Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки
Кафедра вищої математики

04-02-61М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни ***«Вища математика»*** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної і заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІЕАВГ
Протокол № 4 від 19.12.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної і заочної форм навчання. [Електронне видання] / Цецик С. П. – Рівне : НУВГП, 2023. – 120 с.

Укладач: Цецик С. П., к.п.н, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівник освітньої програми *«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»:* Літковець С. П., к.т.н., доцент, доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник освітньої програми *«Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»:* Христюк А. О., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Зміст

Вступ

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» складено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, які навчаються за освітньо-професійними програмами «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» й «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної і заочної форм навчання.

Метою методичних вказівок є надання методичної допомоги студентам у самостійній роботі при вивченні вищої математики.

У методичних вказівках подано кроткі теоретичні відомості, необхідні для розв’язання задач з п’яти розділів курсу вищої математики: ,,Елементи лінійної і векторної алгебри”, ,,Елементи аналітичної геометрії”, ,,Вступ до математичного аналізу”, ,,Диференціальне числення функції однієї змінної”, ,,Диференціальне числення функції декількох змінних”. Також наведено приклади розв’язання типових задач, що виносяться на модульні контролі та самостійні роботи. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв’язання задач, наведено завдання для самостійної роботи.

Тема 1. Обчислення визначників. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера

Визначники другого і третього порядків визначаються рівностями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Числа a_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ називаються елементами визначника. Мінором будь-якого елемента a_{ij} називається визначник M_{ij}, одержаний з даного визначника, що не містить рядка і стовпця на перетині яких знаходиться цей елемент. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника є число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. Це можна використовувати як ще один метод обчислення визначників.

В багатьох випадках спрощує обчислення визначників використання властивостей визначника, зокрема, спільний множник всіх елементів деякого рядка або стовпця можна винести за знак визначника, якщо відповідні елементи двох рядків чи стовпців пропорційні, то визначник дорівнює нулю; якщо всі елементи деякого рядка або стовпця визначника задані у вигляді суми двох елементів, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, в одному з яких елементи відповідного рядка чи стовпця є першими доданками, а в другому – другими доданками; якщо до елементів будь-якого рядка чи стовпця додати відповідні елементи іншого рядка або стовпця, помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

То дана система має єдиний розв'язок $\{x_1, x_2, x_3\}$, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. $\Delta = (-3)\cdot 4 - 2\cdot 5 = -22$.

Приклад 2. Обчислити мінор M_{12} і алгебраїчне доповнення A_{12} визначника третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 42 = -52,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -1\cdot(-52) = 52.$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

безпосередньо та розкладом за елементами першого рядка.

Розв'язання.

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot 8 + 4\cdot 5\cdot 6 + (-1)\cdot(-3)\cdot 2 - 6\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 - (-3)\cdot 5\cdot 3 = 227$$

.

Той самий результат отримаємо якщо розкласти даний визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 3\cdot A_{11} + 4\cdot A_{12} + 2\cdot A_{13} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 31 - 4\cdot(-38) + 2\cdot(-9) = 227.$$

Користуючись властивістю незмінності визначника при додаванні до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне і те ж число, можна заданий визначник звести до визначника у якому всі елементи будь-якого рядка (стовпця), крім одного, будуть рівні нулю.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 3 - 8 - 2 - 18 = -45 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&-2&1\\3&4&2\\1&1&-3\end{vmatrix}=-96+3-4-4-16-18=-135;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&8&1\\3&3&2\\2&1&-3\end{vmatrix}=-9+32+3-6-2+72=90;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-2&8\\3&4&3\\2&1&1\end{vmatrix}=4-12+24-64-3+6=-45.$$

За формулами Крамера:

$x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{-135}{-45}=3;$ $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{90}{-45}=-2;$ $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-45}{-45}=1.$

Розв'язок системи: $\{(3;-2;1)\}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2=8,\\3x_1+2x_2=12;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1-4x_2=5,\\6x_1-8x_2=10;\end{cases}$

в) $\begin{cases}2x_1-3x_2=6,\\4x_1-6x_2=5;\end{cases}$

г) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4,\\x_1-3x_2+2x_3=5,\\2x_1+x_2-3x_3=3;\end{cases}$ д) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2,\\x_1-3x_2+2x_3=-3,\\3x_1+x_2=1;\end{cases}$

е) $\begin{cases}2x_1-3x_2+5x_3=0,\\8x_1+2x_2-x_3=21,\\2x_1+11x_2-16x_3=21.\end{cases}$

Тема 2. Матриці. Дії над ними. Обернена матриця. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Впорядкована таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців називається матрицею і записується у вигляді:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пара чисел (m, n) визначає розмір матриці. Якщо $m \neq n$, то матриця називається прямокутною. Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною, а число $m = n$ називається порядком цієї матриці.

Сумою двох матриць однакового розміру є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць. При множенні матриці на число потрібно всі її елементи помножити на це число.

Помножити матрицю A на матрицю B можна якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Елемент C_{ik} матриці $C = A \cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B. В цьому випадку, якщо (m, n) – розмір матриці A, а (n, p) – розмір матриці B, то (m, p) – розмір матриці C.

Матриця A', одержана з матриці A шляхом заміни рядків відповідними стовпцями і навпаки, називається транспонованою по відношенні до матриці A.

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця (всі елементи, які лежать на головній діагоналі рівні одиниці, а всі інші – нулі). Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю. Такі матриці називаються неособливими.

Щоб знайти матрицю A^{-1}, обернену до неособливої матриці A, потрібно:

1. Обчислити визначник $\det A = \Delta$;
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik} визначника Δ;
3. Скласти із чисел A_{ik} матрицю A^*;
4. Транспонувати матрицю A^*, утворивши матрицю $\tilde{A} = (A^*)'$. Матриця $\tilde{A}$ називається приєднаною до матриці A;
5. Скласти обернену матрицю A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$.

Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Складемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матриця системи;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з вільних членів;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з невідомих.

Дану систему рівнянь записуємо в матричній формі – матричним рівнянням $AX = B$.

Якщо матриця A неособлива $(\det A = \Delta \neq 0)$, то отримуємо розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X = A^{-1}B$.

Приклад 1. Знайти $3A+2B$**,** якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$3A+2B=3\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 1 & 8 \\ 21 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти $A\cdot B$**,** якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$**.**

Розв'язання. Число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матиці B, тому матриці можна перемножувати:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 3 & 5\cdot 3+(-2)\cdot 5+3\cdot 4 \\ 2\cdot 2+1(-1)+4\cdot 3 & 2\cdot 3+1\cdot 5+4\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 21 & 17 \\ 15 & 27 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти $A\cdot B$**,** якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**.**

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+1+15 & 4+2+6 & 8+3+3 \\ 12-2+5 & 8-4+2 & 16-6+1 \\ 9+5-10 & 6+10-4 & 12+15-2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & 12 & 14 \\ 15 & 6 & 11 \\ 4 & 12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 + 8 + 4 + 9 + 16 = 43 \neq 0 .$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Складаємо матрицю:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 6 \\ 6 & -16 & 1 \\ -1 & 17 & 7 \end{pmatrix} \text{ і транспонуємо її: } \widetilde{A} = (A^{*})' = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці А:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\widetilde{A} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь в матричній формі – матричним рівнянням $AX = B$, де

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -1\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Визначник матриці А – коефіцієнтів при невідомих системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=24\neq 0\,.$$

Розв'язок системи рівнянь в матричній формі: $X=A^{-1}\cdot B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення визначника заданої системи:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=11;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=7;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}-11.$$

Складаємо матриці:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-1 & 11 & 7\\ 7 & -5 & -1\\ 5 & -7 & -11\end{pmatrix}\ \text{і}\ \ \tilde{A}=(A^{*})'=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}.$$

Обернена матриця: $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}$.

Шуканий розв'язок: $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -1\end{pmatrix}=$

.

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-6+35-5\\66-25+7\\42-5+11\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24\\48\\48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{(1;2;2)\}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти добутки матриць:

1) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & 0\\1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\1 & -3 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\-2 & -1 & 2\\3 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\3 & 2 & 1\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

2. Знайти обернену матрицю A^{-1}, якщо:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\6 & 3 & 4\\3 & -2 & -3\end{pmatrix}$.

3. Розв'язати системи рівнянь матричним методом:

1) $\begin{cases}x_1+2x_2=8,\\3x_1+2x_2=12;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\3x_1-5x_2+3x_3=1,\\2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y+z=1,\\x-y+2z=-5,\\4x+y+4z=-2.\end{cases}$

Тема 3. Вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток векторів

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямний відрізок прямої, довжина якого називається модулем вектора; записують $\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор $\vec{a}$ заданий координатами a_x, a_y, a_z записують у вигляді: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ або $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрями яких співпадають з додатними напрямками осей координат (орти).

Якщо початок вектора міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються), при множенні вектора на число всі його координати множаться на це число.

Якщо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, то:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Число $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ – скалярний квадрат вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}^2 = \left|\vec{a}\right|^2$.

Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ і $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^{\ 2} + b_y^{\ 2} + b_z^{\ 2}}}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Приклад 1. Дано точки: A(3; -1; 2), B(4; 3; 1), C(5; 2; 3). Знайти вектор $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання.

$\overrightarrow{AB}$ = (4-3; 3+1; 1-2) = (1; 4; -1), $\overrightarrow{BC}$ = (5-4; 2-3; 3-1) = (1; -1; 2), 3 $\overrightarrow{AB}$ = (3; 12; -3), 4$\overrightarrow{BC}$ = (4; -4; 8), $\vec{a}$ = (3+4; 12-4; -3+8) = (7; 8; 5).

Приклад 2. Знайти: $\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ (кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

Розв'язання.

$$\left(4\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 4\vec{a}^{\,2} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b}^{\,2} = 4\left|\vec{a}\right|^2 - 5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi - 6\left|\vec{b}\right|^2 =$$

$$= 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \cdot 9 = -23.$$

Приклад 3. Знайти: $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, кут між векторами $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^{\,2} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^{\,2}} = \sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2 - 12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi + 9\left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 16 - 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} - 9 \cdot 4} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Приклад 4. Дано трикутник з вершинами в точках: $A(1; 1;-2)$, $B(3; 2; 1)$, $C(2; 4; -1)$. Знайти внутрішній кут φ при вершині B і проекцію вектора $\overrightarrow{BA}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання. Шуканий кут φ – це кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. В даному випадку, маємо $\overrightarrow{BA}$ = (-2; -1; -3) і $\overrightarrow{BC}$ = (-1; 2; -2). Тому

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-2)(-1)+(-1)2+(-3)(-2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

$$np_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{6}{3} = 2\cdot$$

Приклад 5. Дано координати вершин піраміди $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$, $Д(4;-1;5)$. Знайти:

а) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ та їх модулі;

б) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$;

в) $\overline{AB}\cdot(\overline{CA}+2\overline{AD})$;

г) кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$.

Розв'язання. а) Знаходимо координати векторів та їх модулі:

$$\overline{AB} = (1-2;1-(-1);1-3) = (-1;2;-2);$$

$$\overline{AC} = (0-2;0-(-1);5-3) = (-2;1;2);$$

$$\overline{AD} = (4-2;-1-(-1);5-3) = (2;0;2);$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{2^2+0+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

б) Проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AD}$ знайдемо за формулою

$Пр_{\overline{AD}}\overline{AB} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|}$, де $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$ – скалярний добуток цих векторів. Оскільки $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$ = (-1)·2 + 2·0 + (-2)·2= -6, а $\left|\overline{AD}\right| = 2\sqrt{2}$, то $Пр_{\overline{AD}}\overline{AB} = \dfrac{-6}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{2}} \approx -2{,}12.$

в) Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{CA}$, $2\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD}$: $\overline{CA} = -\overline{AC} = (2;-1;-2)$, $2\overline{AD} = (4;0;4)$,

$$\overline{CA} + 2\overline{AD} = (2+4;-1+0;-2+4) = (6;-1;2).$$

Тоді $\overline{AB}\cdot(\overline{CA} + 2\overline{AD}) = (-1)\cdot 6 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 2 = -12.$

г) Оскільки внутрішній кут φ при вершині *A* трикутника *ABC* – це кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, то $\cos\varphi = \cos\left(\overline{AB},^\wedge\overline{AC}\right) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}.$

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 = 0,\ \left|\overline{AB}\right| = 3,\ \left|\overline{AC}\right| = 3,$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{3\cdot 3} = 0,\ \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, шуканий кут дорівнює $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тобто вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ – перпендикулярні.

Приклад 6. Обчислити роботу, яку виконує сила $\overline{F}$ =(1;-3;2) при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення *A*(0;1;0) в положення *B*(1;0;1).

Розв'язання. Роботу сили $\overline{F}$ по переміщенню матеріальної точки з положення *A* в положення *B* знайдемо за формулою $A = \overline{F}\cdot\overline{AB}$.

Знайдемо координати вектора переміщення $\overline{AB}$ =(1;-1;1). Тоді A=1·1+(-3)·(-1)+2·1=6.

Завдання для самостійної роботи

1. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{b}\right| = 5$, обчислити:

а) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; б) $\left(3\overline{a} + 2\overline{b}\right)\left(\overline{b} - 2\overline{a}\right)$; в) $Пр_{\overline{a}}(2\overline{a} + \overline{b})$;

г) $\left|\overline{p}\right|$, якщо $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$.

2. Дано точки A(3;-1;0), B(2;1;1), C(3;0;-2). Знайти:

а) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та їх модулі;

б) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

в) $Пр_{\overline{AC}}(2\overline{AB} + \overline{BC})$.

3. При якому значенні α вектори $\overline{p}$ =(2;0;α) і $\overline{q}$ =(3;4;2) перпендикулярні?

Тема 4. Векторний та мішаний добутки векторів

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, довжина якого чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, він перпендикулярний до площини цих векторів і направлений так, що коли дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найменший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається проти стрілки годинника.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ або $\left[\vec{a}\vec{b}\right]$.

Властивості векторного добутку векторів:

1) модуль (довжина) векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку модулів (довжин) цих векторів на синус кута φ між ними, тобто

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi .$$

2) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні: $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$.

Нехай задано два вектори $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ та $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Тоді векторний добуток цих векторів визначається

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається їх векторно-скалярний добуток $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$, що позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Тобто $$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}.$$

Нехай задано три вектори $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, тоді їх мішаний добуток визначається:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Мішаний добуток трьох не компланарних векторів є число, модуль якого дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, тобто

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Умова компланарності трьох векторів

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 1. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

Розв'язання.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=7\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}.$$

Приклад 2. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(-1,0,2), B(1,-2,5), C(3,0,-4)$.

Розв'язання. Площа трикутника визначається:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|,$$

де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(2;-2;3), \vec{b}=\overrightarrow{AC}=(4;0;-6)$.

Оскільки

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$=12\vec{i}+24\vec{j}+8\vec{k}$, а $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\sqrt{784}=28$,

то $S=14$ *(кв.од)*.

Приклад 3. Обчислити довжину висоти піраміди, опущеної з вершини D, якщо задано її вершини: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2), C(6,3,,7), D(-5,-4,8)$.

Розв'язання. Об'єм піраміди рівний: $V_n=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H$ або $6V_n=2S_{осн}\cdot H$, звідки $H=\frac{V_{пар-да}}{S_{пар-ма}}$. Виходячи з геометричного змісту векторного і мішаного добутків векторів, отримаємо:

$$H=\frac{\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|},$$

де $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2;-2;-3), \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (4;0;6),$
$c = \overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$.

Оскільки $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -14 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= -14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 22,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$$

$$= -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}, \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} =$$

$= 4 \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 4 \cdot 7$, то $H = \dfrac{14 \cdot 22}{4 \cdot 7} = 11$ *(лін.од).*

Приклад 4. Перевірити, чи лежать точки $A(1,2,3), B(0,5,5), C(3,-1,-1), D(-2,14,9)$ в одній площині.

Розв'язання. Задані точки лежать в одній площині, якщо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1;3;2),\ \vec{b} = \overrightarrow{AC} = (2;-3;-4)$ і $\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (-3;12;6)$ - компланарні, тобто їх мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Оскільки

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

то задані точки лежать в одній площині.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$.

2. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

3. Обчислити об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(2, 1, -1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(1, -2, 1)$, $D(2, 0, 2)$.

4. Перевірити, чи лежать точки $A(-1,2,1)$, $B(0,3,3)$, $C(2,1,1)$, $D(-2,3,5)$ в одній площині.

Тема 5. Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Пряма лінія на площині. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Пряма і площина в просторі

Віддаль між двома точками.

Якщо в прямокутній декартовій системі координат задані дві точки $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то віддаль між двома точками знаходиться за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Нехай $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$ і $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$ – дві точки, які є кінцями відрізка *AB*. Координати точки $C(x_c;\,y_c;\,z_c)$, яка ділить цей відрізок у відношенні $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$ знаходяться за формулами:

$$x_c=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\quad y_c=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\quad z_c=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ ділить відрізок навпіл, то

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y_0=\frac{y_1+y_2}{2};\quad z_0=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Найпростішою лінією на площині є пряма лінія. Основні види рівнянь **прямої лінії на площині** в прямокутній системі координат XOY:

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}(A;B)$ (вектор $\vec{N}\neq\vec{0}$ називається нормальним вектором) задається у вигляді:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\,.$$

2. Будь-яке рівняння першого степеня відносно x і y, тобто

$$Ax+By+C=0\,,$$

де A, B, C – сталі коефіцієнти і $A^2+B^2\neq 0$ визначає на площині пряму лінію. Це рівняння називається загальним рівнянням прямої.

3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно вектору $\vec{S}(m;n)$ (вектор $\vec{S} \neq \vec{0}$ напрямний вектор) задається у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої.

4. Пряма лінія, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначається рівнянням:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом k ($k=tg\,\alpha$, де α – кут нахилу прямої з додатнім напрямком осі Ox):

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Гострий кут між двома прямими, що мають кутові коефіцієнти k_1 і k_2, визначається за формулою:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Коло. Колом називається множина точок площини, віддаль яких від фіксованої точки, яка називається центром кола, є величина стала, яка називається радіусом.

Рівняння кола з центром $O_1(x_0;y_0)$ і радіусом R в прямокутній системі координат має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Зокрема якщо центр кола лежить в початку координат, то одержуємо канонічне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = R^2 .$$

Еліпс. Еліпсом називається множина точок площини, сума віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), при умові, що ця стала більша за віддаль між фокусами (яку позначають 2 c).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси еліпса лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то отримується канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = a^2 - c^2$, $a > b$, a – велика піввісь, b – мала піввісь еліпса. Величина $\varepsilon = \dfrac{c}{a} < 1$ називається ексцентриситетом.

Еліпс, центр якого знаходиться в точці $(x_0; y_0)$ а осі паралельні осям координат, описується рівнянням:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола. Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (її позначають $2a$), при умові, що ця стала менша за віддаль між фокусами (яку позначають 2 c).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси гіперболи лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$, a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$. Прямі $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ називається асимптотами гіперболи.

Рівняння $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ є рівнянням гіперболи, центр якої лежить в точці $(x_0;y_0)$, а осі гіперболи паралельні осям координат.

Парабола. Параболою називається множина точок площини рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і даної прямої, яка називається директрисою.

Якщо директриса параболи є пряма $x=-\frac{p}{2}$ або $x=\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ або $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, де $p>0$, то маємо канонічні рівняння параболи:

$$y^2=2px \text{ або } y^2=-2px.$$

У випадку, якщо директриса параболи є пряма $y=-\frac{p}{2}$ або $y=\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ або $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, де $p>0$, то маємо ще два канонічних рівняння:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0), \quad (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

Нехай задане загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутку змінних $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$.

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то в результаті виділення повних квадратів, відносно кожної змінної, вихідне рівняння може набути одного з розглянутих нижче ліній другого порядку з осями симетрії паралельними до осей координат.

Основні рівняння **площини** в прямокутній системі координат XOY:

1. Рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до деякого вектора $\vec{N}(A,B,C)$ (вектор $\vec{N}\neq\vec{0}$ називається нормальним вектором) задається у вигляді:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

2. Загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

де A,B,C – координати ненульового вектора $\overrightarrow{N}$, який перпендикулярний до площини.

3. Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де a,b,c – відповідно абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями координат.

Нехай задані дві площини: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Кут між заданими площинами дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\overrightarrow{N}_1(A_1,B_1,C_1)$ та $\overrightarrow{N}_2(A_2,B_2,C_2)$ й визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова паралельності двох площин:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Основні рівняння **прямої у просторі** в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$.

1. Загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{S}(m,n,l)$ (вектор $\vec{S} \neq \vec{0}$ - напрямний вектор) задається у вигляді:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}.$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої.

3. Параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in R. \\ z = z_0 + lt, \end{cases}$$

4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається рівнянням:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Кутом між прямою й площиною називається гострий кут між прямою і її проекцією на цю площину.

Кут φ між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cl|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + l^2}}.$$

Умова паралельності прямої й площини:

$$Am + Bn + Cl = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої й площини:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{l}.$$

Приклад 1. Дано координати вершин трикутника $A(0;1)$, $B(2;11)$, $C(10;7)$. Методами аналітичної геометрії знайти:

а) загальні рівняння прямих AB і AC, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

б) рівняння прямої AB у відрізках;

в) загальне рівняння прямої AK, яка містить медіану трикутника ABC;

г) загальне рівняння висоти CE та її довжину;

д) внутрішній кут φ при вершині A трикутника ABC;

е) рівняння прямої, що проходить через точку B:

1. паралельно до прямої AC;
2. перпендикулярно до прямої AC;

є) координати центра ваги трикутника.

Зробити рисунок.

Розв'язання. Зробимо рисунок.

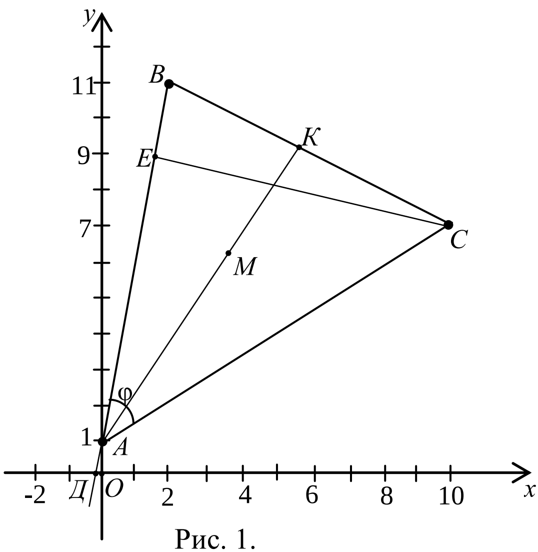


Рис. 1.

а) Підставивши в рівняння прямої, що проходить через дві дані точки координати точок A і B, отримаємо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{11-1},\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{10},\ 10x=2(y-1),$$

$5x-y+1=0$ – загальне рівняння прямої AB, $\overline{n_1}=(5;-1)$ – нормальний вектор прямої.

Розв'яжемо рівняння прямої AB відносно змінної y: $y=5x+1$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k_{AB}=5$.

Аналогічно знаходимо загальне рівняння прямої AC.

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},\ \frac{x-0}{10-0}=\frac{y-1}{7-1},\qquad \frac{x}{10}=\frac{y-1}{6},$$

$6x=10(y-1)$,

$3x-5y+5=0$ – загальне рівняння, $\overline{n_2}=(3;-5)$ – нормальний вектор прямої.

$y=\frac{3}{5}x+1$ – рівняння прямої AC з кутовим коефіцієнтом, де $k_{AC}=\frac{3}{5}$.

б) Зведемо загальне рівняння прямої AB до рівняння у відрізках. Для цього перенесемо вільний член заданого рівняння в праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння. Отримаємо: $5x-y=-1,\ \frac{x}{-\frac{1}{5}}+\frac{y}{1}=1.$

З цього рівняння видно, що пряма відтинає на осях координат відрізки $a=-\frac{1}{5}$ і $b=1$, тобто, проходить через точки $Д(-\frac{1}{5};0)$ та $A(0;1)$.

в) Знайдемо спочатку координати точки K, як середини відрізка BC.

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+10}{2} = 6, \ y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{11+7}{2} = 9,$$

тобто, $K(6;9)$.

Знайдемо рівняння медіани AK як рівняння прямої, що проходить через точки A і K:

$$\frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A}, \ \frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{9-1}, \ 4x - 3y + 3 = 0.$$

г) Оскільки нормальний вектор $\overline{n_1} = (5;-1)$ прямої AB буде напрямним до прямої CE, то, скориставшись канонічним рівнянням прямої, знайдемо рівняння висоти :

$$\frac{x - x_C}{5} = \frac{y - y_C}{-1}, \ \frac{x-10}{5} = \frac{y-7}{-1}, \ -(x-10) = 5(y-7).$$

Звідки $x + 5y - 45 = 0$ – шукане рівняння.

Довжину цієї висоти знайдемо як відстань від точки C до прямої AB:

$$|CE| = \frac{|5 \cdot 10 - 7 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{44}{\sqrt{26}} \approx 8{,}63 \text{ (лін. од.)}$$

д) Внутрішній кут φ при вершині A заданого трикутника, знайдемо як кут між прямими AB і AC.

Оскільки $\overline{n_1} = (5;-1)$, $\overline{n_2} = (3;-5)$ - нормальні вектори цих прямих,

то $$\cos\varphi = \cos\left(\overline{n_1},^\wedge \overline{n_2}\right) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-5)^2}} =$$

$$= \frac{20}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{34}} \approx 0{,}673.$$

Тоді $\varphi \approx \arccos 0{,}673 \approx 47^0$.

е) 1. Запишемо рівняння в'язки прямих, що проходять через точку $B(2;11)$: $y - 11 = k(x - 2)$. Оскільки шукана пряма паралельна до прямої AC ($k_{AC} = \frac{3}{5}$ знайдено вище), то їх кутові коефіцієнти пов'язані співвідношенням $k = k_{AC} = \frac{3}{5}$. Тоді рівняння прямої, що проходить через точку B і паралельна до прямої AC запишеться так:

$y - 11 = \frac{3}{5}(x - 2)$ або $3x - 5y + 49 = 0$.

2. Аналогічно до випадку 1 маємо $y - 11 = k(x - 2)$ – рівняння в'язки прямих, що проходять через точку B. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої знайдемо з умови її перпендикулярності до прямої AC, тобто, $k \cdot k_{AC} = -1,\ k = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{5}{3}$. Тоді $y - 11 = \frac{5}{3}(x - 2)$ або $5x + 3y - 43 = 0$ – рівняння прямої, що проходить через задану точку B перпендикулярно до прямої AC.

є) *І спосіб*. Координати точки M – центра ваги трикутника ABC, знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0+2+10}{3} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+11+7}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Шукана точка $M(4;6\frac{1}{3})$.

ІІ спосіб. Координати центра ваги трикутника співпадають з точкою перетину його медіан. Оскільки медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1 $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|MK|} = 2\right)$, то координати точки M – центра ваги трикутника, знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_K}{1+\lambda} = \frac{0 + 2\cdot 6}{1+2} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_K}{1+\lambda} = \frac{1 + 2\cdot 9}{1+2} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Отже, M$(4;6\frac{1}{3})$.

Приклад 2. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(2;-1)$ і $B(4;5)$ є кінцями одного з діаметрів.

Розв'язання. Знаходимо центр і радіус кола. Центром кола є середина діаметра AB, тому маємо:

$$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3; \quad y_0 = \frac{-1+5}{2} = 2: \quad O_1(3;2).$$

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами рівна 18, а велика піввісь – 12.

Розв'язання. За умовою задачі $2c=18$, $a=12$. Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $b^2=12^2-9^2=144-81=63$.

Отже, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{63}=1$.

Приклад 4. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. За умовою задачі $a=8$, $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$, то $c = \frac{3\cdot 8}{2} = 12$. Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ маємо $b^2=12^2-8^2=144-64=80$.

Отже, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$.

Приклад 5. Знайти координати центра, півосі та ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням $9x^2-18x+25y^2+100y-116=0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять однакові змінні, і доповнимо отримані вирази до повних квадратів. Маємо:

$$(9x^2-18x)+(25y^2+100y)-116=0,$$
$$9(x^2-2x)+25(y^2+4y)-116=0,$$
$$9\left[(x^2-2x+1)-1\right]+25\left[(y^2+4y+4)-4\right]-116=0,$$
$$9(x-1)^2+25(y+2)^2-225=0.$$

Звідси $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1.$

Центр еліпса знаходиться в точці С(1;-2), півосі a=5, b=3. Оскільки $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$, то ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}=0{,}8.$

Приклад 6. Знайти координати вершини і значення параметра p параболи, заданої рівнянням $2y^2-12y-x+14=0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки із змінною y і виділимо повний квадрат. Маємо $2(y^2-6y)-x+14=0;\ 2\left[(y-3)^2-9\right]-x+14=0$ або $2(y-3)^2=x+4,\ (y-3)^2=\dfrac{1}{2}(x+4).$

Координати вершин параболи знаходяться в точці A(-4;3). Параметр p знаходимо з умови $2p=\dfrac{1}{2},\ p=\dfrac{1}{4}.$ Вісь симетрії параболи паралельна до осі OX.

Приклад 7. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями $y=-x^2+2x+7$ і $y=-x+3$.

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+7, \\ y=-x+3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3, \\ x^2-3x-4=0; \end{cases} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=4.$$

Отже, A(-1;4) і B(4;-1) – точки перетину ліній.

Побудуємо лінії та заштрихуємо фігуру *Ф*, яка обмежена зверху параболою, а знизу – прямою (рис.2).

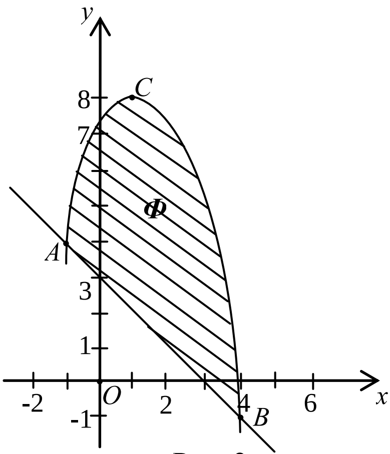


Рис. 2

Для знаходження вершини параболи зведемо її рівняння до канонічного виду:

$$y = -(x^2 + 2x) + 7,$$

$$y = -\left[(x-1)^2 - 1\right] + 7,$$

$$y = -(x-1)^2 + 8,$$

$$(x-1)^2 = -(y-8).$$

Отже, вершина параболи знаходиться в точці C(1;8), вітки направлені вниз, вісь симетрії $x=1$.

Приклад 8. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ паралельно площині $2x - 3y + z - 1 = 0$.

Розв'язання. Оскільки площини паралельні, то нормальний вектор $\vec{N}(2,-3,1)$ заданої площини буде також і нормальним вектором шуканої площини. Використаємо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}(2,-3,1)$:

$$2(x-3) - 3(y-0) + 1(z+2) = 0 \text{ або } 2x - 3y + z - 4 = 0.$$

Приклад 9. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,3,-1)$, $M_3(4,0,1)$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 3-2 & -1-0 \\ 4-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x + 4y + 5z - 9 = 0.$$

Приклад 10. Знайти кут між площинами $3x + y - 1 = 0$ і $x - 4y + 5z = 0$.

Розв'язання. Нормальні вектори площин: $\overrightarrow{N_1}(3,1,0)$ та $\overrightarrow{N_2}(1,-4,5)$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 0\cdot 5}{\sqrt{3^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{420}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{420}\right) \approx 92{,}8^0.$$

Приклад 11. Задано загальне рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 7 = 0, \\ 5x - y + 4z - 2 = 0. \end{cases}$$

Звести його до канонічного та параметричного виду.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої. Оскільки він перпендикулярний до нормальних векторів $\overrightarrow{N_1}(1,2,-3)$ та $\overrightarrow{N_2}(5,-1,4)$ заданих площин, то за $\vec{S}$ можна прийняти векторний добуток цих векторів:

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 19\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Знайдемо точку $\overrightarrow{M}_0(x_0, y_0, z_0)$ деякої точки прямої. Нехай $z_0 = 0$. Тоді:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 7 = 0, \\ 5x_0 - y_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 3. \end{cases}$$

Шукане канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;3;0)$ і паралельнадо вектора $\vec{S} = 5\vec{i} - 19\vec{j} - 11\vec{k}$ запишеться:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{-19} = \frac{z}{-11}.$$

Відповідно параметричні рівняння прямої запишуться:

$$\frac{x-1}{5} = t,\ \frac{y-3}{-19} = t,\ \frac{z}{-11} = t;$$

$$\begin{cases} x = 5t + 1, \\ y = -19t + 3, \quad t \in R. \\ z = -11t, \end{cases}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вершини трикутника *A*(4;3), *B*(-3;-3), *C*(2;7).Знайти:

а) рівняння прямих *AB* і *AC*, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

б) рівняння прямої *AC* у відрізках;

в) рівняння прямої *AK*, що містить медіану трикутника *ABC;*

г) рівняння висоти *CE* та її довжину;

д) внутрішній кут φ при вершині *A*;

е) рівняння прямої, що проходить через точку *B*:

1. перпендикулярно до прямої *AC*;
2. паралельно до прямої *AC*;

є) координати центра ваги трикутника.

Зробити рисунок.

2. Знайти рівняння кола, якщо кінці одного з його діаметрів знаходяться в точках *A*(3;9) і *B*(7;3).

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь a=12, а ексцентриситет ε =0,5.

4. Знайти півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $9x^2 + 4y^2 = 36$. Зробити рисунок.

5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь a=8, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

6. Звести до канонічного виду рівняння гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$. Знайти координати її фокусів, ексцентриситет і рівняння асимптот. Зробити рисунок.

7. Визначити точки перетину прямої $x+y-3=0$ і параболи $x^2 = 4y$.

8. Встановити, яку криву задає рівняння (зробити рисунок):

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

б) $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$;

в) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$;

г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

9. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $\overrightarrow{M}_0(1,2,-3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{N} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

10. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1,2,-1)$, $M_2(-1,0,4)$, $M_3(-2,-1,1)$. Записати його у відрізках.

11. Знайти гострий кут між площинами $2x - y + z - 11 = 0$ та $4x - y + 17z + 1 = 0$.

12. Знайти гострий кут між прямими

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

13. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$ з площиною $x + y - 2z - 4 = 0$.

Тема 6. Границя функції. Обчислення границь

Нехай задані дві множини дійсних чисел X і Y. Функцією називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, при умові, що кожному елементу $y \in Y$ відповідає хоча б один елемент $x \in X$.

Множина X називається областю визначення, а множина Y називається множиною значень функції.

Якщо функція $y = f(x)$ задана аналітично (у вигляді формули), то областю визначення є множина значень аргументна при яких вона існує, тобто приймає певне дійсне значення.

При знаходженні області визначення функції потрібно пам'ятати, що: корінь парного степеня існує лише для невід'ємних чисел; знаменник дробу має бути відмінним від нуля; логарифм існує тільки для додатних чисел; вирази, що стоять під знаком функцій $\arcsin U$ та $\arccos U$, за модулем не перевищують одиниці.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену у деякому околі точки $x = a$, крім можливо самої точки. З цього околу виберемо довільну послідовність значень аргументу x:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \quad x_n \neq a,$$

яка збігається до a.

Нехай вибраній послідовності відповідає послідовність значень функції $y = f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

яка збігається до числа A, тоді число A називають границею функції $y = f(x)$ в точці a і записують $\lim\limits_{n \to a} f(x) = A$.

Якщо $A = 0$, то функція $y = f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$, якщо A – один із символів $\infty, +\infty, -\infty$, то функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$.

Зазначимо, що в усіх розглянутих означеннях a може бути $\infty, +\infty$ або $-\infty$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції пов'язані між собою, а саме:

Якщо $f(x)$ – нескінченно мала функція в точці a і в деякому околі цієї точки $f(x) \neq 0$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно велика в точці a. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці a, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

У випадку коли при $x \to a$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають скінченні границі, то:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \text{ при умові що } \lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0.$$

Якщо функція $f(x)$ елементарна і визначена в точці a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ при $x \to a$ одночасно або нескінченно малі або нескінченно великі, то при знаходженні $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Розглянемо приклади на розкриття цих невизначеностей.

При знаходженні границь часто доводиться використовувати дві важливі границі. Зокрема, при розкритті невизначеностей $\dfrac{0}{0}$, що містять тригонометричні функції використовують границю

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

яка називається першою важливою границею.

Для розкриття невизначеності виду 1^{∞} використовується друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ або } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

та як наслідок

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ і } \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k,$$

де e – число Ейлера, k – будь-яке дійсне число.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в околі цієї точки і в самій точці, і якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Елементарна функція неперервна в точках, у яких вона визначена.

Якщо функція є неперервною в точці x_0, то ця точка називається точкою розриву.

Якщо x_0 – точка розриву, але існують границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то вона називається точкою розриву першого роду. Зокрема, якщо ці границі рівні то точка x_0 називається точкою усувного розриву. Якщо ж хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ нескінченна або не існує, то x_0 називається точкою розриву другого роду.

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$; б) $f(x) = \arcsin\dfrac{x-3}{2} - \lg(4-x)$.

Розв'язання.

а) При знаходженні області визначення даної функції потрібно згадати, що корінь парного степеня може існувати лише для невід'ємних чисел, а знаменник дробу повинен бути відмінним від нуля. Ці умови повинні виконуватись одночасно. А тому шукана область визначення являє собою розв'язок системи:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0, \\ x - 1 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2, \\ x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Зобразимо її на рисунку.

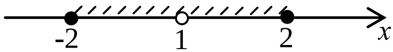


Рис.3

Відповідь: $D(y) = \{x : x \in [-2;1) \cup (1;2]\}$.

б) З того, що логарифм існує для строго додатних чисел, а вираз, який міститься під знаком функції arcsin, за модулем не перевищує одиниці, маємо систему:

$$\begin{cases} 4 - x > 0, \\ \left| \dfrac{x-3}{2} \right| \leq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4, \\ -2 \leq x - 3 \leq 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4, \\ 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Зобразимо область визначення даної функції на рисунку.

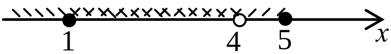


Рис.4

Відповідь: $D(y) = \{x : x \in [1;4)\}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x^3 + x^2 - 3}; \quad б)\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x - 3}{5x^3 - 3x^2 + 2}; \quad в)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 + 3x - 4}{5x^4 - 2x^2 + 5}$$

.

Розв'язання. У всіх трьох випадках маємо невизначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельники і знаменники дробів на найбільший степінь полінома в кожному знаменнику, тобто в першому і другому випадку на x^3, а в третьому – на x^4. Отримаємо:

$$а\,)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{4x^3+x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{4}=0$$

;

$$б\,)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-3}{5x^3-3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\frac{4}{5};$$

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x-4}{5x^4-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{4}{x^5}}{\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{5}{x^5}}=\frac{2}{0}=\infty\,.$$

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо поліноми, які є в чисельнику і знаменнику, на множники. Відомо, що $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$ де x_1, x_2 – корені рівняння ax^2+bx+c, а також $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Отримуємо: для чисельника $x_1=2,\ 2x_2=6,\ x_2=3$, тому $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$; для знаменника $x_1=2,\ 2x_2=-\dfrac{16}{3}$, $x_2=-\dfrac{8}{3}$, тому $3x^2+2x-16=3(x-2)(x+\dfrac{8}{3})=(x-2)(3x+8)$.
Отже,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(3x+8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{3x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{2-3}{6+8}=$$

$=-\dfrac{1}{14}$. Зауважимо, що скорочення на $x-2$ можливе, оскільки $x\to 2$, але $x\neq 2$.

Границі такого типу можна знаходити іншим способом. Досить поділити поліноми чисельника і знаменника на $x-a$, не розкладаючи їх на множники. Цей метод особливо зручний для поліномів вищих степенів.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Поділимо чисельник і знаменник на $x-3$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-9 & \underline{x-3} \\ \underline{2x^2-6x} & 2x+3; \\ \quad 3x-9 & \\ \quad \underline{3x-9} & \\ \qquad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 3x^2-5x-12 & \underline{x-3} \\ \underline{3x^2-9x} & 3x+4. \\ \quad 4x-12 & \\ \quad \underline{4x-12} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Отримаємо: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{3x+4}=\dfrac{9}{13}$.

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Розв'язання. В цьому випадку маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Помножимо і поділимо дріб, який є під знаком границі, на вираз $\sqrt{2x+1}+3$, спряжений чисельнику. У результаті отримаємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=$$

$$=\mathit{lim}_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}=\mathit{lim}_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 6. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$.

Розв'язання.

а) Для знаходження даної границі використаємо наслідок з першої визначної границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k.$ У нашому випадку

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^2}=\left|1-\cos 8x=2\sin^2 4x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^2=$$

$$=2\cdot 4^2=32.$$

б) При $x\to\infty$ маємо неозначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$. Щоб її розкрити скористаємося наслідком з другої визначної границі

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$$

Для цього поділимо чисельник і знаменник основи степеня на $2x$. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x-1}{2x}}{\frac{2x+3}{2x}}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x+2}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x+1}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x\right]^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2x}\right)^x\right]^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3}\cdot 1}{e^{\frac{3}{2}\cdot 3}\cdot 1}=\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{9}{2}}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}.$$

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{x+4}{x^2+2}$.

Розв'язання. Задана функція елементарна і визначена на всій числовій осі. Тому функція неперервна на всій числовій осі.

Приклад 8. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x\epsilon(-\infty;2)\cup(2\,;+\infty)$. В усіх точках області визначення функція неперервна. В точці $x=2$ функція невизначена, тому точка $x=2$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі: $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2+5}{x-2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2+5}{x-2}=+\infty.$

Отже, $x=2$ – точка розриву другого роду.

Приклад 9. Дослідити на неперервність функцію $y=arctg\dfrac{1}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x\epsilon(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. Функція є неперервною для $x\neq 3$ як елементарна функція. Точка $x=3$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$ і $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, то маємо

$$\lim_{x\to 3-0} arctg\frac{1}{x-3}=-\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to 3+0} arctg\frac{1}{x-3}=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$, тому точка $x=3$ є точкою розриву першого роду.

Приклад 10. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{якщо } x\le 2,\\ 5-x, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначена для всіх $x\in R$. Розрив можливий лише в точці x=2, при переході через яку функція змінює свій аналітичний вираз.

Знаходимо односторонні границі:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1,$$
$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}(5-x)=3.$$

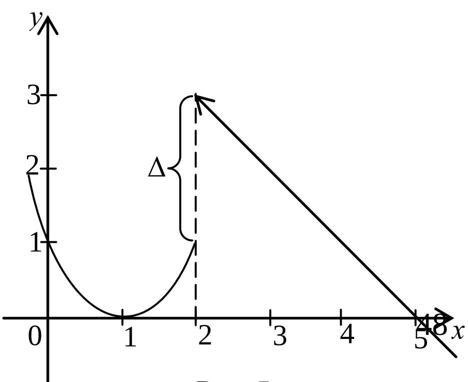


Рис. 5

В точці x=2 функція має скінченний розрив (розрив першого роду).
"Стрибок" функції: $\Delta = f(2+0) - f(2-0) = 3-1 = 2.$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$; в) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + \arccos\dfrac{x-2}{x}$;

д) $f(x) = 2^{x^2+3} + \mathrm{arctg}(7x+1)$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - 6x + 1}{5x^2 + x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^2 - 5x + 3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2 - 6x + 7}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$; д) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2 + 9x + 9}{3 - 5x - 2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 5x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x+5}\right)^{x+1}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ якщо } x < 1, \\ x^2 + 2, \text{ якщо} \geq 1. \end{cases}$$

Тема 7. Диференціальне числення функції однієї змінної

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Похідна позначається символами $f'(x)$, y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$. Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ нескінченна або не існує, то будемо говорити, що похідна в точці x не існує. Функція називається диференційованою в точці, якщо вона в ній має похідну.

Щоб знайти похідну функції $y = f(x)$ за означенням, потрібно знайти в такій послідовності: 1) $f(x + \Delta x)$; 2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$; 3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фізичний зміст похідної: якщо деякий процес описується функцією $f(x)$, то похідна $f'(x)$ є швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст: похідна функції $f(x)$ в точці x_0 – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = tg\alpha = k$. Тому дотична і нормаль до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$ задаються відповідно рівняннями:

$$y - f(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{і} \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Правила диференціювання

Нехай *u(x)* та *v(x)* – деякі диференційовні функції, *c*- стала, тоді:

1. $c' = 0$;

5. $(uv)' = u'v + uv'$;

2. $(x)' = 1$;

3. $(cu)' = cu'$;

4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$;

7. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$;

8. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}, \ v \neq 0$;

Розглянемо складну функцію $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Якщо функція $u = u(x)$ диференційована в точці x, а функція $y = f(u)$ диференційована у відповідній точці $u = u(x)$, то складна функція $y = f(u(x))$ диференційована в точці x, при чому $y' = f'(u)u'(x)$.

Таблиця похідних	
елементарних функцій	складної диференційовної функції *u=u(x)*
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$;	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$;
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$;	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;
5. $(e^x)' = e^x$;	$(e^u)' = e^u \cdot u'$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$;
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

10. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x;}$	$(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
11. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$	$(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
14. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
15. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$	$(\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Функція $y = u^v$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$, називається степенево-показниковою функцією.

Логарифмуючи обидві частини і диференціюючи отримаємо неявне рівняння $\ln y = v \ln u$, звідки знаходимо

$$y' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} \cdot u' \ .$$

Вираз $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ називається логарифмічною похідною функції $y = f(x)$.

Розглянутий метод знаходження похідної степенево-показникової функції називається логарифмічним диференціюванням .

Функція $y = f(x)$ називається неспадною (незростаючою) $\forall x \in X$, якщо $\forall (x_1, x_2) \in X \big| x_1 < x_2$ має місце нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Неспадні і незростаючі функції називаються монотонними функціями**.**

Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) $\forall x \in X$, якщо $\forall (x_1, x_2) \in X \mid x_1 < x_2$ має місце нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Зростаючі і спадні функції називаються строго монотонними функціями.

Теорема. Для того щоб диференційовна функція $y = f(x)$ була неспадною (незростаючою) $\forall x \in (a,b)$ необхідно і достатньо щоб $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in (a,b)$.

Точка $x = x_0$ називається точкою максимума функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ і точкою мінімума, якщо $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$.

Точки максимума і мінімума функції називаються її *точками екстремума.*

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ екстремум, то її похідна $f'(x_0) = 0$.

Відмітимо, що функція може мати екстремум і в точках, де її похідна не існує або має нескінченний розрив.

Теорема (перша достатня умова існування екстремума). Якщо неперервна і диференційовна в околі критичної точки $x = x_0$ функція $y = f(x)$ така, що її похідна $f'(x)$ при переході через цю точку міняє знак, то $x = x_0$ є точкою екстремума; зокрема, якщо похідна міняє знак з (+) на (-), то в цій точці функція має максимум і мінімум, якщо похідна міняє знак з (-) на (+).

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = tg 4x$, виходячи з її означення.

Розв'язання. Надаємо x деякого приросту Δx і знаходимо:

1) $f(x + \Delta x) = tg(4x + 4\Delta x)$;

2) $\Delta y == tg(4x + 4\Delta x) - tg 4x = \dfrac{\sin 4\Delta x}{\cos(4x + 4\Delta x) \cdot \cos 4x}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x\cdot\cos(4x+4\Delta x)\cdot\cos 4x}$;

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x}\cdot\dfrac{1}{\cos(4+4\Delta x)\cdot\cos 4x}=\dfrac{4}{\cos^2 4x}$.

Приклад 2. Знайти похідну функції:

а) $y=3x^3-4x^2+5x-3$; *б)* $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^4}$;

в) $y=3^{sin^3 4x}$; *г)* $y=sin^4 3x$; *д)* $y=x^3 cos\, x$;

е) $y=\dfrac{cos\, x}{1-sin\, x}$; *є)* $y=x^{cos\, x}$.

Розв'язання.

а) $y'=\left(3x^3-4x^2+5x-3\right)'=9x^2-8x+5$;

б) Ввівши від'ємні показники, перетворимо дану функцію: $y=2x^{-1}+3x^{-2}-5x^{-4}$, тоді

$y'=-2x^{-2}-6x^{-3}+20x^{-5}=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{20}{x^5}$;

в) Використавши формулу для обчислення похідної складної функції маємо: $y'=3^{\sin^3 4x}\ln 3\cdot 3\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot 4=$

$=12\cdot 3^{\sin^3 4x}\ln 3\cdot\sin^2 4x\cdot\cos 4x$;

г) $y'=4\sin^3 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=12\sin^3 3x\cdot\cos 3x$;

д) Для знаходження похідної функції $y=x^3\cos x$, використаємо формулу похідної добутку:

$y'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=3x^2\cos x-x^3\sin x$;

е) Користуючись правилом диференціювання частки, маємо:

$$y'=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x};$$

є) Використаємо метод логарифмічного диференціювання. Для цього про логарифмуємо обидві частини рівності $y=x^{\cos x}$:

$\ln y = \cos x \cdot \ln x$. Знайдемо похідну обох частин цієї рівності:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\cos x \cdot \ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}.$$

Отже, $y' = x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x\right)$.

Приклад 3. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $\begin{cases} x = t^4 e^{at}, \\ y = t^3 e^{at}, \text{ де } a > 0; \end{cases}$ *б)* $y = \mathrm{tg}x,\ y''_x - ?$

Розв'язання.

а) Похідну y'_x параметрично заданої функції визначимо за формулою: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знаходимо $y'_t = 3t^2e^{at} + at^3e^{at} = t^2e^{at}(3+at)$; $\left(e^{2t}\right)' = 2e^{2t}$

$x'_t = 4t^3e^{at} + at^4e^{at} = t^3e^{at}(4+at)$.

Тоді $y'_x = \dfrac{t^2e^{at}(3+at)}{t^3e^{at}(4+at)} = \dfrac{3+at}{t(4+at)}$. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$;

е) Знаходимо послідовно першу і другу похідні даної функції:

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Приклад 4. Обчислити наближено $\mathrm{arctg}\,0{,}98$.

Розв'язання. Для знаходження наближеного значення функції, використаємо формулу $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$. В нашому випадку $\mathrm{arctg}\,0{,}98$ – значення функції $f(x) = \mathrm{arctg}x$ при $x = x_0 + \Delta x = 0{,}98$. Покладемо $x_0 = 1$ (значення, близьке до 0,98, при якому $\mathrm{arctg}x$

легко обчислюється без таблиці: $\operatorname{arctg} x_0 = \operatorname{arctg} 1 = = \dfrac{\pi}{4}$). Тоді $\Delta x = 0{,}98 - 1 = -0{,}02.$

Оскільки $f^{/}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $f^{/}(x_0) = f^{/}(1) = \dfrac{1}{2}$.

Отже,

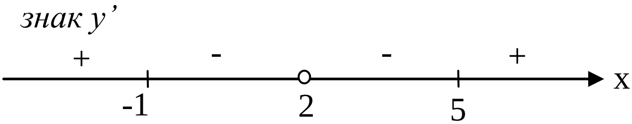
$$\operatorname{arctg} 0{,}98 = \operatorname{arctg}(1 + (-0{,}02)) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$$

Приклад 5. Знайти інтервали зростання й спадання та екстремуми функції $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$.

Розв'язання. Функція визначена для $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Знаходимо похідну функції:

$$y' = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

За умовою $y' = 0$, $(x+1)(x-5) = 0$ маємо критичні точки $x = -1$ та $x = 5$. Похідна y' не існує в точці $x = 2$, але вона не належить області визначення функції, тому не є критичною. Область визначення функції розбивається критичними точками на інтервали: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$. Визначимо на числовій прямій знаки похідної y' на кожному з цих інтервалів:



Враховуючи одержані знаки похідної y' на інтервалах, маємо: функція зростає для $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ і спадає для $x \in (-1; 2) \cup (2; 5)$. Точка $x = -1$ є точкою максимуму, а точка $x = 5$ є точкою мінімуму функції. Обчисливши значення функції в точках $x = -1$ і $x = 5$, одержимо екстремуми функції: $y_{\max} = y(-1) = 0$ і $y_{\min} = y(5) = 12$.

Приклад 6. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^4 + 3$ в точці $M_0(1;4)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ відповідно мають вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{і} \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Знайдемо похідну заданої функції і її значення в точці M :
$f'(x) = 4x^3, \quad f'(1) = 4.$ Тоді $y - 4 = 4(x - 1)$ або $4x - y = 0$ - рівняння дотичної, а

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 1),$$

$x + 4y - 17 = 0$ – рівняння нормалі.

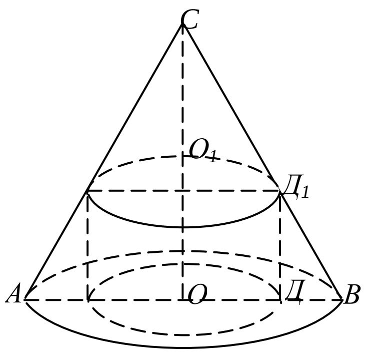


Рис. 6

Приклад 7. Знайти найбільший об'єм циліндра, вписаного в заданий конус.

Розв'язання.

1) *Визначаємо, які величини фіксовані (відомі з умови задачі), а які змінні.*

Оскільки задано конус, то $AO=R$ і $OC=H$ – фіксовані величини.

В конус можна вписати багато циліндрів, змінюючи його висоту OO_1 і радіус $O_1Д_1$. Тому $OO_1=x$ і $O_1Д_1=y$ – змінні величини (невідомі).

2) *Вибираємо незалежну змінну.*

Нехай висота циліндра $OO_1=x$ – незалежна змінна – аргумент, причому x є $[0;H]$.

3) *За умовою задачі визначаємо функцію двох змінних $z = f(x;y)$.*

У нашому випадку об'єм циліндра $V=V(x;y)=\pi xy^2$ – шукана функція.

4) *Виражаємо одну змінну через іншу.*

Для нашого випадку виразимо змінну y через змінну x.

З подібності трикутників BOC і $Д_1O_1C$ випливає, що $\frac{R}{y}=\frac{H}{H-x}$, $y=\frac{R(H-x)}{H}$.

Тоді $V=\pi x\left(\frac{R(H-x)}{H}\right)^2=\frac{\pi R^2}{H^2}x(H-x)^2$ - досліджувана функція.

5) *Знаходимо критичні точки знайденої функції.*

$$V^/(x)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left((H-x)^2-2x(H-x)\right)=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-x)(H-3x).$$

$$V^/(x)=0 \Rightarrow x_1=H \ i \ x_2=\frac{H}{3}.$$

Оскільки при $x<\frac{H}{3}$ $V^/(x)>0$, а при $x>\frac{H}{3}$ $V^/(x)<0$ то в точці $x=\frac{H}{3}$ - функція має максимум.

Отже, максимальний об'єм циліндра

$$V=V\left(\frac{H}{3}\right)=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H}{3}\left(H-\frac{H}{3}\right)^2=\frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

Приклад 8. Подати число 66 у вигляді суми двох доданків так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.

Розв'язання. Нехай одне із задуманих чисел x, а друге – y. За умовою задачі $x+y=66$, звідки $y=66-x$. Добуток чисел $P=xy=x(66-x)=66x-x^2$ – досліджувана функція. Знаходимо $P^/(x)=66-2x.$ $P^/(x)=0$ при $x=33$. Ця точка буде критичною. Оскільки $P^{//}(x)=-2<0$, то в точці $x=33$ досліджувана функція має максимум. При цьому $y=66-33=33$.

Отже, добуток чисел буде найбільшим, якщо $x=y=33$.

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні $y_x^{/}$ заданих функцій:

а) $y = 4^{\cos^2 x} + x^7 \mathrm{arctg} 2x$; б) $y = \ln \sqrt[8]{\left(\dfrac{8x-1}{x^8+3}\right)^5}$;

в) $y = (\cos x)^{\mathrm{arctg}\, x}$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \dfrac{t}{t+1}; \end{cases}$ д) $y = x^2 \sin 2x,\ y^{///} - ?$

2. Обчислити наближено

а) $\ln 0{,}9$; б) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

3. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точці $M_0(2;2)$.

4. Визначити найменшу площу рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола радіуса r.

Тема 8. Диференціальне числення функції декількох змінних

Нехай задано множину D пар чисел $(x;\, y)$, якщо кожній парі чисел $(x;\, y) \in D$ за певним правилом відповідає єдине число z, то на множині D визначена функція z від двох змінних x і y і записується $z = f(x, y)$. Множина D в цьому випадку називається областю визначення функції. Аналогічно визначається функція трьох змінних. Оскільки кожній парі чисел $(x;\, y)$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ площини Oxy, то замість $z = f(x, y)$ можна писати $z = f(M)$.

Функція двох змінних може бути задана в просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z = f(x, y)$. Також функцію $z = f(x, y)$ можна задати лініями рівня, рівняння яких $f(x, y) = C$, де C – константа. Якщо константи $C_1, C_2, \ldots C_m, \ldots$ утворюють арифметичну прогресію, то отримаємо набір ліній рівня. Там, де лінії розміщення густіше, функція змінюється швидше.

Областю визначення аналітично заданої функції $z = f(x, y)$ є множина пар чисел $(x;\, y)$, яким відповідають дійсні значення цієї функції. Геометрично, область визначення функції $z = f(x, y)$ є нескінченною або скінченною частиною координатної площини Oxy, обмеженої однією або декількома кривими.

Частинні і повний прирости функції $z = f(x, y)$ визначаються відповідно за формулами:

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x, y),\ y = const,$$
$$\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y),\ x = const,$$
$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y).$$

Для функції $z = f(x, y)$ частинні похідні першого порядку визначаються:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x},\quad y=const;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y},\ x=const.$$

Частинні похідні першого порядку можна також позначати z'_x і z'_y.

У загальному випадку частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=f(x,y)$ є також функціями змінних x і y. Диференціюючи їх знову по цих змінних, отримаємо чотири частинні похідних другого порядку :

У загальному випадку частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=f(x,y)$ є також функціями змінних x і y. Диференціюючи їх знову по цих змінних, отримаємо чотири частинні похідних другого порядку :

$$z''_{xx}=\left(z'_x\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Частинні похідні одного порядку z''_{xy}, z''_{yx}, що відрізняються порядком диференціювання *називають мішаними.*

Градієнтом функції $z=f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ називається вектор, що визначається за формулою

$$grad\,z=z'_x(x,y)\vec{i}+z'_y(x,y)\vec{j}.$$

З фізичної точки зору $grad\,z$ в точці $M(x,y)$ вказує напрямок найбільшої зміни функції.

Похідна функції $z=f(x,y)$ по напрямку вектора $\vec{s}=\left(\cos\alpha,\cos\beta\right)$ в точці $M(x,y)$ визначається

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

де α, β - кути, які утворює вектор $\vec{s}$ з осями OX та OY відповідно.

Похідна $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ в точці $M(x,y)$ визначає швидкість зміни функції $z = f(x,y)$ в напрямку вектора $\vec{s}$.

Для визначення похідної складної функції розглянемо випадки:

1) Нехай

$$\begin{cases} z = F(u,v), \\ u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases}$$

У даному випадку функція z є складною функцію по відношенню до змінних x та y. Частинні похідні по змінних x та y відповідно визначаються:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x, \\ z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y. \end{cases}$$

2) Нехай

$$\begin{cases} z = F(u,v), \\ u = u(x), \\ v = v(x). \end{cases}$$

Функція z є складною функцію по відношенню до змінної x. Похідна від функції z по змінній x визначається за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx},$$

або

$$z'(x) = z'_u \cdot u'(x) + z'_v \cdot v'(x).$$

3) Нехай

$$\begin{cases} z = F(u,v,w), \\ v = v(u), \\ w = w(u). \end{cases}$$

Функція z є складеною функцію по відношенню до змінної u. Похідна від функції z по змінній u визначається за формулою

$$\frac{dz}{du}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{du}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{du},$$

або

$$z'(u)=z'_u+z'_v\cdot v'(u)+z'_w\cdot w'(u).$$

Нехай $F(x,y,z)=0$ - рівняння деякої поверхні і $F(x,y,z)$, $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$- визначені і неперервні в точці $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ і в деякому околі цієї точки.

Дотична площина до поверхні $F(x,y,z)=0$ в точці $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ визначається за формулою

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(x-x_0)+F'_z(M_0)(x-x_0)=0.$$

Пряма, проведена через точку $M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$, перпендикулярно до дотичної площини, називається нормаллю до поверхні $F(x,y,z)=0$ і визначається за формулою

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ максимум (мінімум), якщо існує окіл точки M_0 для всіх точок якого, крім самої точки M_0, виконується нерівність $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ $\left(f(x_0,y_0)<f(x,y)\right)$.

Теорема (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $f(x,y)$ в точці (x_0,y_0) має екстремум і існують частинні похідні $f'_x(x_0,y_0)$ і $f'_y(x_0,y_0)$, то вони дорівнюють нулю, тобто $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Точки, в яких частинні похідні функції дорівнюють нулю називаються стаціонарними. Але не кожна стаціонарна точка може бути точкою екстремуму. Тому для встановлення існування екстремуму в стаціонарній точці (x_0,y_0) потрібно використати достатні умови існування екстремуму. Для цього знаходимо:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Складаємо дискримінант $\Delta = AC - B^2$. Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$ $(C < 0)$, то в точці (x_0, y_0) маємо максимум;

2) якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$ $(C > 0)$, то в точці (x_0, y_0) маємо мінімум;

3) якщо $\Delta = 0$, то для розв'язання питання про існування екстремуму потрібно провести додаткові дослідження, наприклад за знаком приросту $\Delta f(x_0, y_0)$ поблизу точки (x_0, y_0).

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \ln(x + y)$.

Розв'язання. Дана функція визначена для всіх пар (x, y), котрі задовольняють нерівність $x + y > 0$ або $y > -x$. Пряма $y = -x$ ділить площину *Oxy* на дві частини: множина точок однієї з них задовольняє нерівність $y > -x$, а друга – ні. Тому для того, щоб знайти область визначення функції, треба взяти в площині *Oxy* довільну точку й перевірити виконання для її координат нерівності $y > -x$. Візьмемо, наприклад, точку $A(1;0)$. Для її координат ця нерівність виконується ($0 > -1$), тому областю визначення даної функції є півплощина, яка містить цю точку, тобто, півплощина над прямою $y = -x$ (рис. 4).

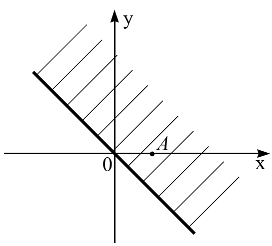


Рис. 7.

Приклад 2. Знайти частинні і повний прирости функції $z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(2,1)$ при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Розв'язання.

$$\Delta_x z(\mathrm{M}_0) = z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0) = \left((2+0{,}1)^2 + 1^2\right) -$$
$$-\left(2^2 + 1^2\right) == (2{,}1^2 + 1) - (4+1) = 4{,}41 + 1 - 4 - 1 = 0{,}41.$$
$$\Delta_y z(\mathrm{M}_0) = z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) == \left(2^2 + (1+0{,}2)^2\right) -$$
$$-\left(2^2 + 1^2\right) = (4 + 1{,}44) - (4+1) = 4 + 1{,}44 - 4 - 1 = 0{,}44.$$
$$\Delta z(\mathrm{M}_0) = z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0) =$$
$$= \left((2+0{,}1)^2 + (1+0{,}2)^2\right) - \left(2^2 + 1^2\right) =$$
$$= (2{,}1^2 + 1{,}2^2) - (4+1) = 4{,}41 + 1{,}44 - 5 = 0{,}85.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні першого порядку функції $z = 3x^2 y + 5x\sqrt{y} + 2$.

Розв'язання.

$$z'_x = (3x^2 y + 5x\sqrt{y} + 2)'_x = |y = const| = 3y \cdot 2x + 5\sqrt{y} \cdot 1 + 0 = 6xy + 5\sqrt{y}.$$
$$z'_y = (3x^2 y + 5x\sqrt{y} + 2)'_y = |x = const| = 3x^2 \cdot 1 + 5x\frac{1}{2\sqrt{y}} + 0 = 3x^2 + \frac{5}{2\sqrt{y}}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні другого порядку функції
$$z = \frac{7x^2 + 3x + 2}{y^2 + 7}.$$

Розв'язання.

$$z'_x = |y = const| = \frac{1}{y^2+7}(7 \cdot 2x + 3 \cdot 1 + 0) = \frac{14x+3}{y^2+7};$$
$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(\frac{14x+3}{y^2+7}\right)'_x = |y = const| = \frac{1}{y^2+7}(14 \cdot 1 + 0) = \frac{14}{y^2+7};$$

$$z'_y = |x = const| = \left(7x^2 + 3x + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{y^2 + 7}\right)'_y =$$

$$= \left(7x^2 + 3x + 2\right)\left(-\frac{1}{\left(y^2 + 7\right)^2} \cdot \left(2y + 0\right)\right) = -\frac{2y \cdot \left(7x^2 + 3x + 2\right)}{\left(y^2 + 7\right)^2};$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(-\frac{2y \cdot \left(7x^2 + 3x + 2\right)}{\left(y^2 + 7\right)^2}\right)'_y = -2\left(7x^2 + 3x + 2\right)\left(\frac{y}{\left(y^2 + 7\right)^2}\right)'_y =$$

$$= -2\left(7x^2 + 3x + 2\right)\frac{\left(y^2 + 7\right)^2 - y\left(\left(y^2 + 7\right)^2\right)'_y}{\left(y^2 + 7\right)^4} =$$

$$= -2\left(7x^2 + 3x + 2\right)\frac{\left(y^2 + 7\right)^2 - y \cdot 2\left(y^2 + 7\right) \cdot 2y}{\left(y^2 + 7\right)^4} =$$

$$= \frac{-2\left(7x^2 + 3x + 2\right)\left(y^2 + 7\right)\left(y^2 + 7 - 4y^2\right)}{\left(y^2 + 7\right)^3} = \frac{-2\left(7x^2 + 3x + 2\right)\left(7 - 3y^2\right)}{\left(y^2 + 7\right)^3}.$$

Приклад 5. Для функції $z = 3xy + 5x^3 - 3y^2 + 7$ знайти значення частинних похідних другого порядку в точці $M_0(2,1)$.

Розв'язання.

$$z'_x = |y = const| = 3y \cdot 1 + 15x^2 - 0 = 3y + 15x^2;$$

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = |y = const| = \left(3y + 15x^2\right)'_x = 30x;$$

$$z''_{xx}\left(M_0\right) = 30 \cdot 2 = 60;$$

$$z'_y = |x = const| = 3x \cdot 1 + 0 - 3 \cdot 2y + 0 = 3x - 6y;$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = |x = const| = \left(3x - 6y\right)'_y = 0 - 6 \cdot 1 = -6;$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(3y + 15x^2\right)'_y = 3 \cdot 1 + 0 = 3;$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(3x - 6y\right)'_x = 3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Приклад 6. Знайти градієнт функції $z = 7x^2 + 5xy + y^2$ в точці $M_0(2,-1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції та їх значення в точці в точці :

$$z'_x = |y = const| = 7 \cdot 2x + 5y \cdot 1 + 0 = 14x + 5y;$$

$$z'_x(M_0) = 14 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 23;$$

$$z'_y = |x = const| = 5x \cdot 1 + 0 + 2y + 0 = 5x + 2y;$$

$$z'_y(M_0) = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 8.$$

Отже, $grad\, z = 23\vec{i} + 8\vec{j} = (23{,}8).$

Приклад 7. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля функції $u = yz^2 + xy^2 - x^2z + xyz - x + y - 1$ у точці $M_0(2;-1;2)$.

Розв'язання. Скалярне поле функції $u = u(x, y, z)$ у деякій його точці найбільше зростає в напрямку вектора $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, де $\frac{\partial u}{\partial S}_{|M_0} = |\operatorname{grad} u|$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку та обчислюємо їх значення в точці M_0:

1) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - 2xz + yz - 1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}_{|M_0} = 1 - 8 - 2 - 1 = -10;$

$\frac{\partial u}{\partial y} = z^2 + 2xy + xz + 1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}_{|M_0} = 4 - 4 + 4 + 1 = 5;$

$\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz - x^2 + xy,\quad \frac{\partial u}{\partial z}_{|M_0} = -4 - 4 - 2 = -10.$

Тоді градієнт функції визначається $\operatorname{grad} u = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}$.

$\frac{\partial u}{\partial S}_{|M_0} = \sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-10)^2} = 15$ - найбільшу швидкість зростання скалярного поля заданої функції в точці M_0.

Приклад 8. Задано функцію $\begin{cases} z = \sin(2u + 3v), \\ u = x^y, \\ v = y^x. \end{cases}$

Знайти z'_x та z'_y.

Розв'язання.

$$z'_u = |v = const| = \cos(2u + 3v) \cdot (2 \cdot 1 + 0) = 2\cos(2u + 3v),$$

$$z'_v = |u = const| = \cos(2u + 3v) \cdot (0 + 3 \cdot 1) = 3\cos(2u + 3v),$$

$$u'_x = |y = const| = y \cdot x^{y-1}, \ \ u'_y = |x = const| = x^y \ln x,$$

$$v'_x = |y = const| = y^x \ln y, \ \ v'_y = |x = const| = x \cdot y^{x-1},$$

Тоді

$$z'_x = 2\cos(2u + 3v) y \cdot x^{y-1} + 3\cos(2u + 3v) y^x \ln y =$$

$$= \cos(2u + 3v)\left(2y \cdot x^{y-1} + 3y^x \ln y\right) =$$

$$= \cos(2x^y + 3y^x)\left(2y \cdot x^{y-1} + 3y^x \ln y\right),$$

$$z'_y = 2\cos(2u + 3v) x^y \ln x + 3\cos(2u + 3v) x \cdot y^{x-1} =$$

$$= \cos(2u + 3v)\left(2x^y \ln x + 3x \cdot y^{x-1}\right) =$$

$$= \cos(2x^y + 3y^x)\left(2x^y \ln x + 3x \cdot y^{x-1}\right).$$

Приклад 9. Задано функцію $\begin{cases} z = tg\,\dfrac{u}{v}, \\ u = 7x^2 + 2, \\ v = \sqrt{5x - 3}. \end{cases}$

Знайти $z'(x)$.

Розв'язання.

$$z'_u = |v = const| = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v \cos^2 \frac{u}{v}},$$

$$z'_v = |u = const| = \frac{1}{\cos^2 \frac{u}{v}} \cdot u \cdot (-\frac{1}{v^2}) = -\frac{u}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}},$$

$$u'(x) = 7 \cdot 2x + 0 = 14x,$$

$$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5x-3}} \cdot (5 \cdot 1 - 0) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}.$$

Тоді

$$z'(x) = \frac{1}{v \cos^2 \frac{u}{v}} \cdot 14x + \left(-\frac{u}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}} \right) \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-3}} =$$

$$= \frac{1}{v^2 \cos^2 \frac{u}{v}} \left(14xv - 5u \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x-3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{(5x-3)\cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} \left(14x\sqrt{5x-3} - \frac{5(7x^2+2)}{2\sqrt{5x-3}} \right) =$$

$$= \frac{28x(5x-3) - 5(7x^2+2)}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} = \frac{140x^2 - 84x - 35x^2 - 10}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}} =$$

$$= \frac{105x^2 - 84x - 10}{2\sqrt{(5x-3)^3} \cos^2 \frac{7x^2+2}{\sqrt{5x-3}}}.$$

Приклад 10. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до сферичної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці $M_0(3, 4, 12)$.

Розв'язання. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169.$

Знайдемо частинні похідні $F'_x(M_0)$, $F'_y(M_0)$, $F'_z(M_0)$.

$F'_x = |y, z = const| = 2x;\quad F'_x(M_0) = 2 \cdot 3 = 6;$

$F'_y = |x, z = const| = 2y;\quad F'_y(M_0) = 2 \cdot 4 = 8;$

$F_z' = \left| x,\ y = const \right| = 2z; \quad F_z'(M_0) = 2 \cdot 12 = 24.$

Складемо рівняння дотичної площини:

$6(x-3) + 8(y-4) + 24(z-12) = 0,$

$6x - 18 + 8y - 32 + 24z - 288, \quad 6x + 8y + 24z - 338 = 0,$

або $3x + 4y + 12z - 169 = 0$.

Запишемо рівняння нормалі:

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-12}{24} \text{ або } \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}.$$

Приклад 11. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 3$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1.$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0; \\ x + 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо одну стаціонарну точку $M(1; 0)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку та їх значення в стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

$A = f''_{xx}(1; 0) = 2, \quad B = f''_{xy}(1; 0) = 1, \quad C = f''_{yy}(1; 0) = 2.$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремумів. Оскільки, $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$ і $A = 2 > 0$, то в точці $M(1; 0)$ функція має мінімум. При цьому $z_{\min} = f(1; 0) = 1 - 2 + 3 = 2.$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

$a)\ z=\dfrac{x+1}{y},\ б)\ z=\sqrt{x+y},\ в) z=\arcsin(x^2+y^2-3).$

2. Знайти градієнт функції $z=3x^2+5y^3-3$ в точці $M_0(1,1)$.

3. Дослідити на екстремум функції:

$a)\ z=x^2+xy+y^2-6x+9y$;

$б)\ z=x^3+xy^2+6xy$;

$в)\ z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

Завдання для самостійної роботи

Самостійна робота №1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

№ 1

1. Розв'язати:

   а) рівняння $\begin{vmatrix} 3x & -4 \\ x & -5 \end{vmatrix} = 3;$

   б) систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

2. Дано координати вершин трикутника $A(3;1;-1)$, $B(6;5;-1)$, $C(2;0;1)$. Знайти проекцію вектора $\overline{AC}$ на вектор $\overline{AB}$.
3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(3;-2)$ і $B(-1;1)$.
4. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо вона симетрична відносно осі OX і проходить через точку $A(9;6)$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:

   $y = -x^2+6x+1$, $x-y+1=0$.

№ 2

1. Розв'язати системи рівнянь:

   а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2. Дано вектори: $\overline{a}=(2;-1;3)$, $\overline{b}=(3;6;0)$. Довести, що $\overline{a} \perp \overline{b}$.
3. Обчислити площу трикутника, який утворений осями координат і прямою $3x-4y-12=0$.
4. Знайти центр і радіус кола, заданого рівнянням

   $x^2+y^2-10x+6y+30=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:

$$y=\frac{1}{x};\ y=x;\ x=4.$$

№ 3

1. Розв'язати :

а) нерівність $\begin{vmatrix} 3 & 2x-1 \\ -x & -2 \end{vmatrix} > 0$;

б) систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4, \\ x_1-3x_2+2x_3=5, \\ 2x_1+x_2-3x_3=3. \end{cases}$

2. Дано координат вершин трикутника $A(2;1;3)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;-1;2)$. Знайти: скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, довжину вектора $\overline{AB}$.
3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;1)$ паралельно до прямої $2x+3y+4=0$.
4. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його фокусами дорівнює 8, а мала піввісь рівна 3.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=x^2-4x+4$, $6x-y-12+0$.

№ 4

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=1, \\ 3x_1-\ x_2=-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3=-4, \\ x_1+x_2+2x_3=1. \end{cases}$

2. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Знаючи, що

$$\left|\overline{a}\right|=3,\ \left|\overline{b}\right|=4,\ \text{знайти}\ \overline{a}\cdot(\overline{a}+\overline{b}).$$

3. Знайти кут між прямими $5x-y+7=0$ і $3x+2y=0$.
4. Знайти координати центра і півосі еліпса $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=2x-x^2$, $y=-x$.

№ 5

1. Розв’язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

2. Дано координати вершин трикутника A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1). Знайти внутрішній кут при вершині B.
3. Перевірити, чи належать точки A(3;4) і B(0;3) прямій $2x-y+3=0$.
4. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо a=8, $\varepsilon = \frac{5}{4}$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=3-x^2$, $y=x-3$.

№ 6

1. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 8x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -2. \end{cases}$

2. Знайти проекцію вектора $\bar{a}$ =(3;2;-4) на вектор $\bar{b}$ =(-3;5;-1).
3. Дано вершини трикутника A(2;-5), B(1;-2) і C(4;7). Написати рівняння його медіани, проведеної з вершини B.
4. Парабола з вершиною в початку координат проходить через точку A(2;4) і симетрична відносно осі OX. Написати її рівняння.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=x^3$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$.

№ 7

1. Розв’язати:

а) нерівність $\begin{vmatrix} 3x-3 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

2. Знайти роботу, яку виконує сила $\overline{F}$ =(3;-2;-5), коли її точка прикладання рухається прямолінійно, переміщуючись із положення A(2;-3;5) в положення B(3;-2;-1).
3. Довести, що прямі $2x$-$4y$+3=0 і x-$2y$=0 паралельні.
4. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь a=6, ексцентриситет ε =0,5.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:
   y^2 =2x+4, x =0.

№ 8

1. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_3 = -1, \\ -4x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2. Обчислити значення виразу $(3\overline{a} + 2\overline{b})(\overline{b} - \overline{a}),$ якщо

$|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 3,\ (\overline{a},^\wedge \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}.$

3. Дано рівняння прямої $5x$+$2y$-3=0. Визначити кутовий коефіцієнт прямої, яка паралельна даній.
4. Дано гіперболу 16x^2-9y^2=144. Знайти її півосі, фокуси, ексцентриситет.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:
   y =x^2-8x+16, 2x-y+16=0.

№ 9

1. Розв’язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases}$

2. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках A(2;1;-4), B(1;3;5), C(7;2;3) і $Д$(8;0;-6) – паралелограм.
3. Звести рівняння прямої $2x+3y-6=0$ до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. Встановити, що рівняння $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$ визначає параболу, знайти координати її вершини і значення параметра p.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = e^{-x}$, $y = e^x$, $y = 2$.

№ 10

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6, \\ 4x_1 - 6x_2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

2. Задані точки A(2;1;0), B(3;-1;1), C(-1;3;0). Обчислити $\overline{AB} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})$.
3. Звести рівняння прямої $2x-3y-6=0$ до рівняння прямої у відрізках.
4. Знайти центр і радіус кола, що задане рівнянням $x^2+y^2+2x-4y-$ $-11=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

№ 11

1. а) Знайти точку перетину двох прямих: $3x-5y-13=0$ і $2x+7y-81=0$.

б) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$

2. Знайти довжину вектора $\overline{p} = \overline{a} + \overline{b}$, якщо

   $\left|\overline{a}\right| = 1,\ \left|\overline{b}\right| = 3,\ (\overline{a},\hat{}\ \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}.$

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *A*(-1;-1) паралельно до вектора $\vec{b}$ =(3;2).
4. Скласти рівняння кола, якщо точки *A*(-1;3) та *B*(7;7) є кінцями одного з його діаметрів.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:
   $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

№ 12

1. Розв'язати системи рівнянь:

   а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 + \ \ x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = -9. \end{cases}$

2. Дано точки *M*(-5;7;-6) і *N*(7;-9;9). Обчислити проекцію вектора $\overline{a}$ =(1;-3;1) на вектор $\overline{MN}$.
3. Довести, що прямі $3x-y+5=0$ і $x+3y-1=0$ перпендикулярні.
4. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь $2a=10$, а відстань між фокусами $2c=8$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями:
   $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

№ 13

1. Розв'язати :

   а) нерівність $\begin{vmatrix} 1 & x+5 \\ 2 & x \end{vmatrix} < 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

2. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\overline{a}| = 5,\ |\overline{b}| = 12.$ Визначити $|\overline{a} + \overline{b}|$ і $|\overline{a} - \overline{b}|$.
3. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-2;3)$, $B(1;0)$ і $C(2;1)$. Знайти довжину його медіани $CД$.
4. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами $2c=10$ і мала вісь $2b=8$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=2x$, $y=x^3$.

№ 14

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = -7, \\ x_1 - 3x_2 = -9. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

2. Дано вершини трикутника $A(3;-1;0)$, $B(2;1;1)$, $C(3;0;-2)$. Обчислити $\cos(\overline{BA},^\wedge \overline{BC})$.
3. Побудувати прямі, що задані рівняннями $x-3y+9=0$ і $x-2=0$.
4. Знайти вершину параболи $x^2-2y+3x-1=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$.

№ 15

1. Розв'язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} x & x - \frac{3}{2} \\ 2 & -x \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

2. При якому значенні m вектори $\overline{a}$ =(3;m;4) і $\overline{b}$ =(m;4;-7) перпендикулярні?
3. Знайти проекцію точки P(-6;4) на пряму $4x$-$5y$+3=0.
4. Скласти рівняння кола, якщо воно проходить через початок координат і його центр співпадає з точкою C(6;-8).
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=-x^2-6x+3$, $x-y+9=0$.

№ 16

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

2. Знайти $Пр_{\overline{a}}(2\overline{a} + 3\overline{b}),$ якщо $|\overline{a}| = 1,\ |\overline{b}| = 2,\ (\overline{a},\hat{}\ \overline{b}) = \dfrac{\pi}{6}.$
3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки A(1;3) і B(2;-3).
4. Знайти координати центра і півосі гіперболи $16x^2-9y^2-64x-54y$--161=0.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=4x-x^2$, $y=0$.

№ 17

1. Розв'язати:

а) нерівність $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2. Довести, що чотирикутник з вершинами A(-3;5;6), B(1;-5;7), C(8;-3;-1) і $Д$(4;7;-2) – квадрат.
3. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку K(2;1) перпендикулярно до прямої $2x+3y+4=0$.

4. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його мала піввісь b=8, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = x^2 - 6x - 3$, $x + y + 3 = 0$.

№ 18

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ 3x_1 + x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

2. Обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ =(3;4;-12) та $\overline{b}$ =(-1;2;-1).
3. Скласти рівняння прямих, які проходять через точку A(5;7) і паралельні до осей координат, побудувати їх.
4. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

№ 19

1. Розв'язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

2. Знайти роботу, яку виконує сила $\overline{F}$ =(3;4;-2) при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення A(2;0;-3) в положення B(-1;4;2).
3. Довести, що прямі $3x+5y-4=0$ і $6x+10y-8=0$ співпадають.
4. Знайти вершину параболи $x^2 + 3x - y = 10$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = \ln x$, $y = 0$, $x = $e.

№ 20

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 6x_1 - 4x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

2. Обчислити проекцію вектора $\overline{c} = 3\overline{a} - \overline{b}$ на вектор $\overline{b}$, якщо $\overline{a}$ =(1;-1;2) і $\overline{b}$ =(2;-2;1).
3. Встановити, під яким кутом перетинаються прямі $2x+y-1=0$ і $y = \dfrac{x}{2} + 1$.
4. Знайти півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $9x^2+4y^2=36$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = x^2+2x$, $y = x+2$.

№ 21

1. а) Знайти точку перетину двох прямих: $2x-y=0$ і $3x+2y-7=0$.

б) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

2. Обчислити скалярний добуток векторів $\overline{a}$ =(-4;3;0) і $\overline{b}$ =(2;-3;6) та визначити, який кут (гострий, прямий чи тупий) вони утворюють.
3. Знайти координати центра ваги трикутника з вершинами в точках A(3;-1), B(-2;0), C(2;4).
4. Скласти рівняння кола, якщо його центр знаходиться в точці C(2;1), а пряма $3x-4y+8=0$ – його дотична.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y = x^2-3x+4$, $5x+y-7=0$.

№ 22

1. Розв'язати:

а) нерівність $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x \end{vmatrix} > 3;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

2. Дано вершини чотирикутника $A(1;2;3)$, $B(7;-3;2)$, $C(3;0;6)$ і $Д(9;2;4)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.
3. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $A(-2;3)$ і $B(1;0)$.
4. Знайти координати центра і півосі еліпса $2x^2+y^2-4x+4y-10=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=x^2-2x+2$, $y=0$, $x=0$.

№ 23

1. Розв’язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

2. Дано трикутник з вершинами в точках $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A.
3. Дано вершини трикутника $A(2;-5)$, $B(1;-2)$ і $C(4;7)$. Знайти рівняння його висоти, опущеної з вершини B.
4. Визначити координати вершини параболи і її параметр, якщо вона задана рівнянням $x^2 - 6x - 4y + 25 = 0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $xy=3$, $x+y=4$.

№ 24

1. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 = -4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

2. Дано три вектори $\overline{a}$ =(1;-3;4) і $\overline{b}$ =(3;-4;2) і $\overline{c}$ =(-1;1;4). Знайти $Пр_{\overline{b}+\overline{c}}\overline{a}.$
3. Дві сторони квадрата лежать на прямих x-2y+2=0 і x-2y-5=0. Обчислити його площу.
4. Знайти координати центра і півосі гіперболи $16x^2$-$9y^2$-$64x$-$18y$+199=0.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=-x^2+3x$, $y=0$.

№ 25

1. Розв'язати:

а) нерівність $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} < 1;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

2. Дано точки A(-1;3;-7), B(2;-1;5) і C(0;1;-5). Обчислити $(2\overline{AB} - \overline{CB}) \cdot \overline{BC}.$
3. Знайти відстань від точки A(2;7) до прямої $12x+5y-7=0$.
4. Скласти рівняння кола, якщо точки A(3;2) і B(-1;6) – кінці одного з його діаметрів.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y^2=9x$, $y=3x$.

№ 26

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

2. Обчислити значення виразу $(5\overline{a} + 3\overline{b}) \cdot (2\overline{a} - \overline{b})$, якщо відомо, що $|\overline{a}|$=2, $|\overline{b}|$=3 і $\overline{a} \perp \overline{b}$.
3. Дано трикутник з вершинами в точках A(2;-3), B(3;0) і C(-2;5). Знайти довжину висоти $АД$.

4. Знайти координати центра і півосі еліпса $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=3+2x-x^2$, $y=0$.

№ 27

1. Розв'язати:

а) рівняння $\begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ x-4 & x \end{vmatrix} = 0;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

2. Дано вершини трикутника $A(3;-1;0)$, $B(2;1;1)$, і $C(3;0;-2)$. Знайти проекцію вектора $2\overline{AB} + \overline{BC}$ на вектор $\overline{AC}$.
3. Який кут утворює з віссю OX пряма $2x+2y-5=0$?
4. Знайти центр і радіус кола $x^2+y^2+4x+8y+11=0$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=-x^2+4$, $y=x^2-2x$.

№ 28

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 = 6, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

2. Знайти довжину вектора $\overline{p} = \overline{a} - 2\overline{b}$, якщо

$$|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 1,\ (\overline{a},\hat{}\ \overline{b}) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Побудувати прямі, що задані рівняннями $2x-y=0$ і $3x-2=0$.
4. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що відстань між фокусами $2c=6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.
5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=x^2-6x$, $x+y=0$.

№ 29

1. Розв'язати:

а) нерівність $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14;$

б) систему рівнянь $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

2. Дано вершини трикутника $A(4;1;0)$, $B(2;2;1)$ і $C(6;3;1)$. Знайти проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$.

3. Дано рівняння прямої $5x+2y-3=0$. Визначити кутовий коефіцієнт прямої, яка перпендикулярна до даної.

4. Знайти вершину параболи $x+y^2-2y+1=0$.

5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$.

№ 30

1. а) Знайти точку перетину двох прямих: $2x-y+7=0$ і $3x+2y=0$.

б) Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

2. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\overline{a}=(-2;3;\beta)$ і $\overline{b}=(\alpha;-6;2)$ - колінеарні.

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $K(5;-1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{n}=(3;-2)$.

4. Визначити півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $3x^2+4y^2-12=0$.

5. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями: $y=x^2+4x$, $x-y+4=0$.

Самостійна робота №2. Границя функції. Обчислення границь

№ 1

1. Знайти область визначення функції $y = \lg \frac{x}{x-3}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x + 5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{10 + 3x - x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+8} - \sqrt{-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{3-5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{якщо } \ x < 1, \\ 2x, \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

№ 2

1. Знайти область визначення функції $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^2 + 6x + 7}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{7x - 3x^2 - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{x-2}\right)^{3x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, \ \text{якщо } x \leq 2, \\ -x + 4, \ \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

№ 3

1. Знайти область визначення функції $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{3x^2+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4-4x-3x^2}{4x^2+11x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x}}{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-4}\right)^{1-2x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{5x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{якщо } x\le1,\\ x^2+1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

№ 4

1. Знайти область визначення функції $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+16x+5}{15-7x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-3x-9}{5x-x^2-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+4}{4x+3}\right)^{4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\le0,\\ (x-1)^2, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

№ 5

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+7x+12}{9-3x-2x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{4-x}}{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-5}\right)^{4-x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\le 2,\\ x+1, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 6

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{x+7}{2x^2-x-6}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x+1}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+5}{5x-3}\right)^{x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо } x\le 3,\\ x+3, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$$

№ 7

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\lg(1-x^2)$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x^2+2x}{x^2+x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x-5}\right)^{2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 5x}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{якщо } x\le 2,\\ x+4, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 8

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x+3}\right)^{2x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 5x}{x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{якщо } x\le 2,\\ 2x, & \text{якщо } x>2. \end{cases}$$

№ 9

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{1}{x^2-9}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{-3-x}}{4+x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x-1}\right)^{4-3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,7x}{5x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & \text{якщо } x\le 0,\\ -x^2+4, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$$

№ 10

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\arccos\dfrac{x-2}{3}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-1}{5x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+5}\right)^{5+x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{якщо } x<0,\\ x+1, & \text{якщо } x\ge 0. \end{cases}$$

№ 11

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+5}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{4x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ якщо } x<-1,\\ x, \text{ якщо } x\ge -1.\end{cases}$$

№ 12

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ якщо } x<1,\\ x^2+2, \text{ якщо } x\ge 1.\end{cases}$$

№ 13

1. Знайти область визначення функції

   $f(x)=\dfrac{x}{3x+2}+\operatorname{arctg}\dfrac{4x-1}{5}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{2x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x^2}{4x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)^2, \text{ якщо } x<3,\\ -x+6, \text{ якщо } x\ge 3.\end{cases}$$

№ 14

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x+2}{3x^3-x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+4}\right)^{x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}4x\cdot\operatorname{ctg}5x$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ якщо } x\le -1,\\ x^2-2, \text{ якщо } x>-1.\end{cases}$$

№ 15

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{-x}+2^{x^2}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x-3}{4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, \text{ якщо } x\le -2,\\ x^3, \quad \text{ якщо } x>-2.\end{cases}$$

№ 16

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{4-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+5}\right)^{x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & \text{якщо } x\le2,\\ x+3, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 17

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin8x}{4x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\le2,\\ 2x, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 18

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\log_2(9-x^2)$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{4+3x-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{4-x}}{x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} -x, & \text{якщо } x<1, \\ x^2+1, & \text{якщо } x\ge 1. \end{cases}$$

№ 19

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{x-x^3}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+4}{3x^4-7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{якщо } x<0, \\ x^2-1, & \text{якщо } x\ge 0. \end{cases}$$

№ 20

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12-5x-2x^2}{3x^2+8x-16}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{10-3x^2-13x}{4x^2+17x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{якщо } x\le 0, \\ x^2, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$$

№ 21

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-8x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+6}-\sqrt{8-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{4x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\le1,\\ 4-x, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

№ 22

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{x^2-2}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-3}\right)^{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin3x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & \text{якщо } x\le2,\\ 4-2x, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 23

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\arccos\dfrac{x-1}{2}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+2}\right)^{3x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2x}{7x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2, \text{ якщо } x<2,\\ x-2, \text{ якщо } x\geq 2.\end{cases}$$

№ 24

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-11x-6}{27x-4x^2-18}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x^2-15x-4}{3x^2-8x-16}$;

   в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}2-x, \text{ якщо } x\leq 2,\\ x-5, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 25

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+7x+12}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}{x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+1}\right)^{3-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.
3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, \text{ якщо } x\leq 0,\\ 2-x^2, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$$

№ 26

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$.
2. Знайти границі функцій:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+4}{2x^3-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{5x-x^2-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{arctg} x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x\le 1,\\ 1-x, & \text{якщо } x>1. \end{cases}$$

№ 27

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\ln(x-6)+\sqrt{x-3}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{3x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{1-x}}{x+2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{3x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 6x}{2x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{якщо } x\le 0,\\ x-1, & \text{якщо } x>0. \end{cases}$$

№ 28

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\arcsin\dfrac{x-4}{3}$.
2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+4}{6x^2-7x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x-4}\right)^{5-2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x}{7x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{якщо } x\le 1,\\ x+2, & \text{якщо } x>1. \end{cases}$$

№ 29

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt[3]{x-1}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{4x^2+2x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-3}\right)^{5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, \text{якщо } x\le 2,\\ 4-x, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

№ 30

1. Знайти область визначення функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x-1}{3x^4+2x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+4}{4x+3}\right)^{4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}5x}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2, \text{ якщо } x\le 2,\\ x-1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

Самостійна робота № 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

№1

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y=5^{\mathrm{tg}^2 x}-x\cos(x+1)$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$; в) $y=x^x$;

г) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ д) $y = \cos^2 x, \quad y''_x - ?$

2. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

3. Із дроту довжиною l виготовляють модель прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою. Якою повинна бути довжина сторони основи, щоб повна поверхня паралелепіпеда була найбільшою?

№ 2

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 7^{\operatorname{arctg} 2x} + x \ln 2x$; б) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{3x-1}{x^2 - 6x + 2}}$; в) $y = x^{\cos x}$;

г) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$ д) $y = xe^{-x}, \quad y_x'' - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 7x + 3$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. Знайти найбільший об'єм конуса при заданій довжині l його твірної.

№ 3

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x^2} + x^2 \sin x$; б) $y = \ln \sqrt{\dfrac{3 - x^2}{x^3 - 9x}}$;

в) $y = x^{\ln x}$; г) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ д) $y = \operatorname{arctg} e^x, \ y_x'' - ?$

2. Обчислити наближено $\operatorname{tg} 46^0$.

3. Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює *6а*. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

№ 4

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 2\arcsin\sqrt{1-x^2} + x^6 \operatorname{ctg} 3x;$ б) $y = (5^{\cos 2x} - \cos^2 3x)^3;$

в) $y = (x^2)^{\operatorname{tg} x};$ г) $y = \begin{cases} x = (2t+3)\cos t, \\ y = 3t^2; \end{cases}$ д)

$y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a},\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \sqrt{x-4}$ в точці з абсцисою $x_0 = 8.$

3. Знайти прямокутний трикутник найбільшої площі, гіпотенуза якого дорівнює c.

№ 5

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\arccos\sqrt{1-4x^2} + 2^{\cos\frac{x}{3}};$ б) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{8-3x^2}{x^3-8x}};$

в) $y = (\sin x)^x;$ г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \\ y = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t)}; \end{cases}$ д)

$y = \sqrt{1+x^2},\ y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $e^{0,2-(0,2)^3}$.

3. Розкласти число 20 на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

№ 6

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\arccos e^x + x\cos 2x;$ б) $y = (4^{\operatorname{tg} 3x} + x^2)^3;$ в) $y = x^{\operatorname{ctg} x};$

в) $y = x^{\operatorname{ctg} x}$; г) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ д)

$y = x\ln x,\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{\ln x}{x}$ в точці абсцисою $x_0 = 1.$

3. Сіткою довжиною 120м потрібно огородити прилеглу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Визначити розміри цієї ділянки.

№ 7

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \sqrt{1-4x^2} + \arccos 2x$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{1-5x}{1+5x}}$;

в) $y = (x + \ln x)^{\frac{1}{x}}$; г) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ д) $y = \ln \operatorname{ctg} 2x,\ y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $e^{2,01}$.

3. Довести, що з усіх прямокутників, вписаних у заданий круг, найбільшу площу має квадрат.

№ 8

1.Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} - x\sin 4x$; б) $y = (4^{\cos 2x} + \ln(1+x^2))^6$;

в) $y = (x^2 - x + 1)^{x^2}$; г) $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}; \end{cases}$ д) $y = \sin^2 x,\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 16x + 7$ в точці з абсцисою $x_0 = 1.$

3. Показати, що з усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у заданий круг, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

№ 9

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 3^{\sqrt{x}} + e^x \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{2x^2+1}}$;

в) $y = (\arccos x)^{x^2}$; г) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$ д) $y = e^{x^2}$, $y_x^{//}$ – ?

2. Обчислити наближено $\sin 32^0$.

3. Внутрішня поверхня баку із квадратною основою без кришки рівна 108 дм^3. Якими повинні бути розміри баку, щоб його об'єм був найбільшим?

№ 10

1.Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 2^{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}} + x\sin^3 x$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{2x^3+1}{2x^3-1}}$;

в) $y = (\arcsin x)^{\ln x}$; г) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \dfrac{t}{e^t}; \end{cases}$ д) $y = x \operatorname{arctg} x$, $y_x^{//}$ – ?

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точці $M_0(1;1)$.

3. Показати, що з усіх трикутників із заданою основою та заданим кутом при протилежній вершині, найбільший периметр буде мати рівнобедрений трикутник.

№ 11

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln(e^{2x} + 1) - 2\operatorname{arctg} e^x$; б) $y = (6^{\cos^2 x} + \sin^2 x)^5$;

в) $y = x^{\cos x}$; г) $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ д) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$, $y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $e^{(1,2)^2-1,2}$.

3. Із листа, що має форму круга радіуса R, вирізати такий сектор, при згортанні якого можна отримати лійку найбільшої місткості.

№ 12

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \arcsin\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; б) $y = (2^{\cos^3 x} + \mathrm{tg}\,2x)^6$;

в) $y = (\mathrm{arctg}\,x)^x$; г) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t; \end{cases}$ д) $y = \dfrac{4}{x+3}$, $y_x^{//} - ?$

2.Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Консервна банка об’ємом V повинна мати циліндричну форму із дном та кришкою. Яким повинно бути відношення діаметра циліндра до висоти, щоб на виготовлення банки пішло найменше матеріалу?

№ 13

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln \mathrm{arctg}\sqrt{x} + 2^{\sin x^3}$; б) $y = \ln\sqrt[6]{\dfrac{x^6-1}{6x+5}}$;

в) $y = (\mathrm{tg}\,x)^x$; г) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$ д) $y = x - \ln(x+1)$, $y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\mathrm{arctg}\,0{,}95$.

3. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном і об'ємом 32м^3 так, щоб на опорядження його стін і дна пішла найменша кількість матеріалу.

№ 14

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln \mathrm{tg}(3x-2)^2 + 5^{\arccos 3x}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{3x^2+1}{3-x^2}}$;

в) $y = (\sqrt{x})^x$; г) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t; \end{cases}$ д) $y = \sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x,\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2\sqrt{2}\sin x$ в точці $M_0(\dfrac{\pi}{4};2)$.

3. Якими повинні бути сторони прямокутного трикутника заданої площі S, щоб його периметр був найменшим?

№ 15

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\cos 3^{x^2} + x\sqrt{1-x^2}$; б) $y = (2^{\mathrm{ctg}\,3x} + \sin^3 7x)^5$;

в) $y = x^{\cos x}$; г) $\begin{cases} x = 2(\sin t - t\cos t), \\ y = 2(\cos t + t\sin t); \end{cases}$ д) $y = xe^{x^2}$; $y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\sqrt[3]{25}$.

3. Яке повинно бути співвідношення між радіусом основи R і висотою H закритої циліндричної цистерни місткості V, щоб на її виготовлення затратити найменшу кількість матеріалу?

№ 16

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\arccos\sqrt{5-x^2} + 3^{\arcsin x}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{3x^2+4}{3x^2-4}}$;

в) $y=(2x+3)^{\cos x}$; г)

$$\begin{cases} x=a\cos 2t, \\ y=b\sin 2t; \end{cases}$$ д) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x,\ y_x^{//}-?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\sqrt{x+4}$ в точці з абсцисою $x_0=-3.$

3.Якими повинні бути лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда з діагоналлю d, щоб його об'єм був найбільшим?

№ 17

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}$; б) $y=(7^{\operatorname{tg}^2 x}+\cos^2 6x)^4$;

в) $y=x^{\operatorname{ctg} x}$; г) $\begin{cases} x=\ln \operatorname{ctg} t, \\ y=\operatorname{ctg}^2 t; \end{cases}$ д)

$y=x^2\ln x,\ y_x^{//}-?$

2. Обчислити наближено $\sqrt{17}$.

3. Серед прямокутників заданого периметра $2p$ знайти той, площа якого найбільша.

№ 18

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y=x\sqrt[3]{1+x^2}+5^{\frac{1}{x^2}+\cos 3x}$; б) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x^5-3}{x^5+3}}$; в) $y=x^{\frac{1}{x+1}}$;

г) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=8\sin^3 t; \end{cases}$ д) $y=\dfrac{x}{x^2-1},\ y_x^{//}-?$

2. Визначити, під яким кутом парабола $y=x^2-x$ перетинає вісь абсцис.

3. Яке співвідношення повинно існувати між розмірами прямокутних вікон заданого периметра p, щоб освітленість приміщення була найбільшою?

№ 19

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\cos e^{-4x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$; б) $y = (4^{\sin 2x} + \operatorname{ctg} 3x)^5$;

в) $y = (\cos^2 x)^x$; г) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ д) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $e^{0,2}$.

3. Знайти таке додатне число, щоб різниця між ними і його кубом була найменшою.

№ 20

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 2^{(x^3 + \sin 3x)} \operatorname{arctg} 2x$; б) $y = \sqrt[4]{\dfrac{3x^2+1}{3-x^2}}$; в) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$;

г) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t; \end{cases}$ д) $y = x \operatorname{arctg} x$, $y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точці $M_0(2;1)$.

3. Вікно має форму прямокутника, що закінчується півкругом. Які повинні бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільше світла?

№ 21

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \arcsin 3^{x^2} + e^x \cos 3x$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{3x^2+1}{x^3+x}}$;

в) $y = (\ln x)^{\sin x}$; г) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2); \end{cases}$ д) $y = e^x \cos x$, $y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\operatorname{arctg} 0,97$.

3. Необхідно виготовити конічну лійку, твірна якої дорівнює l. Якою повинна бути висота лійки, щоб вона мала найбільшу ємкість?

№ 22

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} + x^2\cos 2x;$ б) $y = (3^{\arcsin 2x} - \sqrt[3]{x})^2;$

в) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2};$ г) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t - t\sin t; \end{cases}$ д) $y = x^3 \ln x,\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 - 6x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2.$

3. Довести, що на виготовлення намету у формі конуса даного об'єму V піде найменша кількість матеріалу за умови, що його висота у $\sqrt{2}$ разів буде більшою за радіус основи.

№ 23

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\arccos\frac{1}{x} + x\cos 3x;$ б) $y = \ln\sqrt[3]{\frac{7x^5}{x^5 - 3^{5x}}};$ в) $y = x^{\operatorname{ctg} x};$

г) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t; \end{cases}$ д) $y = e^{-3x},\ y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\sqrt[4]{17}.$

3. Знайти таке додатне число, яке в сумі з оберненим до нього числом буде мати найменше значення.

№ 24

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = 2\ln \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} + x^2 \operatorname{tg}2x$; б) $y = (4^{\cos^2 x} - \operatorname{ctg}^3 x)^5$;

в) $y = (\sin x)^{\cos x}$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg}t; \end{cases}$ д) $y = x^5 \ln x,\ y_x^{//} - ?$

2. Визначити, під яким кутом синусоїда $y = \sin x$ перетинає вісь абсцис в початку координат.

3. З усіх прямокутників, що мають задану площу S, знайти той, периметр якого найбільший.

№ 25

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln \arccos \sqrt{1 - 4x^2} + x \ln 2x$; б) $y = (2^{\sin x} + \operatorname{arctg}^2 x)^5$;

в) $y = (\operatorname{tg}x)^{x^2}$; г) $\begin{cases} x = e^{1+2t}, \\ y = e^{3t-1}; \end{cases}$ д) $y = \ln(ax + b),\ y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $e^{0,2-(0,2)^2}$.

3. Основа трикутника дорівнює a, а його периметр $2p$. Якими повинні бути розміри двох інших сторін, щоб його площа була найбільшою?

№ 26

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \arcsin \sqrt{1 - x} + 2^x \cos 3x$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\left(\dfrac{3x^2 + 7}{3x^2 - 7}\right)^4}$;

в) $y = (\operatorname{tg}2x)^{\cos 2x}$; г) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}3t, \\ y = \ln(1 + 9t^2); \end{cases}$ д) $y = e^{-x^2},\ y_x^{//} - ?$

2. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \dfrac{x^4}{4} - 27x + 60$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3. Довести, що з усіх прямокутників заданої площі a^2, найменший периметр має квадрат.

№ 27

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\arccos\frac{1}{x} + xe^{3x}$; б) $y = (4^{\mathrm{tg}\,x} - \mathrm{ctg}^2 7x)^5$;

в) $y = (x+1)^{x^2}$; г) $\begin{cases} x = 2\mathrm{tg}t, \\ y = 2\sin^2 t - \cos 2t; \end{cases}$

д) $y = x^2\cos x,\ y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\cos 61^0$.

3. Відрізок довжиною *a* поділити на дві частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на цих частинах, була мінімальною.

№ 28

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \ln\cos 3^{x^3} + x^6\,\mathrm{ctg}3x$; б) $y = \ln\sqrt{\frac{1-x^2}{x^3-3x}}$; в) $y = x^{\arccos x}$;

г) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t; \end{cases}$ д) $y = \sqrt{x+7}, y_x^{//} - ?$

2. Обчислити наближено $\mathrm{arctg}1{,}01$.

3. Кусок дроту довжиною *l* зігнутий у формі прямокутника. Які повинні бути розміри цього прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

№ 29

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \ln\arcsin\sqrt{1-4x^2}$; б) $y = (2^{\mathrm{arctg}\,5x} + \mathrm{arcctg}\,6x)^3$;

в) $y=(x^4+3)^{\sin x}$; г) $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\cos t; \end{cases}$ д) $y=x\sqrt{1+x^2}$, $y_x^{//}-?$

2. Визначити, під яким кутом крива $y=\dfrac{x-1}{1+x^2}$ перетинає вісь абсцис.
3. Яким повинен бути радіус основи відкритого зверху циліндра місткості *V*, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

№ 30

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y=\sqrt[3]{x^3+1}+x\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\ln\sqrt[8]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$; в) $y=x^{\operatorname{arctg} x}$;

г) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}; \end{cases}$ д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}, y_x^{//}-?$

2. Обчислити наближено $(5{,}07)^3$.
3. Подати число 8 у вигляді суми таких двох доданків, щоб сума їх кубів була найменшою.

Самостійна робота № 4. Диференціальне числення функції декількох змінних

Завдання 1. Частинні похідні першого порядку функції $z=f(x,y)$.

1. Довести, що функція $z=x\ln\dfrac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

2. Довести, що функція $z = x^y$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

3. Знайти повний диференціал функції $z = arctg\,\frac{x}{y}.$

4. Довести, що функція $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^2).$

5. Довести, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}\ln y$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}.$

6. Довести, що функція $z = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 5z.$

7. Довести, що функція $z = xy + xe^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$

8. Довести, що функція $z = \arcsin\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

9. Довести, що функція $z = arctg\,\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

10. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$

11. Довести, що функція $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ задовольняє рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

12. Довести, що функція $z = xe^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}.$

13. Довести, що функція $z = \frac{xy}{x+y}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$

14. Довести, що функція $z = \frac{1}{3}\frac{y^2}{x} + \arcsin(xy)$ задовольняє рівняння $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$

15. Довести, що для функції $z = x^3y^2 - 2xy^4 + 3x^2y^3$ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 5z.$

16. Довести, що функція $z = x^2y + xy^2$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} = x^3 + y^3 + 2z.$

17. Довести, що для функції $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$ $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3).$

18. Довести, що функція $z=\sqrt{x^2+y^2}$ задовольняє рівняння $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1.$

19. Довести, що функція $z=x^2y^2+x^3+y^3+x-4y$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2y^2+2\left(x^3+y^3\right)+z.$

20. Довести, що функція $z=ye^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{x}.$

21. Довести, що функція $z=y\ln\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x}.$

22. Довести, що функція $z=e^{\frac{x}{y}}\ln x$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}e^{\frac{y}{x}}.$

23. Довести, що функція $z=xy+ye^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z.$

24. Довести, що функція $z=\arcsin\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

25. Довести, що функція $z = arctg\,\frac{x}{y}$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

26. Довести, що функція $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ задовольняє рівняння $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

27. Довести, що функція $z = xe^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}.$

28. Довести, що функція $z = ye^{\frac{y}{x}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{x}.$

29. Довести, що функція $z = x^2 y + xy^2 + xy$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3z - xy.$

30. Довести, що функція $z = \frac{x}{y} + x^2 + y^2$ задовольняє рівняння $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(z - \frac{x}{y}\right).$

Завдання 2. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля функції $u = u(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$

1. $u = xy^2 z + x^2 z - 3yz^2 - 2x + 1,\ \ M_0(1,-1,2).$
2. $u = xy + yz + x^2 z + y^2 x + 5,\ \ M_0(2,1,-1).$
3. $u = x^3 y^2 + yz^3 + y^2 xz - xyz\ ,\ \ M_0(1,2,3).$

4. $u = x^2y^2z^2 - xyz + 5x - y + 2z$, $M_0(-1,2,0)$.

5. $u = 4x^2 - y^3z + xyz + 3x + 1$, $M_0(1,-1,3)$.

6. $u = 2yz - x^2z + 4y^2z - 3y + 2$, $M_0(2,-2,3)$.

7. $u = 3xy - 2y^2z - 2xz^2 - 3z - 1$, $M_0(-2,1,-1,)$.

8. $u = y^2z^2x - x^2y - 2xz^3 - x + 1$, $M_0(-1,1,-2)$.

9. $u = 2xy^2z - 3x^2y + yz^2 - 2$, $M_0(1,-1,1)$.

10. $u = x^2y^2z - z^2x + 4yz - 1$, $M_0(-2,2,1)$.

11. $u = xyz^2 + x^2y - xyz + 1$, $M_0(1,-1,3)$.

12. $u = y^2z - x^2y + 3xyz^2 + 4x$, $M_0(2,2,-1)$.

13. $u = x^2z + y^2z - xyz^2 - y$, $M_0(1,2,-2)$.

14. $u = yz^2 - x^2y - xz - 5z + 1$, $M_0(1,-1,2)$.

15. $u = xy^2z - 3x^2z^2 - 2x^2 - 1$, $M_0(2,-2,1)$.

16. $u = yz + xy + x^2z + y^2x - 1$, $M_0(2,1,1)$.

17. $u = x^2z - xy^2z + 3yz^2 + 2x - 1$, $M_0(1,-1,2)$.

18. $u = yz - x^2y + 4yz^2 - 3y - 1$, $M_0(2,2,-2)$.

19. $u = x^2y^2z - z^2x + yz^2 - 1$, $M_0(-1,2,2)$.

20. $u = 2xy - 3y^2z - z^3 + 3y - 2$, $M_0(1,-1,2)$.

21. $u = yz - 3yz^2 + x^2y - 2x + 1$, $M_0(2,-3,1)$.

22. $u = yz^2 - x^2z - xy^2 + y - 1$, $M_0(-1,-1,3)$.

23. $u = xyz^2 - x^2yz + xz + 4y$, $M_0(1,-1,2)$.

24. $u = x^2yz^2 + xy^2 - 5z - 1$, $M_0(1,2,-3)$.

25. $u = 3x^2z - 2xy + yz^2 + 1$, $M_0(-1,-2,1)$.

26. $u = xyz^2 + 3x^2z - y^2x - 2$, $M_0(1,2,-1)$.

27. $u = x^3y^2 - yz^2 + xyz - 1$, $M_0(2,-1,1)$.

28. $u = xz + y^2z + x^2y + 2$, $M_0(1,1,-1)$.

29. $u = x^2 z - xyz + xy^2 - z$, $M_0(-1,1,1)$.

30. $u = yz + x^2 y^2 - y^2 z - x$, $M_0(-2,1,-1)$.

Завдання 3. Знайти похідні складних функцій.

1. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x^y$.

2. $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = x^2 \cos^2 y$, $v = y^2 \sin^2 x$.

3. $z = \ln \dfrac{u}{v}$, $u = x^2 y^2 + xy + 5$, $v = x^2 + y^2 + x - y + 2$.

4. $z = \dfrac{\sqrt{u}}{v}$, $u = 5^x y + x4^y$, $v = x^y + xy$.

5. $z = e^{uv}$, $u = \sin x \cos y + x^2 + y^2$, $v = \dfrac{\sin x}{\cos y} + \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $z = \sqrt{xy}$, $x = u^2 + v^2$, $y = \dfrac{u}{v}$.

7. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = u^v$, $y = v^u$.

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 3^u v + 4^v u$, $y = u^2 v + uv^2 + uv$.

9. $z = \cos \dfrac{u}{v}$, $u = \ln \dfrac{x}{y}$, $v = \dfrac{y}{x}$.

10. $z = u^v$, $u = x^y$, $v = x^3 y + xy^3$.

11. $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + u^2 v^2$, $y = \sin u \cos v$.

12. $z = tg\, \dfrac{x}{y}$, $x = \cos^2 u \sin^2 v$, $y = \ln uv$.

13. $z = \ln^2 \dfrac{y}{x}$, $x = \sqrt{u^2 v^2 + u + v}$, $y = u^v + v^u$.

14. $z = \sin \dfrac{u}{v}$, $u = \sqrt{x^2 y^2 + x + y}$, $v = tg\, \dfrac{y}{x}$.

15. $z=\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $x=\dfrac{\sqrt{u}}{v}$, $y=\dfrac{\sqrt{v}}{u}$.

16. $z=u^2v+uv^2$, $u=x^3y^3+\sqrt{x}y$, $v=x^2y^2+x\sqrt{y}$.

17. $z=\dfrac{u}{\sqrt{v}}$, $u=\sin x\cos y-x^2+4y$, $v=\sin^2(xy)+\sqrt{xy}$.

18. $z=e^{u^2+v^2}$, $u=x\ln y+y\ln x$, $v=\sqrt{x}+\sqrt{y}+xy$.

19. $z=\ln\dfrac{x}{y}$, $x=\sqrt{uv}$, $y=u^v$.

20. $z=tg(xy)$, $x=u^2-v^2$, $y=u^2v+uv^2$.

21. $z=x^2-xy+y^2$, $x=u\cos v$, $y=v\sin u$.

22. $z=u^2+2uv+v^2$, $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\dfrac{y}{x}$.

23. $z=(u+v)^2$, $u=x\sin y$, $v=y\sin x$.

24. $z=x^2+2xy+y^2$, $x=(u-v)^2$, $y=u^v$.

25. $z=(x+y)^2$, $x=\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\sqrt{xy}$.

26. $z=\sqrt{u^2-v^2}$, $u=\arcsin(xy)$, $v=4^{x^2+y^2}$.

27. $z=3^{\sqrt{xy}}$, $x=\ln(u^2-v^2)$, $y=\sqrt{u^2-v^2}$.

28. $z=v^u$, $u=y^x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

29. $z=\sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x=\sqrt{u^2-v^2}$, $y=u^v$.

30. $z=u^2-2uv+v^2$, $u=\sqrt{xy}$, $v=(x-y)^2$.

Завдання 4. Дослідити на екстремум функції

1. $z=3y^2+3x^2+5xy+x-y+5$.

2. $z=x^2+2xy-y^2+6x-10y+1$.

3. $z=x^2+xy+y^2-2x-y+3$.

4. $z = 4x + 5y - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 4$.

5. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

6. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

7. $z = 2y^2 - xy + x^2 + 3x + 2y + 2$.

8. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

9. $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$.

10. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

11. $z = -5x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 4$.

12. $z = 5xy + 3x^2 + 3y^2 + x - y + 5$.

13. $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - 4y + 1$.

14. $z = y^2 + xy + x^2 - 2x - y + 5$.

15. $z = -x^2 - 4y^2 + 3xy + 4x - 6y - 1$.

16. $z = 5xy + 3y^2 + 3x^2 + 4x + 7y + 5$.

17. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$.

18. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y - 8$.

19. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1$.

20. $z = 4y^2 - x^2 + 3xy + 4x - 6y - 1$.

21. $z = y^2 + 3x^2 + 3xy - 6x - 2y + 1$.

22. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + x - y + 5$.

23. $z = y^2 + xy + x^2 + x - y + 4$.

24. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 2$.

25. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x - y - 1$.

26. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - x - y + 1$.

27. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$.

28. $z = x^2 + y^2 - 3xy - 3x + 2y + 1$.

29. $z = x^2 + y^2 - 3xy - \frac{1}{2}x + 2y + 2$.

30. $z = x^2 + 3y^2 + 3xy + 6y - 2x - 1$.

Література

1. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник. Київ : Професіонал, 2007. 560 с.
2. Брушковський О. Л., Дубчак І. В., Цецик С. П. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2017. 178 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/6962
3. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та ін. КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310
4. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. Ч. 2 : Диференціальне та інтегральне числення / Тевяшев А. Д. та ін. Харків : СМІТ, 2010. 330 с.
5. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій : підручник / Іващенко В. П. та ін. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.
6. Вища та прикладна математика : навч. посіб. / С. І. Резніков, О. П. Зінькевич, В. М. Сафонов, Ю. С. Резнікова. Київ : НУХТ, 2016. 343 с.
7. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
8. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. ; за ред. Г.О. Михаліна. К. : Київ, ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с. URL: https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/13578/1/O_Zhyltsov_KUBG_TY_UN.pdf
9. Мармоза А. Т. Практикум з математичної статистики : навч. посіб. К. : Кондор, 2004. 264 с.

10. Математичний аналіз і диференціальні рівняння : навч. посіб. Чернівці : Книги – XXI, 2010. 556 с.
11. Мізюк В. Г. Вища математика : навч.-метод. посіб. Рівне : НУВГП, 2010. 163 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/2381/
12. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.
13. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч. 1 : Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія / Бутенко О. Г. Нерух, Н. М. Ружицька, Н. П. Стогній; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 172 с.
14. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч. 2 : Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної / Н. С. Бутенко, О. Г. Нерух, Н. М. Ружицька, Н. П. Стогній ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 268 с.
15. Пушак Я. С., Лозовий Б. Л. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики : навчальний посібник. Львів : «Магнолія 2006», 2007. 276 с.
16. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк О. М. Диференціальні рівняння в задачах : навч. посіб. К. : «Либідь», 2003. 504 с. URL: http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2015/Samoylenko_2003_504.pdf
17. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632