на рис. 8.10, в.

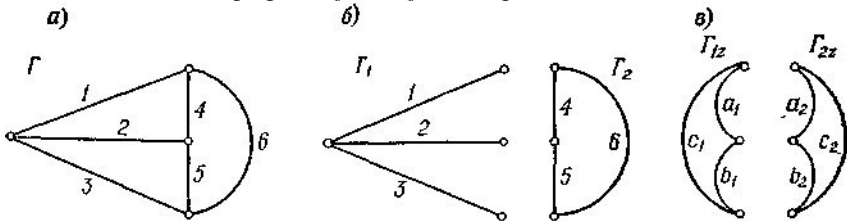


Рис. 8.10.

На основании формулы (8.88) полная блочная группа этого графа равна



$$\begin{aligned}
 A &= \langle 123 \rangle \left\{ \begin{matrix} 445 \\ 566 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \langle \emptyset \rangle + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 33 \end{matrix} \right\} \langle 46 \rangle + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 23 \end{matrix} \right\} \langle 56 \rangle - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 33 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 23 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 13 \end{matrix} \right\} \right) \langle 56 \rangle + \langle 46 \rangle - \langle 45 \rangle = \\
 & = \begin{bmatrix} 1112223334465561 \\ 4454454453331112 \\ 5665665661222323 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Пример 8.9. Рассчитаем полную блочную группу A модуль-графа Γ , изображенного на рис. 8.11, а.

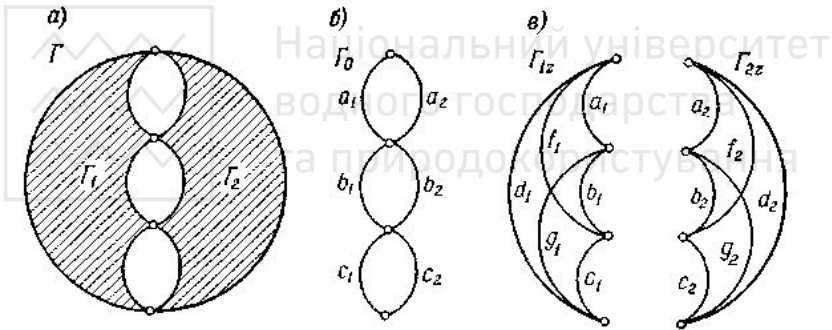


Рис. 8.11.

Дополнительная блочная группа A_0^d скелета Γ_0 (рис. 8.11, б) равна

$$A_0^d = [a_1 a_2] [b_1 b_2] [c_1 c_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_1 & b_1 & a_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & c_2 & b_2 & a_2 & c_2 & b_2 & c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Поэтому блочная группа 2A графа Γ имеет вид

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1abc} & A_1 & A_{1ac} & A_{1bc} & A_{1ab} & A_{1c} & A_{1a} & A_{1b} \\ A_2 & A_{2abc} & A_{2b} & A_{2a} & A_{2c} & A_{2ab} & A_{2bc} & A_{2ac} \end{bmatrix}. \quad (8.89)$$

Матрица порядков имеет вид



$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X_1 \ X_1 \ X_1 \ X_2 \ X_2 \ X_2$$

следовательно,

$${}^2A = {}^2A^I + {}^2A^{II} + {}^2A^M, \quad (a)$$

где

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1bc} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} & A_{2c} \end{bmatrix}, \quad (б)$$

$${}^2A^{II} = \begin{bmatrix} A_{1c} & A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2ab} & A_{2bc} & A_{2ac} \end{bmatrix}, \quad (в)$$

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1abc} & A_1 \\ A_2 & A_{2abc} \end{bmatrix}.$$

Для замены блочных групп ${}^2A^I$ и ${}^2A^{II}$ полными блочными группами дополним деревья Γ_{10} и Γ_{20} до полных графов Γ_{1z} и Γ_{2z} , как показано на рис. 8.11, в, рассматривая эти графы как замещающие графы модулей Γ_1 и Γ_2 . При этом будут справедливы следующие соотношения:

$$A_{1ac} = [b_{1(2)} \ d_{1(2)} \ f_{1(2)} \ g_{1(2)}],$$

$$A_{1bc} = [a_{1(2)} \ d_{1(2)} \ f_{1(2)}],$$

$$A_{1ab} = [c_{1(2)} \ d_{1(2)} \ g_{1(2)}].$$

Подставив эти выражения в блочную группу ${}^2A^I$ (б), получим

$${}^2A^I = \left[\begin{array}{ccc} [b_{1(2)} \ d_{1(2)} \ f_{1(2)} \ g_{1(2)}] & & \\ & A_{2b} & \\ & & A_{2a} \\ & & & A_{2c} \end{array} \right]^s =$$

$${}^s \langle b_{1(2)} \rangle A_{2b} + \langle a_{1(2)} \rangle A_{2a} + \langle c_{1(2)} \rangle A_{2c} + \langle d_{1(2)} \rangle A_{2d} + \langle f_{1(2)} \rangle A_{2f} + \langle g_{1(2)} \rangle A_{2g} \quad (г)$$

так как

$$[A_{2a} \ A_{2b} \ A_{2c}]^e = A_{2d},$$

$$[A_{2a} \ A_{2b}]^e = A_{2f} \quad \text{и} \quad [A_{2b} \ A_{2c}]^e = A_{2g}.$$

Дендритные веса определяются из выражений



$$a_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1cd} + A_{1bc} - A_{1ac}),$$

$$b_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ad} + A_{1cd} - A_{1bd}),$$

$$c_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ad} + A_{1ab} - A_{1ac}),$$

$$d_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ab} + A_{1bc} - A_{1bd}),$$

$$f_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1cg} + A_{1ag} - A_{1fg}),$$

$$g_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1af} + A_{1cf} - A_{1fg}),$$

так как



$$(A_{1(3)})^{p_1+2-v_{1z}} v_{1z}^{-p_1-1} = A_{1(3)}^{0/1} = 1.$$

Если эти величины подставить в выражение (г), а потом в выражение (а) и использовать подобие блочных групп ${}^2A^I$ и ${}^2A^{II}$, то получим следующую формулу полной блочной группы модуль-графа Γ (рис. 8.11, а):

$$\begin{aligned} A = & A_{1abc} A_2 + A_1 A_{2abc} + \frac{1}{2} \{ (A_{1cd} + A_{1bc} - A_{1ac}) A_{2a} + \\ & + (A_{1ad} + A_{1cd} - A_{1bd}) A_{2b} + (A_{1ad} + A_{1ab} - A_{1ac}) A_{2c} + \\ & + (A_{1ab} + A_{1bc} - A_{1bd}) A_{2d} + (A_{1cg} + A_{1ag} - A_{1fg}) A_{2f} + \\ & + (A_{1af} + A_{1cf} - A_{1fg}) A_{2g} + (A_{2cd} + A_{2bc} - A_{2ac}) A_{1a} + \\ & + (A_{2ad} + A_{2cd} - A_{2bd}) A_{1b} + (A_{2ad} + A_{2ab} - A_{2ac}) A_{1c} + \\ & + (A_{2ab} + A_{2bc} - A_{2bd}) A_{1d} + (A_{2cg} + A_{2ag} - A_{2fg}) A_{1f} + \\ & + (A_{2af} + A_{2cf} - A_{2fg}) A_{1g} \}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Пример 8.10. Рассчитаем полную блочную группу A модуль-графа Γ (рис. 8.12), где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ и т. д. обозначают произвольные пути между соответствующими полюсами отдельных модулей.

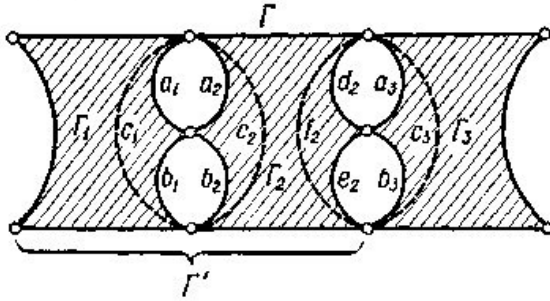


Рис. 8.12.

Представим граф, состоящий из модулей Γ_1 и Γ_2 , одним модулем Γ' . Используя выражение (8.88), получим для этого графа третьего ранга следующее выражение:

$$A = A'_{d_2 c_2} A_3 + A'_{a_3 a b} + A'_{d_2} A_{3b} + A'_{c_2} A_{3a} - \frac{1}{2} (A'_{d_2} + A'_{c_2} - A'_{f_2}) (A_{3a} + A_{3b} - A_{3c}).$$

В это выражение подставим блочную группу

$$\begin{aligned} A' &= A_{1ab} A_2 + A_1 A_{2ab} + A_{1a} A_{2b} + A_{1b} A_{2a} - \\ & - \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}) (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}), \\ A'_{d_2} &= A_{1ab} A_{2d} + A_1 A_{2abd} + A_{1a} A_{2bd} + A_{1b} A_{2ad} - \\ & - \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}) (A_{2ad} + A_{2bd} - A_{2cd}), \\ A'_{c_2} &= A_{1ab} A_{2e} + A_1 A_{2abe} + A_{1a} A_{2be} + A_{1b} A_{2ae} - \\ & - \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}) (A_{2ae} + A_{2be} - A_{2ce}), \\ A'_{f_2} &= A_{1ab} A_{2f} + A_1 A_{2abf} + A_{1a} A_{2bf} + A_{1b} A_{2af} - \\ & - \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}) (A_{2af} + A_{2bf} - A_{2cf}), \end{aligned}$$



$$A'_{d_2e_2} = A_{1ab}A_{2de} + A_1A_{2abde} + A_{1a}A_{2bde} + A_{1b}A_{2ade} - \\ - \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2ade} + A_{2bde} - A_{2cde}).$$

После подстановки получим выражение для полной блочной группы \bar{A} модуль-графа Γ (рис. 8.12), которое ввиду его сложности здесь не приводится.

Отметим, что метод преобразования блочных групп ${}^2A^I, {}^2A^{II}, \dots, {}^2A^N$ можно применить непосредственно без предварительного разложения по критерию идентичности столбцов матрицы порядков \mathbf{P} для преобразования всей блочной группы 2A модуль-графа Γ в полную блочную группу \bar{A} . Однако это требует большего числа операций.

Метод 2 определения полной блочной группы \bar{A} модуль-графа Γ . Он также основан на применении замещающих (полных) графов отдельных модулей графа Γ . Если замещающие графы Γ_{iz} всех модулей графа

$$\Gamma = \langle P, Z, \varepsilon \rangle, \quad Z = \{\Gamma_i\}, \quad (8.91)$$

соединить согласно его структуре, то получим замещающий (неполный) граф

$$\Gamma_z = \langle P, Z_z, \varepsilon \rangle, \quad Z_z = \{\Gamma_{iz}\}, \quad (8.92)$$

ребра которого a_{ik} представляют собой соответствующие пути модулей Γ_i графа Γ .

Рассчитаем полную блочную группу \bar{A}_z графа Γ_z

$$\bar{A}_z = A_z.$$

В блочную группу \bar{A}_z вместо ребер a_{ik} подставим выражения

$$a_{ik} = \frac{A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}} + A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} - A_{i(v_{iz}-3)a_{ik}}}{2A_{i(v_{iz}-1)}} \quad (8.93)$$

или

$$a_{ik} = \frac{A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}} \cap A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}}{A_{i(v_{iz}-1)}} \quad (8.94)$$

Поэтому, согласно формулам (8.50) — (8.52), полная блочная группа \bar{A} модуль-графа Γ равна

$$\bar{A} = A_z \prod_{iz=1}^g A_{i(v_{iz}-1)}. \quad (8.95)$$



Пример 8.11. Рассчитаем полную блочную группу модуль - графа, изображенного на рис. 8.13, а, используя оба метода.

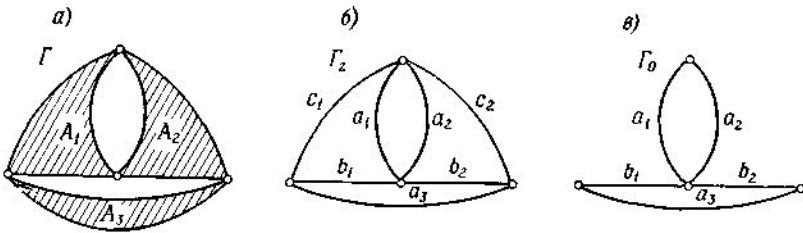


Рис. 8.13.

Метод 2. Для графа Γ_z (рис. 8.13, б), состоящего из замещающих (полных) графов, имеем

$$\begin{aligned}
 A_z &\stackrel{s}{=} A_z = [a_1 a_2 c_1 c_2] [b_1 c_1 a_3] [b_2 c_2 a_3] \stackrel{s}{=} \\
 &\stackrel{s}{=} \langle a_1 a_2 c_1 c_2 \rangle \langle b_1 c_1 a_3 \rangle \langle b_2 c_2 a_3 \rangle - \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} \langle b_2 c_2 a_3 \rangle - \\
 &- \begin{Bmatrix} c_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} \langle b_1 c_1 a_3 \rangle - \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_3 \end{Bmatrix} \langle a_1 a_2 c_1 c_2 \rangle - 2 \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}, \quad (a)
 \end{aligned}$$

так как

$$A_z = \begin{bmatrix} a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 \cancel{c_1} c_1 c_1 c_2 c_2 c_2 \\ b_1 c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 \cancel{b_1} c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 \\ b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 \cancel{b_2} b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 \\ a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 c_1 \cancel{c_1} \cancel{c_2} c_2 c_2 c_2 \\ b_1 c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 b_1 \cancel{c_1} \cancel{b_1} c_1 a_3 \\ c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 \cancel{c_2} \cancel{c_2} c_2 c_2 c_2 \\ a_1 a_1 \cancel{a_1} a_2 a_2 \cancel{a_2} c_1 c_1 \cancel{c_1} c_2 \cancel{c_2} c_2 \\ b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 \cancel{c_1} \cancel{a_3} \\ a_3 a_3 \cancel{a_3} a_3 a_3 \cancel{a_3} a_3 \cancel{a_3} \cancel{a_3} a_3 \cancel{a_3} \cancel{a_3} \end{bmatrix}$$



Далее, согласно выражению (8.93), напомним соответствующие выражения для всех ребер графа Γ_z :

$$a_1 = \frac{1}{2A_{1ab}}(A_{1b} + A_{1c} - A_{1a}),$$

$$b_1 = \frac{1}{2A_{1ab}}(A_{1a} + A_{1c} - A_{1b}),$$

$$c_1 = \frac{1}{2A_{1ab}}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}),$$

$$a_2 = \frac{1}{2A_{2ab}}(A_{2b} + A_{2c} - A_{2a}),$$

$$b_2 = \frac{1}{2A_{2ab}}(A_{2a} + A_{2c} - A_{2b}),$$

$$c_2 = \frac{1}{2A_{2ab}}(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),$$

$$a_3 = \frac{A_3}{A_{3a}}.$$



После подстановки величин в выражение (а), а затем в (8.95) получим формулу для блочной группы A графа Γ

$$\begin{aligned} A = & A_{1ab}A_{2ab}A_{3a} \left\{ \left(\frac{A_{1b}}{A_{1ab}} + \frac{A_{2b}}{A_{2ab}} \right) \left(\frac{A_{1a}}{A_{1ab}} + \frac{A_3}{A_{3a}} \right) \times \right. \\ & \times \left(\frac{A_{2a}}{A_{2ab}} + \frac{A_3}{A_{3a}} \right) - \frac{1}{4A_{1ab}^2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})^2 \times \\ & \times \left(\frac{A_{2a}}{A_{2ab}} + \frac{A_3}{A_{3a}} \right) - \frac{1}{4A_{2ab}^2} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c})^2 \times \\ & \times \left. \left(\frac{A_{1a}}{A_{1ab}} + \frac{A_3}{A_{3a}} \right) - \frac{A_3^2}{A_{3a}^2} \left(\frac{A_{1b}}{A_{1ab}} + \frac{A_{2b}}{A_{2ab}} \right) \right\} - \\ & - \frac{A_3}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}). \end{aligned} \quad (8.96)$$



Метод 1. Дополнительное блочная группа скелета Γ_0 (рис. 8.13, в) равна

$$A_0^d = [a_1 a_2] [b_1 b_2 a_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_3 & b_1 & b_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, блочная группа 2A графа Γ имеет вид

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_{2b} & A_2 & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

а матрица порядков равна



Поэтому

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

$${}^2A' = A_3 \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} [b_{1(1)} c_{1(1)}] [a_{1(1)} c_{1(1)}] \\ [a_{2(1)} c_{2(1)}] [b_{2(1)} c_{2(1)}] \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} \\ = (A_3 A_{1a} A_{2a} + A_{1b} A_{2a}) - 2 \begin{Bmatrix} c_{1(1)} \\ c_{2(1)} \end{Bmatrix} A_3.$$

Дендритные веса равны

$$c_{1(1)} = \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}),$$

$$c_{2(1)} = \frac{1}{2} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),$$



так как $p_1 + 2 - v_{1z} = 0$ и $p_2 + 2 - v_{2z} = 0$. Следовательно, полная блочная группа \bar{A} модуль-графа Γ имеет вид

$$A = A^M + A^I = A_{1ab}A_2A_3 + A_{1a}A_2A_{3a} + A_{1a}A_{2ab}A_3 + A_{1a}A_{2a}A_{3a} + A_{1a}A_{2b}A_3 + A_{1ab}A_{2a}A_3 - \frac{A_3}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}) \quad (8.97)$$

Заметим, что результат (8.97) имеет более простую форму, чем в случае расчета вторым методом (8.96). Кроме того, несмотря на то что второй метод теоретически кажется более простым, практически при расчете этим методом требуется большее число вычислений.

Преобразование результатов по второму методу к выражениям, полученным первым методом, производится по формулам перехода.

Для двух произвольных путей a и c графа, соединяющих две различные пары вершин (рис. 8.14), формула перехода имеет вид

$$A_{ac} = \frac{1}{A} \left\{ A_a A_c - \frac{1}{4} (A_e + A_f - A_b - A_d)^2 \right\}. \quad (8.98)$$

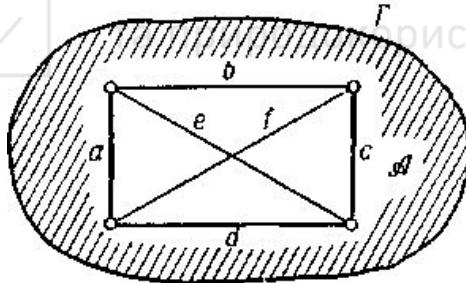


Рис. 8.14

Из этой формулы непосредственно следует формула перехода для двух произвольных прилегающих путей a и b графа (рис. 8.15)

$$A_{ab} = \frac{1}{A} \left\{ A_a A_{bc} - \frac{1}{4} (A_a + A_b - A_c)^2 \right\}. \quad (8.99)$$

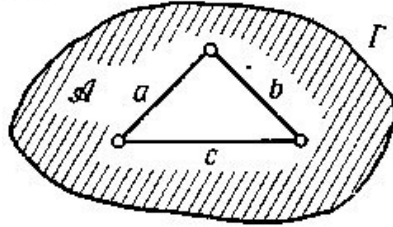


Рис. 8.15

Подставив формулу (8.99) в (8.96), получим результат (8.97).

Следует отметить, что, используя формулы перехода (8.98) и (8.99), можно уменьшить порядок производных в выражениях блочных групп модулей, входящих в выражения для блочных групп модуль-графов. Например, в формуле (8.97) блочную группу A_{1ab} можно заменить выражением

$$A_{1ab} = \frac{1}{A_1} \left\{ A_{1a} A_{1b} - \frac{1}{4} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})^2 \right\},$$

а блочную группу A_{2ab} — аналогичным выражением.

8.4. Деревья и деревья высших рангов модуль-графа

Как известно, дерево — это множество ребер связного подграфа, включающее все вершины графа и не содержащее ни одного контура. Блочной группой дерева будет один столбец блочной группы A . Таким образом, число T деревьев графа равна количеству столбцов блочной группы A . Если вместо каждого элемента a_{ij} блочной группы A подставить единицу и вычислить

$$\det_I A = \sum_{j=1}^T \prod_{i=1}^m (\alpha_{ij} = 1), \quad (8.100)$$

то получим число деревьев

$$T = \det_I A.. \quad (8.101)$$



Если a_{ij} блочная группа A графа неизвестна, то число деревьев можно определить по формуле Трента (99) или (100) из раздела 7.8.3.

Нахождение определителей (99) или (100) из раздела 7.8.3 для графов с большим числом вершин или независимых контуров весьма трудоемко. Поэтому имеет смысл разделить граф на подграфы (модули), рассчитать число T_i этих подграфов и далее определить число T деревьев всего графа, выразив его с помощью T_i .

Используя формулу (8.101), легко доказать, что для определения числа T деревьев модуль-графа, состоящего из подграфов, пригодна формула полной блочной группы A модуль-графа, записанная с помощью блочных групп A_i отдельных подграфов. Тогда если известна полная блочная группа A модуль-графа

$$A = f(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (8.102)$$

то количество деревьев T выражается той же функцией

$$T = f(T_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (8.103)$$

где T_i — число деревьев подграфа G_i .

Аналогичная зависимость справедлива для числа T_k k -деревьев (k -деревом называется множество ребер, образованное k раздельными связными подграфами, содержащими все вершины графа и не содержащими ни одного контура). k -деревья вводятся для данных $k - 1$ различных пар вершин графа и представляют собой геометрическое изображение столбцов блочной группы

$$\frac{\partial^{k-1} A}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_{k-1}} = A_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}, \quad (8.104)$$

где a_1, a_2, \dots, a_{k-1} обозначают произвольные пути между данными $k - 1$ различными парами вершин графа.

Заметим, что k -деревья состоят из тех же самых ребер, что и деревья графа с замкнутыми $k - 1$ путями, относительно которых рассматриваются k -деревья. Следовательно, число k -деревьев равно числу деревьев графа с замкнутыми $k - 1$ путями. Если

$$\overset{s}{A} = A,$$

$$A_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} = f(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (8.105)$$

то число T_k k -деревьев блок-графа равно

$$T_k = f(T_i), \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (8.106)$$



Аналогично определяется число T_s деревьев модуль-графа, содержащего s различных путей a_1, a_2, \dots, a_s , не имеющих общих ребер.

Эти деревья представляют собой геометрическое изображение столбцов блочной группы

$$A_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{array} \right\}, \quad (8.107)$$

где

$$a_i = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in_i} \end{array} \right\}, \quad \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i} \text{ — обозначения ребер, образующих}$$

путь a_i .

$$A^s = A, \quad A_{a_1 a_2 \dots a_s}^s = \frac{\partial^s A}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_s}$$

Способ расчета числа деревьев и k -деревьев графа проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 8.12. Рассчитаем число T деревьев графа (рис. 8.16, а).

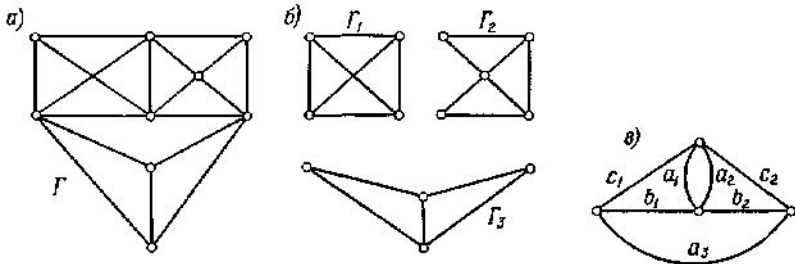


Рис. 8.16.

Граф содержит 9 вершин, т. е. для отыскания числа T следует рассчитать определитель 8-го порядка



3	-1	0	0	0	-1	0	0
-1	5	-1	0	-1	-1	0	0
0	-1	3	-1	-1	0	0	0
0	0	-1	5	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	4	-1	0	0
-1	-1	0	-1	-1	5	0	0
0	0	0	-1	0	0	3	-1
0	0	0	-1	0	0	-1	3

Раскрытие этого определителя достаточно трудоемко. С целью упрощения расчетов разделим исходный граф на три части (рис. 8.16, б), т. е. будем рассматривать граф G как модуль-граф, состоящий из трех подграфов G_1 , G_2 , G_3 . Согласно уравнению (8.97), полная блочная группа этого графа равна (рис. 8.16, в)

$$A = A_3[A_{1ab}A_2 + A_{1a}A_{2ab} + A_{1a}A_{2b} + A_{1b}A_{2a} - \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c})] + A_{3a}(A_{1a}A_2 + A_{2a}).$$

В соответствии с выражением (8.103) число деревьев T этого графа равно

$$T = T_3[T_{1ab}T_2 + T_1T_{2ab} + T_{1a}T_{2b} + T_{1b}T_{2a} - \frac{1}{2}(T_{1a} + T_{1b} - T_{1c})(T_{2a} + T_{2b} - T_{2c})] + T_{3a}(T_{1a}T_2 + T_1T_{2a}), \quad (a)$$

где T_1 , T_2 , T_3 — число деревьев отдельных подграфов G_1 , G_2 , G_3 ; T_{1a} , T_{1b} , T_{1c} — число 2-деревьев подграфа G_1 относительно путей



$a_1, b_1, c_1; T_{2a}, T_{2b}, T_{2c}$ — число 2-деревьев подграфа G_2 относительно путей $a_2, b_2, c_2; T_{1ab} (T_{2ab})$ — число 3-деревьев подграфа $G_1 (G_2)$ относительно путей a_1 и b_1 (a_2 и b_2).

Обозначения путей подграфов указаны на рис. 8.16, в. Следует отметить, что числа 2- и 3-деревьев равны числам деревьев подграфов с соответствующими замкнутыми путями.

Определим число деревьев отдельных подграфов.

Имеем

$$T_1 = 4^2 = 16 \quad (\text{полный граф}),$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} 3-1 & 0 \\ -1 & 3-1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 3 - 3 = 21 \quad (\text{планарный граф}),$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \quad (\text{планарный граф}),$$

$$T_{1ab} = 3 \quad (\text{граф с двумя вершинами}),$$

$$T_{2ab} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$T_{1a} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad T_{1b} = 8, \quad T_{3a} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$T_{2a} = \begin{vmatrix} 3-1-1 \\ -1 & 3-1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 1 - 1 - 3 - 3 - 4 = 24,$$

$$T_{2b} = \begin{vmatrix} 2-1-1 \\ -1 & 3-1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 1 - 1 - 3 - 2 - 4 = 13,$$

$$T_{1c} = 8, \quad T_{2c} = \begin{vmatrix} 3-1 & 0 \\ -1 & 4-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 2 = 19.$$

0-12 Подставив эти величины в выражение (а), получим



$$T = 8[3 \cdot 21 + 16 \cdot 11 + 8 \cdot 13 + 8 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} (8 + 8 - 8) (24 + 13 - 19)] + 8(8 \cdot 21 + 16 \cdot 24) = 8120.$$

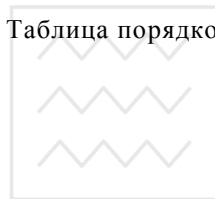
Рассчитаем также число $T_{(2)a_1}$ 2-деревьев графа Γ (рис. 8.16, а) относительно пути a_1 (рис. 8.16, в). Для этого нужно определить алгебраическую производную $\partial A / \partial a_1$. На основе скелета графа Γ имеем

$$A^d_0 = [a_1 a_2] [b_1 b_2 a_3],$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a_1} = \begin{bmatrix} A^d_0 \\ [a_1] \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1ab} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}.$$

Таблица порядков имеет вид



$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в ней не содержится идентичных столбцов, то

$$A_{a_1} = \frac{\partial^2 A}{\partial a_1} = A_3 (A_{1ab} A_{2a} + A_{1a} A_{2ab}) + A_{1b} A_{2a} A_{3a},$$

и тогда число 2-деревьев равно

$$T_{(2)a_1} = T_3 (T_{1ab} T_{2a} + T_{1a} T_{2ab}) + T_{1a} T_{2a} T_{3a} = 8 (3 \cdot 24 + 8 \cdot 11) + 8 \cdot 24 \cdot 8 = 2816.$$

Пример 8.13. Рассчитаем число деревьев цепного графа (рис. 8.17, а) с n четырехполусными модулями одинаковой структуры. Блочные группы модулей обозначим

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}.$$

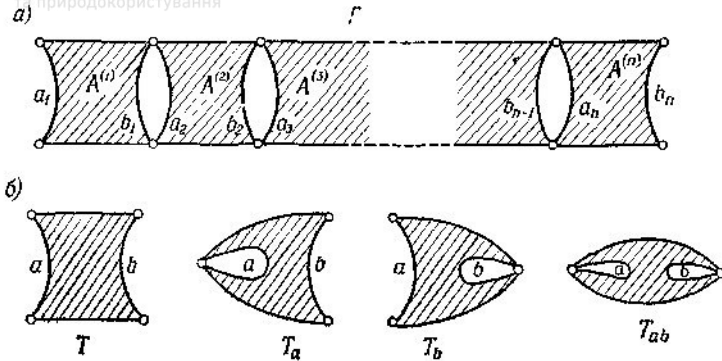


Рис. 8.17. Каскадный модуль-граф: а) общий вид; б) модули в разных стадиях закорачивания.

Блочную группу графа определим следующим образом:

$${}^2A_n = \left[\prod_{i=1}^{n-1} b_i a_{i+1} \right] \downarrow \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = [b_{n-1} a_n] \downarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1, b_1} & A_{n-1} \\ A^{(n)} & A^{(n)}_{a_n} \end{bmatrix},$$

где A_{n-1} — блочная группа графа без последнего модуля $\Gamma^{(n)}$. Поскольку таблица порядков

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$$

не содержит идентичных столбцов, то

$$\bar{A}_n = \bar{A}_{n-1, b_{n-1}} \bar{A}^{(n)} + \bar{A}_{n-1} \bar{A}^{(n)}_{a_n}.$$

Число T_n деревьев графа Γ равно

$$T_n = T_{n-1, b_{n-1}} T^{(n)} + T_{n-1} T^{(n)}_{a_n},$$

где $T_{n-1, b_{n-1}}$ — число деревьев графа без последнего модуля $\Gamma^{(n)}$, замкнутого со стороны выхода; $T^{(n)}$ — число деревьев последнего модуля $\Gamma^{(n)}$; T_{n-1} — число деревьев графа без последнего модуля $\Gamma^{(n)}$; $T^{(n)}_{a_n}$ — число деревьев модуля $\Gamma^{(n)}$, замкнутого на входе.

Предполагая структуру всех модуля (подграфов) одинаковой, приведенная формула примет вид



$$T_n = T_{n-1, b_{n-1}} T + T_{n-1} T_a, \quad (a)$$

где T — число деревьев каждого модуля, T_a — число деревьев каждого модуля, замкнутого на входе (рис. 8.17, б).

Аналогично получим выражение числа деревьев графа, замкнутого на выходе:

$$T_{nb_n} = T_{n-1, b_{n-1}} T_b + T_{n-1} T_{ab}, \quad (б)$$

а также выражение для числа деревьев графа G с замкнутым входом

$$T_{na_1} = T_{n-1, a_2} T_a + T_{n-1} T_{ab}, \quad (в)$$

где T_b — число деревьев каждого модуля, замкнутого на выходе; T_{ab} — число деревьев каждого модуля, замкнутого на входе и на выходе (рис. 8.17, б).

Раскрывая рекуррентные формулы (а) — (в), получим выражение для числа деревьев T_n , а также 2-деревьев T_{nb_n} и T_{na_1} цепного графа G , состоящего из n изоморфных подграфов

$$T_n = T(T^{n-1}_a + T^{n-2}_a T_b + T^{n-3}_a T_{2b_2} + T^{n-4}_a T_{3b_3} + \dots),$$

$$T_{nb_n} = T^n_b + T_{ab}(T^{n-2}_b T + T^{n-3}_b T_2 + T^{n-4}_b T_3 + \dots),$$

$$T_{na_1} = T^n_a + T_{ab}(T^{n-2}_a T + T^{n-3}_a T_2 + T^{n-4}_a T_3 + \dots),$$

где $n - k \geq 0$; T — число деревьев одного подграфа; T_a — число 2-деревьев подграфа относительно пути a (или число деревьев подграфа с замкнутым путем a); T_b — число 2-деревьев подграфа относительно пути b (или число деревьев подграфа с замкнутым путем b); T_{ab} — число 3-деревьев подграфа относительно путей a и b (или число деревьев подграфа с замкнутыми путями a и b); T_{nb_n} — число 2-деревьев графа G относительно пути b_n

(или число деревьев графа с замкнутым выходом); T_{na_1} — число 2-деревьев графа G относительно пути a_1 (или число деревьев графа, замкнутого на входе).

Пусть, например, подграфы графа G имеют T -образный вид, тогда $T = 1$, $T_a = 2$, $T_b = 2$, $T_{ab} = 3$. Следовательно, для $n = 2, 3, 4, 5$ имеем



$$T_2 = 2 + 2 = 4,$$

$$T_{2b_2} = 2^2 + 3 = 7,$$

$$T_3 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 7 = 15,$$

$$T_{3b_3} = 2^3 + 3(2 + 4) = 26,$$

$$T_4 = 2^3 + 2^2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 26 = 56,$$

$$T_{4b_4} = 2^4 + 3(2^2 + 2 \cdot 4 + 15) = 97,$$

$$T_5 = 2^4 + 2^3 \cdot 2 + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 26 + 97 = 209,$$

$$T_{5b_5} = 2^5 + 3(2^3 + 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 15 + 56) = 362.$$

Из приведенных примеров расчетов числа деревьев графа очевидны преимущества алгебры полных блочных групп. Также очевидно, что при расчете блочных групп графов, содержащих большое число вершин и ребер, деление графов на подграфы и применение методов расчета блочных групп модуль-графов значительно упрощают расчеты. При большом количестве деревьев графа (т. е. столбцов блочной группы) отыскание идентичных столбцов — очень трудоемкая задача (это операция сортировки на ЭВМ), которая в значительной степени облегчается при расчете полных блочных групп модуль-графов.

9. Анализ структур средствами блочных групп и модуль-графами

Рассмотрим методы анализа структур средствами блочных групп и модуль-графами на примерах структур электрическим цепей.

Анализ пассивных и активных структур цепей можно проводить классическим методом с помощью определителей и матриц, с помощью графов сигналов или сетевых графов (метод деревьев) или с использованием унистора. В данном разделе анализ пассивных активных структур цепей будет производиться методом, который использует средства блочных групп и модуль-графов. Топологические методы анализа, а именно метод графов сигналов и метод деревьев, значительно облегчают анализ электрических цепей. Однако их существенный недостаток заключается в невозможности определения алгоритма расчетов чисто алгебраическим путем. Кроме того, к недостаткам этих методов следует отнести многозначность



способов решения данной задачи; особенно при использовании графов сигналов. В зависимости от выбора базисных узлов конечный результат в случае метода графов сигналов может быть представлен в совершенно различных формах. Поэтому возникают большие трудности для программирования на ЭЦВМ.

Достоинство метода блочных групп и модуль-графов состоит в возможности получения результата вычислений в стандартной форме вне зависимости от степени сложности цепи. Кроме того, этот метод по сравнению с методом графов сигналов обладает тем преимуществом, что нет необходимости изображать граф сигналов и можно для расчетов использовать непосредственно электрическую схему. Любую электрическую цепь можно теоретически рассматривать как активную цепь, содержащую независимые источники. Это означает, что, кроме независимых источников, далее будут рассмотрены также такие источники, э. д. с. в которых зависит от тока или напряжения в другой ветви цепи.

9.1. Анализ структур, представленных пассивными цепями

9.1.1. Анализ пассивного четырехполюсника

Рассмотри структуру цепи в виде *четырёхполюсника* (рис. 1).

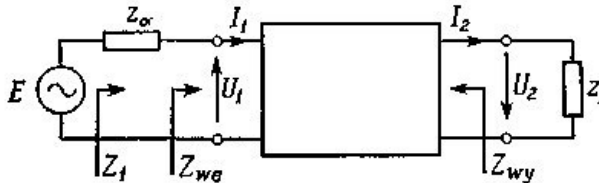


Рис. 1. Структура цепи в виде четырехполюсника.

Для него можно написать следующие характеристические функции:

$$Z_1 = \frac{E}{I_1}, \quad Z_{\text{ex}} = \frac{U_1}{I_1}, \quad Z_{\text{вых}} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{z_\beta = \infty},$$



$$K_u = \frac{U_2}{E}, \quad K_i = \frac{I_2}{I_1}, \quad \Gamma_s = \ln \left[\frac{E}{2U_2} \sqrt{\frac{Z_\beta}{Z_\alpha}} \right],$$

(1)

где K_u и K_i называются *передаточными функциями* (коэффициентами передачи) *напряжения и тока*; Z_l , $Z_{вх}$ и $Z_{вых}$ — *первичным, входным и выходным импедансами*; Γ_s — *рабочим затуханием*.

Средствами алгебры блочных групп и модуль-графами можно создать общие алгоритмы расчета этих характеристических функций независимо от степени сложности рассматриваемой структуры цепи. Используя введенные ранее понятия для блочных групп, можно написать следующие формулы:

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}} Z_\beta, \quad K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}},$$

$$\Gamma_s = \ln \left[\frac{\det A}{z} \frac{1}{2 \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \sqrt{Z_\alpha Z_\beta}} \right], \quad Z_l = \frac{\det A}{z \det \frac{\partial A}{\partial \alpha}},$$

$$Z_{вх} = \frac{\det \frac{\delta A}{\delta \alpha}}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}, \quad Z_{вых} = \frac{\det \frac{\delta A}{\delta \beta}}{\det \frac{\partial A}{\partial \beta}},$$

(2)

где A — блочная группа, для которой граф четырехполюсника служит обратным изображением, Z — множество импедансов четырехполюсника.

Докажем формулы для передаточной функции тока K_i и первичного импеданса Z_l четырехполюсника. Доказательство справедливости формул для остальных функций четырехполюсника проводится аналогично.

Передаточную функцию тока K_i для четырехполюсника можно представить в виде

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sum_v I_{2v} - \sum_\mu I_{2\mu}}{I_1},$$

(3)

где I_{2v} — токи контуров четырехполюсника, содержащих одинаково ориентированные ребра $\alpha=1$ и $\beta=2$; I_{2v} — токи контуров



четырёхполюсника, содержащих противоположно ориентированные ребра $\alpha=1$ и $\beta=2$.

Так как столбцы блочной группы A определяют все дополнения деревьев цепи, то столбцы блочных групп $\partial A/\partial\alpha$ и $\partial A/\partial\beta$ определяют те ветви цепи, исключение которых преобразует ее в один контур. Поэтому одинаковые столбцы блочных групп $\partial A/\partial\alpha$ и $\partial A/\partial\beta$ определяют все ветви, исключение которых приводит к образованию контуров, содержащих ребра α и β , т. е. контуров с токами I_{2v} и I_{2u} . Кроме того, на основании уравнений контурных токов имеем

$$\sum_{i=1}^n z_{ij} I_j = \begin{cases} E, & j=1 = \alpha \\ 0, & j > 1 \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Отсюда следует, что

$$K_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}, \quad (5)$$

где Δ_{11} и Δ_{12} — соответствующие миноры определителя уравнений (4).

Минор Δ_{11} представляет собой сумму всех величин дополнений деревьев цепи с исключенной ветвью $\alpha = 1$. Поэтому

$$\Delta_{11} = \det_z \frac{\partial A}{\partial \alpha} \quad (6)$$

где A — блочная группа, обратным изображением которой служит данная цепь (с короткозамкнутым источником).

Минор Δ_{11} есть линейная комбинация с коэффициентами $+1$ и -1 величин таких дополнений деревьев цепи с исключенной ветвью α или β , при удалении которых $K_i \neq 0$. Поэтому

$$\Delta_{12} = \text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad (7)$$

где Z — множество импедансов цепи.

Справедливо выражение

$$K_i = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_z \frac{\partial A}{\partial \alpha}} \quad (\alpha = 1, \beta = 2),$$

Для доказательства формулы для импеданса Z_1 заметим, что



$$Z_i = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

где Δ — определитель системы (4), а Δ_{11} — минор, равный сумме величин дополнений деревьев цепи с исключенным ребром $\alpha=1$.

Таким образом, $\Delta = \det_z A$ и $\Delta_{11} = \det \frac{\partial A}{\partial \alpha}$, т. е.

$$Z_1 = \frac{\det A}{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}$$

Справедливость формул для K_u , Γ_s , $Z_{вх}$, $Z_{вых}$ доказывается аналогично.

Применение этих формул поясним на следующих примерах.

Пример 1. Определить передаточные функции K_u и K_i , а также импедансы Z_1 , $Z_{вх}$, $Z_{вых}$ мостового четырехполюсника, изображенного на рис. 2, а.

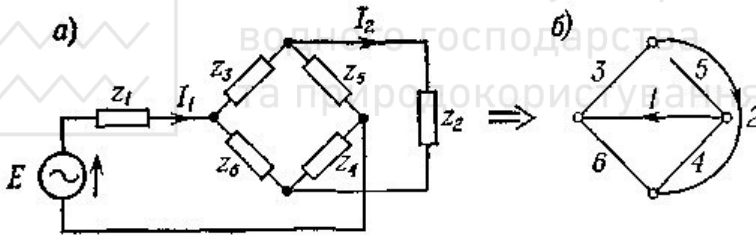


Рис. 2.

Решение. Блочная группа A , для которой известно обратное изображение (рис. 2, б), определим на основании рассмотренного ранее утверждения о простых однострочных сомножителях:

$$A = [1 \ 3 \ 5] [1 \ 4 \ 6] [2 \ 4 \ 5].$$

Умножение первичных блочных групп производим следующим образом:



$$\begin{array}{r}
 1\ 3\ 5 \\
 \times\ 1\ 4\ 6 \\
 2\ 4\ 5 \\
 \hline
 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

При расчете этого произведения вначале опускаем столбцы, в которых повторяется какой-либо элемент, а затем в полученной блочной группе вычеркиваем четное число одинаковых столбцов (в данном случае имеются два одинаковых столбца, содержащих элементы 1, 4, 5).

Далее рассчитываем алгебраические производные $\partial A/\partial 1$ и $\partial A/\partial 2$. Получаем

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & \boxed{6} & 3 & \boxed{3} & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & \boxed{5} & 2 & \boxed{4} & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & \boxed{3} & 3 & 5 & 5 & \boxed{5} \\ 4 & 6 & 1 & \boxed{4} & 6 & 1 & 4 & \boxed{6} \end{bmatrix}.$$

Одинаковые столбцы блочных групп $\partial A/\partial 1$ и $\partial A/\partial 2$ обведены рамкой. Исходя из ориентации ребер $\alpha = 1$ и $\beta = 2$ в графе (рис. 2, б), определяем знаки функции совпадения. В результате находим

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = z_5 z_6 - z_3 z_4.$$

Определим также обратные производные $\delta A/\delta 1$ и $\delta A/\delta 2$

$$\frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 1 & 1 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

На основании формул (2) теперь можно написать все искомые величины



$$K_u = \frac{(z_5 z_6 - z_3 z_4) z_2}{z_1 z_4 z_2 + z_1 z_6 z_2 + z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_2 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + z_3 z_4 z_2 + \dots + z_5 z_6 z_4};$$

$$K_i = \frac{z_5 z_6 - z_3 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_4 + z_6 z_5 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_1 = \frac{z_1 z_4 z_2 + z_1 z_6 z_2 + z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_2 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + \dots + z_5 z_6 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_4 + z_6 z_5 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_{вх} = \frac{z_3 z_4 z_2 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_6 z_2 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_4 z_2 + z_5 z_6 z_2 + z_5 z_6 z_4}{z_4 z_2 + z_6 z_2 + z_6 z_4 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_5 z_2};$$

$$Z_{вых} = \frac{z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_1 z_4 + z_3 z_1 z_5 + z_3 z_4 z_5 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_6 z_4}{z_1 z_2 + z_1 z_6 + z_3 z_1 + z_3 z_4 + z_2 z_6 + z_5 z_1 + z_5 z_4 + z_5 z_6}.$$

Из проведенных расчетов можно сформулировать некоторые замечания. Прежде всего данный метод позволяет обойтись без записи уравнений Кирхгофа и их решения. Все операции довольно просты и производятся над индексами ребер графа, благодаря чему в ходе расчета получается сжатая форма записи всех промежуточных формул. Дополнительное преимущество метода заключается в принципиальной возможности записи всех интересующих зависимостей по известной рассчитанной блочной группе A и нескольким ее алгебраическим и обратным производным.

Пример 2. Определить передаточную функцию напряжения K_u и тока K_i для четырехполюсника (перекрытый T-образный мост, рис. 3, а).

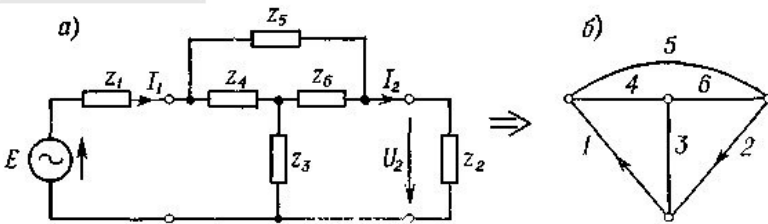


Рис. 3.

Решение. Блочную группу с заданным обратным изображением (рис. 3, б) рассчитаем на основании рассмотренной ранее теоремы о простых односторонних сомножителях::

$$A = [134] [236] [456].$$

В результате имеем



$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 3 & 4 \\
 \times & 2 & 3 & 6 \\
 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 A = & \left[\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \\
 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5
 \end{array} \right],
 \end{array}$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c}
 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 \\
 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 5
 \end{array} \right], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c|c}
 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6
 \end{array} \right].$$

Функция совпадения равна

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) = z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4.$$

Отсюда

$$K_u = \frac{(z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4) z_2}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_3 z_6 + z_1 z_6 z_4 + z_1 z_6 z_5 + z_3 z_2 z_4 + \dots + z_4 z_6 z_5};$$

$$K_t = \frac{z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4}{z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_2 z_6 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + z_3 z_6 + z_6 z_4 + z_6 z_5}.$$

Пример 3. Определить передаточную функцию U/E лестничного четырехполюсника (рис. 4, а).

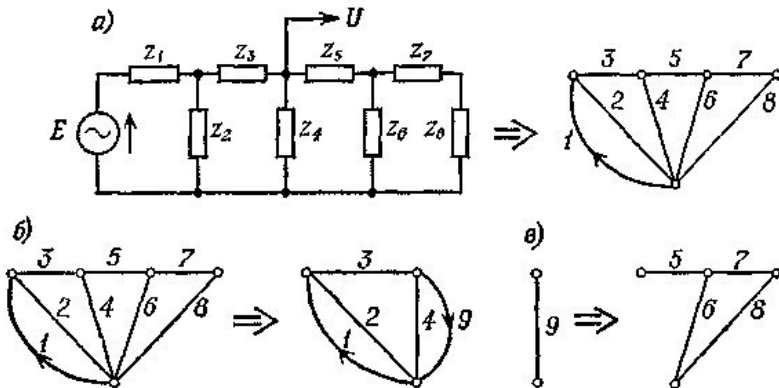


Рис. 4.

Решение. Упростим расчеты, заменив часть графа, расположенную справа от ветви с напряжением U , одним новым



ребром (рис. 4, в). Рассчитаем блочную группу упрощенного графа

$$A = \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & & & \\ & \times & 2 & 3 & 4 & \\ & & 4 & 9 & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ & 4 & 9 & 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \end{array},$$

Откуда

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 4 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 9} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

и

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 9} \right) = z_2 z_4.$$

Выражение искомой передаточной функции запишется в виде

$$\frac{U}{E} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_9 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_9 + z_1 z_4 z_9 + z_2 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_9 + z_2 z_4 z_9}.$$

Импеданс z_9 (рис. 4, в) рассчитаем по формуле

$$z_9 = \frac{\det A_1}{z \det \frac{\partial A_1}{\partial z}}$$

где

$$A = [5 \ 6] [6 \ 7 \ 8] = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = [6 \ 7 \ 8],$$

Поэтому

$$z_9 = \frac{z_5 z_6 + z_5 z_7 + z_5 z_8 + z_6 z_7 + z_6 z_8}{z_6 + z_7 + z_8}.$$

Пример 4. Определим рабочее затухание пассивного четырехполюсника (рис. 5, а).

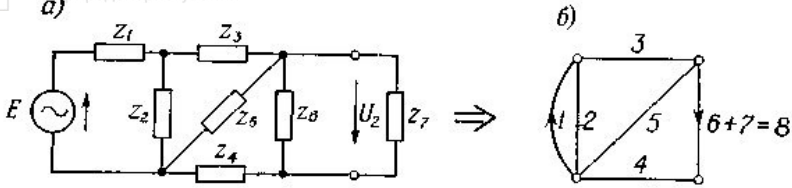


Рис. 5.

Решение. Имеем (рис. 5, б)

$$A = [1\ 2] [2\ 3\ 5] [4\ 5\ 8],$$

т. е.

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ \times 2\ 3\ 5 \\ \hline 4\ 5\ 8 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 8 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial I}, \frac{\partial A}{\partial S} \right) = z_2 z_5;$$

окончательно

$$\Gamma_s = \ln \frac{z_1 z_2 z_1 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_8 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_3 z_8 + \dots + z_2 z_5 z_8}{2 z_2 z_5 \sqrt{z_1 z_7}},$$

где

$$z_8 = \frac{z_6 z_7}{z_6 + z_7}.$$

Пример 5. Определить передаточную функцию K_i , пассивного четырехполюсника (рис. 6, а) с импедансом нагрузки z_9 .



числа 2 5 7, 3 7 5, 4 5 8, 5 4 9, которые вычеркиваются. Три столбца этого произведения содержат числа 4 5 7. Согласно определению произведения блочных групп, оставляем из них только один, например 4 7 5. Отыскание одинаковых столбцов можно упростить, поделив столбцы блочной группы на «блоки», состоящие из столбцов, имеющих два первичных идентичных элемента. В нашем примере такие блоки разделены пунктиром. Идентичные столбцы встречаются в разных блоках. После деления на блоки найти идентичные столбцы относительно легко.

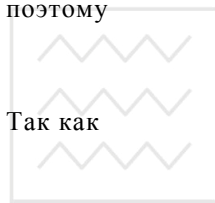
Для вычисления производной

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

заметим, что (рис. 6, б)

$$A = A_1[1\ 3\ 5\ 8],$$

поэтому



$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{\partial A_1}{\partial \theta} [1\ 3\ 5\ 8].$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

то после элементарных расчетов получим

$$C = \frac{\partial A}{\partial \beta} \cap \frac{\partial A}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая ориентацию ребер 1 и 9 в контурах, оставшихся после исключения из графа ребер, определяемых отдельными столбцами блочной группы C, найдем знаки слагаемых функции совпадения.

Получим

$$\begin{aligned} \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) &= z_3 z_4 z_7 + z_2 z_5 z_4 + z_5 z_2 z_6 + z_5 z_3 z_4 + z_5 z_4 z_3 + z_8 z_2 z_4 + \\ &+ z_8 z_2 z_5 + z_8 z_2 z_6 + z_8 z_2 z_7 + z_8 z_3 z_4 + z_8 z_3 z_5 + z_8 z_3 z_6 + \\ &+ z_8 z_3 z_7 + z_8 z_4 z_6 + z_8 z_4 z_7 + z_8 z_5 z_6 + z_8 z_5 z_7 = N. \end{aligned} \tag{8}$$



Искомую передаточную функцию тока можно выразить в виде отношения многочленов N и M

$$K_i = N/M,$$

где N определяется выражением (8), а многочлен M равен

$$\begin{aligned} M = & z_2 z_4 z_5 + z_2 z_4 z_7 + z_2 z_4 z_8 + z_2 z_4 z_9 + z_2 z_5 z_8 + z_2 z_5 z_9 + \\ & + z_2 z_6 z_5 + z_2 z_6 z_7 + z_2 z_6 z_8 + z_2 z_6 z_9 + z_2 z_7 z_8 + z_2 z_7 z_9 + z_3 z_4 z_5 + \\ & + z_3 z_4 z_7 + z_3 z_4 z_8 + z_3 z_4 z_9 + z_3 z_5 z_8 + z_3 z_5 z_9 + z_3 z_6 z_5 + z_3 z_6 z_7 + \\ & + z_3 z_6 z_8 + z_3 z_6 z_9 + z_3 z_7 z_8 + z_3 z_7 z_9 + z_4 z_6 z_5 + z_4 z_6 z_7 + z_4 z_6 z_8 + \\ & + z_4 z_6 z_9 + z_4 z_7 z_5 + z_4 z_7 z_8 + z_4 z_7 z_9 + z_5 z_6 z_7 + z_5 z_6 z_8 + z_5 z_6 z_9 + \\ & + z_5 z_7 z_8 + z_5 z_7 z_9. \end{aligned}$$

Характеристические функции четырехполюсника можно также выразить через проводимости. Тогда формулы передаточных функций напряжения и тока будут иметь вид

$$K_u = \frac{\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_Y A} y_\alpha; \quad K_i = \frac{\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det_Y \frac{\partial A}{\partial \alpha}} y_\beta. \quad (9)$$

В этом случае геометрическое изображение блочной группы A представляет собой граф цепи. Тогда блочную группу можно определить согласно приведенному ранее утверждению о простых однострочных сомножителях. Ребро α представляет собой ветвь источника, ребро β — измерительную ветвь, Y — множество проводимостей цепи.

Знаки слагаемых функции совпадения определяем так же, как и при записи характеристических функций через импедансы для данного обратного геометрического изображения. При этом замыкаем ребра, определяемые отдельными слагаемыми этой функции, и исследуем ориентацию ребер α и β .

Так как имеются две дуальные формы записи характеристических функций, то первые из них [формулы (2)] назовем *импедансными*, а вторые [формулы (9)] — *адмитансными*.

Приведем примеры практического применения формул (9).

Пример 6. Определить с помощью адмитансных формул передаточные функции напряжения K_u и тока K_i мостового четырехполюсника (рис. 2).

Решение. Так как в этом случае геометрическое изображение блочной группы представляет собой граф цепи, то на основании утверждения о простых однострочных сомножителях получаем

$$A = [1 \ 3 \ 6] [2 \ 3 \ 5] [2 \ 4 \ 6],$$



откуда

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{1\ 3\ 6} \\
 \times \mathbf{2\ 3\ 5} \\
 \mathbf{2\ 4\ 6}
 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\
 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \\
 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4
 \end{bmatrix}$$

а также

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Далее, рассматривая ориентацию ребер α и β , находим

$$\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial 1}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial 2} \right) = y_3 y_4 - y_5 y_6$$

Искомые передаточные функции имеют вид

$$K_u = \frac{(y_3 y_4 - y_5 y_6) y_1}{y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_6 + y_1 y_3 y_2 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_6 + y_1 y_5 y_2 + \dots + y_6 y_5 y_4};$$

$$K_i = \frac{(y_3 y_4 - y_5 y_6) y_2}{y_3 y_2 y_1 + y_3 y_5 y_2 + y_3 y_5 y_4 + y_3 y_5 y_6 + y_6 y_2 y_4 + y_6 y_3 y_4 + y_6 y_5 y_2 + y_6 y_5 y_4}$$

Пример 7. Определить передаточные функции K_u и K_i четырехполюсника (Т-образный мост), изображенного на рис. 7, а, выражая их через проводимости ветвей цепи.

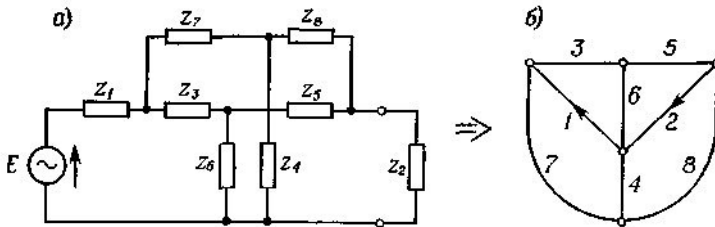


Рис. 7.

Решение. Блочную группу A определим на основании утверждения о простых однострочных множителях. Получим (рис. 7, б)

$$\mathbf{A} = [3\ 5\ 6] [5\ 2\ 8] [6\ 1\ 2\ 4] [7\ 4\ 8].$$



Отсюда

$$\begin{array}{r} 356 \\ \times 528 \\ \hline 6124 \\ 748 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3333333333 & 33333333 & 33333333 & 55555555 \\ 5555555555 & 22222222 & 88888888 & 22222222 \\ 6661112244 & 66611144 & 6611224 & 66611144 \\ 74874874878 & 74874878 & 7474747 & 7474878 \\ & 55555555 & 66666666 & 66666666 \\ & 88888888 & 55555555 & 22222222 \\ & 6611224 & 11122244 & 111444 \\ & 7474747 & 74874878 & 74878747 \end{bmatrix}$$

Рассчитаем алгебраические производные $\partial A/\partial 1$ и $\partial A/\partial 2$:

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 333 & 333 & 33 & 555 & 5566 & 6666 & 66 \\ 555 & 222 & 88 & 222 & 8855 & 5222 & 88 \\ 748 & 748 & 74 & 748 & 7474 & 8748 & 74 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 333 & 33333333 & 33 & 55555555 \\ 555 & 66611144 & 88 & 6611144 \\ 748 & 74874878 & 74 & 7474878 \\ & & & 5566 & 666666 & 66 \\ & & & 8855 & 11144 & 88 \\ & & & 7474 & 74878 & 74 \end{bmatrix}.$$

Затем, рассматривая ориентацию ребер 1 и 2, находим

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 2} \right) &= y_3 y_5 y_7 + y_3 y_5 y_4 + y_3 y_5 y_8 + y_3 y_5 y_7 + y_3 y_5 y_4 + \\ &+ y_5 y_8 y_7 + y_5 y_8 y_4 + y_6 y_5 y_7 + y_6 y_5 y_4 + y_6 y_5 y_7 + y_6 y_5 y_4. \end{aligned} \quad (10)$$

Обратная производная равна



$$\frac{\delta A}{\delta I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 & 2 & 2 & 2 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 8 & 7 & 4 & 8 & 7 & 8 & 7 & 4 & 8 & 7 & 8 & 7 & 4 & 7 & 4 & 7 & 7 & 4 & 7 & 8 & 7 & 4 & 7 & 4 & 7 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 8 & 8 & 8 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & 7 & 4 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 4 & 7 & & & \end{bmatrix}.$$

Поэтому по формуле (9) получим

$$K_u = \frac{N}{M_1} y_1; \quad K_i = \frac{N}{M_2} y_2,$$

где N определяется из выражения (10), а

$$M_1 = \det A = y_3 y_5 y_6 y_7 + y_3 y_5 y_6 y_4 + y_3 y_5 y_6 y_8 + y_3 y_5 y_1 y_7 +$$

$$+ y_3 y_5 y_1 y_4 + \dots + y_6 y_8 y_4 y_7,$$

$$M_2 = \det \frac{\delta A}{\delta I} = y_3 y_5 y_6 y_7 + y_3 y_5 y_6 y_4 + y_3 y_5 y_6 y_8 + y_3 y_5 y_2 y_7 +$$

$$+ y_3 y_5 y_2 y_4 + \dots + y_6 y_8 y_4 y_7.$$

Рассмотрим *ненагруженный* четырехполюсник (рис. 8),

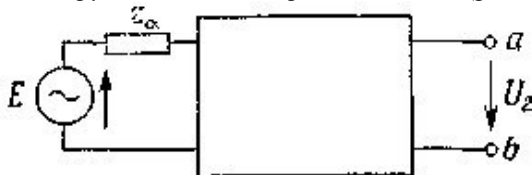


Рис. 8.

Режим холостого хода можно считать предельным случаем работы четырехполюсника, нагруженного импедансом z_B при $z_B \rightarrow \infty$. Если при этом применить соответствующую расчетную формулу, то решение значительно упрощается. Простые рассуждения приводят к следующей формуле для передаточной функции напряжения ненагруженного четырехполюсника:



$$K_i = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} D_\beta, A \right)}{\det A} \quad (11)$$

В этом выражении D_β — однострочная блочная группа, состоящая из элементов какого-либо пути, соединяющего выходные зажимы (a, b) четырехполюсника и не содержащего элемента α . Знаки слагаемых функции совпадения определяются, как и в предыдущем случае, но с той лишь разницей, что исследуется совпадение ориентации ребра α с направлением стрелки выходного напряжения U_2 четырехполюсника.

Практическое применение формулы (11) иллюстрируют следующие примеры.

Пример 8. Определить K_u мостового четырехполюсника (рис. 9).

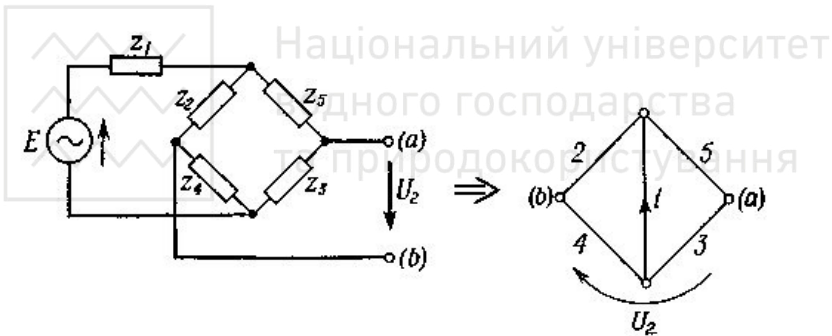


Рис. 9.

Решение. Блочная группа (рис. 9, б) равна

$$A = [1 \ 2 \ 4] [1 \ 3 \ 5],$$

или

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

а алгебраическая производная имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial I} = [3 \ 5 \ 2 \ 4].$$



Путь, соединяющий вершину (а) с вершиной (б), можно записать в виде

$$D^1_{\beta} = [3 \ 4] \quad \text{или} \quad D^2_{\beta} = [2 \ 5].$$

Легко проверить, что конечный результат будет одинаков независимо от того, используется в дальнейших расчетах путь D^1_{β} или D^2_{β} . Например, произведение равно

$$\frac{\partial A}{\partial I} D^1_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

а

$$\frac{\partial A}{\partial I} D^1_{\beta} \cap A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая ориентацию ребра 1 и напряжения U_2 , получим

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial I} D^1_{\beta}, A \right) = z_1 z_3 - z_5 z_4.$$

Окончательно

$$K_u = \frac{z_2 z_3 - z_5 z_4}{z_1 z_3 + z_1 z_5 + z_2 z_1 + z_2 z_3 + z_2 z_5 + z_4 z_1 + z_4 z_3 + z_4 z_5}.$$

Пример 9. Определить передаточную функцию напряжения K_u четырехполюсника (рис. 10, а).

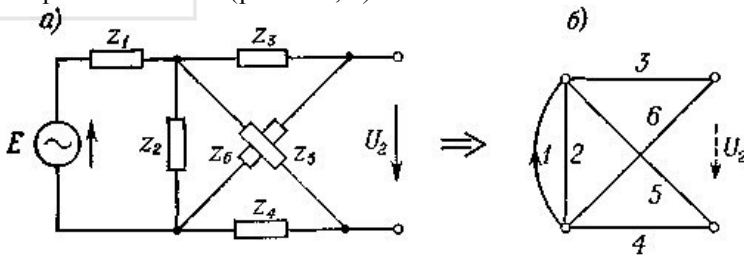


Рис. 10.

Решение. Имеем (рис. 10, б)

$$A = [1 \ 2] [2 \ 4 \ 5] [2 \ 3 \ 6],$$

или



$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 2 \\
 & & \times & 2 & 4 & 5 \\
 & & & 2 & 3 & 6 \\
 \hline
 A = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad D_\beta = [6 \ 4]$$

поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$



$$\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta \cap A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1} D_\beta, A \right) = z_5 z_2 z_6 - z_2 z_3 z_4.$$

Передаточная функция напряжения запишется в виде

$$K_u = \frac{z_5 z_2 z_6 - z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_4 z_2 + z_1 z_4 z_3 + z_1 z_4 z_6 + z_1 z_5 z_2 + z_1 z_5 z_3 + \dots + z_2 z_5 z_6}.$$

На практике часто встречается режим работы четырехполюсника с идеальным источником напряжения. При этом передаточная функция напряжения может быть определена по формуле

$$K_u = \frac{\text{Sim } AD_\alpha, AD_\beta}{z \det(AD_\alpha)}. \quad (12)$$

где D_α — блочная группа, соответствующая пути между узлами, к которым подключен идеальный источник напряжения; D_β — блочная группа, соответствующая пути между измерительными (выходными) узлами четырехполюсника.

Выражение (12) можно использовать как для нагруженного четырехполюсника, так и для четырехполюсника в режиме холо-



стого хода. Приведем пример использования этой формулы.

Пример 10. Рассчитать передаточную функцию напряжения четырехполюсника (2Т-образного моста), изображенного на рис. 11, а.

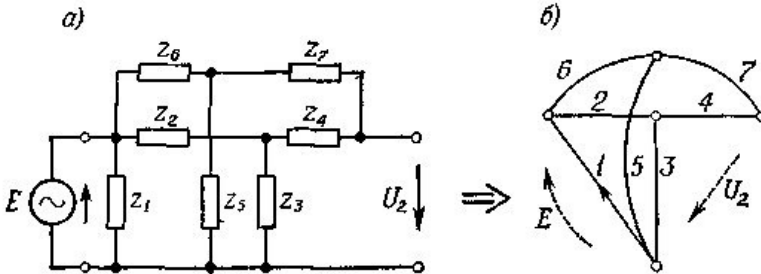


Рис. 11.

Решение. Блочная группа A рассматриваемого графа равна (рис. 11, б)

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \times & 1 & 5 & 6 \\ & 3 & 4 & 5 & 7 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 4 & 5 & 7 & 4 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Кроме того,

$$D_\alpha = [1], \quad D_\beta = [3 \ 4],$$

а также

$$AD_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 & 7 & 4 & 5 & 7 & 4 & 5 & 7 & 7 \end{bmatrix},$$



$$Z = z_{\alpha} \frac{\det \frac{\delta A^d}{\delta \alpha}}{\det A^d}, \quad Z = \frac{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}{\det A}. \quad (126)$$

Во всех приведенных формулах A — блочная группа, геометрическим изображением которого служит граф двухполюсника. В первом случае это граф с *замкнутыми* входными зажимами, во втором случае — с *разомкнутыми*. Вывод формул (12) не представляет особой трудности. В качестве примера докажем первую из формул (126). Из теории цепей известно, что импеданс, измеренный между зажимами a и b , можно записать

$$Z = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta},$$

где Δ и Δ_{ab} — определители матрицы контурных сопротивлений цепи соответственно при разомкнутых и замкнутых вершинах a и b . Кроме того,

$$\Delta = \det A^d, \quad \Delta_{ab} = z_{\alpha} \det \frac{\delta A^d}{\delta \alpha},$$

где формула для A_{ab} следует из рассмотренного ранее свойства 2.

Проиллюстрируем формулу (12) на примерах.

Пример 11. Определить импеданс мостового двухполюсника (рис.13,а).

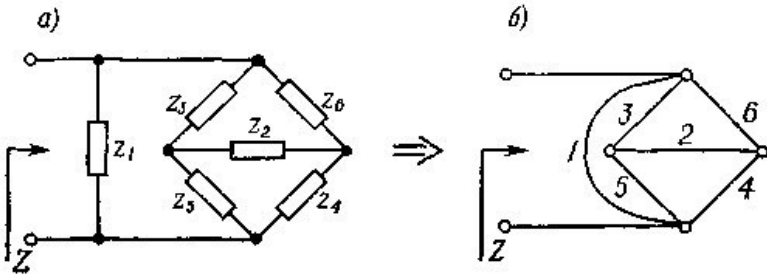


Рис. 13.

Решение. Определим импеданс по первой из формул (126). Дополнительная блочная группа A^d (рис. 13, б) равна

$$A^d = [1 \ 3 \ 5] [2 \ 3 \ 6] [2 \ 4 \ 5],$$

или



$$\begin{array}{r}
 1\ 3\ 5 \\
 \times 2\ 3\ 6 \\
 \hline
 2\ 4\ 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

а производная имеет вид

$$\frac{\delta A^d}{\delta I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$Z = z_1 \frac{z_3 z_2 z_4 + z_3 z_2 z_5 + z_3 z_6 z_2 + z_3 z_6 z_4 + z_3 z_6 z_5 + z_5 z_2 z_4 + \dots + z_5 z_6 z_4}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_3 z_2 + z_1 z_3 z_4 + z_1 z_3 z_5 + \dots + z_5 z_6 z_4}.$$

Пример 12. Определите импеданс двухполюсника (рис. 13), используя вторую из формул (126).

Решение. В этом случае блочная группа равна

$$A = [1\ 3\ 6] [2\ 3\ 5] [2\ 4\ 6].$$

Следовательно,

$$\begin{array}{r}
 1\ 3\ 6 \\
 \times 2\ 3\ 5 \\
 \hline
 2\ 4\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 6 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

В результате получим

$$Z = \frac{y_2 y_4 + y_2 y_6 + y_3 y_2 + y_3 y_4 + y_3 y_6 + y_5 y_2 + y_5 y_4 + y_5 y_6}{y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_6 + y_1 y_3 y_2 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_6 + \dots + y_6 y_5 y_4}.$$



9.1.3. Анализ произвольных цепей

Пусть дана цепь, состоящая из взаимных элементов и источников напряжения. Если в цепи имеются источники тока, то по известным формулам их легко заменить на источники напряжения. На структуру цепи ограничения не наложены. Выделим в цепи ветви с интересующими нас токами $I_{\beta_1}, I_{\beta_2}, \dots, I_{\beta_m}$ (рис. 14).

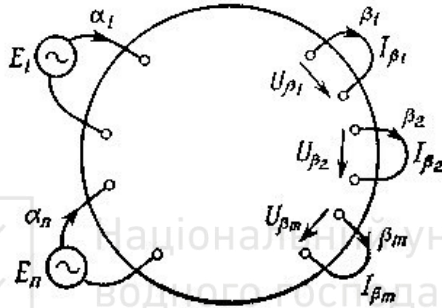


Рис. 14. Электрическая сеть произвольной структуры с вынесенными ветвями.

Рассмотрение этой цепи всегда можно свести к случаю воздействия одного источника напряжения, применив для произвольного числа источников принцип суперпозиции. Если цепь содержит один источник напряжения, то ток I_{β} в любой ветви можно представить в виде

$$I_{\beta} = K_i E, \quad (13)$$

где K_i — передаточная функция тока.

В общем случае имеем

$$I_{\beta} = \sum_v K_{vi} E_v, \quad (14)$$

причем суммирование проводится по всем источникам.

Напряжение произвольной ветви можно выразить аналогичным образом:

$$U_{\beta} = \sum_v K_{vu} E_v, \quad (15)$$

где K_{vu} — передаточная функция напряжения для ветви v .



Рассмотренный на примере четырехполюсника метод может быть использован при анализе любых взаимных цепей, не содержащих зависимых источников.

Используя выведенные ранее формулы (2) для передаточных функций тока и напряжения, можно найти распределение токов в цепи и напряжения на отдельных ветвях. Тем же методом можно определить напряжение любой пары вершин цепи. В этом случае достаточно определить

$$K_u = \frac{\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} D_\beta, A \right)}{\det A}, \quad (16)$$

где D_β — блочная группа, соответствующая пути между интересующими нас вершинами, но не проходящего по ребру α .

Практическое использование этого метода покажем на примерах.

Пример 13. Определить токи I_4 и I_5 цепи (рис. 15, а) с двумя источниками напряжения.

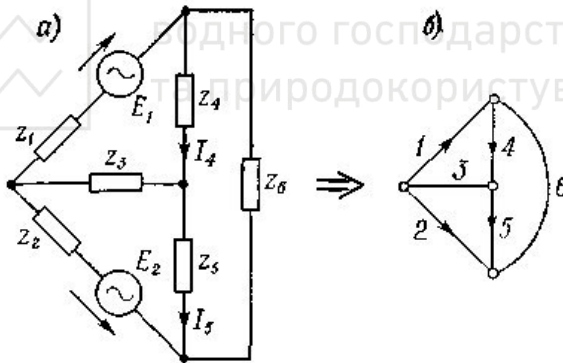


Рис. 15.

Решение. Имеем (рис. 15, б)

$$A = [1 \ 3 \ 41 \ [2 \ 3 \ 51 \ [4 \ 5 \ 6],$$

или



$$\begin{array}{r} 1\ 3\ 4 \\ \times 2\ 3\ 5 \\ \hline 4\ 5\ 6 \end{array},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

а производные равны

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу (14), напомним

$$I_4 = K_{14}E_1 + K_{24}E_2; \quad I_5 = K_{15}E_1 + K_{25}E_2,$$

причем, согласно уравнениям (2), имеем

$$K_{14} = \frac{I_4}{E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 4} \right)}{\det A},$$

$$K_{24} = \frac{I_4}{E_2} \Big|_{E_1=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 2}, \frac{\partial A}{\partial 4} \right)}{\det A},$$

$$K_{15} = \frac{I_5}{E_1} \Big|_{E_2=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 5} \right)}{\det A},$$

$$K_{25} = \frac{I_5}{E_2} \Big|_{E_1=0} = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial 2}, \frac{\partial A}{\partial 5} \right)}{\det A}.$$

Из приведенных выражений следует



$$K_{14} = \frac{z_2 z_5 + z_2 z_6 + z_3 z_6 + z_5 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6}$$

$$K_{24} = \frac{z_1 z_5 + z_3 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6}$$

$$K_{15} = \frac{z_2 z_4 + z_3 z_6}{z_1 z_2 z_4 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6}$$

$$K_{25} = \frac{-z_1 z_4 - z_1 z_6 - z_4 z_6 - z_3 z_6}{z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_5 + z_1 z_2 z_6 + z_1 z_3 z_4 + \dots + z_4 z_5 z_6}$$

Пример 14. Определить напряжение U_0 цепи (рис. 16, а) с тремя источниками.

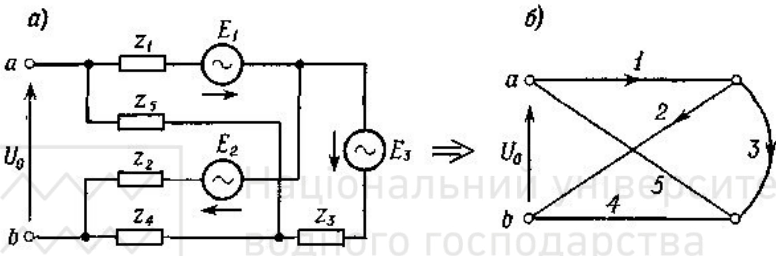


Рис. 16.

Решение. Для рассматриваемого случая блочная группа равна

$$A = [1 \ 3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = [2 \ 3 \ 4], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = [1 \ 3 \ 5], \quad \frac{\partial A}{\partial 3} = [1 \ 2 \ 4 \ 5].$$

Пусть, например, путь D , соединяющий узлы a и b , описывается блочной группой $[5 \ 4]$ (рис. 16, б), т. е.

$$D = [5 \ 4].$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial 1} D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial A}{\partial 2} D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial A}{\partial 3} D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда можно записать соответствующие функции совпадения



$$\text{Sim}_Z = \left(\frac{\partial A}{\partial 1} D, A \right) = z_2 z_5 + z_3 z_5 + z_4 z_5 + z_3 z_4,$$

$$\text{Sim}_Z = \left(\frac{\partial A}{\partial 2} D, A \right) = z_3 z_5 + z_1 z_4 + z_3 z_4 + z_5 z_4,$$

$$\text{Sim}_Z = \left(\frac{\partial A}{\partial 3} D, A \right) = z_2 z_5 - z_1 z_4.$$

Окончательно получим

$$U_0 = \frac{(z_2 z_5 + z_3 z_5 + z_4 z_5 + z_3 z_4) E_1}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_2 + z_5 z_3 + z_5 z_4} + \\ + \frac{(z_3 z_5 + z_1 z_4 + z_3 z_4 + z_5 z_4) E_2 + (z_2 z_5 - z_1 z_4) E_3}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_3 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_2 + z_5 z_3 + z_5 z_4}.$$

Так же довольно просто вычислить *импеданс* или *адмитанс* между произвольной парой узлов цепи. Для этого достаточно воспользоваться формулой

$$Z = \frac{\det(AD)}{\det A}, \quad (17)$$

где A — блочная группа, для которой граф цепи служит обратным изображением, D — блочная группа произвольного пути, соединяющего узлы, между которыми определяется импеданс Z .

Порядок расчета токов, напряжений или передаточных функций цепи можно упростить, если вначале упростить граф цепи, заменяя параллельные и последовательные ребра одним ребром.

Для последовательного соединения ребер имеем

$$Z_i = z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

для параллельного соединения

$$Z_i = \frac{1}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_m}}.$$



9.2. Анализ активных цепей

9.2.1. Анализ цепи, содержащей один зависимый источник напряжения

Цепь, содержащая один зависимый источник напряжения, изображена на рис. 17.

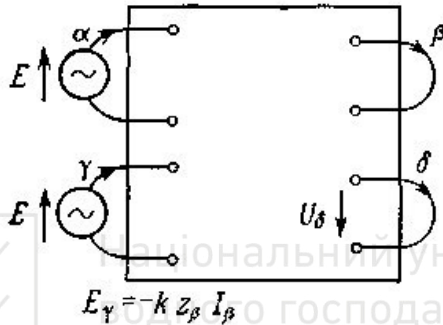


Рис. 17.

Выделим ветви цепи, как показано на рис. 17. Напряжение U_δ на выходе с помощью блочных групп можно записать в виде

$$U_\delta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) z_\delta E}{\det A} - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) z_\beta I_\beta K z_\delta}{\det A}, \quad (18)$$

где ток I_β равен

$$I_\beta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) E}{\det A} - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) K z_\beta I_\beta}{\det A}.$$

В этой формуле ток I_β выражен в неявном виде. После соответствующих преобразований получим

$$I_\beta = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)}{\det A + K z_\beta \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} E. \quad (19)$$



Подставив уравнение (19) в уравнение (18) и выполнив преобразования, получим выражение передаточной функции цепи, содержащей один зависимый источник напряжения:

$$\frac{U_{\beta}}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A} z_{\delta} - \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) K z_{\beta}}{\det A \left[\det A + K z_{\beta} \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right) \right]} z_{\delta}. \quad (20)$$

Эта формула определяет коэффициент усиления напряжения цепи, имеющий две составляющие:

$$U_{\beta}/E = K_0 - K_1. \quad (21)$$

Составляющая K_0 представляет собой усиление цепи при отсутствии активной связи, т. е. когда коэффициент усиления импеданса $K = 0$; составляющая K_1 — дополнительное усиление, обусловленное наличием зависимого источника напряжения. Выражение (20) можно значительно упростить, представив его в следующем виде:

$$\frac{U_{\delta}}{E} = \frac{z_{\delta}}{\det A} \left[\frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \left[\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right) \right]}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} - \frac{W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} \right],$$

где $W = z_{\beta}K$.

Параметр W называется передаточным активным импедансом зависимого источника.

Если через L_1 обозначить выражение

$$L_1 = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)}{\det A}, \quad (22)$$

то выражение (20) примет вид



$$\frac{U_{\delta}}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - WL_1}{\det A + W \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_{\delta}. \quad (23)$$

Выражение (22) можно упростить, учитывая, что функции совпадения определяют соответствующие миноры определителя контурных сопротивлений Δ^0 исследуемой цепи (при $K = 0$) Имеем следующее равенство:

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \mu}, \frac{\partial A}{\partial \nu} \right) = \Delta_{\mu\nu}^0, \quad (24)$$

где $\Delta_{\mu\nu}^0$ — минор, полученный из определителя Δ^0 путем вычеркивания μ -строки и ν -столбца.

Если учесть это равенство в формуле (22), то для L_1 получим следующее выражение:

$$L_1 = \frac{\Delta_{\alpha\beta}^0 \Delta_{\gamma\delta}^0 - \Delta_{\alpha\delta}^0 \Delta_{\beta\gamma}^0}{\Delta^0}.$$

Из теории определителей известно, что

$$\Delta_{\alpha\beta}^0 \Delta_{\gamma\delta}^0 - \Delta_{\alpha\delta}^0 \Delta_{\beta\gamma}^0 = \Delta^0 \Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta}^0, \quad (25)$$

где $\Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta}^0$ — минор, полученный вычеркиванием строк α и γ и столбцов β и δ из определителя Δ^0 , поэтому величину L_1 можно определить непосредственно с помощью одной функции совпадения, а именно

$$L_1 = \Delta_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha, \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta, \partial \delta} \right). \quad (26)$$

Подставив уравнение (26) в (23), окончательно получим следующее выражение для усиления напряжения рассматриваемой цепи:

$$\frac{U_{\delta}}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - K z_{\beta} \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha, \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta, \partial \delta} \right)}{\det A + K z_{\beta} \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_{\delta}. \quad (27)$$

Отметим, что знаменатель этого выражения представляет собой определитель матрицы контурных сопротивлений Δ цепи, содержащей один зависимый источник напряжения. Следовательно,

$$\Delta = \det A + K z_{\beta} \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right). \quad (28)$$



Во всех приведенных формулах A — блочная группа, для которой граф исследуемой цепи служит обратным изображением.

Если известно усиление напряжения цепи и определитель Δ , то легко найти все остальные параметры, характеризующие эту цепь.

Например, *возвратная разность* равна

$$F = 1 + \frac{Kz_{\beta} \operatorname{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)}{\det A} \quad (29)$$

Эта формула следует из зависимости, полученной Боде, согласно которой

$$F = \Delta / \Delta^0.$$

Рассмотрим два частных случая.

Допустим, что импеданс z_{β} стремится к бесконечности ($z_{\beta} \rightarrow \infty$).

Учитывая соотношение

$$\det A = \det \frac{\delta A}{z} + z_{\beta} \det \frac{\partial A}{z} \quad (30)$$

непосредственно вытекающее из зависимости

$$A = \frac{\delta A}{\delta \beta} + [\beta] \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

получим формулу для усиления напряжения цепи, содержащей один зависимый источник напряжения при условии, что $z_{\beta} \rightarrow \infty$:

$$\frac{U_{\delta}}{E} \Big|_{z_{\beta} \rightarrow \infty} = \frac{-K \operatorname{Sim} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)}{\det \frac{\partial A}{z} + K \operatorname{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_{\delta} \quad (31)$$

Рассмотрим случай, соответствующий очень сильной обратной связи, т. е. когда $Kz_{\beta} \rightarrow \infty$.

Тогда усиление напряжения выражается формулой

$$\frac{U_{\delta}}{E} \Big|_{Kz_{\beta} \rightarrow \infty} = \frac{\operatorname{Sim} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta \partial \delta} \right)}{\operatorname{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta}, \frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)} z_{\delta} \quad (32)$$

Пример 15. Для цепи, изображенной на рис. 18, определить: 1) усиление напряжения в общем случае; 2) усиление напряжения при $z_{\beta} \rightarrow \infty$; 3) усиление напряжения при $Kz_{\beta} \rightarrow \infty$; 4) возвратную разность F .

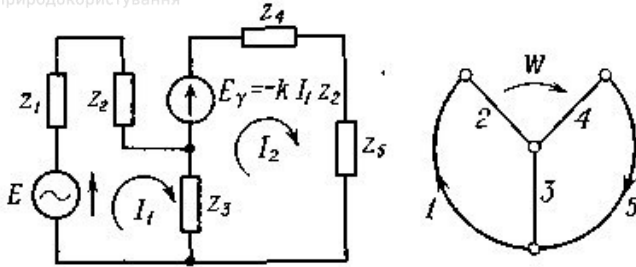


Рис. 18.

1) Для расчета усиления напряжения в общем случае воспользуемся формулой (27). Имеем

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 5.$$

Блочная группа этой цепи равна



поэтому

$$A = [1 \ 2 \ 3] [3 \ 4 \ 5] = \begin{bmatrix} 11122233 \\ 34534545 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial 1} = [3 \ 4 \ 5], \quad \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4 \ 5],$$

$$\frac{\partial A}{\partial 4} = [1 \ 2 \ 3], \quad \frac{\partial A}{\partial 5} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 4} = 1, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 5} = 1,$$

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) z_3, \quad \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = z_3.$$

Подставив эти величины в выражение (27), получим

$$\frac{U_5}{E} = \frac{z_3 z_5 - K z_2 z_5}{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5 + K z_2 z_3}.$$

2) Усиление напряжения при $z_\beta \rightarrow \infty$ определяем в соответствии с формулой (31)

$$\frac{U_5}{E} = \frac{-K z_5}{z_3 + z_4 + z_5 + K z_3}.$$

3) Усиление напряжения при $K z_\beta \rightarrow \infty$ находим по формуле (32)



$$\frac{U_5}{E} = -\frac{z_5}{z_3}$$

4) Возвратную разность по отношению к элементу K можно определить по формуле (29):

$$F = 1 + \frac{K z_2 z_3}{z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_1 z_5 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_4 + z_3 z_5}$$

9.2.2. Анализ цепи, содержащей два зависимых источника напряжения

Рассматривая цепь, содержащую два зависимых источника напряжения, поступим, как и в случае одного зависимого источника.

Выделим из линейной цепи зависимые источники напряжения и ветви, содержащие управляющие сигналы. В результате получим схему, изображенную на рис. 19, где обозначено: E — независимый источник напряжения; E_{γ_1} , E_{γ_2} — зависимые источники напряжения; I_{β_1} — ток, управляющий источником E_{γ_1} ; I_{β_2} — ток, управляющий источником E_{γ_2} ; U_δ — выходное напряжение.

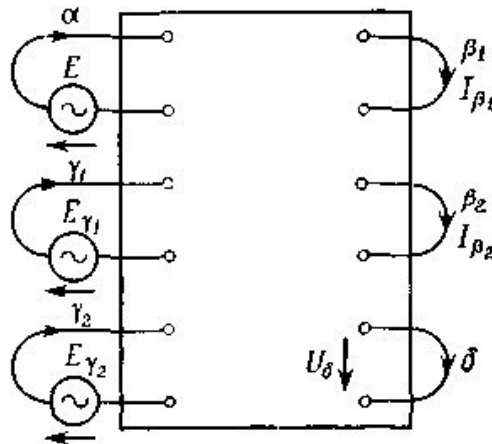


Рис. 19. Цепь с двумя зависимыми источниками э.д.с.



Кроме этого, справедливы равенства

$$E_{\gamma_1} = -K_1 z_{\beta_1} I_{\beta_1}, \quad E_{\gamma_2} = -K_2 z_{\beta_2} I_{\beta_2}, \quad (33)$$

где z_{β_1} и z_{β_2} — импедансы ребер β_1 и β_2 соответственно.

Напряжение на выходе цепи U_δ можно рассматривать как результат наложения трех источников напряжения, т. е.

$$U_\delta = \frac{\Delta_{\alpha\delta}^0}{\Delta^0} z_\delta E + \frac{\Delta_{\gamma_1\delta}^0}{\Delta^0} z_\delta E_{\gamma_1} + \frac{\Delta_{\gamma_2\delta}^0}{\Delta^0} z_\delta E_{\gamma_2}, \quad (34)$$

где Δ^0 — главный определитель матрицы контурных сопротивлений пассивной цепи без независимых источников напряжения;

$\Delta_{\alpha\delta}^0$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки α и столбца δ ;

$\Delta_{\gamma_1\delta}^0$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки γ_1 и столбца δ ;

$\Delta_{\gamma_2\delta}^0$ — минор определителя Δ^0 , полученный вычеркиванием строки γ_2 и столбца δ .

Выражение (34) получено с помощью метода контурных токов Максвелла.

Токи I_{β_1} и I_{β_2} также можно определить, исходя из системы контурных уравнений и принципа наложения:

$$\begin{aligned} I_{\beta_1} &= \frac{\Delta_{\alpha\beta_1}^0}{\Delta^0} E + \frac{\Delta_{\beta_1\gamma_1}^0}{\Delta^0} E_{\gamma_1} + \frac{\Delta_{\beta_1\gamma_2}^0}{\Delta^0} E_{\gamma_2}, \\ I_{\beta_2} &= \frac{\Delta_{\alpha\beta_2}^0}{\Delta^0} E + \frac{\Delta_{\beta_2\gamma_1}^0}{\Delta^0} E_{\gamma_1} + \frac{\Delta_{\beta_2\gamma_2}^0}{\Delta^0} E_{\gamma_2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Учитывая соотношение (33) и вводя обозначения

$$W_1 = K z_{\beta_1}, \quad W_2 = K z_{\beta_2}$$

(здесь W_1 и W_2 называются передаточными активными импедансами цепи), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} I_{\beta_1} \left[1 + \frac{\Delta_{\gamma_1\beta_1}^0}{\Delta^0} W_1 \right] + \frac{\Delta_{\gamma_2\beta_1}^0}{\Delta^0} I_{\beta_2} W_2 &= \frac{\Delta_{\alpha\beta_1}^0}{\Delta^0} E, \\ I_{\beta_2} \left[1 + \frac{\Delta_{\gamma_2\beta_2}^0}{\Delta^0} W_2 \right] + \frac{\Delta_{\gamma_1\beta_2}^0}{\Delta^0} I_{\beta_1} W_1 &= \frac{\Delta_{\alpha\beta_2}^0}{\Delta^0} E \end{aligned} \quad (36)$$

Определитель этой системы имеет вид



$$\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 & W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 \\ W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 & \Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 \end{vmatrix},$$

первый минор:

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} \Delta_{\alpha \beta_1}^0 E & W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 \\ \Delta_{\alpha \beta_2}^0 E & \Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 \end{vmatrix},$$

второй минор:

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} \Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 & \Delta_{\alpha \beta_1}^0 E \\ W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 & \Delta_{\alpha \beta_2}^0 E \end{vmatrix}.$$

Ток можно записать в следующем виде:

$$I_{\beta_1} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = \frac{\Delta_{\alpha \beta_1}^0 (\Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0) - \Delta_{\alpha \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0 W_2 E}{(\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0) (\Delta^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0) - W_1 W_2 \Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}. \quad (37)$$

После преобразований окончательно получим

$$I_{\beta_1} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 L_1) E}{\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 L_{12}}, \quad (38)$$

где

$$L_1 = \frac{\Delta_{\alpha \beta_1}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - \Delta_{\alpha \beta_2}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0, \quad (39)$$

$$L_{12} = \frac{\Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 \Delta_{\gamma_2 \beta_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_1 \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0.$$

Формулы (39) можно получить, раскрыв определитель по методу Лапласа.

Используя метод блочных групп, полученные миноры, можно выразить через функции совпадения:

$$L_1 = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right), \quad (40)$$

$$L_{12} = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right),$$

где A — блочная группа, для которой граф цепи служит обратным изображением, Z — множество импедансов цепи.

Учитывая соотношения (39), ток I_{β_1} можно записать в виде

$$I_{\beta_1} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0) E}{\Delta^0 + W_1 \Delta_{\gamma_1 \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 \Delta_{\beta_1 \gamma_1, \beta_1 \gamma_2}^0} = \frac{N_1}{\Delta} E. \quad (41)$$

Аналогично для тока I_{β_2} имеем

$$I_{\beta_2} = \frac{\Delta'_2}{\Delta'} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_2}^0 - W_1 L_2) E}{\Delta'}, \quad (42)$$



где

$$L_2 = \frac{\Delta_{\gamma_1 \beta_2}^0 \Delta_{\alpha_1 \beta_1}^0 - \Delta_{\alpha_2 \beta_2}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0. \quad (43)$$

В этой формуле $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0$ — минор, полученный вычеркиванием строк α и γ и столбцов β_1 и β_2 из определителя Δ^0 . Этот минор можно также выразить с помощью функции совпадения

$$L_2 = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} \right). \quad (44)$$

В формуле (43), как и выше, A — блочная группа, для которой граф цепи служит обратным изображением, а Z — множество импедансов цепи.

Учитывая формулу (43), ток I_{β_2} можно представить в виде

$$I_{\beta_2} = \frac{(\Delta_{\alpha \beta_2}^0 - W_1 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0) E}{\Delta} = \frac{N_2 E}{\Delta}, \quad (45)$$

где

$$\Delta = \Delta^0 + W_1 \Delta_{\alpha \beta_1}^0 + W_2 \Delta_{\gamma_2 \beta_2}^0 - W_1 W_2 \Delta_{\beta \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0.$$

Подставляя соотношения (41) и (45) в (34), получим выражение, определяющее усиление цепи, содержащей два зависимых источника напряжения:

$$\frac{U_\delta}{E} = \left(\frac{\Delta_{\alpha \delta}^0}{\Delta^0} - \frac{\Delta_{\gamma_1 \delta}^0}{\Delta^0} \frac{N_1}{\Delta} W_1 - \frac{\Delta_{\gamma_2 \delta}^0}{\Delta^0} \frac{N_2}{\Delta} W_2 \right) z_\delta.$$

Эту формулу можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{z_\delta}{\Delta^0} \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta - \Delta_{\gamma_1 \delta}^0 N_1 W_1 - \Delta_{\gamma_2 \delta}^0 N_2 W_2}{\Delta}. \quad (46)$$

Подставив в выражение (46) значения коэффициентов N_1 и N_2 , получим

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 - W_1 L_1^* - W_2 L_2^* + W_1 W_2 L_{12}^*}{\Delta}, \quad (47)$$

где

$$L_1^* = \frac{\Delta_{\gamma_1 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1}^0 - \Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_1 \delta, \alpha \beta_1}^0, \quad (48)$$

$$L_2^* = \frac{\Delta_{\gamma_2 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_2}^0 - \Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_2 \gamma_2}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\gamma_2 \delta, \alpha \beta_2}^0,$$

$$L_{12}^* = \frac{\Delta_{\alpha \delta}^0 \Delta_{\beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0 - \Delta_{\gamma_1 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0 + \Delta_{\gamma_2 \delta}^0 \Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0}{\Delta^0} = \Delta_{\alpha \delta, \beta_1 \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0.$$

Здесь, как и выше, величины $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_1 \beta_2}^0$, $\Delta_{\beta \gamma_1, \beta_2 \gamma_2}^0$, $\Delta_{\alpha \beta_1, \gamma_2 \beta_2}^0$ — соответствующие миноры определителя Δ^0 , которые можно выразить через функции совпадения



$$L_1^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right),$$

$$L_2^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \gamma} \right), \quad (49)$$

$$L_{12}^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \partial \delta} \right),$$

причем граф цепи служит обратным изображением блочной группы A , Z — множество импедансов цепи.

Учитывая полученные результаты, окончательно запишем формулу усиления цепи, содержащей два зависимых источника напряжения:

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - W_1 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right) - W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} \right) + W_1 W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} \right)}{\det A + W_1 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right) + W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right) - W_1 W_2 \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right)} \quad (50)$$

Отдельным величинам и выражениям этой формулы можно дать простую физическую интерпретацию.

Первые члены числителя и знаменателя выражения (50) характеризуют непосредственное прохождение сигнала в предположении, что оба коэффициента усиления равны нулю (т. е. оба активных передаточных импеданса W_1 и W_2 равны нулю). Таким образом, непосредственная передача сигнала определяется формулой

$$\frac{U_\delta}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{\det A}.$$

Два первых члена числителя и два первых члена знаменателя определяют усиление цепи при нулевом коэффициенте усиления другого элемента ($W_2 = 0$). Аналогично первый и третий члены числителя и знаменателя определяют усиление цепи при нулевом коэффициенте усиления первого элемента ($W_1 = 0$).



9.2.3. Формулы для расчета цепи, содержащей N независимых источников напряжения

На основании формул для цепей, содержащих один или два независимых источника, можно вывести формулы для цепи, содержащей N независимых источников напряжения.

Формула усиления цепи с N независимыми источниками напряжения имеет вид

$$\frac{U_{\delta}}{E} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - \sum_{i=1}^N W_i \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_i}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \delta} \right) + \sum_{i < j} W_i W_j \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_i \partial \gamma_j}, \frac{\partial^3 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \delta} \right) - \dots}{\det_Z A + \sum_{i=1}^N W_i \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) - \sum_{i < j} W_i W_j \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) + \dots} z_{\delta}, \quad (51)$$

где $W_i = K_i z_{\beta_i}$.

Если предположить, что все активные передаточные импедансы стремятся к бесконечности (этот случай соответствует очень сильной обратной связи), то формула для усиления упростится и примет вид

$$\frac{U_{\delta}}{E} \Big|_{W_1 W_2 \dots W_N \rightarrow \infty} = \frac{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2 \dots \partial \beta_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2 \dots \partial \gamma_N} \right)} z_{\delta}. \quad (52)$$

Формулу для возвратной разности можно вывести на основании свойства, полученного Боде, согласно которому возвратная разность выражается отношением определителя матрицы импедансов цепи к ее определителю при нулевых независимых источниках напряжения. В результате получим



$$F = 1 + \frac{\sum_{i=1}^N W_i \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_i} \right) - \sum_{i < j} W_i W_j \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_i \partial \beta_j}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) + \dots}{\det \frac{\partial A}{Z}}. \quad (53)$$

Определим усиление цепи при $z_{\beta_N} \rightarrow \infty$.

Можно показать, что детерминантная функция блочной группы A имеет вид

$$\det \frac{\partial A}{Z} = \det \frac{\delta^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} + z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \det \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N}.$$

В случае, если выполняется условие

$$\lim_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)}{z_{\beta_1} z_{\beta_2} z_{\beta_3} \dots z_{\beta_N}} = 0, \quad (54)$$

формула усиления напряжения цепи запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{U_\delta}{E} \Big|_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} &= \\ &= (-1)^N \frac{K_1 K_2 \dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\det \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} + K_1 K_2 \dots} z_\delta \\ &\quad \dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \dots \partial \delta_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Эта формула может быть записана в виде

$$k \Big|_{z_{\beta_1} \dots z_{\beta_N} \rightarrow \infty} = \frac{\mathcal{K}}{1 + \mathcal{K} \mathcal{B}}, \quad (56)$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{(-1)^N K_1 K_2 \dots K_N \operatorname{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha_1 \dots \partial \gamma_1 \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)}{\det \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N}} z_\delta, \quad (57)$$



$$\mathcal{B} = \frac{(-1)^N \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^N A}{\partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^N A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N} \right)}{\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^{N+1} A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \dots \partial \gamma_N}, \frac{\partial^{N+1} A}{\partial \beta_1 \dots \partial \beta_N \partial \delta} \right)} \frac{1}{z_\delta}. \quad (58)$$

Утверждение 1. При выполнении условия (54) любую активную цепь с зависимыми источниками напряжения можно представить в виде цепи с одной обратной связью, причем передаточная функция \mathcal{K} главной ветви и передаточная функция ветви обратной связи \mathcal{B} определяются формулами (57) и (58) (рис. 20).

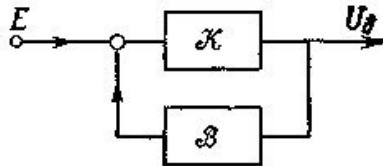


Рис. 20. Цепь с обратной связью.

В случае очень сильной обратной связи, т. е. когда $\mathcal{K} \rightarrow \infty$, имеем

$$k \Big|_{\mathcal{K} \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\mathcal{B}}. \quad (59)$$

Из этой формулы, известной из теории обратной связи, следует, что усиление цепи с очень сильной обратной связью не зависит от элементов главной ветви.

Пример 16. Определить усиление напряжения и возвратную разность для схемы с обратной связью (рис. 21, а).

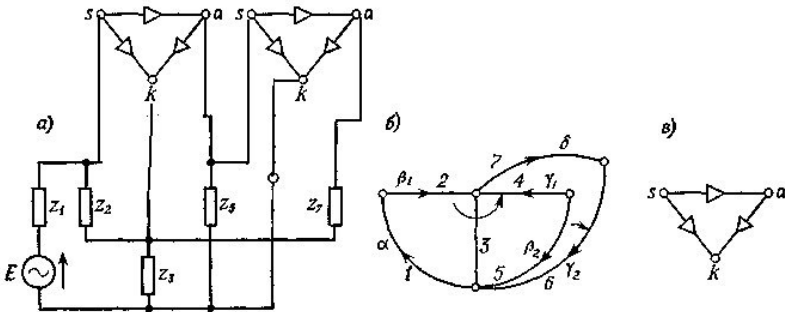


Рис. 21.



Решение. В этой цепи две активные связи (рис. 21, б): β_1 с γ_1 , а также β_2 с γ_2 . Выбираем ориентацию ветвей β и γ , учитывая то, что в схеме используются унисторные треугольники (рис. 21, в).

Рассчитаем блочную группу заданной цепи (граф цепи служит ее обратным изображением), которая представляет собой произведение трех блочных групп

$$P_1 = [1 \ 2 \ 3], \quad P_2 = [3 \ 4 \ 5], \quad P_3 = [3 \ 6 \ 7].$$

В результате получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Усиление напряжения цепи рассчитаем по формуле

$$K = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \delta} \right) - L_1^* W_1 - L_2^* W_2 + L_{12}^* W_1 W_2}{\Delta^0 + L_1 W_1 + L_2 W_2 - L_{12} W_1 W_2} z_6.$$

Имеем

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{\partial A}{\partial 7} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_1}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_1} \right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_1} = \frac{\partial A}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \text{Sim} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_2}, \frac{\partial A}{\partial \gamma_2} \right),$$



$$\frac{\partial A}{\partial \beta_2} = \frac{\partial A}{\partial 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 6 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial A}{\partial 6} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$L_{12} = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 5} = [3 \ 6 \ 7], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 4 \partial 6} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$L_1^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1} = \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 4} = [3 \ 6 \ 7], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_1 \partial \delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 7} = [3 \ 4 \ 5],$$

$$L_2^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2}, \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} \right),$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \alpha \partial \gamma_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 6} = [3 \ 4 \ 5], \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \beta_2 \partial \delta} = \frac{\partial^2 A}{\partial 5 \partial 7} = [1 \ 2 \ 3],$$

$$L_{12}^* = \text{Sim}_Z \left(\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2}, \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} \right),$$

$$\frac{\partial^3 A}{\partial \alpha \partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 4 \partial 6} = 1, \quad \frac{\partial^3 A}{\partial \delta \partial \beta_1 \partial \beta_2} = \frac{\partial^3 A}{\partial 7 \partial 2 \partial 5} = 1,$$

$$\text{Sim}_Z(1, 1) = 1,$$

$$W_1 = K_1 z_2, \quad W_2 = K_2 z_5.$$

Подставив эти выражения в формулу усиления напряжения, получим

$$K = \frac{(z_1 z_4 + z_3 z_5 - K_1 z_3 z_3 - K_1 K_2 z_2 z_5) z_7}{z_1 z_3 z_6 + z_1 z_3 z_7 + z_1 z_4 z_3 + z_1 z_4 z_6 + z_1 z_4 z_7 + z_1 z_5 z_3 + z_1 z_5 z_6 + z_1 z_5 z_7 + z_2 z_3 z_6 + z_2 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_3 + z_2 z_4 z_6 + z_2 z_4 z_7 + z_2 z_5 z_3 + z_2 z_5 z_6 + z_2 z_5 z_7 + z_3 z_4 z_6 + z_3 z_4 z_7 + z_3 z_5 z_6 + z_3 z_5 z_7 + K_1 z_2 (z_3 z_6 + z_3 z_7) + K_2 z_5 (z_1 z_3 + z_2 z_3) + K_1 K_2 z_2 z_3 z_5}.$$



Примечание. Знаки слагаемых функции совпадения можно найти, приняв следующее определение функции ориентации:

$$\text{Ориентация } (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \gamma_1 \dots \gamma_n) = \begin{cases} +1, & \text{если четное число ветвей } \beta_i, \gamma_i \text{ не совпадает} \\ & \text{с положительным направлением контура;} \\ -1, & \text{если нечетное число ветвей } \beta_i, \gamma_i \text{ не совпа-} \\ & \text{дает с положительным направлением контура,} \end{cases}$$

согласно формулам (48).

Возвратная разность определяется по формуле $F = \Delta/\Delta^0$, где $\Delta^0 \det A$, т. е.

$$F = 1 + \frac{K_1 z_2 (z_3 z_6 + z_3 z_7) + K_2 (z_1 z_3 + z_2 z_3) + K_1 z_2 z_3 z_5}{z_1 z_3 z_6 + z_1 z_3 z_7 + \dots + z_3 z_3 z_7}$$

9.3. Анализ электрических модуль-схем методом блочных групп

9.3.1. Введение

Электрическая модуль-схема — это схема, составленная из многополюсников, где под *многополюсником* понимается цепь с несколькими выводами (например, двух-, трех-, четырехполюсник и т. д.), содержащая элементы с сосредоточенными или распределенными параметрами и не имеющая индуктивной связи с другими многополюсниками схемы. Многополюсник может иметь внутренние индуктивные связи. В данной работе будем рассматривать линейные электрические модуль-схемы.

На рис. 1. а изображена модуль-схема, состоящая из четырех четырехполюсников, т. е. модулей с четырьмя выводами W_1, W_2, W_3, W_4 , и имеющая 10 узлов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{10}$.

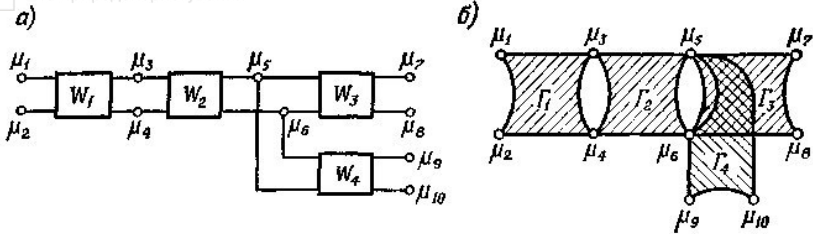


Рис. 1. Модуль-схема: а) схема цепи; б) модуль-граф цепи.

Считаем, что проводники, соединяющие отдельные блоки, не обладают сопротивлением и не имеют взаимных индуктивных и емкостных связей (в противном случае проводники нужно рассматривать как часть соответствующих блоков).

Граф модуль-схемы будем изображать в виде модуль-графа, отдельные модули которого соответствуют многополюсникам схемы. На рис. 1, б) представлен модуль-граф для схемы, показанной на рис. 1, а, число модулей и вершин которого равно соответственно числу многополюсников и узлов модуль-схемы, а число выводов — числу выводов соответствующего многополюсника схемы. Модуль-граф не имеет ребер, соединяющих выходы разных модулей, т. е. проводники, соединяющие выходы многополюсников схемы, представляются соответствующими вершинами модуль-графа. Заметим, что число контуров, образованных многополюсниками схемы, равно числу циклов скелета ее модуль-графа. В связи с этим напишем

$$M = \sum_{k=1}^g v_k - v - g + 1, \quad (1)$$

где M — число независимых контуров, образованных соединениями модуль-схемы, равное числу независимых циклов скелета ее модуль-графа; v_k — число выводов многополюсника W_k , равное числу вершин модуля Γ_k модуль-графа; g — число многополюсников модуль-схемы, равное числу модулей модуль-графа; v — число узлов модуль-графа, равное числу вершин модуль-графа.

Например, для модуль-схемы, представленной на рис. 1, а, а также для ее модуль-графа (рис. 1, б) имеем

$$v_1 = 4, \quad v_2 = 4, \quad v_3 = 4, \quad v_4 = 4, \quad v = 10, \quad g = 4,$$

следовательно,



$$M = 16 - 10 - 4 + 1 = 3.$$

При рассмотрении модуль-схемы возможны два случая:

- а) структура многополюсников (модулей) схемы известна;
- б) структура многополюсников схемы неизвестна.

В первом случае модули модуль-графа можно заменить подграфами отдельных многополюсников схемы, после чего определить блочные группы A_i этих модулей.

Во втором случае можно воспользоваться только внешними параметрами отдельных многополюсников, например передаточными сопротивлениями или проводимостями, коэффициентами передачи напряжения, тока, а также напряжениями и токами зажимов и т. д. Этот случай более интересен по следующим причинам. Во-первых, при анализе цепей с известной структурой многополюсников, особенно когда в них встречаются элементы с распределенными параметрами и индуктивными связями, эти многополюсники можно рассматривать как части цепи, не определяя их схем замещения. Так, например, анализируя электрическую цепь с индуктивными связями, можно выделить в этой цепи элементы связи и рассматривать их как многополюсник (с неизвестной структурой), а затем анализировать цепь как модуль-схему. Во-вторых, при синтезе электрических схем можно рассматривать их как модуль-схемы, учитывая лишь внешние параметры отдельных многополюсников, т. е. не определяя их внутренней структуры, так как внешние параметры многополюсников определяют не один, а целый класс структур.

Модуль-схемы (неэлектрические) находят применение во многих областях: экономике, организации и т. д. Если, например, построить «хозяйственную» модель в виде модуль-схемы, отдельные модули которой представляют собой хозяйственные единицы, а связывающие их линии — пути взаимодействия этих единиц, то такую модель можно анализировать (не изучая структуры отдельных модулей), основываясь только на их внешних характеристиках, определяющих способ отклика хозяйственных единиц на внешние возмущения.

При анализе модуль-схем с неизвестной структурой модулей воспользуемся методом полных блочных групп.



9.3.2. Детерминантная функция модуль-схемы

Как известно, детерминантная функция блочной группы A равна определителю Δ матрицы узловых проводимостей схемы, граф которой служит геометрическим изображением блочной группы A , а проводимости ветвей образуют множество Y комплексных чисел, т. е.

$$\Delta = \det_Y A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m y_{\alpha_{ij}}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\}. \quad (2)$$

Аналогично определим *детерминантную функцию полной блочной группы \bar{A}*

$$\det_Y \bar{A} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m y_{\alpha_{ij}}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\} \quad (3)$$

Например,

$$\det_Y \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{Bmatrix} = y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_2 y_1 y_3 + y_1 y_1 y_4 = \\ = 2y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_1^2 y_4.$$

Заметим, что в отличие от детерминантной функции блочной группы A в детерминантную функцию полной блочной группы могут входить коэффициенты и показатели степени, большие 1. На основании определения равенства блочных групп A и \bar{A} можно написать

$$(\bar{A} = A) \Leftrightarrow (\det_Y \bar{A} = \det_Y A = \Delta), \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\} \quad (4)$$

Аналогичные определения и соотношения имеют место и для детерминантной функции дополнительной блочной группы A^d и полной блочной группы \bar{A}^d . Эти функции определим на множестве комплексных чисел, равных импедансам ветвей цепи. Поэтому имеем

$$\Delta^d = \det_Z A^d = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{\alpha_{ij}}, \quad Z = \{z_1, z_2, \dots, z_g\}, \quad (5)$$

$$(\bar{A} = A) \Leftrightarrow (\det_Z \bar{A}^d = \det_Z A^d = \Delta^d), \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_g\}, \quad (6)$$



где Δ^d — детерминантная функция дополнительной блочной группы A^d , равная определителю матрицы контурных сопротивлений электрической цепи, граф которой служит геометрическим изображением дополнительной блочной группы A^d , а импедансы ветвей образуют множество Z комплексных чисел.

Можно проверить, что

$$\frac{\Delta}{\Delta^d} = \frac{\det A}{\det A^d} = \prod_{i=1}^g y_i, \quad (7)$$

$$\frac{\Delta^d}{\Delta} = \frac{\det A^d}{\det A} = \prod_{i=1}^g z_i, \quad (8)$$

где $y_i = z^{-1}_i$ — адмитанс ветви a_i , g — число всех ветвей цепи.

Детерминантную функцию блочной группы второго ранга 2A можно определить двумя способами:

- $\det_Y {}^2A = \det_Y A, \quad A = {}^e {}^2A, \quad (9)$

- $\det_Y {}^2A = \det_{\Delta_{ij} \in D} A, \quad A = {}^e {}^2A$
 $D = \{\Delta_{ij}\}, \quad \Delta_{ij} = \det_Y A_{ij}, \quad (10)$

$$A_{ij} = A_{ij}.$$

Это означает, что в первом случае блочную группу 2A приводим к замещающей ее блочной группе A первого ранга, а затем определяем детерминантную функцию блочной группы A . Второй способ основан на определении полной блочной группы A , выраженной через полные

блочные группы $A_{ij} = A_{ij}$, где A_{ij} — элементы блочной группы

2A , подстановке вместо блочных групп A_{ij} их детерминантных

функций $\Delta_{ij} = \det_Y A_{ij}$ и проведении соответствующих

алгебраических операций.

Вычисление детерминантной функции блочной группы второго ранга 2A или дополнительной блочной группы ${}^2A^d$ подобно расчету определителя матриц проводимостей или сопротивлений модуль-схемы. Поясним это на примерах.



Пример 1. Найти определитель матрицы узловых проводимостей модуль-схемы (рис. 2, а), модуль-граф Γ которой показан на рис. 2, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 2, в.

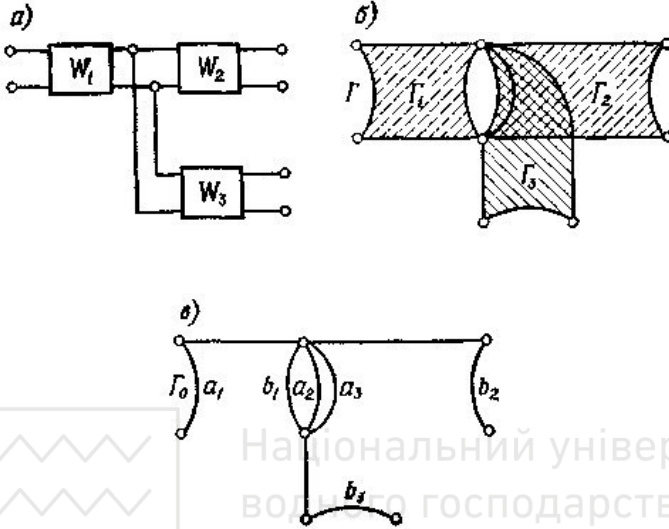


Рис. 2.

Дополнительная блочная группа A_0^d скелета Γ_0 равна

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] [b_1 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_3 \end{bmatrix};$$

следовательно, блочная группа 2A графа Γ запишется в виде

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Если известна структура многополюсников (четырёхполюсников) рассматриваемой схемы, то определитель матрицы проводимостей этой схемы можно рассчитать первым методом,

приравнивая 2A к ее замещающей блочной группе $A = {}^2A$. Пусть, например (для упрощения расчетов), все модули имеют одинаковую структуру (рис. 3, а).

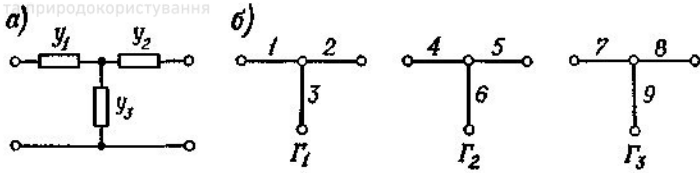


Рис. 3.

Графы отдельных модулей графа Γ показаны на рис. 3, б (одинаковые обозначения ребер этих графов недопустимы).

Блочные группы подграфов запишем в виде

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$A_{1\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{3\alpha} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Подставляя блочные группы подграфов в выражение (а), для блочной группы 2A имеем

$${}^2A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 9 & 8 & 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, определитель матрицы проводимостей модуль-схемы равен

$$\Delta = \det A = y_1 y_2 y_4 y_5 y_8 (y_6 y_7 + y_6 y_9 + y_7 y_9 + y_3 y_7 + y_3 y_9) + \\ + y_1 y_4 y_5 y_6 y_8 (y_4 y_7 + y_4 y_9 + y_7 y_9 + y_2 y_7 + y_2 y_9) + \\ + y_1 y_5 y_7 y_8 y_9 (y_2 y_6 + y_3 y_4).$$

Если адмитансы соответствующих ветвей всех многополюсников равны друг другу, т. е.

$$y_1 = y_4 = y_7, \quad y_2 = y_5 = y_8, \quad y_3 = y_6 = y_9,$$

то определитель схемы будет иметь вид



$$\Delta = y_1 y_2^2 y_3 (3y_1^2 y_2 + 4y_1 y_2 y_3 + 2y_1^2 y_3 + 2y_1 y_3^2 + y_2 y_3^2).$$

Замечания. Можно заметить, что для данной схемы проще найти определитель матрицы контурных сопротивлений схемы, так как дополнительная блочная группа равна

$${}^2A^d = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \\ A_3^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b}^d & A_{1a}^d & A_1^d \\ A_{2a}^d & A_{2b}^d & A_{2a}^d \\ A_{3a}^d & A_{3b}^d & A_{3a}^d \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а дополнительные блочные группы отдельных подграфов

$$A_{1b}^d = 1, \quad A_{2a}^d = 1, \quad A_{3a}^d = 1, \\ A_{1b}^d = [2 \ 3], \quad A_{2a}^d = [4 \ 6], \quad A_{3a}^d = [7 \ 9].$$

Таким образом

$${}^2A^d = \begin{bmatrix} [2 \ 3] & [2 \ 3] & 1 \\ 1 & [4 \ 6] & [4 \ 6] \\ [7 \ 9] & 1 & [7 \ 9] \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} A^d = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 7 & 9 & 7 & 9 & 4 & 6 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\Delta^d = (z_2 + z_3) (z_7 + z_9 + z_4 + z_6) + (z_4 + z_6) (z_7 + z_9).$$

Если

$$z_1 = z_4 = z_7, \quad z_2 = z_5 = z_8, \quad z_3 = z_6 = z_9,$$

то

$$\Delta^d = (z_1 + z_3) (z_1 + 2z_2 + 3z_3).$$

Полученные результаты можно проверить с помощью формулы

$$\frac{\Delta}{\Delta^d} = y_1^3 y_2^3 y_3^3$$

либо

$$\Delta = \Delta^d y_1^3 y_2^3 y_3^3$$

Если структура модулей интереса не представляет, то необходимо рассчитать полную блочную группу модуль-графа схемы. С этой целью для ранее найденной блочной группы 2A [см. (а)] построим таблицу порядков

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как таблица не содержит одинаковых столбцов, то полная блочная группа равна

$$A = A_{1b} A_2 A_{3a} + A_{1b} A_{2a} A_3 + A_b A_{2a} A_{3a}$$

Введем следующие обозначения:



$\Delta_1 = \det A_1$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_1 ;

$\Delta_2 = \det A_2$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_2 ;

$\Delta_3 = \det A_3$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_3 ;

$\Delta_{1b} = \det A_{1b}$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_1 с закороченным путем b_1 (замкнутого на выходе);

$\Delta_{2a} = \det A_{2a}$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_2 с закороченным путем a_2 (короткое замыкание входа);

$\Delta_{3a} = \det A_{3a}$ — определитель матрицы проводимостей

многополюсника W_3 с закороченным путем a_3 (короткое замыкание входа).

При этом определитель матрицы проводимостей рассматриваемой модуль-схемы равен

$$\Delta = \Delta_{1b}\Delta_2\Delta_{3a} + \Delta_{1b}\Delta_{2a}\Delta_3 + \Delta_1\Delta_{2a}\Delta_{3a}. \quad (11)$$

Так как дополнительная блочная группа ${}^2A^d$ графа Γ [выражение (б)] строится аналогично блочной группы 2A [выражение (а)], то определитель матрицы сопротивлений модуль-схемы запишем в виде

$$\Delta^d = \Delta^d_{1b}\Delta^d_{2a}\Delta^d_{3a} + \Delta^d_{1b}\Delta^d_{2a}\Delta^d_3 + \Delta^d_1\Delta^d_{2a}\Delta^d_{3a}. \quad (12)$$

Пример 2. Рассчитать определитель Δ матрицы проводимостей модуль-схемы (рис. 4, а). Модуль-граф Γ этой схемы показан на рис. 4, б, а его скелет Γ_0 (сплошные линии) — на рис. 4, в.

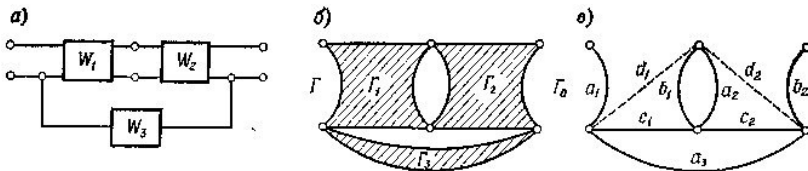


Рис. 4.



Расчет выполним без учета структуры отдельных многополюсников схемы.

Дополнительная блочная группа Δ^d_0 скелета Γ_0 равна

$$A_0^d = [b_1 \ a_2] [c_1 \ c_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & a_2 & a_2 & a_2 \\ c_1 & c_2 & a_3 & c_1 & c_2 & a_3 \end{bmatrix},$$

а блочная группа 2A графа Γ

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1bc} & A_{1b} & A_{1c} & A_{1b} & A_{1c} & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_{2c} & A_2 & A_{2a} & A_{2c} & A_{2a} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Таблица порядков \mathbf{P} имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

X X

В таблице имеются два одинаковых столбца (обозначенные внизу X), поэтому следует определить дефект суммы столбцов блочной группы

$${}^2A^I = A_3 \begin{bmatrix} A_{1bc} & A_{1c} \\ A_{2c} & A_{2a} \end{bmatrix}.$$

Для этого блоки Γ_1 и Γ_2 будем считать трехполюсниками (так как они инцидентны остальным модулям только в трех вершинах) и в скелете Γ_0 (рис. 4. в) добавим ребра d_1 и d_2 (пунктир). Ребра b_1, c_1 и d_1 образуют замещающий граф (полный) для модуля Γ_1 , а ребра a_2, c_2 и d_2 — замещающий граф (полный) для модуля Γ_2 . Следовательно,

$$A_{1b} = [c_{1(d)} \ d_{1(d)}], \quad A_{1c} = [b_{1(d)} \ d_{1(d)}],$$

$$A_{2a} = [c_{2(d)} \ d_{2(d)}], \quad A_{2c} = [a_{2(d)} \ d_{2(d)}]$$

и далее

$$\begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1c} \\ A_{2c} & A_{2a} \end{bmatrix}^s = A_{1b}A_{2c} + A_{1c}A_{2a} - 2 \begin{Bmatrix} d_{1(d)} \\ d_{2(d)} \end{Bmatrix}$$

где $A_{1b}^s = A_{1b}$, $A_{2c}^s = A_{2c}$ и т. д., а дендритные веса имеют вид

$$d_{1(d)} = \frac{1}{2}(A_{1b} + A_{1c} - A_{1d}),$$



$$d_{2(1)} = \frac{1}{2}(A_{2a} + A_{2c} - A_{2d}).$$

Подставив эти выражения в (а) и выполнив необходимые операции, получим

$$A = A_3(A_{1bc}A_2 + A_{1b}A_{2c} + A_{1c}A_{2a} + A_1A_{2ac}) + \\ + A_{3a}(A_{1b}A_2 + A_1A_{2a}) - \frac{1}{2}(A_{1b} + A_{1c} - A_{1d})(A_{2a} + A_{2c} - A_{2d}) +$$

Таким образом, определитель Δ матрицы проводимостей модуль-схемы (рис. 4, а) имеет вид

$$\Delta = \det \mathcal{A} = \Delta_3(\Delta_{1bc}\Delta_2 + \Delta_{1b}\Delta_{2c} + \Delta_{1c}\Delta_{2a} + \Delta_1\Delta_{2ac}) + \\ + \Delta_{3a}(\Delta_{1b}\Delta_2 + \Delta_1\Delta_{2a}) - \frac{1}{2}(\Delta_{1b} + \Delta_{1c} - \Delta_{1d})(\Delta_{2a} + \Delta_{2c} - \Delta_{2d}). \quad (13)$$

Смысл отдельных символов в выражении (13) показан на рис. 5, где представлены многополюсники W_1 , W_2 и W_3 рассматриваемой цепи при различных режимах на зажимах, а также даны символы определителей матрицы узловых проводимостей.

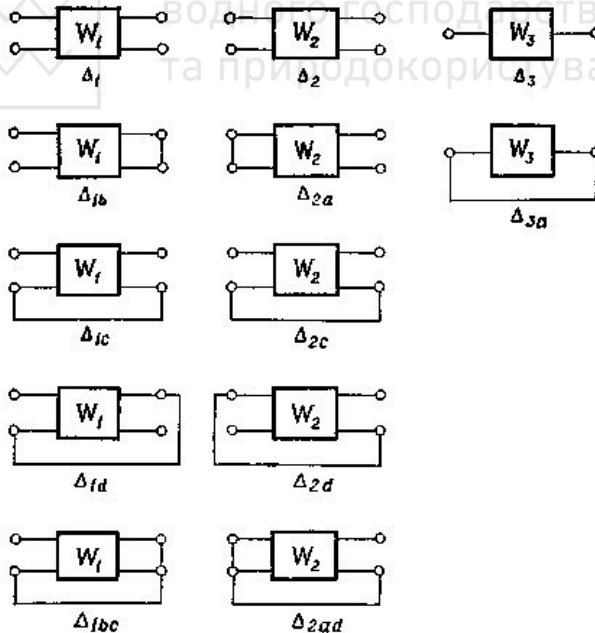


Рис. 5.



Для определителя матрицы контурных сопротивлений рассматриваемой модуль-схемы имеет место формула, аналогичная (13).

Замечания. Чтобы перейти от формулы

$$A_{ab} = \frac{1}{A} \left\{ A_a A_b - \frac{1}{4} (A_a + A_b - A_d)^2 \right\}$$

к (13), нужно исключить определители Δ_{1bc} и Δ_{2ac} .

9.3.3. Входной импеданс модуль-схемы

Для расчета импеданса $Z_{\mu_1\mu_2}$ или адмитанса $Y_{\mu_1\mu_2}$ между узлами μ_1 и μ_2 модуль-схемы применяем известную формулу

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta} = \frac{\det A_{\mu_1\mu_2}}{\det A} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}}, \quad (14)$$

где Δ — определитель матрицы узловых проводимостей модуль-схемы;

$\Delta_{\mu_1\mu_2}$ — определитель матрицы узловых проводимостей модуль-схемы с закороченными узлами μ_1 и μ_2 ;

$A \overset{e}{=} {}^2A$ — замещающая блочная группа для блочной группы второго ранга 2A модуль-графа рассматриваемой модуль-схемы;

$A_{\mu_1\mu_2} \overset{e}{=} {}^2A_{\mu_1\mu_2}$ — замещающая блочная группа для блочной группы второго ранга ${}^2A_{\mu_1\mu_2}$ модуль-графа с закороченными вершинами μ_1 и μ_2 . Как известно [формула (10)],

$$\det_Y {}^2A = \det_{\Delta_{ij} \in D} A, \quad A \overset{e}{=} {}^2A D = \{\Delta_{ij}\}, \quad \Delta_{ij} = \det_Y A_{ij}, \quad A_{ij} \overset{e}{=} A_{ij}.$$

а также

$$\det_Y A_{\mu_1\mu_2} = \det_D A_{\mu_1\mu_2}, \quad A_{\mu_1\mu_2} \overset{s}{=} {}^2A_{\mu_1\mu_2}$$

Поэтому формулу (14) можно записать в другом виде:



$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta} = \frac{\det A_{\mu_1\mu_2}}{\det A} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}}, \quad (15)$$

где

$$D = \{\Delta_{ij}\}, \quad \Delta_{ij} = \det A_{ij}, \quad A_{ij} = A_{ij}^e$$

Импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ или адмитанс $Y_{\mu_1\mu_2}$ можно также выразить с помощью определителей матрицы контурных сопротивлений модуль-схемы, т. е.

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\Delta^d}{\Delta_{\mu_1\mu_2}^d} = \frac{1}{Y_{\mu_1\mu_2}^d}. \quad (16)$$

Для определения входного импеданса модуль-схемы с помощью входных импедансов отдельных многополюсников перепишем выражение (14) в следующем виде:

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\prod_{i=1}^g \Delta_i} \right) : \left(\frac{\Delta}{\prod_{i=1}^g \Delta_i} \right), \quad (17)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_g$ — определители матриц проводимостей многополюсников W_1, W_2, \dots, W_g модуль-схемы.

Равенство (17) позволяет выразить импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ модуль-схемы через входные импедансы его отдельных многополюсников, не учитывая при этом их внутренней структуры. Следовательно, в этих многополюсниках могут встречаться элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, а также индуктивные связи.

При использовании формулы (17) следует учитывать, что

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{abcd\dots k}}{\Delta} &= \frac{\Delta_{abcd\dots k}}{\Delta_{bcd\dots k}} \frac{\Delta_{bcd\dots k}}{\Delta_{cd\dots k}} \frac{\Delta_{cd\dots k}}{\Delta_{d\dots k}} \dots \frac{\Delta_k}{\Delta} = \\ &= Z_{abcd\dots k} Z_{bcd\dots k} Z_{cd\dots k} \dots Z_k, \end{aligned} \quad (18)$$

(по этой формуле можно рассчитать определитель матрицы полных проводимостей электрической цепи. Если каждую ветвь этой цепи считать путем, то

$$\Delta_{abcd\dots k} = 1,$$

следовательно,

$$\Delta = Y_{abcd\dots k} Y_{bcd\dots k} Y_{cd\dots k} \dots Y_k$$



где, например, $Y_{abcd\dots k}$ — адмитанс цепи с замкнутыми путями b, c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути a .)

где Δ — определитель матрицы проводимостей электрической цепи; $\Delta_{abcd\dots fi}$ — определитель матрицы проводимостей цепи с замкнутыми путями a, b, c, d, \dots, k (короткое замыкание пути a означает замыкание конечных узлов пути a);

$Z_{ahcd\dots k}$ — импеданс электрической цепи с замкнутыми путями b, c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути a ;

$Z_{bcd\dots k}$ — импеданс электрической цепи с замкнутыми путями c, d, \dots, k , измеренный между конечными узлами пути b ;

Z_k — импеданс электрической цепи, измеренный между конечными узлами пути k .

Метод расчета импеданса $Z_{\mu_1\mu_2}$ модуль-схемы без учета внутренней структуры ее многополюсников иллюстрируют следующие примеры.

Пример 3. Рассчитать входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2} = Z_{a1}$ модуль-схемы (рис. 6, а), модуль-граф Γ которой показан на рис. 6, б, а скелет Γ_0 этого графа — на рис. 6, в.

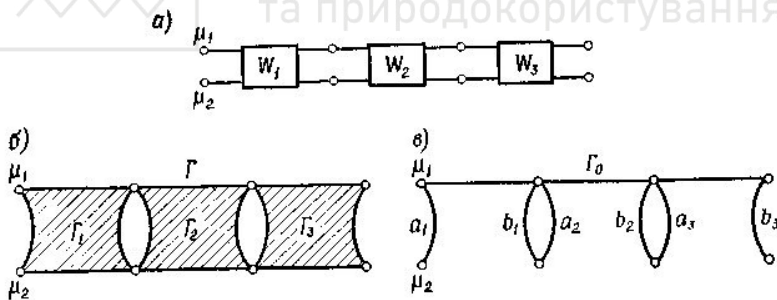


Рис. 6.

Дополнительная блочная группа A^d скелета Γ_0 равна

$$A_0^d = [b_1 \ a_2][b_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Блочная группа 2A графа Γ имеет вид



$${}^2A = [A_0^i] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}, \quad (a)$$

а блочная группа ${}^2A_{a_1}$ графа с замкнутым путем a_1 —

$${}^2A_1 = [a_1] \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}. \quad (б)$$

Таблицы порядков блочных групп 2A и ${}^2A_{a_1}$ запишем в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{a_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как никакая из этих таблиц не имеет повторяющихся столбцов, полные блочные группы A и A_{a_1} выражаются следующим образом:

$$A = A_{1b}(A_{2b}A_3 + A_2A_{3a}) + A_1(A_{2ab}A_3 + A_{2a}A_{3a}),$$

$$A_{a_1} = A_{1ab}(A_{2b}A_3 + A_2A_{3a}) + A_{1a}(A_{2ab}A_3 + A_{2a}A_{3a}).$$

Определители Δ и Δ_{a_1} матриц проводимостей модуль-схемы с неамкнутым и замкнутым путем a_1 соответственно равны

$$\Delta = \Delta_{1b}(\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_1(\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}),$$

$$\Delta_{a_1} = \Delta_{1ab}(\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_{1a}(\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}).$$

После деления этих определителей на произведение определителей матриц проводимостей всех многополюсников схемы получаем:

$$\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2b}\Delta_3}{\Delta_2\Delta_3} + \frac{\Delta_2}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) + \frac{\Delta_1}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2ab}}{\Delta_{2b}} \frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) =$$

$$= Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a},$$

$$\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} = \frac{\Delta_{1ab}}{\Delta_{1b}} \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_2}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) + \frac{\Delta_{1a}}{\Delta_1} \left(\frac{\Delta_{2ab}}{\Delta_{2b}} \frac{\Delta_{2b}}{\Delta_2} \frac{\Delta_3}{\Delta_3} + \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2} \frac{\Delta_{3a}}{\Delta_3} \right) =$$

$$= Z_{1ab}Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a}(Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a}).$$

Следовательно, входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ модуль-схемы (рис. 6, а) равен



$$Z_{\mu_1\mu_2} = \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_2}}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3} \right) = \\ = \frac{Z_{1ab}Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a}(Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a})}{Z_{1b}(Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2ab}Z_{2b} + Z_{2a}Z_{3a}}, \quad (19)$$

где Z_{1a} , Z_{2a} , Z_{3a} — входные импедансы четырехполюсников W_1 , W_2 , W_3 ;

Z_{1b} , Z_{2b} — выходные импедансы четырехполюсников W_1 , W_2 ;

Z_{1ab} , Z_{2ab} — входные импедансы четырехполюсников W_1 , W_2 с замкнутыми выходами.

Пример 4. Рассчитать входной импеданс $Z_{\mu_1\mu_2}$ схемы (рис. 7, а), модуль-граф Γ которой показан на рис. 6.7, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 6.7, в.

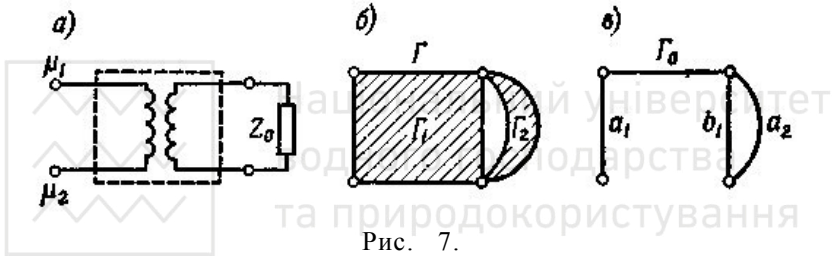


Рис. 7.

В этой схеме трансформатор рассматривается как четырехполюсник.

Дополнительная блочная группа A^d_0 скелета Γ_0 графа равна

$$A^d_0 = [b_1 a_2];$$

следовательно, блочную группу 2A графа Γ можно записать в виде

$${}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}$$

а блочную группу ${}^2A_{a_1}$ графа Γ_{a_1} с замкнутым путем a_1 в виде

$${}^2A_{a_1} = [a_1] \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}$$

Так как таблицы порядков обоих блочных групп не содержат повторяющихся столбцов, то

$$\Delta = \Delta_{1b}\Delta_2 + \Delta_1\Delta_{2a},$$



$$\Delta_{a1} = \Delta_{1ab}\Delta_2 + \Delta_{1a}\Delta_{2a},$$

откуда

$$Z_{\mu_1\mu_2} = \frac{\frac{\Delta_{1ab}}{\Delta_{1b}} \frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{1a}}{\Delta_1} \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2}}{\frac{\Delta_{1b}}{\Delta_1} + \frac{\Delta_{2a}}{\Delta_2}} = \frac{Z_{1ab}Z_{1b} + Z_{1a}Z_0}{Z_{1b} + Z_0}, \quad (20)$$

где Z_{1ab} , — входной импеданс трансформатора при коротком замыкании выхода;

Z_{1a} — входной импеданс трансформатора в режиме холостого хода;

Z_{1b} — выходной импеданс трансформатора в режиме холостого хода на входе;

Z_0 — импеданс нагрузки на выходе трансформатора.

Такой же результат можно получить, используя формулу (19), если принять, что $Z_{3a} \rightarrow \infty$, $Z_{2a} = Z_{2b} = Z_0$, $Z_{2ab} = 0$.

Пример 5. Рассчитать импеданс $Z_{\mu_1\mu_3}$ между полюсами μ_1 и μ_3 модуль-схемы (рис. 8, а), модуль-граф Γ которой показан на рис. 8, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 8, в (сплошные линии).

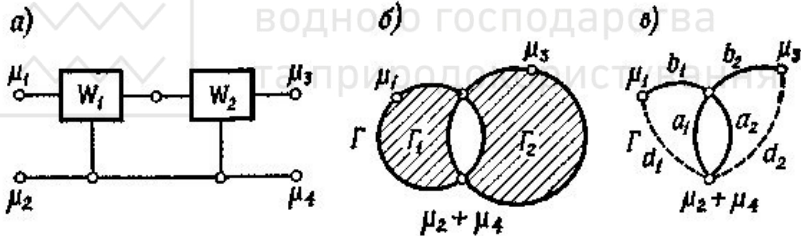


Рис. 8.

Блочная группа 2A графа Γ равна

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = [a_1 \ a_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}$$

Блочная группа ${}^2A_{\mu_1\mu_3}$ графа $\Gamma_{\mu_1\mu_3}$, образованного в результате замыкания узлов μ_1 и μ_3 графа Γ , имеет вид

$${}^2A_{\mu_1\mu_3} = [b_1 \ b_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1b} & A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} & A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix}$$



Таблица порядков блочной группы 2A не содержит повторяющихся столбцов, но таблица порядков блочной группы ${}^2A_{\mu_1\mu_3}$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$X \quad X$

имеет два одинаковых столбца (обозначенные X); поэтому дополняем скелет Γ_0 ребрами d_1 и d_2 (указаны на рис. 8, в пунктиром). В результате

$$\begin{aligned} A_{1b} &= [a_{1(1)} \quad d_{1(1)}], & A_{2b} &= [a_{2(1)} \quad d_{2(1)}], \\ A_{1a} &= [b_{1(1)} \quad d_{2(1)}], & A_{2a} &= [b_{2(1)} \quad d_{2(1)}]. \end{aligned}$$

Блочную группу запишем в виде

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2b} \end{bmatrix}^s = A_{1b}A_{2a} + A_{1a}A_{2b} - 2 \begin{Bmatrix} d_{1(1)} \\ d_{2(1)} \end{Bmatrix},$$



$$\begin{aligned} d_{1(1)} &= \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1d}), \\ d_{2(2)} &= \frac{1}{2}(A_{2a} + A_{2b} - A_{2d}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_{1a}\Delta_2 + \Delta_1\Delta_{2a}, \\ \Delta_{\mu_1\mu_3} &= \Delta_{1ab}\Delta_2 + \Delta_{1b}\Delta_{2a} + \Delta_{1a}\Delta_{2b} + \Delta_1\Delta_{2ab} - \\ &= \frac{1}{2}(\Delta_{1a} + \Delta_{1b} - \Delta_{1d})(\Delta_{2a} + \Delta_{2b} - \Delta_{2d}). \end{aligned}$$

Таким образом, импеданс схемы $Z_{\mu_1\mu_3}$

$$\begin{aligned} Z_{\mu_1\mu_3} &= \left(\frac{\Delta_{\mu_1\mu_3}}{\Delta_1\Delta_2} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1\Delta_2} \right) = \\ &= \frac{Z_{1ab}Z_{1b} + Z_{1b}Z_{2a} + Z_{1a}Z_{2b} + Z_{2ab}Z_{2b} - \frac{1}{2}(Z_{1a} + Z_{1b} - Z_{1d})(Z_{2a} + Z_{2b} - Z_{2d})}{Z_{1a} + Z_{2a}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначения отдельных импедансов трехполюсников W_1 и W_2 в выражении (21) указаны на рис. 9.

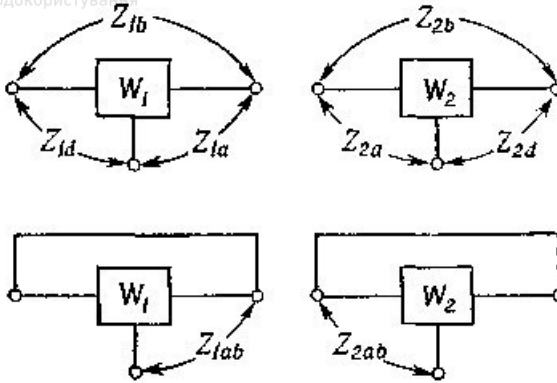


Рис. 9.

Пример 6. Рассчитать входной импеданс цепной схемы с бесконечно большим числом одинаковых четырехполюсников. Рассмотрим цепную схему с n -одинаковыми четырехполюсниками (рис. 10, а). Скелет Γ_0 модуль-графа Γ показан на рис. 10, б).

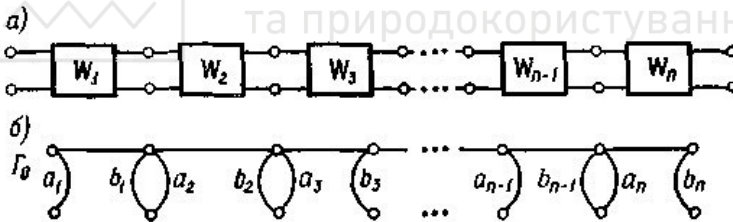


Рис. 10.

Обозначим $A^{(1)}$ — блочную группу первого модуля графа Γ , а A_{n-1} — блочную группу графа Γ без первого модуля. Блочная группа 2A_n полного графа равна

$${}^2A_n = [b_1 a_2] \downarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ A^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} a_2 \\ A_{b_1}^{(1)} & A^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Таблица порядков этой блочной группы второго ранга не содержит одинаковых столбцов; следовательно, определитель матрицы полных проводимостей Δ_n рассматриваемой схемы имеет вид

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} \Delta_b + \Delta_{n-1} a \Delta_a,$$



где Δ_{n-1} — определитель матрицы проводимостей цепной схемы с $n - 1$ одинаковыми четырехполюсниками; Δ_{n-1a} — определитель матрицы проводимостей схемы с $n - 1$ четырехполюсниками; Δ — определитель матрицы проводимостей каждого четырехполюсника схемы; Δ_b — определитель матрицы проводимостей каждого четырехполюсника с замкнутым выходом.

Если первый четырехполюсник схемы замкнут на входе, то из приведенного уравнения следует формула для определителя Δ_{na} матрицы проводимостей замкнутой на входе схемы с n модулями

$$\Delta_{na} = \Delta_{n-1}\Delta_{ab} + \Delta_{n-1a}\Delta_a.$$

Напишем входной импеданс Z_{na} схемы

$$Z_{na} = \frac{\Delta_{na}}{\Delta_n} = \frac{\frac{\Delta_{ab} + \frac{\Delta_{n-1a}}{\Delta_{n-1}} \frac{\Delta_a}{\Delta}}{\frac{\Delta_b}{\Delta} + \frac{\Delta_{n-1a}}{\Delta_{n-1}}}}{\frac{Z_{ab}Z_b + Z_{n-1a}Z_a}{Z_b + Z_{n-1a}}}, \quad (22)$$

где Z_a — входной импеданс четырехполюсника;

Z_b — выходной импеданс четырехполюсника;

Z_{ab} — входной импеданс замкнутого на выходе четырехполюсника;

Z_{n-1a} — входной импеданс цепной схемы $n - 1$ с одинаковыми модулями (четырёхполюсниками).

Для $n \rightarrow \infty$ $Z_{n-1a} = Z_{na}$ и, следовательно,

$$Z_{\infty a} = \frac{Z_{ab}Z_b + Z_{\infty a}Z_a}{Z_b + Z_{\infty a}}$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$Z_{\infty a} = \frac{1}{2} \{ Z_a - Z_b + [(Z_a - Z_b)^2 + 4Z_{ab}Z_b]^{1/2} \}. \quad (23)$$

9.3.4. Коэффициент передачи напряжения модуль-схемы

Рассмотрим четырехполюсник, питаемый от идеального источника напряжения E (рис. 11).

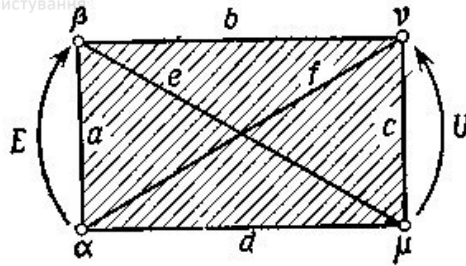


Рис. 11. Четырехполюсник, питаемый от идеального источника напряжения.

Здесь отрезки a, b, c, d, e, f представляют собой произвольные пути четырехполюсника, соединяющие отдельные пары его узлов, а соответствующие пути модуль-графа Γ четырехполюсника условимся обозначать аналогичным образом. Заметим, что идеальный источник напряжения E содержит узлы α и β четырехполюсника. Обозначим: A — блочная группа графа рассматриваемой схемы при коротком замыкании зажимов источника напряжения, Δ — детерминантная функция блочной группы A (равная определителю матрицы узловых проводимостей рассматриваемой схемы). На основании формулы Персиваля коэффициент передачи напряжения K_{ac} четырехполюсника равен

$$K_{ac} = \frac{U}{E} = \frac{Z_e + Z_f - Z_b - Z_d}{2Z_a} \quad (24)$$

где Z_a, Z_b, \dots, Z_f — импедансы четырехполюсника, измеренные между конечными узлами соответствующих путей. Подставив в выражение (24)

$$Z_a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad Z_b = \frac{\Delta_b}{\Delta},$$

где $\Delta_a = \det A_a = \det \partial A / \partial a$, $\Delta_b = \det A_b = \det \partial A / \partial b$ и т. д., получим у

$$K_{ac} = \frac{\Delta_e + \Delta_f - \Delta_b - \Delta_d}{2\Delta_a} \quad (25)$$

или



$$K_{ac} = \frac{\det(A_e + A_f) - \det(A_b + A_d)}{2 \det A_a}, \quad (26)$$

где $A_a = A_a$, $A_b = A_b$ и т. д.

Числитель выражения (26) содержит четыре блочные группы, которые можно поделить на $2^4 - 1$ частей x_1, x_2, \dots, x_{15} , составив таблицу.

Таблица 1

A_e	x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8				x_{12}		
A_f	x_1	x_2	x_3		x_5	x_6			x_9	x_{10}		x_{13}		
A_b	x_1	x_2		x_4	x_5		x_7		x_9					x_{14}
A_d	x_1		x_3	x_4	x_5			x_8		x_{10}				x_{15}
	x_1	0	0	0	0	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	0	0	0	0

На основании закона для циклов можем написать (см. рис. 11)

$$A_e + A_f + A_b + A_d = 0,$$

тогда

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$$

(это видно из нижней строки табл. 1). В соответствии с табл. 1 напомним

$$A_e + A_f - A_b - A_d = 2(x_6 - x_{11})$$

причем

$$x_6 = (A_e \cap A_f) - (A_e \cap A_f \cap A_b \cap A_d)$$

$$x_{11} = (A_b \cap A_d) - (A_e \cap A_f \cap A_b \cap A_d)$$

следовательно,

$$K_{ac} = \frac{\det(A_e \cap A_f) - \det(A_b \cap A_d)}{2 \det A_a} \quad (27)$$

Каждое из выражений (24) — (27) содержит пять разных величин, необходимых для расчета K_{ac} .

Каким образом уменьшить число этих величин?



При выводе формулы (27) было применено правило циклов для контура, состоящего из четырех путей: b, d, e, f . Теперь используем это правило для всех независимых контуров, состоящих из трех путей: (c, d, f) , (a, d, e) и (a, b, f) (рис. 11).

Имеем

$$A_c + A_d + A_f = 0, \quad (\text{а})$$

$$A_a + A_d + A_e = 0, \quad (\text{б})$$

$$A_a + A_b + A_f = 0. \quad (\text{в})$$

Для этих блочных групп A_a, A_c, A_d, A_f составим таблицу частей, аналогичную табл. 1.

Таблица 2

A_a	x_1	x_2	x_3	x_4		x_6	x_7	x_8				x_{12}			
A_c	x_1	x_2	x_3		x_5	x_6			x_9	x_{10}			x_{13}		
A_d	x_1	x_2		x_4	x_5		x_7	x_8	x_9		x_{11}			x_{14}	
A_f	x_1		x_3	x_4	x_5			x_8	x_9	x_{10}	x_{11}				x_{15}
	0	x_2	x_3	x_4	0	0	0	0	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	0	0	0

Используя уравнение (а), находим

$$x_1 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{13} = x_{14} = x_{15} = 0$$

(это показано в нижней строке табл. 2).

Из уравнения (б) следует, что

$$A_e = A_a + A_d = x_1 + x_9 + x_{11} + x_{12},$$

а из (в) —

$$A_b = A_a + A_f = x_2 + x_{10} + x_{11} + x_{12}.$$

В результате имеем

$$A_e + A_f = 2x_3 + x_4 + x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{12},$$

$$A_b + A_d = 2x_2 + x_4 + x_9 + x_{10} + 2x_{11} + x_{12},$$

поэтому

$$(A_e + A_f) - (A_b + A_d) = 2(x_3 - x_2)$$

Из табл. 2 вытекает



$$x_3 = (A_a \cap A_c \cap A_f)$$

$$x_2 = (A_a \cap A_c \cap A_d)$$

Таким образом,

$$(A_e + A_f) - (A_b + A_d) = 2\{(A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d)\}$$

Теперь можно написать следующую формулу для коэффициента передачи:

$$K_{ac} = \frac{\det(A_a \cap A_c \cap A_f) - \det(A_a \cap A_c \cap A_d)}{2 \det A_a}, \quad (28)$$

причем

$$A_a \cap A_c \cap A_f \cap A_d = 0. \quad (29)$$

Выражение (28) содержит четыре разные величины, т. е. на одну меньше, чем предыдущие формулы. Кроме того, согласно формуле (29), это выражение характерно тем, что обе функции в числителе не имеют общих слагаемых.

Числитель в выражении (28) назовем *функцией совпадения* и обозначим

$$\text{Sim}_Y \left(\frac{\partial A}{\partial a}, \frac{\partial A}{\partial c} \right) = \text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \det(A_a \cap A_c \cap A_f) - \det(A_a \cap A_c \cap A_d) \quad (30)$$

Легко показать, что

$$(A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d) = (A_a \cap A_c \cap A_e) - (A_a \cap A_c \cap A_d) \quad (31)$$

а также

$$A_a \cap A_c \cap A_e A_b = 0 \quad (32)$$

Поэтому можно написать другую формулу для функции совпадения:

$$\text{Sim}_Y(A_a, A_c) = \det(A_a \cap A_c \cap A_e) - \det(A_a \cap A_c \cap A_b) \quad (33)$$

Из табл. 2 получаем

$$A_a \cap A_c = x_2 + x_3 = (A_a \cap A_c \cap A_f) + (A_a \cap A_c \cap A_d) \quad (34)$$

Таким образом, блочная группа $A_a \cap A_c$ состоит из всех столбцов, входящих в выражение



$$(A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_c \cap A_d),$$

и не содержит других столбцов. Отсюда следует, что функцию совпадения можно также найти, рассчитав конъюнкцию

$$\frac{\partial A}{\partial a} \cap \frac{\partial A}{\partial c}$$

и определив знаки ее отдельных слагаемых.

Заметим, что столбцы блочной группы

$$\frac{\partial A}{\partial a} \cap \frac{\partial A}{\partial c}$$

представляют собой деревья, которые соединяют пары вершин ($\{\alpha, \mu\}$ и $\{\beta, \nu\}$) или ($\{\alpha, \nu\}$ и $\{\beta, \mu\}$) (упрощенно показано на рис. 12).

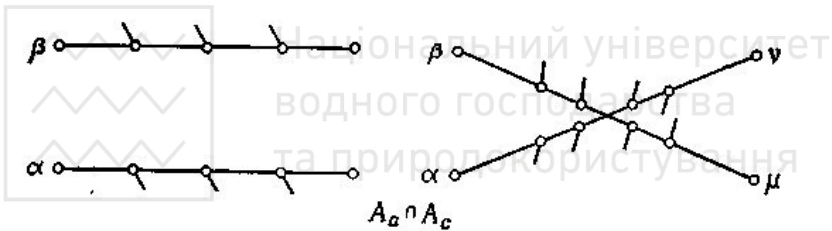


Рис. 12. Упрощенный рисунок 2-деревьев — изображений столбцов блочной группы $A_a \cap A_c$.

Столбцы блочной группы

$$A_a \cap A_c \cap A_f$$

представляют собой 2-деревья, соединяющие пары вершин $\{\alpha, \mu\}$ и $\{\beta, \mu\}$;

столбцы блочной группы

$$A_a \cap A_c \cap A_d$$

— 2-деревья, соединяющие пары вершин

$$\{\alpha, \nu\} \text{ и } \{\beta, \mu\}$$

(упрощенно показано на рис. 13).

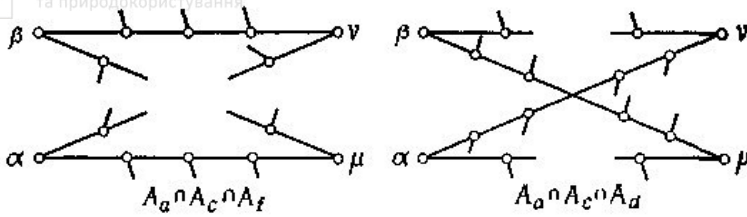


Рис. 13. Упрощенный рисунок 2-деревьев — изображений столбцов блочных групп, записанных под рисунком.

Рассматривая в графе Γ пути, соответствующие определенным столбцам блочной группы

$$\frac{\partial A}{\partial a} \cap \frac{\partial A}{\partial b},$$

можно определить знаки их детерминантных функций. Эти знаки зависят от направления напряжений E и U (рис. 11). Выражая коэффициент передачи четырехполюсника K_{ac} с помощью функции совпадения, получим

$$K_{ac} = \frac{\text{Sim}(A_a, A_c)}{\det A_a} \quad (35)$$

Для определения знаков детерминантных функций эта формула требует расчета только двух величин A_a и A_c и их конъюнкции. Сравнивая выражения (25) и (35), получаем

$$\text{Sim}(A_a, A_c) = \frac{\Delta_e + \Delta_f - \Delta_b - \Delta_d}{2} \quad (36)$$

Легко убедиться, что приведенные выше формулы для коэффициента передачи схемы также справедливы для дополнительных блочных групп A^d графа схемы, если положить

$$\Delta^d = \det A^d,$$

а также

$$\text{Sim}(A^d_a, A^d_c) = \det(A^d_a \cap A^d_c \cap A^d_f) - \det(A^d_a \cap A^d_c \cap A^d_d) \quad (37)$$

причем

$$A^d_a = [a] A^d \text{ и т. д.}$$

Заметим также, что



$$\text{Sim}(A_a, A_c) = \text{Sim}(A_c, A_a) \quad (38)$$

Для расчета коэффициента передачи напряжения модуль-схемы можно воспользоваться любой из формул, однако самая удобная из них — формула (35). Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 7. Рассчитать коэффициент передачи напряжения K_{12} (рис. 14, а), модуль-граф Γ которой показан на рис. 14, б, а скелет Γ_0 графа Γ (сплошные линии) — на рис. 14, в.

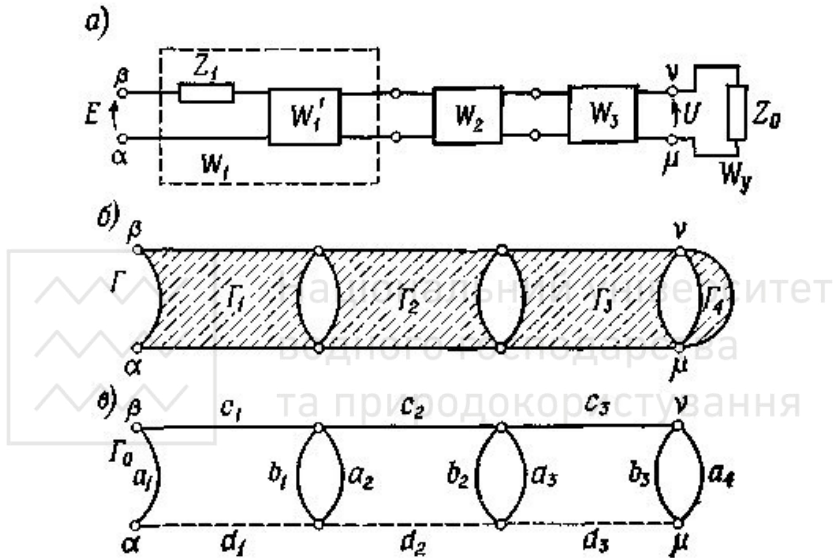


Рис. 14.

В этой схеме входной импеданс Z_1 включен в модуль (многополюсник) W_1 . Блочная группа 2A графа Γ равна

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 & b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \\ b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 & A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} & A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix}.$$



Чтобы рассчитать $K_{a_1 a_4} = K_{a_1 a_4}$ по формуле (25)

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\Delta_{\beta\mu} + \Delta_{\alpha\nu} - \Delta_{\beta\nu} - \Delta_{\alpha\mu}}{2\Delta_{\alpha\beta}},$$

необходимо вычислить блочные группы

$${}^2A_{\beta\mu} = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ a_4] \downarrow [{}^2A],$$

$${}^2A_{\alpha\nu} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ a_4] \downarrow [{}^2A],$$

$${}^2A_{\beta\nu} = [c_1 \ c_2 \ c_3] \downarrow [{}^2A],$$

$${}^2A_{\alpha\mu} = [d_1 \ d_2 \ d_3] \downarrow [{}^2A],$$

$$A_{\alpha\beta} = Aa_i = [a_1] \downarrow [{}^2A],$$

где d_1, d_2, d_3 — пути, показанные на рис. 14, v штриховыми линиями (можно также выбрать другие пути или использовать пути, представляемые ребрами скелета Γ_0), а потом преобразовать эти блочные группы в полные блочные группы.

Как видно, этот способ расчета передачи довольно сложен, поэтому $K_{a_1 a_4}$ рассчитаем с помощью функции совпадения по формуле (35)

$$K_{a_1 a_4} = \frac{\text{Sim}(A_{a_1}, A_{a_4})}{\det A_{a_1}}. \quad (a)$$

Рассчитаем конъюнкцию

$$\begin{aligned} A_{a_1} \cap A_{a_4} &\stackrel{e}{=} {}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = ([a_1] \downarrow [{}^2A]) \cap ([a_4] \downarrow [{}^2A]) = \\ &= \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} & A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \\ A_4 & A_4 & A_4 & A_4 & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix} \cap \\ &\cap \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3ab} \\ A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} & A_{4a} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для этого используем таблицы порядков обеих блочных групп. Очевидно, что конъюнкция будет ненулевой только для тех столбцов блочных групп, которые имеют одинаковые столбцы в таблицах порядков. Определим конъюнкцию таблиц порядков



$$P_{a1} \cap P'_{a1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которой следует

$$A_{a1} \cap A_{a4} \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3a} \\ A_{4a} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} A_{1b} \\ A_{2b} \\ A_{3b} \\ A_{4a} \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} (A_{1a} \cap A_{1b}) (A_{2a} \cap A_{2b}) (A_{3a} \cap A_{3b}) A_{4a}.$$

Так как это произведение не имеет дефекта произведения, то, согласно формуле (а) для K_{a1a4} рассматриваемой схемы, получаем

$$K_{a1a4} = \frac{\underset{Y}{\text{Sim}}(A_{1a}, A_{1b}) \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{2a}, A_{2b}) \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{3a}, A_{3b}) \underset{Y}{\det} A_{4a}}{\underset{Y}{\det} A_{a1}}. \quad (39)$$

Так как модуль Γ_4 графа Γ имеет две вершины, то детерминантная функция $\underset{Y}{\det} A_{4a}$ одновременно служит функцией совпадения двухполюсника нагрузки Z_0

$$\underset{Y}{\det} A_{4a} = \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{4a}, A_{4a})$$

Коэффициент передачи K_{a1a4} рассматриваемой схемы можно записать в виде

$$K_{a1a4} = \frac{\prod_{i=1}^4 \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{ia}, A_{ib})}{\underset{Y}{\det} A_{a1}}. \quad (40)$$

Эту формулу легко обобщить на случай цепной схемы с n -модулями

$$K_{a1bn} = \frac{\prod_{i=1}^n \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{ia}, A_{ib})}{\underset{Y}{\det} A_{a1}} \quad (41)$$

или

$$\underset{Y}{\text{Sim}}(A_{a1}, A_{bn}) = \prod_{i=1}^n \underset{Y}{\text{Sim}}(A_{ia}, A_{ib}) \quad (42)$$

Это означает, что функция совпадения цепной схемы с n -модулями равна произведению функций совпадения всех отдельных четырехполюсников схемы и двухполюсника



нагрузки. Выражения (41) и (42) справедливы и для дополнительных блочных групп A^d .

Пример 8. Рассчитать функцию совпадения цепной схемы (рис. 15, а), состоящей из четырех четырехполюсников, графы которых показаны на рис. 15, б).

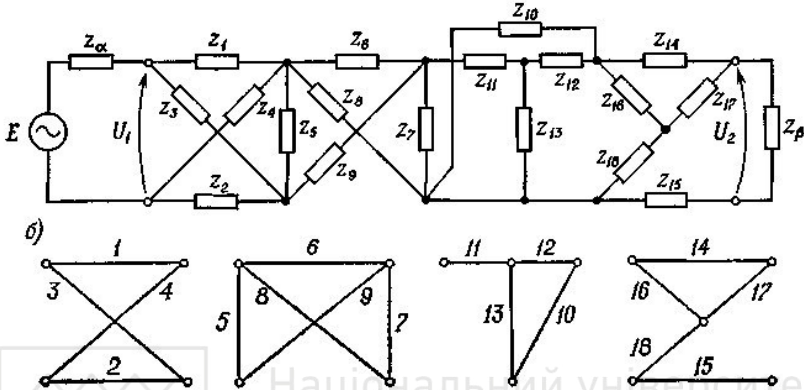


Рис. 15.

Рассчитаем функции совпадения отдельных четырехполюсников:

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = z_3 z_4 - z_1 z_2,$$

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 5 & 6 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \right) = -z_5 z_6 z_7,$$

$$\text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 11 & 11 & 10 & 12 & 10 \\ 13 & 12 & 11 & 13 & 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} \right) = z_{10} z_{13},$$

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Z \left(\begin{bmatrix} 14 & 16 & 14 & 17 & 16 \\ 16 & 17 & 18 & 18 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 & 15 & 16 & 16 & 15 & 17 \\ 15 & 17 & 18 & 16 & 17 & 18 & 17 & 18 \end{bmatrix} \right) = \\ = z_{16} z_{17} + z_{14} z_{18} + z_{17} z_{18} + z_{16} z_{18}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (42), функцию совпадения данной схемы запишем в виде

$$\text{Sim}_Z (A_{a1}^a, A_{b4}^d) = (z_1 z_2 - z_3 z_4) z_5 z_6 z_7 z_{10} z_{13} (z_{16} z_{17} + z_{14} z_{18} + z_{17} z_{18} + z_{16} z_{18}) z_{\beta}.$$

Пример 9. Рассчитать коэффициент передачи напряжения модуль-схемы (рис. 16, а).

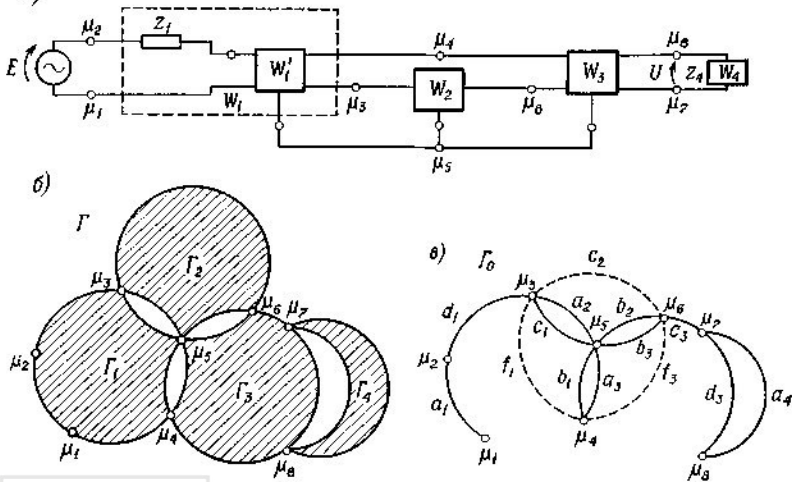


Рис. 16.

Для упрощения расчетов включим входной импеданс Z_1 в модуль (многополюсник) W_1 . Модуль-граф Γ этой схемы изображен на рис. 16, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 16, в (сплошные линии).

Дополнительная блочная группа A_0^d скелета Γ_0 равна

$$A_0^d = [c_1 a_2] [b_1 a_3] [b_2 b_3] [d_3 a_4] =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_2 & b_2 & b_1 & a_3 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & a_2 & b_2 & b_1 & a_3 & a_2 & a_3 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_2 & a_3 & b_2 & a_3 & b_3 & b_3 & b_3 & b_3 \\ d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & d_3 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & a_4 \end{bmatrix} \cdot (a)$$

Для упрощения записи на основе рассчитанной блочной группы A_0^d построим таблицу порядков блочной группы 2A графа Γ

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а также таблицы порядков блочных групп ${}^2A_{a1} = [a_1] \downarrow [{}^2A]$ и ${}^2A_{a4} = [a_4] \downarrow [{}^2A]$:



$$P_{a_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$X_5 \qquad \qquad X_5 \qquad X_1 \qquad X_2 \qquad X_3 \qquad X_1 \qquad X_4$

$$P_{a_4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X_1 \ X_4 \ X_2 \ \ X_3 \ \ X_4$

В таблицах P_{a_1} и P_{a_4} одинаковые столбцы обозначаем X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 . Эти столбцы заменим соответствующими столбцами блочных групп ${}^2A_{a_1}$ и ${}^2A_{a_4}$ и напомним конъюнкцию

$${}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \\ A_{4a} & A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_{2b} \\ A_{3d} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1b} \\ A_{2ab} \\ A_{3d} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) +$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} \\ A_2 \\ A_{3ab} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_2 \\ A_{3bd} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3ab} \\ A_{4a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1c} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3ad} & A_{3bd} \\ A_{4a} & A_{4a} \end{pmatrix} \right),$$

причем эта сумма не имеет дефекта.

Вынося A_{4a} за скобки, получаем

$${}^2A_{a_1} \cap {}^2A_{a_4} = A_{4a} \left\{ \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_{2b} \\ A_{3d} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1b} \\ A_{2ab} \\ A_{3d} \end{pmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\begin{pmatrix} A_{1ac} \\ A_2 \\ A_{3ab} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1bc} \\ A_2 \\ A_{3bd} \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} A_{1a} \\ A_{2a} \\ A_{3ab} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} A_{1c} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3ad} & A_{3bd} \end{pmatrix} \right) \right\}. \quad (B)$$

Заменим блочные группы второго ранга в этом выражении полными блочными группами. Все блочные группы второго ранга, кроме первой и последней, одностолбцовые, поэтому преобразуем их в полные блочные группы путем замены их блочных групп первого ранга полными блочными группами.

Блочная группа с двумя столбцами



$$\begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \end{bmatrix},$$

таблица порядков которого имеет одинаковые столбцы, заменим полной блочной группой, используя при этом замещающие графы модулей Γ_{1a} , Γ_2 , Γ_3 и соответственно дополняя скелет Γ_0 ребрами f_1 , c_2 и f_3 (пунктирные линии на рис. 16, в). Тогда

$$\begin{aligned} A_{1ac} &= [b_{1(2)} \ f_{1(2)}], \\ A_{1ab} &= [c_{1(2)} \ f_{1(2)}], \\ A_{2b} &= [a_{2(1)} \ c_{2(1)}], \\ A_{2a} &= [b_{2(1)} \ c_{2(1)}], \\ A_{3a} &= [b_{3(1)} \ f_{3(1)}], \\ A_{3b} &= [a_{3(1)} \ f_{3(1)}] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} \\ A_{3a} & A_{3b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [b_{1(2)}f_{1(2)}] & [c_{1(2)}f_{1(2)}] \\ [a_{2(1)}c_{2(1)}] & [b_{2(1)}c_{2(1)}] \\ [b_{3(1)}f_{3(1)}] & [a_{3(1)}f_{3(1)}] \end{bmatrix} = \\ &= A_{1ac}A_{2b}A_{3a} + A_{1ab}A_{2a}A_{3b} - 2 \begin{Bmatrix} f_{1(2)} \\ c_{2(1)} \\ f_{3(1)} \end{Bmatrix}. \quad (\Gamma) \end{aligned}$$

Отдельные дендритные веса равны

$$\left. \begin{aligned} f_{1(2)} &= \frac{1}{2} (A_{1ab} + A_{1ac} - A_{1af}), \\ c_{2(1)} &= \frac{1}{2} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}), \\ f_{3(1)} &= \frac{1}{2} (A_{3a} + A_{3b} - A_{3f}). \end{aligned} \right\} \quad (\Delta)$$

Аналогично другую блочную группу второго ранга с двумя столбцами в выражении (в) заменим полной блочной группой. После перехода к функциям совпадения и к детерминантным функциям получим

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Y(A_{a1}, A_{a4}) &= \det_Y A_{4a} \left\{ \text{Sim}_Y(A_{1ac}, A_{1bc}) \det_Y A_{2b} \text{Sim}_Y(A_{3a}, A_{3d}) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Sim}_Y(A_{1ab}, A_{1bc}) \text{Sim}_Y(A_{2a}, A_{2b}) \text{Sim}_Y(A_{3b}, A_{3d}) - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4} [\text{Sim}(A_{1ab}, A_{1bc}) + \text{Sim}(A_{1ac}, A_{1bc}) - \text{Sim}(A_{1af}, A_{1bc})] \times \\ & \times [\text{Sim}(A_{2a}, A_{2b}) + \det A_{2b} - \text{Sim}(A_{2c}, A_{2b})] \times \\ & \times [\text{Sim}(A_{3a}, A_{3d}) + \text{Sim}(A_{3b}, A_{3d}) - \text{Sim}(A_{3f}, A_{3d})] + \\ & + \text{Sim}(A_{1a}, A_{1b}) \det A_{2ab} \text{Sim}(A_{3a}, A_{3d}) + \\ & + \text{Sim}(A_{1ac}, A_{1bc}) \det A_2 \text{Sim}(A_{3ab}, A_{3bd}) + \\ & + \text{Sim}(A_{1a}, A_{1c}) \text{Sim}(A_{2a}, A_{2b}) \text{Sim}(A_{3ab}, A_{3ad}) + \\ & + \text{Sim}(A_{1a}, A_{1b}) \det A_{2a} \text{Sim}(A_{3ab}, A_{3bd}) - \\ & - \frac{1}{4} [\text{Sim}(A_{1a}A_{1b}) + \text{Sim}(A_{1a}, A_{1c}) - \text{Sim}(A_{1a}, A_{1f})] \times \\ & \times [\det A_{2a} + \text{Sim}(A_{2a}, A_{2b}) - \text{Sim}(A_{2a}, A_{2c})] \times \\ & \times [\text{Sim}(A_{3ab}, A_{3ad}) + \text{Sim}(A_{3ab}, A_{3bd}) - \text{Sim}(A_{3ab}, A_{3fd})] \} \cdot (e) \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой функцию совпадения модуль-схемы (рис. 16, *a*), выраженную через функции совпадения и детерминантные функции отдельных модулей схемы. Для наглядности на рис. 17 показаны схемы многополюсников для некоторых функций совпадения формулы (e).

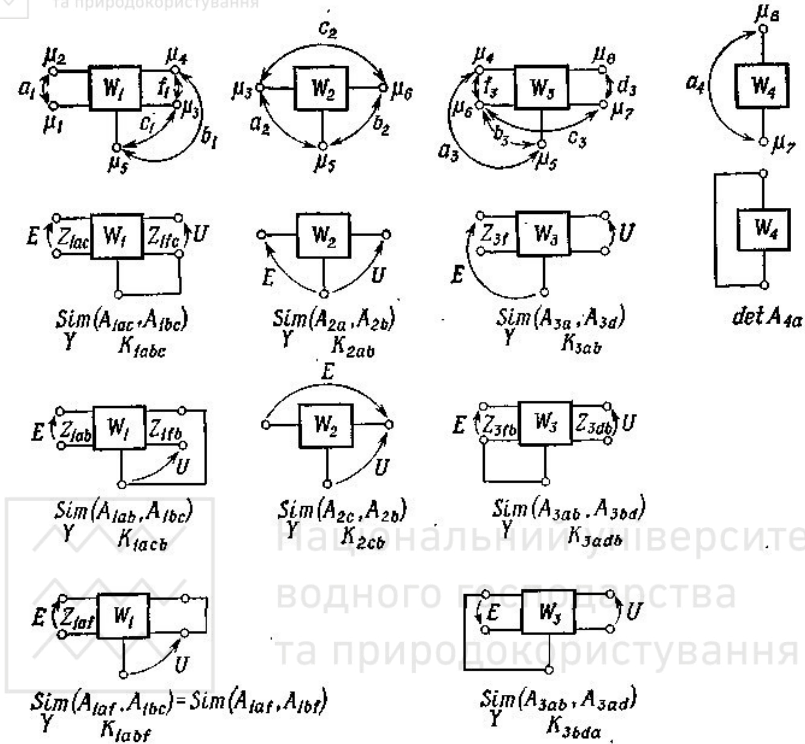


Рис. 17. Обозначения путей, функций совпадения, передаточных функций и входных импедансов многополюсников в различных стадиях замыкания.

Определяя их, нужно использовать обозначения путей, соединяющих отдельные вершины скелета Γ_0 (рис. 16, в). Заметим, что в этой формуле равны следующие слагаемые:

$$\text{Sim}(A_{1af}, A_{1bc})_Y = \text{Sim}(A_{1af}, A_{1bf})_Y$$

и

$$\text{Sim}(A_{3ab}, A_{3fd})_Y = \text{Sim}(A_{3af}, A_{3df})_Y$$

так как

$$A_{1bc} = A_{1bf} \quad \text{и} \quad A_{3ab} = A_{3af}$$

Для расчета коэффициента передачи K_{a1a4} рассматриваемой молуль-схемы необходимо определить полную блочную группу



A_{a_1} , модуль-графа G . Таблица порядков P_{a_1} [выражение (б)] этой блочной группы содержит два одинаковых столбца (X_j), которые в выражениях (г) и (д) заменены на полные блочные группы. Аналогично поступаем с другой парой одинаковых столбцов (X_5). Обозначив через Δ детерминантную функцию $\det A_Y$, можно записать следующее выражение для детерминантной функции блочной группы A_{a_1} :

$$\begin{aligned} \det A_{a_1} = & (\Delta_{1abc}\Delta_{2b}\Delta_{3d} + \Delta_{1ac}\Delta_{2b}\Delta_{3ad} + \Delta_{1ab}\Delta_{2ab}\Delta_{3d} + \Delta_{1a}\Delta_{2ab}\Delta_{3ad} + \\ & + \Delta_{1abc}\Delta_2\Delta_{3bd} + \Delta_{1ac}\Delta_2\Delta_{3abd} + \Delta_{1ab}\Delta_{2a}\Delta_{3bd} + \Delta_{1a}\Delta_{2a}\Delta_{3abd}) \Delta_4 + \\ & + (\Delta_{1abc}\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_{1ac}\Delta_{2b}\Delta_{3a} + \Delta_{1ab}\Delta_{2ab}\Delta_3 + \Delta_{1a}\Delta_{2ab}\Delta_{3a} + \\ & + \Delta_{1abc}\Delta_2\Delta_{3b} + \Delta_{1ac}\Delta_2\Delta_{3ab} + \Delta_{1ab}\Delta_{2a}\Delta_{3b} + \Delta_{1a}\Delta_{2a}\Delta_{3ab}) \Delta_{4a} - \\ & - \frac{1}{4} \{(\Delta_{1ab} + \Delta_{1ac} - \Delta_{1af})(\Delta_{2a} + \Delta_{2b} - \Delta_{2c})[\Delta_4(\Delta_{3ad} + \\ & + \Delta_{3bd} - \Delta_{3df}) + \Delta_{4a}(\Delta_{3a} + \Delta_{3b} - \Delta_{3f})]\}. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

Коэффициент передачи $K_{a_1a_4}$ рассматриваемой модуль-схемы получаем, поделив выражение (е) для функции совпадения схемы на выражение (ж) для детерминантной функции схемы

$$K_{a_1a_4} = \frac{\text{Sim}(A_{a_1}, A_{a_4})}{\det A_{a_1}}.$$

Поделив в последнем равенстве числитель и знаменатель на произведение

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 = \det A_1 \det A_2 \det A_3 \det A_4,$$

найдем коэффициент передачи напряжения $K_{a_1a_4}$ рассматриваемой модуль-схемы, выраженный через коэффициенты передачи напряжения и входные импедансы отдельных многополюсников схемы. Числитель коэффициента передачи будет иметь вид



$$\begin{aligned}
 & Z_{4a} \left\{ K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} K_{3ad} Z_{3a} + K_{1acb} Z_{1ab} Z_{1b} K_{2ab} Z_{2a} K_{3bd} Z_{3b} - \right. \\
 & - \frac{1}{4} (K_{1acb} Z_{1ab} Z_{1b} + K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} - K_{1abf} Z_{1af} Z_{1f}) \times \\
 & \times (K_{2ab} Z_{2a} + Z_{2b} - K_{2cb} Z_{2c}) (K_{3ad} Z_{3a} + K_{3bd} Z_{3b} - K_{3fd} Z_{3f}) + \\
 & + K_{1a1} Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} K_{3ad} Z_{3a} + K_{1abc} Z_{1ac} Z_{1c} K_{3adb} Z_{3ab} Z_{3b} + \\
 & + K_{1ac} Z_{1a} K_{2ab} Z_{2a} K_{3bda} Z_{3ba} Z_{3a} + K_{1ab} Z_{1a} Z_{2a} K_{3abd} Z_{3ab} Z_{3b} - \\
 & - \frac{1}{4} (K_{1ab} Z_{1a} + K_{1ac} Z_{1a} - K_{1af} Z_{1a}) (Z_{2a} + K_{2ab} Z_{2a} - K_{2ac} Z_{2a}) \times \\
 & \left. \times (K_{3bda} Z_{3ba} Z_{3a} + K_{3adb} Z_{3ad} Z_{3d} - K_{3adf} Z_{3af} Z_{3f}) \right\},
 \end{aligned}$$

а знаменатель

$$\begin{aligned}
 & Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3d} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2ab} Z_{2c} Z_{3d} + \\
 & + Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{3bd} Z_{3d} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{3abd} Z_{3bd} Z_{3d} + \\
 & + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2a} Z_{3bd} Z_{3d} + Z_{1a} Z_{2a} Z_{3abd} Z_{3bd} Z_{3d} + \\
 & + (Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{2b} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{2b} Z_{3a} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2ab} Z_{2b} + Z_{1a} Z_{2ab} Z_{2b} Z_{3a} + \\
 & + Z_{1abc} Z_{1bc} Z_{1c} Z_{3b} + Z_{1ac} Z_{1c} Z_{3ab} Z_{3b} + Z_{1ab} Z_{1b} Z_{2a} Z_{3b} + Z_{1a} Z_{2a} Z_{3ab} Z_{3b}) Z_{4a} - \\
 & - \frac{1}{4} (Z_{1ab} Z_{1b} + Z_{1ac} Z_{1c} - Z_{1af} Z_{1f}) (Z_{2a} + Z_{2b} - Z_{2c}) \times \\
 & \times [Z_{3ad} Z_{3d} + Z_{3bd} Z_{3d} - Z_{3df} Z_{3f} + Z_{4a} (Z_{3a} + Z_{3b} - Z_{3f})].
 \end{aligned}$$

В этих выражениях использованы обозначения:

K_{1abc} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_1 между путями a_1 и b_1 с замкнутым путем c_1 ;

K_{3ad} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_3 между путями a_3 и d_3 ;

K_{1acb} — коэффициент передачи напряжения многополюсника W_1 между путями a_1 и c_1 с замкнутым путем b_1 ;

.....
 Z_{1abc} — импеданс многополюсника W_1 с замкнутыми путями b_1 и c_1 , измеренный относительно пути a_1 ;

Z_{1ac} — импеданс многополюсника W_1 с замкнутым путем c_1 , измеренный относительно пути a_1 ;

Z_{3b} — импеданс многополюсника W_3 , измеренный относительно пути b_3 ;

Некоторые из этих обозначений поясняет рис. 17.

Последний пример иллюстрировал способ определения коэффициента передачи напряжения модуль-схемы через внешние



параметры отдельных многополюсников, не учитывая при этом их внутренней структуры.

Представим теперь второй способ определения коэффициента передачи напряжения модуль-схемы, который во многих практических случаях может быть более удобным, чем предыдущий.

В общем случае адмитанс $Y_{\alpha\beta}$ и импеданс $Z_{\alpha\beta}$ линейной модуль-схемы можно выразить через адмитанс y_k и импеданс z_k ветви k

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{a'y_k + b'}{c'y_k + d'}$$

$$Z_{\alpha\beta} = \frac{a''z_k + b''}{c''z_k + d''}$$

где a' , b' , c' , d' , a'' , b'' , c'' , d'' — величины, не зависящие от y_k и z_k . Применяя теорему Эйлера для однородных функций, последние выражения можно записать в виде

$$Y_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^g \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} y_k, \quad (43)$$

$$Z_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^g \frac{\partial Z_{\alpha\beta}}{\partial z_k} z_k, \quad (44)$$

где g — число ветвей цепи.

Составляя баланс мощности для пассивной цепи, питаемой от идеального источника напряжения $E_{\alpha\beta}$, и пользуясь формулой (43), получим

$$E_{\alpha\beta}^2 \sum_{k=1}^g \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} y_k = \sum_{k=1}^g U_k^2 y_k,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^g \left(E_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k} - U_k^2 \right) y_k = 0,$$

где U_k — напряжение ветви k , $Y_{\alpha\beta}$ — входной адмитанс цепи.

Чтобы это уравнение было справедливо при произвольных величинах y_k , необходимо выполнение равенства

$$\frac{U_k}{E_{\alpha\beta}} = \pm \sqrt{\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial y_k}}. \quad (45)$$

Эту формулу можно также применять для пары узлов $\{\mu, \nu\}$, не соединенных ветвью k , так как всегда можно предположить, что такая ветвь имеет адмитанс $y_k = 0$.



Обозначим через a и c произвольные пути между парами вершин $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\mu, \nu\}$ графа Γ электрической цепи (рис. 18).

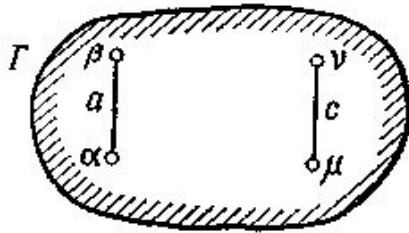


Рис. 18. Модуль-граф четырехполюсника с обозначенными входными и выходными путями.

Если A — полная блочная группа графа Γ , то на основании формулы (45) напишем

$$K_{ac} = \frac{U_c}{E_a} = \pm \left\{ \det_Y \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{A}{\partial A / \partial a} \right) \right\}^{1/2} = \frac{\left\{ \det_Y \left(\frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial c} \right) - \det_Y \left(A \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c} \right) \right\}^{1/2}}{\det_Y \frac{\partial A}{\partial a}}. \quad (46)$$

Применив операцию перемещения нижних индексов, эту формулу приведем к виду

$$K_{ac} = \pm \frac{\left\{ \det_Y (A_a A_c) - \det_Y (A A_{ac}) \right\}^{1/2}}{\det_Y A_a}. \quad (47)$$

Сравнивая ее с формулами (27) или (28), заметим, что выражение под корнем

$$\sqrt{A_a A_c - A_c A_{ac}}$$

равно квадрату разности двух полных блочных групп. Необходимым условием существования геометрического

изображения блочной группы $A = A$ будет условие существования действительного корня. Кроме того, из соотношения



$$\begin{aligned} A_a A_c - A_c A_{ac} &= \frac{1}{4} (A_c + A_f - A_b - A_d)^2 = \\ &= \{(A_c \cap A_f) - (A_b \cap A_d)\}^2 = \\ &= \{(A_a \cap A_c \cap A_f) - (A_a \cap A_d)\}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

следуют формулы перехода.

Выражения (47) можно также записать в виде

$$K_{ac} = \pm \frac{(\Delta_a \Delta_c - \Delta \Delta_{ac})^{\frac{1}{2}}}{\Delta_a} \quad (49)$$

где

$$\Delta = \det_Y A, \Delta_a = \det_Y \frac{\partial A}{\partial a}, \Delta_c = \det_Y \frac{\partial A}{\partial c},$$

$$\Delta_{ac} = \det_Y \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial c}, A^s = A$$

После элементарных преобразований формула (49) примет вид

$$K_{ac} = \pm \left(\frac{Z_c - Z_{ca}}{Z_a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

где Z_a — входной импеданс цепи, Z_c — выходной импеданс цепи, Z_{ca} — выходной импеданс цепи с замкнутым входом. Из формул (49) и (50) невозможно определить знак коэффициента передачи K_{ac} . На практике знак K_{ac} не всегда представляет интерес, или в противном случае его можно определить, например, путем рассмотрения одного 2-дерева в графе Γ , которое служит изображением столбца одной из двух блочных групп, полученных в результате вычисления выражения

$$\sqrt{A_a A_c - A_c A_{ac}}$$

Из сравнения формул (46), (47), (49), (50) следует, что практически самой удобной является формула (50), которая при анализе модуль-схем позволяет рассчитать K_{ac} без рассмотрения структуры отдельных модулей.

Покажем это на примере.

Пример 10. Рассчитать коэффициент передачи K_{a1b3} модуль-схемы (рис. 19, а), причем входной импеданс и импеданс нагрузки этой схемы включены в многополюсники W_1 и W_3 .

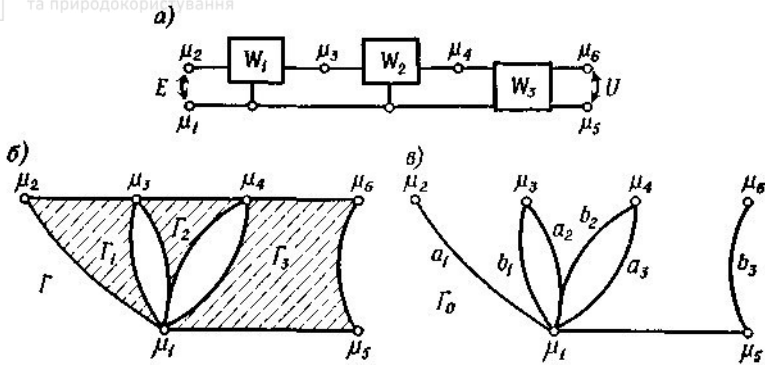


Рис. 19.

Модуль-граф этой схемы изображен на рис. 19, б, а его скелет Γ_0 — на рис. 19, в.

Блочная группа 2A графа Γ равна

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & a_2 & a_2 \\ b_2 & a_3 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1b} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2b} & A_2 & A_{2a} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

а таблица порядков блочной группы

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не содержит одинаковых столбцов. Поэтому можно непосредственно записать выражение для детерминантной функции Δ рассматриваемой модуль-схемы

$$\Delta = \Delta_{1b} (\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_1 (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}),$$

а затем и выражения для детерминантных функций Δ_{a_1} и Δ_{b_3} схемы, замкнутой на входе и выходе:

$$\Delta_{a_1} = \Delta_{1ab} (\Delta_{2b}\Delta_3 + \Delta_2\Delta_{3a}) + \Delta_{1a} (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a}\Delta_{3a}),$$

$$\Delta_{b_3} = \Delta_{1ab} (\Delta_{2b}\Delta_{3b} + \Delta_2\Delta_{3ab}) + \Delta_{1a} (\Delta_{2ab} \Delta_{3b} + \Delta_{2a}\Delta_{3ab}).$$

Рассчитаем теперь импедансы $Z_{b_3}, Z_{b_3a_1}, Z_{a_1}$:



$$Z_{b_3} = \left(\frac{\Delta_{b_3}}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) = \frac{Z_{1b} Z_{3b} (Z_{2b} + Z_{3ab}) + Z_{2a} Z_{3b} (Z_{2ba} + Z_{3ab})}{Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})},$$

$$Z_{b_3 a_1} = \frac{Z_{1ba} Z_{3b} (Z_{2b} + Z_{3ab}) + Z_{2a} Z_{3b} (Z_{2ba} + Z_{3ab})}{Z_{1ba} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})},$$

$$Z_{a_1} = \left(\frac{\Delta_{a_1}}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) : \left(\frac{\Delta}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \right) = \frac{Z_{1ab} Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a} Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}{Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}.$$

Подставив рассчитанные выражения в формулу для коэффициента передачи схемы

$$K_{a_1 b_3} = \pm \left(\frac{Z_{b_3} - Z_{b_3 a_1}}{Z_{a_1}} \right)^{1/2},$$

получим коэффициент передачи рассматриваемой модуль-схемы, выраженный через импедансы многополюсников этой схемы в разных режимах короткого замыкания.

Заметим, что модуль-схема в этом примере представляет собой цепную схему, поэтому расчет коэффициента передачи можно упростить, используя при этом формулу (41), причем

$$\text{Sim} (A_{ia}, A_{ib}) = \pm (\Delta_{ia} \Delta_{ib} - \Delta_i \Delta_{iab})^{1/2},$$

откуда

$$K_{a_1 b_3} = \frac{\pm \{ (\Delta_{1a} \Delta_{1b} - \Delta_1 \Delta_{1ab}) (\Delta_{2a} \Delta_{2b} - \Delta_2 \Delta_{2ab}) (\Delta_{3a} \Delta_{3b} - \Delta_3 \Delta_{3ab}) \}^{1/2}}{\Delta_{1ab} (\Delta_{2b} \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_{3a}) + \Delta_{1a} (\Delta_{2ab} \Delta_3 + \Delta_{2a} \Delta_{3a})}.$$

Поделив числитель и знаменатель на произведение детерминантных функций $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ многополюсников схемы, получаем следующее выражение:

$$K_{a_1 b_3} = \frac{\pm [Z_{1a} (Z_{1b} - Z_{1ba}) Z_{2a} (Z_{2b} - Z_{2ba}) Z_{3a} (Z_{3b} - Z_{3ba})]^{1/2}}{Z_{1ab} Z_{1b} (Z_{2b} + Z_{3a}) + Z_{1a} Z_{2a} (Z_{2ba} + Z_{3a})}.$$

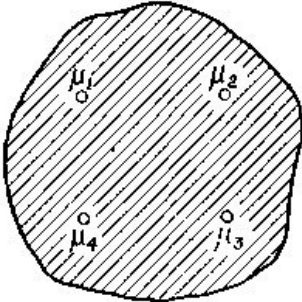
9.3.5. Схемы замещения

На практике часто используются схемы замещения, которые имеют такие же электрические свойства, что и исходные схемы. Рассматривать схемы замещения весьма полезно при анализе модуль-схем, схем с индуктивными связями, с распределенными параметрами, а также с полупроводниковыми приборами. Рассмотрим *метод расчета схем замещения*. Если в исходной схеме (рис. 20, а) имеется v_z узлов, то схемой замещения будем



называть цепь в виде полного многоугольника с v_z узлами и $\frac{v_z(v_z-1)}{2}$ ветвями (рис. 20, б).

а)



б)

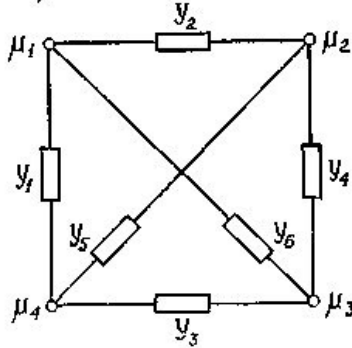


Рис. 20.

Пусть обозначения ребер графа схемы замещения одновременно будут соответствовать путям графа исходной схемы. Заметим, что граф схемы замещения представляет собой замещающий (полный) граф Γ_z графа Γ исходной схемы.

Допустим, что детерминантные функции графа A исходной схемы и графа A_z схемы замещения равны, т. е.

$$\det A = \det A_z \quad (51)$$

Для выполнения этого равенства необходимо, чтобы адмитанс y_k ветви α_k схемы замещения удовлетворял следующему соотношению:

$$y_k = \frac{\det A_k}{\det A_{k\alpha}} = \frac{\det a_{k(v_z-2)}}{\det \frac{\partial A}{\partial D}}, \quad (52)$$

где A_k — блочная группа двухполюсного модуля Γ_k в модуль-графе Γ^*_z , эквивалентном графу Γ ;

a_k — обозначение ребра замещающего графа Γ_z соответствующей ветви α_k схемы замещения;

$A_{k\alpha} = \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k}$; $a_{k(v_z-1)}$ — дендритный вес ребра α_k замещающего

графа F_z ;



D — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех v_z выделенных вершин графа Γ .

Дендритный вес $a_{k(v_z-2)}$ ребра α_k замещающего графа T_z рассчитаем по формулам, приведенным ранее:

$$a_{k(v_z-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}} + \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}} - \frac{\partial A}{\partial (D^{\mu_{1k}\mu_{2k}}[\alpha_k])} \right) \quad (53)$$

или

$$a_{k(v_z-2)} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}} \cap \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}}, \quad (54)$$

где $\overset{s}{A} = A$ — блочная группа графа Γ исходной схемы;

$D^{\mu_{1k}}$ — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершины μ_{1k} , инцидентной ребру α_k ;

$D^{\mu_{2k}}$ — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершины μ_{2k} , инцидентной ребру α_k ;

$D^{\mu_{1k}\mu_{2k}}$ — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех выделенных вершин графа Γ , кроме вершин μ_{1k} и μ_{2k} , инцидентных ребру α_k . Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu_{1k}} &= \det_Y \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}}, \\ \Delta^{\mu_{2k}} &= \det_Y \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}}, \\ \Delta^{\mu_{1k}\mu_{2k}} &= \det_Y \frac{\partial A}{\partial (D^{\mu_{1k}\mu_{2k}}[\alpha_k])}, \\ \Delta' &= \det_Y \frac{\partial A}{\partial D}, \end{aligned} \quad (55)$$

где $\Delta^{\mu_{1k}}$ ($\Delta^{\mu_{2k}}$) — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей (узловых) исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{1k} (μ_{2k}), принадлежащего ветви α_k ;



$\Delta_{\alpha_k}^{\mu_{1k} \mu_{2k}}$ — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей (узловых) исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узлов μ_{1k} и μ_{2k} , которые в свою очередь замкнуты друг с другом;

Δ' — детерминантная функция, равная определителю матрицы проводимостей исходной схемы при коротком замыкании всех v_z выделенных узлов.

Теперь можно записать равенство

$$y_k = \frac{\Delta^{\mu_{1k}} + \Delta^{\mu_{2k}} - \Delta^{\mu_{1k} \mu_{2k}}}{2\Delta'} \quad (56)$$

откуда после преобразований получаем

$$y_k = \frac{1}{2} (Y_{\alpha_k}^{\mu_{1k}} + Y_{\alpha_k}^{\mu_{2k}} - Y_{\alpha_{k+1}\alpha_k}^{\mu_{1k}\mu_{2k}}),$$

где $Y_{\alpha_k}^{\mu_{1k}}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{1k} , измеренный относительно пути α_k (т. е. между узлом μ_{1k} и общим узлом);

$Y_{\alpha_k}^{\mu_{2k}}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме узла μ_{2k} , измеренный относительно пути α_k ;

$Y_{\alpha_{k+1}\alpha_k}^{\mu_{1k}\mu_{2k}}$ — адмитанс исходной схемы при коротком замыкании всех выделенных узлов, кроме замкнутых друг с другом узлов μ_{1k} и μ_{2k} , измеренный относительно пути α_{k+1} или α_{k-1} (т. е. между узлом $\mu_{1k} + \mu_{2k}$ и общим узлом).

Адмитанс y_k ветви α_k графа замещения Γ_z , выраженный в виде конъюнкции (54), рассчитаем по формуле

$$y_k = \frac{\det \left(\frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{1k}}} \parallel \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_{2k}}} \right)}{\det \frac{\partial A}{\partial D}}. \quad (58)$$

Описанный способ расчета адмитанса ветви схемы замещения иллюстрируют следующие примеры.



Пример 11. Для схемы рис. 21, а построить схему замещения с тремя узлами, показанную на рис. 21, б, и рассчитать адмитансы ветвей схемы замещения.

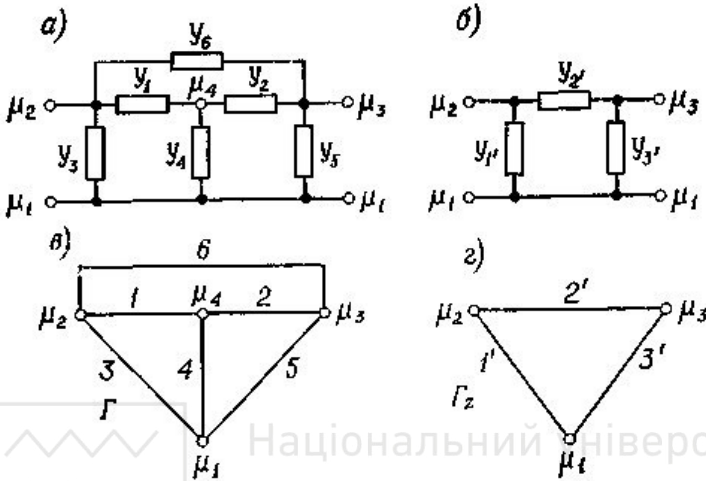


Рис. 21.

Графы обеих схем изображены на рис. 21, в и г. Для расчетов используем формулу (58).

Блочная группа графа Γ исходной схемы равна

$$A = [1 \ 3 \ 6] [2 \ 5 \ 6] [3 \ 4 \ 5].$$

Для определения адмитанса $y_{1'}$ рассчитаем конъюнкцию

$$\begin{aligned} (A_{2'} \cap A_{3'}) &= (A_6 \cap A_5) = \left(\frac{\partial}{\partial 6} \frac{\delta A}{\delta 5} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 5} \frac{\delta A}{\delta 6} \right) = \\ &= ([1 \ 2 \ 3] [3 \ 4]) \cap ([1 \ 3] [2 \ 3 \ 4]) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \\ A_{2'3'} &= A_{65} = \frac{\partial^2 A}{\partial 6 \partial 5} = [1 \ 2 \ 4], \end{aligned}$$

следовательно.

$$y_{1'} = \frac{\det(A_{2'} \cap A_{3'})}{\det A_{2'3'}} = \frac{y_1(y_3 + y_4) + y_3(y_2 + y_4)}{y_1 + y_2 + y_4}.$$

Для расчета адмитанса $y_{2'}$ рассчитаем конъюнкцию



$$\begin{aligned}
 (A_1 \cap A_3)' &= (A_3 \cap A_5) = \left(\frac{\partial}{\partial 3} \frac{\delta A}{\delta 5} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial 5} \frac{\delta A}{\delta 3} \right) = \\
 &= ([1 \ 4 \ 6] [2 \ 6]) \cap ([2 \ 4 \ 6] [1 \ 6]) = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_{2'} = \frac{y_1(y_2 + y_6) + y_6(y_2 + y_4)}{y_1 + y_2 + y_4}$$

Аналогично рассчитаем $y_{3'}$

$$y_{3'} = \frac{y_4(y_2 + y_5) + y_5(y_1 + y_3)}{y_1 + y_2 + y_4}$$

Пример 12. Для модуль-схемы (рис. 22, а) построить схему замещения с тремя узлами, показанную на рис. 22, б, рассчитать адмитансы ветвей этой схемы замещения, построить схемы замещения отдельных модулей исходной схемы.

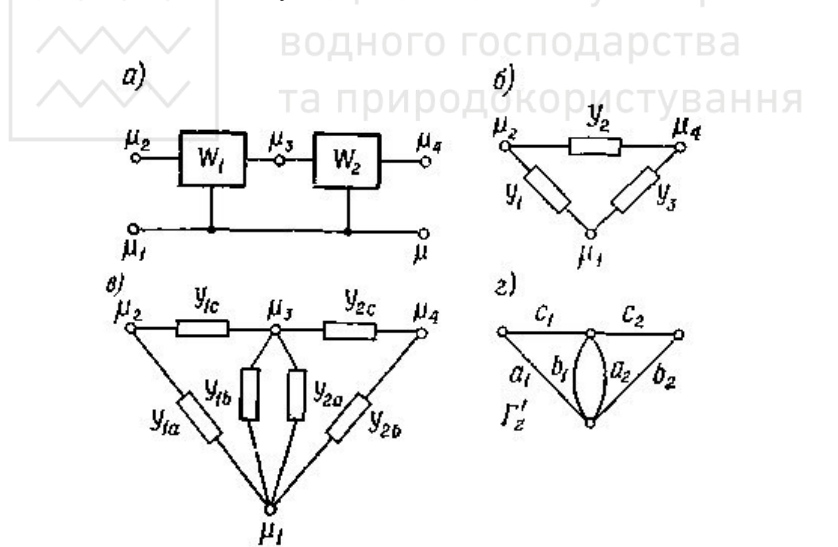


Рис. 22.

Схема замещения изображена на рис. 6.22, в; граф Γ'_z ее представлен на рис. 22, з.



В соответствии с формулой (57) рассчитаем адмитансы отдельных ветвей схемы замещений (рис. 22, в)

$$\begin{aligned} y_{1a} &= \frac{1}{2} (Y_{1ab} + Y_{1ac} - Y_{1ca}), \\ y_{1b} &= \frac{1}{2} (Y_{1ba} + Y_{1bc} - Y_{1ab}), \\ y_{1c} &= \frac{1}{2} (Y_{1ca} + Y_{1cb} - Y_{1ac}), \\ y_{2a} &= \frac{1}{2} (Y_{2ab} + Y_{2ac} - Y_{2ca}), \\ y_{2b} &= \frac{1}{2} (Y_{2ba} + Y_{2bc} - Y_{2ab}), \\ y_{2c} &= \frac{1}{2} (Y_{2ca} + Y_{2cb} - Y_{2ac}), \end{aligned} \quad (а)$$

Y_{1ab} — адмитанс многополюсника W_1 с замкнутым путем b_1 , измеренный относительно пути a_1 ,

Y_{1ab} — адмитанс многополюсника W_2 с замкнутым путем c_2 , измеренный относительно пути a_2 .

Теперь рассчитаем адмитансы ветвей схемы замещения (рис.22,б).

Для этого вычислим блочную группу графа Γ'_z (рис. 22, г)

$$A'_z = [a_1 \ c_1] [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2] [b_2 \ c_2].$$

Найдем конъюнкцию

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_z}{\partial b_2} \cap \left(\frac{\partial A'_z}{\partial b_2} + \frac{\partial A'_z}{\partial a_1} \right) &= \frac{\partial A'_z}{\partial b_2} + \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial b_2} \frac{\delta A'_z}{\delta a_1} \right) \cap \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \frac{\delta A'_z}{\delta b_2} \right) \right\} = \\ &= [a_1 \ c_1] [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2] + \{([c_1] [b_1 \ a_2 \ c_2]) \cap \\ &\cap ([c_2] [b_1 \ c_1 \ a_2])\} = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & c_1 & c_1 \\ b_1 & c_1 & a_2 & c_2 & b_1 & a_2 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial^2 A'_z}{\partial a_1 \partial b_2} &= [b_1 \ c_1 \ a_2 \ c_2]. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$y_1 = y_{1a} + \frac{y_{1c}(y_{1b} + y_{2a})}{y_{1b} + y_{1c} + y_{2a} + y_{2c}}$$

Подставив выражение (а) в последнюю формулу, получим



$$y_1 = \frac{1}{2} (Y_{1ab} + Y_{1ac} - Y_{1ca}) + \\ + \frac{(Y_{1ca} + Y_{1cb} - Y_{1bc})(Y_{1ba} + Y_{1bc} - Y_{1ab} + Y_{2ab} + Y_{2ac} - Y_{2ca})}{4(Y_{1ca} + Y_{2ca})}.$$

Аналогично рассчитываются адмитансы y_2 и y_3 .

9.3.6. Преобразование активных модуль-схем

Рассмотрим активную блок-схему с выделенными v_z узлами, содержащую независимые источники питания. Эта схема может быть самостоятельной цепью, отдельным многополюсником или частью большой схемы. Не учитывая внутренней структуры схемы, допустим, что известны ее внешние параметры, т. е. меж-узловые напряжения на ветвях любого дерева, построенного на выделенных узлах этой схемы, токи выделенных узлов схемы, а также входные импедансы или адмитансы схемы при различных вариантах замыкания выделенных узлов.

Заметим, что если известны межузловые напряжения на ветвях произвольного дерева, построенного на выделенных узлах схемы, то можно легко определить все остальные межузловые напряжения этой схемы.

Схемой замещения рассматриваемой модуль-схемы будет схема с v_z узлами, построенная из $v_z(v_z - 1)/2$ ветвей, образующих полный многоугольник.

Адмитансы этих ветвей рассчитываем методами, описанными в предыдущем разделе. Токи узлов схемы замещения должны быть равны токам в узлах рассматриваемой модуль-схемы, также как и межузловые напряжения схемы замещения должны быть равны соответствующим межузловым напряжениям модуль-схемы. Из второго закона Кирхгофа следует, что достаточно, чтобы равенство соответствующих напряжений выполнялось только для $v_z - 1$ межузловых напряжений. Таким образом, для расчета напряжений источников напряжения схемы замещения достаточно составить $v_z - 1$ независимых уравнений. Отсюда вытекает, что схема замещения должна содержать не более $v_z - 1$ источников напряжения. Эти источники не могут быть размещены в ветвях, образующих контур, т. е. они должны находиться в ветвях, образующих произвольное дерево схемы замещения.



Для расчета напряжений этих источников составляем $v_z - 1$ уравнений для токов в $v_z - 1$ узлах схемы замещения. Для любого узла μ схемы замещения (рис. 23) уравнение для токов имеет вид

$$\sum_{i=1}^{v_z-1} (E_i - U_i) y_i + I_\mu = 0 \quad (59)$$

или

$$\sum_{i=1}^{v_z-1} E_i y_i = \sum_{i=1}^{v_z-1} U_i y_i - I_\mu \quad (60)$$

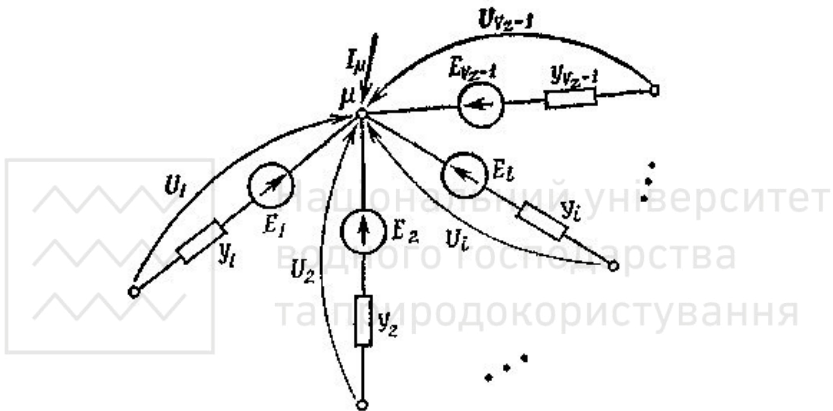


Рис. 23. Схема части замещающей цепи с узлом μ .

Знаки в приведенных формулах справедливы для направлений напряжений и тока I_μ в узел μ (рис. 23). При противоположном направлении напряжений или тока в вышеприведенных формулах нужно изменить знак.

После решения системы этих линейных уравнений получаем искомые напряжения E_i источников схемы замещения.

Замечание. Для упрощения расчета источники следует разместить в ветвях, инцидентных одному узлу схемы замещения.

Тогда можно непосредственно составить выражение для каждого искомого напряжения источника. Способ расчета напряжений источников в схеме замещения иллюстрирует следующий пример.



Пример. 13. Рассчитать напряжения источников схемы замещения (рис. 24, б) по известным напряжениям между узлами модуль-схемы рис. 24, а.

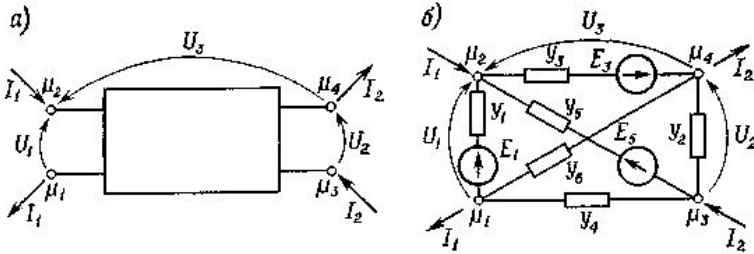


Рис. 24.

Составим уравнение для тока узла μ_1 схемы замещения:

$$-E_1 y_1 = -U_1 y_1 + (U_3 - U_1) y_0 + (U_2 + U_3 - U_1) y_4 + I_1.$$

Из этого уравнения следует

$$E_1 = U_1 - (U_3 - U_1)(y_0/y_1) - (U_2 + U_3 - U_1)(y_4/y_1) - (I_1/y_1).$$

Аналогично, составляя уравнения для тока узлов μ_3 и μ_4 , получим

$$E_5 = U_2 + U_3 + U_2 \frac{y_2}{y_5} + (U_2 + U_3 - U_1) \frac{y_4}{y_5} + \frac{I_2}{y_5},$$

$$E_3 = -U_3 + U_2 \frac{y_2}{y_3} - (U_3 - U_1) \frac{y_6}{y_3} - \frac{I_2}{y_3}.$$

Значения адмитансов ветвей схемы замещения y_1, y_2, \dots, y_6 рассчитаем любым из методов, описанных в предыдущем разделе. Например, в соответствии с уравнением (57) имеем

$$y_1 = (1/2)(Y_{123} + Y_{124} - Y_{312}),$$

где Y_{123} — адмитанс модуль-схемы (рис. 24, а) при коротком замыкании узлов μ_2, μ_3 и μ_4 , измеренный между узлами μ_1 и $(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4)$; Y_{124} — адмитанс модуль-схемы при коротком замыкании узлов μ_1, μ_3 и μ_4 , измеренный между узлами μ_2 и $(\mu_1 + \mu_3 + \mu_4)$; Y_{312} — адмитанс модуль-схемы при коротком замыкании узловых пар μ_1, μ_2 и μ_3, μ_4 измеренный между узлами $(\mu_1 + \mu_2)$ и $(\mu_3 + \mu_4)$.

Аналогично рассчитываются адмитансы других ветвей схемы замещения.



9.4. Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем и методом циклов

Изложенные в данном разделе методы анализа электрических схем основаны на соотношениях (14) и (28). Они дают возможность относительно просто определять параметры схем без решения систем уравнений, а также автоматизировать анализ электрических цепей с помощью ЭЦВМ.

9.4.1. Анализ электрических цепей с помощью переключающих схем

9.4.1.1. Переключающая схема

Описываемый ниже метод опирается на понятие переключающей схемы, называемой также нуль-импедансной схемой и кратко обозначаемой ZI .

Определение 1. *Переключающей схемой* будем называть схему, построенную из электрических ключей (контактных и безконтактных), соединенных между собой проводниками, с такой же самой топологической структурой, как рассматриваемая электрическая схема, причем каждой ветви рассматриваемой схемы соответствует один ключ в схеме ZI . На рис. 1 представлены для примера схема электрической цепи и соответствующая переключающая схема ZI .

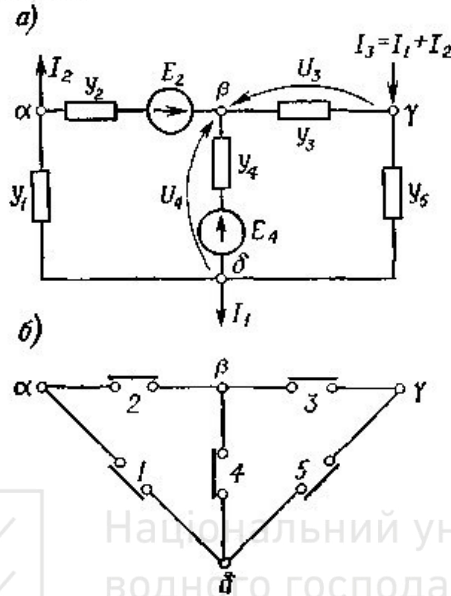


Рис. 1. Электрическая цепь с источниками тока и напряжения: а) схема цепи; б) схема переключающей цепи ZI.

На схеме рассматриваемой цепи (рис. 1, а) y_1, y_2, \dots, y_5 обозначают проводимости отдельных ветвей этой цепи; α, β, γ и δ — узлы; E_2 и E_4 — э. д. с. источников напряжений; I_1, I_2 и $I_3 = I_4 + I_2$ — токи источников тока, а U_3 и U_4 — искомые напряжения ветвей y_3 и y_4 .

На схеме цепи ZI (рис. 1, б) символы 1, 2, . . . , 5 обозначают ключи. Ключ 1 соответствует ветви y_1 рассматриваемой электрической цепи, ключ 2 — ветви y_2 и т. д. Символы α, β, γ и δ обозначают узлы цепи ZI, соответствующие также обозначенным узлам рассматриваемой цепи.

С помощью ключей можно создать дерево в цепи ZI, т. е. гальванически соединить все узлы цепи ZI так, чтобы не было ни одного контура.

Например, если в цепи ZI, показанной на рис. 1, замкнуть ключи 2, 3 и 4 и разомкнуть ключи 1 и 5, то образуется дерево, показанное на рис. 2, а.

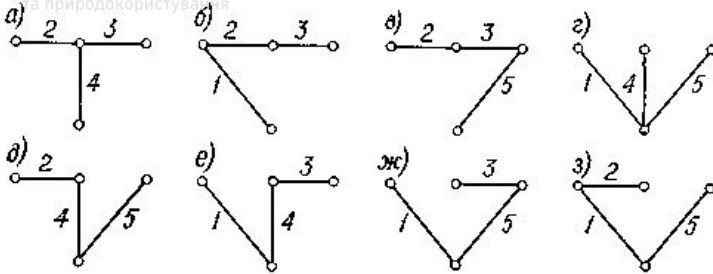


Рис. 2. Схемы деревьев цепи ZI (исходная цепь — рис. 1, б).

Это дерево имеет $v - 1$ замкнутых ключей, причем v обозначает число узлов цепи ZI.

В цепи ZI можно создать Γ различных деревьев, причем

$$T = \det A_{v-1}^{v-1}, \quad (1)$$

где A_{v-1}^{v-1} — симметричная узловая матрица цепи ZI порядка $v - 1$, у которой диагональные элементы $a_{\gamma\gamma}$ равны числу проводов, соединяющихся в отдельных узлах, а остальные элементы $a_{\delta\epsilon} = a_{\epsilon\delta}$ равны числу ключей, соединяющих узлы δ и ϵ , имеют отрицательные знаки. Например, в цепи ZI, показанной на рис. 1, б, можно образовать

$$T = \det \begin{vmatrix} 2-1 & 0 \\ -1 & 3-1 \\ 0-1 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

разных деревьев, схемы которых изображены на рис. 2.

В этих схемах замкнутые ключи представлены в виде отрезков, разомкнутые ключи не показаны.

Определение 2. Величиной D_d дерева схемы ZI будем называть произведение проводимостей ветвей исходной схемы, представленных замкнутыми ключами дерева d схемы ZI:

$$D_d = \prod_{i=1}^{v-1} y_{di}, \quad (2)$$

где y_{di} — проводимость ветви рассматриваемой схемы, представленной замкнутым ключом в дереве d схемы ZI; v — число узлов схемы ZI.

Например, величину D_a дерева, показанного на рис. 2, а, представим

$$D_a = y_2 y_3 y_4.$$



Если в схеме ZI замкнем два узла, то получим новую схему, которую назовем производной схемой ZI. В производной схеме ZI деревья создаются так же, как в первичной схеме ZI. На рис. 3 представлена производная схема ZI, полученная в результате замыкания узлов α и γ в первичной схеме ZI (рис. 1, б); на рис. 4 представлены изображения всех деревьев производной схемы.

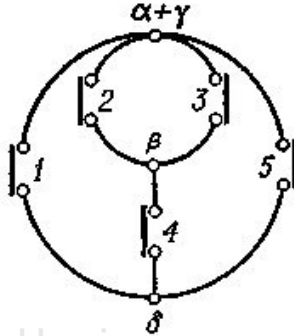


Рис. 3. Схема производной цепи ZI, образованной в результате замыкания узлов α и β исходной цепи рис. 1, б.

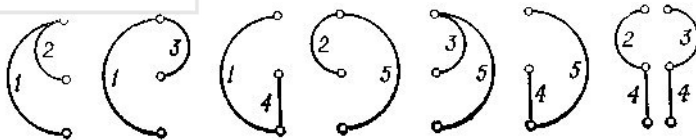


Рис. 4. Схемы деревьев производной цепи ZI (исходная цепь — рис. 3).

9.4.1.2. Анализ пассивных схем

Проводимость $Y_{\mu\nu}$, измеренную между узлами μ и ν рассматриваемой электрической цепи, можно рассчитать по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d}{\sum_{d'=1}^T D_{d'}}, \quad (3)$$



где D_d — величина дерева d схемы ZI ; T — число деревьев схемы ZI ; D'_d — величина дерева d' производной схемы ZI , полученной в результате замыкания в первичной схеме ZI узлов μ и ν ; T' — число деревьев производной схемы ZI .

Например, проводимость $Y_{\alpha\gamma}$, измеренная между узлами α и γ электрической схемы (рис. 1, а), рассчитывается следующим образом на основании деревьев, изображенных на рис. 2 и 4:

$$Y_{\alpha\gamma} = (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_4 y_3 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5) : (y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_4 + y_2 y_5 + y_3 y_5 + y_4 y_5 + y_2 y_4 + y_3 y_4).$$

Для определения величин напряжений ветвей рассматриваемой электрической схемы следует в деревья схемы ZI включать замещающие источники, соответствующие источникам напряжений и токов электрической схемы. Например, на рис. 5 приведены все деревья схемы ZI , показанной на рис. 1, б, с включенными источниками.

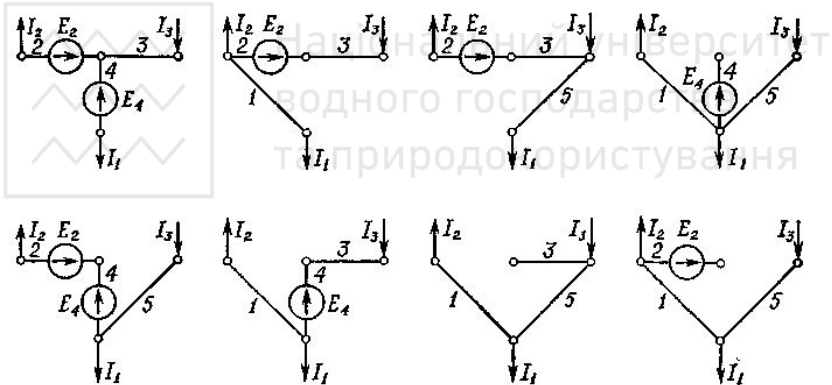


Рис. 5. Схемы деревьев цепи ZI (исходная цепь — рис., б) с источниками напряжения и тока.

На дереве с источниками определяем или измеряем межузловые напряжения и токи в ключах. Заметим, что эти напряжения и токи являются алгебраической суммой соответствующих напряжений и токов источников.

Напряжение U_k ветви k , соединяющей узлы μ и ν , рассматриваемой схемы (рис. 6), рассчитываем по формуле



$$U_k = \frac{\sum_{d=1}^T \left[D_d \left(u_{d\mu\nu} + \frac{i_{dk}}{y_{dk}} \right) \right]}{\sum_{d=1}^T D_d} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d u_{d\mu\nu} + \sum_{d=1}^T \frac{\partial D_d}{\partial y_{dk}} i_{dk}}{\sum_{d=1}^T D_d}, \quad (4)$$

где $D_d = \prod_{i=1}^{v-1} y_{di}$ — величина дерева d схемы ЗИ; y_{di} —

проводимость ветви, представленной замкнутым i ключом в дереве d ; v — число узлов схемы ЗИ; T — число деревьев схемы ЗИ; $u_{d\mu\nu}$ — напряжение между узлами μ и ν дерева d с включенными источниками; i_{dk} — ток в ключе k дерева d с включенными источниками (если в дереве d нет замкнутого ключа k , то $i_{dk} = 0$); y_{dk} — проводимость ветви k .

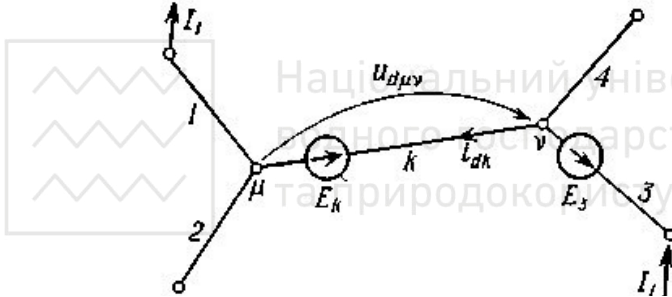


Рис. 6. Схема части дерева D_d с независимыми источниками и обозначением напряжения и тока k -й ветви (выключатель); в этом случае $u_{d\mu\nu} = E_k$; $i_{dk} = I_1$.

Например, напряжение U_3 ветви электрической схемы (рис. 1, а) рассчитываем по формуле, полученной из рассмотрения деревьев с источниками, представленных на рис. 5:

$$U_3 = (y_1 y_4 y_5 E_4 + y_2 y_4 y_5 E_4 + y_1 y_2 y_5 E_2 - y_2 y_4 I_3 - y_1 y_2 I_3 - y_2 y_6 I_2 - y_1 y_4 I_3) : (y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_2 y_5).$$

Аналогично формула для напряжения U_4 ветви y_4 (рис. 1, а), полученная из рассмотрения деревьев, изображенных на рисг. 5, имеет вид



$$U_4 = (y_2y_3y_4E_4 + y_1y_2y_3E_2 + y_1y_4y_5E_4 + y_2y_4y_5E_4 + \\ + y_1y_3y_4E_4 + y_1y_2y_5E_2 + y_2y_3I_1 - y_2y_5I_2 + y_1y_3I_3) : \\ : (y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_5 + y_1y_4y_5 + y_2y_4y_5 + y_1y_3y_4 + \\ + y_1y_3y_5 + y_1y_2y_5).$$

Если в схеме присутствуют только источники э. д. с, то формула для напряжения между произвольными узлами μ и ν схемы имеет вид

$$U_{\mu\nu} = \frac{\sum_{d=1}^T D_d u_{d\mu\nu}}{\sum_{d=1}^T D_d}. \quad (5)$$

Эта формула справедлива для узлов μ и ν , не соединенных непосредственно ветвью. Например, если принять, что в схеме (рис. 1, а) токи $I_1 = I_2 = I_3 = 0$, то напряжение между узлами α и γ будет равно (рис. 5)

$$U_{\alpha\gamma} = [(y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_5) E_2 + y_2y_4y_5 (E_2 - E_4) + \\ + y_1y_3y_4 E_4] : (y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_5 + y_1y_4y_5 + y_2y_4y_5 + \\ + y_1y_3y_4 + y_1y_3y_5 + y_1y_2y_4).$$

9.4.1.3. Анализ активных цепей

Пользуясь переключающей схемой ZI, можно анализировать также активные схемы с управляемыми источниками.

Для схемы с управляемыми напряжением источниками напряжения (рис. 7, а) формула для расчета напряжения имеет вид

$$U = L/M, \quad (6)$$

где

$$L = \sum_{p=1}^T D_p \{ u_p + (-1)^{n_{pi}} u_{pi} + (-1)^{n_{pj}} u_{pj} + \\ + (-1)^{n_{pk}} u_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pij}} u_{pi} u_{pj} + \\ + (-1)^{n_{pih}} u_{pi} u_{pk} + (-1)^{n_{pjh}} u_{pj} u_{pk} + \dots \\ \dots + (-1)^{n_{pihk}} u_{pi} u_{pj} u_{pk} + \dots \}; \quad (7)$$

$$M = \sum_{p=1}^T D_p \{ 1 + u_{pi} + u_{pj} + u_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pvi}} u_{pi} u_{vj} + \dots \}$$



$$\begin{aligned}
 &+ (-1)^{n_{p'ih}} u_{pi} u_{pk} + (-1)^{n_{p'jh}} u_{pj} u_{pk} + \dots \\
 &\dots + (-1)^{n_{p'ijk}} u_{pi} u_{pj} u_{pk} + \dots \}; \quad (8)
 \end{aligned}$$

T — число деревьев схемы ЗИ; D_p — величина p -го дерева; $u_p, u_{pi}, u_{pj}, u_{pk}$ — напряжения между соответствующими узлами дерева p с поочередным включением источников (рис. 7, б) (следует обратить внимание на противоположное направление источников, имитирующих управляемые источники); n_{pi} — число четных перестановок элементов множества $\{| E |, | s_i | \}$, полученного подстановкой в множество $\{| u_p |, | u_{pi} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений, измеренных на дереве p ; n_{pji} — число четных перестановок элементов множества $\{| E |, | s_i |, | s_j | \}$, полученного подстановкой в множество $\{| u_p |, | u_{pi} |, | u_{pj} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений, измеренных на дереве p ; n'_{pji} — число четных перестановок элементов множества $\{| s_i |, | s_j | \}$, полученного подстановкой в множество $\{| u_{pi} |, | u_{pj} | \}$ соответствующих абсолютных величин напряжений на дереве p , и т. д.

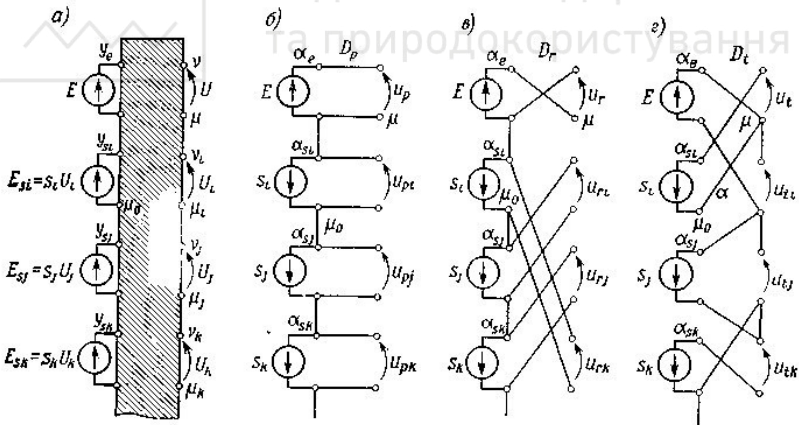


Рис. 7. Активная цепь с управляемыми напряжением зависимыми источниками напряжения: а) молекуль-схема цепи; б) схема деревьев D_p, D_r, D_t цепи ЗИ с источниками (зависимые источники с обратной полярностью).

Отдельные слагаемые сумм в выражениях (7) и (8) записываются по приведенным ниже правилам. Введем следующие обозначения (рис. 7):



A — множество деревьев схемы ZI ;

$A_{\mu\nu}$ — множество деревьев схемы ZI с замкнутыми узлами μ и ν ;

$A_{\mu\nu, \mu_1 \nu_1}$ — множество деревьев схемы ZI с замкнутыми парами узлов μ и ν , а также μ_1 и ν_1 ;

A^{α_e} — множество деревьев схемы ZI , в которой отключен от узла один зажим ключа α_e ;

$A^{\alpha_e \alpha_{si}}$ — множество деревьев схемы ZI , в которой отключены от узлов отдельные зажимы ключей α_e и α_{si} ;

$A^{\alpha_e}_{\mu\nu}$ — множество деревьев схемы ZI с замкнутыми вершинами μ и ν , а также с отключенным зажимом ключа α_e и т. д.

Используя эти обозначения, можно доказать, что в выражениях (7) и (8) слагаемое u_p появляется только для величины деревьев, содержащихся в множестве



$A \cap A^{\alpha_e}_{\mu\nu}$;

слагаемое $u_p u_{pi}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A^{\alpha_e \alpha_{si}}_{\mu\nu, \mu_i \nu_i};$$

слагаемое $u_p u_{pi} u_{pj}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A^{\alpha_e \alpha_{si} \alpha_{sj}}_{\mu\nu, \mu_i \nu_i, \mu_j \nu_j};$$

слагаемое $u_p u_{pi} u_{pj} u_{pk}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A^{\alpha_e \alpha_{si} \alpha_{sj} \alpha_{sk}}_{\mu\nu, \mu_i \nu_i, \mu_j \nu_j, \mu_k \nu_k};$$

слагаемое u_{pi} появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A^{\alpha_{si}}_{\mu_i \nu_i};$$

слагаемое $u_{pi} u_{pj}$ появляется только для величин деревьев, содержащихся в множестве

$$A \cap A^{\alpha_{si} \alpha_{sj}}_{\mu_i \nu_i, \mu_j \nu_j}.$$

Это означает, что для каждого дерева D_i отдельные слагаемые сумм появляются только в случаях, когда соответствующие преобразования дерева D_i , приведенные выше, дают также деревья схемы ZI .



На основании формулы (6) проводимость $Y_{\mu\nu}$ схемы, измеренная между любыми узлами μ и ν , рассчитывается по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{M}{\partial M / \partial y_{\mu\nu}}, \quad (9)$$

где $y_{\mu\nu}$ — проводимость ветви, соединяющей узлы μ и ν .

Замечание. Формула (9) аналогична формуле (3), применяемой для схем, не содержащих управляемых источников, так как

$$\sum_{d'=1}^{T'} D_{d'}' = \frac{\partial}{\partial y_{\mu\nu}} \sum_{d=1}^T D_d.$$

Проводимость $Y_{\mu\nu}^0$ схемы с отключенной ветвью $y_{\mu\nu}$, таким образом, равна

$$Y_{\mu\nu}^0 = \frac{M|_{y_{\mu\nu}=0}}{\partial M / \partial y_{\mu\nu}}. \quad (9a)$$

Чтобы проиллюстрировать формулы (6) — (8), обратим внимание на деревья p , r и t схемы ZI (рис. 7, б — г). Для этих деревьев (при условии что в схеме имеются только источники E , E_{s_i} , E_{s_j} и E_{s_k}) получим

$$L = \dots + D_p \{E - E_{s_i} - E_{s_j} - E_{s_k} + E_{s_i s_j} + E_{s_i s_k} + E_{s_j s_k} - E_{s_i s_j s_k}\} + D_r \{-E + E_{s_i s_j s_k}\} + D_t \{E_{s_i} - E_{s_i s_j} + E_{s_i s_k} - E_{s_i s_j s_k}\} + \dots,$$

$$M = \dots + D_p \{1 - s_i - s_j - s_k + s_i s_j + s_i s_k + s_j s_k - s_i s_j s_k\} + D_r \{1 - s_i s_j s_k\} + D_t \{1 - s_j + s_k - s_j s_k\} + \dots.$$

Проводимость схемы между узлами μ_0 и μ (рис. 7, а) или относительно ветви y_α (рис. 7, г), согласно формуле (9), равна

$$Y_{\mu_0\mu} = \frac{M}{\dots + \frac{\partial D_t}{\partial y_\alpha} \{1 - s_j + s_k - s_j s_k\} + \dots},$$

где, как следует из рис. 7, б и в:

$$\frac{\partial D_p}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial D_r}{\partial y_\alpha} = 0$$

При анализе схем с управляемыми током источниками напряжений в соответствующие ветви деревьев схемы ZI вместо источников с напряжениями s_i , s_j , s_k , ... следует включить источники с напряжениями

$$s'_{i,y_i}, \quad s'_{j,y_j}, \quad s'_{k,y_k}, \dots,$$

где s'_{i,y_i} , s'_{j,y_j} , s'_{k,y_k} , ... — коэффициенты управления по току



($s'_i = E_{si} I_i, \dots$); y_i, y_j, y_k, \dots проводимости ветвей управляющих токов I_i, I_j, I_k, \dots . При анализе схем с управляемыми током источниками токов (рис. 8, а) ток I рассчитываем по формуле

$$I = \frac{L'}{M'} \quad (10)$$

где

$$L' = \sum_{p=1}^T D_p \{ i_p + (-1)^{n_{pi}} i_{pi} i_{pl} + (-1)^{n_{pj}} i_{pj} i_{pj} + (-1)^{n_{pk}} i_{pk} i_{pk} + \dots \\ \dots + (-1)^{n_{pij}} i_{pi} i_{pj} i_{pj} + (-1)^{n_{pik}} i_{pi} i_{pk} i_{pk} + (-1)^{n_{pjk}} i_{pj} i_{pk} i_{pk} + \dots \\ \dots + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots \}; \quad (11)$$

$$M' = \sum_{p=1}^T D_p \{ 1 + i_{pi} + i_{pj} + i_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pij}} i_{pi} i_{pj} + \\ + (-1)^{n_{pik}} i_{pi} i_{pk} + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots + (-1)^{n_{pijk}} i_{pi} i_{pj} i_{pk} + \dots \}; \quad (12)$$

$i_p, i_{pi}, i_{pj}, i_{pk}, \dots$ — токи, измеренные в ветвях дерева p (рис. 8, б) (следует обратить внимание на обратное направление источников тока s_i, s_j, s_k, \dots , имитирующих управляемые источники $I_{si}, I_{sj}, I_{sk}, \dots$); n_{pi} — число четных перестановок элементов множества $\{|I_0|, |s_i|\}$, полученного в результате подстановки в множество $\{|i_p|, |i_{pi}|\}$ абсолютных значений токов, измеренных в соответствующих ветвях дерева p и т. д. (аналогично формулам (7) и (8)).

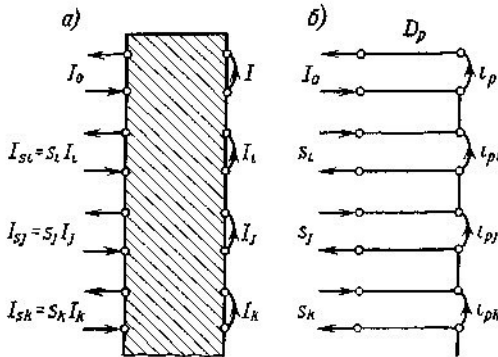


Рис. 8. Активная цепь с управляемыми током зависимыми источниками тока: а) модуль-схема; б) схема дерева D_p цепи ZI с источниками (зависимые источники с обратной полярностью).



Отдельные слагаемые сумм в выражениях (11) и (12) определяются так же, как в выражениях (7) и (8), но с той разницей, что в пересечениях множеств деревьев верхние указатели заменяем на нижние, а нижние на верхние.

Проводимость $Y_{\mu\nu}$ схемы между ее любыми узлами μ и ν рассчитываем по формуле

$$Y_{\mu\nu} = \frac{M'}{\partial M' / \partial y_{\mu\nu}}, \quad (13)$$

где $y_{\mu\nu}$ — проводимость ветви, соединяющей узлы μ и ν . Проводимость $Y_{\mu\nu}^0$ схемы с отключенной ветвью $y_{\mu\nu}$ равна

$$Y_{\mu\nu}^0 = \frac{M' |_{y_{\mu\nu}=0}}{\partial M' / \partial y_{\mu\nu}}. \quad (13a)$$

Анализируя схему с управляемыми напряжением источниками тока, следует в соответствующие узлы деревьев схемы ZI вместо источников тока с токами s_i, s_j, s_k, \dots включать источники с токами

$$\frac{s'_i}{y_i}, \frac{s'_j}{y_j}, \frac{s'_k}{y_k}, \dots,$$

где s'_i, s'_j, s'_k, \dots — коэффициенты источников

$$(I_{s_i}/U_i, I_{s_j}/U_j, I_{s_k}/U_k, \dots);$$

y_i, y_j, y_k, \dots — проводимости управляющих ветвей.

Если рассматриваемая схема с управляемыми источниками тока подключена к источникам напряжения, то при применении данного метода такие источники следует заменить источниками тока так, как показано на рис. 9.

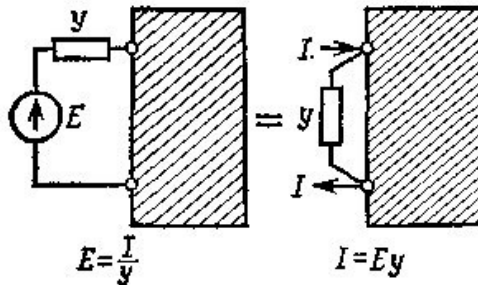


Рис. 9. Замена источника напряжения источником тока и наоборот.



В случае схем с управляемыми источниками напряжений это правило может также служить для замены источника тока источником напряжения.

Величины деревьев D_p в формулах (7), (8) и (11), (12) можно заменить значениями их дополнений, выраженными в виде произведений импедансов ветвей цепи, не принадлежащих отдельным деревьям. Если обозначить полученные таким образом знаменатели выражений соответственно через M^* (вместо M) и через M'^* (вместо M'), то импеданс $Z_{\mu\nu}$, измеренный между любыми двумя узлами μ и ν , равен

$$Z_{\mu\nu} = -\frac{M^* |_{z_{\mu\nu}=0} z_{\mu\nu}}{M^*} \quad \text{или} \quad Z_{\mu\nu} = \frac{M'^* |_{z_{\mu\nu}=0} z_{\mu\nu}}{M'^*}, \quad (14)$$

где $z_{\mu\nu}$ — импеданс ветви, соединяющий узлы μ и ν . Таким образом, импеданс $Z_{\mu\nu}^0$ цепи с отключенной ветвью $z_{\mu\nu}$ равен

$$Z_{\mu\nu}^0 = \frac{M^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{\partial M^* / \partial z_{\mu\nu}} \quad \text{или} \quad Z_{\mu\nu}^0 = \frac{M'^* |_{z_{\mu\nu}=0}}{\partial M'^* / \partial z_{\mu\nu}}. \quad (15)$$

Замечание. Такой способ замены адмиттанса на импеданс применим и для пассивных цепей (3—5).

Проиллюстрируем на примерах метод анализа активных цепей.

Пример 1. Рассчитать параметры транзистора, включенного по схеме с общей базой (рис. 10, а). Схема цепи ZI показана на рис. 10, б, а ее деревья — на рис. 10, в.

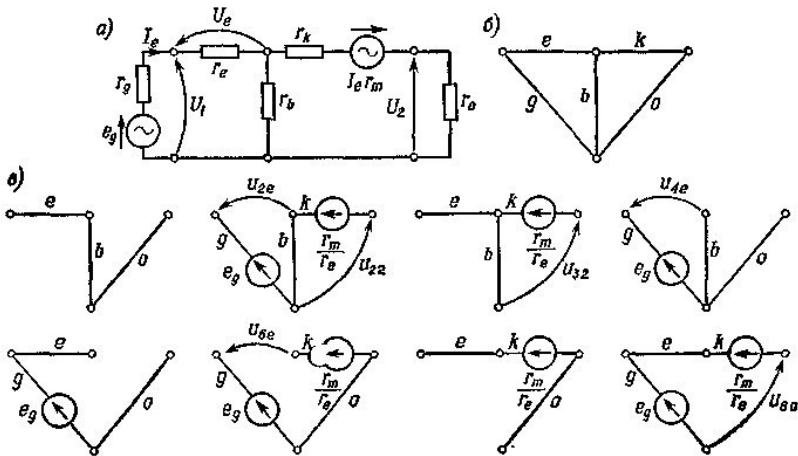


Рис. 10. Схема транзистора с общей базой: а) схема замещения; б) схема деревьев цепи ZI с включенными источниками.



Коэффициент управления напряжения равен

$$\frac{I_e r_m}{I_e r_e} = \frac{r_m}{r_e}.$$

Так как используем импедансы (резистансы) ветвей схемы, то вместо величин деревьев будем писать величины их дополнений. На основании изображений деревьев (6) — (8) напишем

$$M^* = r_k r_g + r_e r_0 + r_g r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_e r_b \left(1 - \frac{r_m}{r_e}\right) + r_g r_b + r_b r_0 =$$

$$= r_k r_g + r_e r_0 + r_g r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_g r_b + r_b r_0,$$

$$U_1 = \frac{r_e r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_b r_0}{M^*} e_g,$$

$$U_2 = \frac{r_b r_0 + r_e r_0 (r_m/r_e)}{M^*} e_g = \frac{r_0 (r_b + r_m)}{M^*} e_g,$$

$$R_{\text{вх}}^0 = \frac{M^* |_{r_g=0}}{\partial M^* / \partial r_g} = \frac{r_e r_0 + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_b r_0}{r_k + r_0 + r_b} =$$

$$= r_e + r_b \frac{r_k - r_m + r_0}{r_b + r_k + r_0},$$

$$R_{\text{вых}}^0 = \frac{M^* |_{r_0=0}}{\partial M^* / \partial r_0} = \frac{r_k r_g + r_e r_k + r_k r_b + r_b (r_e - r_m) + r_g r_b}{r_e + r_g + r_b} =$$

$$= r_k - r_b \frac{r_m - r_g - r_e}{r_e + r_g + r_b}.$$

Из полученных величин можно рассчитать усиление напряжения и тока, мощности, сопротивления согласования и т. д.

Пример 2. Рассчитать напряжение U_3 , а также входную $Y_{\text{вх}}$ и выходную $Y_{\text{вых}}$ проводимости схемы с индуктивной связью (рис. 11, а).

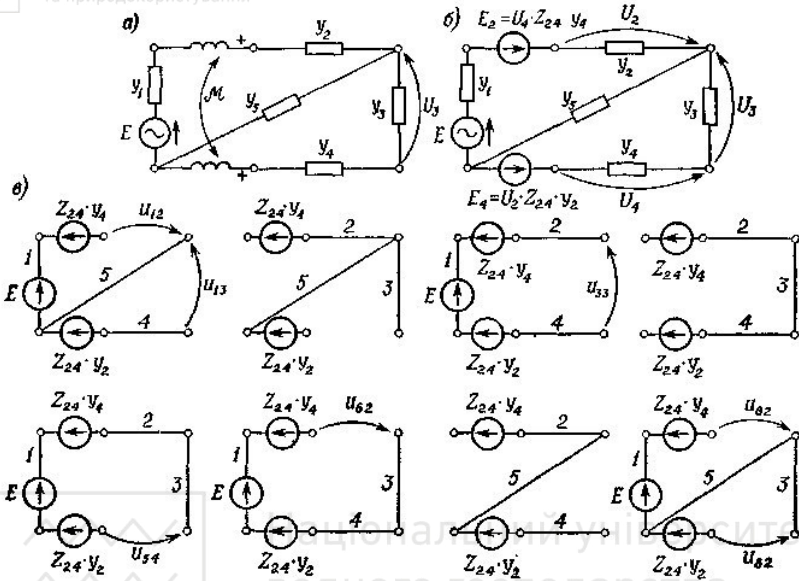


Рис. 11. Цепь с индуктивной связью: а) схема цепи; б) схема замещения; в) схема деревьев цепи ZI с включенными источниками.

Составим схему замещения с двумя источниками напряжения E_2 и E_4 , управляемыми напряжениями U_4 и U_2 (рис. 11, б).

Коэффициенты источников равны

$$\frac{E_2}{U_4} = Z_{24}y_4, \quad \frac{E_4}{U_2} = Z_{24}y_2$$

где $Z_{24} = j\omega L$ (L — коэффициент взаимной индукции).

Из рассмотрения деревьев схемы ZI (рис. 11, в) (источники без сопротивления подключаем к соответствующим узлам схемы) можно написать

$$\begin{aligned} M &= y_1y_4y_5 + y_2y_3y_5 + y_1y_2y_4 + y_2y_3y_4 + y_1y_2y_3 + \\ &+ y_1y_3y_4 + y_2y_4y_5 + y_1y_3y_5 - Z_{24}y_4y_1y_2y_3 - \\ &- Z_{24}y_2y_1y_3y_4 - Z_{24}^2y_2y_4y_1y_3y_5 = (y_1 + y_2)(y_2y_4 + \\ &+ y_3y_5 + y_4y_5) + y_1y_2(y_3 + y_4) - y_1y_2y_3y_4(2 + Z_{24}y_5)Z_{24}, \end{aligned}$$

$$L = y_1y_2y_4E + Z_{24}y_2Ey_1y_4y_5 = y_1y_2y_4(1 + Z_{24}y_5)E,$$

$$U_3 = \frac{L}{M}.$$



Входная проводимость схемы без ветви y_1 источника E равна

$$Y_{\text{вх}} = \frac{M}{\partial M / \partial y_1} - y_1 = \frac{M |_{y_1=0}}{\partial M / \partial y_1} =$$
$$= \frac{y_2 (y_3 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_5)}{y_3 y_4 + y_3 y_5 + y_4 y_5 + y_2 (y_3 + y_4) - y_2 y_3 y_4 (2 + Z_{24} y_5) Z_{24}},$$

а выходная проводимость схемы без ветви y_3

$$Y_{\text{вых}} = \frac{M}{\partial M / \partial y_3} - y_3 = \frac{M |_{y_3=0}}{\partial M / \partial y_3} =$$
$$= \frac{(y_1 + y_2) y_4 y_5 + y_1 y_2 y_4}{(y_1 + y_2) (y_4 + y_5) + y_1 y_2 - y_1 y_2 y_4 (2 + Z_{24} y_5) Z_{24}}.$$

9.4.1.4 Образование деревьев схемы ZI

Описанный метод анализа пассивных и активных схем основан на образовании деревьев переключающей схемы ZI. При анализе простых схем дерева можно найти алгебраическим методом и после их изображения непосредственно установить зависимости для параметров этих схем. Образование деревьев можно автоматизировать при помощи генератора деревьев, действие которого опирается на следующие свойства дерева:

- 1) все узлы схемы ZI гальванически соединены замкнутыми ключами дерева;
- 2) дерево не содержит ни одного контура;
- 3) число замкнутых ключей в дереве равняется числу узлов схемы ZI, уменьшенному на единицу.

Принципиальная схема генератора деревьев представлена на рис. 12.

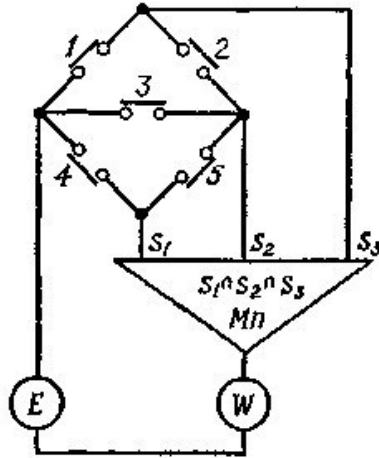


Рис. 12. Принципиальная схема генератора деревьев цепи ZI:
 E — источник питания; Mn — блок логического умножения;
 W — индикатор напряжения или тока; 1, 2, 3, 4, 5 — ключи.

Источник питания E включается в произвольный узел схемы ZI. Оставшиеся узлы присоединяются через блок конъюнкции Mn сигналов S_i к индикатору напряжения или тока W . Условием образования дерева служит отклонение индикатора W при разомкнутых M ключах в схеме ZI, где M — цикломатическое число схемы ZI.

Включая в каждое образованное дерево схемы ZI источники, имитирующие источники питания и управляемые источники (в последнем случае с противоположной полярностью), а также осуществляя измерения соответствующих напряжений между узлами и токов в ключах дерева, можно описанным выше способом найти параметры схемы.

9.4.2. Анализ электрических схем методом циклов

Этот метод служит для расчета распределения тока в анализируемой электрической схеме, содержащей источники напряжения. Он основывается на определении всех элементарных циклов в графе рассматриваемой схемы, содержащих ребро, представляющее ветвь питания схемы, и



ребро α_k , представляющее ветвь, в которой определяется значение тока I_k .

Число ребер w_t каждого из этих циклов не должно быть больше числа v вершин графа.

Выражение для тока I_k имеет вид

$$I_k = \frac{E}{\det A} \sum_{t=1}^p \det \left(\prod_{i=1}^{w_t} [\alpha_{ti}] \prod_{r=1}^{v-w_t} [P_{tr}] \right), \quad (16)$$

где I_k — ток в ветви схемы, представленной ребром α_k в графе схемы; E — э. д. с. источника напряжения; A — блочная группа графа схемы; $p \leq (2^M - 1)$ — количество элементарных циклов, содержащих $w_t \leq v$ ребер, среди них — ребро, представляющее ветвь с источником E , а также ребро α_k ; M — цикломатическое число графа; α_{ti} — ребро элементарного цикла t ; P_{tr} — блочная группа вершины графа μ_r , не принадлежащей циклу t (блочная группа вершины μ_r графа является однострочной блочной группой, элементы которой — обозначения всех инцидентных ребер с вершиной μ_r и не замкнутых в этой вершине); v — количество вершин графа анализируемой схемы; Y — множество проводимостей всех ветвей схемы.

Знаки отдельных слагаемых суммы (16) определяем следующим образом: если в цикле t направления E и I_k одинаковы, то слагаемое t суммы имеет знак плюс, в противном случае — знак минус.

Если в схеме много источников напряжения, то применяем принцип суперпозиции токов.

Элементарные циклы в планарном графе создаем путем суммирования блочных групп независимых циклов во всевозможных комбинациях (блочная группа цикла — однострочная блочная группа, элементами которой являются обозначения всех ребер этого цикла.). При этом опускаем суммы блочных групп, логическое произведение которых равно нулю.

В результате этого суммирования получаем не больше чем $(2^M - 1)$ блочных групп вместе с M блочными группами независимых циклов (M — цикломатическое число графа). Из найденного множества блочных групп элементарных циклов выбираем в формулу (16) все блочные группы A_t , удовлетворяющие условию

$$\alpha_k, \alpha_E \in A_t, \quad (17)$$

где α_E — обозначение ребра графа, представляющего ветвь источника E .



Для иллюстрации изложенного метода расчета токов ветвей в электрических схемах рассмотрим два примера.

Пример 3. Рассчитать ток I_5 в ветви 5 электрической схемы, граф которой с источником э. д. с. E_1 и током I_5 приведен на рис. 13.

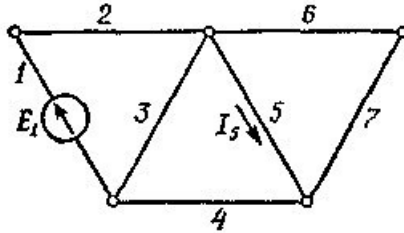


Рис. 13.

Определим блочные группы элементарных независимых циклов графа

$$A_1 = [1 \ 2 \ 3],$$

$$A_2 = [3 \ 4 \ 5],$$

$$A_3 = [5 \ 6 \ 7],$$

а затем суммы этих блочных групп, опуская суммы, не содержащие ребра 1 и 5. В данном примере получим только одну сблочную группу

$$A_1 + A_2 = [1 \ 2 \ 4 \ 5],$$

так как

$$5 \notin A_1, \quad 1 \notin A_2, \quad 1 \notin A_3, \quad A_1 \cap A_3 = 0,$$

$$1, 5 \notin (A_2 + A_3), \quad 5 \notin (A_1 + A_2 + A_3).$$

Блочная группа $A_1 + A_2$ представляет элементарный цикл.

Согласно формуле (16), имеем

$$I_5 = \frac{E_1}{\det A} y_1 y_2 y_4 y_5 (y_6 + y_7),$$

так как цикл, составленный из ребер 1, 2, 4, 5, не содержит вершины графа, которой инцидентны ребра 6 и 7. В приведенном выражении A обозначает блочную группу графа.

Пример 4. Рассчитать I_7 в ветви 7 электрической схемы, граф которой с источниками напряжения E_1, E_2, \dots, E_6 и током I_7 представлены на рис. 14.

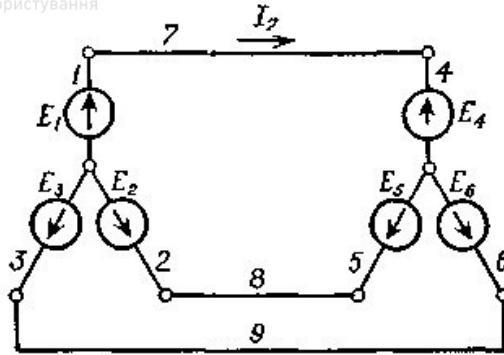


Рис. 14.

Определим блочную группу независимых элементарных циклов графа

$$A_1 = [1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 7 \ 8],$$

$$A_2 = [2 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9].$$

Образует сумму

$$A_1 + A_2 = [1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 9], \quad A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

На основании формулы (16) и принципа суперпозиции получим

$$I_7 = \frac{1}{\det \underline{A}} [(E_1 + E_5 - E_2 - E_4) y_1 y_2 y_4 y_5 y_7 y_8 (y_3 y_6 + y_3 y_9 + y_6 y_9) +$$

$$+ (E_1 + E_6 - E_3 - E_4) y_1 y_3 y_4 y_5 y_7 y_9 (y_2 y_5 + y_2 y_8 + y_5 y_8)],$$

так как

$$[3 \ 9] [6 \ 9] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix},$$

$$[2 \ 8] [5 \ 8] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

а блочная группа A_2 не содержит элемента 7.



10. Синтез структур средствами блочных групп и модуль-графами

Существует множество методов синтеза линейных пассивных электрических цепей. Большинство их названий связывают с фамилиями их создателей. Иногда эти методы отличаются оригинальностью и показывают творческую мысль авторов. Однако у них есть один основной недостаток. Как правило, это рецептурные методы, требующие различного подхода к каждой конкретной проблеме синтеза. Эти методы накладывают резкие ограничения на структуру синтезируемой схемы, а также на величины и род используемых элементов. Например, они ограничивают проблему синтеза схемами лестничной или мостовой структуры, четырехполюсником в виде перекрытого или двойного Т-образного моста и т. д. Такие большие ограничения не позволяют выделить среди этих схем лучшую. Конструктор принимает решение, но может оказаться, что такое решение не существует вообще.

Отсутствие в настоящее время метода, решающего проблему синтеза электрических цепей каким-то общим методом, можно объяснить следующими причинами:

1. Большой сложностью расчета, связанной с определением множества схем, удовлетворяющих всем условиям синтеза.
2. Отсутствием простого и одновременно достаточно общего расчетного алгоритма.
3. Отсутствием достаточно просто сформулированных условий реализации схемы.

По мере развития вычислительной техники трудности расчета можно полностью преодолеть, нужен только соответствующий расчетный алгоритм, хорошо приспособленный к технике машинного расчета и учитывающий условия физической реализации схем.

Таким алгоритмом могла бы быть алгебра блочных групп, которая непосредственно связывает геометрические свойства графа цепи с расчетным методом. Преимущество алгебры блочных групп заключается в том, что она позволяет алгебраическим методом записывать структуру схемы, а также дает простые связи всех изменений топологии схемы с операциями над блочными группами. По-видимому, это



свойство представляет собой одно из основных преимуществ использования алгебры блочных групп для синтеза схем.

В настоящем разделе описано использование алгебры блочных групп для синтеза пассивных двух- и четырехполюсников. Напомним, что под термином «**синтез**» нужно понимать **совокупность операций, необходимых для определения параметров электрической цепи или множества цепей, выполняющих поставленные требования.** Поэтому синтез представляет собой понятие, противоположное понятию анализа, при котором имеется заданный объект, подлежащий анализу, т. е. изучению его свойств. Синтез в принципе должен быть инженерным методом, в котором проектировщик стремится к получению возможно лучшего решения.

Первой работой, посвященной проблеме синтеза электрических цепей, была работа Вильгельма Кауэра «Способ реализации двухполюсника с заданным импедансом», опубликованная им в 1926 г.

В данном разделе описана методика синтеза двухполюсника, основанная на разложении функции импеданса в цепную дробь. Следует обратить внимание на тот факт, что она была опубликована ровно через 100 лет после работы Ома, считающейся первой работой в области теоретической электротехники. В качестве одной из первых работ в области синтеза нужно также отметить и работу Отто Вруне (1931 г.). В этой работе автор представил метод синтеза RLC-двухполюсника, позволяющий реализовать произвольную конечную положительную действительную функцию импеданса. Кроме Кауэра и Вруне значительные результаты в области методов синтеза были получены Баттервортом (1930г.), Воде (1934 г.), Дарлингтоном (1939 г.), Воттом, Даффином (1949 г.), Гиллемином (1949 г.), Мията (1952 г.), Озаки (1953 г.), Реза (1954 г.) и другими. Работы этих авторов служат своеобразными вехами на пути развития методов синтеза линейных электрических цепей.

Представленный в данном разделе метод синтеза электрических цепей опирается на алгебру блочных групп, служит общим методом, не накладывающим никаких принципиальных ограничений на структуру схемы, и требует применения ЭВМ. Метод в представленном здесь виде не завершен до конца и требует дальнейших исследований для различных конкретных приложений.



10.1. Синтез структур, представленных пассивными двухполюсниками

Метод блочных групп позволяет решать проблему синтеза электрической цепи в общем виде без каких-либо ограничений, накладываемых на структуру проектируемой цепи.

Задачу синтеза электрической цепи можно разбить на два этапа:

- 1) топологический синтез графа цепи,
- 2) расчет величин отдельных элементов схемы.

Под термином «топологический синтез графа» понимаем совокупность операций, связанных с определением класса структур графов, реализующих поставленную проблему синтеза. Так как определение этих структур связано с определением соответствующих изображений блочных групп, то при решении этой проблемы важны условия существования геометрического изображения. Напомним эти условия:

- 1) блочная группа A должна иметь разложение на простые множители

$$A = P_1 P_2 \dots P_m; \quad (1)$$

- 2) любой элемент α_{i_k} может присутствовать не более чем в двух числах блочных группах P_i, P_j произведения (1). Кроме того, должны выполняться следующие дополнительные условия:

- 3) $P_i \neq P_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (i \neq j);$

- 4) $P_i \neq \sum P_k; \quad k = 1, 2, \dots, m \quad \{k \neq i\},$ (2)

обеспечивающие $A \neq 0$.

Рассмотрим пассивный RLC-двухполюсник (рис. 1), в котором выделен импеданс z_α источника.

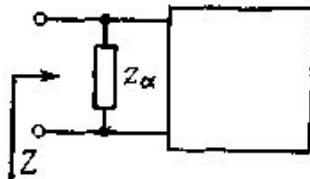


Рис. 1. Пассивный RLC-двухполюсник с вынесенным импедансом z_α .



С помощью теории блочных групп входной импеданс рассматриваемого двухполюсника можно выразить следующим образом

$$Z = \frac{\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}}{\det A} \quad \text{или} \quad Z = z_\alpha \frac{\det \frac{\delta A^d}{\delta \alpha}}{\det A^d} \quad (3)$$

где A — блочная группа, изображением которой служит граф двухполюсника.

В дальнейшем будем пользоваться второй из приведенных выше формул, которая выражает входной импеданс двухполюсника через импедансы его элементов.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда в каждой ветви двухполюсника присутствуют последовательно соединенные резистор, индуктивность и конденсатор. В этом случае импеданс каждой ветви выражается формулой

$$z_i = sL_i + R_i + s^{-1}C_i^{-1}. \quad (4)$$

Входной импеданс синтезируемого двухполюсника представляет собой положительную вещественную функцию

$$Z(s) = \frac{d_{n+1} \bar{s}^{n+1} + d_n \bar{s}^n + \dots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} \bar{s}^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}.$$

Умножая числитель и знаменатель этой функции на множитель s^{-l} , где

$$l = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$$

($E(x)$ обозначает целую часть x), приводим нашу функцию к следующему виду:

$$Z(s) = \frac{a_{n+1} s^{n+1} + a_n s^n + \dots + a_0 + \dots + a_{-(n+1)} s^{-(n+1)}}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 + \dots + b_{-n} s^{-n}} = \frac{P(s)}{Q(s)}. \quad (5)$$

Некоторые коэффициенты a_i , b_j полученной функции могут быть равны нулю.

Обозначим: b — число ветвей цепи, w — число узлов цепи, m — число независимых контуров цепи (цикломатическое число цепи).

Величины b , w и m связаны зависимостью

$$b - w + 1 = m.$$



С другой стороны, из теории блочных групп известно, что степень $\det_z A^d$ равна цикломатическому числу m графа, служащего изображением блочной групп A . Отсюда следует, что степень полинома $Q(s)$ должна быть равна цикломатическому числу, т. е. $m = n$, и, кроме того,

$$b - w + 1 = n. \quad (6)$$

Так как для определения $3b$ неизвестных можем располагать $4n + 4$ уравнениями, то должно выполняться следующее неравенство:

$$3b \geq 4n + 4. \quad (7)$$

Если неизвестных больше, чем уравнений, то можно задаться значениями параметров некоторых элементов цепи. Формулы (6) и (7) дают оценку числа узлов цепи, т. е.

$$w \geq \frac{n+4}{3} + 1 \quad (8)$$

Так как количество множителей в произведении (1) равно $w - 1$, то

$$m = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + k \quad (9)$$

В связи с этим схема будет содержать следующее число ветвей:

$$b = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + k + n; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

Приведем операции, необходимые для синтеза двухполюсника.

1. Положим $m = E(n+4)/3 + 1$ и рассмотрим множество ветвей

$$B = \{1, 2, \dots, b\}; \quad b = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + n + 1,$$

на основе которого строим произведения однострочных блочных групп

$$A = P_1 P_2 \dots P_m$$

с учетом условий реализуемости (1) и (2) и выбирая по крайней мере двухэлементные блочные группы P_i . Например,

$$A = [12] [23] [345] \text{ и т. д.}$$

Выполнив умножение, получаем всевозможные блочные группы, а значит, и всевозможные графы, соответствующие случаю $k = 1$.

2. Найдем все дополнительные блочные группы



$$A_1^d A_2^d \dots, A_i^d \dots, A_r^d.$$

3. Подсчитаем обратные алгебраические производные

$$\frac{\delta A_i^d}{\delta 1}, \frac{\delta A_i^d}{\delta 2}, \dots, \frac{\delta A_i^d}{\delta \alpha}, \dots, \frac{\delta A_i^d}{\delta b}; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

4. Вычислим детерминантные функции

$$\det_z A_i^d, \det_z \frac{\delta A_i^d}{\delta \alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, b_i; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Приравняем коэффициенты рациональных функций

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\det_z \frac{\delta A_i^d}{\delta \alpha}}{\det_z A_i^d} z \alpha$$

и в результате получим систему нелинейных уравнений

$$f_{n+1}^{\alpha, i}(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = a_{n+1},$$



$$f_{-(n+1)}^{\alpha, i}(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = a_{-(n+1)},$$

$$\varphi_n^i(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = b_n,$$

$$\varphi_{-n}^i(R_1, \dots, L_1, \dots, C_1, \dots) = b_{-n}.$$

(11)

Эту систему нелинейных уравнений можно решить с помощью ЭВМ, например, методом итераций. Нетрудно заметить, что функции f_k и φ_k будут суммами следующих произведений:

$$R_{\alpha_1} \dots R_{\alpha_m} L_{\alpha_1} \dots L_{\alpha_m} C_{\alpha_1} \dots C_{\alpha_1}. \quad (12)$$

Для первой итерации, например, можно принять

$$R_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ом}, \quad L_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ зН}, \quad C_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ф}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (13)$$

и исследовать разность

$$\begin{aligned} f_v^0 - b_v^0 &= \varepsilon_v^0; & v &= -(n+1), \dots, (n+1), \\ \varphi_v^0 - a_v^0 &= \delta_v^0; & v &= -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате процесса итерации получим

$$R_{\alpha_i}^n \simeq R_{\alpha_i}; \quad L_{\alpha_i}^n \simeq L_{\alpha_i}; \quad C_{\alpha_i}^n \simeq C_{\alpha_i}; \quad n \geq 1. \quad (15)$$

Если при аппроксимации были нормированы шкалы частот и импедансов, то для первой итерации вполне приемлемы значения (13).



В результате решения приведенных уравнений получим значения элементов цепи, соответствующие блочным группам $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

Можно заметить, что число неизвестных в системе (11) больше, чем число уравнений, на величину

$$\delta = 3E\left(\frac{n+4}{3}\right) - n - 1 \quad (16)$$

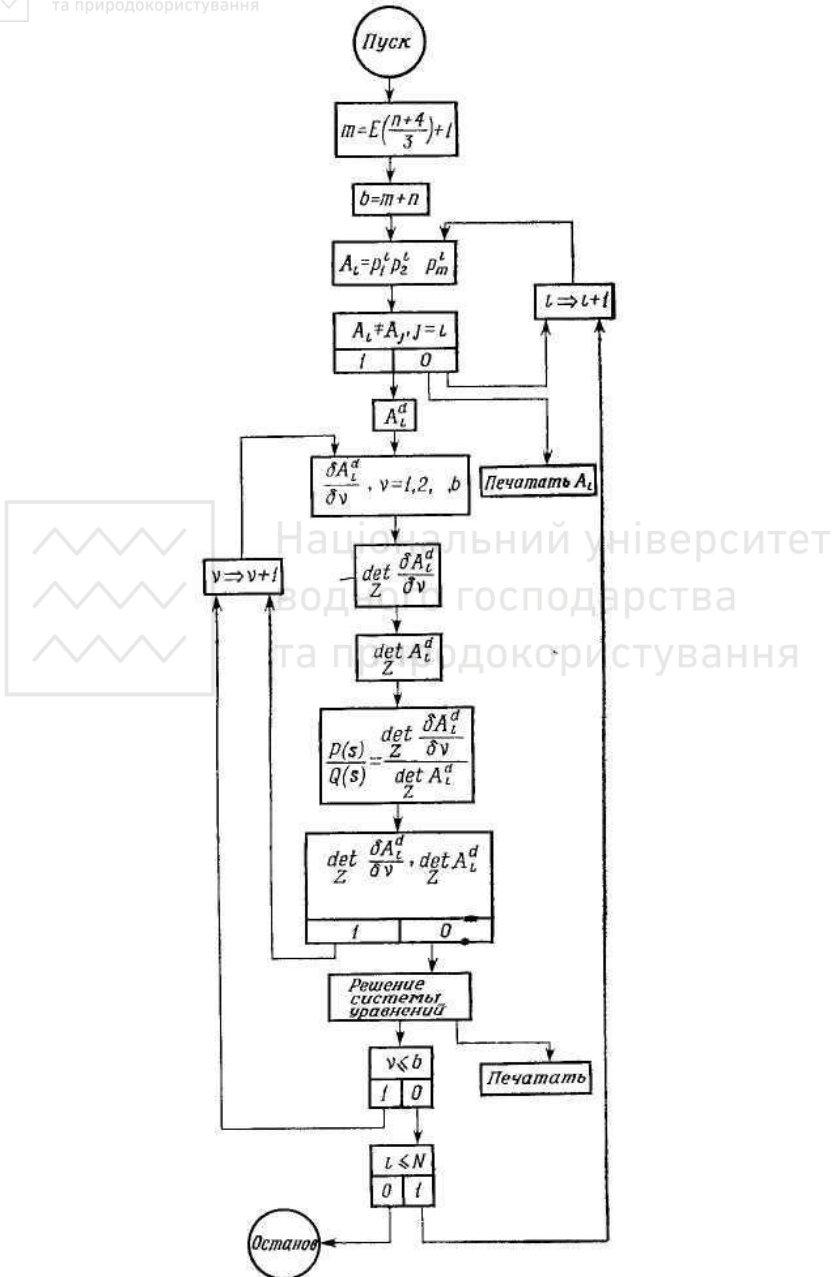
В связи с этим можно задаться значениями δ элементов или принять их равными нулю.

б. В случае необходимости повторяем весь цикл расчета для

$$m = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + 2, \quad m = E\left(\frac{n+4}{3}\right) + 3 \quad \text{и т.д.}$$

Очевидно, что в этих случаях число элементов будет больше, чем для $k = 0$. Следует подчеркнуть, что в соответствии с изложенными ранее способами идентификации слабосвязных структур при расчетах необходимо сразу же исключить все неправильные структуры.

Ниже дана упрощенная блок-схема программы синтеза двухполюсника приведенным методом.





10.2. Синтез пассивного RLC-четырёхполюсника

10.2.1. Предварительные сведения

Пусть дан пассивный RLC-четырёхполюсник (рис. 2).

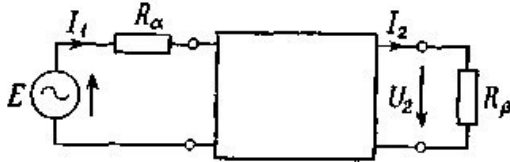


Рис. 2. Пассивный RLC-четырёхполюсник.

Характеристики четырёхполюсника обычно определяются с помощью передаточных функций или затухания

$$K_u = \frac{U_2}{E}, \quad K_i = \frac{I_2}{I_1}, \quad K_s = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_\beta}{R_\alpha}}, \quad \Gamma_s = \ln \frac{1}{K_s}$$

В методе блочных групп передача напряжения K_u , тока K_i , передача K_s , а также рабочее затухание Γ_s выражаются в следующем виде:

$$K_u = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\det A^d} z_\beta, \quad K_i = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\det \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}},$$

$$K_s = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\frac{1}{2} \det A^d} \sqrt{R_\alpha R_\beta}, \quad \Gamma_s = \ln \frac{1}{K_s},$$

(18)

где A — блочная группа, геометрическим изображением которой служит граф цепи.

Рассмотрим функцию пассивного четырёхполюсника (из условий физической реализации четырёхполюсника следует, что знаменатель функции K_s представляет собой полином Гурвица, а числитель — произвольный полином комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$ с вещественными коэффициентами.)



$$K_s = \frac{d_{\bar{m}} s^{\bar{m}} + d_{\bar{m}-1} s^{\bar{m}-1} + \dots + d_1 s + d_0}{c_n s^n + c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}, \quad \bar{m} \leq \bar{n}. \quad (19)$$

Умножая числитель и знаменатель этой функции на s^{-l} , получим

$$K_s = \frac{d_{\bar{m}} s^{\bar{m}-l} + \dots + d_0 s^{-l}}{c_n s^{n-l} + \dots + c_0 s^l} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{a_n s^n + \dots + a_{-n} s^{-n}}. \quad (20)$$

Выражение (20) будем называть стандартной передачей. Всегда справедливы следующие условия:

$$c_{\bar{n}} \neq 0 \quad \text{и} \quad d_{\bar{m}} \neq 0$$

Кроме того, допустим, что

$$d_0 = d_1 = \dots = d_{v-1} = 0; \quad d_v \neq 0. \quad (21)$$

Докажем следующую вспомогательную теорему.

Теорема 1. Граф, реализующий заданную передачу, степень числителя которой равна m , а знаменателя n , имеет цикломатическое число M не меньшее, чем

$$M_{\min} = \begin{cases} E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} < \bar{n}, \\ E\left(\frac{\bar{n}+1}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} = \bar{n} \end{cases} \quad (22)$$

Доказательство. Так как в выражение стандартной передачи всегда можно ввести дополнительные слагаемые с коэффициентами, равными нулю, то должны выполняться следующие неравенства:

$$n - l \geq \bar{m} - l, \quad n - l \geq l - v \quad (\text{из выражения для числителя}), \\ n \geq \bar{n} - l, \quad n \geq l \quad (\text{из выражения для знаменателя}).$$

Таким образом, должно выполняться неравенство

$$n \geq \text{Max}\{\bar{m} - l + 1; l - v + 1; \bar{n} - l; l\}. \quad (23)$$

Могут иметь место два частных случая:

а) $\bar{m} = \bar{n}$. Тогда

$$n_{\min} = \min_l \text{Max}\{\bar{n} - l + 1, l - v + 1, l\}.$$

В этом случае выражение (23) будет минимальным для $v = 0$ при $\bar{n} - l + 1 = l + 1$, а для $v > 0$ — при $\bar{n} - l + 1 = l$.

Обозначив l_0 значение l , при котором $n = \min$, получим



$$l_0 = \frac{\bar{n}}{2} \quad \text{для } \mathcal{G} = 0,$$

$$l_0 = \frac{\bar{n} + 1}{2} \quad \text{для } \mathcal{G} > 0$$

Очевидно, l_0 должно быть целым числом. Можно заметить, что

$$l_0 = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) \quad \text{и} \quad l_0 = E\left(\frac{\bar{n} + 1}{2}\right)$$

приводят к одинаковой величине

$$n_{\min} = E\left(\frac{\bar{n} + 1}{2}\right) + 1.$$

б) $\bar{m} < \bar{n}$.

Тогда

$$n_{\min} = \min_l \text{Max}\{l - v + 1, \bar{n} - l, l\}.$$

В этом случае выражение (23) для $v = 0$ будет минимальным при $l + 1 = \bar{n} - 1$, а для $v > 0$ — при $l = \bar{n} - 1$.

Следовательно, имеем

$$l_0 = \frac{\bar{n} - 1}{2} \quad \text{для } \mathcal{G} = 0,$$

$$l_0 = \frac{\bar{n}}{2} \quad \text{для } \mathcal{G} > 0$$

Легко заметить, что как для четных, так и нечетных \bar{n} минимальное значение n равно

$$n_{\min} = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1.$$

Так как степень знаменателя приведенной к стандартному виду передачи должна быть равна числу множителей в каждом из слагаемых $\det A^d$, а с другой стороны, это число равно числу m

простых множителей, на которые разлагается A^d

$$A^d = P_1 P_2 \dots P_m$$

то на основе приведенной ранее теоремы заключаем, что n равно цикломатическому числу графа, реализующего заданную передачу, т. е. $n = M$ и

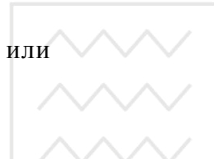


$$M_{\min} = \begin{cases} E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} < \bar{n}, \\ E\left(\frac{\bar{n} + 1}{2}\right) + 1 & \text{для } \bar{m} = \bar{n} \end{cases}$$

Заметим, что M имеет минимум при $l = E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right)$. Доказанная

теорема может быть использована при синтезе четырехполюсников методом блочных групп, так как она позволяет определить класс графов, реализующих заданную передачу четырехполюсника.

Теорема 2. В произвольном пассивном RLC-четыреполюснике число X_L индуктивностей и число X_R резисторов удовлетворяют следующим неравенствам:

или  $2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1$ (24)

где \bar{n} — степень знаменателя передаточной функции четырехполюсника.

Первое неравенство относится к случаю, когда полином в числителе функции содержит свободный член ($v = 0$), второе — когда в числителе отсутствует свободный член ($v > 0$).

Доказательство. Допустим, что передаточная функция записана в виде (19) и пусть справедливо равенство (21). Умножая числитель и знаменатель выражения (19) на множитель s^{-l} , приведем его к стандартному виду

$$K_s = \frac{0 \cdot s^{n-1} + 0 \cdot s^{n-2} + \dots + b_v s + \dots + b_0 + \dots + b_{-(n-1)} s^{-(n-1)}}{0 \cdot s^n + 0 \cdot s^{n-1} + \dots + a_\mu s + \dots + a_0 + \dots + a_{-n} s^{-n}}, \quad (25)$$

где b_v и a_μ — ненулевые коэффициенты при наибольших степенях числителя и знаменателя K_s , имеющие следующий вид:



$$a_{\mu} = \sum_k \prod_{i=1}^{M_k} R_{\alpha_{ik}} \prod_{i=1}^{\mu} L_{\alpha_{ik}} \prod_{j=1}^{N_k} L_{\alpha_{jk}} C_{\alpha_{jk}}^{-1}, \quad (26)$$

$$b_v = \sum_k \prod_{i=1}^{M_k^*} R_{\beta_{ik}} \prod_{i=1}^v L_{\beta_{ik}} \prod_{j=1}^{N_k^*} L_{\beta_{jk}} C_{\beta_{jk}}^{-1},$$

где


$$\begin{aligned} M_k + \mu + 2N_k &= n, \\ M_k^* + v + 2N_k^* &= n-1. \end{aligned} \quad (27)$$

В выражении (26) мы приняли, что $\mu, v > 0$. Можно показать, что случай, когда $\mu, v < 0$, не изменяет условия теоремы. Из доказательства теоремы 1 следует, что

$$n \geq \text{Max}\{\bar{m} - l - 1; l - v + 1; \bar{n} - l; l\}, \quad \bar{m} \leq \bar{n}. \quad (28)$$

Рассмотрим случай $\bar{m} < \bar{n}$. Тогда для n можно написать

а) при $v = 0$



$$n \geq \begin{cases} l+1 & \text{для } l+1 \geq \bar{n}-l, \\ \bar{n}-1 & \text{для } l+1 < \bar{n}-l \end{cases} \quad (29a)$$

откуда

$$n-l=1, 2, 3, \dots;$$

б) при $v > 0$

$$n \geq \begin{cases} l & \text{для } l \geq \bar{n}-l, \\ \bar{n}-l & \text{для } l < \bar{n}-l, \end{cases} \quad (29б)$$

откуда

$$n-l=0, 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$\mu + N_k = X_{Lk}, \quad v + N_k^* = X_{Lk}^*. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (27), получим

$$2X_{Lk} + M_k = n + \mu, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* = n - 1 + v. \quad (31)$$

Так как

$$\mu = \bar{n} - l, \quad v = \bar{m} - l,$$

то можно написать

$$\begin{aligned} 2X_{Lk} + M_k &= \bar{n} + (n-l), \\ 2X_{Lk}^* + M_k^* &= \bar{m} + (n-l)-1. \end{aligned} \quad (32)$$

Принимая во внимание выражения (29а) и (29б), запишем

а) для $v=0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_{Lk} + M_k \geq \bar{n} + 1, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* \geq \bar{m}; \quad (33)$$

б) для $v>0, \bar{m} < \bar{n}$

$$2X_{Lk} + M_k \geq \bar{n}, \quad 2X_{Lk}^* + M_k^* \geq \bar{m} - 1. \quad (34)$$



Если теперь X_L — число индуктивностей, а X_R — число резисторов четырехполюсника, то легко заметить, что

$$X_{Lk}, X_{Lk}^* \leq X_L, \quad M_k, M_k^* \leq X_R. \quad (35)$$

Учитывая это в выражениях (33) и (34), получим

а) для $v=0$, $\bar{m} < \bar{n}$

$$2X_L + X_R \geq \bar{n} + 1, \quad 2X_L + X_R \geq \bar{m}; \quad (33a)$$

б) для $v>0$, $\bar{m} < \bar{n}$

$$2X_L + X_R \geq \bar{n}, \quad 2X_L + X_R \geq \bar{m} - 1. \quad (34a)$$

Из неравенств (33a) и (34a) окончательно следует, что для $\bar{m} < \bar{n}$

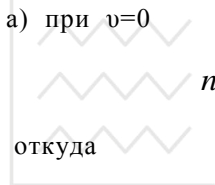
$$\begin{aligned} 2X_L + X_R &\geq \bar{n} + 1 && \text{для } v = 0, \\ 2X_L + X_R &\geq \bar{n} && \text{для } v > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим случай $\bar{m} = \bar{n}$. При этом

$$n \geq \text{Max}\{\bar{n} - l + 1, l - v + 1, \bar{n} - l, l\},$$

и можно написать

а) при $v=0$



откуда

$$n \geq \begin{cases} l + 1 & \text{для } l + 1 \geq \bar{n} - l + 1, \\ \bar{n} - l + 1 & \text{для } l + 1 < \bar{n} - l + 1, \end{cases}$$

$$n - l = 1, 2, 3, \dots;$$

б) при $v > 0$

$$n \geq \begin{cases} l & \text{для } l \geq \bar{n} - l + 1, \\ \bar{n} - l + 1 & \text{для } l < \bar{n} - l + 1, \end{cases}$$

откуда

$$n - l = 0, 1, 2, \dots$$

Для определения разности $n - l$ имеем условия, аналогичные случаю $\bar{m} < \bar{n}$. Учитывая их в соотношении (32), получим

$$\left. \begin{aligned} 2X_L + X_R &\geq \bar{n} + 1 \\ 2X_L + X_R &\geq \bar{m} \end{aligned} \right\} \text{ для } \vartheta = 0,$$

а также

$$\left. \begin{aligned} 2X_L + X_R &\geq \bar{n} \\ 2X_L + X_R &\geq \bar{m} - 1 \end{aligned} \right\} \text{ для } \vartheta > 0.$$

Последние неравенства также приводят к формулам (36), доказанным ранее для $\bar{m} < \bar{n}$.

Из теоремы 2 вытекают следствия.



Следствие 1. Если в пассивном RLC-четырёхполюснике число резисторов равно числу индуктивностей, т. е. $X_R = X_L$, то

$$X_L \geq \begin{cases} \frac{\bar{n} + 1}{3}, & \vartheta = 0, \\ \frac{\bar{n}}{3}, & \vartheta > 0. \end{cases} \quad (37)$$

Следствие 2. Если в пассивном RLC-четырёхполюснике, нагруженном активными сопротивлениями R_α, R_β , последовательно с каждой индуктивностью включен резистор, т. е. если $X_R = X_L + 2$, то

$$X_L \geq \begin{cases} \frac{\bar{n} - 1}{3}, & \vartheta = 0, \\ \frac{\bar{n} - 2}{3}, & \vartheta > 0. \end{cases} \quad (38)$$

Следствие 3. Если принять, что каждый резистор, за исключением R_α, R_β , включен последовательно с индуктивностью, т. е. $X_R = X_L + 2$, то число индуктивностей минимально, если все индуктивности содержатся в одном дополнении дерева с резисторами R_α, R_β .

Выражение (35) имеет знак равенства, если в выражениях (26) существует такое слагаемое, в котором сгруппированы все индуктивности и резисторы, что имеет место тогда, когда все индуктивности и резисторы содержатся в одном дополнении дерева с резисторами R_α, R_β . Следует подчеркнуть, что только в этом случае выполняется равенство и в выражениях (33а) и (34а), а значит, и достигаются минимальные значения X_L и X_R , например при $X_R = X_L + 2$.

Пример 1. Передачу

$$K_s = \frac{P(S)}{Q(S)},$$

степень числителя которой равна 9 ($\bar{n} = 9$), можно реализовать при помощи схемы (рис. 3, а).

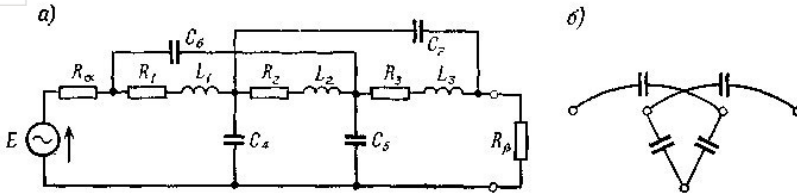


Рис. 3. а) пример четырехполюсника с минимальным числом индуктивностей; б) противодерево, не содержащее катушек индуктивности.

Эта цепь содержит минимальное число индуктивностей, так как все они содержатся в дополнении дерева с резисторами R_α , R_β . Действительно, при исключении ветвей, содержащих индуктивности и резисторы R_α , R_β , схема будет иметь структуру (рис. 3, б), т. е. представляет собой дерево. Исключенные ветви служат хордами дерева (рис. 3, б) и, следовательно, образуют дополнение дерева с элементами R_α , R_β .

Рассмотренное свойство, сформулированное в следствии 3, может быть использовано при синтезе RLC-четырёхполюсника с помощью ЭВМ. Согласно этому свойству, элементы R , L можно размещать в одном из выбранных дополнений деревьев, а все остальные ветви четырехполюсника оставить для емкостных элементов. Такой способ размещения элементов в графе легко запрограммировать для ЭВМ.

10.2.2. Определение знаков слагаемых функции совпадения

Знаки функции совпадения

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)$$

при анализе схем методом блочных групп без вычислительной машины определяются простым рассмотрением ориентации ветвей α и β в графе. Понятно, что вычислительная машина непосредственно не может определить ориентации ветвей в графе. Поэтому при разработке алгоритма синтеза четырехполюсников с применением ЭВМ важно найти чисто



алгебраический метод нахождения знаков слагаемых функции совпадения. Такой метод можно получить следующим образом. Слагаемые функции совпадения, имеющие знак плюс, соответствуют контурам, показанным на рис. 4, а, а слагаемые со знаком минус — контурам, показанным на рис. 4, б.

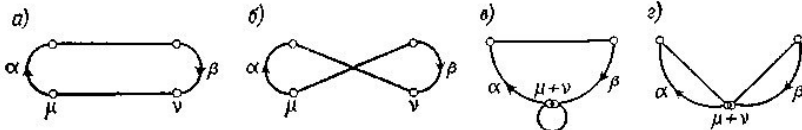


Рис. 4. Иллюстрация алгебраического метода определения знаков функции совпадения.

Короткое замыкание узлов μ и ν в этих контурах приводит к графам (рис. 4, в и г). Из рис. 4 видно, что в случае б, соответствующем знаку плюс, существует контур, содержащий ветви α и β , в то время как в случае г такого контура нет. Это служит основой алгебраического метода определения знаков функции совпадения.

Допустим, что блочная группа A равна произведению однострочных простых блочных групп

$$A = P_1 P_2 \dots P_m.$$

Введем некоторые определения.

Определение 1. Простые блочные группы P_i, P_j будем называть **сгруппированными блочными группами**, если они содержат по крайней мере один одинаковый элемент, т. е.

$$P_i, P_j \text{ сгруппированная} \Leftrightarrow \exists (\alpha \in P_i) \wedge (\alpha \in P_j). \quad (39)$$

Например, однострочные блочные группы

$$P_i = [1 \ 2 \ 4 \ 7], \quad \text{а также} \quad P_j = [3 \ 4 \ 6 \ 8]$$

будут сгруппированными блочными группами, так как обе эти блочные группы содержат элемент 4.

Если блочные группы P_i, P_j сгруппированы, то пишем $P_i \leftrightarrow P_j$.

Если существует последовательность однострочных блочных групп

$$P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_{n-1} \leftrightarrow P_n. \quad (40)$$

соответствующая набору вершин $1, 2, \dots, n$ в графе, то тогда существует путь, соединяющий вершину 1 с вершиной n .

Если данный граф (мультиграф) служит геометрическим изображением блочной группы, то блочная группа, соответствующая графу, в котором все ветви пути, соединяющего



вершину μ с вершиной ν , замкнуты, обозначим через $A_{\mu\nu}^*$.
Получим

$$A = P_1 P_2 \dots P_{w-1}; \quad A_{\mu\nu}^* = (P_\mu + P_{\mu 1} + P_{\mu 2} + \dots + P_\nu) \prod_{i=1}^{w-1} P_i, \quad (41)$$

где w — число вершин (узлов) графа, а $P_\mu, P_{\mu 1}, P_{\mu 2}, \dots, P_\nu$ — однострочные сгруппированные блочные группы, соответствующие вершинам $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \nu$, которые принадлежат пути, соединяющему вершину μ с вершиной ν , т. е.

$$P_\mu \leftrightarrow P_{\mu 1} \leftrightarrow P_{\mu 2} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_\nu$$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. Если A — блочная группа, геометрическим изображением которой служит граф четырехполюсника со структурой, показанной на рис. 5, а вершины μ и ν инцидентны соответственно элементам α и β (например, $\alpha \in P_\mu, \beta \in P_\nu$), то столбцы блочной группы

$$C = \frac{A_{\mu\nu}^{*\alpha}}{\partial\alpha} \cap \frac{A_{\mu\nu}^{*\beta}}{\partial\beta} \quad (42)$$

определяют все слагаемые функции совпадения

$$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial\alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial\beta} \right), \text{ которые имеют знак плюс.}$$

Справедливость теоремы 3 непосредственно вытекает из предыдущего рассуждения. Исключение всех ветвей графа, определенных одним из столбцов конъюнкции

$$\frac{A_{\mu\nu}^{*\alpha}}{\partial\alpha} \cap \frac{A_{\mu\nu}^{*\beta}}{\partial\beta},$$

приводит к графу с одним циклом (контуром) (рис. 4, а). Такой контур соответствует положительному члену функции совпадения.

Метод определения знаков функции совпадения основан на теореме 3 и применим для четырехполюсника со структурой, показанной на рис. 5.

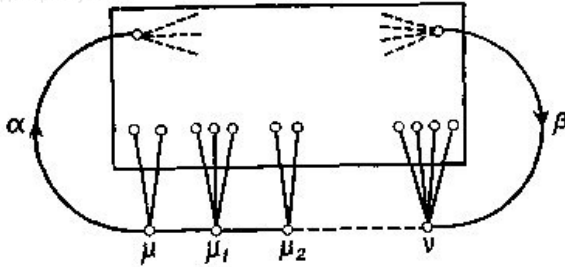


Рис. 5.

Такая структура довольно часто встречается в практике. Однако можно сформулировать более общий алгоритм, позволяющий определять знаки функции совпадения любой схемы. Такой алгоритм приведен ниже.

Блочную группу, соответствующую графу (мультиграфу), в котором закорочены два узла μ и ν , обозначим $A_{\mu\nu}$. Тогда

$$A = P_1 P_2 \dots P_{w-1}, \quad A_{\mu\nu} = (P_\mu + P_\nu) \prod_{i=1}^{w-1} P_i \quad (i \neq \mu, \nu), \quad (43)$$

где w — число вершин графа (узлов). Обозначим $A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}$ блочную группу, полученную из блочной группы A путем исключения в ней всех столбцов, содержащих любой из элементов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$. Очевидно, что

$$A^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i} = \frac{\delta^i A}{\delta \gamma_1 \delta \gamma_2 \dots \delta \gamma_i}. \quad (44)$$

Теорема 4. Каждый член $z_{\gamma_1}, z_{\gamma_2}, \dots, z_{\gamma_i}$ функции совпадения

$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)$ будет иметь знак плюс, если z

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial \beta} \neq 0, \quad (45a)$$

или знак минус, если

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}}{\partial \beta} = 0. \quad (45b)$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих положениях:

1. После исключения ветвей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ в графе, изображающем блочную группу A , этот граф переходит в граф,



содержащий только один цикл, проходящий через ветви α и β . В зависимости от знака члена $z_{\gamma_1}, z_{\gamma_2}, \dots, z_{\gamma_i}$ в графе блочной группы $A_{\mu\nu}^{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_i}$ этот цикл сохраняется или исчезает (рис. 4, в и з).

2. Для любой блочной группы B имеет место следующая формула

$$\left(\frac{\partial B^d}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial B^d}{\partial \beta} = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0 \right).$$

Практическое применение теоремы 4 проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 2. Определить знаки функции совпадения

$\text{Sim}_z \left(\frac{\partial A^d}{\partial 1}, \frac{\partial A^d}{\partial 2} \right)$ для схемы, приведенной на рис. 6.

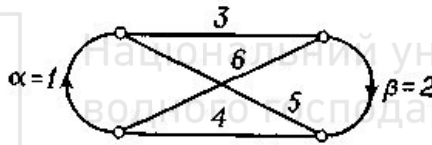


Рис. 6.

Имеем

$$A = [1 \ 4 \ 6] [2 \ 4 \ 5] [1 \ 3 \ 5],$$

$$A_{\mu\nu} = ([1 \ 4 \ 6] + [2 \ 4 \ 5]) [1 \ 3 \ 5] = [1 \ 2 \ 5 \ 6] [1 \ 3 \ 5],$$

откуда

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 2 & 2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

После определения дополнительной блочной группы A^d находим



$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} \cap \frac{\partial A^d}{\partial 2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Далее определяем производные

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2}.$$

Получаем

$$A_{\mu\nu}^{56} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{\mu\nu}^{34} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1} = [2 \ 3],$$

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2} = [1 \ 3], \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1} = [2 \ 6], \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2} = [1 \ 5],$$

$$\frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 1} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{56}}{\partial 2} = [3] \neq 0, \quad \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 1} \cap \frac{\partial A_{\mu\nu}^{34}}{\partial 2} = 0,$$

а также

$$\text{Sim}_z \frac{\partial A^d}{\partial 1} \cap \frac{\partial A^d}{\partial 2} = z_5 z_6 - z_3 z_4.$$

Теперь, пользуясь формулами (18), можно определить характеристические функции рассматриваемого четырехполюсника, например рабочее затухание:

$$F_S = \ln \left[\frac{z_4 z_5 z_6 + z_3 z_4 z_6 + z_2 z_5 z_6 + z_2 z_3 z_6 + z_3 z_5 z_6 + \dots + z_1 z_3 z_4}{2(z_5 z_6 - z_3 z_4) \sqrt{z_1 z_2}} \right].$$

Очевидно, что при анализе схемы знаки функции совпадения можно легко определить путем рассмотрения ориентации ребер α и β в цепи. Однако при синтезе схемы при помощи ЭВМ такой подход не применим.

10.2.3. Синтез четырехполюсника средствами ЭВМ

Метод синтеза RLC-четырёхполюсника при помощи ЭВМ поясним следующим примером.

Пример 3. Пусть дан четырехполюсник (рис. 7).

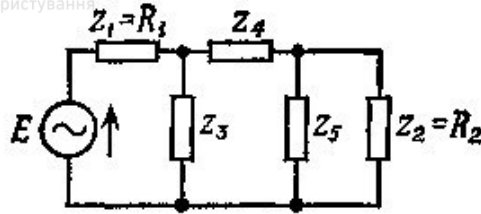


Рис. 7.

Его элементы определим таким образом, чтобы передаточная функция комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$ определялась выражением

$$K_s = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (46)$$

На основе приведенных формул имеем

$$K_s = \frac{\text{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\det A^d}{z}} \sqrt{R_1 R_2}.$$

После простых расчетов получаем

$$\frac{\det A^d}{z} = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_3 z_5 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_5 + z_2 z_3 z_4 + z_3 z_4 z_5 + z_2 z_3 z_5,$$

а также

$$\text{Sim} \frac{\partial A^d}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A^d}{\partial \beta} = z_3 z_5$$

Умножая числитель и знаменатель формулы (46) на s^{-2} и дополняя их нулевыми членами таким образом, чтобы передаточная функция стала симметричной относительно степеней комплексной частоты s , получим

$$K_s = \frac{0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 0 \cdot s^{-1} + 0 \cdot s^{-2}}{0 \cdot s^3 + 0 \cdot s^2 + s + 2 + 2 \cdot s^{-1} + s^{-2} + 0 \cdot s^{-3}}.$$

Если принять

$$z_i = R_i, \quad z_2 = R_2, \quad z_3 = \frac{1}{sC_3}, \quad z_4 = sL_4, \quad z_5 = \frac{1}{sC_5},$$

то

$$\frac{\det A^d}{z} = R_1 R_2 C_3^{-1} s^{-1} + R_1 C_3^{-1} s^{-2} + R_1 R_2 L_4 s + R_1 L_4 C_5^{-1} + R_1 R_2 C_5^{-1} s^{-1} + R_2 C_3^{-1} L_4 + C_3^{-1} L_4 C_5^{-1} s^{-1} + R_2 C_3^{-1} C_5^{-1} s^{-2}.$$

Функция совпадения равна



$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) \Big|_{\substack{\alpha=1 \\ \beta=2}} = z_3 z_5 = C_3^{-1} C_5^{-1} s^{-2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2} \det A^d = 0 \cdot s^3 + 0 \cdot s^2 + s + 2 + 2s^{-1} + s^{-2} + 0 \cdot s^{-3},$$

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \beta}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right) = 0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 + 0 \cdot s^{-1} + s^{-2},$$

откуда для определения значений неизвестных величин элементов четырехполюсника получаем уравнения

$$R_1 R_2 R_4 = 2,$$

$$R_1 L_4 C_5^{-1} + R_2 L_4 C_3^{-1} = 4,$$

$$R_1 R_2 C_3^{-1} + R_1 R_2 C_5^{-1} + L_4 C_3^{-1} C_5^{-1} = 4,$$

$$R_1 C_3^{-1} C_5^{-1} + R_2 C_3^{-1} C_5^{-1} = 2.$$

$$C_3^{-1} C_5^{-1} = 1.$$

Решение последних уравнений дает

$$R_1 = R_2 = 1 \text{ ом}, \quad C_3 = C_5 = 1 \phi, \quad L_4 = 2 \text{ гн}.$$

Таким образом, мы определили схему с передаточной функцией (46) и структурой, показанной на рис. 7.

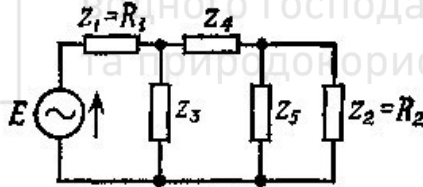


Рис. 7.

Этот пример поясняет способ синтеза четырехполюсника методом блочных групп. Далее проведем обобщение этого метода. С этой целью рассмотрим передачу стандартного вида (20)

$$K_s = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_{-(n-1)}s^{-(n-1)}}{a_n s^n + \dots + a_{-n} s^{-n}} = \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Очевидно, некоторые коэффициенты a_i , а также b_i функции K_s могут быть равными нулю, как это было показано в последнем примере. Число нулевых коэффициентов можно определить с помощью следующей формулы:



$$\Theta = \begin{cases} 2 + 2E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) - \bar{m} & \text{для четного } \bar{n}, \\ 1 + 2E\left(\frac{\bar{n}}{2}\right) - \bar{m} & \text{для нечетного } \bar{n}, \end{cases} \quad (47)$$

где \bar{m} и \bar{n} — числа, определяющие порядок числителя и знаменателя функции (19). В этом рассуждении мы приняли допущение, что все коэффициенты c_i и d_i функции (19) отличны от нуля.

Допустим, что каждая (внутренняя) ветвь четырехполюсника представляет собой последовательное соединение резистора, индуктивности и конденсатора. Тогда импеданс z_i произвольной внутренней ветви четырехполюсника запишется в виде

$$z_i = sL_i + R_i + s^{-1}C_i^{-1} \quad (i \neq \alpha, i \neq \beta). \quad (48)$$

Для ветвей α и β имеем

$$z_\alpha = R_1, \quad z_\beta = R_2,$$

где величины резисторов R_1 и R_2 заранее известны. Введем следующие обозначения: b — число ветвей графа, w — число вершин графа, M — цикломатическое число графа, равное количеству линейно независимых контуров.

В соответствии с формулой Эйлера для произвольного графа или мультиграфа

$$b - w + 1 = M. \quad (49)$$

При этом заметим, что порядок функции $\det A^d$ равен n .

В результате получаем

$$M = n \quad \text{и} \quad b - w + 1 = n. \quad (50)$$

Так как число уравнений, которые можно составить для определения элементов схемы, равно количеству коэффициентов рациональной функции (20), т. е.

$$(2n + 1) + (2n - 1) = 4n,$$

а число неизвестных элементов равно $3(b - 2)$, то должно выполняться следующее неравенство:

$$3(b - 2) \geq 4n. \quad (51)$$

Учитывая это неравенство в равенствах (50), получим формулу для оценки числа вершин графа:

$$w \geq (n/3) + 3. \quad (52)$$

Так как количество простых множителей блочной группы A равно $m = w - 1$, имеем

$$m = E(n/3) + 3 + k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (53)$$



где $E(x)$ обозначает целую часть от x .

Число ветвей b графа может быть определено с помощью выражения

$$b = E(n/3) + 3 + n + k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (54)$$

Если в последней формуле принять $k = 0$, то получим минимальное количество ветвей графа, которое зависит от числа n . Вводя такое допущение, оптимизируем схему по числу ветвей. Самые общие приемы, используемые при синтезе четырехполюсника на ЭВМ с помощью описанного метода, можно сформулировать в следующем виде:

1. Принимаем, что число простых множителей блочной группы A равно $n = E(n/3) + 3$, и рассматриваем множество ветвей

$$B = \{1, 2, \dots, b\}; \quad b = m + n,$$

на основании которого (в соответствии с определенной программой ЭВМ) находим все возможные блочные группы

$$A_i = P^i_1 P^i_2 \dots P^i_m; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (55)$$

удовлетворяющие условиям реализации (2) и соответствующие сильносвязным графам. К тому же надо принять, что каждая однострочная блочная группа P^i_j содержит по крайней мере два элемента, например

$$A_i = [1 \ 2] [1 \ 3] [2 \ 3 \ 4] \text{ и т. д.}$$

Таким образом, получаем блочные группы $A_1, A_2, \dots, A_b, \dots$, определяющие алгебраическим путем различные структуры графа.

2. Рассчитываем дополнительные блочные группы

$$A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_b, \dots,$$

3. Находим детерминантные функции

$$\det_z A^d_1, \det_z A^d_2, \dots, \det_z A^d_i, \dots,$$

4. Ищем алгебраические производные

$$\frac{\partial A^d_i}{\partial 1}, \frac{\partial A^d_i}{\partial 2}, \dots, \frac{\partial A^d_i}{\partial b}; \quad i = 1, 2, \dots$$

5. Исследуем все заземленные четырехполюсники, которые соответствуют блочным группам $A_1, A_2, \dots, A_b, \dots$ (рис. 8).



Метод итерации решения этих уравнений средствами ЭВМ приводится ниже. Он основан на том, что входными величинами служат неизвестные $R_{\alpha_i}^0, L_{\alpha_i}^0, C_{\alpha_i}^0$, для которых, например, можно принять значения

$$R_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ом}, \quad L_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ гн}, \quad C_{\alpha_i}^0 = 1 \text{ ф}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (59)$$

Средствами ЭВМ исследуем разности

$$\begin{aligned} f_v^0 - b_v^0 &= \varepsilon_v^0, & v &= -(n-1), \dots, (n-1), \\ \phi_v^0 - a_v &= \delta_v^0, & v &= -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (60)$$

Итерационный расчет проводим таким образом, чтобы уменьшить значения $\text{Max} |\varepsilon_v^u|$, а также $\text{Max} |\delta_v^u|$. Тогда получаем сходящийся ряд итераций, приближенно определяющий величины неизвестных $R_{\alpha_i}, L_{\alpha_i}, C_{\alpha_i}$

$$R_{\alpha_i}^n \simeq R_{\alpha_i}; \quad L_{\alpha_i}^n \simeq L_{\alpha_i}; \quad C_{\alpha_i}^n \simeq C_{\alpha_i}; \quad n \geq 1. \quad (61)$$

Если при аппроксимации было введено нормирование частоты к полосе $w \in [0, 1]$ и нормирование сопротивлений к $R_1 = 1 \text{ ом}$, то тогда полностью оправданы принятые ранее значения входных величин (59).

7. В случае необходимости исследуем также структуры с большим числом узлов, соответствующие блочным группам A_1, A_2, \dots, A_q .

Эти структуры можно получить путем поочередного выбора в множестве

$$B = \{1, 2, 3, \dots, b\}$$

двух таких элементов α_k и β_k , что α_k и β_k принадлежат двум различным блочным группам P_j^i произведения (55), т. е.

$$\alpha_k \in P_j^i, \quad \beta_k \in P_l^j; \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots \quad (j \neq l).$$

В этом случае функция

$$\text{Sim}_Z \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta_k} \right)$$

может содержать отрицательные слагаемые. Положительные и отрицательные слагаемые можно различить с помощью метода, описанного ранее.

8. Рассчитываем значения элементов в случае четырехполюсника произвольной структуры аналогично п. 6.

Представленный способ синтеза четырехполюсника средствами ЭВМ позволяет учесть различные критерии оптимизации схемы, что служит одним из достоинств описываемого метода. Если,



например, принять $k > 0$, а значит, $k = 1, 2, 3, 4$ и т. д., то получим другие значения элементов схемы, благодаря чему можно ввести новые связи, определяющие, например, равенство всех индуктивностей или конденсаторов, заданный разброс параметров составных элементов четырехполюсника, собственные потери индуктивностей и конденсаторов, минимальную суммарную индуктивность схемы и т. д.

Часто удобно принять

$$l > E \left(\frac{\bar{n}}{2} \right),$$

Тогда получим граф (мультиграф) с минимальным цикломатическим числом. Благодаря этому допущению можно создать новые, часто более удобные структуры графов. Можно также рассмотреть и те схемы, которые в результате проведенного синтеза имеют некоторые отрицательные элементы. Такая схема может быть выполнена только при использовании активных элементов.

Достоинства представленного метода синтеза четырехполюсника средствами ЭВМ можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Общность метода, заключающаяся прежде всего в том, что он не накладывает никаких ограничений на структуру схемы.
2. Возможность определения множества схем, реализующих поставленную задачу синтеза.
3. Возможность учета разных критериев оптимизации схемы (например, минимального цикломатического числа, минимального числа ветвей, равенства всех индуктивностей, собственной добротности элементов, учет разброса параметров элементов и т. д.).

Данный метод дает также возможность для дальнейших обобщений. Например, с помощью этого метода можно упростить процесс синтеза сложной цепи путем ее разбиения на отдельные подсхемы. С этой целью можно использовать результаты, представленные ранее. Эта проблема, однако, требует дальнейших исследований и здесь не рассматривается.

Остановимся на проблеме исключения цепей, графы которых не имеют сильносвязной структуры. Сильносвязные (или собственные) графы были рассмотрены ранее. С помощью метода блочных групп граф такого типа можно определить, пользуясь известным свойством. Согласно этому свойству, граф имеет



сильносвязную структуру тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\exists \alpha \in A \forall \beta \in A \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \neq 0$$

где A — блочная группа, для которой рассматриваемый граф служит геометрическим изображением.

На рис. 9 дан пример четырехполюсников, структуры которых не сильносвязны и которые должны быть исключены в процессе синтеза.

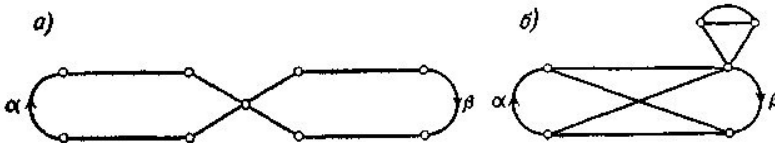


Рис. 9. Четырехполюсники не сильносвязной структуры.

Нетрудно проверить, что графы (рис. 9) не удовлетворяют условию (62). Очевидно, что это условие может быть легко запрограммировано на ЭВМ. Поэтому уже в процессе поиска блочных групп можно исключить ненужные графы.

Процесс синтеза четырехполюсника можно значительно упростить, если некоторые операции, предусмотренные представленным алгоритмом, будут выполнены не машиной, а человеком. Так, например, если определить схему четырехполюсника, сразу ориентируясь на определенную структуру, например лестничную или мостовую, то процесс машинного синтеза значшельно упрощается, так как не нужно находить блочные группы и исключать ненужные графы.

Такой упрощенный полуавтоматический метод синтеза может иметь большое применение, например, для проектирования электрических фильтров. Ниже приведены результаты расчетов трех простых RLC-фильтров, спроектированных при помощи ЭВМ. Синтез этих фильтров был приведен упрощенным методом, в котором разработчик сразу определил структуру проектируемой схемы.

При разработке программы для ЭВМ было принято допущение, что в каждой ветви схемы находится только один элемент, благодаря чему получено некоторое упрощение по сравнению с общим методом синтеза RLC-четырёхполюсников. Для получения минимального числа индуктивностей фильтров



использовано свойство, описанное ранее. Производство простых блочных групп также было рассчитано непосредственно без помощи машины. Естественно, что при более сложной схеме можно запрограммировать операцию умножения блочных групп цифровой машиной, и тогда расчет фильтра сводится к очень простой операции, так как почти весь процесс проектирования будет выполнен машиной.

Пример 4. Фильтр с равноволновой характеристикой, передаточная функция которого имеет седьмую степень:

$$K_s = \frac{s^2 + 4}{7,9168s^6 + 14,159s^4 + 22,782s^2 + 20,365s^2 + 12,754s + 4} \cdot (63)$$

Расчет фильтра был проведен на ЭВМ. В результате расчетов получена схема фильтра (рис. 10).

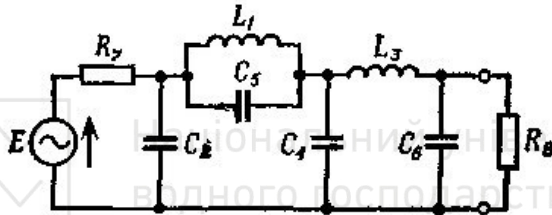


Рис. 10. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (63).

Средствами ЭВМ в результате 10 итераций определены следующие значения элементов:

$$L_1 = 1,154722 \text{ гн,}$$

$$L_3 = 1,675625 \text{ гн,}$$

$$C_2 = 1,112944 \text{ ф,}$$

$$C_4 = 0,615818 \text{ ф,}$$

$$C_5 = 4,6188886 \text{ ф,}$$

$$C_6 = 1,11286 \text{ ф,}$$

$$R_7 = 1 \text{ ом,}$$

$$R_8 = 1,13542 \text{ ом.}$$

Пример 5. Фильтр с оптимально монотонной характеристикой (Папулиса) с передаточной функцией пятого порядка

$$K_s = \frac{0,224}{s^5 + 1,551s^4 + 2,203s^3 + 1,693s^2 + 0,898s + 0,224} \cdot (64)$$

Расчет этого фильтра также был проведен на ЭВМ. Значения элементов получены в результате 5 итераций. Схема фильтра показана на рис. 11.

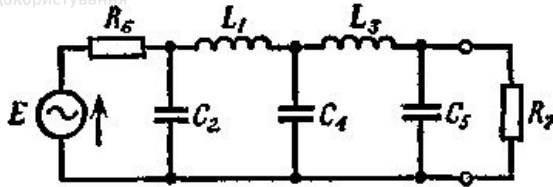


Рис. 11. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (64).

Значения элементов фильтра равны

$$L_1 = L_3 = 1,466371 \text{ гн},$$

$$C_2 = C_5 = 0,7479164 \text{ ф},$$

$$C_4 = 0,4263531 \text{ ф},$$

$$R_6 = R_7 = 0,9644312 \text{ ом}.$$

Пример 6. Фильтр на индуктивностях с потерями, с максимально плоской характеристикой (Баттерворта), передаточная функция пятого порядка которого имеет вид

$$K_s = \frac{0,914166}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1}.$$

Расчет этого фильтра был проведен в два этапа. Вначале был рассчитан фильтр без потерь с передачей

$$K_s = \frac{1}{s^5 + 3,2360s^4 + 5,236068s^3 + 5,236068s^2 + 3,236068s + 1}.$$

Расчет этого фильтра был проведен за 6 итераций.

На втором этапе были учтены потери в индуктивностях, причем в качестве начальных значений параметров элементов принимались величины, полученные в конце первого этапа. В результате 3 итераций были получены следующие значения элементов фильтра:

$$L_1 = L_2 = 1,2595972 \text{ гн},$$

$$r_1 = r_2 = 7,4542268 \cdot 10^{-2} \text{ ом},$$

$$C_1 = C_3 = 1,2375818 \text{ ф},$$

$$C_2 = 0,37590573 \text{ ф},$$

$$R_1 = R_2 = 0,7939046 \text{ ом}.$$



Схема рассчитанного фильтра изображена на рис. 12.

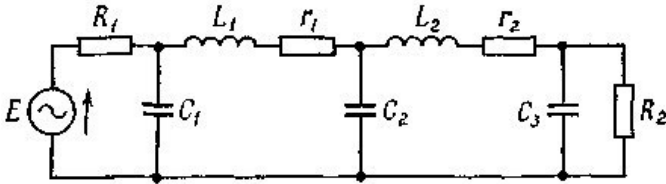


Рис. 12. Реактивный фильтр, передаточная функция которого определяется по формуле (65).

В заключение следует обратить внимание еще на одно достоинство представленного здесь метода синтеза фильтров. Этот метод не требует особой точности расчета, что необходимо при других методах синтеза реактансных фильтров, как, например, в методах Бруне или Кауэра. Это положение следует из вида линейных уравнений (57), на основании которых рассчитываются значения элементов фильтра, так как в этих уравнениях производится только умножение и сложение неизвестных и не требуется выполнения операций вычитания и деления. Это серьезное достоинство, обеспечивающее достаточную точность расчета величин элементов без необходимости применения особых методов увеличения точности расчета.

В приведенных выше примерах расчеты проводились для передач с нормированием по частоте и сопротивлению. Для расчета элементов фильтров, удовлетворяющих определенным техническим условиям, необходимо еще провести денормирование значения элементов. Так как это элементарная операция, она не программируется. Преобразование полученных прототипов фильтров низких частот в фильтры других типов, например полосовых фильтров, фильтров высоких частот или режекторных фильтров, можно легко провести при помощи преобразования частоты.

Приведенные расчеты касались фильтров с очень простой структурой. Однако метод расчета фильтров, представленный ниже, позволяет проводить расчет фильтра произвольной сложности.



10.2.4. Метод расчета элементов четырёхполюсников

Задаются следующие исходные данные: блочная группа графа заземленного четырёхполюсника, функция совпадения этой блочной группы, а также коэффициент передачи напряжения четырёхполюсника. Алгоритм метода определяет систему нелинейных уравнений (алгебраических), из которых находятся элементы четырёхполюсника: величины сопротивлений, емкостей, индуктивностей. Расчет состоит в определении решений линеаризованных систем уравнений методом Ньютона (путем последовательных приближений).

10.2.4.1. Система уравнений, определяющих коэффициент передачи напряжения четырёхполюсника

Система уравнений для определения параметров четырёхполюсника при заданном коэффициенте передачи напряжения составляется с помощью формулы

$$\frac{\sqrt{R_{\alpha}R_{\beta}} \operatorname{Sim} \left(\frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \frac{\partial A^d}{\partial \beta} \right)}{\det A^d} = K_u(s), \quad (65)$$

где A^d —дополнительная блочная группа, связанная с графом четырёхполюсника; α — номер входной ветви; β — номер выходной ветви; R_{α} — сопротивление входной ветви; R_{β} — сопротивление выходной ветви; $K_u(s)$ — коэффициент передачи напряжения четырёхполюсника, являющийся рациональной функцией переменной s . В дальнейшем приняты следующие ограничения.

- а) блочная группа A^d описывает заземленную структуру четырёхполюсника;
- б) в каждой ветви четырёхполюсника находится один элемент определенного типа (емкость, сопротивление или индуктивность). Ограничение б) не сужает класс решаемых задач и значительно увеличивает быстроту расчетов.

Система уравнений получается из формулы (65) путем приравнивания коэффициентов при переменной s в правой и левой сторонах числителя и знаменателя. Получается зависимость между величинами C^{-1} , R или L ветви



четырёхполюсника и коэффициентами числителя и знаменателя коэффициента передачи.

Из однородности полученной системы уравнений следует, что параметры элементов четырёхполюсника можно определить с точностью до коэффициента пропорциональности.

Знаменатель левой дроби формулы (65) — однородный многочлен относительно элементов, имеющий степень, равную числу ветвей в деревьях A^d (N [5]); числитель — однородный многочлен степени N [5]— $1=N$ [7], умноженный на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$.

Блочная группа A^d и ее функция совпадения выражаются через номера ветвей. Коэффициент передачи напряжения задан коэффициентами знаменателя и числителя, представляющими действительные числа, и степенями переменной s (целые числа).

10.2.4.2. Расчет величин, определяющих систему уравнений

Столбец блочной группы A^d (дерево) определяет произведение элементов, находящихся в этом дереве (ограничение б)), и представляет собой одночлен относительно элементов. Все одночлены с одинаковыми показателями степеней s суммируются и приравниваются коэффициентам многочлена передаточной функции с той же степенью s .

Уравнение для числителя получается аналогично, но с той разницей, что полученный многочлен вначале умножается на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$. Система уравнений имеет вид

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, nr = N [3] + N[4], \quad n=N[1] - N [2]. \quad (66)$$

$N[2]$ переменных исключается, поскольку приравниваются величины некоторых элементов.

10.2.4.3. Расчет якобиана уравнений (66)

Метод решения, применяемый к системе уравнений (66), предполагает расчет якобиана в любой точке $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Обозначим



$$I_{i, k} (x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial X_k},$$

$$i = 1, \dots, nr; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (67)$$

Расчет аналогичен расчету F_i , изложенному в разд. 7.2.4.2. Для величин F_i , определяемых многочленом знаменателя (65), составляются одночлены из переменных, номера которых находятся в столбцах A^d , при этом по очереди опускается по одной переменной.

Сумма одночленов, образующих F_i , в которых пропущена переменная x_k , создает $I_{i, k} (x)$. Аналогично поступают и для F_i , определяемых числителем, только одночлены умножаются на $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$.

Дифференцирование относительно R_α и R_β (присутствующих в формуле только в множителе $2\sqrt{R_\alpha R_\beta}$) более сложно.



10.2.4.4. Метод Ньютона

Система (66) заменяется линейным приближением

$$F(x) + I(x)\Delta x = 0, \quad (68)$$

где

x — матрица-столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$;

$F(x)$ — матрица-столбец $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_{nr}(x) \end{pmatrix}$;

$I(x)$ — матричный якобиан $I_{i, k}(x) = \frac{\partial F_i(x)}{\partial X_k}$;

$\Delta(x)$ — матрица-столбец приращений $\begin{pmatrix} \Delta X_1 \\ \vdots \\ \Delta X_m \end{pmatrix}$.

Систему (68) можно решить относительно $\Delta(x)$, если она непротиворечива. Достаточным условием этого является равенство рядов матриц



$$I(x), \text{ а также } \begin{vmatrix} I_1 & I_{ln} & F_1 \\ I_{nr,1} & I_{nr,n} & F_{nr} \end{vmatrix}.$$

Когда это условие выполняется, то для каждого $\Delta(x)$, удовлетворяющего (68), найдется такое $0 \leq \lambda \leq 1$, что

$$\sum_{i/1}^{nr} [F_i(x + \mu \Delta x)]^2 < \sum_{i/1}^{nr} [F_i(x)]^2 \text{ для } \mu \leq \lambda. \quad (69)$$

Программа выполняется следующим образом. Для начального приближения x подсчитываются значения функции F и матрица I . Методом ортогонализации находится одно из $\Delta(x)$, удовлетворяющих уравнению (68). Проверяется условие (69) при $\mu=1$. Если оно выполняется, то $\Delta(x)$ уменьшается в два раза и проверка производится снова. Так поступают до тех пор, пока условие (69) не будет удовлетворяться. Этим способом

достигается уменьшение $\sum_{i/1}^{nr} [F_i(x)]^2$. Новое приближение x получается путем сложения предыдущего $\Delta(x)$, при этом могут быть два случая:

1) $\sum_{i/1}^{nr} [F_i(x)]^2 < \epsilon$ — тогда система уравнений (66)

считается решенной;

2) $\sum_{i/1}^{nr} [F_i(x)]^2 < \delta$ и не выполняется 1) — тогда

система уравнений считается нерешенной и ищется решение из нового начального приближения.

В результате применения метода ортогонализации через несколько итераций противоречивость системы (68) приведет к выполнению условия 2.

10.2.4.5. Решение системы линейных уравнений методом ортогонализации

Метод ортогонализации делает возможным нахождение решения только непротиворечивой системы линейных уравнений. Этот метод основывается на преобразовании матрицы коэффициентов



систем уравнений в матрицу, у которой строки являются ортогональными. Это означает, что скалярные произведения различных строк равны нулю, а скалярные квадраты строк — нулю или единице.

Вместе с матрицей коэффициентов преобразуются свободные члены. Если какая-либо строка имеет скалярный квадрат, равный нулю, а свободный член этой строки не равен нулю, то система противоречива.

Умножение транспонированной ортогонализированной матрицы на столбец свободных членов дает решение. В случае противоречивой системы этот метод определяет множество независимых уравнений, для которых решение ищется таким же способом.

Геометрически этот метод можно интерпретировать как прямоугольную проекцию начала координат на $(n - r)$ -мерную гиперплоскость решений, расположенную в n -мерном евклидовом пространстве (r — порядок системы уравнений).

10.2.4.6. Случаи симметрии в уравнениях (66)

Функции $F_i(x)$ иногда симметричны, это значит существуют нетождественные преобразования переменных x_1, \dots, x_n , переводящие систему уравнений (66) в себя.

Эту симметрию можно обнаружить на этапе проектирования четырехполюсника, так как она появляется в графе и через действия над блочными группами переходит в систему уравнений (65), (66), (68).

Если имеется одно решение системы (66), то, применяя к нему упомянутые преобразования, можно получить множество других решений.

С другой стороны, существование множества преобразований для системы (66) и начального приближения не должно изменять решения при этих преобразованиях, поскольку этот метод не выделяет ни одну из переменных. Число переменных можно уменьшить, если отождествить те элементы, которые переходят в самих себя. Это значительно ускоряет расчеты.



Приложение

Общий метод расчета динамических характеристик технических систем

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Общий метод предназначен для использования в процессе разработки математического обеспечения инженерных расчетов динамических характеристик технических систем, выполняемых в рамках системы автоматизированного проектирования (САПР).

Общий метод устанавливает общие положения, структуру и порядок разработки математического обеспечения, а также содержит рекомендации по применению различных частных методов динамического расчета.

Расчет динамических характеристик технических систем является одним из этапов проектирования, в процессе которого определяется и оптимизируется ряд конструктивных и технических параметров технических систем: исполнительные размеры, массы и жесткости элементов (деталей), силовые, кинематические, амплитудно-частотные характеристика и т. п.

Автоматизация процесса динамического расчета оборудования на основе использования технических средств САПР является основным способом повышения эффективности и качества проектных работ на этом этапе.

Математическое обеспечение автоматизированных расчетов динамики систем представляет собой совокупность математических методов, моделей и вычислительных алгоритмов, применяемых при реализации указанных расчетов на ЭВМ.

Подсистема математического обеспечения относится к числу основных элементов САПР и разрабатывается с учетом ряда общих и специальных требований, характеризующих ее эффективность.

Общими требованиями к данной подсистеме являются:



- простота, доступность и универсальность математических методов и моделей;
- инвариантность математических методов по отношению к размерности и физической природе объектов проектирования (систем);
- формализм и малая погрешность математических методов и вычислительных алгоритмов.

К специальным требованиям относятся:

- составление математического описания объектов проектирования в явном виде;
- блочный (модульный) принцип построения математических моделей и вычислительных алгоритмов;
- возможность проведения структурного и параметрического синтеза системы на основе единой математической модели.

Одним из главных компонентов математического обеспечения данного назначения является составление математических моделей объектов проектирования.

Разработка математических моделей производится на основе расчетных схем (моделей), в качестве которых используются принципиальные или кинематические схемы проектируемых систем либо эвристические или приведенные модели в виде идеализированных механических систем с малой размерности, сосредоточенными параметрами.

На расчеты динамики объектов проектирования в виде технических систем и устройств с распределенными параметрами данный вид математического обеспечения не распространяется.

Адекватность математической модели и объекта проектирования в качественном отношении оценивается уровнем их соответствия по структуре и составу переменных. Количественная оценка динамической эквивалентности производится путем проверки условия совпадения частот и форм свободных колебаний проектируемой системы и ее расчетной модели в заданном частотном диапазоне.

Компоненты расчетных моделей в зависимости от условий задачи могут рассматриваться как абсолютно жесткие, так и деформируемые элементы. В последнем случае принимается, что деформации элементов расчетных схем в результате внешнего воздействия являются малыми, а остаточные деформации отсутствуют.

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Разработка математического обеспечения автоматизированного расчета динамики оборудования представляет собой процесс



построения общего алгоритма расчета, приспособленного для реализации на ЭВМ. В структурном отношении процедура составления математического обеспечения разделяется на два основных этапа, выполняемых последовательно и имеющих свои локальные цели и задачи.

На первом этапе разрабатывается математическая модель объекта проектирования. Для решения этой задачи первоначально составляется расчетная схема проектируемой системы. На следующем шаге осуществляется математическое описание принятой расчетной схемы, т. е. вывод системы уравнений, характеризующих динамику объекта проектирования на заданном временном интервале.

На втором этапе составляются алгоритмы поиска аналитических или численных решений уравнений динамики исследуемого объекта, а также алгоритмы поиска оптимальных решений. Завершающим шагом является разработка блок-схемы общего алгоритма расчета с указанием состава вводимой и выводимой информации, а также способов ее ввода и вывода.

Основное содержание математического обеспечения динамического расчета составляют четыре группы эвристических и формальных методов, включающие:

- методы схематизации объектов проектирования;
- методы математического описания расчетных схем;
- методы поиска решений уравнений движения объектов проектирования;
- методы оптимизации решений.

Первые две группы методов, объединенные в подсистему методов построения математических моделей объектов проектирования, применяются на первом этапе разработки математического обеспечения. Третья и четвертая группы методов, объединенные в подсистему методов реализации математических моделей, относятся ко второму этапу.

Блок-схема структуры математического обеспечения автоматизированного расчета динамики оборудования показана на рис. 1.

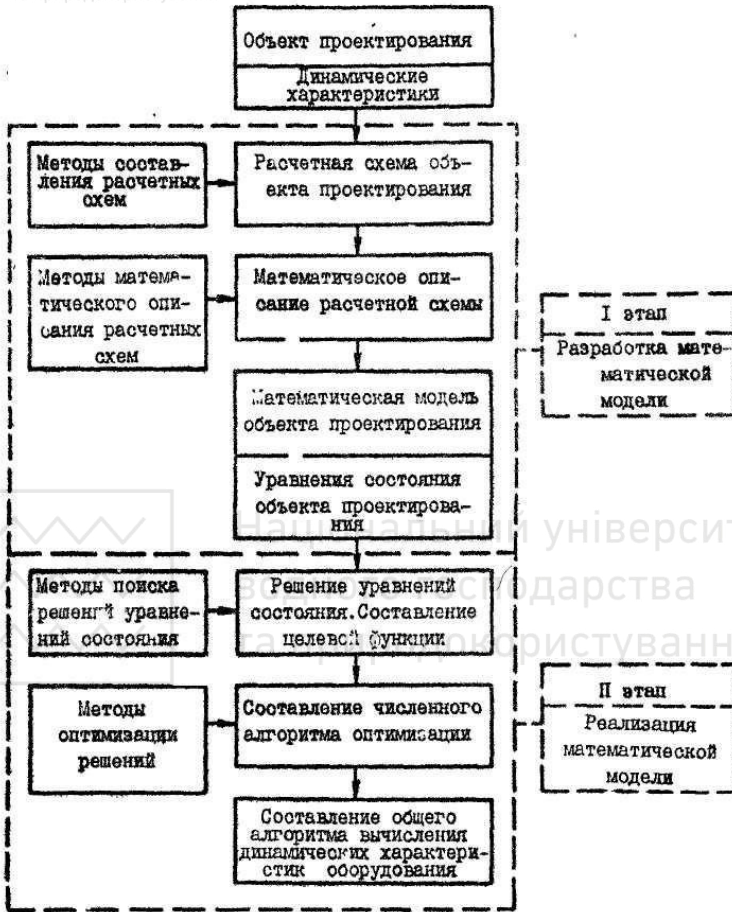


Рис. 1

3. МЕТОДЫ СХЕМАТИЗАЦИИ ОБЪЕКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Расчетные схемы объектов проектирования в общем случае изображаются в виде идеализированных систем с сосредоточенными параметрами однородной или смешанном физической природы (механических, электрических, электромеханических и т. п.).



Основной задачей схематизации является представление проектируемой системы в виде определенной физической модели, отображающей наиболее существенные, динамические свойства реальной системы, но более простой в структурном отношении.

Схематизация систем производится в основном:

- методом структурного подобия;
- методом приведения;
- методом замещения.

Выбор определенного метода схематизации зависит от целей расчета, конструктивных особенностей объекта проектирования, а также от метода последующего математического описания расчетной схемы.

При схематизации систем методом структурного подобия расчетная схема по своей структуре и составу элементов полностью или частично соответствует кинематической или принципиальной схеме проектируемой системы.

Метод приведения применяется при выборе расчетных схем для объектов проектирования в виде многомассовых систем с большим числом степеней свободы. Расчетные схемы подобных систем в целях их упрощения приводятся к эквивалентным схемам с меньшим числом степеней свободы.

Приведение расчетной схемы на первом этапе заключается в выравнивании силовых и скоростных характеристик элементов схемы и сведении разнородных движений элементов к одному виду.

Второй задачей приведения является уменьшению числа степеней свободы схемы, т. е. преобразование n -мерной схемы в l -мерную, где $l < n$.

Основанием для приведения параметров расчетных схем и уменьшения их размерности являются соответственно допущения о равенстве потенциальных и кинетических энергий и работ внешних сил на участках приведения и о совпадении частот и форм свободных колебаний исходной и приведенной системы в заданном частотном диапазоне

На рис. 2, а изображена кинематическая схема приводного механизма, которая одновременно может рассматриваться и как расчетная схема данной системы. На рис. 2, б показана приведенная расчетная схема, полученная путем упрощения указанной кинематической схемы.

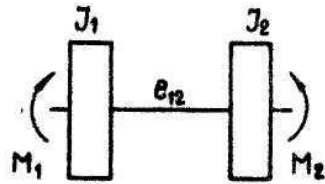
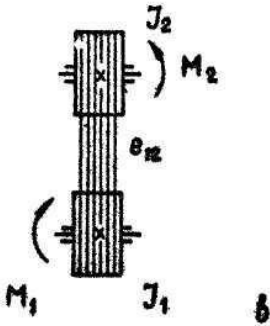
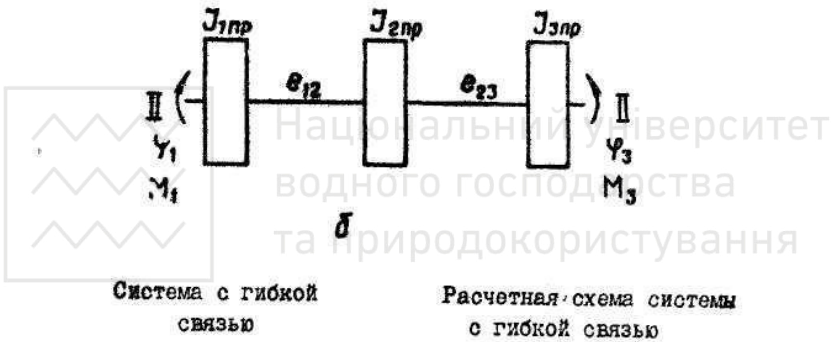
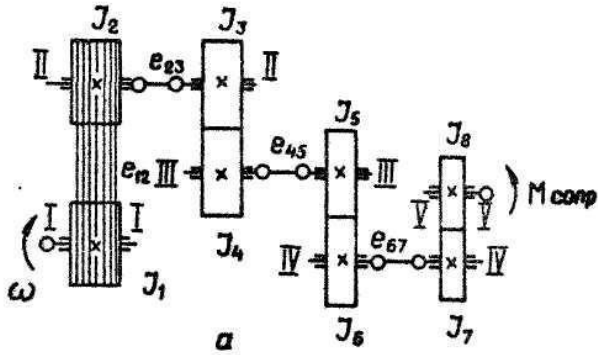


Рис. 2



На рис. 3 представлена блок-схема алгоритма расчета значений приведенных параметров расчетных схем многомассовых систем на первом этапе приведения.

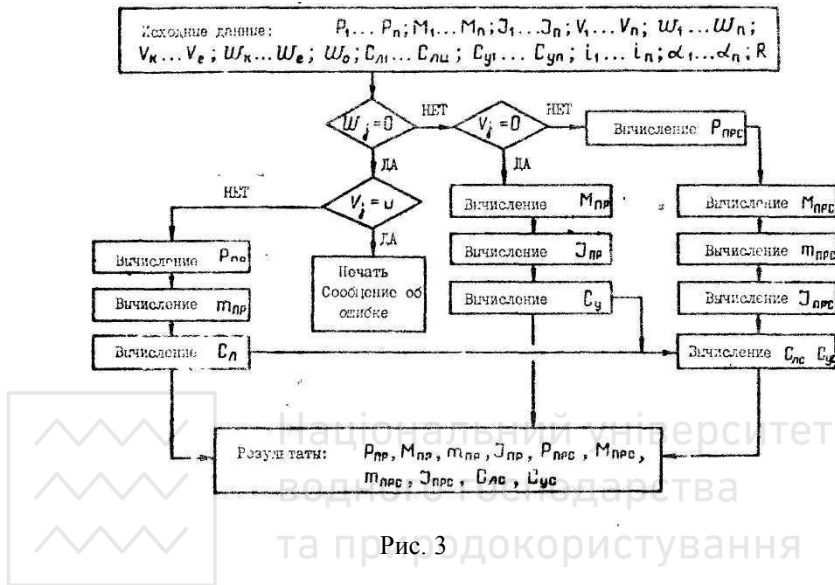


Рис. 3

Вычисления приведенных параметров схемы производятся по следующим зависимостям:

$$m_{пр} = \sum_{j=1}^n m_j (v_j / v_0)^2; \quad (1)$$

$$J_{пр} = \sum_{j=1}^n J_j (w_j / w_0)^2; \quad (2)$$

$$m_{пр,с} = \sum_{j=1}^n m_j (v_j / v_0)^2 + \sum_{k=1}^l J_k (w_k / v_0)^2; \quad (3)$$

$$J_{пр,с} = \sum_{j=1}^n J_j (w_j / w_0)^2 + \sum_{k=1}^l m_k (v_k / w_0)^2; \quad (4)$$

$$P_{пр} = \sum_{j=1}^n P_j v_j \cos \alpha_j / v_0; \quad (5)$$

$$M_{пр} = \sum_{j=1}^n M_j w_j / w_0; \quad (6)$$



$$P_{пр.с} = \sum_{j=1}^n P_j v_j \cos \alpha_j / v_0 + \sum_{k=1}^l M_k \omega_k / v_0; \quad (7)$$

$$M_{пр.с} = \sum_{j=1}^n M_j \omega_j / \omega_0 + \sum_{k=1}^l P_k v_k \cos \alpha_k / \omega_0; \quad (8)$$

$$C_n = \frac{1}{\frac{1}{C_{n1}} + \frac{l_1^2}{C_{n2}} + \frac{(l_1 \cdot l_2)^2}{C_{n3}} + \dots + \frac{(l_1 \cdot l_2 \dots l_n)^2}{C_{nn}}}; \quad (9)$$

$$C_y = \frac{1}{\frac{1}{C_{y1}} + \frac{l_1^2}{C_{y2}} + \frac{(l_1 \cdot l_2)^2}{C_{y3}} + \dots + \frac{(l_1 \cdot l_2 \dots l_n)^2}{C_{yn}}}; \quad (10)$$

$$C_{n.c} = C_n C_y / (R^2 C_n + C_y); \quad (11)$$

$$C_{y.c} = R^2 C_n C_y / (R^2 C_n + C_y); \quad (12)$$

где

$m_{пр}, m_j$

- соответственно приведенная масса и масса j -го звена однородной системы (с одним видом движения звеньев);

v_j, v_0 - линейные скорости соответственно j -го звена и звена приведения;

$J_{пр}, J_j$ - приведенный момент инерции и момент инерции j -го звена однородной системы;

ω_j, ω_0 - угловые скорости соответственно j -го звена и звена приведения;

$m_{пр.с}, J_k, \omega_k$ - соответственно приведенная масса, момент инерции и угловая скорость k -го звена смешанной системы;

$J_{пр.с}, m_k, v_k$ - приведенный момент инерции и масса и линейная скорость k -го звена смешанной системы;

$P_{пр}, P_j$ - соответственно приведенная сила и сила на j -м звене однородной системы;



α_j - угол между направлениями скорости и силы на j -м звене;

$M_{пр}, M_j$ - приведенный момент и момент на j -м звене однородной системы;

$P_{пр}, M_k$ - соответственно приведенная сила и момент на k -м звене смешанной системы;

$M_{пр}, P_k$ - приведенный момент и сила на k -м звене смешанной системы;

α_k - угол между направлениями скорости и силы на k -м звене;

$C_{л1}, C_{л1}, C_{л2}, \dots, C_{лn}$ - приведенная линейная жесткость и линейные жесткости звеньев однородной системы;

i_1, \dots, i_n - передаточные отношения между звеньями системы и звеном приведения;

$C_{\omega}, C_{\omega1}, C_{\omega2}, \dots, C_{\omega n}$ - приведенная угловая жесткость и угловые жесткости звеньев однородной системы;

$C_{лс}$ - приведенная линейная жесткость смешанной системы;

$C_{\omega с}$ - приведенная угловая жесткость смешанной системы;

R - радиус приведения;

$j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, l; l < n.$

Составление расчетных схем методом замещения заключается в замене схемы проектируемого устройства на основе принципа аналогий эквивалентной по своим динамическим свойствам системой, которая более удобна для решения поставленной задачи, например, для анализа колебательных процессов в системе. Схематизация систем подобным образом не поддается формализации и в каждом конкретном случае производится на основе эвристических предпосылок: опыта, интуиции и т. п. На рис.2, в показана система с гибкой связью и ее расчетная схема, полученная методом замещения.

4. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ



Математическое описание расчетных схем объектов проектирования осуществляется с использованием двух групп математических методов:

методов описания на основе соответствующих принципов и законов теоретической механики и теории механизмов и машин;

граф-аналитических методов, основанных на принципе топологической интерпретации физических свойств и структуры систем.

Выбор конкретного метода математического описания зависит от вида расчетной схемы, исходных условий задачи, а также требований, предъявляемых к процессу описания и математической модели системы.

Таковыми требованиями являются:

простота и формализм процесса описания;

инвариантность процесса описания относительно числа степеней свободы изучаемой системы;

инвариантность процесса описания относительно нелинейности и физической природы компонент системы;

возможность учета параметров и структуры системы в явном виде;

удобство и простота последующего поиска аналитических или численных решений.

Методы первой группы целесообразно применять при описании относительно простых расчетных схем, полученных методом приведения или замещения. Граф-аналитические методы наиболее эффективны при описании сложных расчетных схем, эквивалентных по своей структуре и составу кинематическим схемам объектов проектирования.

Рассмотрим методы описания на основе законов механики,

Описание расчетных схем на основе законов механики осуществляется следующими методами:

- на основе принципа Даламбера;
- на основе уравнений Лагранжа второго рода;
- путем составления уравнений движения в виде уравнений моментов или сил либо в виде уравнения кинетических энергий.

Уравнения Даламбера записываются в виде

$$\sum_{i=1}^n (F_i + R_i + P_i) = 0, \quad (13)$$

где F_i, R_i - соответственно равнодействующие сил движущих и сил сопротивления, действующих на i -ю массу;



P_i

- сила инерции, приложенная к i -й массе;

$i=1, 2, \dots,$

Уравнения Лагранжа второго рода составляются в виде системы из n дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями времени $q_i(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (14)$$

где T, Π - соответственно кинетическая и потенциальная энергия сосредоточенных масс системы;

q_j, \dot{q}_j - соответственно обобщенная координата и обобщенная скорость j -й массы;

Q_j

- обобщенная сила, приложенная к j -й массе;

$j=1, 2, \dots, n.$

Уравнения движения в форме уравнений сил или моментов либо в форме уравнения кинетических энергий имеют вид:

$$m_n \frac{dv}{dt} + \frac{dm_n}{ds} \frac{v^2}{2} = P_g - P_c; \quad (15)$$

$$J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_n}{d\psi} \frac{\omega^2}{2} = M_g - M_c; \quad (16)$$

$$\frac{J_n \omega_{i+1}^2}{2} - \frac{J_n \omega_i^2}{2} = \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} M_g d\psi - \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} M_c d\psi, \quad (17)$$

где m_n, v, s — соответственно приведенная масса системы, линейная скорость и линейное перемещение звена приведения;

P_g, P_c - приведенные значения соответственно сил движущих и сил сопротивления;

J_n, ω, ψ - приведенный момент инерции системы, угловая скорость и угловое перемещение звена приведения;



Mg, Mc - приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления;

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Уравнения Даламбера и уравнения Лагранжа второго рода применяются для описания как жестких систем (без упругих элементов), так и систем с упругими звеньями. Уравнения в форме (15)—(17) используются при описании только жестких систем.

Факторами, ограничивающими применение указанных методов описания, являются:

необходимость приведения и минимизации числа степеней свободы элементов расчетной схемы;

зависимость трудоемкости описания от размерности расчетной схемы;

неформализованный выбор обобщенных координат системы;

невозможность отобразить в уравнениях движения структуру системы.

Рассмотрим граф-аналитические методы описания расчетных схем.

Формальный алгоритм математического описания расчетной схемы граф-аналитическим методом основывается на использовании принципа изоморфизма (взаимнооднозначного соответствия) между исследуемой системой (расчетной схемой) и конечным ориентированным графом, отображающим состав переменных и структуру системы.

Расчетная схема системы рассматривается как совокупность связанных базовых элементов (компонент), например механической передачи, упругого звена, массы и т. п., имеющих известное математическое описание.

Описание каждой компоненты включает ориентированный полюсный граф, интерпретирующий измерение переменных в точках присоединения (на полюсах) компоненты, и полюсные уравнения, характеризующие функциональную связь между переменными компоненты.

Измерение переменных является единственным способом количественной оценки переменных, характеризующих физические свойства компоненты. Все переменные соответственно способу их измерения условно разделяются на две группы: параллельные (X) и последовательные (Y).

Математическое описание расчетной схемы строится путем объединения полюсных характеристик компонент, на основе уравнений связи. Полюсные графы компонент образуют граф схемы, в котором вершины изображают полюса компонент, а ориентированные



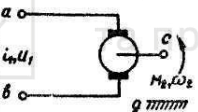
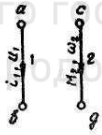
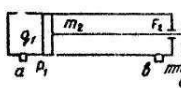
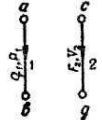
дуги - процедуру измерения переменных между полюсами (переменные системы).

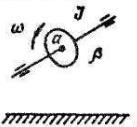
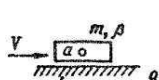


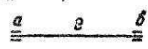
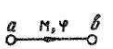
На основе постулатов для вершин и контуров графа (обобщенных законов Кирхгофа) записываются уравнения связи - уравнения отсечений и уравнения фундаментальных контуров, которые совместно с полюсными уравнениями компонент составляют систему уравнений, характеризующих динамику исследуемой системы.

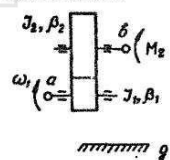
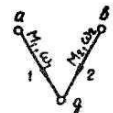
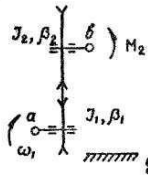
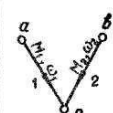
Практическая реализация данного метода описания заключается в следующем. Расчетная схема разделяется на ряд базовых компонент с известными полюсными характеристиками. Полюсные характеристики некоторых типов компонент, входящих в состав механических, электро- и гидромеханических систем, приведены в табл. 1.

Таблица 1


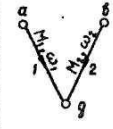
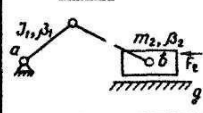
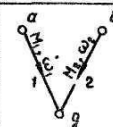
Полюсные характеристики компонент механических и электрогидромеханических систем

Тип компоненты	Наименование и схема компоненты	Полюсный граф компоненты	Полюсные уравнения компоненты
1	2	3	4
1. Электромеханическая			$i_1 = W_1 U_1 - W_2 \omega_2;$ $M_2 = -W_2 U_1 + W_2 \omega_2;$ $W_1 = 1/R; \quad W_2 = K/R;$ $W_3 = \frac{K^2}{R} + J_2 \frac{d}{dt} + \beta_2$
2. Гидромеханическая			$q_1 = -M_1 P_1 + S V_2;$ $F_2 = -S P_1 + m_2 \frac{dV_2}{dt} + \beta_2 V_2$

Продолжение табл. I			
1	2	3	4
3. Механическая	<p>Масса графикался</p>  <p>Движущаяся поступательно</p> 	 	$M = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega$ $F = m \frac{dV}{dt} + \beta V$
4. Механическая	<p>д в л</p> 		$\psi = e M$

Продолжение табл. I			
1	2	3	4
5. Механическая	<p>Передача зубчатая</p> 		$M_1 = W_1 \omega_1 + n_{12} M_2;$ $\omega_2 = -n_{12} \omega_1 + W_2 M_2;$ $W_1 = (J_1 + n_{12}^2 J_2) \frac{d}{dt} + \beta_1 + n_{12}^2 \beta_2;$ $W_2 = e_2 \cdot d/dt$
6. Механическая	<p>Передача цепная</p> 		$M_1 = W_1 \omega_1 + n_{12} M_2;$ $\omega_2 = n_{12} \omega_1 + W_2 M_2;$ $W_1 = (J_1 + n_{12}^2 J_2) \frac{d}{dt} + \beta_1 + n_{12}^2 \beta_2;$ $W_2 = e_2 \cdot d/dt$



Продолжение табл. I			
1	2	3	4
7. Механическая	Передача ремонная  $J_2, \beta_2 \approx \left. \begin{matrix} \delta \\ \circ \end{matrix} \right\} M_2$ $\omega_1, \beta_1 \approx \left. \begin{matrix} \delta \\ \circ \end{matrix} \right\} J_1, \beta_1$ $m g$		$M_1 = W_1 \omega_1 + n_{12} M_2$; $\omega_2 = n_{12} \omega_1 + W_2 M_2$; $W_1 = (J_1 + J_2 n_{12}^2) \frac{d}{dt} + \beta_1 + \beta_2 n_{12}^2$; $W_2 = e_2 \cdot d/dt$
8. Механическая	Кривошипно-ползунный механизм  J_1, β_1 m_2, β_2 F_e g		$M_1 = W_1 \omega_1 + n_{12} F_e$; $V_2 = n_{12} \omega_1 + W_2 F_e$; $W_1 = (J_1 + m_2 n_{12}^2) \frac{d}{dt} + \beta_1 + \beta_2 n_{12}^2$; $W_2 = e_2 d/dt; n_{12} = z (\sin \psi + \frac{z}{2r} \sin 2\psi)$

Обозначения: ω, V - соответственно угловая и линейная скорости; J, m - соответственно момент инерции и масса; M и F - момент и сила; q - расход жидкости; β - коэффициент сопротивления; e - коэффициент упругости; μ - коэффициент утечек; ψ, z, r - угол поворота, радиус кривошипа, длина шатуна; K - коэффициент пропорциональности; i_e - передаточное отношение; P - давление; i, ζ, R - ток, напряжение и сопротивление якоря

Следующим шагом является образование графа системы путем объединения полюсных графов компонент и присоединения полюсных графов внешних воздействий (кинематического и силового). Выбирается дерево (лес) графа, представляющее собой подграф, содержащий все вершины графа, но не имеющий контуров. Дерево графа разделяет дуги графа на ветви (относятся к дереву) и хорды (входят в дополнение дерева).

Далее записываются полюсные уравнения компонент:

$$W \begin{bmatrix} X_{\beta 2} \\ X_{c1} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} Y_{\beta 2} \\ Y_{c1} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где W, Z - матрицы коэффициентов полюсных уравнений;

$X_{\beta 2}, Y_{\beta 2}$ - неизвестные параллельные и последовательные переменные, соответствующие ветвям графа схемы;

X_{c1}, Y_{c1} - неизвестные параллельные и последовательные переменные, соответствующие хордам графа.

Следующей процедурой является составление уравнений: фундаментальных контуров



$$\begin{bmatrix} X_{B2} \\ X_{C1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix}$

B_{11}, B_{12} - подматрицы матрицы коэффициентов, состоящие из чисел 1, -1 и 0;

X_{B1} - заданные параллельные переменные, соответствующие ветвям графа;

уравнений отсечений

$$\begin{bmatrix} Y_{B2} \\ Y_{C1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} Y_{C1} \\ Y_{C2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $A = \begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

A_{21}, A_{22} - подматрицы матрицы коэффициентов, состоящие из чисел 1, -1 и 0;

Y_{C2} - заданные последовательные переменные, соответствующие хордам графа.

На завершающем этапе уравнения (19) и (20) подставляются в полусные уравнения компонент (18), после чего производятся матричные преобразования. Полученные в результате уравнения динамики системы имеют вид

$$WBX_B = ZAY_C, \quad (21)$$

где

$$X_B = \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix}; \quad Y_C = \begin{bmatrix} Y_{C1} \\ Y_{C2} \end{bmatrix}$$

Уравнения типа (21) представляют собой системы обыкновенных дифференциальных или алгебро-дифференциальных уравнений с



числом уравнений, равным ЧИСЛУ ПОЛЮСНЫХ уравнений компонент, и могут быть получены как с использованием матричных операций (матрично-топологический метод), так и без них (топологический метод).

При топологическом методе вывод уравнений системы заключается в подстановке в полюсные уравнения компонент (18) вместо

переменных Y_{B2}, X_{C1} значений, полученных на основе выражений:

$$Y_{B2} = -A_{21} Y_{C1} - A_{22} Y_{C2}; \quad (22)$$

$$X_{C1} = -B_{11} X_{B1} - B_{12} X_{B2}. \quad (23)$$

Узловые уравнения (22) и контурные уравнения (23) являются частью соответственно уравнений (20) и (19) и составляются на основе отсечений и фундаментальных контуров графа системы. Алгоритм описания расчетных схем топологическим методом в виде блок-схемы изображен на рис. 4.

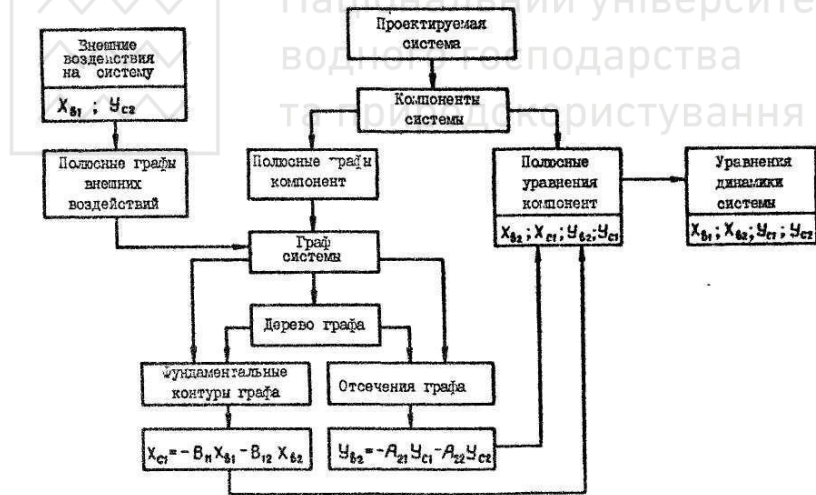


Рис.4

Топологический метод универсален и позволяет описывать как линейные, так и нелинейные системы с любым числом компонент, Матрично-топологический метод эффективен при описании только линейных систем с небольшим числом компонент.



Оба метода формальны, инвариантны относительно размерности систем и физической природы компонент и позволяют учитывать параметры систем и их структуру в явном виде.

Для осуществления математического описания расчетных схем с большим числом компонент разной физической природы применяется блочный метод описания.

Процесс описания сложной системы блочным методом состоит из следующих операций:

- разделения сложной системы на блоки;
- составления уравнений блоков;
- преобразования уравнений блоков в полюсные уравнения блоков;
- вывода итоговых уравнений сложной системы.

На первом этапе расчетная схема системы разделяется на отдельные блоки, состоящие из нескольких компонент.

Для каждого блока топологическим или матрично-топологическим методом составляются уравнения движения типа (21). Уравнения (21) путем подстановки в них вместо переменных $X_{в2}$, $Y_{с1}$ внешних (заданных) последовательных переменных ветвей $Y_{в1}$ и параллельных переменных хорд $X_{с2}$ преобразуются в полюсные уравнения блока:

$$\begin{bmatrix} Y_{в1} \\ X_{с2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{в1} \\ Y_{с2} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

где D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} - подматрицы матрицы коэффициентов полюсных уравнений блока.

Для упрощения процедуры приведение уравнений (21) к виду (24) производится с использованием ориентированного графа, который строится на основе уравнений (21). Вершины этого графа изображают

переменные уравнений (21): $X_{в1}$, $X_{в2}$, $Y_{с1}$, $Y_{с2}$, а величины передач ребер равны соответствующим коэффициентам при переменных.

Исходный граф путем последовательных упрощений по известным правилам (табл. 2) приводится к конечному виду, на основании которого записываются уравнения (24).

Таблица 2

Основные правила преобразования сигнальных графов



№	Исходный граф	Преобразованный граф
1		
2		
3		
4		
5		
6		

На следующем этапе описания блоки рассматриваются как новые компоненты системы и процедура описания повторяется.

Блок-схема алгоритма описания расчетной схемы блочным методом показана на рис. 5.

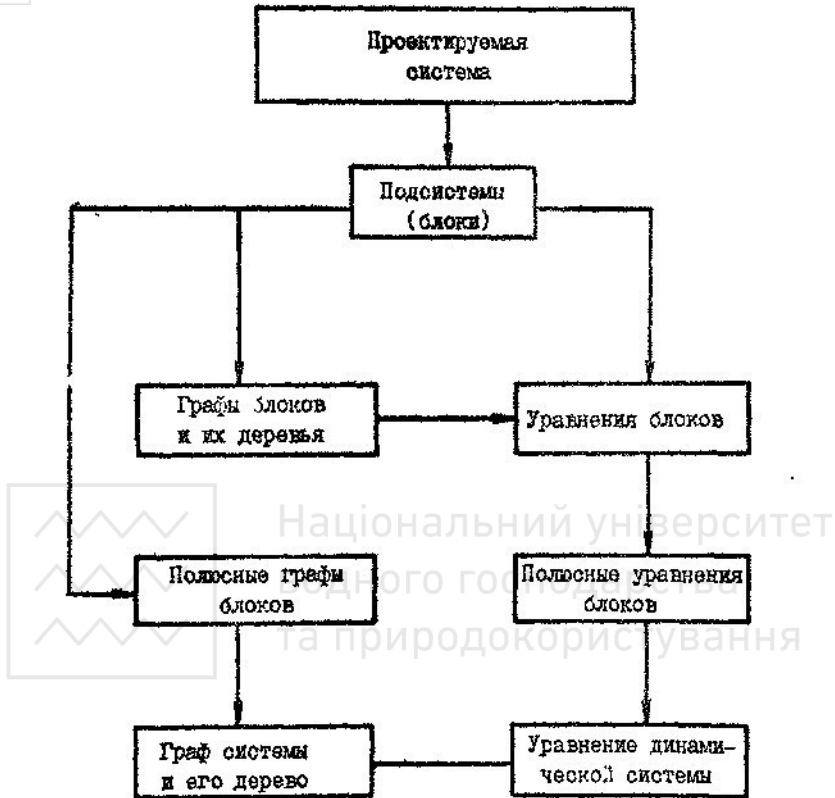


Рис.5

5. МЕТОДЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОБЪЕКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Уравнения движения систем, характеризующие их динамику и полученные путем математического описания расчетных схем, представляют собой системы обыкновенных дифференциальных или алгебро— дифференциальных уравнений.

Методы поиска решений уравнений движений систем разделяются на точные и приближенные. При расчетах динамических характеристик систем вследствие нелинейности уравнений применяются главным образом приближенные методы поиска решений,



При автоматизированном поиске приближенных решений дифференциальных уравнений используются численные методы, в частности одношаговые методы: метод Эйлера и методы Рунге-Кутты, достаточно просто реализуемые на ЭВМ.

Решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{при начальном условии} \quad y(x_0) = y_0$$

производится методом Эйлера по формуле

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где h - шаг интегрирования;

методом Рунге-Кутты по схеме четвертого порядка по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4}{6}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где

$$\kappa_1 = hf(x_n, y_n);$$

$$\kappa_2 = hf(x_n + h/2, y_n + \kappa_1/2);$$

$$\kappa_3 = hf(x_n + h/2, y_n + \kappa_2/2);$$

$$\kappa_4 = hf(x_n + h, y_n + \kappa_3).$$

Ошибка метода Эйлера имеет порядок h^2 . Метод Рунге-Кутты четвертого порядка имеет ошибку на шаге порядка h^5 .

Недостатком метода Эйлера является невысокая точность вычислений, в связи с чем этот метод эффективен при поиске решений, используемых в качестве первого приближения.

Достоинствами метода Рунге-Кутты являются высокая точность и возможность проведения вычислений с переменным шагом.

Недостатки метода: необходимость вычисления функции

$$f(x, y)$$

на каждом шаге в нескольких точках, а также значительные затраты машинного времени, если функция

$$f(x, y)$$

сложного вида. При выборе шага интегрирования руководствуются соображениями устойчивости вычислительной схемы. В качестве критерия устойчивости принимается величина

$$q = \left| \frac{\kappa_2 - \kappa_3}{\kappa_1 - \kappa_4} \right|. \quad (27)$$

При $q \leq 10^{-2}$ схема вычислений считается устойчивой. При $q > 10^{-2}$ шаг интегрирования следует уменьшить и снова проверить величину q .



Метод Рунге-Кутты применим также для приближенного решения дифференциальных уравнений n -го порядка или систем из n дифференциальных уравнений первого порядка. Например, для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

приняв $\frac{dy}{dx} = z$ и $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$,

имеем два уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $z(x_0) = z_0$.

Формулы Рунге-Кутты в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(x_n, y_n, z_n); \\ L_1 &= hg(x_n, y_n, z_n); \\ K_2 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_1/2, z_n + L_1/2); \\ L_2 &= hg(x_n + h/2, y_n + K_1/2, z_n + L_1/2); \\ K_3 &= hf(x_n + h/2, y_n + K_2/2, z_n + L_2/2); \\ L_3 &= hg(x_n + h/2, y_n + K_2/2, z_n + L_2/2); \\ K_4 &= hf(x_n + h, y_n + K_3, z_n + L_3); \\ L_4 &= hg(x_n + h, y_n + K_3, z_n + L_3). \end{aligned}$$

Поиск решений системы алгебро-дифференциальных уравнений осуществляется путем сведения данной системы к одному дифференциальному уравнению высокого порядка, которое решается численно, например, методом Рунге-Кутты либо на основе специальных численных или численно-аналитических методов.

**ПРИМЕР СОСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЕСПЕЧЕНИЯ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ**



Построить расчетные зависимости для определения нагруженности и угловой скорости механизма, состоящего из цилиндрической зубчатой передачи, вала и маховика (рис. 1, а).



Рис.1



Известны все параметры данной системы, а также внешние воздействия на систему: кинематическое $\omega_5 = const$ и силовое $M_6(t)$.

Для составления математической модели системы используем топологический метод описания систем. Разделяем систему на три компоненты: зубчатую передачу I, вал I I и маховик I I I (рис, 1, б). Для каждой компоненты строим полюсный граф (рис, 1, в) и записываем полюсные уравнения: зубчатая передача

$$M_1 = W_1 \omega_1 + M_2 n_{12}; \quad \omega_2 = -n_{12} \omega_1 + W_2 M_2; \quad (1)$$

где

$$W_1 = J_{12} d/dt + \beta_{12} n_{12}^2; \quad J_{12} = J_1 + J_2 n_{12}^2;$$

$$\beta_{12} = \beta_1 + \beta_2 n_{12}^2; \quad W_2 = e_2 d/dt;$$

вал

$$\omega_3 = W_3 M_3; \quad (2)$$

где

$$W_3 = e_3 d/dt;$$

маховик

$$M_4 = W_4 \omega_4; \quad (3)$$

где $W_4 = J_4 d/dt + \beta_4$.

В уравнениях (1) - (3) приняты следующие обозначения:

$$M_1, M_2, M_3, M_4$$

- моменты, воспринимаемые звеньями

механизма.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ - угловые скорости звеньев;

$$J_1, J_2, J_3$$

- моменты инерции звеньев;

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3$$

- приведенные коэффициенты сопротивлений в опорах звенаев;

$$e_2, e_3$$

- коэффициенты, характеризующие приведенную крутильную податливость звеньев.

$$n_{12}$$

- передаточное отношение зубчатой передачи;

$$d/dt$$

- оператор дифференцирования.

На основе полюсных графов компонент строим граф системы (рис. 1, г) и выбираем дерево графа (рис, 1, д). В соответствии с выбранным деревом из полюсных уравнений компонент должны исключаться переменные $X_{C1}(\omega_1, \omega_3)$ и $Y_{B2}(M_2, M_4)$. Для



определения ω_1 и ω_3 строим фундаментальные контуры I и II (рис. 1, е), из которых соответственно имеем:

$$\omega_1 = \omega_5; \quad \omega_3 = \omega_2 - \omega_4.$$

Значения M_2 и M_4 определяем из отсечений I и II (рис. 1, ж):

$$M_2 = -M_3; \quad M_4 = M_3 - M_6.$$

Подставив значения $\omega_1, \omega_3, M_2, M_4$ в уравнения

(1)-(3), получим уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} M_1 &= W_1 \omega_5 - M_3 \pi_{12}; & \omega_2 &= -\pi_{12} \omega_5 - W_2 M_3; \\ \omega_2 - \omega_4 &= W_3 M_3; & M_3 - M_6 &= W_4 \omega_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Для поиска решений уравнений (4) применим специальный численно-аналитический метод, являющийся топологической интерпретацией метода Эйлера. С этой целью, заменив в уравнениях (4) производные на конечно-разностные выражения, получим:

$$\begin{aligned} M_{1i} &= \beta_{12} \omega_5 - M_3 \pi_{12}; \\ \omega_{2i} &= -\pi_{12} \omega_5 - e_2 \frac{M_{3i} - M_{3i-1}}{h}; \\ \omega_{2i} - \omega_{4i} &= e_3 \frac{M_{3i} - M_{3i-1}}{h}; \\ M_{3i} - M_{6i} &= J_4 \frac{\omega_{4i} - \omega_{4i-1}}{h} + \beta_4 \omega_{4i}, \end{aligned} \quad (5)$$

где h - шаг интегрирования, $i=1,2,\dots,r$.

Уравнения (5) представим в виде конечного ориентированного графа (рис. 2, а), который путем последовательных преобразований приводится к более простому виду (рис. 2, б, в), на основании которого записываются соответственно значения искомых переменных M_1, M_3, ω_4 :

$$\begin{aligned} M_{1i} &= -\frac{\pi_{12}}{1+K_1 K_2} M_{6i} + \left(\frac{\pi_{12}^2 K_1}{1+K_1 K_2} + \beta_{12} \right) \omega_5 - \frac{K_1 K_2}{1+K_1 K_2} M_{3i-1} + \\ &+ \frac{\pi_{12} K_3}{1+K_1 K_2} \omega_{4i-1}; \end{aligned} \quad (6)$$



$$M_{3i} = \frac{1}{1+K_1K_2} M_{5i} - \frac{K_1\pi_{12}}{1+K_1K_2} \omega_5 + \frac{K_1K_2}{1+K_1K_2} M_{3i-1} - \frac{K_3}{1+K_1K_2} \omega_{4i-1}; \quad (7)$$

$$\omega_{4i} = -\frac{\pi_{12}}{1+K_1K_2} \omega_5 - \frac{K_2}{1+K_1K_2} M_{5i} + \frac{K_2}{1+K_1K_2} M_{3i-1} + \frac{K_2K_3}{1+K_1K_2} \omega_{4i-1}; \quad (8)$$

где $K_1 = J_4/h + \beta_4$; $K_2 = (e_2 + e_3)/h$; $K_3 = J_4/h$.



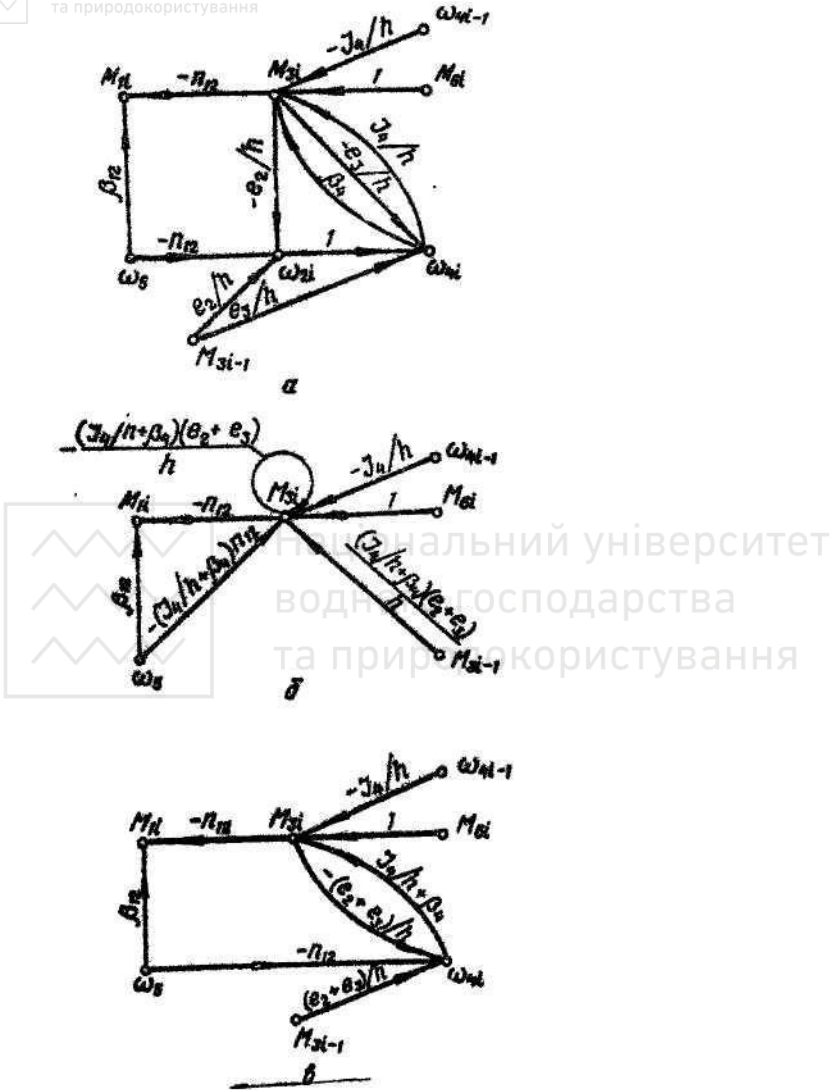


Рис. 2

При $i = 1$ значения M_{30} и ω_{40} равны нулю и из уравнений, (6) - (8) определяются значения $M_{11}, M_{31}, \omega_{41}$. При $i = 2$



значения M_{31}, ω_{41} подставляются в уравнения (6) - (8) и определяются $M_{12}, M_{32}, \omega_{42}$ и т.д. до $i=r$.

Упрощенный метод математического описания электроэнергетических систем с сосредоточенными параметрами

В условиях широкого использования ЦВМ вывод уравнений, описывающих характеристики электроэнергетической системы, представляется в ряде случаев более ответственным этапом исследования, чем решение самих уравнений. Весьма существенным при этом является требование максимальной простоты, предполагающее запись уравнений непосредственно из рассмотрения системы. Применение при анализе электроэнергетических систем матрично-топологических методов описания в значительной мере приближает к выполнению поставленной задачи и позволяет упростить и формализовать вывод уравнений независимо от сложности системы и физической природы ее компонент.

Например, вывод уравнений системы с сосредоточенными параметрами методом ветвей-хорд подразделяется на несколько этапов:

- 1 Запись полюсных уравнений компонент

$$W \begin{bmatrix} X_{B2} \\ X_{C1} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} Y_{B2} \\ Y_{C1} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где W, Z — матрицы коэффициентов полюсных уравнений;

X_{B2}, Y_{B2} — неизвестные параллельные и последовательные переменные ветвей;

X_{C1}, Y_{C1} — неизвестные параллельные и последовательные переменные хорд.

2. Образование графа системы и выбор дерева.

- 3 Запись уравнений фундаментальных контуров:

$$\begin{bmatrix} X_{B2} \\ X_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где X_{B1} — заданные параллельные переменные ветвей;

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix} = B$ — подматрица матрицы коэффициентов, состоящих из 1, -1 и 0;



и уравнений отсечений:

$$\begin{bmatrix} Y_{B2} \\ Y_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{C1} \\ Y_{C2} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Y_{C2} —заданные последовательные переменные хорд;

$\begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$ — подматрицы матрицы коэффициентов, состоящих из 1, -1 и 0.

4. Подстановка уравнений (2) и (3) в уравнения (1).

Полученные в итоге уравнения ветвей-хорд системы имеют вид:

$$W \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix} = Z \begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{C1} \\ Y_{C2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

или

$$WBX_B = ZAY_C, \quad (5)$$

где

$$X_B = \begin{bmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \end{bmatrix}; \quad Y_C = \begin{bmatrix} Y_{C1} \\ Y_{C2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Число уравнений ветвей-хорд определяется выражением. $e - n_x - n_y$, где e — число дуг графа системы; n_x, n_y — элементы графа, соответствующие заданным параллельным и последовательным переменным. Параллельные переменные уравнений (5) соответствуют ветвям дерева графа системы, а последовательные переменные — хордам графа системы.

Как видно из (5), для окончательной записи уравнений системы необходимо определить два тройных матричных произведения, что при большом числе переменных вызывает существенные затруднения и может привести к ошибке. Вместе с тем анализ выражений (1) и (4) показывает, что уравнения (4) отличаются от (1) тем, что вместо переменных X_{C1}, Y_{B2} в них включены заданные переменные X_{B1}, Y_{C2} .

Связь между указанными переменными устанавливается из уравнений (2) и (3):

$$X_{C1} = -B_{11}X_{B1} - B_{12}X_{B2}; \quad (7)$$

$$Y_{B2} = -A_{21}Y_{C1} - A_{22}Y_{C2}. \quad (8)$$

Зависимости (7) и (8) могут быть получены также из фундаментальных контуров и отсечений графа системы на основании постулатов для контуров и вершин.

Таким образом, используя граф системы и его дерево, уравнения системы можно определить непосредственно из полюсных уравнений компонент путем подстановки в них выражений (7) и (8). В итоге вывод уравнений системы значительно упрощается, так как отпадает



необходимость выполнения ряда промежуточных операций и, в частности, определения тройных матричных произведений WBX_B и ZAY_C , что повышает достоверность результата. Рассмотрим это на примере.

Выведем уравнения для нелинейной колебательной системы, возбуждаемой от двигателя постоянного тока (рис. 1,а).

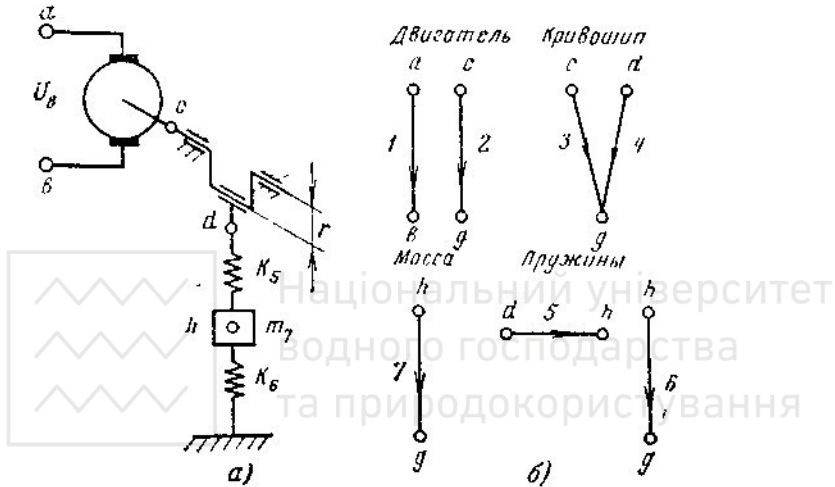


Рис. 1. Колебательная система с возбуждением от двигателя постоянного тока (а), полюсные графы компонент (б).

Известны все параметры системы, задано напряжение на якоре двигателя U_8 . Граф системы, образованный из полюсных графов компонент (рис. 1,б), показан на рис. 2,а.

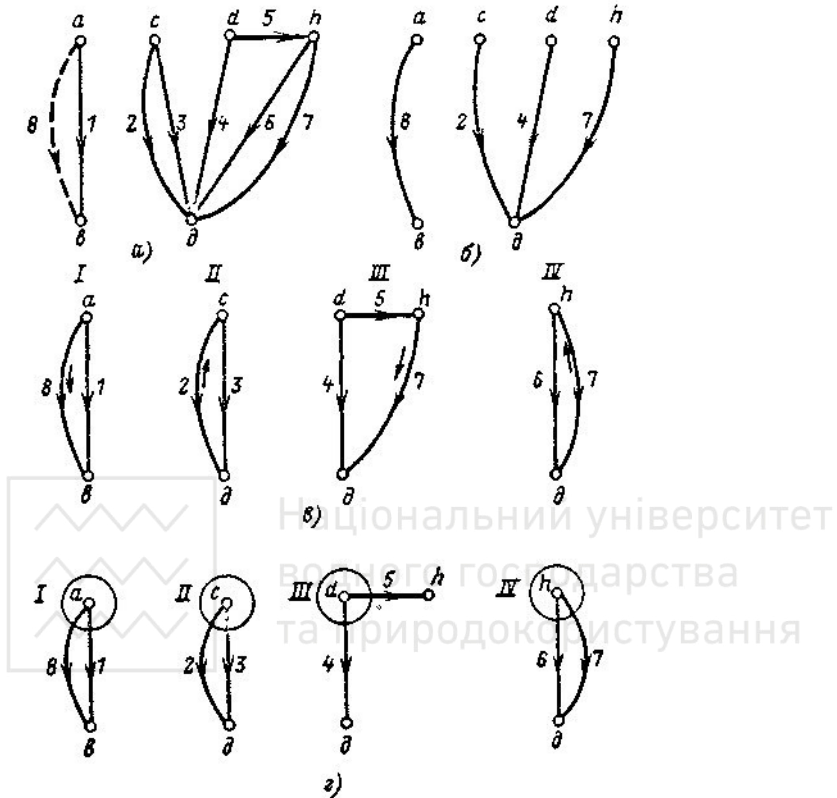


Рис. 2. Граф системы (а), лес графа (б), фундаментальные контуры (в) и отсечения графа (г).

Полусные уравнения компонент имеют вид:
двигатель

$$\left. \begin{aligned} i &= K_1 U_1 - \mathcal{W}_1 \varphi_2; \\ M_2 &= -K_2 U_1 + \mathcal{W}_2 \varphi_2. \end{aligned} \right\}$$

(9)

где

$$K_1 = \frac{1}{R_1}; \quad K_2 = \frac{c}{R_1}; \quad \mathcal{W}_1 = \frac{c}{R_1} \frac{d}{f dt}; \quad \mathcal{W}_2 = \frac{c^2}{R_1} + J_2 \frac{d^2}{dt^2};$$

кровошип

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= r \cos \varphi_3 f_4; \\ \delta_4 &= r \sin \varphi_3; \end{aligned} \right\}$$

(10)



пружины

$$\left. \begin{aligned} f_5 &= K_5 \delta_5; \\ f_6 &= K_6 \delta_6; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

масса

$$f_7 = \left(B_7 \frac{d}{dt} + m_7 \frac{d^2}{dt^2} \right) \delta_7 = W_7 \delta_7. \quad (12)$$

В соответствии с установленными закономерностями в уравнения системы должны войти параллельные переменные ветвей $U_8, \varphi_2, \delta_4, \delta_7$ и последовательные переменные хорд i_1, M_3, f_5, f_6 . Кроме этого из уравнений системы должны быть исключены незаданные параллельные переменные хорд X_{cl} и последовательные переменные ветвей $Y_{в2}$, т. е. переменные $U_1, \varphi_3, \delta_5, \delta_6, M_2, f_4, f_7$. Значения указанных переменных на основании (7) и (8) находим из фундаментальных контуров и отсечений графа (рис. 2, в, г). В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_8; \varphi_3 = \varphi_2; \delta_5 = \delta_4 - \delta_7; \delta_6 = \delta_7; \\ M_2 &= -M_3; f_4 = -f_6; f_7 = f_5 - f_6. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Подставив зависимости (13) в уравнения (9) — (12) и объединив их, получим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= K_1 U_8 - W_1 \varphi_2; \\ -M_3 &= -K_2 U_8 + W_2 \varphi_2; \\ M_3 + r \cos \varphi_3 f_5 &= 0; \\ \delta_4 &= r \sin \varphi_2; \\ f_5 &= K_4 \delta_4 - K_3 \delta_7; \\ f_6 &= K_6 \delta_6; \\ f_5 - f_6 &= W_7 \delta_7. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Уравнения (14) полностью совпадают с уравнениями, полученными методом ветвей-хорд

Таким образом, как видно из примера, вывод уравнений электромеханической системы сводится в данном случае к простой замене переменных в полюсных уравнениях компонент, осуществляемой на основе графа системы и принятого дерева (леса).

Метод полюсного представления блоков электромеханических систем с использованием графов распространения сигнала

Количественное и качественное усложнение реальных электромеханических систем требует совершенствования методов их



описания. Вывод уравнений сложных систем, основанный на непосредственном использовании полюсных характеристик неприводимых компонент не всегда достаточно эффективен, поскольку при большом числе компонент количество итоговых уравнений затрудняет последующее исследование систем. В этом случае наиболее целесообразным представляется предварительное объединение компонент в блоки и получение полюсных характеристик блоков. В дальнейшем блоки рассматриваются как компоненты системы, а описание систем осуществляется указанными выше методами.

Процесс определения полюсных характеристик блоков, например методом ветвей-хорд, на первом этапе заключается в записи уравнений блока в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B_{11} & -B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ X_{b_2} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A_{21} & -A_{22} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{c_1} \\ Y_{c_2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

где X_{b_1} , Y_{c_2} — внешние параллельные и последовательные воздействия на систему; X_{b_2} , Y_{c_1} — незадаваемые параллельные переменные ветвей и последовательные переменные хорд; W_{ij} , Z_{ij} — коэффициенты полюсных уравнений компонент блока; A_{ij} , B_{ij} — коэффициенты уравнений отсечений и фундаментальных контуров, принимающие соответственно значения 1, -1, 0; $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, n$.

Все последующие операции выполняются с целью исключения из уравнений (1) переменных X_{b_2} , Y_{c_1} и введения последовательных переменных ветвей Y_{b_1} и параллельных переменных хорд X_{c_1} . Для этого уравнения (1) представляются в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ Y_{c_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} - W_{12}B_{12} & Z_{11}A_{21} - Z_{12} \\ W_{21} - W_{22}B_{12} & Z_{21}A_{21} - Z_{22} \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} W_{12}B_{11} - Z_{11}A_{22} \\ W_{22}B_{11} - Z_{21}A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ Y_{c_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнений отсечений и фундаментальных контуров записываются выражения для переменных Y_{b_1} и X_{c_2}

$$\begin{bmatrix} Y_{b_1} \\ X_{c_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ B_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ Y_{c_1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{11} \\ B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_2} \\ Y_{c_2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

и уравнения (2) подставляются в (3). После соответствующих преобразований окончательно имеем:



$$\begin{bmatrix} Y_{b_1} \\ X_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ Y_{c_2} \end{bmatrix},$$

(4)

где

$$C_{11} = A_{11} \frac{W_{12}B_{11}(W_{21} - W_{22}B_{12}) -$$

$$\rightarrow \frac{-W_{22}B_{11}(W_{11} - W_{12}B_{12})}{-(W_{11} - W_{12}B_{12})(Z_{22} - Z_{21}A_{21})};$$

$$C_{12} = A_{11} \frac{Z_{21}A_{22}(W_{11} - W_{12}B_{12}) -$$

$$\rightarrow \frac{-Z_{11}A_{22}(W_{21} - W_{22}B_{12})}{-(W_{11} - W_{12}B_{12})(Z_{22} - Z_{21}A_{21})} - A_{12};$$

$$C_{21} = B_{22} \frac{W_{12}B_{11}(Z_{22} - Z_{11}A_{21}) -$$

$$\rightarrow \frac{-W_{22}B_{11}(Z_{12} - Z_{11}A_{21})}{-(W_{11} - W_{12}B_{12})(Z_{22} - Z_{21}A_{21})} - B_{12};$$

$$C_{22} = B_{22} \frac{W_{21}A_{22}(Z_{12} - Z_{11}A_{21}) -$$

$$\rightarrow \frac{-Z_{11}A_{22}(Z_{22} - Z_{21}A_{21})}{-(W_{11} - W_{12}B_{12})(Z_{22} - Z_{21}A_{21})}.$$

Как следует из вышеприведенного, при выводе полюсных уравнений блока требуется определять обратную матрицу, что в общем случае весьма затруднительно. Этого можно избежать, если использовать преобразование уравнений блока в граф распространения сигнала, на основании которого получить коэффициенты полюсных уравнений блока. Например, определив из (3) значения переменных X_{b_2} , Y_{c_1} и подставив их в (1), представим полученные уравнения в виде

$$\left. \begin{aligned} Y_{b_1} &= \frac{K_2}{K_3} X_{c_2} + \frac{K_1}{K_3} Y_{c_1} - \frac{K_1}{K_3} X_{b_1}; \\ X_{c_2} &= \frac{K_5}{K_6} X_{b_1} + \frac{K_7}{K_5} Y_{b_1} - \frac{K_6}{K_6} Y_{c_2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где



$$K_1 = (W_{12}B_{12} - W_{11}) \frac{B_{21}}{B_{22}} - W_{12}B_{11};$$

$$K_2 = \frac{W_{11} - W_{12}B_{12}}{B_{22}};$$

$$K_3 = \frac{Z_{12} - Z_{11}A_{21}}{A_{11}};$$

$$K_4 = (Z_{11}A_{21} - Z_{12}) \frac{A_{12}}{A_{11}} - Z_{11}A_{22};$$

$$K_5 = (W_{22}B_{12} - W_{21}) \frac{B_{21}}{B_{22}} - W_{22}B_{11};$$

$$K_6 = \frac{W_{21} - W_{22}B_{12}}{B_{22}};$$

$$K_7 = \frac{Z_{22} - Z_{21}A_{21}}{A_{11}};$$

$$K_8 = (Z_{21}A_{21} - Z_{22}) \frac{A_{12}}{A_{11}} - Z_{21}A_{22}.$$

(6)

Уравнения (5) по известным правилам преобразуем в граф распространения сигнала (рис. 1,а), в котором вершинами служат переменные уравнений (5).

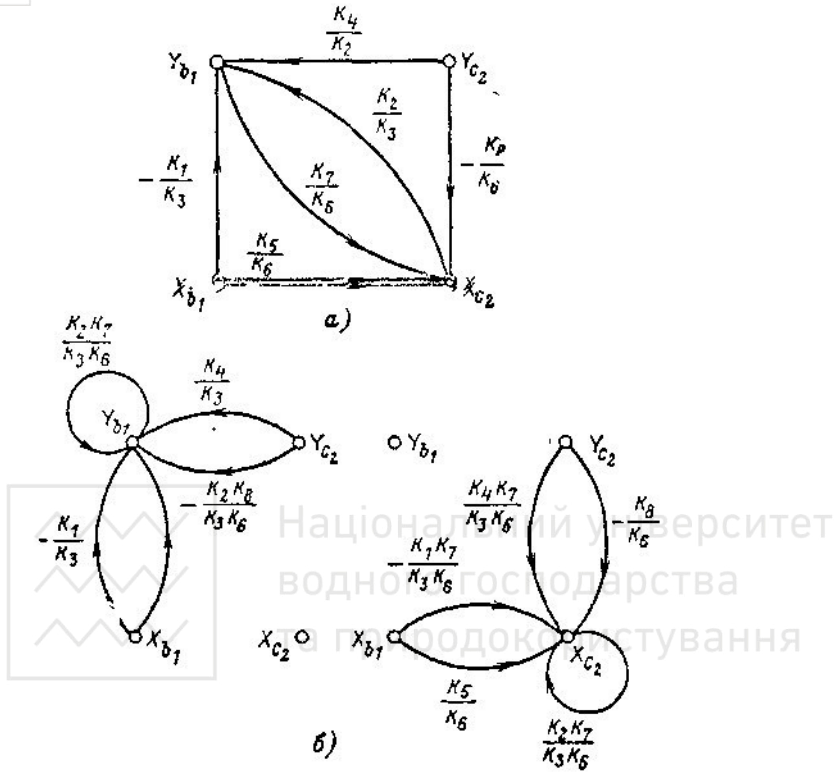


Рис. 1. Граф распространения сигнала блока (а), преобразованные графы сигналов блока (б).

Применяя простейшие приемы упрощения линейных графов или формулу передачи графа, определим величину передачи построенного графа к полюсам Y_{b1} и X_{c2} . Для этой цели, например, данный граф преобразуем в граф I и граф II (рис. 1,б), для которых



$$\left. \begin{aligned} Y_{b_1} &= \left(\frac{K_4}{K_2} - \frac{K_2}{K_3} \frac{K_8}{K_6} \right) Y_{c_1} + \left(\frac{K_2}{K_3} \frac{K_7}{K_6} - \frac{K_1}{K_3} \right) X_{b_1} + \\ &\quad + \frac{K_2}{K_7} \frac{K_7}{K_6} Y_{b_1}; \\ X_{c_2} &= \left(\frac{K_5}{K_6} - \frac{K_1}{K_3} \frac{K_7}{K_6} \right) X_{b_1} + \left(\frac{K_3}{K_3} \frac{K_7}{K_6} - \frac{K_8}{K_6} \right) Y_{c_1} + \\ &\quad + \frac{K_2}{K_3} \frac{K_7}{K_6} X_{c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставив в (7) зависимости (6) и выполнив элементарные преобразования, в итоге получим:

$$\begin{bmatrix} Y_{b_1} \\ X_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b_1} \\ Y_{c_1} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} D_{11} &= A_{11} \frac{W_{12} B_{11} (W_{21} - W_{22} B_{12}) -}{(W_{21} - W_{22} B_{12}) (Z_{12} - Z_{11} A_{21})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-W_{22} B_{11} (W_{11} - W_{12} B_{12})}{-(W_{11} - W_{12} B_{12}) (Z_{22} - Z_{21} A_{21})}; \\ D_{12} &= A_{11} \frac{Z_{21} A_{22} (W_{11} - W_{12} B_{12}) -}{(W_{21} - W_{22} B_{12}) (Z_{12} - Z_{11} A_{21})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-Z_{11} A_{22} (W_{21} - W_{22} B_{12})}{-(W_{11} - W_{12} B_{12}) (Z_{22} - Z_{21} A_{21})} - A_{12}; \\ D_{21} &= B_{22} \frac{W_{12} B_{11} (Z_{22} - Z_{11} A_{21}) -}{(W_{21} - W_{22} B_{12}) (Z_{12} - Z_{11} A_{21})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-W_{22} B_{11} (Z_{12} - Z_{11} A_{21})}{-(W_{11} - W_{12} B_{12}) (Z_{22} - Z_{21} A_{21})} - B_{12}; \\ D_{22} &= B_{22} \frac{Z_{21} A_{22} (Z_{12} - Z_{11} A_{21}) -}{(W_{21} - W_{22} B_{12}) (Z_{12} - Z_{11} A_{21})} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-Z_{11} A_{22} (Z_{22} - Z_{21} A_{21})}{-(W_{11} - W_{12} B_{12}) (Z_{22} - Z_{21} A_{21})}. \end{aligned}$$

Уравнения (8), таким образом, полностью совпадают с уравнениями (4).

Для примера рассмотрим определение полюсных характеристик электромеханической системы, состоящей из двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и цилиндрического зубчатого редуктора (рис. 2,а).

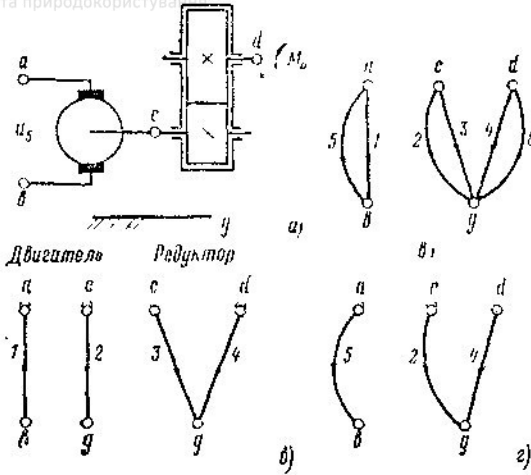


Рис. 2. Электромеханическая система с двигателем постоянного тока (а), полюсные графы компонент системы (б), граф системы (в), лес графа (г).

Известны все параметры системы, а также внешние воздействия на данный блок: напряжение на якоре двигателя u_5 и момент нагрузки на выходном валу редуктора M_6 . Полюсные графы компонента блока изображены на рис. 2, б. Граф блока, лес графа и полюсный граф блока показаны соответственно на рис. 2, в и г и 3, а.

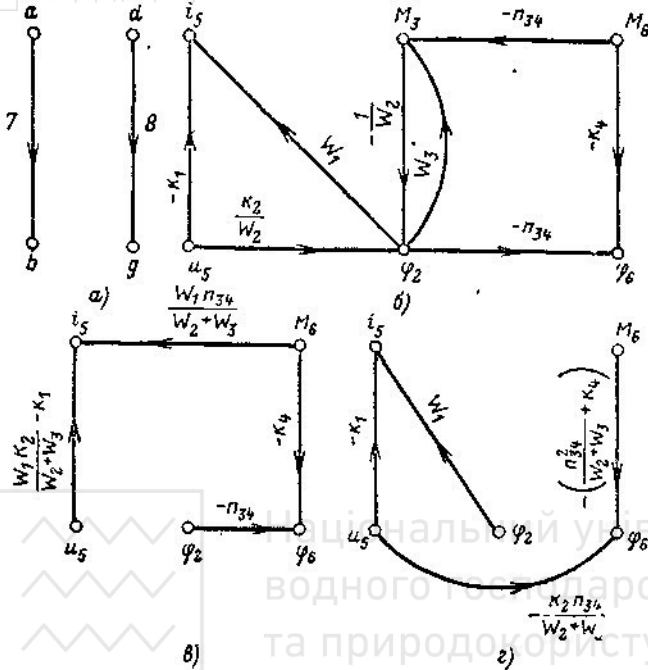


Рис. 3. Полусный граф электромеханического блока (а), граф распространения сигнала блока (б), упрощенные графы распространения сигналов блока (в и г).

Полусные уравнения компонент имеют вид:
для двигателя

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= k_1 u_1 - W_1 \varphi_2, \\ M_2 &= -k_2 u_1 + W_2 \varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{R_1}; \quad k_2 = \frac{c}{R_1}; \quad W_1 = \frac{c}{R_1} \frac{d}{dt}; \quad W_2 = \frac{c^2}{R_1} \frac{d}{dt} + J_2 \frac{d^2}{dt^2};$$

для редуктора

$$\left. \begin{aligned} M_3 &= W_3 \varphi_3 + n_{34} M_4; \\ \varphi_4 &= -n_{34} \varphi_3 + k_4 M_4, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$W_3 = (J_3 + J_4 n_{34}^2) \frac{d^2}{dt^2}.$$



В (9) и (10) приняты следующие обозначения: i_1, u_1 — ток и напряжение якоря двигателя; R_1, c — сопротивление якорной цепи и коэффициент пропорциональности между моментом двигателя и током якоря; J_2, J_3, J_4 — моменты инерции якоря и зубчатых колес; $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — угловые координаты звеньев; M_2, M_3, M_4 — крутящие моменты; n_{34} — передаточное отношение зубчатой передачи; k_4 — коэффициент жесткости зубчатой передачи.

Используя формальные методы вывода уравнений, на основании полюсных уравнений компонент, графа блока и его леса запишем уравнения блока:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= k_1 u_5 - W_1 \varphi_2; \\ -M_2 &= -k_2 u_5 + W_2 \varphi_2; \\ M_3 &= W_3 \varphi_2 - n_{34} M_4; \\ \varphi_4 &= -n_{34} \varphi_2 - k_4 M_4. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Для получения полюсного уравнения блока установим функциональную связь между переменными i_5, φ_6 и u_5, M_6 . Для этого уравнения (11), сделав в них предварительно подстановки $i_1 = -i_5$ и $\varphi_2 = \varphi_6$, представим в виде графа распространения сигнала, приняв за вершины графа переменные $i_5, M_3, M_6, u_5, \varphi_2, \varphi_6$ (рис. 3,б). Данный граф путем исключения промежуточных вершин преобразуем последовательно в граф I (рис. 3,а) и граф II (рис. 3,г), для которых величины передачи графа к вершинам i_5 и φ_6 соответственно выражаются:

$$\left. \begin{aligned} i_5 &= \left(\frac{k_2 W_1}{W_2 + W_3} - k_1 \right) u_5 + \frac{W_1 n_{34}}{W_2 + W_3} M_6; \\ \varphi_6 &= -\frac{k_2 n_{34}}{W_2 + W_3} u_5 - \left(\frac{n_{34}^2}{W_2 + W_3} + k_4 \right) M_6. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Учитывая далее связь между внешними и полюсными переменными блока

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} i_1 \\ M_4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} u_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_7 \\ \varphi_8 \end{bmatrix},$$

окончательно получаем:

$$\begin{bmatrix} i_7 \\ \varphi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - \frac{k_2 W_1}{W_2 + W_3} & \frac{W_1 n_{34}}{W_2 + W_3} \\ -\frac{k_2 n_{34}}{W_2 + W_3} & \frac{n_{34}^2}{W_2 + W_3} + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_7 \\ M_8 \end{bmatrix}.$$



Предложенный метод существенно сокращает вывод полюсных уравнений электромеханических систем и расширяет возможности самого топологического метода. Так, например рациональное разделение систем на блоки будет определяться уже не столько трудоемкостью полюсного описания, сколько другими признаками — физической однородностью объединяемых компонент, конструктивными соображениями и т. п.





Литература

1. Кениг Г., Блекуэлл В. Теория электромеханических систем. М., «Энергия», 1965.
2. Ильинский Н. Ф., Цаценкин В. К. Топологические методы в электромеханике. — «Электричество», 1967, №6.
3. Ильинский Н. Ф., Цаценкин В. К. Приложение теории графов к задачам электромеханики. М., «Энергия», 1968.
4. Робишо Л., Буавер М., Робер Ж. Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. М., «Энергия», 1964.
5. Мэзон С, Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

