2667

V

К. А. ПУТІЛОВ

ПРИ УЧАСТІ ПРОФ. А. І. БАЧІНСЬКОГО,
В. А. ФАБРІКАНТА, Ю. В. ХОДАКОВА і ін.

КУРС ФІЗИКИ

ПІДРУЧНИК
ДЛЯ ВИЩИХ ПЕДАГОГІЧНИХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

ПЕРЕКЛАД З ДРУГОГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ,
ЗАТВЕРДЖЕНОГО НКО РРФСР

Затверджено НКО УРСР

ВИДАННЯ ДРУГЕ

ДЕРЖАВНЕ
УЧБОВО-ПЕДАГОГІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО
„РАДЯНСЬКА ШКОЛА"
КИЇВ · 1937 · ХАРКІВ

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літописі Укр. Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати

Редактор *Неміровський Г. З.*
Літредактор *Качеровський М. В.*
Техредактор *Карцев В.*
Коректор *Султанський М. Й.*

„Радшкола“. Видання № 174. Уповн. Головліту № 3234. Зам. № 991. Тираж 10.200. Друк. аркушів $45^1/_2$. Папер. аркуш. $22^3/_4$. Авт. арк. 72,7. Знаків в 1 папер. арк. 124.000. Формат паперу $72\times110^1/_{16}$.
Здано на виробництво 15/VI 1937 р. Підписано до друку 16/VIII 1937 р.
Ціна книги 10 крб. 75 коп. Оправа 1 крб. 25 коп.

Книжкова ф-ка ДВРШ ім. Г. І. Петровського. Харків.

Якщо в цій книжці будуть дефекти, просимо повернути її для заміни на адресу: Книжковій фабриці ім. Г. І. Петровського, Харків, вул. К. Маркса, № 1.

З ПЕРЕДМОВИ ДО ПЕРШОГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ.

Курс призначено для студентів фізичних відділів педвишів. Книга розрахована на пророблення курсу фізики побіжно з слуханням лекцій, супроводжуваних демонструванням, і з заняттями в лабораторії. Зміст елементарного курсу фізики вважається добре відомим [1]).

Змістом і характером викладу даний курс фізики великою мірою відрізняється від інших. При обмеженому числі аркушів дано досить докладний виклад теорії з її експериментальними основами і застосуваннями.

Складання цього курсу була справа досить важка, бо автори і редактор намагалися досягти:

1) методологічно правильного висвітлення фізики

2) щонайбільшої ясності викладу;

3) охоплення всього головного змісту фізики;

4) усунення нерідких у навчальних курсах хиб щодо строго наукового висвітлення питань.

Всі вказівки, що допомагатимуть поліпшенню книги, будуть прийняті з глибокою подякою [2]).

Деталізований план цього курсу склав і половину цієї книги написав *К. А. Путілов*; він же прoредагував і в деяких випадках (з метою єдності викладу) переробив матеріал, написаний співавторами. По розділах робота між співавторами була розподілена так:

Розділ I. Фізичні основи механіки — *К. А. Путілов.*
„ II. Статика — *П. В. Маторін.*
„ III. Динаміка твердих тіл — *П. В. Маторін.*
„ IV. Фізичні основи гідромеханіки — *С. М. Ілляшенко* і *К. А. Путілов.*
„ V. Фізичні основи аеромеханіки — *С. М. Ілляшенко.*
„ VI. Фізичні основи вчення про опір матеріалів — *С. М. Ілляшенко.*
„ VII. Вчення про коливання і хвилі — *В. В. Фурдуєв.*
„ VIII. Вчення про внутрішню енергію тіл — *А. І. Бачінський* і *К. А. Путілов.*
„ IX. Молекулярна фізика — *А. І. Бачінський.*
„ X. Термодинаміка — *К. А. Путілов.*
„ XI. Фізичні основи теплотехніки — *Н. А. Кутирін* і *К. А. Путілов.*

---

[1]) Посилання на стабільний підручник фізики для середньої школи, складений *Г. І. Фалеєвим* і *А. В. Пьоришкіним*, далі подаємо коротко так: „Фізика“ Ф. і П. або „Курс фізики“ Ф. і П.

[2]) Просьба подати ці вказівки на адресу: Москва, 2, Трубніковський пров., 12, кв. 1, Конст. Анат. Путілову.

Розділ XII. Електростатика і вчення про магнетизм — *К. А. Путілов.*
„ XIII. Електродинаміка — *К. А. Путілов, В. В. Тарасов* і *В. С. Грігор'єв.*
„ XIV. Електронна фізика — *К. А. Путілов.*
„ XV. Фізичні основи електрохемії — *Ю. В. Ходаков.*
„ XVI. Фізичні основи радіотехніки — *В. С. Грігор'єв.*
„ XVII. Акустика й електроакустика — *В. В. Фурдуєв.*
„ XVIII. Оптика — *В. А. Фабрікант* і *В. Л. Пульвер.*
„ XIX. Фізичні основи світлотехніки — *В. Л. Пульвер.*
„ XX. Фізика атома — *К. А. Путілов* і *В. А. Фабрікант* (при участі *Блохінцева* — „Хвильова механіка").
„ XXI. Фізика атомного ядра — *В. Л. Пульвер* і *К. А. Путілов.*

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ.

Під час готування до друку другого видання мною й співавторами було внесено в книгу значну кількість удосконалень тексту.

Висловлюю подяку рецензентам і редакції „Учгиза", які допомогли мені удосконалити книгу і вказали шляхи для дальшого поліпшення. Більшість одержаних мною порад уже взято до уваги; інші я зможу використати лише під час готування третього, розширеного видання.

К. Путілов.

11 травня 1936 р.

ЗМІСТ.

РОЗДІЛ I.

Фізичні основи механіки.

РОЗДІЛ II.

Статика.

РОЗДІЛ III.

Динаміка твердих тіл.

РОЗДІЛ IV.

Фізичні основи гідромеханіки.

РОЗДІЛ V.

Фізичні основи аеромеханіки.

РОЗДІЛ VI.

Фізичні основи вчення про опір матеріалів.

РОЗДІЛ VII.

Вчення про коливання і хвилі.

РОЗДІЛ VIII.

Вчення про внутрішню енергію тіл.

РОЗДІЛ IX.

Молекулярна фізика.

РОЗДІЛ X.

Термодинаміка.

РОЗДІЛ XI.

Фізичні основи теплотехніки.

РОЗДІЛ XII.

Електростатика і вчення про магнетизм.

РОЗДІЛ XIII.

Електродинаміка.

РОЗДІЛ XIV.

Електронна фізика.

РОЗДІЛ XV.

Фізичні основи електрохемії.

РОЗДІЛ XVI.

Фізичні основи радіотехніки і телебачення.

РОЗДІЛ XVII.

Акустика і електроакустика.

РОЗДІЛ XVIII.

Оптика.

РОЗДІЛ XIX.

Фізичні основи світлотехніки.

РОЗДІЛ XX.

Фізика атома.

РОЗДІЛ XXI.

Фізика атомного ядра.

РОЗДІЛ І.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ.

§ 1. Вступ. Фізика належить до числа природничих наук, завданням яких є вивчання природи з метою підкорити її людині.

Знання про явища природи виникли у первісних людей з їх практики; на цій початковій стадії виявлялися риси подібності і відмінності явищ оточуючого світу.

Зростання науки відбувалося шляхом систематизування наявних знань і їх розширення з допомогою спостережень і на вищій стадії — експерименту.

Для пояснення спостережуваних явищ служать гіпотези, які встановлюють причини даних явищ. Мірою розширення застосувань наукових знань до практики виникає потреба використати ці знання для завбачення явищ, для розрахунків наслідків того чи іншого діяння. Так з практичних потреб виникає наукова теорія.

Насамперед потреба в теорії виникла при будуванні різних споруд і привела до виділення й розвитку механіки, передусім учення про рівновагу (статики). У стародавньому Єгипті і Греції розроблялася теорія важеля, статика твердих тіл і гідростатика. Потреба у визначенні часу для землеробських робіт дала поштовх до розвитку астрономії. Книга грецького вченого Арістотеля „Фізика“ подає знання про природу, що були в той час (слово „фізика“ в старовину означало „природознавство“).

Наукові знання з перших моментів їх виникнення використовуються панівними класами в своїх інтересах; у далекій давнині наука була в руках служителів культу (жерців) і була нерозривно зв'язана ними з релігією.

Лише у торговельних містах, республіках стародавньої Греції науку було відокремлено від релігії і встановлено зв'язок її з філософією. Кращі представники грецької „натурфілософії“, тобто філософії природи, не зважаючи на надзвичайну недостатність фактичного матеріалу, прийшли до уявлення про атомну будову матерії (Левкіпп, Демокріт), поклавши тим початок матеріалістичному розумінню природи.

Розпад античного рабовласницького суспільства припинив розвиток науки. В епоху середніх віків пануюче християнське вчення проголосило принцип: філософія є служниця богословія. Фізика Арістотеля була пристосована і використана панівними класами феодального ладу для підтвердження і зміцнення авторитету священного писання. В цей час, головним чином у арабів, які створили велику державу і провадили жваву торгівлю з віддаленими країнами, зберігаються і набувають деякого розвитку елементи наук, сприйняті від греків, особливо з механіки, астрономії, математики, географії; саме у арабів хемія починає розвиватися як самостійна галузь знання. Значно пізніше фізика виділилася з природознавства як самостійна наука.

На основі розгортання европейської торгівлі і промисловості в епоху „Відродження“ (XV — XVI ст. ст.) починається швидке зростання й оформлення спершу механіки й астрономії, а в дальшому і наук, які складають основу промислової техніки,— фізики і хемії.

Роботи Коперніка, Бруно, Кеплера, Галілея і їх наслідувачів зробили науку могутнім знаряддям боротьби буржуазії з оплотом віджилого феодального ладу — релігією. Для бога не залишається місця у всесвіті, і за ним зберігається лише функція — дати „перший поштовх" машині всесвіту, після якого вона вже рухається цілком самостійно.

У боротьбі з авторитетом церкви й феодального ладу висувається науковий принцип: усяке справжнє знання базується на досвіді, а не на авторитеті того чи іншого вчення. До складу наукового досвіду входять: спостереження і експеримент; спостереження є вивчання явища, яке відбувається у природному оточенні, експеримент — відтворення явища у штучних умовах з метою виявити особливості даного явища залежно від створених умов. Ньютон, який відкрив закон всесвітнього тяжіння, що об'єднав механіку руху тіл на Землі (Галілей) і механіку руху небесних тіл (Кеплер), виголосив лозунг: „Фізика, бійся метафізики".

Проте, вже в XVI — XVII ст. ст. буржуазія досягла компромісу з рештками панівних класів феодального ладу. Відповідно, представники науки намагаються знайти компроміс з релігією. Ньютон поряд з геніальними науковими працями пише коментарії до священної книги — апокаліпсиса. Декарт у своїх філософських творах намагається довести буття бога.

Розвиток механіки наклав свій відбиток на наукову теорію цього часу.

Учені намагалися розглядати світ як механізм і всі явища пояснити зведенням їх до механічних переміщень. У цей „метафізичний період" природознавства широкого застосування набуло поняття „сила". При кожному нововідкритому явищі придумували силу, яку вважали причиною цього явища. Досі в фізиці збереглися сліди цього в позначеннях: жива сила, сила струму[1]), електрорушійна сила і т. ін.

Наукова теорія цього періоду, що розглядала світ як машину, яка незмінно рухається, заперечувала розвиток матерії, переходи руху з однієї форми в іншу; а тому, не зважаючи на успіхи у розширенні експериментального матеріалу, наука не подолала ідеалізм до кінця, і навіть вчені-матеріалісти залишалися на позиції механістичного світогляду.

Учення Канта і Лапласа про розвиток сонячної системи з туманності усунуло ідею про „перший поштовх".

Наука XIX ст. на основі колосального зростання продуктивних сил періоду розквіту промислового капіталізму по-велетенському розвивається.

Розгортаються основні розділи сучасної фізики. Потреба в потужному і регулярному двигуні для індустрії викликала винахід парової машини, а її поява наштовхнула вчених на вивчання теплових процесів; розвивається термодинаміка; в свою чергу на основі термодинаміки конструюються щораз більш потужні й економні типи двигунів (парові турбіни, двигуни внутрішнього згорання). Ми бачимо на цьому прикладі, як практика стимулює розвиток наукової теорії, а теорія надалі займає провідну роль щодо практики.

Другим прикладом складного взаємодіяння теорії і практики є розвиток теорії електрики і електротехніки. Уривчасті відомості про електричні явища були вже давно. Але тільки після того, як Франклін відкрив електричну природу блискавки і збудував громовідвід, а потім був відкритий гальванічний струм, що дав змогу збудувати електричний телеграф, фізика концентрує свою увагу на вивчанні електрики. Фарадей і Максвелл розробили теорію, яка лягла в основу сучасної електротехніки. Промисловість швидко використовує наукові відкриття і широким розвитком техніки відкриває небачені можливості для наукового експерименту.

---

[1]) Ми будемо вживати „величина струму".

Проте, величезні досягнення науки чим далі, тим щораз менше охоплюються єдиною науковою теорією. Ряд відкрить, починаючи з закону зберігання і перетворення енергії, далі, теорія електромагнітних хвиль, відкриття електрона і радіоактивності остаточно добили вчення про незмінність природи і покінчили з незмінним і неподільним атомом.

Механістичний матеріалізм зазнав краху.

Маркс і Енгельс створили філософію діалектичного матеріалізму, яка дає повну можливість охопити єдиною теорією всі сучасні наукові відкриття. Енгельс, розуміючи під рухом усяку зміну матерії, визначив механіку як вчення про рух тіл, які складаються з величезного числа частинок; фізику — як механіку молекул; хемію — як фізику атомів; усе природознавство являє собою вчення про різні форми руху матерії і його перетворення з однієї форми в іншу.

Буржуазія, зважаючи на свої класові інтереси, не може прийняти філософію пролетаріату — діалектичний матеріалізм. Учені XIX ст. у своїй науковій роботі не могли не виходити з переконання в реальності зовнішнього світу, який вони вивчають; тому в своїй роботі вони були стихійними матеріалістами, але в своєму світогляді вони відбивали погляди панівного класу і певною мірою віддавали належне ідеалізмові. Звідси виникли характерні для теоретиків XIX ст. ідеологічний розбрід, недовір'я до філософії, прагнення до голого емпіризму.

В епоху імперіалізму, наприкінці XIX і на початку XX ст. ст., ідеалізм набув витонченої форми — махізму (за ім'ям засновника цього вчення — Е. Маха), який твердить, що в своєму „досвіді" ми пізнаємо не властивості об'єктивної реальності, а лише свої власні відчування. Для махістів досвід є сукупністю наших відчувань, а наука — сукупністю закономірностей нашої свідомості, які упорядковують наші відчування. Матеріалісти, навпаки, поняття досвіду зв'язують з поняттям матерії, яка існує незалежно від наших відчувань, яка, діючи на наші органи чуттів, спричиняє відчуття.

Ще більш замаскованим ідеалізмом є агностицизм, який твердить, що ми пізнаємо явища, але не „річ у собі", яка є непізнавана. Слово „явище" в ідеалістів має інший зміст, ніж у матеріалістів. Матеріалісти розуміють під явищем ту або іншу зміну матерії, ідеалісти ж явищем називають те, що уявляється, „являється" людині, тобто знову таки тільки процеси наших відчувань.

У наслідок невідповідності між велетенським зростанням позитивних фактичних знань про природу і тими ідеалістичними висновками, що їх з цих знань намагаються зробити буржуазні вчені, сучасна фізика переживає глибоку кризу. В. І. Ленін у книзі „Матеріалізм і емпіріокритицизм" не тільки викрив махізм, яким у свій час захопились деякі марксисти, але й дав глибокий аналіз кризи фізики.

„Нова фізика звихнулася в ідеалізм, головним чином, саме тому, що фізики не знали діалектики... Заперечуючи незмінність відомих до того часу елементів і властивостей матерії, вони скочувались до заперечення матерії, тобто об'єктивної реальності фізичного світу... Обстоюючи приблизний, відносний характер наших знань, вони скочувались до заперечення незалежного від пізнання об'єкта, що його приблизно-вірно, відносно-правильно відбиває це пізнання" (Ленін, т. XIII, Партвидав ЦК КП(б)У, видання третє, стор. 191).

В СРСР для будівництва соціалізму використовується увесь нагромаджений буржуазією науковий фонд. Проте, використання це можливе лише при умові критичного перероблення, відкинення всіх ідеалістичних нашарувань і перекручень. На черзі стоїть не лише кількісне розгортання наукової роботи (за час радянської влади організовано десять великих науково-дослідних інститутів фізики, крім спеціальних науково-технічних інститутів, тоді як у дореволюційній Росії не було жодного), але і якісна перебудова змісту фізики на марксистсько-ленінській основі. Оскільки на радянських фізиків впливають як пережитки механістичного матеріалізму, так і ідеалістичні погляди буржуазних фізиків,— перебудова фізики відбувається в непримиренній боротьбі з ідеалізмом і з ухилами від діалектичного матеріалізму в бік механіцизму і меншовикуючого ідеалізму.

Увесь хід історичного розвитку науки, так само як і хід кожного окремого наукового дослідження і педагогічний процес опанування основ науки, відбувається за діалектичним законом, сформульованим В. І. Леніним у таких словах: „Від живого споглядання до абстрактного мислення і *від нього до практики* — такий є діалектичний шлях пізнання *істини*, пізнання об'єктивної реальності". Отже, наукове дослідження є єдністю теорії і практики при вирішальній ролі практики (експеримент) і провідній ролі теорії, відповідно до вказівки Маркса: „Філософи лише по-різному *пояснювали* світ, але справа полягає в тому, щоб *змінити* його".

Наслідок експерименту, при постановці якого дослідник уже керується певною гіпотезою, дає можливість перевірити гіпотезу, уточнити і розширити її до ступеня теорії, встановити фізичний закон, тобто встановити характер залежності між різними фізичними величинами.

Тепер важко провести межу між фізикою і науками, що до неї примикають, особливо хемією.

У фізиці вивчаються рухи тіл, складених з величезної кількості молекул, а також і більш тонкі форми руху матерії: рух молекул, атомів, електронів і променястої енергії (фотонів). Іноді розділ фізики, який має справу з тілами, що містять величезне число атомів або молекул, називають макрофізикою; розділ фізики, в якому вивчаються рухи окремих атомів і молекул, електронів і протонів, фотонів і нейтронів, називають мікрофізикою.

Хемія теж має справу з атомами і молекулами, але вивчає якісні особливості речовини, до яких приводять кількісні зміни в числі електронів у атомі, формі їх орбіт і т. ін. У пограничній області між фізикою і хемією розвинулося кілька дисциплін: фізична хемія, колоїдна хемія.

До фізики примикають науки, які вивчають конкретні стани матерії, що оточує нас на Землі (метеорологія, гідрологія, геофізика) і в небесних тілах (астрономія, особливо галузь її — астрофізика).

§ 2. Матерія і рух. Найпростішими знаряддями фізичного дослідження світу є наші органи чуття. Інструментальна фізика є додатковим знаряддям ока і вуха людини. Наші відчування суб'єктивні; ми сприймаємо звукові „тони", кольорові відтінки, запахи і т. ін. Дійсна відмінність, яка існує між звуками неоднакового „тону", полягає в неоднаковій частоті звукових коливань. Так само відмінності в кольорових відтінках у дійсності відповідає відмінність у частотах світлових коливань. Наші сприймання тепла і холоду породжені більшою або меншою інтенсивністю молекулярних рухів. Відчування звука, відчування світла, смакові, дотикові й нюхові відчування являють собою тільки відгуки нашого тіла і свідомості на фізичні явища, що їх породжують.

Насправді об'єктивно всім нашим сприйманням відповідає щось, суттю своєю відмінне від суб'єктивного змісту цих сприймань. Наприклад, те, що ми називаємо „звуком", об'єктивно являє собою ряд згущень і розріджень середовища, звичайно — повітря, що відбуваються одно за одним. Такі слова, як „світло", „колір", „теплота", „звук", „сила світла", „степінь нагріву" і т. ін., звичайно ми вживаємо в одному розумінні: ми вкладаємо в них фізіологічний зміст — зміст наших відчувань; але у фізиці ми ті самі слова вживаємо в зовсім іншому розумінні: у фізиці ми позначаємо цими словами ті процеси, які породжують наші відчування, абож такі явища, які були б здатні породити відповідне відчування, якби наші органи чуття були більш досконалими.

Наші відчування різнорідні. Явища, що їх породжують, надзвичайно різноманітні. Проте, в міру зростання наших знань ми помічаємо, що багато явищ мають важливі риси подібності. Ми переконуємось, що для правильного розуміння світу ми повинні виробити такі поняття, які широко узагальнюють результати експерименту і, головне, відбивають єдність природи якогонебудь виучуваного нами ряду явищ. У фізиці таких узагальнюючих понять багато; без них ми не могли б зробити й кроку в розплутуванні причинного зв'язку явищ.

Найзагальнішими і основними категоріями є матерія і рух. „Матерія — об'єктивна реальність, що існує незалежно від людської свідомості і відображається нею... Матерія є те, що, діючи на наші органи чуттів, спричиняє відчуття" (Ленін). Зрозуміло, що з допомогою наших відчувань ми пізнаємо матерію тільки в її окремих конкретних виявах; у нашій науковій і практичній діяльності ми маємо справу не з матерією „взагалі", а завжди з її конкретними виявами.

Атрибутом (невід'ємною властивістю) матерії є рух. *Рух являє собою форму існування матерії.* Коли ми говоримо про рух, то завжди уявляємо собі деяке переміщення чогось, наприклад, переміщення тіл, середовища, частинок. Треба, проте, мати на увазі, що тут ми говоримо про рух в якнайширшому розумінні слова. „Всякий рух зв'язаний з якимнебудь переміщенням — переміщенням небесних тіл, земних мас, молекул, атомів або частинок ефіру. Чим вища форма руху, тим дрібніше це переміщення. Воно аж ніяк не вичерпує природи відповідного руху, але воно невіддільне від нього" (Енгельс).

Рух у філософському розумінні — це всяка зміна матерії, всякий процес, що відбувається в природі: хемічна реакція, електромагнітне випромінювання, зростання дерева, мислення.

„Рух, що його розглядають в найзагальнішому розумінні слова, тобто розуміють як спосіб існування матерії, як внутрішньо властивий матерії <якість> атрибут, охоплює собою всі зміни і процеси, які відбуваються у всесвіті" (Енгельс)[1]).

Механіка вивчає найпростішу форму руху, а саме такий рух, суть якого вичерпується переміщенням тіл або частинок у просторі (механічний рух).

Фізичні відкриття XIX ст. дали можливість ніби „звести" цілий ряд явищ, які здавалися зовсім різнорідними, до механічного руху. Наприклад, тепловий стан тіла був нібито „зведений" до механічного руху його молекул. На цьому грунті виникло припущення, що всі взагалі явища природи, кінець-кінцем, являють собою тільки механічний рух; був висунутий лозунг — звести все природознавство до механіки. Такий погляд дістав назву механістичного світогляду.

Цей погляд помилковий. Суть вищих форм руху в дійсності не можна звести до механічного руху. Кожна форма руху має особливі риси, які становлять її своєрідність (її якість). Навіть тепловий рух, хоч він і складається з механічного руху молекул, не вичерпується ним; при тепловому русі переміщення молекул у середньому підпорядковані особливим законам статистики, які *не* випливають із законів механіки.

---

[1]) „Диалектика природы", Партиздат, 1932, стор. 130.

Закони механіки важливі для розуміння нижчих форм руху, але вони недостатні для розуміння вищих (складніших) форм. Уже в молекулярних рухах помічаються явища, які не можуть бути пояснені і передбачені з допомогою самих тільки Ньютонових законів. Саме ці явища, які не піддаються вичерпному поясненню, якщо виходити тільки з переміщень, виступають на перший план, коли ми вдаємося до вивчання внутрішньоатомних рухів, а також і тих рухів, які лежать в основі електричних і магнітних процесів. Більш того, розвиток фізики за останні роки показав, що навіть саме поняття механічного руху в застосуванні до внутрішньоатомних явищ втрачає свою звичну простоту і наочність. У таких високих формах руху, як біологічні процеси і мислення, переміщення безперечно відограють другорядну роль порівняно з іншими своєрідними сторонами цих рухів, які не можна звести до механічного руху. Природа складніша, ніж думають механісти.

§ 3. Вага і маса. Поняття про вагу тіл добре знайоме кожній людині з її повсякденного досвіду. Історично саме це поняття про вагу послужило основою для вироблення інших загальніших і, як пізніше виявилося, важливіших понять.

Відомо[1]), що існує два способи „зважування" тіл: з допомогою пружинних терезів і з допомогою важільних терезів. Ці способи глибоко відмінні. Дійсно, якщо скористатися пружинними терезами й зіставити наслідки точного зважування того самого тіла, проведеного на різних висотах над поверхнею Землі, то можна помітити, що вага всякого тіла зменшується при піднятті над поверхнею Землі. Це зменшення ваги невелике, але важливо те, що воно є однаковим для всіх тіл, а саме, при піднятті на кожний кілометр спричинюваний вагою розтяг пружини стає менший приблизно на 0,0003 своєї величини; отже, настільки ж зменшується вага тіла. Далі, користуючись пружинними терезами, можна виявити, що вага тіла змінюється залежно від географічної широти місцевості: в міру наближення до екватора вага тіл зменшується. Всяке тіло, перенесене з полюса на екватор, втрачає приблизно 0,005 своєї ваги. Зрозуміло, що, користуючись важільними терезами, не можна виявити зазначених змін ваги: два будьяких тіла, що покладені на шальки важільних терезів і зрівноважують одне одного при точному[2]) зважуванні в будьякій місцевості, будуть завжди зрівноважувати одне одного в якій завгодно іншій місцевості і на якій завгодно висоті над рівнем моря. Рівновага між ними буде забезпечена тому, що, перенесені в іншу місцевість або на іншу висоту над рівнем моря, ці два тіла, що мали однакову вагу, завжди зазнають однакової зміни у вазі.

Отже, терези пружинні являють собою прилад, принципіально більш придатний для визначення справжньої ваги тіл, ніж терези важільні. Проте, саме важільні терези, а не пружинні, відограли видатну роль в історії фізики. Винайдення і вдосконалення важільних терезів підказало той шлях, по якому, починаючи з Ньютона, пішов розвиток теоретичної механіки. Користування важільними терезами привело до відкриття найважливішої невід'ємної властивості всіх тіл — маси.

Під масою розуміють особливу величину, відмінну від ваги; вимірюють масу з допомогою зрівноваження порівнюваних тіл на важільних терезах; про тіла, які зрівноважують одне одного на важільних терезах, говорять, що вони мають рівні маси. Важливо, що під масою розуміють при цьому величину, яка, на відміну від ваги, залишається незмінною при переміщенні тіла в будьяку іншу місцевість, що має іншу географічну широту або іншу висоту над рівнем моря.

---

[1]) „Фізика" Ф. І П., ч. І, § 23.

[2]) Щоб не зважати на вплив середовища (повітря) на наслідки зважування, можемо уявити собі, що терези поміщено в скляний ящик, з якого повітря видалене.

Вага являє собою силу, з якою тіло тисне на опору в наслідок тяжіння (притягання) до Землі. Залежність ваги від географічної широти місцевості викликана почасти деякою сплющеністю Землі, але головним чином добовим обертанням Землі; беручи участь у добовому обертанні, тіло чинить на опору менший тиск, ніж той, який мав би місце, якби Земля була нерухома (§ 25). Зменшення ваги з висотою підняття над поверхнею Землі відбувається відповідно до встановленого Ньютоном закону тяжіння [1]. За законом тяжіння всяка частинка якого завгодно тіла притягується до центра Землі з силою, обернено пропорціональною квадратові віддалі цієї частинки від центра Землі. Складаючись, усі ці сили, прикладені до різних частинок тіла, дають результуючу силу, яка і зумовлює собою вагу тіла. Точку прикладання цієї сили називають центром ваги. В наслідок великого розміру радіуса Землі ($R \approx 6400$ *км*) при малих висотах підйому вага тіл змінюється дуже мало. Але коли б ми мали змогу віддалити будьяке тіло на яку завгодно велику віддаль від Землі, то вага цього тіла, поступово зменшуючись, зробилася б при нескінченному віддаленні рівною нулеві. Маса ж тіла залишилася б при цьому незмінною.

Якби була змога перенести будьяке тіло з поверхні Землі на поверхню Місяця, то це тіло зазнало б не тільки кількісної, але навіть якісної зміни ваги, а саме: воно тепер тяжило б головне до центра Місяця, подібно до того як раніше воно тяжило до центра Землі. Користуючись законом тяжіння, можна підрахувати, що на Місяці „вага“ дорослої людини (сила притягання до центра Місяця) становила б приблизно 12 *кг*. Протилежно до цієї змінності ваги маса в усякому місці світового простору зберегла б ту саму величину.

§ 4. Абсолютна і технічна системи мір [2]. Для вимірювання мас і сил часто користуються одиницями, які мають однакову назву; наприклад, кілограмом (маса в 1 *кг* і сила в 1 *кг*).

Кілограм — це маса 1 літра (*л*) води при 4° С.

Коли слово „кілограм“ уживають для позначення одиниці сили, то розуміють *силу, з якою маса в 1 кг в наслідок тяжіння до Землі тисне на опору, будучи поміщена на висоті рівня моря і на широті 45°.*

Користування тим самим терміном для позначення двох різних одиниць — одиниці маси і одиниці сили — приводить до великої плутанини. Щоб забезпечити себе від помилок, які легко можна зробити в наслідок двоїстого значення терміна „кілограм“ (а також і „грам“), необхідно розібратися в обставинах, які можуть викликати плутанину у викладках. Для цього пригадаємо деякі відомості, знайомі з шкільного курсу фізики.

Згідно з другим Ньютоновим законом механіки (фізична суть цього закону буде докладно пояснена в § 17), прискорення j, що його набуває маса m під діянням сили F, пропорціональне величині сили і обернено пропорціональне величині маси [3]:

$$j = C\frac{F}{m}; \tag{1}$$

тут C — коефіцієнт пропорціональності, що залежить від добору одиниць виміру для j, F і m.

---

[1]) Повторити „Курс фізики“ Ф. і П., ч. I, § 48—52.

[2]) Десяткова метрична система була вперше введена у Франції в 1795 р. Через 80 років постановою Міжнародної конвенції мір і ваги (20 травня 1875 р.) вона дістала міжнародного визнання і в дальші роки була узаконена в більшості країн. Як основні одиниці прийнято старанно виготовлені прототипи метра і кілограма, які зберігаються в Міжнародному бюрі мір і ваги, у Севрі (Франція). За означенням: метр є віддаль при 0° С між осями двох позначок, нанесених на згаданому прототипі; кілограм являє собою масу згаданого прототипу, а літр є об'єм одного кілограма чистої води при температурі її найбільшої густини під тиском однієї атмосфери. Пізніші виміри показали, що 1 літр на 0,027 *см*³ перевищує об'єм 1000 *см*³.

[3]) Повторити „Курс фізики“ Ф. і П., ч. I, § 30.

Завжди беруть такі одиниці, щоб не було потреби писати цей коефіціент пропорціональності, тобто щоб $C = 1$.

У фізиці вимірюють довжини в сантиметрах (*см*), час — у секундах (*сек*) і маси — в грамах (*г*).

Цю систему одиниць називають абсолютною системою одиниць або системою *CGS*[1]). Термін „абсолютна" невдалий, бо умовилися таку систему одиниць встановити, при чому обрані одиниці зовсім не являють будьяких величин, добір яких був би підказаний їх особливою фізичною роллю. У зазначеній системі *CGS* одиницею швидкості служить 1 *см/сек*; одиницею прискорення служить 1 *см/сек*^{2}. Поклавши у формулі (1) $C = 1$, бачимо, що в системі *CGS* одиницею сили повинна служити така сила, під діянням якої маса в 1 *г* набуває прискорення 1 *см/сек*^{2}. Цій силі дано назву — дина.

Дослідом встановлено, що *в пустоті всі тіла падають з тим самим прискоренням* $g \approx 980$ *см/сек*^{2}. На висоті рівня моря і на широті 45° це прискорення, спричинюване силою тяжіння, дорівнює $g = 980{,}665$ *см/сек*^{2}.

Маса 1 *г* під діянням сили в 1 дину набуває прискорення тільки 1 *см/сек*^{2}. Очевидно, що сила тяжіння, прикладена до кожного грама маси, у стільки разів більша однієї дини, у скільки разів прискорення g, спричинюване силою тяжіння, більше 1 *см/сек*^{2}. Отже, вага 1 *г* маси на висоті рівня моря і на широті 45° дорівнює 980,665 дини. Там же вага 1 *кг* дорівнює 980 655 динам, тобто майже мільйонові дин (мегадина = $= 10^6$ дин).

Силу, яка дорівнює вазі 1 *кг* маси на висоті рівня моря і на широті 45°, позначають: 1 *кг-с* абож, частіше, 1 *кг**. Ми бачимо, що 1 *кг** = = 980 655 динам.

У техніці часто вимірюють: довжини — в метрах, час — у секундах, а за одиницю сили беруть — 1 *кг** (кілограм-силу). Це так звана технічна система мір або, як її коротко позначають, *MKgS*[2]). В ній одиницею швидкості є 1 *м/сек*, одиницею прискорення 1 *м/сек*^{2}.

Щоб у формулі (1), яка є основною формулою механіки, коефіцієнт пропорціональності C дорівнював одиниці, очевидно, необхідно, застосовуючи технічну систему мір, вважати одиницею маси таку масу, яка під діянням сили в 1 *кг* набуває прискорення 1 *м/сек*^{2}.

Під діянням сили тяжіння маса в 1 *кг* набуває, як уже було зазначено, прискорення 9,8 *м/сек*^{2}. Уявимо, що на ідеально гладкій горизонтальній поверхні лежить тіло, яке має масу 1 *кг*. Якщо на це тіло будемо діяти в горизонтальному напрямі (наприклад, штовхати його) з силою в 1 *кг**, тобто з силою, що дорівнює вазі тіла, то це тіло буде ковзатися по горизонтальній поверхні з таким же чисельно прискоренням, яке воно мало б, падаючи під діянням сили тяжіння, тобто з прискоренням 9,8 *м/сек*^{2}. Щоб під діянням сили в 1 *кг** тіло набувало прискорення, що дорівнює тільки 1 *м/сек*^{2}, тіло повинне бути масивнішим. Нехай тіло, що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, має масу 9,8 *кг*; під діянням штовхаючої його сили в 1 *кг** воно буде ковзатися з прискоренням якраз рівним 1 *м/сек*^{2}. Ми бачимо, отже, що *в технічній системі одиницею маси повинна служити маса, що дорівнює* 9,8 *кг*. Іноді цю одиницю маси скорочено називають „техмас".

Щоб легше запам'ятати все сказане і щоб вільно орієнтуватися у доборі мір, слід постійно мати на увазі зв'язок, що існує між вагою і масою. Нехай m означає масу будьякого тіла, а P — його вагу в місцевості, де прискорення сили тяжіння є g. За другим законом механіки (форм. 1):

$$P = mg. \tag{2}$$

[1]) „Система сантиметр - грам - секунда".

[2]) „Система метр - кілограм - сила - секунда".

Для користування абсолютною системою мір важливе таке співвідношення:

$$\text{вага } P, \text{ виражена в динах}, = g \text{ в } \textit{см/сек}^2 \cdot m \text{ в } \textit{г}. \tag{3}$$

Для користування технічною системою мір важливе співвідношення:

$$\text{маса } m, \text{ виражена в технічних одиницях маси}, = \frac{P \text{ в } \textit{кг}^*}{g \text{ в } \textit{м/сек}^2}. \tag{4}$$

Пригадаємо (з початкового курсу фізики [1]), що робота П, витрачувана проти ваги P при підніманні тіла на висоту h, тобто потенціальна енергія тяжіння, при не дуже великих висотах підняття (коли вагу P можна вважати незмінною) дорівнює добуткові ваги тіла на висоту підйому:

$$\Pi = P \cdot h. \tag{5}$$

Пригадаємо далі, що кінетична енергія K дорівнює половині добутку маси на квадрат швидкості:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \tag{6}$$

Застосовуючи абсолютну систему мір, ми повинні виражати енергію в е р г а х; ерг — це робота, виконувана силою в 1 дину на шляху 1 *см*. Отже, користуючись формулою для потенціальної енергії (форм. 5) і застосовуючи абсолютну систему мір, ми повинні вагу тіла P виражати в динах (за форм. 3). Наприклад, потенціальна енергія тіла, що важить 1 *кг**, на кожний метр підйому становить $0{,}98 \cdot 10^6 \times 100 = 9{,}8 \cdot 10^7$ *ергів* $= 9{,}8$ *джоуля* [2]). У технічній системі мір та сама величина виражається просто 1 кілограмметром:

$$1 \text{ кілограмметр} = 9{,}8 \text{ джоуля}.$$

Користування абсолютною системою мір має ту незручність, що доводиться сили, які за умовою задачі часто бувають задані в кілограмах, виражати обов'язково в динах. Користування технічною системою мір зв'язане з іншою незручністю: доводиться масу виражати в технічних одиницях маси. Підрахуємо, наприклад, чому дорівнює в ергах і в кілограмметрах кінетична енергія маси в 2 *кг*, що рухається з швидкістю 1 *м/сек*. В абсолютних одиницях маємо $\frac{2000 \cdot 100^2}{2} = 10^7$ ергів $= 1$ джоулеві. В технічних одиницях: $\frac{2 \cdot 1^2}{9{,}8 \cdot 2} = \frac{1}{9{,}8}$ кілограмметра.

Якщо маємо намір робити розрахунок в а б с о л ю т н і й системі мір, то формулу для потенціальної енергії тяжіння і формулу для кінетичної енергії слід записувати так:

$$\Pi = mg \cdot h; \quad K = \frac{mv^2}{2};$$

вважаємо, що маса m виражена в *г*, g в *см/сек*^{2}, h в *см*, v в *см/сек*; величини П і K дістаємо вираженими в е р г а х.

Якщо ж маємо намір робити розрахунок у т е х н і ч н і й системі мір, то формули для потенціальної і кінетичної енергії пишемо, не користуючись символом маси:

$$\Pi = P \cdot h; \quad K = \frac{Pv^2}{2g};$$

---

[1]) Повторити „Курс фізики" Ф. і П., ч. І, § 73, 74.

[2]) 1 джоуль за означенням дорівнює 10 мільйонам ергів.

вважаємо, що вага P виражена в *кг**, h у *м*, g в *м/сек*^{2} і v в *м/сек*; величини П і K дістаємо вираженими в кілограмметрах.

§ 5. Система *MTS*. Для техніки грам і сантиметр є надто малими одиницями вимірів. Застосування ж технічної системи мір, як було показано в попередньому параграфі, зв'язане з незручною двоїстістю терміна „кілограм" (кілограм-сила, кілограм-маса). Це примусило запровадити нову систему одиниць, побудовану аналогічно абсолютній системі, але з більшими одиницями довжини і маси; як одиницю довжини вирішено було взяти метр, а як одиницю маси — тонну (1000 *кг* $= 10^6$ *г*). Система *MTS* (метр-тонна-секунда) запроваджена в СРСР у 1927 р. постановою президії ВРНГ (на 7 років раніше вона була запроваджена у Франції).

У системі *MTS*, так само як і в старій технічній системі, одиницею швидкості служить 1 *м/сек* і одиницею прискорення 1 *м/сек*^{2}. Одиницею сили служить стен — сила, яка надає одній тонні маси прискорення в 1 *м/сек*^{2}. Скориставшись формулою (1) і беручи до уваги, що 1 *т* $= 10^6$ *г*, а 1 *м/сек* $= 100$ *см/сек*, знаходимо, що:

$$1 \text{ стен} = 10^8 \text{ дин.}$$

Одиницею енергії в системі *MTS* служить робота 1 стена на шляху в 1 *м*; беручи до уваги, що 1 стен дорівнює 100 мільйонам дин, легко зміркувати, що робота 1 стена на шляху в 1 *м* дорівнює 10^{10} ергів $= 1000$ джоулів; отже, одиницею енергії в системі *MTS* є кілоджоуль.

Таким чином, при користуванні системою *MTS* в усіх формулах механіки, наприклад, у формулах

$$\Pi = mg \cdot h; \;\; K = \frac{mv^2}{2},$$

маса m повинна бути виражена в тоннах (скорочене позначення „*т*"), g в *м/сек*^{2}, h в *м* і v в *м/сек*; тоді сили, наприклад, вага $P = mg$, дістають вираженими в стенах, а роботу і енергію, приміром П і K, дістають вираженими в кілоджоулях.

§ 6. Закон тяжіння. Механіка як математично струнка наука була створена Ньютоном. До Ньютона твори з механіки, іноді досить великі, являли собою виклад різних більш або менш вдалих способів розв'язання окремих задач, що стосувалися переважно розрахунку механізмів. Єдиного фізично обгрунтованого методу в механіці не існувало, і тому розв'язання нових задач вимагало великої обдарованості і винахідливості; багато важливих задач взагалі не можна було розв'язати. У доньютонівських працях з механіки можна зустріти докладний, але позбавлений внутрішньої єдності виклад питань статики — вчення про рівновагу тіл — і питань кінематики — чисто геометричного вчення про рух без аналізу причин (сил), які спричиняють рух. Динаміка — вчення про рух тіл з аналізом діючих на тіла сил — перебувала в зародковому стані, не зважаючи на те, що після проведених Галілеєм спостережень можна було передбачити, що динаміка стане основою всієї механіки і буде домінувати над статикою.

У 1687 році Ньютон видав свій безсмертний твір „Philosophiae Naturalis Principa Mathematica" („Математичні начала натуральної філософії", або, за сучасною термінологією, — математичні основи фізики). Усі три частини цього твору присвячені викладові розробленої Ньютоном динаміки.

Суть головних встановлених Ньютоном законів у загальних рисах відома з початкового курсу фізики. Докладніше зміст цих законів буде пояснено нижче, в дальших параграфах. Але, перш ніж перейти до викладу цих законів, ми повинні вияснити, *що* дало Ньютонові ключ до будови динаміки.

Ньютон дістав можливість побудувати динаміку на підставі правильного розуміння „маси", яку він розглядав як міру інертності і разом з тим як джерело й об'єкт тяжіння. Він відкрив такий закон:

Між усякими двома матеріальними частинками діє сила взаємного тяжіння, прямо пропорціональна масам обох частинок (інакше кажучи, пропорціональна добуткові цих мас) *і обернено пропорціональна квадратові віддалі між центрами цих частинок.* Наприклад, якщо m і m' будуть маси двох частинок, що перебувають на віддалі r одна від одної, то сила їх взаємного тяжіння F виражається формулою:

$$F = G\frac{mm'}{r^2}, \tag{7}$$

де G є стала величина, що залежить за числовим значенням від добору одиниць, у яких виражаються величини, що входять у формулу. Величина G має назву гравітаційної[1]) сталої. Якщо маси m і m' виміряні в грамах, а віддаль r — у сантиметрах, то

$$G = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$$

(1 *г* маси притягує 1 *г* маси на віддалі 1 *см* з силою $6{,}66 \cdot 10^{-8}$ дин). Гравітаційна стала G була визначена дослідним шляхом; як саме — про це буде сказано в наступному параграфі.

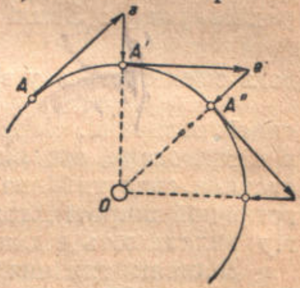

Рис. 1.

Кожна частинка каменя, що лежить на поверхні Землі, притягується всіма частинками земної кулі. Рівнодійна усіх цих сил тяжіння зумовлює вагу каменя відносно Землі. Так само кожна частинка Місяця притягується кожною частинкою Землі; рівнодійна цих сил являє собою силу тяжіння Місяця і Землі. Саме ця сила і утримує Місяць коло Землі; якби ця сила раптом зникла, то Місяць відійшов би від Землі, рухаючись по прямій, дотичній до її орбіти.

Рух Місяця навколо Землі можна розглядати як результат додавання двох незалежних рухів: 1) руху по інерції, спрямованого по прямій Aa, дотичній до орбіти Місяця (рис. 1); 2) „падання" Місяця до Землі, спричинюваного діянням тяжіння; за той проміжок часу, протягом якого Місяць, рухаючись по інерції, повинен був би переміститися з точки A в точку a, він в наслідок „падання" до Землі наближається до Землі саме на ту віддаль aA', на яку він міг би за цей час відійти від Землі. В результаті Місяць проходить шлях AA', а в наступний проміжок часу — шлях $A'A''$ і т. д., тобто рухається (приблизно) по колу навколо Землі.

Аналогічно сила гравітаційного взаємодіяння між Землею і Сонцем затримує Землю на її орбіті під час руху Землі навколо Сонця. Те саме справедливе й для всіх інших планет і їх супутників. Гравітаційне взаємодіяння між зорями (між окремими системами небесних тіл, подібними до нашої сонячної системи) в наслідок величезної віддаленості зір одна від однієї не таке велике, щоб воно могло виявити помітний вплив на рух зір.

Сила тяжіння між двома будьякими тілами є результуюча сил притягання між усіма попарно взятими частинками, з яких складаються ці тіла. Обчислення цієї результуючої сили іноді являє значні труднощі. У математичній фізиці розроблено способи швидкого розв'язування подібних задач (ці способи базуються на дуже важливій для математичної

---

[1]) Від латинського gravito — тяжу.

фізики „теорії потенціала“ і на застосуванні інтегрального числення). В деяких простих випадках результуюча сила тяжіння може бути визначена легко. Наприклад, виявляється, що дві кулі (якщо в кожній з них речовина розподілена рівномірно) притягують одна одну так, ніби вся їх маса була зосереджена в їх центрах. Отже, в цьому разі для обчислення результуючої сили можна прямо використати формулу (7), розуміючи в ній під m і m' уже не масу окремих частинок, з яких складається речовина куль, а всю масу куль, і вважаючи, що r означає віддаль між центрами куль.

Це спрощення розрахунку не приводить до помилки також і в тому разі, коли речовина кулі (або навіть обох куль) розподілена всередині кулі з густиною, неоднаковою для різних віддалей від центра кулі, так, що куля складається з ряду концентричних шарів різної густини; важливо тільки, щоб у кожному такому концентричному шарі речовина була розподілена рівномірно. Цій вимозі приблизно задовольняє, очевидно, внутрішня будова Землі, Місяця, Сонця, планет. Тому силу тяжіння між небесними тілами можна обчислювати, прямо застосовуючи формулу (7).

Вага тіла зумовлена результуючою всіх сил притягання між кожною частинкою тіла і Землею. А тому вага всякого тіла повинна бути пропорціональна масі цього тіла, як це і є в дійсності. Згідно з законом тяжіння вага тіла зменшується в міру віддалення від земної поверхні. Середній радіус Землі дорівнює 6371 *км*; тому при підніманні на 1 *км* вага зменшується у відношенні $\left(\frac{6371}{6371+1}\right)^2 = 1 - \frac{2}{6371}$, тобто на 0,00032 своєї величини. Через те що земна кора щодо густини неоднорідна, то в місцевостях, під якими у глибині земної кори лежать породи більшої густини, сила тяжіння трохи більша, ніж у місцевостях (при тій самій географічній широті), ложе яких становлять породи меншої густини. Масиви гір викликають відхилення виска в сторону гір.

Діянням тяжіння і обертанням Землі навколо осі пояснюється явище припливів. Вода океанів, підлягаючи діянню тяжіння Місяця і Сонця, збирається двома опуклостями на протилежних частинах земної кулі. В наслідок добового обертання Землі кожна з цих опуклостей величезною хвилею оббігає всю земну кулю протягом доби.

§ 7. Дослідне визначення гравітаційної сталої. Щоб використати закон тяжіння для обчислень, треба знати величину гравітаційної сталої G, що як коефіцієнт пропорціональності входить у формулу (7). Для цього, очевидно, необхідно хоча б один раз точно виміряти силу тяжіння між двома будьякими відомими масами m і m', наприклад, між двома кулями, віддаленими одна від однієї на точно виміряну віддаль r; після того як такий вимір зроблено, величину гравітаційної сталої G легко обчислити за формулою (7), підставивши в неї визначені дослідним шляхом значення m, m', r і F.

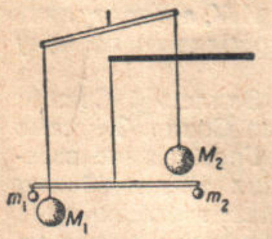

Рис. 2. Крутильні терези Кевендіша для визначення гравітаційної сталої.

Гравітаційна стала вперше була визначена в 1798 р. Кевендішем. Кевендіш виміряв силу тяжіння між свинцевими кулями з допомогою прилада, що має назву крутильних терезів; схематично головна частина цього прилада показана на рис. 2. В ящику, встановленому на міцному фундаменті і захищеному від коливань температури, до приробленої в кришці осі, яку можна було обертати, був прикріплений горизонтальний стрижень; до кінців цього стрижня були підвішені дві масивних свинцевих кулі M_1 і M_2. На кінцях другого стрижня були підвішені ще дві невеликі свинцеві кулі m_1 і m_2. Повертаючи вісь стрижня з важкими кулями, можна було спостерігати, що при наближенні важких куль до легких стрижень з легкими кулями повертався на якийсь кут назустріч важким кулям. Вимірявши перед цим опір, який чинила закручуванню нитка, на яку підвішено стрижень з легкими кулями, Кевендіш за кутом закручування нитки мав змогу обчислити сумарну силу тяжіння $2F$ між кулями M_1 і m_1 і між кулями M_2 і m_2. Точне визначення віддалі між центрами куль не становило труднощів. Обчислене Кевендішем значення гравітаційної сталої тільки на 1% відрізнялося від того, яке було здобуте на підставі дальших дослідів.

У 1898 році Ріхарц, за ідеєю Жоллі, застосував другий спосіб для обчислення гравітаційної сталої. Схема дослідів Ріхарца показана на рис. 3. До кінців коромисла терезів підвішено дві кулі A і B, які мають (якщо брати до уваги також і нитки, на яких вони підвішені) рівні маси. Ці кулі повинні були б зрівноважувати одна одну, але одна з них A перебуває над свинцевою плитою в 100 *т*, яка своїм притяганням збільшує вагу цієї кулі, а друга куля B перебуває під свинцевою плитою, яка своїм притяганням на ту саму величину зменшує вагу цієї кулі; через те коромисло терезів відхиляється — куля A переважує. З величини відхилення коромисла терезів можна судити про силу тяжіння між кулями і свинцевою плитою. Цей спосіб визначення гравітаційної сталої вважається найточнішим.

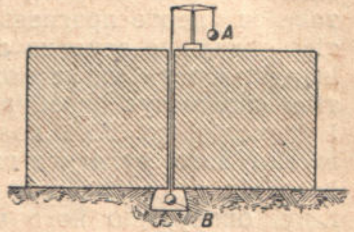

Рис. 3. Схема дослідів Ріхарца по визначенню гравітаційної сталої.

Знайдено, що (при одиницях CGS): $G = 6{,}66 \cdot 10^{-8}$.

§ 8. Перший Ньютонів закон механіки (закон інерції). Закон інерції був встановлений Галілеєм на початку XVII ст.; пізніше Декарт дав цьому законові більш загальне формулювання; Ньютон прийняв його як перший закон механіки, виразивши такими словами:

усяке тіло продовжує залишатися в своєму стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки і оскільки прикладені сили не змушують його змінювати цей стан.

Само собою зрозуміло, що тіло, яке перебуває в спокої, буде залишатися в спокої, доки воно не виведене з цього стану діянням якихнебудь сил. Так само зрозуміло, що коли на тіло, яке рухається прямолінійно, не діють ніякі сили, то нема причин, які могли б змусити тіло відхилитися від прямолінійного шляху (тут можна було б послатися на міркування симетрії: при відсутності сил відхилення тіла від прямолінійного шляху в яку завгодно наперед указану сторону не більш можливе, ніж відхилення в сторону прямо протилежну; а тому нема підстав, щоб відхилення сталося). Менш очевидним на перший погляд є твердження, що при відсутності сил швидкість тіла буде залишатися незмінною; у щоденному досвіді спостерігаємо якраз протилежне. Всяке тіло, яке рухається, коли його рух не підтримувати діянням сили, рано чи пізно спиняється, але, з другого боку, той самий щоденний досвід вказує нам, що зупинка відбувається тим швидше, чим більші існуючі опори рухові. Ми зовсім правильно звикли розглядати сили опору як причину сповільнення руху, а тому, якщо ми уявимо, що деяке тіло рухається, не зазнаючи ніяких опорів своєму рухові, то природно чекати, що в цих умовах швидкість тіла буде залишатися незмінною.

На підставі зазначеного іноді розглядають закон інерції як істину апріорну (тобто як істину, яка встановлена умоглядно і не потребує обґрунтовання з допомогою досліду). Це, проте, неправильно. Всі три Ньютонові закони механіки (закон інерції і два інших закони, які ми розглянемо в дальших параграфах) являють собою істини, здобуті дослідним шляхом. У цьому — їх значення. Що закон інерції дійсно взято з досліду, а не здобуто суто умоглядним шляхом, у цьому найлегше переконатися, глибше з'ясувавши суть закону інерції і зіставивши його (це буде зроблено нижче) з тими уявленнями, які існували раніше з приводу законів руху електричних зарядів.

Ідучи за Ньютоном, під „інерцією" належить розуміти не просто факт спокою або факт рівномірного руху при відсутності сил, але деяке, властиве всякій масі, вперте прагнення зберегти стан спокою і таке ж уперте прагнення зберегти рівномірний прямолінійний рух. Поки тіло залишене само на себе, поки на нього не діють ніякі сили, упертість інерції, зрозуміло, не може виявитися ні в чому іншому, як у тому, що тіло продовжує перебувати в спокої або продовжує рухатися рівномірно і прямолінійно. Але коли ми виводимо тіло з стану спокою або змушуємо його рухатися швидше, або загальмовуємо його, або відхиляємо його від прямолінійного шляху, то упертість інерції виявляється у вигляді опору, що його чинить тіло, скерованого проти прикладених до тіла сил.

Щоб відтінити цю думку, яку ми тут через відсутність більш відповідних слів намагалися виразити словами „упертість інерції", Ньютон говорить, що всякому тілу властива пропорціональна масі цього тіла „природжена сила опору" або,— це те саме,— *сила інерції.* Ньютон тут же додає: „Ця сила інерції виявляється тілом тільки тоді, коли друга сила, до нього прикладена, робить зміну в його стані руху. Виявлення цієї сили інерції може бути розглядане подвійно: і як власне опір, і як напір. Як власне опір, оскільки тіло чинить опір діючій на нього силі, намагаючись зберегти свій стан руху; як напір, оскільки те саме тіло, з труднощами піддаючись силі перешкоди, яка чинить йому опір, намагається змінити стан цієї перешкоди".

Коли будьяке тіло в наслідок будьяких причин починає рухатися швидше або повільніше, то це тіло розвиває (виявляє) силу інерції, але прикладена ця сила інерції до інших тіл і саме до тих, які змінюють стан руху першого тіла. Наприклад, коли ми кидаємо камінь, то сила інерції, яку розвиває камінь, прикладена до нашої руки: камінь тисне на руку. Коли, стоячи на гнучкій дошці, ми підстрибуємо, то сила інерції, яку ми розвиваємо, прогинає дошку.

Чи можна сказати, що це уявлення про інерцію, яке і становить суть першого закону механіки, є продуктом суто умоглядної творчості, а не узагальненням спостережуваних фактів? Звичайно, ні! Ми могли б уявити, що якенебудь тіло позбавлене інерції, що діяння прикладеної до нього сили викликає і підтримує його рух, а коли діяння прикладеної сили припиняється, то тіло раптово спиняється. Саме цей погляд, відповідно до електричних зарядів, розвинув Ампер у своїх класичних працях з електродинаміки; Ампер виходив з принципу, що електрика позбавлена інерції. Згодом було виявлено, що цей принцип не відповідає дійсності; елементарні електричні заряди — електрони — мають масу і їм властива інертність. Навіть хвилі (точніше —„кванти") світла мають інертну масу. На сучасному ступені розвитку фізики ми не знаємо жодного вияву матерії, який був би позбавлений інерції.

§ 9. Критика понять „спокій" і „рівномірність" (про простір і час). У першому законі механіки говориться про „спокій" і про „рівномірність" руху. Який сенс мають ці слова? Про спокій відносно чого тут іде мова? Ні Земля, ні Сонце, ні навіть так звані „нерухомі" зорі не перебувають у спокої: всі небесні тіла рухаються.

Чи існує хоч одно тіло, яке перебувало б у цілковитому (абсолютному) спокої? Такого тіла ми не знаємо. Нехай хтонебудь висловить припущення, що якесь тіло перебуває в абсолютному спокої; як вирішити: чи правильне це припущення чи неправдиве? Наприклад, одна людина почне запевняти, що така ось зоря перебуває в цілковитому спокої, тоді як уся решта зір рухається, друга ж людина буде запевняти, що перебуває в спокої якась інша зоря, а рухається вказана першою людиною; якщо на підставі спостереження ми встановили, що зорі, вказані першою і другою людиною, наближаються одна до одні́еї, то як вирішити, хто з них має рацію?

Щоб судити, чи рухається будьяке тіло цілком рівномірно (з швидкістю, що абсолютно не змінюється), треба спостерігати рух цього тіла, маючи годинник, про який наперед було б відомо, що його хід правильний. Але що означає: „наперед відомо"? Нам ніщо не може бути відомо „наперед". Ми все пізнаємо з допомогою досвіду. Якщо хтонебудь скаже, що такий ось годинник показує час абсолютно правильно, то як вирішити, справедливе це твердження чи неправдиве?

Перед формулюванням основних законів механіки Ньютон дає такі означення.

„Абсолютний простір самою своєю суттю, незалежно до чого б там не було зовнішнього, залишається завжди однаковим і нерухомим. Відносний простір є players-небудь обмежена рухома частина абсолютного простору, що його вважають звичайно за простір нерухомий... Наприклад, якщо розглядати Землю рухомою, то простір атмосферного повітря, який відносно Землі залишається завжди тим самим, буде становити то одну частину простору абсолютного, то другу...

Місце є частина простору, що її займає тіло... Абсолютний рух є переміщення тіла з одного абсолютного його місця в інше; відносний рух є переміщення тіла з одного відносного його місця в інше, теж відносне.

Наприклад, на кораблі, який іде під парусами, відносне місце тіла є та частина корабля, в якій тіло перебуває, — наприклад, та частина трюму, що заповнена тілом і що, отже, рухається разом з кораблем. Відносний спокій є перебування тіла в тій же самій частині корабля або в тій же частині його трюму. Справжній спокій є перебування тіла в тій же самій частині того нерухомого простору, в якому рухається корабель з усім, що в ньому є. Отже, якби Земля насправді була в спокої, то тіло, яке відносно корабля перебуває в спокої, рухалося б справді з тією абсолютною швидкістю, з якою корабель іде відносно Землі. Якщо ж і сама Земля рухається, то справжній абсолютний рух тіла знайдеться із справжнього руху Землі в нерухомому просторі і з відносних рухів корабля відносно Землі і тіла відносно корабля...

Абсолютний, справжній, математичний час сам по собі і самою своєю суттю, не стосуючись будьчого зовнішнього, протікає рівномірно і інакше називається тривалістю... Абсолютний час відрізняється в астрономії від звичайного сонячного часу рівнянням часу, бо природні сонячні доби, які вважають звичайно за рівні для виміру часу, справді між собою нерівні; ця нерівність і виправляється астрономами, щоб при вимірюваннях рухів небесних світил застосовувати більш правильний час. Можливо, що не існує в природі такого рівномірного руху, яким час міг би вимірюватися з абсолютною точністю..."

Ми бачимо, що ці Ньютонові означення по суті не усувають зазначених вище труднощів.

З наведених означень Ньютона випливає: 1) що простір і час мають об'єктивну реальність; це правильно; 2) що простір і час не зв'язані органічно з матерією і незалежні один від одного; це неправильно. Такий підхід до понять про простір і час метафізичний, позбавлений фізичного змісту. В дійсності простір і час мають об'єктивну реальність у реальному русі матерії.

Діалектичний матеріалізм розглядає простір і час як форми існування матерії.

Ознайомившися з означеннями Ньютона, що відограли історичну роль, ми не наблизимося до відповіді на поставлене нами запитання: який фізичний зміст мають слова „спокій" і „рівномірність" руху в першому законі механіки? Ми маємо право, звичайно, вимагати, щоб на це чітко поставлене запитання була дана цілком ясна відповідь. Проте, саме „прості" запитання часто виявляються найтруднішими для розв'язання.

Глибокий аналіз принципіальних основ механіки дав у 1905 р. і в дальші роки А. Ейнштейн. На жаль, в рамках даного курсу ми зовсім позбавлені змоги викласти хід міркувань Ейнштейна і зроблені ним висновки. Ми змушені обмежитися кількома, далеко недостатніми для розуміння суті справи і навіть (для простоти) не цілком точними натяками.

Питання про час було розв'язано Ейнштейном так. Для визначення часу треба умовитись про способи точного вимірювання часу і насамперед про способи встановлення одночасності подій, які відбуваються в різних місцях простору. Ці способи вимірювання часу не можна вибрати довільно; навпаки, вони повинні перебувати у відповідності до всієї сукупності наслідків нашого фізичного досліду. Один якийсь процес повинен служити зразком рівномірного перебігу; цей процес самою природою речей покликаний виконувати роль універсального цілком точного годинника. Ейнштейн прийняв, що таким процесом є поширення світлових (і взагалі електромагнітних) хвиль у „пустоті". Про події, які сталися в двох якихнебудь різних місцях простору A і B, спостережник, що перебуває в третьому місці C, однаково віддаленому від A і B, повинен сказати, що вони сталися одночасно, якщо світлові сигнали, пущені від A і B, які повідомляють про ці події, досягли спостережника C в той самий момент часу. Це означення поняття одночасності Ейнштейн зберігає також і для того випадку, коли точки A і B рухаються відносно спостережника, але саме тому події, які будуть уявлятися одночасними для рухомого спостережника, нерухомий спостережник вважатиме за неодночасні.

Простір ми пізнаємо в реальних процесах. Геометричні властивості реального простору не цілком точно відповідають властивостям того уявлюваного простору, який вивчається геометрією Евкліда. Прямою лінією є та, якою поширюється промінь світла. Геометричні властивості реального простору залежать від мас, розподілених у ньому. Всесвітнє тяжіння пояснюється цією залежністю властивостей фізичного простору від розміщених у ньому мас.

З цього Ейнштейнового погляду сили всесвітнього тяжіння не можна розглядати як сили, зовні прикладені до тіл, а через те що під діянням цих сил тіла зазнають прискорення у напрямі одне до одного, то про закон інерції доводиться сказати, що повною мірою він справедливий тільки для таких частин простору, які були б нескінченно віддалені від усіх мас. Для таких частин простору „спокій" і „рівномірний прямолінійний рух", про які йде мова в законі інерції, нічим не відрізняються, крім способу їх спостереження.

§ 10. Інерціальна система. Положення тіла в просторі визначають відліком (вимірюванням) віддалі тіла від будьяких інших нерухомих одне відносно одного тіл. Для визначення положення точки в просторі досить виміряти віддаль точки до трьох взаємно перпендикулярних площин. Ці площини називають системою координатних площин, а найкоротші віддалі розгляданої точки від координатних площин називають координатами точки. Прямі, по яких перетинаються координатні площини, називають осями координат; звичайно їх позначають символами OX, OY, OZ, а координати точки — знаками x, y, z (рис. 4).

Нехай нас цікавить рух м'яча, підкинутого до стелі одним із пасажирів залізничного вагона. Щоб стежити за рухом м'яча, ми можемо вибрати, наприклад, як систему координатних площин підлогу, одну бічну й передню стінки вагона. Поряд з цією системою координат візьмемо ще другу систему координат, зв'язану з Землею. Коли вагон стоїть нерухомо, то рух підкинутого у вагоні м'яча буде, зрозуміло, однаковим відносно обох вибраних нами координатних систем.

Розглянемо випадок, коли вагон рухається рівномірно і прямолінійно; одна координатна система рухається відносно другої. Спостережникові, який стоїть біля полотна залізниці, політ м'яча буде здаватися тепер іншим, ніж спостережникові всередині вагона. Спостережник всередині вагона скаже, що всі предмети в його вагоні по інерції перебувають у спокої; спостережник, який стоїть біля полотна залізниці, скаже, що всі предмети всередині вагона рухаються по інерції з однаковою швидкістю. Перший спостережник побачить будьякий важкий кинутий ним з вікна предмет падаючим по вертикальній прямій; другий спостережник побачить той самий предмет падаючим по відхиленій у бік руху вагона кривій лінії (по параболі), і, вивчивши це падання предмета, він переконається, що політ по параболі відбувається від накладання один на одного двох рухів: падання під діянням ваги і горизонтального рівномірного руху по інерції. Оскільки в нерухомому вагоні був справедливим (з деяким степенем наближення) закон інерції, остільки й у вагоні, який рухається рівномірно і прямолінійно, буде також справедливим закон інерції (з тим самим степенем наближення).

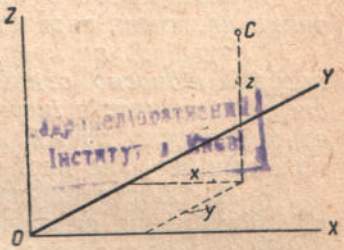

Рис. 4. Система прямокутних („декартових“) координат.

Якщо вагон рухається прискорено чи сповільнено або хоча б і рівномірно, але по криволінійному шляху, то рух підкинутого всередині вагона м'яча набуде зовсім іншого характеру; при прискореному русі вагона підкинутий вертикально м'яч упаде позаду пасажира, який його підкинув; при русі вагона по криволінійному шляху він упаде збоку і т. ін. При різкому загальмовуванні вагона предмети, які нерухомо лежали на столику, сковзають і падають на підлогу вперед у напрямі руху вагона. Пасажири, які стоять, ледве утримуються на ногах. Пасажири, які сиділи спиною до руху, відчувають, що поза їх волею вони раптом починають тиснути на спинки сидінь. Закон інерції — у вузькому розумінні його змісту — перестає (у застосуванні до координатної системи, яка нас цікавить) бути справедливим. Насправді, адже нерухомі відносно стінок і підлоги предмети, що були у вагоні, при різкому загальмовуванні вагона раптом набувають прискорення вперед, не зважаючи на те, що до них не було зовні прикладено ніяких сил, які могли б надати їм цього прискорення; будьяке тіло, що рівномірно рухалося всередині вагона, при загальмовуванні вагона раптом зазнає зміни швидкості свого руху відносно зв'язаної з вагоном координатної системи; якщо вагон проходить по закругленню колії, то м'яч, кинутий пасажиром паралельно стінці вагона, буде наближатися до стіни вагона або віддалятися від неї.

Зрозуміло, що всякий пасажир, обізнаний з тим, як рухається вагон, зуміє легко розібратися в усіх цих явищах, які ніби спростовують закон інерції стосовно до його, зв'язаної з вагоном, координатної системи. Він міг би розв'язати цю задачу двома різними способами: 1) відмовитися від користування координатною системою, зв'язаною з вагоном, і відносити рухи до „нерухомої“ (зв'язаної з Землею) координатної системи; 2) надалі користуватися координатною системою, зв'язаною з вагоном, і припустити, що в деякі періоди часу (які збігаються з тими, коли вагон проходить закруглення колії або рухається прискорено чи сповільнено) на всі тіла, що є всередині вагона, діє якась зовні прикладена до них сила, пропорціональна масі цих тіл. Спостережникові, який нерухомо стоїть на Землі, цей другий спосіб розв'язання задачі здався б, можливо, безглуздим, але якби ми уявили собі дві координатні системи, які рухаються прискорено одна відносно однієї десь у світовому просторі, то важко було б навести доводи проти зазначеного способу міркування.

Координатну систему, зв'язану з такою сукупністю взаємно нерухомих тіл, відносно якої з повною точністю виправдується закон інерції, називають інерціальною (або інакше галілеєвою) системою. При цьому прискорення, що їх зазнають тіла внаслідок тяжіння, треба за Ньютоном розглядати як такі, що спричинюються прикладеними до тіл силами всесвітнього тяжіння.

Із зазначеного в перших шести абзацах цього параграфа випливає такий висновок, справедливість якого може бути доведена цілком строго. *Якщо будьяка координатна система рухається прямолінійно і рівномірно відносно деякої інерціальної системи, то перша координатна система також є інерціальною системою.* Якщо ж перша система рухається відносно другої інерціальної системи непрямолінійно або хоча б і прямолінійно, але нерівномірно, то вона не буде інерціальною системою.

§ 11. Спостережувані на поверхні Землі відхилення від закону інерції: відхилення падаючого тіла від прямовисної лінії; маятник Фуко. Астрономічні спостереження і обчислення показують, що з сонячною системою якимось певним способом можна зв'язати таку систему координат, яка з достатнім степенем точності буде інерціальною (у ньютоновому розумінні). Координатні осі цієї системи треба мислити собі, як такі, що перетинаються у деякій точці Сонця (в центрі маси сонячної системи; про центр маси див. § 28). Земля обертається навколо Сонця. Отже, всяка координатна система, зв'язана з Землею, не є інерціальною. Але якщо взяти до уваги, що протягом 30 хвилин Земля в своєму русі навколо Сонця описує дугу, лише трохи більшу 1″ (це вказує, наскільки мала кривизна земної орбіти), то стає зрозумілою надзвичайна малість впливу криволінійності руху Землі на інерціальні властивості координатної системи, зв'язаної з Землею.

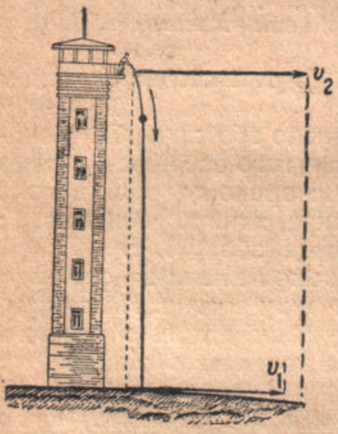

Рис. 5. Камінь, кинутий з високої башти, має відносно поверхні Землі (внаслідок добового обертання Землі) горизонтальну швидкість $v_2 - v_1$.

Значно більший, але практично все ж неістотний вплив виявляє добове обертання Землі. Якби цього обертання не існувало, то камінь, кинутий з башти, падав би точно по вертикальній лінії. Внаслідок добового обертання Землі кожна точка земної поверхні має деяку горизонтальну швидкість переміщення з заходу на схід; для вершини башти ця швидкість більша, ніж для її основи; через те кинутий з високої башти камінь випереджає грунт у русі на схід і падає не в ту точку, яка є основою вертикалі, що проходить через початкове положення каменя, а трохи на схід від цієї точки (рис. 5). Це відхилення від вертикалі при висоті падання в 20 *м* становить усього кілька міліметрів (для середніх широт). Звідси видно, що координатну систему, зв'язану з поверхнею Землі, можна з достатньою для практичних потреб точністю розглядати як інерціальну.

Відхилення від закону інерції, спричинювані добовим обертанням Землі, найлегше помітити, стежачи за площиною коливання маятника (маятник Фуко). Щоб наочніше уявити собі суть явища, укріпимо на осі відцентрової машини металічну дугу і до тієї точки дуги, яка буде точно на осі обертання, повісимо маятник (рис. 6) з допомогою шарніра *C*, який може з малим тертям обертатися в отворі, зробленому в дузі. Маятник, раз приведений в коливання, зберігає свою початкову площину коливань навіть при порівняно швидкому обертанні дуги; це зрозуміло, бо на маятник не діють ніякі сили, здатні змінити (повернути) площину коливань маятника (це є вертикальна площина, що проходить через напрям початкового відхилення маятника; сила ваги маятника незмінно лежить у цій площині, а не напрямлена до неї під кутом; якщо не брати до уваги малих за умовою сил тертя у точці підвісу, то ніяких інших сил, які діють на маятник, немає). Змінимо тепер масштаб досліду: відцентрову машину замінимо земною кулею, яка зазнає добового обертання, дугу — стелею і стінками будької кімнати. Через кілька хвилин ми помітимо, що площина коливання маятника ніби повертається „за сонцем", тобто із сходу на південь. Уявимо, що наведений дослід провадиться на одному з полюсів Землі. Тоді площина коливання маятника, що обертається з точки зору земного спостережника, насправді була б нерухомою відносно інерціальної астрономічної системи координат. Коли дослід з маятником Фуко провадять в якійнебудь іншій точці Землі, то через те, що площина коливання маятника завжди проходить через вертикаль, ця площина обертатиметься не тільки відносно земного спостережника, а й деякою мірою і відносно інерціальної астрономічної системи координат.

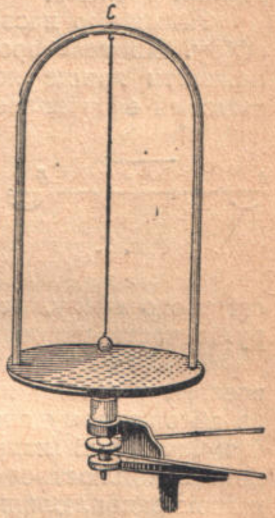

Рис. 6. При обертанні відцентрової машини площина коливання маятника залишається незмінною.

§ 12. Принцип відносності Галілея. Сказане в § 10 приводить нас до такого висновку:

ніякі механічні досліди і спостереження, що їх провадять всередині інерціальної системи, не дають можливості розв'язати питання, чи має вся ця система в цілому прямолінійний рівномірний рух, чи вона перебуває в спокої. Іншими словами — механічними дослідами і спостереженнями не можна встановити існування абсолютних рухів; усякий рух слід розглядати як відносний. У цьому полягає так званий принцип відносності Галілея.

Галілей указав принцип відносності, розглядаючи питання про те, як загальний швидкий рух Землі не порушує окремих рухів, які відбуваються на її поверхні. Галілей пояснює цей принцип таким прикладом[1]):

„Помістіть себе з вашим приятелем у залі під палубою будьякого великого корабля... і змусьте привести в рух корабель з якою завгодно швидкістю. Ви (якщо тільки рух буде рівномірний) не помітите жодної зміни в усіх явищах і ні з одного з них ви не зможете судити — чи рухається корабель, чи стоїть на місці: ви, стрибаючи, будете проходити по підлозі ті самі простори, як і під час стояння корабля, тобто ви не зробите — в наслідок того, що корабель рухається дуже швидко — більших стрибків до корми, ніж до носа корабля, хоча в той час, коли ви перебуваєте у повітрі, підлога, що під вами, біжить у сторону, протилежну вашому стрибкові, і, кидаючи будьяку річ товаришеві, вам не треба буде з більшою силою кидати її, якщо він буде біля носа корабля, ви ж біля корми, ніж коли б ви стояли навпаки; краплі з підвішеного до стелі кухля з водою падатимуть вертикально на підлогу, і жодна з них не впаде у напрямі до корми, хоча, поки краплина перебуває у повітрі, корабель іде вперед...

[1]) „Dialogo... sopra i due massimi sistemi del mondo — Tolemaico e Copernicano". Цей твір вийшов у 1632 р. Він — той самий, що за нього Галілей був засуджений папською інквізицією.

мухи і далі літатимуть однаково в усі сторони, і ніяк не трапиться, щоб вони (ніби утомившись встигати за швидким ходом корабля) зібралися на тій стороні, яка ближче до корми".

§ 13. Спеціальний принцип відносності Ейнштейна. Принцип відносності Галілея встановлює, що з допомогою механічних спостережень і дослідів, що їх проводять всередині системи, не можна виявити наявності прямолінійного рівномірного руху всієї системи. Але принцип цей нічого не говорить про те, чи не можна цей рух виявити з допомогою будьяких інших немеханічних спостережень і дослідів, наприклад, з допомогою оптичних дослідів.

Покажемо насамперед, як зв'язане це питання з проблемою світового ефіру. Гіпотеза про існування світового ефіру була введена для того, щоб пояснити явище поширення світла в пустоті. Згідно з цією гіпотезою світовий ефір являє собою якесь „тонке" середовище, яке заповнює ввесь світовий простір, пронизує небесні тіла так, що вони рухаються в світовому ефірі, зовсім не зазнаючи (або майже не зазнаючи) від нього ніякого опору своєму рухові. Сучасник Ньютона Гюйгенс дав основи теорії, яка довго панувала і за якою світло розглядали як поширення коливних рухів частинок світового ефіру, подібно до звука, що являє собою поширення коливних рухів частинок речовини, наприклад, повітря.

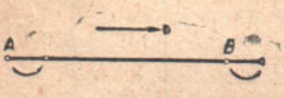

Рис. 7.

Гюйгенс уявляв собі, очевидно, що світовий ефір, який заповнює всесвіт, у цілому як середовище (а не окремі його частинки) перебуває „в абсолютному спокої". Пізніше такого погляду додержувалося багато фізиків. Деякі (наприклад, Френель, Фізо) припускали, що ефір частково захоплюється рухом небесних тіл. Припущення, що ефір може бути цілком захоплюваний рухом тіла (це припущення було висловлене Герцем), не може бути прийняте, бо воно приводить до суперечностей при поясненні деяких оптичних явищ.

Гіпотеза світового ефіру дала підставу вважати, що абсолютний рух Землі в ефірі вдається виявити з допомогою вимірювання швидкостей поширення світла в напрямі руху Землі і в напрямі протилежному. Здавалося б, що, пустивши світловий сигнал у напрямі руху Землі з точки A в точку B, а потім у зворотному напрямі з B в A, ми повинні помітити різницю часів проходження сигналом шляху AB (рис. 7), а саме: здавалося б, що з B в A світловий сигнал повинен прийти швидше, ніж з A в B, бо в першому випадку точка A, яка приймає сигнал, переміщується при русі Землі в ефірі назустріч сигналові, а в другому випадку точка B, яка приймає сигнал, переміщується, відходячи від сигнала. Проте, найточніші досліди з вимірюванням швидкості світла, проведені наприкінці минулого сторіччя Майкельсоном і пізніше багато разів перевірені, привели (такої думки додержується тепер більшість фізиків) до негативного результату: *швидкість світла виявилась незалежною від напряму світлового сигнала.* Розуміючи цю незалежність швидкості світла від стану руху системи, кажуть, що *швидкість світла інваріантна*[1]). Ейнштейн встановив таке розуміння часу[2]), при якому іншого результату дослідів і не слід чекати. Отже, той факт, що залежність швидкості світла від напряму (на поверхні Землі) світлового сигнала ніколи *не була спостережена*, він зробив принципом, що вона ніколи і *не може бути спостережена*, а це

[1]) Крім того, швидкість світла є сталою в тому розумінні, що в пустоті вона однакова для променів різних кольорів. Часто, проте, коли говорять про сталість швидкості світла, то мають на увазі її інваріантність, тобто незалежність швидкості світла від стану руху системи.

[2]) У § 9 згадано дане Ейнштейном означення поняття одночасності подій. З самої суті цього означення швидкість світла не може залежати від стану руху системи.

означає, що „абсолютний" рух Землі в ефірі не може бути виявлений навіть і в тому разі, якщо ефір існує. Додержуючись цього погляду, слід визнати, що *не тільки механічні, але взагалі ніякі фізичні досліди і спостереження, що їх проводять всередині інерціальної системи, не дають можливості розв'язати питання, чи має вся ця система в цілому прямолінійний рівномірний рух, чи вона перебуває в спокої.* Це твердження має назву спеціального принципу відносності Ейнштейна.

§ 14. Вектор швидкості і вектор кількості руху. У фізиці треба розрізняти величини двох родів: одні характеризуються тільки числовим значенням — їх називають *скалярами*; інші характеризуються не тільки числовим значенням, а й якимось певним напрямом — їх називають *векторами.* Вектори зображають стрілками (відрізками прямих), довжина яких указує числове значення вектора. У формулах векторні величини на відміну від скалярних пишуть жирним шрифтом або ставлять над ними риску; та сама літера, надрукована нежирним шрифтом або без риски, означає числове значення вектора.

Найпростішим і по суті основним вектором є переміщення; під „переміщенням" ми розуміємо відрізок прямої, проведеної з початкового положення в кінцеве положення переміщуваної точки.

Рис. 8. Вектор швидкості прямолінійного руху.

Ми будемо говорити про переміщення матеріальних точок. Коли розміри тіла надзвичайно малі проти величин досліджуваних переміщень тіла, то замість слова „тіло" користуються терміном „матеріальна точка".

Вектор переміщення далеко не завжди дозволяє судити про напрям руху матеріальної точки. Якщо матеріальна точка рухається з свого початкового положення прямолінійно, то вектор переміщення має увесь час той самий напрям, який збігається з напрямом руху. Якщо при цьому матеріальна точка рухається рівномірно, то швидкість її $\boldsymbol{v}$ є вектор, який напрямом збігається з вектором переміщення, а числовою величиною (довжиною відрізка, який зображає вектор $\boldsymbol{v}$) дорівнює довжині переміщення матеріальної точки за 1 *сек.* Отже, в цьому, і тільки в цьому разі швидкість нічим не відрізняється від вектора переміщення тіла за 1 *сек.*

В разі прямолінійного, але нерівномірного руху (рис. 8) під швидкістю розуміють напрямлений за рухом вектор, який має числове значення, що дорівнює відношенню досить малого переміщення ds, яке відбувається за досить малий проміжок часу dt, до цього елементарного проміжка часу dt:

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}.$$

Зауважимо, що у позначеннях ds, dt і т. ін. літера d не означає будь-якої величини, а служить знаком, що вказує на надзвичайну малість тієї величини, назву якої подано літерою, поставленою за літерою d. Так, s означає числову величину переміщення, а ds означає числову величину надзвичайно малого переміщення; t означає час, а dt означає надзвичайно малий проміжок часу. Те, що ми розуміємо тут під надзвичайною малістю величини, в аналізі відповідає поняттю диференціала; замість слів „надзвичайно малий" ми будемо говорити іноді „елементарно малий" або „диференціал".

Під елементарним проміжком часу dt можна розуміти $\frac{1}{n}$ секунди, де n дуже велике число; помноживши на це число чисельник і знаменник наведеної вище формули (від чого, зрозуміло, відношення не зміниться), ми будемо мати в знаменнику 1 секунду, а в чисельнику

n-кратне переміщенню ds, тобто довжину того шляху, який тіло пройшло б за 1 *сек*, якби, починаючи з моменту часу, який нас цікавить, воно рухалося рівномірно.

При русі по криволінійній траєкторії (траєкторія — шлях) вектор швидкості, взагалі кажучи, не збігається щодо напряму з вектором переміщення. Звернемося, наприклад, до рис. 9. На ньому s означає вектор переміщення, що його зазнала матеріальна точка за час t (результуюче переміщення). За елементарно малий проміжок часу dt матеріальна точка зазнала переміщення ds, напрямленого під кутом до вектора s. Швидкість матеріальної точки слід вважати за таку, що збігається щодо напряму з напрямом руху в даний момент часу, тобто має той самий напрям, що і вектор ds:

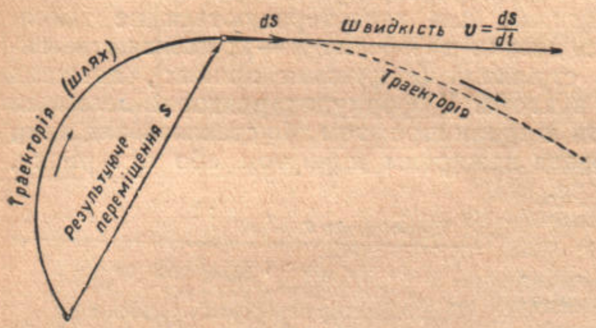

Рис. 9. Вектор швидкості криволінійного руху.

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{8}$$

Це рівняння є векторне рівняння; у правій частині стоїть вектор, який має напрям вектора ds, але числовим значенням (довжиною) перебільшує його у стільки разів, у скільки разів dt менше 1 *сек* (нехай dt становить $\frac{1}{n}$ *сек*, де n якесь дуже велике число; зрозуміло, що ділення величини ds на dt рівнозначне множенню величини ds на n); написане рівняння показує, що вектор $\frac{ds}{dt}$ являє собою не що інше, як саме вектор швидкості v; ці вектори рівні чисельно і збігаються щодо напряму. Зауважимо, що за умовою множення вектора на скалярну величину (в даному разі множення вектора ds на скалярну величину $\frac{1}{dt}=n$) треба розуміти як відповідну зміну довжини вектора при незмінності його напряму.

У механіці і в фізиці кількістю руху називають добуток маси m на швидкість тіла v. Коли звичайно кажуть про „кількість руху", то найчастіше вкладають у ці слова розуміння, аналогічне величині mv. Справді, якщо по якійсь безлюдній вулиці з великою швидкістю біжить одна людина, то ніхто не скаже, що рух по цій вулиці великий; якщо на вулиці стоїть нерухомо натовп людей, які чогось чекають, то знову таки ніхто не скаже про цю вулицю, що рух по ній великий; вуличний рух усі ми вимірюємо (іноді самі цього не помічаючи) добутком числа людей, які рухаються по вулиці, на середню швидкість їх руху.

Кількість руху являє собою вектор, який має напрям швидкості, але числовим значенням перебільшує швидкість у стільки разів, у скільки разів маса тіла m більша одиниці маси (рис. 10).

§ 15. Правила геометричного додавання і геометричного віднімання. Швидкості, кількості руху і всі інші вектори додаються за тим правилом, за яким ми робимо додавання основного вектора — вектора переміщення. Якщо матеріальна точка зазнала переміщення s_1, а потім із свого нового початкового положення вона зазнала переміщення s_2, потім переміщення s_3 і т. ін. (рис. 11), то, очевидно, сумарне („результуюче") переміщення s буде являти собою відрізок прямої, що замикає многокутник, побудований на додаваних переміщеннях як на сторонах, при чому вектор цього результуючого переміщення слід вважати напрямленим з вихідного положення точки до її кінцевого положення. Через те що всі векторні величини, які нам треба розглядати, по суті своїй зв'язані з будьякими переміщеннями, які дійсно відбуваються або можливі,— то зазначене правило підсумовування переміщень є справедливим для всіх векторів. Цей спосіб додавання називають **геометричним додаванням**, або **правилом многокутника**. Додаючи швидкості кількох відносних рухів, у яких бере участь будьяке тіло, треба побудувати многокутник з цих швидкостей, і замикаюча сторона цього многокутника й буде результуючою швидкістю.

Рис. 10. Вектор кількості руху при $m = 5$ *г.*

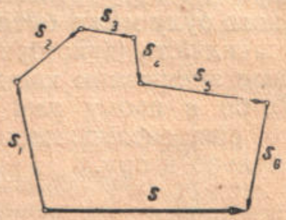

Рис. 11. Правило геометричного додавання.

Аналогічно: додаючи сили, прикладені до якоїсь матеріальної точки, треба побудувати з цих сил многокутник, і замикаюча сторона цього многокутника й буде результуючою силою.

Слід звернути увагу на те, що при додаванні двох векторів результуючий вектор являє собою **діагональ паралелограма**, побудованого на додаваних векторах як на основах (рис. 12).

Віднімання являє собою дію, обернену додаванню. Нехай дано два вектори A_1 і A_2 і треба знайти їх геометричну різницю. Інакше кажучи, знайти такий вектор $A_1' = A_2 - A_1$, який у сумі з вектором A_1 дав би вектор A_2. Рис. 13 показує, як це зробити: рисуємо обидва задані вектори так, що вони виходять з однієї точки; їх геометрична різниця A_1' є не що інше, як основа трикутника, дві інші сторони якого представлені заданими векторами A_1 і A_2; щоб вектор A_2 справді дорівнював сумі векторів A_1 і A_1', треба вектор A_1' вважати за такий, що виходить з кінця відніманого вектора A_1.

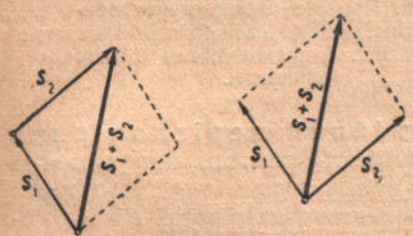

Рис. 12. Правило паралелограма.

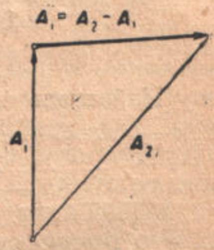

Рис. 13. Правило геометричного віднімання.

Тут слід відзначити, що коли A означає величину, яка змінюється („змінну"), а A_1 і A_2 являють собою два значення цієї змінної величини, то для позначення різниці $A_1 - A_2$ звичайно вживають символ ΔA (Δ — грецька літера „дельта").

Літерами Δ і d звичайно користуються для скороченого запису слова „приріст", при чому символ Δ може означати великий або малий приріст, тоді як символ d завжди вказує на надзвичайну малість розгляданого приросту (знак диференціала).

Нехай, наприклад, швидкість матеріальної точки в якийсь момент часу була v_1, а через 1 *сек* вона, зазнавши зміни і щодо величини, і щодо напряму, стала рівною v_2. Очевидно, що геометрична різниця $\Delta v = v_2 - v_1$ є не що інше, як приріст швидкості за 1 *сек* (рис. 14). Якщо v_2 означає швидкість, властиву матеріальній точці не через цілу секунду від того моменту часу, коли її швидкість була v_1, а через досить малий проміжок часу dt, то, припускаючи, що швидкість не могла за цей малий проміжок часу зрости на помітну величину, можна різницю $v_2 - v_1$ позначити не символом Δv, а символом dv (елементарний приріст швидкості, або, що є те ж саме, диференціал швидкості).

§ 16. Вектор прискорення і вектор сили. Коли при прямолінійному русі швидкість зростає рівномірно, то прискоренням j називають вектор, напрямлений в даному разі за рухом; він має числове значення, яке дорівнює приростові швидкості за 1 *сек*. Прикладом такого рівноприскореного руху може бути вільне падання тіла в пустоті під діянням ваги. Коли швидкість рівномірно зменшується, то прискорення j, яке чисельно дорівнює зменшенню швидкості за 1 *сек*, вважають величиною від'ємною ($j < 0$), бо в цьому разі вектор прискорення напрямлений проти руху. Такого рівносповільнюваного руху зазнає, наприклад, камінь, кинутий вертикально вгору.

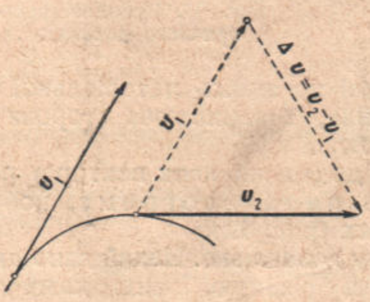

Рис. 14. Геометричний приріст Δv змінного вектора v (вектора швидкості).

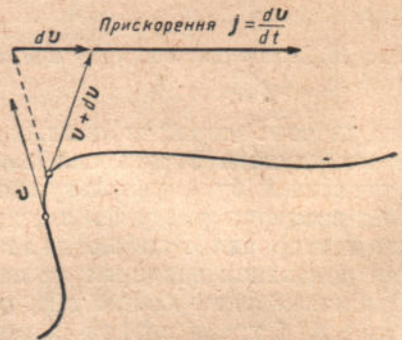

Рис. 15. При рівномірному русі вектор прискорення на криволінійних дільницях тим більший, чим більша кривизна.

Найзагальнішим випадком є криволінійний нерівномірний рух. Під прискоренням j такого руху розуміють вектор, напрямлений в ту сторону, куди напрямлений нескінченно малий *геометричний* приріст швидкості dv, і рівний відношенню цього приросту швидкості dv до нескінченно малого проміжка часу dt, протягом якого швидкість зазнає вказаного приросту:

$$j = \frac{dv}{dt}. \tag{9}$$

Коли тіло рухається по криволінійному шляху рівномірно, то швидкість не змінюється щодо величини, але напрям вектора швидкості змінюється тим різкіше, чим більша кривизна. Отже, для рівномірного руху прискорення тільки на прямолінійних дільницях шляху дорівнює нулеві; для дільниць же криволінійних воно відмінне від нуля і при великій кривизні може стати навіть дуже значним. Розглядаючи рис. 15, бачимо, що при рівномірному русі по закругленню вектор прискорення j напрямлений в ту сторону, куди траєкторія повернена своєю вгнутістю; легко зміркувати, що коли б рух по закругленню відбувався з чисельно зростаючою швидкістю (довжина стрілки, що зображає вектор $v + dv$, більша ніж довжина стрілки вектора v), то вектор прискорення j був би напрямлений під якимсь гострим кутом до напряму руху; легко зміркувати також, що при сповільненні руху (довжина стрілки $v + dv$ менша, ніж стрілки v) вектор прискорення j відхиляється назад до сторони, протилежної напрямові руху (рис. 16).

Сила також є вектором. Про сили ми судимо: поперше, з їх статичного вияву (наприклад, з тиску, що його тіло робить на опору; тиск може привести до прогину поверхні, до стиску пружини і т. ін.); подруге, з їх динамічного вияву, тобто з прискорень, що їх набувають тіла під діянням сили. В першому випадку, при статичному виявленні, векторність сили легко може бути виявлена дослідним шляхом; наприклад, з допомогою зображеного на рис. 17 простого прилада можна довести, що сили при їх статичному виявленні додаються геометрично (за правилом паралелограма, а при більш ніж двох силах — за загальнішим правилом многокутника). У другому випадку, при динамічному виявленні, векторність „рушійної" сили виявлена другим законом механіки: $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{j}$.

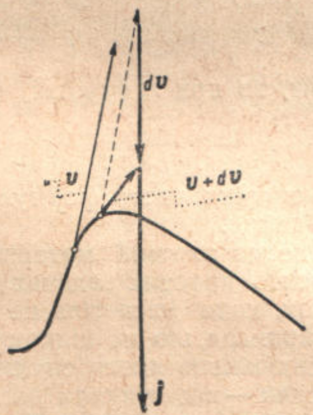

Рис. 16. Вектор прискорення для випадку сповільнюваного руху по тій самій траєкторії, що й на рис. 15.

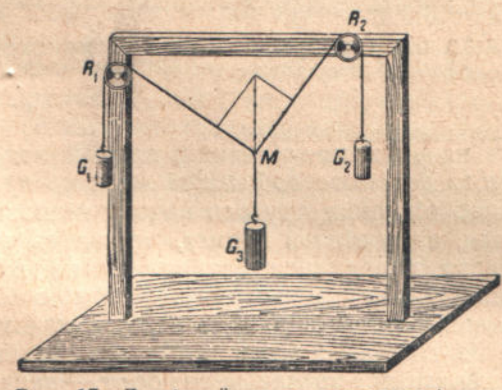

Рис. 17. Дослідний доказ векторності сил у їх статичному вияві.

Зауважимо, що вектор „рушійної" сили стоїть у такому ж співвідношенні з прискоренням, як вектор кількості руху з швидкістю; дійсно кількість руху збігається щодо напряму з швидкістю і чисельно дорівнює добуткові маси на швидкість; аналогічно, сила збігається щодо напряму з прискоренням і чисельно дорівнює добуткові маси на прискорення.

§ 17. Другий Ньютонів закон механіки. Другий закон механіки полягає у такому твердженні (наводимо Ньютонове формулювання цього закону):

Зміна кількості руху пропорціональна прикладеній рушійній силі і відбувається за напрямом тієї прямої, по якій ця сила діє.

Тут мова йде про геометричну зміну кількості руху за одиницю часу, при чому як одиниця часу повинен бути вибраний досить малий проміжок, а саме настільки малий, щоб протягом його зміну кількості руху можна було б вважати такою, що відбувається рівномірно. Щоб звільнити себе від цієї незручної умови у виборі одиниці часу, треба у наведеному вище формулюванні другого закону слова „зміна кількості руху..." замінити словами „зміна кількості руху, яка відбувається за елементарно малий проміжок часу і поділена на цей проміжок часу..." Далі умовимося вимірювати згадувані в другому законі величини в таких одиницях, щоб можна було слово „пропорціональна" замінити словом „дорівнює" (§ 4). Тоді, повнотою зберігаючи суть наведеного вище Ньютонового формулювання другого закону, можемо виразити цей закон так:

Геометрична зміна кількості руху, яка відбувається за елементарно малий проміжок часу і поділена на цей проміжок часу, дорівнює при-

кладеній рушійній силі і відбувається за напрямом тієї прямої, по якій ця сила діє.

Отже, якщо F є „рушійна“ сила, прикладена до тіла (точніше — до „матеріальної точки“), маса якого є m і швидкість v, то

$$F = \frac{d(mv)}{dt}. \tag{10}$$

Коли маса стала, то зміна кількості руху відбувається в наслідок самої лише зміни швидкості: $\Delta(mv) = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = m\Delta v$, а тому при $m = \text{const}$

$$F = m\frac{dv}{dt},$$

або, якщо під j розуміють вектор прискорення, то при $m = \text{const}$

$$F = mj. \tag{11}$$

Маючи на увазі це рівняння, другий закон механіки часто формулюють так: *сила дорівнює добуткові маси на прискорення.*

Якщо рівняння другого закону відносити не до окремої матеріальної частинки, а до тіла в цілому, то навіть у досить простих задачах механіки часто доводиться натрапляти на випадок, коли маса тіла не залишається сталою під час руху. Уявимо собі, наприклад, що на цілком гладкій ковзькій палубі корабля лежить канат, один кінець якого спущено у воду; під діянням незмінної щодо величини сили — під діянням ваги частини каната, яка звисає через борт,— канат буде сповзати з палуби; цей рух буде прискорений; щоб правильно обчислити прискорення, треба взяти до уваги, що маса, якій надається прискорення, під час руху зменшується. Важливим прикладом руху, коли маса не залишається сталою, є політ ракети.

Треба сказати, що багато фізиків віддавали перевагу в разі змінної маси рівнянню (11), а не (10). Це приводить, проте, до іншого розуміння маси і сили, ніж те, яке було встановлене Ньютоном. Ми торкнемося цього питання у § 401, коли будемо говорити про електромагнітне походження маси найдрібніших частинок — електронів[1]).

Крім зазначеної розбіжності з приводу того, яким формулюванням другого закону слід користуватися — „Ньютоновим“ (формула 10) чи „шкільним“ (формула 11), інших розбіжностей у способах практичного застосування цього закону, очевидно, немає (ми маємо на увазі ту область застосувань, де точність Ньютонової механіки беззаперечна). Але є багато непогодженостей у розумінні зазначеного закону і в оцінці його значення.

Насамперед слід відмітити, що багато фізиків розглядають другий закон просто як означення поняття сили; вони читають другий закон так: „силою називається добуток маси на прискорення“. При такому розумінні другий закон, взятий окремо, втрачає будьякий фізичний зміст; адже нам вільно давати назви на наш розсуд; назвавши силою добуток маси на прискорення, ми цим не встановлюємо ніякої нової фізичної істини і, звичайно, не можемо претендувати на те, щоб ця умова про термін „сила“ розглядалася як будьякий закон природи. З зазначеного

[1]) У даному курсі ми хотіли б завжди виходити з Ньютонового формулювання другого закону (рівняння 10), але іноді (щоб при поясненні складних питань використати більш звичні для читача уявлення) будемо брати за основу „шкільне“ формулювання: $F = mj$. Цим же „шкільним“ формулюванням ми будемо користуватися в усіх тих найбільш частих випадках, коли вважають, що маса — стала.

погляду другий закон не є закон, а є просто ніби передмовою до третього закону.

У третьому законі встановлюється, що завжди існує тільки взаємодіяння тіл: сили, прикладені до різних взаємодіючих тіл, попарно рівні і напрямлені протилежно; вони надають взаємодіючим тілам рівні щодо величини, але протилежні щодо знаку зміни кількості руху. А тому взаємодіяння між тілами не може змінити сумарної кількості руху цих тіл: наскільки зростає кількість руху будьякого одного тіла, настільки зменшується кількість руху інших тіл, взаємодіючих з першим (закон зберігання кількості руху). Про все це ми будемо нижче говорити докладніше. Тепер ми згадали про це тільки для того, щоб зіставити другий закон з третім.

Ті фізики, які розглядають другий закон як означення сили, вважають, що дійсним принципом механіки (почерпнутим з досвіду) є третій закон. Цей третій закон можна було б сформулювати і не вдаючись до поняття сили (прямо у вигляді закону зберігання кількості руху). Отже, можна прийти до висновку, що поняття сили *не* є необхідним для побудови механіки. І справді, багато вчених розглядають „силу" як поняття допоміжне; при цьому дехто висловлював думку, що поняття сили при бажанні можна зовсім виключити з фізики без істотної шкоди для змісту фізики.

Замість Ньютонових законів можна покласти в основу механіки, як було показано багатьма вченими, інші принципи. Такі загальні принципи механіки, які цілком замінюють закони Ньютона й іноді значно ширші, були висловлені Гамільтоном, Лагранжем, Якобі, Гауссом та ін.

Ці принципи (в рамках даного курсу вони не можуть бути викладені), взагалі кажучи, не мають завдання усунути з механіки поняття сили, але вони в усякому разі відводять цьому поняттю скромнішу роль, ніж та, яку відограє сила в Ньютоновій механіці. Герц побудував механіку (виходячи з принципу, висловленого Гауссом), в основному не вдаючись при аналізі рухів до поняття сили. Але не слід забувати, що завдання фізики величезні; уже в статиці і особливо у вченні про опір матеріалів поняття сили приносить неоціненні послуги: воно дозволяє викладати динаміку з найбільшою в математичному розумінні простотою; воно дозволяє надати більшої наочності описові й аналізові електричних явищ і т. ін.

Багато інших фізиків, подібно до першої групи, розглядають другий закон як означення, але не як означення сили, а як означення поняття маси; вони читають другий закон так: „інертною масою називається відношення сили до спричинюваного цією силою прискорення". На відміну від цієї „інертної маси", масу, визначувану із зіставлення тіл з допомогою важільних терезів, називають „гравітаційною масою".

Нарешті, третя група фізиків додержується Ньютонового погляду, який зовсім не збігається з двома викладеними вище поглядами.

Безсумнівно, що механіку можна побудувати, даючи різне означення поняттям і виходячи з тих або інших принципів; але оскільки, вивчаючи механіку, ми кладемо в основу закони Ньютона, то незалежно від наших особистих нахилів і поглядів ми в усякому разі повинні цілком чітко уявляти собі зміст, який Ньютон вкладав у подані ним твердження. Не підлягає сумніву, що Ньютон висловив свій другий закон як аксіому, що узагальнює досвід, а не як означення понять „сила" і „маса".

Російський перекладач твору Ньютона академік А. Н. Крилов в одній із своїх приміток до першої книги „Математичних начал натуральної філософії" справедливо зауважує: „Даючи означення поняття рушійна сила, тобто того, що тепер називають просто сила, Ньютон звертає увагу на спосіб її вимірювання і саме спосіб статичний — зрівноважування другою силою, яка перешкоджає рухові... Сила, статично вдвоє більша надає і вдвоє більшої кількості руху...

Ніде Ньютон не говорить, щоб сила вимірювалася добутком маси на прискорення...“

За Ньютоном і сила і маса вимірюються статично: „Вимірюється маса за вагою з допомогою важільних терезів... рушійна сила розпізнається за силою, їй рівною і протилежною, яка могла б перешкодити прискоренню руху тіла...“ (з „Означень“ Ньютона, які передують формулюванню „Аксіом руху“).

Якщо тільки кожна з трьох величин, які входять до другого закону, визначена і виміряна незалежно від двох інших, то другий закон набуває, очевидно, значення встановленого досвідом факту. Додержуючись зазначеної вище термінології, можна сказати:

фізичним змістом другого закону є почерпнута з досвіду істина, що „інертна маса“ тіла (тобто відношення сили до прискорення) завжди дорівнює „гравітаційній масі“ того ж тіла.

Але тоді стає ясним, що немає потреби розрізняти інертну масу й гравітаційну і, отже, немає потреби запроваджувати ці два терміни; Ньютон і не вживав їх і завжди користувався одним терміном — quantitas materiae („кількість матерії“), що рівнозначний слову „маса“.

Перший довід справедливості наведеного вище твердження про рівність інертної і гравітаційної маси дають закони падання Галілея, з яких випливає незалежність прискорення сил тяжіння від спеціального вибору падаючого тіла. Але, зрозуміло, ці досліди могли виявитися недосить точними. Отже справедливість висловленого вище твердження перевірялась пізніше Ньютоном, потім Бесселем і недавно венгерським фізиком Етвешем. За Бесселем різниця між інертною і гравітаційною масою у всякому разі не перевищує $^1/_{20\,000}$; за Етвешем вона не може бути більша $^1/_{10\,000\,000}$. Отже, твердження про рівність інертної і гравітаційної маси слід розглядати як точний закон природи. Сам по собі він зовсім не очевидний: він розкриває особливу властивість сили тяжіння, яка відрізняє її від інших сил.

В Ньютоновій механіці рівність обох мас приймається просто як експериментальний факт, але не пояснюється. Того, що ми маємо тут окрему проблему, часто не добачають фізики, і тільки Ейнштейн в 1913 р., звернувши увагу на цей закон, поклав його в основу своєї теорії тяжіння [1]).

Прийнявши погляд Ньютона-фізика, ми можемо, проте, відкинути ідеї Ньютона-філософа; погодившись з логічністю означення понять сили і маси на основі статичного способу їх вимірювання, прийнявши таким чином другий закон як дослідний факт, а не як означення, ми зовсім не повинні розглядати силу як деяку таємну першопричину рухів, до чого був схильний Ньютон у своїх філософських міркуваннях. Першопричиною руху є сам рух; одна форма руху породжує і переходить в інші форми руху. Сили служать нам засобом розпізнавання і засобом дослідження цих процесів переходу й перетворення рухів. Сили існують реально у своєму виявленні як проміжна ланка цього переходу, але, коли їх хочуть розглядати як першопричину рухів, вони стають вигадкою.

„Уявлення про силу запозичене, як це визнається всіма (починаючи від Гегеля і кінчаючи Гельмгольцем), з виявів діяльності людського організму щодо оточуючого його середовища. Ми говоримо про мускульну силу, про силу відчування нервів, про секреторну силу залоз і т. ін....

Ми... винаходимо стільки ж сил, скільки існує різних явищ“ (Енгельс, „Диалектика природы“). Мірою зростання наших пізнань відносно суті досліджуваних явищ уявлення про сили відходить на другий план порів-

[1]) Цей і попередній абзаци взято з книги Клеменса Шефера „Теоретическая физика“, ч. I, переклад з німецької, ОНТВ, 1935, стор. 77 та 78.

няно з багатьма іншими поступово виявлюваними величинами, які більш повно характеризують будьяке явище, що нас цікавить.

Оцінюючи шлях, пройдений фізикою від Ньютона до наших часів, можна бачити, що головна лінія розвитку фізики полягала у виявленні факту „єдності сил природи"; сили, які мали, здавалося, зовсім різне походження, як от, наприклад, сили „молекулярного зчеплення", хемічні, електрохемічні [1]), абсорбційні [2]), осмотичні [3]), сили поверхневого натягу і багато інших виявилися спорідненими одна одній; в кінцевому підсумку всі досліджувані фізикою сили були зведені до гравітаційних і електричних і до виявлення молекулярних рухів. У зв'язку з цим уявлення про сили в сучасній фізиці уже не відограє тієї ролі, як у часи Ньютона: „сила" поступилася своїм домінантним місцем у фізиці перед поняттям „енергії".

§ 18. Незалежність діяння сил. Другий закон механіки виражає таку думку:

якщо до тіла прикладено одночасно кілька сил, то кожна з цих сил надає тілу визначуване другим законом прискорення так, як коли б інших сил не було.

Це твердження іноді називають принципом незалежності діяння сил. Розв'язуючи задачі механіки методами Ньютона, цим принципом доводиться широко користуватися. При вмілому підході застосування цього принципу може бути надзвичайно корисним при розв'язуванні важких задач. Якщо до тіла прикладена тільки одна сила, то все ж нерідко буває зручно розкласти цю силу на дві або три складових, геометричною сумою яких була б задана сила. Наприклад, якщо тіло під час свого руху повинне залишатися на деякій жорсткій поверхні, то майже завжди буває корисно розкласти прикладену до тіла силу на дві складові: одну, яка напрямлена по дотичній до цієї поверхні, і другу, яка напрямлена по нормалі до поверхні; зрозуміло, що ця друга складова не надасть тілу чисельного збільшення швидкості і виявиться в тискові, що його тіло під час свого руху буде робити на поверхню.

Діяння сили виявляється не тільки незалежно від діяння інших прикладених до тіла сил, але також незалежно від того, чи перебувало раніше тіло в спокої, чи рухалося з деякою швидкістю. Швидкість, надавана прикладеною до тіла силою, геометрично додається до швидкості інерціального руху тіла. Прикладом цього може служити рух кинутого тіла (в пустоті): для першого-ліпшого моменту часу вектор швидкості кинутого тіла геометрично складається з вектора початкової (наданої тілу при киданні) швидкості, яку зберігає тіло по інерції, і напрямленої вертикально вниз швидкості падання тіла (рух кинутого тіла докладно розглянуто в § 21).

§ 19. Прискорення сили тяжіння. За другим законом механіки вага P будьякого тіла зв'язана з прискоренням g вільного падання і з масою m цього тіла співвідношенням:

$$P = mg.$$

З другого боку, за Ньютоновим законом тяжіння вага, якщо не брати до уваги добового обертання Землі (§ 25), визначається формулою (§ 6):

$$P = G\frac{Mm}{R^2},$$

[1]) Сили, які викликають розщеплення молекул деяких речовин, розчинених у воді, на електрично заряджені частини.

[2]) Абсорбція — вбирання; наприклад, вбирання газів вугіллям.

[3]) Осмос — проникнення розчинника, наприклад, води, крізь „напівпроникну" перегородку, яка пропускає розчинник і не пропускає розчиненої речовини.

де G — гравітаційна стала, а R — віддаль тіла від центра Землі. Зіставляючи ці два рівняння, дістаємо вираз для прискорення сили тяжіння (без урахування впливу обертання Землі):

$$g = G\frac{M}{R^2}. \tag{12}$$

Ми бачимо, що, знаючи радіус Землі і визначивши дослідним шляхом гравітаційну сталу (§ 7) і прискорення сили тяжіння g, можна обчислити масу земної кулі. Обчислення показує, що маса Землі:

$$M = 5{,}98 \cdot 10^{25}\ г = 5{,}98 \cdot 10^{19}\ т.$$

§ 20. Рух при сталому прискоренні. Важливим і часто спостережуваним випадком є рух, при якому прискорення зберігає с т а л у щодо числового значення і щодо напряму величину за весь час руху; якщо при цьому швидкість зростає (прискорення j позитивне), то рух називають „рівноприскорюваним"; якщо ж швидкість убуває (прискорення j негативне), рух називають „рівносповільнюваним".

Камінь, упущений без поштовху, рухається рівноприскорено по вертикалі вниз під діянням сталої сили тяжіння. Камінь, кинутий вертикально вгору, рухається спершу рівносповільнювано, а досягши найвищої точки, рухається потім униз рівноприскорено.

В техніці ми часто натрапляємо на випадки, коли в першому наближенні для виконання орієнтовних розрахунків рух можна вважати рівноприскорюваним або рівносповільнюваним. Наприклад, можна говорити про рівноприскорюваний рух поїзду при його відправленні з станції і про рівносповільнюваний рух його при гальмуванні перед зупинкою.

Розглянемо прямолінійний рівноприскорюваний або рівносповільнюваний рух і знайдемо, як змінюються швидкість і пройдений шлях у такого роду руху.

Нехай в якийсь початковий момент часу точка має швидкість v_0. Через те що прискорення j є зміна швидкості за одиницю часу, через t секунд швидкість зміниться на величину $j \cdot t$, і, отже, швидкість у момент t буде

$$v = v_0 + jt. \tag{13}$$

Щоб розрахувати пройдений за час t шлях, зауважимо, що хоча швидкість під час руху збільшується або зменшується, але через рівномірність її зміни ми можемо для обчислення пройденої віддалі вважати рух у проміжку часу від 0 до t таким, що відбувається з якоюсь с е р е д н ь о ю для цього проміжка часу швидкістю $v_{середн}$. Її знаходимо як середнє арифметичне між початковою швидкістю v_0 і кінцевою $v_0 + jt$, а саме:

$$v_{середн} = \frac{v_0 + (v_0 + jt)}{2} = v_0 + \frac{jt}{2}.$$

Тоді пройдений за час t шлях виразиться добутком $v_{середн} \cdot t$, тобто:

$$s = v_0 t + \frac{jt^2}{2}. \tag{14}$$

Це і є р і в н я н н я р у х у при $j = \text{const}$.

Якщо початкова швидкість $v_0 = 0$, то формули спрощуються:

$$v = jt \text{ і } s = \frac{jt^2}{2}. \tag{15}$$

Особливий інтерес являє випадок руху тіл під діянням сили тяжіння.

1. Якщо тіло упущено (без поштовху), то воно буде рівноприскорено рухатися вертикально вниз. Цей рух визначається формулами:

$$v = gt; \quad s = \frac{gt^2}{2},$$

де g — прискорення сили тяжіння, рівне 981 *см/сек*^{2}. З цих двох формул, виключаючи час t, можна визначити кінцеву швидкість тіла при паданні з висоти h:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

2. Якщо тіло кинуто вертикально вниз з початковою швидкістю v_0, то

$$v = v_0 + gt; \quad s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

3. Якщо тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, то, вважаючи напрям угору позитивним, а вниз — негативним (отже, $j = -g$), маємо:

$$v = v_0 - gt; \; s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Звідси легко знайти час найвищого підняття t' і найбільшу висоту s_{max}. Справді, вважаючи $v = 0$, знаходимо $t' = \frac{v_0}{g}$, а підставивши це значення в другу формулу, знайдемо:

$$s_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

§ 21. Рух кинутого тіла. Розглянемо політ снаряда, кинутого з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Напрямимо вісь x горизонтально, а вісь y вертикально і розкладемо початкову швидкість v_0 на горизонтальну складову $v_0 \cos\alpha$ і вертикальну складову $v_0 \sin\alpha$.

Через те що сила тяжіння P горизонтальної складової не має, горизонтальна складова швидкості v_x залишається сталою:

$$v_x = v_0 \cos\alpha. \tag{16}$$

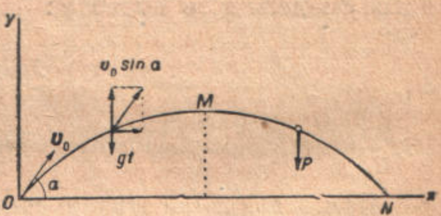

Рис. 18.

Абсциса x визначиться як шлях, пройдений у рівномірному русі з швидкістю $v_0 \cos\alpha$:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t. \tag{17}$$

Вертикальна складова швидкості v_y змінюється з часом: вона являє різницю між вертикальною складовою початкової швидкості $v_0 \sin\alpha$, напрямленої вгору, і швидкістю, яка напрямлена вниз і чисельно дорівнює gt і яку дістає снаряд під діянням сили тяжіння (рис. 18), тобто:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{18}$$

Ординату y знайдемо як різницю між переміщенням у рівномірному русі вертикально вгору з швидкістю $v_0 \sin\alpha$ і, значить, чисельно рівним $v_0 \sin\alpha \cdot t$ і переміщенням по вертикалі вниз у рівноприскорюваному русі під діянням сили тяжіння, чисельно рівним $\frac{gt^2}{2}$, отже:

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \tag{19}$$

Визначимо час найвищого підйому t', максимальну висоту y_{max} і далекість польоту x_{max}.

Через те що в точці M найвищого підйому вертикальна складова швидкості дорівнює нулеві, то з рівняння (18):

$$t' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{20}$$

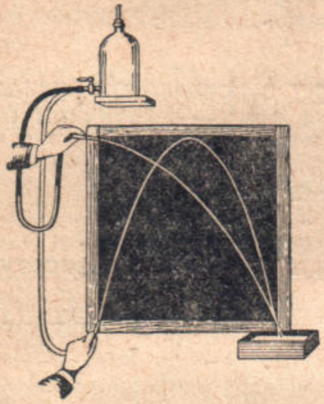

Рис. 19. Найпростіше демонстрування траєкторії кинутого тіла.

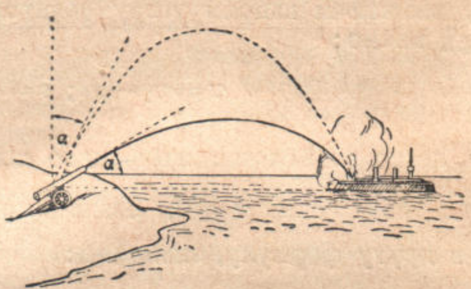

Рис. 20. Нависна і настильна стрільба.

Вставляючи у рівняння (19) $t = t'$ і в рівняння (17) $t = 2t'$, дістанемо висоту і далекість польоту:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \tag{21}$$

$$x_{max} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}. \tag{22}$$

При заданій початковій швидкості v_0 вираз (22) буде мати найбільше значення, якщо $\sin 2\alpha = 1$, тобто при $\alpha = 45°$. Отже, найбільшу далекість польоту снаряда дістаємо при куті підйому, що дорівнює 45°.

Далі, через те що $\sin 2\alpha = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2(90° - \alpha)$, то далекість при даній початковій швидкості v_0 буде та сама при куті кидання α і $90° - \alpha$; отже, є дві траєкторії, рухаючись по яких кинуте тіло попадає в ту саму точку. Одну з них (більш положисту) називають настильною, другу — нависною (рис. 20).

Виключаючи час з рівнянь (17) і (19), дістаємо рівняння траєкторії снаряда — параболу:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{23}$$

Ці рівняння виведено в припущенні, що повітря не чинить опору рухові кинутого тіла. При великих початкових швидкостях таке припущення не може бути прийняте, і в наведені рівняння мають бути введені істотні поправки. Траєкторія вже не буде параболою; її низхідна вітка буде значно крутішою від висхідної (балістична крива); далекість і висота польоту значно зменшуються.

§ 22. Тангенціальна і доцентрова сили. Щоб матеріальна точка рухалась по криволінійній траєкторії, на цю точку повинна діяти сила, напрямлена всередину вгнутості кривої. Розглянемо дві її компоненти (складові) по двох взаємно перпендикулярних напрямах — по дотичній і нормалі, а саме — тангенціальну і доцентрову сили.

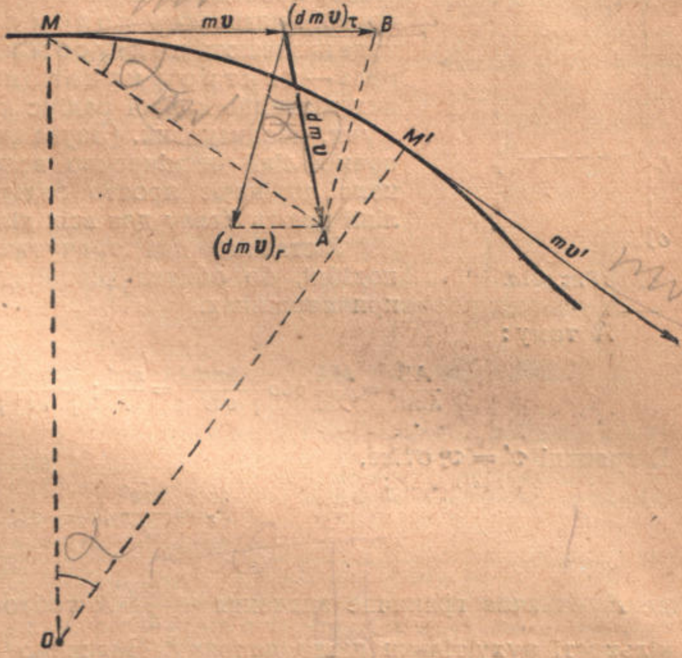

Рис. 21.

Нехай M і M' являють положення матеріальної точки, а $\boldsymbol{mv}$ і $\boldsymbol{mv'}$ — її кількість руху за два сусідніх нескінченно близьких моменти часу. Знайдемо зміну кількості руху за цей нескінченно малий проміжок часу dt. Для цього перенесемо вектор $\boldsymbol{mv'}$ паралельно самому собі в точку M (зобразивши його відрізком MA) і сполучимо кінці векторів $\boldsymbol{mv}$ і $\boldsymbol{mv'}$. Вектор $\boldsymbol{dmv}$ і являтиме геометричний приріст кількості руху за час dt.

Розкладемо тепер вектор $\boldsymbol{dmv}$ на два складових. Для цього відкладемо від точки M у напрямі $\boldsymbol{mv}$ відрізок MB, що дорівнює MA ($= \boldsymbol{mv'}$), сполучимо точки A і B і проведемо з кінця вектора $\boldsymbol{mv}$ відрізок, рівний і паралельний BA. Ми дістанемо паралелограм, в якому діагоналлю є зміна кількості руху $\boldsymbol{dmv}$; сторони цього паралелограма позначимо $(\boldsymbol{dmv})_\tau$ і $(\boldsymbol{dmv})_r$.

Вектор $(\boldsymbol{dmv})_\tau$ характеризує зміну кількості руху тільки щодо величини; він чисельно дорівнює приростові кількості руху; на відміну від геометричного приросту кількості руху $\boldsymbol{dmv}$ ми позначимо числовий приріст кількості руху через dmv[1]); вектор $(\boldsymbol{dmv})_\tau$ за числовим значенням дорівнює dmv; напрямлений цей вектор по дотичній до траєкторії. Поділяючи $(\boldsymbol{dmv})_\tau$ на dt, дістанемо силу, яка робить цю зміну кількості руху; це і є тангенціальна сила. Позначимо її через F_τ:

$$F_\tau = \frac{dmv}{dt} = m\frac{dv}{dt} \tag{24}$$

[на рис. 21*a* вектор F_τ зображено трохи довшою стрілкою, ніж вектор $(\boldsymbol{dmv})_\tau$; в дійсності довжина стрілки, яка зображає вектор сили, значно більша довжини стрілки, яка зображає елементарну кількість руху, бо ділення на dt тотожне множенню на дуже велике число $n = \frac{1}{dt}$].

---

[1]) Літера v, надрукована нежирним шрифтом, означає числове значення вектора $\boldsymbol{v}$.

Розглянемо тепер вектор $(dmv)_r$ (або, що те ж саме, вектор, зображуваний відрізком BA). Він характеризує зміну кількості руху щодо напряму.

У точках M і M' ставимо перпендикуляри до швидкостей v і v'. Вони перетнуться в якійсь точці O. Нескінченно малу дугу кривої MM' можна розглядати як дугу кола радіуса $OM=r$. Коло, дуга якого збігається з елементом кривої у даній точці (коло, проведене через три нескінченно близькі точки кривої), називають колом кривизни; радіус цього кола називають радіусом кривизни; а центр цього кола — центром кривизни. Зрозуміло, що для різних дільниць кривої радіус кривизни буде, взагалі кажучи, неоднаковий. (Зауважимо, що радіус кривизни прямої лінії нескінченно великий, а радіус кривизни кола дорівнює просто радіусові цього кола; ці дві лінії мають сталу для всіх ділянок кривизну).

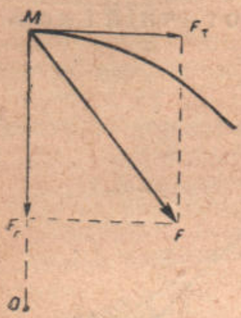

Рис. 21*a*.

Зіставимо два трикутники MOM' і AMB. Вони подібні, бо обидва рівнобедрені і мають рівні кути при вершинах.

А тому:

$$\frac{AB}{MM'}=\frac{MA}{OM} \text{ або } \left|\frac{(dmv)_r}{vdt}\right|=\frac{mv'}{r}; \quad \left|\frac{(dmv)_r}{dt}\right|=\frac{mv'v}{r}.$$

В границі $v'=v$, отже,

$$F_r=\frac{mv^2}{r}, \tag{25}$$

де F_r означає граничне значення $\frac{(dmv)_r}{dt}$, тобто силу, яка викликає зміну кількості руху тільки щодо напряму. Виясним граничний напрям BA, а значить, і сили F_r. У трикутнику AMB кут при вершині M прямує до нуля, і тому напрям BA в границі буде перпендикулярний до v, тобто збігатиметься з напрямом радіуса кривизни. Отже, сила F_r напрямлена по радіусу до центра кривизни; ця сила має назву доцентрової сили.

Таким чином, *під час руху матеріальної точки по криволінійній траєкторії діюча на точку сила геометрично складається з сили тангенціальної, чисельно рівної* $F_\tau=m\frac{dv}{dt}$ *і напрямленої по дотичній, і сили доцентрової, чисельно рівної* $F_r=m\frac{v^2}{r}$ *і напрямленої по нормалі до центра кривизни* (рис. 21*a*).

З виразів для тангенціальної і доцентрової сил випливає, що спричинювані цими силами прискорення будуть відповідно дорівнювати: тангенціальне $j_\tau=\frac{dv}{dt}$, доцентрове $j_r=\frac{v^2}{r}$ (де r — радіус кривизни). Отже, чисельно повне прискорення виразиться такою формулою [1]):

$$j=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}. \tag{26}$$

[1]) Кут між векторами j_τ і j_r дорівнює прямому. Повне прискорення зобразиться діагоналлю прямокутника. Застосовуючи теорему Піфагора, дістаємо для числового значення повного прискорення наведену в тексті формулу.

§ 23. Третій Ньютонів закон механіки. Ньютон так сформулював третій закон:

Діянню завжди є рівне й супротивне протидіяння, інакше — взаємодіяння двох тіл одного на одне між собою рівні і напрямлені у протилежні сторони.

Зміст цього закону він пояснює такими словами: „Якщо хто натискує пальцем на камінь, то і палець його також натискується каменем. Якщо кінь тягне камінь, прив'язаний до каната, то і, навпаки, кінь з рівним зусиллям відтягується до каменя, бо натягнутий канат своєю пружністю робить однакове зусилля на коня в сторону каменя і на камінь у сторону коня... Якщо будьяке тіло, ударившись об друге тіло, змінює його кількість руху на скількинебудь, то воно само зазнає в своїй власній кількості руху тієї самої зміни, але зворотно напрямленої, бо тиски цих тіл одне на одне постійно рівні".

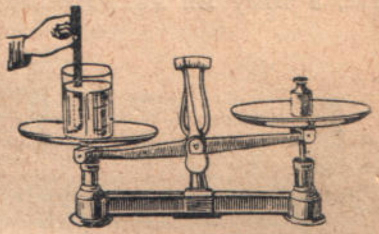

Рис. 22. До тіла, зануреного в рідину, з боку рідини прикладена виштовхна сила; протидіяння виявляється ніби у збільшенні ваги рідини.

Тіла діють одне на одне завжди взаємно; наприклад, Земля притягує камінь з силою його ваги, з тією ж силою і камінь діє на Землю. Ми говоримо: „камінь падає на Землю"; насправді має місце зустрічний рух, але згідно з другим законом прискорення Землі незмірно мале, воно в стільки ж разів менше прискорення, що його зазнає камінь, у скільки разів маса каменя менша за масу Землі.

Допускаючись помилки, іноді міркують так: якщо діюча сила завжди спричиняє рівну щодо величини, але протилежно напрямлену силу протидіяння, то результуюча сила завжди ніби дорівнює нулеві; як же в такому разі можна розглядати сили як причину рухів? Що треба мати на увазі, щоб не дійти до цієї суперечності? Тільки *те*, що діяння є сила, прикладена до одного з взаємодіючих тіл, а протидіяння — сила, прикладена до другого тіла; отже, кожне з тіл перебуває під діянням однієї сили, яка й спричиняє його рух.

Діяння і протидіяння завжди напрямлені в протилежні сторони; ясно, отже, що два тіла в наслідок самого тільки взаємодіяння одне на одне не можуть почати рух обидва в тому самому напрямі. Якщо є прискорений рух сукупності двох будьяких взаємодіючих одне на одне тіл (наприклад, коня і воза), то сила, яка надає цим тілам прискорення, є завжди якась зовнішня сила, прикладена одночасно до обох цих тіл і спричинювана взаємодіянням одного з цих тіл або обох з якимось третім тілом, відносно якого розглядані тіла зазнають прискорення. Так, коли кінь тягне віз, коли паровоз рухає вагон, коли один з двох людей, переборюючи опір другого, тягне його за собою, — рушійною силою є взаємодіяння коня або людини з грунтом, взаємодіяння коліс паровоза з рейками, взагалі — протитиск опори (важлива горизонтальна складова протитиску).

В усіх цих випадках є два види взаємодіяння з опорою: поперше, протитиск опори, подруге, тертя. Щоб протитиск опори, хоча б у деякій своїй частині, став рушійною або загальмовуючою силою, він повинен бути напрямлений під гострим, а не під прямим кутом до поверхні опори; у згадуваних випадках руху коня і воза, руху поїзду і т. ін. вертикальна складова протитиску зрівноважується вагою; щождо горизонтальної складової протитиску, то вона може існувати, лише оскільки є тертя [1]).

[1]) А тому горизонтальну складову протитиску опори часто називають ведучим тертям на відміну від гальмуючого тертя.

Якщо тертя немає, то протитиск завжди напрямлений нормально до поверхні опори і тому він нездатний ні спричинити, ні загальмувати рух тіла у напрямі, паралельному цій поверхні. На ідеально гладкій поверхні людина не змогла б зробити жодного кроку; під час ожеледі, коли тертя мале, кінь не може зрушити воза; якби не було тертя між ведучими колесами паровоза і рейками, паровоз не зміг би зрушити поїзд з місця.

Щоб надати собі руху, треба мати опору, від якої можна було б відштовхнутися. Так, стоячи на плоту, ми приводимо плот у рух, відштовхуючись жердиною від берега або від дна річки. Всякий опір рухові може бути використаний як більш або менш надійна опора для подібного відштовхування. Вода чинить досить значний опір рухові занурених у неї тіл, а тому ми маємо можливість привести човен у рух, занурюючи весла у воду й просуваючи їх у воді в напрямі, протилежному тому, куди ми хочемо направити човен. Повітря також чинить деякий опір рухові, тільки через те й можливий політ птахів і аеропланів.

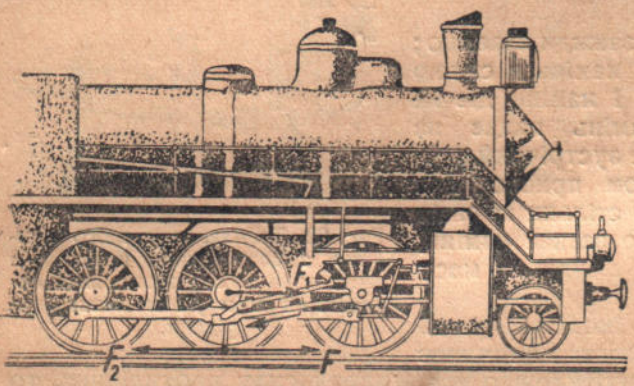

Рис. 23. Тертя напрямлене завжди протилежно відносній швидкості ковзання; ведуче колесо паровоза обертає пара сил F_1 і F_2, яка змушує його ковзатися по рейці; а тому сила тертя ковзання F, прикладена до бандажу колеса, напрямлена в сторону руху; вона зрівноважує одну з сил обертаючої пари (силу F_2); друга сила пари ($F_1 = F$) рухає вісь. Тертя катання гальмує рух.

За третім законом Ньютона діяння не може існувати без протидіяння, а тому жодна машина нездатна сама по собі розвинути силу, яка пускає її в рух; необхідна участь ще принаймні одного (зовнішнього щодо машини) тіла, протидіяння якого пустить машину в рух.

Одночасне виникнення цих двох протилежно напрямлених сил означає, згідно з другим законом, що обидва взаємодіючі тіла зазнають рівних, але протилежно напрямлених змін кількості руху. Наприклад, коли човен просувається вперед, то під тиском весел вода рухається назад. Поїзд, який рушає з місця, дає в зворотному напрямі поштовх рейкам, полотну залізниці і разом з ними усій земній кулі; через те ж, що Земля є велика маса, зрозуміло, що прискорення, якого вона набуває, надзвичайно мале порівняно з прискоренням, яке від цього взаємодіяння дістає поїзд.

§ 24. Статичний і динамічний вияви сил. У теоретичній механіці звичайно уявляють собі, що сила прикладена або до матеріальної точки, або до абсолютно твердого тіла (під абсолютно твердим тілом розуміють тіло зовсім не стисливе і зовсім не змінюване щодо форми). При такому спрощенні єдиним виявом сили буде її динамічне діяння, тобто надаване нею прискорення. Якщо будьяке тіло не зазнає прискорення, роблять висновок, що на це тіло не діє сила. З ширшого фізичного погляду це спрощення не завжди є доречним. Будьякий вантаж, що лежить на платформі, перебуває під діянням двох сил, які зрівноважуються на ньому: сили ваги і рівного, але зворотно напрямленого протитиску опори. Речовина вантажу с т и с н у т а цими силами, і стан її відмінний від того, який був би, якби на вантаж не діяли ніякі сили. Щоб застосувати висновки теоретичної механіки до використання існуючих всередині тіла тисків або натягів, які виникають у наслідок зрівноважування на цьому тілі двох рівних, але протилежно напрямлених сил,— треба розглядати тіло як сукупність матеріальних точок, а для цього необхідно створити особливі гіпотези про будову тіла.

Маючи на увазі самі тільки абсолютно тверді тіла і системи матеріальних точок, можна додержуватися уявлення про силу як про добуток маси на прискорення (без урахування статичного діяння сили); проте, це уявлення вносить у механіку тільки суто математичні спрощення; з погляду фізики ними слід користуватися з деякою обережністю.

Згідно з Ньютоновим розумінням сила може виявлятися двояко: динамічно, надаючи тілу прискорення, і статично, змушуючи тіло тиснути на інші тіла, які перешкоджають рухові розгляданого тіла. Щоб пояснити відміну цього розуміння сили від того, яке бере до уваги тільки динамічне діяння, ми розглянемо з обох точок зору кілька простих прикладів рухів.

Якийсь вантаж покладено на платформу, яку утримують канатом (рис. 24). До вантажу прикладена сила його ваги P. Коли платформа нерухома, а також і тоді, коли платформу опускають з сталою швидкістю (без прискорення), вся прикладена до вантажу сила ваги виявляється статично в тиску, що його вантаж робить на платформу. Коли канат відпускають так, що платформа падає прискорено, то сила ваги частково виявляється динамічно, надаючи вантажеві прискорення j, інша ж її частина виявляється в статичному тиску вантажу на платформу: $F_c = P - mj$. Отже, у цьому разі вантаж тисне на платформу з меншою силою, ніж коли вантаж опускають рівномірно. З погляду спостережника, який тримає канат, вантаж, опусканий з прискоренням, тим більш „втрачає на вазі“, чим з більшим прискоренням він падає. Якщо вантаж падає разом з платформою „вільно“ (тобто має повне прискорення g, якого здатна надати тілу сила тяжіння, що цілком виявляється динамічно), то вантаж не буде зовсім тиснути на платформу, і канат зовсім не буде натягнутий.

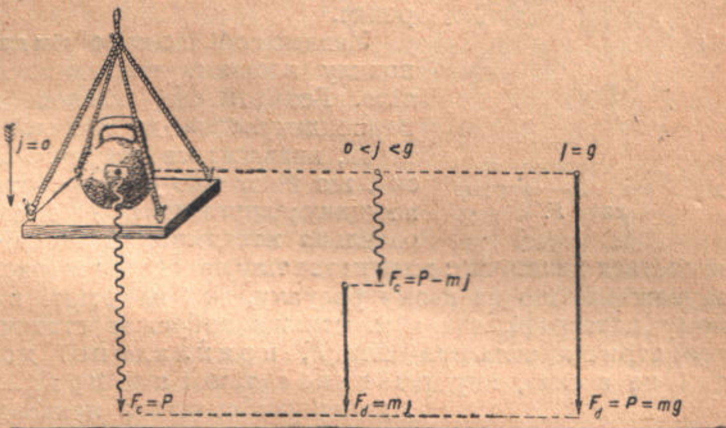

Рис. 24. Статичний F_c і динамічний F_d вияви ваги („втрата ваги“ при паданні з прискоренням).

До цього ж прикладу „невільного“ падання вантажу можна підійти інакше. Можна міркувати так. Сила ваги надає вантажеві прискорення g, напрямленого вниз; коли канат натягнуто з силою повної ваги вантажу, то тиск платформи на вантаж надає вантажеві прискорення g, напрямленого вгору; геометрична сума прискорень, що їх дістає вантаж, дорівнює нулеві; отже, вантаж буде нерухомий. Якщо вантаж падає з прискоренням j замість g, то це означає, що тиском платформи йому було надане прискорення вгору $(g-j)$, і, отже, натяг каната дорівнює $P - mj$. Вантаж буде падати з прискоренням g, коли платформа на нього не тисне, тобто коли канат не натягнутий.

У межах звичайних задач механіки обидва погляди математично рівноправні. Виходячи з Ньютонового розуміння сили, можна зробити висновок, що „рушійною“ силою, тобто силою, яка надає тілу прискорення, завжди є геометрична сума всіх прикладених до тіла сил. А це все, що потрібне для послідовного застосування формального уявлення про силу як про добуток маси на прискорення.

В розглянутому нами випадку невільного падання вантажу статичне виявлення ваги, тобто тиск вантажу на платформу, викликає за третім законом протитиск (р е а к ц і ю) платформи. Коли вантаж нерухомий, реакція зрівноважує вагу. Коли вантаж падає з деяким прискоренням, реакція платформи зрівноважує ту частину ваги вантажу, яка виявляється статично; решта ваги (що дорівнює саме рівнодійній прикладених до тіла сил) залишається незрівноваженою і надає вантажеві прискорення.

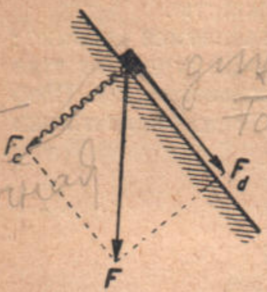

Рис. 25. Статична F_c і динамічна F_d — складові сили F.

Рис. 26. Рушійна сила F_d є рівнодійна прикладених до тіла сил: сили F і реакції опори R.

Уявимо собі, що на зовсім гладку похилу площину покладено якесь тіло. Геометрична складова ваги, перпендикулярна до похилої площини, виявляється статично в тиску, що його тіло буде робити на площину; друга складова ваги, паралельна напрямові площини, виявляється динамічно: вона надає тілу прискорення (рис. 25; зауважимо, що на цьому рисунку, як і на решті в даному параграфі, звивиста стрілка зображає статичний вияв сили; це є геометрична складова сили F, п р и к л а д е н о ї д о т і л а, але разом з тим це є сила, яку р о з в и в а є тіло і яка п р и к л а д е н а д о о п о р и; динамічна складова прикладена тільки до розгляданого тіла). Статичний вияв сили викликає рівну щодо величини, але протилежну щодо напряму реакцію опори. Тіло буде рухатися під діянням рівнодійної двох прикладених до нього сил: ваги і реакції (рис. 26), але ця рівнодійна і є та сила, яку ми позначали як динамічний вияв тяжіння розгляданого тіла.

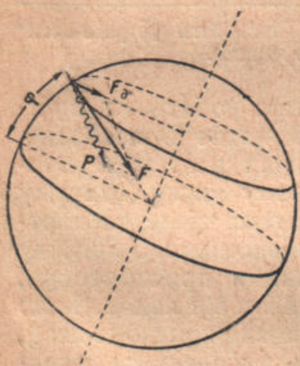

Рис. 27.

§ 25. Залежність ваги і прискорення сили тяжіння від географічної широти місцевості. Внаслідок добового обертання Землі ми не можемо сказати про будьяке тіло, яке спокійно лежить на поверхні Землі, що це тіло не має прискорення. Справді, оскільки дане тіло бере участь у добовому обертанні Землі, очевидно, що воно має спільне з даною місцевістю доцентрове прискорення j_r, яке лежить у площині, паралельній екваторові, і напрямлене до осі обертання (рис. 27). Сила F, з якою Земля притягує будьяке тіло, що перебуває в стані спокою на її поверхні, частково виявляється статично у тиску P, що його робить тіло на опору (цю складову і називають „вагою" $F_c = P$); друга геометрична складова $F_д$ сили F виявляється динамічно, надаючи тілу доцентрового прискорення, яке втягує його в добове обертання Землі. Для екватора це прискорення є найбільшим; для полюсів воно дорівнює нулеві. А тому, якщо будьяке тіло перенести з полюса на екватор, то воно трохи „втратить на вазі".

Якби Земля мала точно сферичну форму, то втрата на вазі на екваторі дорівнювала б (рівняння 25, § 22):

$$\Delta P = F_д = \frac{mv^2}{R},$$

де v — колова швидкість на екваторі. Нехай T означає число секунд у добі, тоді

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

і

$$\Delta P = 4\pi^2 R \frac{m}{T^2}.$$

Звідси, беручи до уваги, що $P = mg$, знаходимо відносну втрату на вазі:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2} = 0{,}0034.$$

Отже, якби Земля мала точно сферичну форму, то кожний кілограм маси, перенесений з полюса Землі на екватор, втратив би на вазі приблизно $3^1/_2$ *г* (це можна було б виявити шляхом зважування на пружинних терезах). Дійсна втрата на вазі ще більша (близько $5^1/_3$ *г*), бо Земля має трохи сплюснуту форму, і тому її полюси розміщені ближче до центра Землі, ніж місцевості на екваторі.

Доцентрове прискорення добового обертання лежить у площині, паралельній екваторові (рис. 27); воно напрямлене під кутом φ до радіуса, проведеного з даної місцевості в центр Землі (φ — широта місцевості). Доцентрову силу $\boldsymbol{F_\partial}$ ми розглядаємо як одну складову сили тяжіння $\boldsymbol{F}$, вагу $\boldsymbol{P}$ — як другу геометричну складову тієї ж сили $\boldsymbol{F}$. Отже, напрям „прямовисної лінії“ для всіх місцевостей, крім екватора і полюсів, не збігається з напрямом прямої, проведеної до центра Землі. Проте, кут між ними малий, бо доцентрова складова сили тяжіння дуже мала порівняно з вагою.

Стиск Землі, що стався в наслідок добового обертання, саме такий, що прямовисна лінія (а не пряма, проведена до центра Землі) скрізь перпендикулярна до поверхні Землі. Формою Земля являє собою е л і п с о ї д о б е р т а н н я; діаметр Землі, що збігається з віссю обертання, на $\frac{1}{297}$ менший її екваторіального діаметра.

Розміри земного еліпсоїда, визнані міжнародною угодою (у 1924 році) як найбільш точні, такі:

екваторіальний радіус . . . $= 6378{,}4$ *км*
полярний радіус . . . . $= 6356{,}9$ „
середній радіус . . . . $R = 6371{,}2$ „

(середній радіус — це радіус кулі, рівновеликої за об'ємом земному еліпсоїдові).

Для обчислення прискорення сили тяжіння g залежно від географічної широти місцевості φ, а, отже, і для визначення ваги тіл на висоті рівня моря ($P = mg$) Міжнародним геодезичним конгресом у 1930 році прийнята формула:

$$g = 978{,}049\,(1 + 0{,}005288 \sin^2 \varphi - 0{,}000006 \sin^2 2\varphi).$$

Наводимо значення прискорення сили тяжіння для різних широт (на висоті рівня моря):

На широті 45° („нормальне прискорення“) $g = 980{,}665$ *см/сек*^{2}.

Таблиця 1.

Широта $\varphi =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Прискорення $g =$	978,05	978,20	978,65	979,34	980,18	981,08	981,92	982,61	983,06	983,22

§ 26. Сили інерції. Відцентрова сила. Сили інерції виявляються статично в тиску, що його будьяке тіло, розвиваючи силу інерції, робить на інше тіло, яке спричиняє зміну стану руху першого тіла. Вантаж, що його прискорено піднімають угору, в наслідок сили інерції робить додатковий тиск на платформу (рис. 28). Спостережникові, який тягне канат, здається, що вантаж тим дужче „збільшується на вазі“, чим з більшим прискоренням його піднімають.

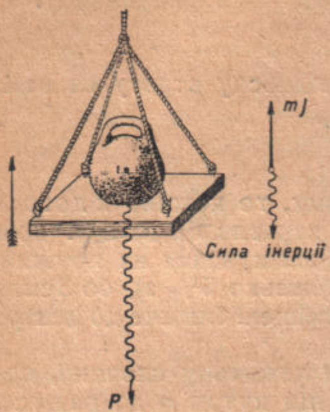

Рис. 28. „Виграш на вазі“ при піднятті з прискоренням відбувається коштом сили інерції, що її розвиває тіло.

М'яч, кинутий об стінку, робить силою інерції тиск на стінку. Якби ми добре знали закони взаємодіяння в найдрібніших частинках речовини і якби в якийсь момент часу ми якнебудь сфотографували розміщення всіх частинок продавленої ударом об стінку гумової оболонки м'яча, то ми переконалися б, що тиск м'яча на стінку є результатом пружних сил, які виникли в наслідок порушеного ударом об стінку нормального розміщення частинок м'яча. Тиск одного тіла на друге завжди являє собою результат або пружних зміщень частинок речовини абож результат молекулярних ударів.

Але який би не був „механізм“ сили, з якою одно тіло тисне на друге або тягне його за собою, ми називаємо цю силу силою інерції, якщо ця сила в и н и к л а в результаті зміни стану руху хоча б одного з взаємодіючих тіл. Отже, те саме фізичною суттю явище в механіці ми позначаємо, залежно від його походження, в одних випадках як силу інерції, в інших — просто як статичний вияв сили. Наприклад, про віровку, яку ми тримаємо за один кінець і до другого кінця якої прив'язана гиря, що обертається з допомогою цієї віровки по колу, ми говоримо, що віровка розтягнута відцентровою силою інерції. Фізичний вияв цієї сили такий самий, як коли б віровка була натягнута якоюсь статичною силою.

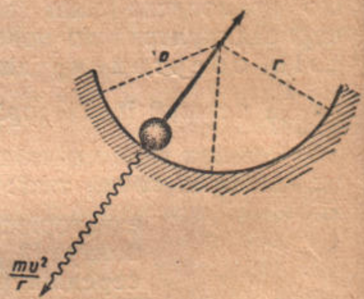

Рис. 29. Доцентрова сила проходить через центр кривизни. Відцентрова сила протилежна їй і прикладена до опори.

Завжди, коли тиск або натяг з боку будьяких тіл змушує якесь тіло, що рухається, відхилятися від прямолінійного шляху, ми говоримо, що це тіло, яке відхиляється від прямолінійного шляху, розвиває в і д ц е н т р о в у с и л у і н е р ц і ї, напрямлену протилежно тій доцентровій силі, з якою тіла, що спричинили викривлення траєкторії, тиснуть на тіло, що рухається, або тягнуть його (рис. 29). За законом рівності діяння і протидіяння ці дві сили чисельно завжди однакові, а тому (§ 22) відцентрова сила інерції визначається формулою:

$$F_r = \frac{mv^2}{r}. \tag{27}$$

Масивна куля, підвішена на міцній нитці, натягує її під час спокою з силою тяжіння кулі P, але, будучи приведена в коливний рух, вона натягує її з силою F, більшою, ніж її тяжіння, на величину відцентрової сили інерції, яку вона розвиває:

$$F = P + \frac{mv^2}{r}.$$

Якщо куля спершу була відхилена до горизонтального положення нитки (рис. 30), на що потрібна була витрата роботи проти сили тяжіння, рівна $P \cdot r$, то в момент проходження кулі через найнижче положення її швидкість визначиться з умови, що в цей момент уся надана кулі потенціальна енергія дорівнює її кінетичній енергії:

$$P \cdot r = \frac{mv^2}{2}.$$

Звідси:

$$\frac{mv^2}{r} = 2P.$$

Отже, в цьому випадку натяг нитки при проходженні кулі через положення рівноваги буде дорівнювати потроєній вазі кулі.

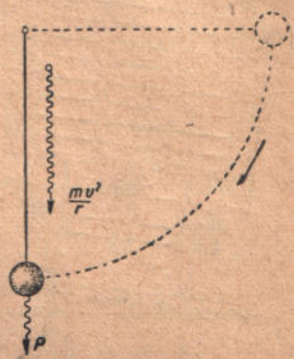

Рис. 30. У момент проходження кулі через найнижче положення натяг нитки дорівнює потроєній вазі кулі.

Автомобіль, проїжджаючи по мосту, що трохи прогинається під його вагою, тисне на міст з силою, яка перевищує вагу автомобіля на величину відцентрової сили інерції (рис. 31*a*). А тому при інших рівних умовах тиск автомобіля на вгнутий міст буде тим більший, чим більша швидкість руху автомобіля. Щоб уникнути діяння відцентрових сил, мости роблять звичайно трохи опуклими (рис. 31*b*). У цьому разі вага машин, які швидко рухаються по мосту, частково виявляється динамічно, надаючи їм доцентрового прискорення, напрямленого вниз; тому тиск на опуклий міст машин, які швидко по ньому проїжджають, буде менший їх ваги.

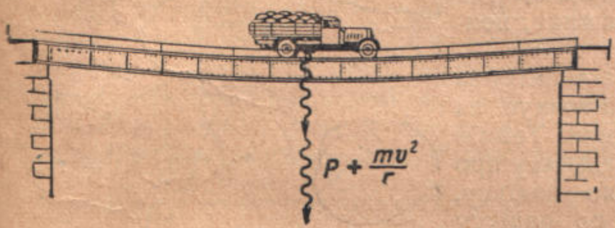

Рис. 31*a*. Проїжджаючи по вгнутому мосту, автомобіль тисне на міст з силою, більшою за свою вагу.

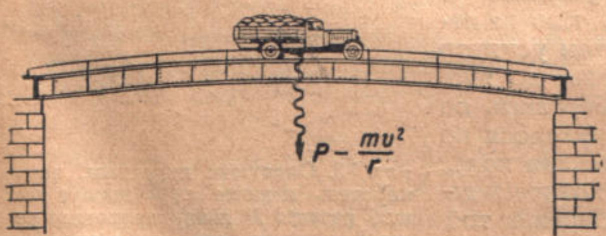

Рис. 31*b*. Проїжджаючи по опуклому мосту, автомобіль тисне на міст з силою, меншою за свою вагу.

На закругленнях колії колеса вагонів поїзду або трамваю тиснуть на зовнішню рейку в горизонтальному напрямі у наслідок розвиваної вагоном відцентрової сили інерції. Щоб вагон не перекинувся, результуючий тиск від вагона повинен попадати в середину між рейками; рівнодійна тиску, утворюваного вагою вагона, і відцентрової сили повинна бути напрямлена перпендикулярно до поверхні рейки; для цього на закругленнях зовнішню рейку прокладають трохи вище внутрішньої (рис. 32).

Для цього ж конькобіжець, описуючи коло, нахиляє свій корпус до центра кола (рис. 33).

Сили інерції часто руйнуюче діють на окремі частини машин. Коли колесо насаджене на вісь так, що вся маса його розміщена симетрично відносно осі обертання, то відцентрові сили інерції, розвивані окремими частинками колеса, зрівноважуються на осі обертання і позначаються тільки в пружному натягу речовини колеса. При дуже великих швидкостях цей натяг може привести до розриву колеса. Але якщо маса колеса розміщена відносно осі обертання несиметрично, то вже при порівняно невеликих швидкостях відцентрові сили інерції, які в цьому разі не зрівноважуються на осі, можуть привести до поламу осі.

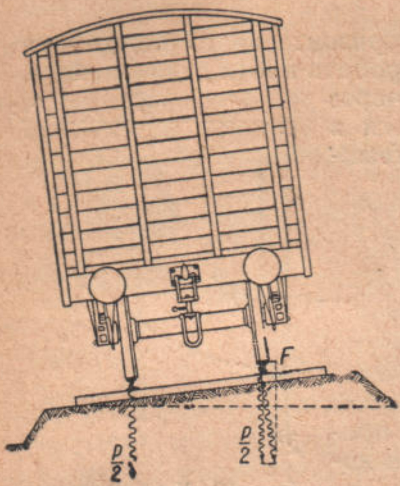

Рис. 32. На закругленнях зовнішню рейку кладуть вище внутрішньої.

У коліс паровоза несиметричний розподіл сил інерції здатний створити односторонній тиск на вісь у кілька тонн; у зв'язку з цим при обертанні такого колеса тиск колеса на рейку то збільшується (коли результуюча незрівноважених відцентрових сил напрямлена вниз), то зменшується (коли вона напрямлена вгору) — рейка ніби перебуває під дінням ударів важкого молота.

При проектуванні будьякої нової машини детально розраховують сили інерції, які можуть виникнути в ній при різних умовах її роботи. З виявом незрівноважених сил інерції доводиться провадити боротьбу за допомогою точного розподілу мас і погодженості рухів окремих частин машини.

Але сили інерції, зокрема відцентрові сили, мають у техніці також і позитивне застосування, досить велике і різноманітне (робота молотів, відцентрові машини, центрофуги і т. ін.).

Зауважимо, що термін „відцентрова сила" не зовсім вдалий; він наштовхує на неправильне розуміння цієї сили. Термін „відцентрова сила" наводить на думку про р у х від центра обертання по радіусу. Хоч відцентрова сила і діє по радіусу від центра, але ніякого руху в цьому напрямі вона не викликає і нездатна викликати, бо вона прикладена до „зв'язків"[1]). Якщо зв'язки, які затримують тіло на незмінній віддалі від центра, раптом усунуто (наприклад, розірвалася вірьовка, до якої прив'язано камінь, що його обертають по колу; рис. 34), то тіло, яке рухалося по колу, буде віддалятися від центра кола, звичайно, не по радіусу, а по дотичній до кола, бо воно за інерцією збереже той напрям швидкості, який воно мало в момент розривання зв'язків.

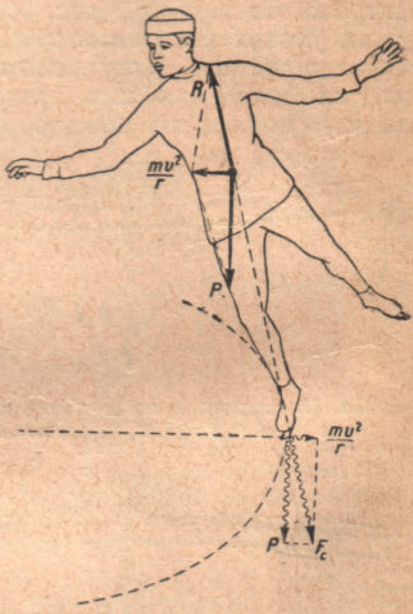

Рис. 33. Описуючи дугу кола, ковзанярбіжець нахиляє свій корпус так, щоб реакція R льоду проходила через його центр ваги; тоді рівнодійна реакції R і ваги P дає доцентрову силу.

§ 27. Механічна система. Кілька тіл (або кілька матеріальних точок), розглядуваних разом, називають м е х а н і ч н о ю с и с т е м о ю.

[1]) Під „зв'язками" в механіці розуміють існуючі обмеження у волі руху розглядуваних тіл. Наприклад, щодо обода колеса спиці відіграють роль зв'язків; для поїзду в цілому роль зв'язків виконують рейки і т. ін.

Наприклад, механічною системою є: поїзд (паровоз, тендер, вагони), сонячна система (Сонце і планети), атом (ядро атома і електрони, які обертаються навколо нього), всяка машина, будьяке тіло, якщо його розглядати як сукупність частинок, і т. ін.

На кожне з тіл механічної системи (на кожну матеріальну точку цієї системи) діють сили двоякого походження.

Поперше, всяке тіло взаємодіє з іншими тілами системи (вагон — з іншими вагонами; Сонце — з планетами; частини машини — між собою); сили такого взаємодіяння називають *внутрішніми* силами системи.

Подруге, тіла (матеріальні точки) механічної системи зазнають діяння сил від тіл сторонніх, які не входять у дану систему; такі сили називають *зовнішніми*. Для поїзду такими будуть: сила тяжіння, „ведуче тертя", гальмуюче тертя, опір повітря.

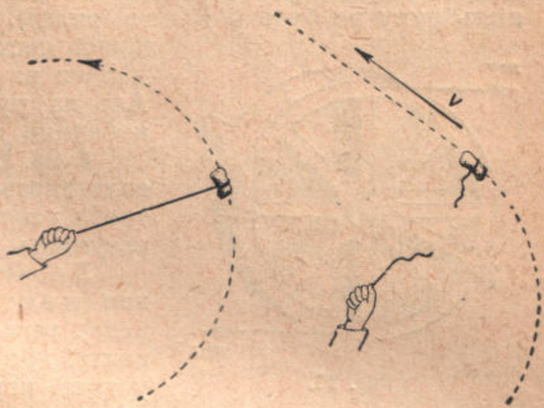

Рис. 34.

Поняття „внутрішні" і „зовнішні сили" відносні. Так, сили взаємодіяння між атомами, які утворюють молекулу, є зовнішніми відносно кожного з цих атомів як окремої системи, але ці сили стають внутрішніми, коли всю молекулу ми розглядаємо як єдину систему.

За третім законом, якщо яке-небудь тіло A діє на тіло B з деякою силою, то і тіло B діє на тіло A з рівною, але зворотно напрямленою силою; а тому всі внутрішні сили механічної системи попарно рівні й протилежні. У поїзді сила, з якою кожний вагон тягне наступний, дорівнює силі, з якою той його затримує. Якщо ми додамо геометрично всі внутрішні сили, прикладені до всіх тіл будьякої системи, то сили взаємодіяння кожних двох її тіл дадуть у сумі нуль, а тому *геометрична сума внутрішніх сил усякої механічної системи дорівнює нулеві.*

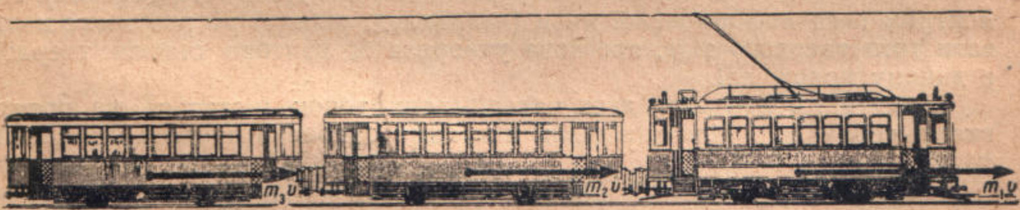

Рис. 35.

Зрозуміло, що третій закон можна застосовувати також і до зовнішніх сил, але, геометрично додаючи зовнішні сили, які діють на будьяку механічну систему, ми не повинні включати в цю суму сили протидіяння, бо вони прикладені до тіл, які не входять до складу системи. А тому сума діючих на систему зовнішніх сил у загальному випадку не дорівнює нулеві.

У § 14 вже говорилося про вектор кількості руху тіла. *Під кількістю руху механічної системи розуміють геометричну суму кількості руху всіх тіл, які входять у систему.*

На рис. 35 показано побудову кількості руху тривагонного трамвайного складу; кількість руху моторного вагона більша, ніж причепних, бо він має більшу масу.

Можливий випадок, коли всі тіла системи перебувають у русі, але загальна кількість руху системи дорівнює нулеві. Прикладом такого роду є обертання маховика навколо нерухомої осі (рис. 36); будьякі дві частинки маховика, симетрично розміщені відносно осі обертання, рухаються в протилежні сторони, і тому геометрична сума їх кількостей руху дорівнює нулеві; якщо вся маса маховика розміщена симетрично відносно осі обертання, то, геометрично додаючи кількості руху всіх частинок маховика, ми в сумі дістанемо нуль. Фізично це означає, що маховик як ціле не переміщується; якби він котився подібно до колеса, його кількість руху не була б рівною нулеві. Рух кожного окремого тіла механічної системи визначається сукупністю всіх діючих на нього сил і зовнішніх, і внутрішніх. Але на рух системи в цілому впливають, як побачимо далі, тільки зовнішні сили.

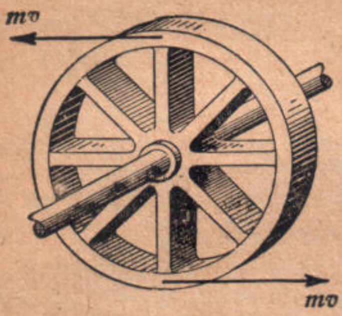

Рис. 35.

§ 28. Центр мас. Раніше ми вже не раз вживали виразу „рух системи в цілому". Цей вираз треба уточнити. Під рухом системи в цілому розуміють переміщення „центра мас" системи.

З початкового курсу фізики відоме поняття про центр ваги тіла. Коли говорять, що центр ваги кулі міститься в її геометричному центрі або що центр ваги трикутника лежить у точці перетину його медіан, то цим хочуть висловити ту думку, що при якому завгодно положенні кулі або трикутної пластинки відносно землі рівнодійна ваги всіх частинок тіла (вага тіла) діє по вертикальній прямій, яка незмінно проходить, якщо маємо кулю, через її центр, а якщо маємо трикутник,— через точку перетину медіан.

Якщо ми хочемо, щоб будьяке тіло при якому завгодно положенні перебувало в рівновазі, то силу, яка зрівноважує вагу, треба прикласти до центра ваги тіла.

Поняття центра ваги можна узагальнити на сукупність кількох тіл (на систему тіл). Таке узагальнення цілком природне: досить уявити собі всі дані тіла сполученими між собою твердими, але легкими (ніби „невагомими") стрижнями; сполучені так тіла утворять одно тіло, центр ваги якого і називають їх спільним центром ваги (центром ваги системи). Під центром ваги деформованої маси (наприклад, рідини) ми розуміємо центр ваги того твердого тіла, яке вона утворила б, раптово ставши твердою в даному положенні.

Зокрема, центр ваги двох матеріальних точок міститься на прямій, яка їх сполучає, і ділить віддаль між ними обернено пропорціонально їх масам.

Проте, про центр ваги взагалі можна говорити, лише маючи на увазі тіла, які перебувають на земній поверхні, бо інакше саме поняття ваги стає неозначеним. Невід'ємною ж властивістю всякого тіла є його маса, а тому більш загальним і більш важливим є поняття про „центр мас".

Ц е н т р о м м а с двох матеріальних точок, незалежно від того, чи перебувають вони під діянням сили тяжіння, чи ні, називають точку, яка ділить віддаль між ними обернено пропорціонально їх масам. Центр мас трьох матеріальних точок ділить віддаль між центром мас будьяких двох з них і третьою матеріальною точкою обернено пропорціонально сумі перших двох мас і третій масі (рис. 37). Такий самий перехід від трьох матеріальних точок до чотирьох і взагалі до якого завгодно їх числа. Отже, центр ваги будьякого тіла, яке перебуває на поверхні землі, є одночасно центром маси цього тіла.

З самого означення виходить, що центр мас будьяких матеріальних точок міститься десь між ними і ніяк не може опинитися поза сферою, яка містить всередині себе всі дані маси.

Назва „центр мас" може бути виправдана такими міркуваннями. Уявимо, що між усіма частинками тіл, які утворюють систему, діють нескінченно зростаючі з часом сили притягання. За третім законом сили, взаємодіяння, прикладені до двох матеріальних точок, чисельно рівні. Наближаючись, коли ніщо тому не перешкоджає, під діянням цих сил одна до одної, обидві матеріальні точки будуть рухатися, згідно з другим законом Ньютона, з прискореннями, обернено пропорціональними їх масам, і так само будуть відноситися між собою при відсутності початкової швидкості пройдені ними до зустрічі шляхи, тобто матеріальні точки зійдуться в їх центрі мас. Прилучаючи до двох матеріальних точок третю, до трьох четверту і так далі, дістанемо той самий результат для якої завгодно механічної системи. (Всяке тіло ми можемо розглядати як сукупність його частинок). Отже, центр мас механічної системи є та точка, навколо якої зібралася б у вигляді надзвичайно щільного сферичного тіла вся маса системи, якщо між матеріальними точками системи діяли б нескінченно зростаючі з часом сили притягання.

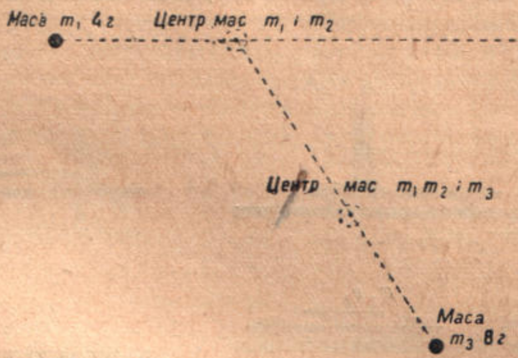

Рис. 37.

§ 29. Закон зберігання кількості руху. Напишемо рівняння, яке виражає другий закон Ньютона, для кожного з тіл механічної системи; рівнодійну прикладених до даного тіла внутрішніх сил системи позначимо вектором f, рівнодійну прикладених до нього зовнішніх сил — вектором F:

$$\frac{d(m_1v_1)}{dt}=f_1+F_1,$$

$$\frac{d(m_2v_2)}{dt}=f_2+F_2,$$

$$\frac{d(m_nv_n)}{dt}=f_n+F_n.$$

Додамо (за правилом многокутника) вектори, що стоять у лівих і в правих частинах цих рівнянь:

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2+\ldots+m_nv_n)=f_1+f_2+\ldots+F_1+F_2+\ldots$$

Сума внутрішніх сил, що знаходиться в правій частині рівняння,

$$f_1+f_2+\ldots+f_n,$$

дорівнює нулеві, бо всі ці сили попарно рівні щодо величини і протилежно напрямлені. Залишаються лише зовнішні сили. Отже дістаємо:

$$\frac{d}{dt}(m_1v_1+m_2v_2+\ldots+m\ v_n)=F_1+F_2+\ldots+F_n. \qquad (28)$$

Нескінченно мала зміна кількості руху механічної системи за час dt, поділена на dt, дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, які діють на систему. Іншими словами:

зміна з часом величини і напряму кількості руху системи визначається діючими на систему зовнішніми силами. Внутрішні сили не можуть змінити кількості руху системи в цілому.

Закон зберігання кількості руху є одним з найважливіших законів фізики. Наведемо кілька прикладів, які пояснюють цей закон.

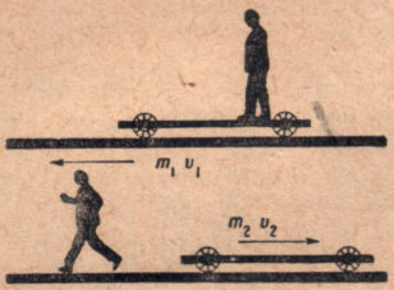

Рис. 38.

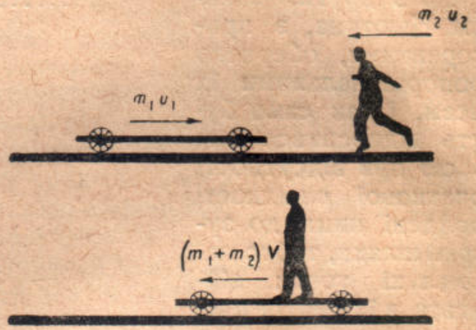

Рис. 39.

Коли людина, що стояла раніше нерухомо на візку, стрибає вперед, то візок відкочується назад, отже, їх сумарна кількість руху, що дорівнювала нулеві, залишається рівною нулеві (рис. 38):

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Якщо людина стрибає на візок, який котиться їй назустріч (легкий або такий, що повільно рухається), то, спинившись на ньому, вона буде рухатися разом з візком з такою ж кількістю руху, якою була напочатку геометрична сума кількостей руху людини і візка (рис. 39):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Якщо людина пробіжить по нерухомо стоячому візку, не сповільнюючи швидкості свого руху, то візок залишиться стояти нерухомо (рис. 40).

При розриві шрапнелі осколки розлітаються в різні сторони, але ніколи не летять усі вниз або всі вгору від траєкторії снаряда. Геометрична сума кількостей руху осколків після розриву залишається такою самою, якою була кількість руху снаряда до розриву. Центр мас осколків шрапнелі, які розлітаються в різні сторони, і далі рухається по тій самій траєкторії, по якій рухався б снаряд, якби розриву не сталося (рис. 41).

Від внутрішніх сил кількість руху системи (або, що те ж саме, кількість руху її центра мас) не залежить. Але внутрішні сили можуть спричинити взаємний рух тіл системи одне відносно одного. При цьому зміни швидкостей двох тіл під дІянням внутрішніх сил обернено пропорціональні їх масам і протилежні щодо напряму.

Наприклад, коли людина стрибає з легкого візка, то візок з більшою швидкістю відкочується назад, тоді як важкий візок відкотиться повільно. Обидва ці рухи спричинені діянням внутрішніх сил; подібне виявлення внутрішніх сил має назву в і д д а ч а. Стоячи на коньках, кинемо вперед якунебудь важку річ; ми неминуче покотимося назад, але повільно, бо наша маса порівняно велика. При пострілі, якщо гармата не закріплена нерухомо (тобто нема зовнішнього протидіяння), вона відкочується назад.

Явищем віддачі пояснюється рух ракети: ракета вибухом (внутрішні сили) викидає назад гази; викинуті гази і сама ракета віддаляються в протилежні сторони від їх спільного центра мас. За останній час у техніці роблять спроби практичного застосування ракетних двигунів (автомобіль-ракета, ракетна дрезина).

§ 30. Теорема про рух центра мас. З закону зберігання кількості руху випливає важливий висновок про рух центра мас системи.

Припустимо, що зовнішніх сил немає, і уявимо, що всередині системи діють нескінченно зростаючі з часом сили взаємного притягання частинок і тіл, які утворюють систему. Тоді, продовжуючи спільний рух по інерції, всі матеріальні частинки системи будуть одночасно зближуватися і точкою їх зустрічі буде центр мас (§ 28). Далі вони будуть рухатися спільно, як одно тіло з масою

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n,$$

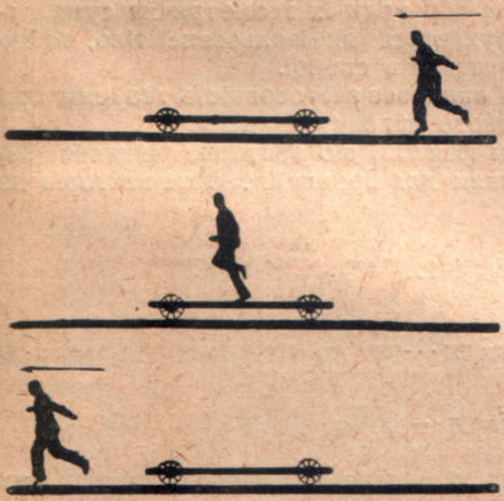

Рис. 40.

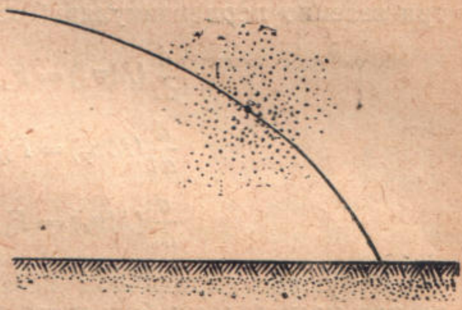

Рис. 41.

а через те що при відсутності зовнішніх сил кількість руху системи змінитися не могла, то швидкість v спільного руху мас, які сполучилися, повинна задовольняти умові:

$$Mv = \text{кількості руху системи.}$$

Центр мас системи, якщо уявити собі, що в ньому зосереджена вся маса системи, є, отже, носієм усієї кількості руху системи. Цей висновок має велике принципіальне значення і його формулюють так:

повна кількість руху механічної системи така сама, як коли б уся маса системи була зосереджена в її центрі мас і рухалася разом з ним.

А тому кількість руху системи називають також кількістю руху її центра мас. Рівність кількості руху системи і кількості руху її центра мас математично виражають формулою:

$$Mv = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_n v_n, \tag{29}$$

де M — маса всієї системи; v — швидкість руху її центра мас; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — маси окремих тіл (або матеріальних точок) системи; $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — їх швидкості.

Замінивши в рівнянні (28) геометричну суму кількостей руху тіл системи вектором кількості руху її центра мас, дістаємо:

$$\frac{d(Mv)}{dt} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n. \tag{30}$$

Це нове рівняння таке саме, як рівняння, що виражає другий закон Ньютона для тіла з масою M, яке рухається під діянням сили

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Звідси робимо висновок:

центр мас механічної системи рухається так, як коли б у ньому була зосереджена вся маса системи і на нього діяла б сила, яка дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, прикладених до тіл системи.

Цю теорему називають теоремою руху центра мас.

Зокрема, коли нема зовнішніх сил або коли їх геометрична сума дорівнює нулеві, центр мас системи рухається як ізольоване тіло, тобто рівномірно і прямолінійно, або залишається в спокої.

З незалежності діяння сил (§ 18) випливає застосовність теореми про рух центра мас до руху вздовж кожного напряму зокрема.

Математично це виражається тим фактом, що векторне рівняння (30) еквівалентне трьом скалярним рівнянням для проекцій тих же векторів на три взаємно перпендикулярні осі:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Mv_x) &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}, \\ \frac{d}{dt}(Mv_y) &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny}, \\ \frac{d}{dt}(Mv_z) &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}. \end{aligned} \tag{31}$$

Керуючись принципом незалежності діяння сил і досліджуючи рух центра маси вздовж будьякого напряму, наприклад, вздовж осі x-ів, ми можемо розглядати цей рух так, ніби руху в напрямі двох інших осей не було.

Крім прикладів, які були наведені в попередньому параграфі для пояснення закону зберігання кількості руху і які одночасно служать підтвердженням теореми про рух центра мас (нерухомість центра мас при явищах віддачі, рух центра мас при розриві шрапнелі), наведемо ще один важливий приклад.

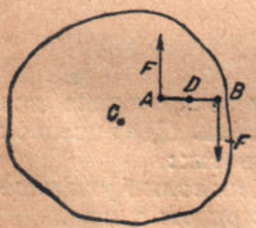

Рис. 42. Як не була б прикладена до тіла пара сил, вона обертає тіло навколо осі, яка проходить через центр мас.

Уявимо собі, що на тверде тіло, яке перебуває в спокої, почали діяти дві чисельно рівні, протилежно напрямлені паралельні сили (так звана „пара сил“). Як буде рухатися тіло? На перший погляд здається, що тіло почне обертатися навколо точки D, яка лежить посередині між точками прикладання пари сил (рис. 42). Але цей висновок помилковий (нерідко цю помилку роблять під час розв'язування задач). Геометрична сума прикладених зовнішніх сил F і $-F$ дорівнює нулеві. Отже, рух центра мас не зміниться. Він був у спокої і залишиться в спокої. Тіло буде обертатися навколо нерухомого центра мас C.

Якщо навантажити плоскодонний човен посередині важким камінням, багато важчим за вагу нашого тіла, і, сівши де завгодно, на носі або на кормі човна, гребти одним веслом уперед, а другим назад, то човен буде повертатися навколо середини (навколо центра мас). Якщо перекласти каміння на ніс човна, то центр мас, а з ним і центр обертання, переміститься до носа. Нарешті, якщо це каміння покласти на кормі, човен буде повертатися навколо центра мас, переміщеного до корми.

§ 31. Робота і енергія [1]). Подібно до уявлення про сили, уявлення про роботу запозичене з нашого повсякденного досвіду. Але звичайно ми вкладаємо в слова „робота“, „енергія“, „сила“ більш широкий і менш означений зміст, ніж у фізиці. У фізиці між поняттями про силу і роботу встановлено зв'язок з допомогою такого співвідношення:

роботу вимірюють добутком сили, діючої в напрямі переміщення, на величину переміщення точки прикладання сили.

Робота A, виконувана силою F, напрямленою під кутом α до переміщення, на шляху s дорівнює

$$A = F\cos\alpha \cdot s. \tag{32}$$

Сила, напрямлена перпендикулярно до переміщення ($\alpha = 90°$; $\cos\alpha = 0$), не виконує роботи; з цього погляду розклад сили на тангенціальну і доцентрову складові (§ 22) набуває особливого фізичного змісту; діяння доцентрової сили позначається тільки на зміні напряму руху, тим часом як тангенціальна сила виконує роботу, що виявляється або в збільшенні швидкості руху, або в подоланні сил опору чи тертя.

Про тіло (або систему тіл), яке має властивість виконувати певну роботу A, говорять, що це тіло (або система) має е н е р г і ю $W = A$.

У механіці розрізняють енергії кінетичну і потенціальну. Під к і н е т и ч н о ю енергією K розуміють енергію механічного руху тіла, вимірювану роботою, що її тіло здатне виконати при загальмовуванні тіла до повної зупинки. Під п о т е н ц і а л ь н о ю енергією розуміють енергію захованих форм руху, вимірювану роботою, що її тіло здатне виконати при переміщенні з одного положення у просторі в інше положення (наприклад, потенціальна енергія тяжіння).

Кінетичну енергію завжди називають досить невдалим терміном „жива сила“. Потенціальну енергію інакше називають е н е р г і є ю в з а є м о д і я н н я (потенціальна енергія тяжіння будьякого тіла є енергія взаємодіяння тіла і Землі; потенціальна енергія всесвітнього тяжіння є енергія взаємодіяння розгляданих мас).

Кожна форма руху характеризується певним видом енергії. Коли ми вивчаємо тепловий рух, то маємо справу з в н у т р і ш н ь о ю енергією. В ученні про електрику і магнетизм ми маємо справу з е л е к т р и ч н о ю енергією і з м а г н і т н о ю енергією.

В часи Н ь ю т о н а точного уявлення про енергію не існувало. Воно було встановлене в середині минулого сторіччя, коли дослідним шляхом була доведена е к в і в а л е н т н і с т ь т е п л о т и і р о б о т и, тобто їх взаємна перетворюваність із зберіганням незмінної пропорції між кількістю витраченої роботи і одержаного тепла. Тепер уявлення про енергію є в фізиці основним, і фізика в значній своїй частині є вченням про закони взаємоперетворення різних видів енергії.

Енергія, так само як і маса, незнищувана і нестворювана. Цей закон зберігання енергії домінує над усіма законами фізики. Для великого класу механічних рухів цей закон може бути виведений із законів Н ь ю т о н а, але у своєму всеосяжному змісті він прийнятий фізикою як незалежний від законів Н ь ю т о н а, встановлений д о с в і д о м принцип.

Щодо енергії роботу і теплоту слід розглядати як форми передачі енергії від одного тіла до іншого.

Енергія є „запас“ можливої, але такої, що ще не здійснилася, роботи; на відміну від цього поняття роботи зв'язане з уявленням про п р о ц е с пере-

---

[1]) Повторити з „Курсу фізики“ Ф. і П., ч. І, § 69—74.

міщення точки прикладання сили [1]). Коли якесь тіло виконує роботу, то енергія цього тіла зменшується; при цьому завжди існує якесь інше тіло, на яке витрачається (напрямлена) робота першого тіла і енергія якого, отже, зростає. „Робота — це зміна форми руху, розглядана з його кількісного боку... Зміна форми руху є завжди процесом, який відбувається принаймні між двома тілами" (Е н г е л ь с) [2]).

Докладніше ці питання будуть розглянуті в розділі, присвяченому викладові термодинаміки.

§ 32. Міри роботи і потужності. Найважливіші одиниці роботи вже були розглянуті вище. Тут ми подаємо зведення часто вживаних мір роботи і потужності.

Нагадаємо [3]), що потужністю W називають відношення роботи до того проміжка часу, за який вона була виконана:

$$W = \frac{A}{t} \quad \text{або, точніше,} \quad W = \frac{\delta A}{dt}. \tag{33}$$

Коли робота виконується рівномірно, тобто в однаковій кількості за кожний малий проміжок часу dt, то потужність вимірюється роботою, виконаною за 1 *сек.*

Поряд з механічними мірами ми наводимо також і електричні міри роботи й потужності; назви і означення більшої частини цих мір вважаємо відомими з початкового курсу; додаткові пояснення до них будуть дані в розділах, присвячених вченню про електрику.

Таблиця 2.

Міри роботи і енергії.

Назва і співвідношення з іншими мірами
1 **ерг** = 1 динсантиметр = $1{,}02 \cdot 10^{-8}$ кілограмметра.
1 **кілограмметр** = $98 \cdot 10^6$ ергів = 9,8 джоуля = 0,00272 ватгодини.
1 **силогодина** = роботі парового коня протягом години = 270 000 кілограмметрів = 2650 кілоджоулям = 0,736 кіловатгодини.
1 **кілоджоуль** = 1000 джоулів = 0,278 ватгодини = 102 кілограмметрам = = 0,000378 силогодини.
1 **джоуль** = 1 ватсекунді = 10^7 ергів = 0,102 кілограмметра.
1 **вольткулон** = 1 джоулеві.
1 **кіловатгодина** = роботі одного кіловата протягом години = 10 гектоватгодинам = 3600 кілоджоулям = 367 000 кілограмметрів = 1,36 силогодини.
1 **гектоватгодина** = $\frac{1}{10}$ кіловатгодини = 360 кілоджоулям.
1 **ватгодина** = $\frac{1}{1000}$ кіловатгодини = 3,6 кілоджоуля = 0,00136 силогодини = = 367 кілограмметрам.
1 **ватсекунда** = 1 джоулеві.
1 **вольтфарадей** = 96 494 джоулям [4]).
1 **літратмосфера** = 101,3 джоуля.

[1]) Математично ця відмінність понять „енергія" і „робота" виражається тим, що в с і в и д и е н е р г і ї є „функціями стану" тіла, тоді як робота (як і теплота) не є функцією стану. Докладніше про це буде сказано в розділі „Термодинаміка".

[2]) „Диалектика природы", Партиздат, 1932, стор. 126 і 151.

[3]) „Фізика" Ф. і П., ч. II, § 40 і „Курс фізики" Ф. і П., ч. I, § 71.

[4]) Це є робота перенесення заряду в 1 фарадей (96 494 кулони) при різниці потенціалів на електродах в 1 вольт.

Таблиця 3.

Міри потужності.

Назва і співвідношення з іншими мірами
1 **кілограмметр за секунду** $= 9{,}8$ вата $= 0{,}0098$ кіловата $= 98 \cdot 10^6$ ергів за секунду $= \frac{1}{75}$ ($= 0{,}0133$) парового коня.
1 **паровий кінь** (кінська сила) $= 75$ кілограмметрам за секунду $= 736$ ватам $= 0{,}736$ кіловата $= \frac{3}{4}$ понселе.
1 **кіловат** = потужності, яку утворює кілоджоуль за секунду, $= 1000$ ватів $= 10^{10}$ ергів за секунду $= 102$ кілограмметрам за секунду $= 1{,}36$ парового коня.
1 **гектоват** $= 0{,}1$ кіловата $= 10{,}2$ кілограмметра за секунду.
1 **ват** $= 0{,}001$ кіловата $= 1$ джоулеві за секунду $= 10^7$ ергів за секунду $= 0{,}102$ кілограмметра за секунду $= 0{,}00136$ парового коня.
1 **вольтампер** $= 1$ ватові.
1 **понселе** $= 100$ кілограмметрам за секунду $= 1\frac{1}{3}$ парового коня $= 980$ ватам $= 0{,}98$ кіловата.

Співвідношення механічних і електричних мір енергії з термічними мірами (з великою і малою калоріями) наведено в § 221.

§ 33. Теорема про кінетичну енергію. Сила інерції, що її розвиває будьяке тіло, яке рухається, коли це тіло загальмовують, виконує роботу, що йде на подолання опорів рухові. Діюча в напрямі руху сила інерції ($\cos\alpha = 1$) чисельно дорівнює $-m\frac{dv}{dt}$. Протягом нескінченно малого проміжка часу, коли загальмовуване тіло, переборюючи опори рухові, переміщується на віддаль ds, *сила інерції*, що її розвиває тіло, *виконує роботу*:

$$\delta A = -m\frac{dv}{dt} \cdot ds,$$

або (робимо таке перетворення:

$$\frac{dv}{dt} \cdot ds = dv \cdot \frac{ds}{dt} = dv \cdot v)$$

$$\delta A = -mv \cdot dv$$

(хоч у правій частині стоїть знак мінус, але δA є величина додатна, бо при загальмовуванні $dv < 0$). Кінетична енергія тіла, яке рухається з швидкістю v, являє собою суму робіт, виконуваних силою інерції при загальмовуванні тіла до повної зупинки (тобто протягом того проміжка часу, поки швидкість тіла зменшується від значення v до нуля). Величину цієї суми ми обчислимо графічно [1]).

Будемо зображати числове значення швидкості довжиною відрізка, відкладеного по якійсь осі OX, а також довжиною такого ж відрізка, відкладеного в напрямі другої осі OY, яка утворює прямий кут з першою віссю (рис. 43). Очевидно, що числове значення добутку $v \cdot dv$ зобразиться

[1]) Застосовуючи інтегральне числення, цю суму знаходимо відразу:

$$K = \sum \delta A = -\int_v^0 mv dv = \frac{mv^2}{2}.$$

площею дуже малої вертикальної смужки, яка має висоту v і ширину dv (будемо уявляти собі величину dv як додатну, тоді в формулі для δA знак мінус повинен бути змінений на плюс: $\delta A = mv \cdot dv$). Для різних моментів часу швидкість v загальмовуваного тіла буде мати різну величину, а також різну величину буде мати числова зміна швидкості dv, що відбувається за якийсь певний проміжок часу dt. А тому і робота сили інерції за той самий проміжок часу в різні моменти часу буде неоднаковою (на нашій діаграмі площинки, які зображають добуток $v \cdot dv$, будуть мати різну висоту і неоднакову ширину). Підсумовуючи роботу, виконану силою інерції за весь час загальмовування, ми можемо винести за дужку величину маси m, яка входить у вираз кожної елементарної роботи. Щождо суми добутків $v \cdot dv$, то неважко зміркувати, що вона зобразиться на нашій діаграмі загальною площею всіх окремих площинок, подібних до тієї, яка заштрихована на рис. 43. Вона буде дорівнювати, отже, $\frac{mv^2}{2}$. Таким чином, ми вивели теорему про кінетичну енергію.

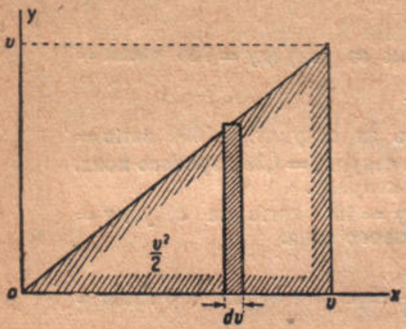

Рис. 43.

Робота, яку тіло, що рухається, здатне виконати при його загальмовуванні, не залежить ні від траєкторії руху, ні від того, як (з якою швидкістю і яким способом) провадилося загальмовування. Робота ця — кінетична енергія тіла — дорівнює половині добутку маси на квадрат швидкості[1]:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \tag{34}$$

З самого ходу наведеного вище міркування ясно, що *кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл (або матеріальних точок), які складають систему*:

$$K = \sum \frac{mv^2}{2}. \tag{35}$$

§ 34. Потенціальна енергія тяжіння. Ми сказали, що потенціальна енергія вимірюється роботою, яку тіло здатне виконати при переміщенні

[1]) При виведенні сформульованої тут теореми про кінетичну енергію тіла для правильності наших міркувань істотним було припущення, що маса тіла під час руху не змінюється. Згідно з теорією відносності це припущення можна вважати правильним тільки для швидкостей, малих порівняно з швидкістю світла c. При великих швидкостях маса зростає. Закон зростання маси (про нього буде сказано в § 402) виражається так:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

тут m — маса при швидкості v, а m_0 — маса того ж тіла в стані спокою.

Якщо взяти до уваги цю встановлювану теорією відносності залежність маси від швидкості руху і підрахувати роботу сили інерції при загальмовуванні тіла, то дістанемо такий вираз кінетичної енергії:

$$K = \frac{mv^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Коли відношення $\frac{v}{c}$ таке мале, що на нього можна не зважати, то ця формула, згідно з Ньютоновою механікою, дає $K = \frac{mv^2}{2}$. Під час руху з швидкістю світла (наприклад, для квантів світла) корінь квадратний, що стоїть у знаменнику, дорівнює нулеві і $K = mv^2$.

з заданого положення в якесь інше положення. Звідси виходить, що потенціальна енергія являє собою величину, яка тільки тоді має певний фізичний зміст, коли вказано два зіставлювані один з одним положення тіла. Наприклад, з початкового курсу фізики відомо, що потенціальна енергія тяжіння вимірюється добутком ваги тіла на висоту підняття: $\Pi = Ph$; якщо в будьякій місцевості, розташованій на висоті 10 *м* над рівнем моря, ми піднімемо якесь тіло на висоту 1 *м* над поверхнею Землі, то відносно рівня моря потенціальна енергія тяжіння його буде, як легко зміркувати, в 11 разів більша, ніж відносно поверхні Землі в даній місцевості. Потенціальна енергія того ж тіла відносно вершини будьякої гори, очевидно, являтиме собою величину від'ємну (від переміщення тіла вгору робота не може бути одержана, а, навпаки, на це переміщення вона повинна бути витрачена).

У фізиці прийнято потенціальну енергію розглядати відносно того положення взаємодіючих тіл, коли ці тіла нескінченно віддалені одно від одного. При такому розгляді потенціальна енергія тяжіння двох якихось (або багатьох) тіл завжди являє собою величину від'ємну, бо перехід від будьякого заданого розміщення тіл до того, коли вони нескінченно віддалені одно від одного, не дає роботи, а, навпаки, потребує для свого здійснення витрати роботи, напрямленої на подолання діючих між тілами сил притягання. З тієї ж причини негативною є енергія взаємодіяння різнойменних електричних зарядів, що притягують один одного за законом Кулона, який аналогічний Ньютоновому законові тяжіння (§ 6 та § 280) і відрізняється від нього тільки тим, що замість добутку мас у законі Кулона стоїть добуток електричних зарядів. Протилежно до цих двох випадків енергія взаємодіяння однойменних зарядів, які відштовхують один одного за законом Кулона, є величина додатна.

Знаючи закон взаємодіяння тіл, тобто знаючи, як змінюється з віддаллю сила їх взаємодіяння, завжди можна обчислити для якого завгодно заданого розміщення тіл їх потенціальну енергію (для цього, як уже було пояснено, треба підрахувати роботу, що її виконують сили взаємодіяння при віддалянні розгляданих тіл з положень, що їх вони займають, на нескінченно велику віддаль одно від одного). Для двох гравітаційних мас m і m' обчислення[1]) дає таку величину їх потенціальної енергії:

$$\Pi = -G\frac{m \cdot m'}{r}; \tag{36}$$

тут G — гравітаційна стала, а r — віддаль між центрами мас m і m' (припускається, що кожна з цих мас зосереджена в об'ємі, який має дуже малу протяжність у порівнянні з r, абож розподілена симетрично-сферично навколо центра мас; див. § 6).

Отже, потенціальна енергія будьякого тіла, яке має масу m, розміщеного на поверхні Землі, виражається формулою:

$$\Pi = -G\frac{M \cdot m}{R}, \tag{37}$$

де M — маса Землі і R — радіус Землі.

---

[1]) Елементарна робота при переміщенні мас, які знаходилися на віддалі r, виконувана силою тяжіння на шляху dr, дорівнює:

$$\delta A = -Fdr = -G\frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot dr.$$

Знак мінус тут стоїть тому, що сила F напрямлена протилежно переміщенню dr. Сумарна робота:

$$\Pi = -\int_r^\infty G\frac{m \cdot m'}{r^2} \cdot dr = -Gmm' \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -G\frac{m \cdot m'}{r}.$$

Коли якесь тіло піднімають над поверхнею Землі на висоту h над рівнем моря, то його потенціальна енергія, залишаючись негативною, чисельно зменшується (знаменник у наведеній формулі стає більшим: $R+h$ замість R). Якщо будьяка від'ємна величина чисельно зменшується, то це означає, що алгебрично вона збільшується (-2 більше, ніж -3). При малих порівняно з радіусом Землі висотах підняття приріст потенціальної енергії піднімaного тіла якраз дорівнює, як неважко переконатися, добуткові ваги на висоту підняття. Дійсно:

$$\Delta\Pi = -G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = G\frac{Mm}{R}\cdot\frac{h}{R+h};$$

звідси, якщо h мале у порівнянні з R, то

$$\Delta\Pi \approx G\frac{Mm}{R^2}\cdot h = P\cdot h,$$

де P — вага тіла.

§ 35. Теорема про мінімум потенціальної енергії. Нехай дано якусь систему взаємодіючих одне на одне матеріальних точок або тіл, що якнебудь рухаються одне відносно одного. Припустимо, що ніякі зовнішні сили на

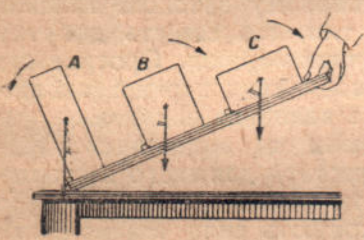

Рис. 44. Якщо проведена через центр ваги прямовисна лінія не проходить через площу опори, то можливе більш низьке положення центра ваги.

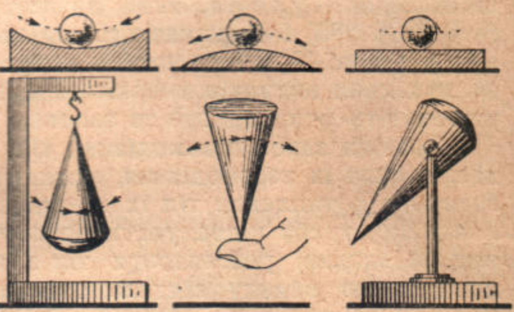

Рис. 45. Три види рівноваги: стійка, нестійка і байдужа.

систему не діють. Припустимо, далі, що всередині цієї системи не відбувається перетворення механічного виду енергії на будьякі інші види енергії. Тоді за законом зберігання енергії повна енергія системи, яка складається з її кінетичної енергії K і потенціальної енергії Π, повинна залишатися незмінною:

$$K + \Pi = \text{const}.$$

Кінетична енергія є завжди величина д о д а т н а. А тому якщо в початковий момент усі тіла, що складають розглядану нами систему, були н е р у х о м і, то рух може виникнути тільки в наслідок з м е н ш е н н я потенціальної енергії, при чому убуток потенціальної енергії буде дорівнювати кінетичній енергії, яка виникла. Якщо ж у початковий момент потенціальна енергія була м і н і м а л ь н о ю (це буває, коли яке завгодно переміщення тіл у нове їх положення приводить до збільшення потенціальної енергії), то тоді, очевидно, не може відбутися зростання кінетичної енергії, і рух, якого не було в початковий момент, ніколи не виникне; система перебуватиме в с т і й к і й р і в н о в а з і, з якої вона може бути виведена тільки діянням зовнішніх сил.

Отже, *ізольована система нерухомих тіл перебуває в стійкій рівновазі, якщо потенціальна енергія цієї системи мінімальна.*

В окремому випадку, коли ми маємо одно будьяке тіло, що перебуває під діянням сили тяжіння, ми можемо твердити, що станові стійкої рівноваги у цьому випадку буде відповідати найнижче положення центра ваги тіла, бо інакше потенціальна енергія тяжіння не була б мінімальною (рис. 44 і 45).

Можна уявити собі стан нестійкої рівноваги, коли потенціальна енергія максимальна, і стан байдужої рівноваги, коли потенціальна енергія однакова для ряду суміжних положень (рис. 45).

§ 36. Тертя. Тертя часто називають „шкідливим опором". Але це правильно не в усіх випадках. Можна говорити не тільки про негативні сторони тертя, а й про користь від нього (§ 23). Без тертя ми не могли б тримати річ у руках, ходити по землі. Цвяхи в стіні затримуються силою тертя. Пасова передача діє в наслідок тертя, яке існує між пасом і шківами. В наслідок тертя ведучих коліс об рейки паровоз дає рух поїздові і т. ін.

Шкідливі діяння тертя як гальмуючої сили загальновідомі. Під час руху різних машин і верстатів відбувається тертя між окремими частинами; щоб подолати його, доводиться витрачати роботу, а значить, витрачати енергію, наприклад, енергію палива, спалюваного в топках парових машин. Із загальної суми 1500 мільйонів тонн кам'яного вугілля, спалюваного щороку в усьому світі, очевидно, близько 50 мільйонів тонн вугілля витрачається виключно на подолання шкідливого діяння тертя.

Розрізняють два види тертя: тертя ковзання і тертя катання. Тертя полозків саней об сніг, коньків об лід, ножа або сокири об дерево — усе це тертя ковзання. Коли котиться колесо вагона, автомобіля, велосипеда, коли ми перекочуємо круглі колоди, бочки по землі, виявляється тертя катання. Зазначимо, що тертя осі колеса об втулку є тертя ковзання, бо при обертанні колеса поверхня втулки ковзає по поверхні осі.

Розглянемо спершу тертя ковзання. Основною причиною виникнення тертя ковзання є шорсткість речей, які стикаються одна з одною. На рис. 46*a* зображено у збільшеному вигляді неминучі заглибини і виступи двох поверхень, які дотикаються, при чому вони частково входять одна в одну. Під час руху однієї поверхні вздовж другої їх виступи почнуть чіплятися один за один, ударятися, ламатися (речовина поверхень, які труться, подрібнюється або, як кажуть, диспергується), це і створює якусь силу, яка затримує рух і завжди напрямлена проти руху. А через те що нема таких твердих тіл, поверхня яких була б ідеально гладкою, без усяких виступів і заглибин, то тертя існує між усякими речами, які дотикаються.

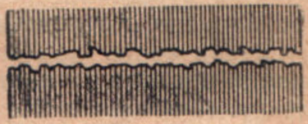

Рис. 46*a*. Зачеплення поверхень, що є головною причиною тертя ковзання.

Крім того, ми повинні мати на увазі і явища молекулярного порядку. Під час ковзання однієї поверхні по другій молекули поверхневих шарів набувають коливного руху; відбувається перетворення роботи на тепло.

Коли пришліфовані поверхні дуже гладкі, буває прилипання поверхень — в наслідок діяння молекулярних сил.

Закони, яким підпорядковане тертя ковзання, були встановлені Кулоном. Якщо позначимо силу тертя через f, а силу, з якою поверхні, що труться, притискуються одна до одної, — через N[1]), то:

$$f = k \cdot N, \tag{38}$$

тобто *сила тертя прямо пропорціональна силі, яка притискує поверхні.*

[1]) Дуже часто силою, яка притискує поверхні, є просто вага.

Тут k являє собою якийсь коефіцієнт пропорціональності, що називається **коефіцієнтом тертя ковзання**. З формули видно, що коефіцієнт тертя ковзання є абстрактне число.

У поданій таблиці вказано коефіцієнти тертя ковзання для деяких випадків:

	k
залізо по залізу	0,14
„ „ чавуну і бронзі	0,18
дуб по дубові при ‖ волокнах	0,48
„ „ „ „ ⊥ волокнах	0,19
шкіряний ремінь по дереву	0,27
„ „ „ чавуну	0,56
цеглина по цеглині	0,70
сталь по льоду	0,02

У багатьох випадках спостерігається, що тертя між однорідними поверхнями більше, ніж між різнорідними. Цим часто користуються в техніці для зменшення в разі потреби величини тертя. Наприклад, вкладні підшипників роблять з іншого металу, ніж цапфи (кінці вала).

На величину тертя впливає також твердість поверхень, які труться. Чим твердіші ці поверхні, тим тертя менше; підшипники в годинникових механізмах виготовляються з дуже твердих каменів (наприклад, агатів або алмазів).

Кулон припускав, що коефіцієнт тертя є величиною сталою і не залежить ні від швидкості руху, ні від величини тиску, ні від площі поверхень, які труться. Проте, дослідження показали, що *тертя зменшується із збільшенням швидкості руху*. При великих швидкостях не всі виступи шорстких поверхень і не так глибоко встигають зачеплюватися один за одного (порівняємо повільний рух воза, коли колеса акуратно попадають з однієї ямки бруку в другу, осідаючи в них, з швидким рухом, коли колеса перескакують через ці ямки).

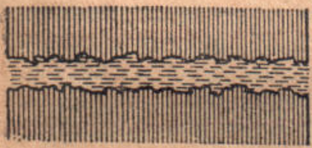

Рис. 46*b*. Змащування роз'єднує поверхні, які труться.

Для характеристики залежності тертя від швидкості наведемо такий приклад, що стосується гальмування чавунними колодками стальних залізничних коліс. При швидкості поїзду в 100 *км/год* тертя у чотири рази менше, ніж при 10 *км/год*, і в п'ять разів менше, ніж при початку руху поїзду. А тому під час зупинки трамвайного вагона, коли швидкість зменшується, тертя гальмівних колодок об колеса дуже зростає, і гальмування стає різкішим, отже, перед самою зупинкою, щоб уникнути поштовхів, гальмо поступово виключають.

Залежність коефіцієнта тертя від тиску виявляється тільки при великих тисках. Так, коефіцієнт тертя заліза по залізу при тисках, які не перевищують 9 $кг^*/см^2$, як було зазначено у вищенаведеній таблиці, дорівнює 0,14; при тиску в 18 $кг^*/см^2$ він дорівнює 0,285; при тиску в 36 $кг^*/см^2$ він стає рівним 0,41 (при тиску 39 $кг^*/см^2$ відбувається пошкодження поверхень заліза, які труться).

Усе зазначене вище стосується так званого **сухого тертя**, коли не **мастять** поверхень, які труться. Відомо, що мащення дуже зменшує тертя (в середньому у 8—10 разів). Причина зменшення тертя полягає в тому, що масло заповнює всі нерівності поверхень, які труться, і розміщується тонким шаром між ними так, що поверхні ніби перестають дотикатися одна до одної (рис. 46*b*), при цьому ковзають один відносно одного окремі шари рідини.

Ми заміняємо, отже, безпосереднє тертя двох твердих поверхень тертям всередині рідини, яке називають „внутрішнім тертям“. Це внутрішнє тертя різне для різних рідин. Наприклад, якщо порівнювати з водою, то виявляється, що в сірчаному ефірі воно в 5 разів менше, ніж у воді, у мастильних маслах воно приблизно в 80 разів більше, у гліцерині при 3° — у 2500 разів більше, ніж у воді. Рідини, які мають велике внутрішнє тертя, називаються в'язкими. Здавалося б, що вода є ідеальною речовиною для мащення в наслідок своєї малої в'язкості; чому ж для змащування вживають масло, в'язкість якого разів у 100 більша за в'язкість води? Це пояснюється тим, що придатною для мащення є лише така рідина, яка не витискується з тонкого проміжка між поверхнями, які труться, а тому рідина, вживана для мащення, повинна бути достатньо в'язкою. А втім, під час руху саней по снігу вода, як відомо, є дуже гарним мастилом, бо замість витискуваної спід полозків води увесь час утворюється нова.

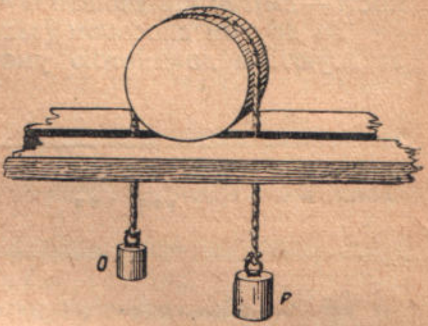

Рис. 47. Різниця ваги тягарів P і Q зрівноважується силою тертя катання.

Вплив різних факторів на тертя при мащенні був вивчений Н. П. Петровим, при чому виявилося, що сила тертя прямо пропорціональна швидкості, величині поверхні, обернено пропорціональна товщині шару мастила і залежить від його фізичних властивостей.

Розглянемо тепер питання про *тертя катання*. Якщо через циліндричний коток, який лежить на двох горизонтальних брусках, перекинути віровку з тягарами P і Q на її кінцях, то при певній різниці $P-Q$ можна досягти рівномірного руху котка. Очевидно, що в даному разі тертя f дорівнює рушійній силі $P-Q$ (рис. 47). Кулон знайшов, що тертя при катанні

$$f=k_1\cdot\frac{N}{r}, \tag{39}$$

де N — сила, з якою коток притискується до опори, r — радіус котка, k_1 — коефіцієнт тертя катання.

Отже, *тертя катання прямо пропорціональне притискуючій силі і обернено пропорціональне радіусові котка*.

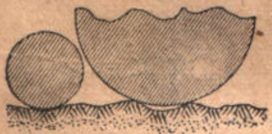

Рис. 48. Великі колеса зазнають меншого опору катання, ніж малі.

Які б не були тверді опора і коток, все ж вони повинні трохи змінювати свою форму — деформуватися і тим більше, чим більший тиск котка на опору; з другого боку, чим більший радіус котка, тим менше впливатимуть на нього нерівності, як це видно з рис. 48.

Тертя катання значно менше тертя ковзання. Ось чому так часто застосовують шарикопідшипники, в яких тертя ковзання осі по втулці замінюється тертям катання кульок або циліндрів.

З формули (39) видно, що коефіцієнт тертя катання є число іменоване, яке виражають в одиницях довжини, приміром, у сантиметрах.

§ 37. Розмірність величин. Під розмірністю будьякої величини розуміють форму залежності одиниці, яка служить для вимірювання цієї величини, від основних одиниць виміру. Наприклад, якщо в n разів збільшити одиницю довжини, то об'єм, який повинен тепер вважатися одиницею об'єму, буде в n^3 разів більший попередньої одиниці об'єму; в цьому розумінні говорять, що об'єм має розмірність куба довжини. Якщо в n разів збільшити одиницю довжини і в m разів збільшити одиницю часу, то швидкість, яку тепер треба буде вважати за одиницю швидкості, буде в $\frac{n}{m}$ разів більша попередньої одиниці швидкості; бажаючи коротко висловити цей факт, говорять, що швидкість має розмірність відношення довжини до часу.

Розмірність величин записують двома способами.

За першим способом (запис найменуваннями) розмірність будьякої величини пишуть, зазначаючи найменування основних одиниць виміру; наприклад, розмірність об'єму є *см*³ („сантиметр в кубі"), розмірність швидкості — *см/сек* („відношення сантиметра до секунди").

За другим способом (запис символами) розмірність будьякої величини записують з допомогою умовного позначення основних одиниць виміру.

Таблиця 4.

Назва величин	Розмірність	
	Символічний запис	Запис найменування в системі CGS
Час	T	*сек*
Маса	M	*г*
Довжина	L	*см*
Площа	L^2	*см*²
Об'єм	L^3	*см*³
Швидкість (§ 14)	$\frac{L}{T}$, або LT^{-1}	$\frac{см}{сек}$
Прискорення (§ 16)	$\frac{L}{T^2}$, або LT^{-2}	$\frac{см}{сек^2}$
Сила (§ 17)	$\frac{ML}{T^2}$, або MLT^{-2}	$\frac{г \cdot см}{сек^2}$
Кількість руху (§ 14)	$\frac{ML}{T}$, або MLT^{-1}	$\frac{г \cdot см}{сек}$
Робота і енергія (§ 31)	$\frac{ML^2}{T^2}$, або ML^2T^{-2}	$\frac{г \cdot см^2}{сек^2}$
Потужність (§ 32)	$\frac{ML^2}{T^3}$, або ML^2T^{-3}	$\frac{г \cdot см^2}{сек^3}$
Коефіцієнт тертя ковзання (§ 36)	абстрактне число	
Коефіцієнт тертя катання (§ 36)	L	*см*
Коефіцієнт в'язкості (§ 66)	$\frac{M}{LT}$, або $ML^{-1}T^{-1}$	$\frac{г}{см \cdot сек}$
Кутова швидкість (§ 52)	$\frac{1}{T}$, або T^{-1}	$\frac{1}{сек}$
Кутове прискорення (§ 52)	$\frac{1}{T^2}$, або T^{-2}	$\frac{1}{сек^2}$
Момент сили (§ 51)	$\frac{ML^2}{T^2}$, або ML^2T^{-2}	$\frac{г \cdot см^2}{сек^2}$
Момент інерції (§ 51)	ML^2	*г·см*²
Момент кількості руху (§ 56)	$\frac{ML^2}{T}$, або ML^2T^{-1}	$\frac{г \cdot см^2}{сек}$
Тиск (§ 65)	$\frac{M}{LT^2}$, або $ML^{-1}T^{-2}$	$\frac{г}{см \cdot сек^2}$

Часто користуються такими символами: одиниця довжини L, одиниця часу T, одиниця маси M. Тоді розмірність об'єму є L^3 („куб довжини"); розмірність швидкості є L/T або, що те ж саме, LT^{-1} („відношення довжини до часу"). Такий символічний запис звичайно читають скорочено, наприклад: „куб довжини", але розуміють „куб одиниці довжини". Щоб символи розмірності величин не плутати з позначеннями самих величин, прийнято символічний запис розмірності брати в квадратні дужки; наприклад, розмірність прискорення $[L/T^2]$, або $[LT^{-2}]$.

У деяких випадках символічний запис розмірності має переваги перед записом найменувань, бо при символічному запису залишається відкритим питання, які саме величини прийнято як основні одиниці виміру (наприклад, сантиметр, або метр, абож кілометр; L може означати яку завгодно одиницю довжини; так само T і M можуть означати які завгодно одиниці часу і маси).

Символічним записом розмірності зручно користуватися для перевірки формул: *розмірність усіх членів формули завжди повинна бути однаковою*, бо додавати або віднімати і прирівнювати можна тільки числа однакових найменувань.

В деяких випадках із зіставлення розмірностей величин можна зробити деякі висновки про те, як ці величини зв'язані в розумінні функціональної залежності. З такими прикладами так званого „якісного аналізу" ми зустрінемося далі.

РОЗДІЛ II.

СТАТИКА.

§ 38. Принцип можливих переміщень. Є різні способи викладу питань статики, але безсумнівно, що найзагальніший і разом з тим найпростіший метод розв'язування задач статики полягає у застосуванні принципу можливих переміщень.

Цей метод застосовував ще Галілей; його значення зрозумів і оцінив Іоган Бернуллі (1717), але повний розвиток цей метод дістав пізніше, завдяки роботам Лагранжа (1788).

Можливим переміщенням називають таке нескінченно мале переміщення тіла або матеріальної точки, яке допускається зв'язками системи, тобто наявними обмеженнями волі пересування тіл, що утворюють систему. Наприклад, за умовою задачі може бути задано, що тіло при своєму переміщенні повинне залишатися на якійсь поверхні, або, приміром, може бути вказано, що два будьяких тіла сполучені твердим стрижнем і тому повинні залишатися на незмінній віддалі одно від одного. Взагалі під можливими переміщеннями розуміють тільки ті переміщення, які не суперечать умовам розгляданої задачі, і при цьому мають на увазі переміщення нескінченно малі.

Принцип можливих переміщень полягає ось у чому.

Необхідна і достатня умова рівноваги системи полягає в тому, що сума робіт усіх сил, прикладених до тіл системи, для кожного можливого переміщення системи повинна бути рівною нулеві або меншою нуля[1]).

В зазначеному формулюванні принципу під словами „прикладені сили" можна розуміти самі зовнішні сили, якщо тільки зв'язки між тілами такі, що ні при якому можливому переміщенні внутрішні сили роботи не виконують. У противному разі слід брати до уваги не тільки зовнішні, але також і внутрішні сили.

Принцип можливих переміщень можна розглядати як висновок закону зберігання енергії. Справді, якщо в початковий момент усі тіла системи були нерухомі, а в дальшому вони почали рухатися, то це означає, що прикладені до тіл сили виконали роботу, яка дорівнює кінетичній енергії, що виникла. Кінетична енергія не може виникнути, і, отже, система перебуватиме в рівновазі, якщо для всякого можливого переміщення робота всіх прикладених до тіл сил (зовнішніх і внутрішніх) дорівнює нулеві або менша нуля.

Якщо тіла системи перебувають під діянням самих тільки внутрішніх сил, то принцип можливих переміщень приводить, як легко зміркувати, до теореми про потенціальну енергію (§ 35).

Коли тіла, які утворюють систему, зв'язані будьякими цілком цупкими стрижнями або натягнутими нерозтягливими нитками, то, застосовуючи

---

[1]) Для переміщень, що їх допускають „затримуючі" (двосторонні) зв'язки, сума робіт повинна дорівнювати нулеві; для переміщень, що їх допускають „незатримуючі" (односторонні) зв'язки, сума робіт повинна бути менша нуля або рівна нулеві. Приклад до другого випадку: тіло, яке лежить на будьякій поверхні.

принцип можливих переміщень, немає потреби розглядати „сили зв'язків" (тиску і натягу, передавані зв'язками, і реакції зв'язків), бо в наслідок припущеної недеформованості зв'язків сумарна робота цих сил при всякому переміщенні завжди дорівнюватиме нулеві. Це право ігнорування сил цупких (недеформованих) зв'язків дуже спрощує розв'язування багатьох задач статики, дозволяючи при застосуванні принципу можливих переміщень обмежуватися розглядом самих тільки зовнішніх сил і сили тертя.

Принцип можливих переміщень був встановлений задовго до того, як відкрито і загальновизнано закон зберігання енергії, а тому в свій час був запропонований ряд доводів справедливості цього принципу, які підпорядковують його іншим обгрунтованим на підставі досліду твердженням; такі доводи дали Ампер, Коші, Лагранж, Фур'є, Пуассон і ін.

В дальших параграфах ми застосуємо принцип можливих переміщень до розрахунку умов рівноваги найпростіших механізмів і до виведення деяких теорем статики.

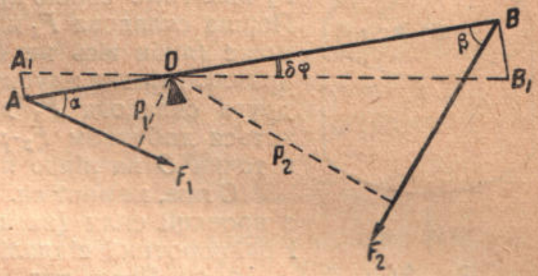

Рис. 49.

§ 39. Важіль. Момент сили. Важелем називають тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі. Візьмемо прямолінійний важіль AB з віссю обертання O (рис. 49); на його кінці A і B діють сили F_1 і F_2 під кутами α і β. Знайдемо умову рівноваги важеля.

Надамо важелеві можливого переміщення, а саме — повернемо його на нескінченно малий кут $\delta\varphi$. Тоді точка A дістане нескінченно мале переміщення $AA_1 = AO \cdot \delta\varphi$, а точка B — переміщення $BB_1 = BO \cdot \delta\varphi$, при чому кут, утворюваний силою F_1 з переміщенням AA_1, дорівнює $90° + \alpha$, а кут, утворюваний силою F_2 з переміщенням BB_1, дорівнює $90° - \beta$.

За принципом можливих переміщень сума робіт прикладених сил при всякому можливому переміщенні повинна дорівнювати нулеві. А тому

$$F_1 \cdot AO \cdot \cos(90° + \alpha) \cdot \delta\varphi + F_2 \cdot BO \cdot \cos(90° - \beta) \cdot \delta\varphi = 0.$$

Але

$$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha \quad \text{і} \quad \cos(90° - \beta) = \sin\beta,$$

отже,

$$-F_1 \cdot AO \sin\alpha + F_2 \cdot BO \sin\beta = 0.$$

Опустимо з точки O перпендикуляри p_1 і p_2 на напрями сил F_1 і F_2; відзначимо, що $p_1 = AO \cdot \sin\alpha$ і $p_2 = BO \cdot \sin\beta$. Отже, умову рівноваги важеля можна записати так:

$$F_1 \cdot p_1 = F_2 \cdot p_2. \tag{1}$$

Як ліва, так і права частини цього рівняння являють собою добуток сили на найкоротшу віддаль її від осі обертання. Такий добуток називають **моментом сили відносно даної осі**, при чому перпендикуляри p_1 і p_2 називають плечами сил.

Отже, *умова рівноваги важеля полягає в тому, що моменти двох сил, які обертають важіль у протилежні сторони, повинні бути рівними.*

Умовилися так: моменти сил, які обертають в одну сторону (наприклад, за годинниковою стрілкою), вважати позитивними, а моменти сил, які обертають у другу сторону (проти годинникової стрілки), — негативними.

Беручи до уваги зазначене, умову рівноваги важеля можна сформулювати так: *сума моментів сил відносно осі обертання при рівновазі повинна дорівнювати нулеві.* Узагальнимо поняття моменту сили на той випадок, коли сила розміщена як завгодно відносно осі обертання, а не лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання, як у щойно розглянутому випадку.

Нехай якесь тіло, наприклад, циліндр, може обертатися навколо осі, яка проходить через точку O, і нехай у точці A до нього прикладена сила F (рис. 50). Відшукаємо момент сили F відносно осі обертання. Для цього розкладемо силу F на дві взаємно перпендикулярні складові, при чому так, щоб одна з них F_1 була паралельна осі, а друга складова F_2 лежала в площині, перпендикулярній до осі; складова F_2 являтиме собою проекцію даної сили F на цю площину. Перша складова F_1 ніякого обертального ефекту дати не може (якби вісь не була закріплена, вона могла б, наприклад, тільки змусити тіло ковзати вздовж осі). Тільки друга складова F_2 дає обертальний ефект, який виразиться добутком $F_2 \cdot p$, де p — перпендикуляр, опущений з точки O на лінію проекції.

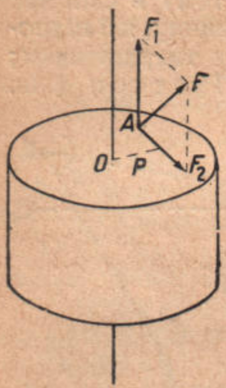

Рис. 50.

Отже, момент сили відносно осі є добуток, складений з проекції сили (на площину, перпендикулярну до осі) і найкоротшої віддалі між силою і віссю.

§ 40. Пара сил. Розглянемо дві паралельні сили F_1 і F_2 (рис. 51), напрямлені в різні сторони. Як відомо[1]), рівнодійна цих сил R і точка її прикладання C визначаються із співвідношень:

$$R = F_1 - F_2; \ \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Останню пропорцію можна написати так:

Рис. 51.

$$\frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{BC - AC}{AC}, \quad \text{або} \quad \frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC},$$

звідки

$$AC = \frac{F_2 \cdot AB}{R}.$$

У випадку рівності двох паралельних сил, напрямлених у різні сторони, тобто при $F_1 = F_2$, знайдемо: $R = 0$ і $AC = \infty$, тобто точка прикладання рівнодійної відходить у нескінченність і сама рівнодійна обертається в нуль. Практично це означає, що такі дві сили не можуть бути замінені однією рівнодійною. Вони не можуть спричинити поступного руху тіла ні в якому напрямі, але вони спричинять обертання тіла навколо якоїсь осі, перпендикулярної до площини, в якій лежать обидві сили.

Справді, ці сили, як рівні і протилежно напрямлені, при якому завгодно поступному переміщенні тіла (коли тіло переміщується паралельно самому собі) виконують роботу, яка в сумі дорівнює нулеві; отже, ці сили не можуть надати тілу кінетичної енергії поступного руху, а значить, вони і не можуть спричинити цього руху. Але під час обертання сумарна робота вказаних сил не дорівнює нулеві, а тому вони здатні обертати тіло.

---

[1]) „Курс фізики" Ф. і П., ч. І, § 61 — 64.

Отже, дві рівні, паралельні і протилежно напрямлені сили („пара сил“ або, як часто говорять, просто „пара“) являють собою зовсім особливий динамічний елемент, який не можна звести до однієї сили.

Дослідимо діяння пари сил. Нехай до твердого тіла в точках A і B прикладені дві рівні, паралельні і протилежно напрямлені сили F_1 і F_2. Точки A і B виберемо так, щоб відрізок AB був перпендикулярний до напряму сил (це завжди можна зробити, перенісши точки прикладання сил по лініях їх діяння). Назвемо $AB = p$ „плечем“ пари (рис. 52). Це є найкоротша віддаль між лініями діяння сил, які складають пару.

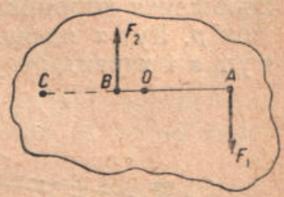

Рис. 52.

Помістимо вісь обертання, перпендикулярну до площини рисунка, в точці O. Тоді момент сили F_1 відносно осі O дорівнює $F \cdot OA$ (вважаємо, що $F_1 = F_2 = F$), а момент сили F_2 відносно тієї самої осі дорівнює $F \cdot OB$. Загальний момент обох сил:

$$M = F \cdot OA + F \cdot OB = F(OA + OB) = F \cdot AB = F \cdot p.$$

Нехай тепер вісь обертання перебуває десь у точці C. Тоді момент сили F_1 відносно осі C дорівнює $F \cdot AC$, а момент сили F_2 відносно тієї ж осі дорівнює $-F \cdot CB$. Загальний момент обох сил:

$$M = F \cdot AC - F \cdot CB = F(AC - CB) = F \cdot AB = F \cdot p.$$

Ще загальніший випадок, коли точка C не лежить на лінії AB, зводиться до попереднього, бо точку прикладання сили, яка діє на тверде тіло, можна уявляти собі як таку, що перебуває в першому-ліпшому місці прямої, по якій діє сила, отже, точку C і точки A і B (точки прикладання сил пари) завжди можна вважати розміщеними на одній прямій.

Отже, *обертальна дія пари завжди визначається добутком сили на плече;* цей добуток називають моментом пари.

§ 41. Важільні терези. Одним з важливих застосувань важеля є важільні терези, які служать для порівнювання мас різних тіл. Не спиняючись на загальновідомій будові важільних терезів, розглянемо дві головні умови, що їх повинні задовольняти гарні терези,— правильність і чутливість.

Для правильності терезів необхідно додержувати таких умов.

1. Обидва плеча коромисла повинні бути рівні між собою. Найважливішою вимогою при цьому є те, щоб ребра обох ножів, які підтримують шальки, були точно паралельні ребру ножа, яким коромисло спирається на свою підставку, бо інакше при різних положеннях вантажів на шальках справжня довжина пліч може бути різною.

2. Центр ваги коромисла повинен лежати на вертикалі, яка проходить через точку опори коромисла, і до того нижче її; це є умовою стійкої рівноваги.

Справді, якщо центр ваги буде вище точки опори, коромисло буде в нестійкій рівновазі і при щонайменшому відхиленні від горизонтального положення перекинеться під діянням власної ваги. Якщо центр ваги буде збігатися з точкою опори, коромисло буде у байдужій рівновазі, тобто буде в рівновазі при довільному похилому положенні. Якщо ж на шальки покласти нерівні вантажі, то коромисло від різниці моментів їх перекинеться на 90° у бік більшого вантажу [1]).

При додержанні цих двох умов коромисло встановлюється горизонтально, якщо обидві шальки вільні або однаково навантажені.

---

[1]) Тут маємо на увазі звичайний випадок розміщення точок підвісу шальок і точки опори на одній прямій (рис. 53*a*); очевидно, що результуюче навантаження $2P$ завжди буде проходити через точку опори O, не впливаючи на положення коромисла.

Чутливість терезів повинна бути по змозі великою і сталою, тобто незалежною від величини навантаження. Розглянемо тепер ті фактори, які визначають чутливість терезів.

Нехай AB (рис. $53a$ і $53b$) являє рівноплече коромисло терезів, що може обертатися навколо осі O, при чому A і B означають верхні ребра призм, які служать для підвішування шальок; вага кожної шальки разом з навантаженням нехай дорівнює P. Точка C — центр ваги коромисла. До неї прикладена сила ваги коромисла Q. Рис. $53b$ схематично зображає положення коромисла, коли на праву шальку терезів покладено переважок p. Кут α являє відхилення коромисла під діянням переважка p. Цей кут α і характеризує чутливість терезів.

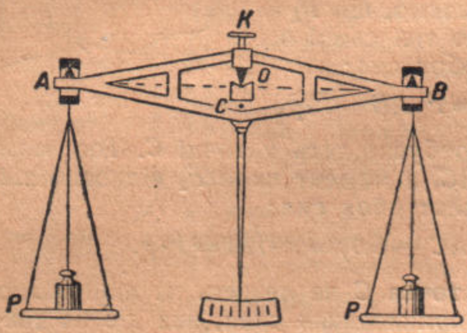

Рис. $53a$. До аналізу чутливості (кута α) важільних терезів.

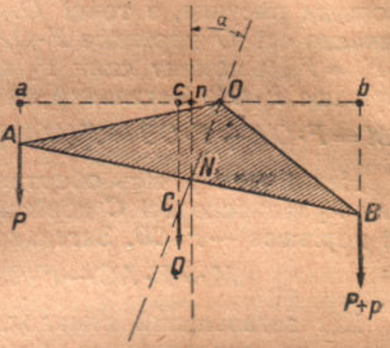

Рис. $53b$.

Для більшої загальності виводу припустимо, що середина віддалі між точками підвісу шальок (точка N на рис. $53b$) не збігається з віссю обертання (точка O на рис. $53a$ і $53b$).

Для рівноваги коромисла, яке перебуває під діянням сил P, $P+p$ і Q, необхідно, щоб сума моментів усіх сил відносно осі обертання O дорівнювала нулеві. Для відшукання пліч треба провести через точку O горизонтальну пряму і продовжити лінію діяння сил до перетину з цією прямою. Для спрощення обчислень відзначимо, що обидві сили P, прикладені в точках A і B, ми можемо замінити однією силою $2P$, яка діє на середину коромисла в точці N.

Тоді можна написати рівняння моментів так:

$$Q \cdot Oc + 2P \cdot On = p \cdot Ob.$$

Позначаючи:

$$ON = h,\ OC = l,\ AN = BN = L,$$

знайдемо:

$$On = h \cdot \sin\alpha,\ Oc = l \cdot \sin\alpha,\ Ob = nb - On = L \cdot \cos\alpha - h \cdot \sin\alpha.$$

Після підставляння рівняння набуде вигляду:

$$Q \cdot l \cdot \sin\alpha + 2P \cdot h \cdot \sin\alpha = p \cdot L \cdot \cos\alpha - p \cdot h \cdot \sin\alpha,$$

або

$$[(2P+p)\,h + Q \cdot l] \cdot \sin\alpha = p \cdot L \cdot \cos\alpha,$$

звідки

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{pL}{(2P+p)\,h + Q \cdot l}. \qquad (2)$$

З формули (2) видно, що коли h не дорівнює нулеві, тобто коли точка опори коромисла не лежить на прямій, яка проходить через точки підвісу шальок, то чутливість високою мірою залежить від загального навантаження $2P$. Щоб чутливість була незалежною від навантаження, треба, щоб h дорівнювало нулеві, тобто щоб точки підвісу шальок A і B і точка опори O лежали на одній прямій (рис. 53a). В такому разі формула (2) матиме вигляд:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{l}\cdot\frac{L}{Q}. \tag{3}$$

Отже, чутливість терезів зростає із зменшенням віддалі l центра ваги коромисла від осі обертання і з збільшенням відношення довжини коромисла L до його ваги.

Практично вигідніше робити терези з короткими і легкими коромислами (збільшення довжини коромисла L потребує відповідного підвищення міцності, і тому доводиться збільшувати вагу коромисла Q більше, ніж зростає його довжина, в наслідок цього відношення $\frac{L}{Q}$ зменшується).

Для регулювання величини l до коромисла приєднують гвинт K (рис. 53a) з гайкою, підкручуючи яку, змінюють чутливість.

Відзначимо, що коли при ненавантажених терезах призми A, B і O лежать на одній прямій, то під діянням вантажу коромисло зігнеться, хоча і дуже мало; отже, точки A і B будуть нижче точки опори O і чутливість терезів буде залежати від навантаження (форм. 2).

За практичну міру чутливості беруть величину того переважка, який при даному загальному навантаженні спричиняє певне відхилення, рівне, наприклад, одній поділці на шкалі.

На гарних важільних терезах вантаж в 1 *кг* можна зважити з точністю до 0,01 *мг* (одна мільйонна частка процента).

При точному зважуванні спостерігають не положення рівноваги коромисла, яка в добрих терезах настає тільки після дуже тривалих коливань, а спостерігають самі коливання. Тому важливе значення при вживанні терезів має тривалість коливань, період яких повинен бути, очевидно, невеликим.

Підвищуючи чутливість терезів зменшенням віддалі l центра ваги коромисла від осі обертання і збільшенням довжини коромисла L, ми при цьому збільшуємо період коливань. Це свідчить про користь більш короткого коромисла: програючи дещо на чутливості, ми виграємо на швидкості зважування, а це теж важливо для одержання точних результатів.

§ 42. Десяткові терези. Будова десяткових терезів ясна з рис. 54. Щоб діяння вантажу Q не залежало від його положення на платформі DF, треба, щоб вона опускалася, залишаючись паралельною собі. Для цього повинне бути додержане таке співвідношення:

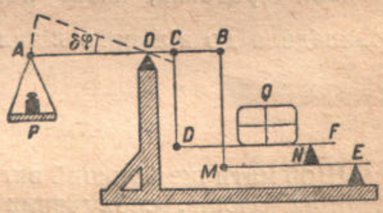

Рис. 54. Схема десяткових терезів.

$$\frac{OB}{OC} = \frac{ME}{NE} = n.$$

Справді, якщо точка C, а, значить, і D опуститься на a, то точка B опуститься на na, точка M опуститься теж на na, а точка N — на a. Отже, обидва кінці платформи D і N опускаються однаково.

Позначимо відношення $\frac{AO}{CO}$ через K (при $K=10$ терези називаються десятковими) і відшукаємо співвідношення сил P і Q при рівновазі, використавши принцип можливих переміщень. Прирівнюючи до нуля суму роботи сил P і Q при повороті важеля AC на нескінченно малий кут $\delta\varphi$ (переміщення вантажу Q таке саме, як і точки C):

$$-P\cdot AO\cdot\delta\varphi+Q\cdot OC\cdot\delta\varphi=0,$$

або

$$-P\cdot AO+Q\cdot OC=0,$$

звідки

$$\frac{Q}{P}=\frac{AO}{OC}=K. \tag{4}$$

Отже, на десяткових терезах треба вживати гирі в 10 разів легші, ніж зважуваний вантаж.

§ 43. Блоки. Поліспасти. Блок являє собою круглий плоский диск з жолобом по колу, що обертається навколо осі, яка проходить через його центр. Якщо обіймиця блока закріплена, то блок називають н е р у х о м и м. Рушійна сила P і підніманий вантаж Q діють на кінці вірьовки, перекинутої через жолоб (рис. 55*a*). Блок можна розглядати як рівноплечий важіль; а тому умову рівноваги знайдемо, прирівнявши моменти сил P і Q:

$$P\cdot R=Q\cdot R, \text{ або } P=Q.$$

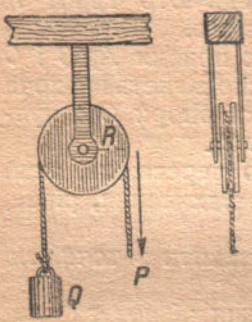

Рис. 55*a*. Нерухомий блок.

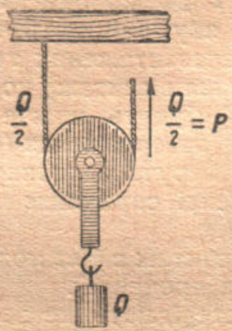

Рис. 55*b*. Рухомий блок.

Отже, нерухомий блок не дає ніякого виграшу на силі і вживається тільки для зміни н а п р я м у с и л и.

На рис. 55*b* зображено рухомий блок. Через те, що вантаж Q висить на двох вірьовках, натяг кожної з них дорівнює $\frac{Q}{2}$ і, значить, сила, прикладена до вільного кінця вірьовки, утримує вантаж Q у рівновазі:

$$P=\frac{Q}{2}.$$

Щоб мати ще більший виграш на силі, застосовують систему з кількох рухомих блоків, сполучених з одним або кількома нерухомими блоками. Такі системи блоків називають п о л і с п а с т а м и або т а л я м и. Розглянемо деякі з них. Поліспаст А р х і м е д а складається з кількох рухомих і одного нерухомого блока (рис. 56). Кожний рухомий блок підтримується окремою вірьовкою, один кінець якої прикріплено нерухомо, а другий підвішено до обіймиці дальшого блока. Вільний кінець вірьовки верхнього рухомого блока перекинуто через нерухомий блок.

Розглянемо співвідношення між силою P, прикладеною до вільного кінця вірьовки, і вантажем Q, не зважаючи на вагу самих блоків і вплив шкідливих опорів. Натяг вірьовки a за властивістю рухомого блока дорівнює $\frac{Q}{2}$, натяг вірьовки b дорівнює $\frac{Q}{2\cdot 2}=\frac{Q}{2^2}$; натяг вірьовки c, а значить, і сила P дорівнюють $\frac{Q}{2^2 \cdot 2} = \frac{Q}{2^3}$. Звідси виходить, що при n рухомих блоках будемо мати:

$$P = \frac{Q}{2^n}. \tag{5}$$

На рис. 57*a* і 57*b* зображено звичайний поліспаст, що являє сполучення трьох рухомих і трьох нерухомих блоків, поміщених у двох окремих обіймицях. Звичайно всі рухомі блоки насаджують на одну спільну вісь, так само як і всі нерухомі блоки.

Рис. 56. Поліспаст Архімеда.

Рис. 57*a*.

Рис. 57*b*.

Вірьовка прикріплена до верхньої обіймиці і по черзі охоплює всі блоки, на вільний кінець вірьовки діє сила P. Через те що вантаж Q підвішено на шести вітках вірьовки, натяг кожної з них, а, отже, і вільного кінця вірьовки буде $\frac{Q}{6} = \frac{Q}{2 \cdot 3}$. Пам'ятаючи, що число віток удвоє більше числа рухомих блоків, можна визначити P для якого завгодно числа n рухомих блоків:

$$P = \frac{Q}{2n}. \tag{6}$$

§ 44. Вплив опорів на дію блоків. Виводячи співвідношення між силою P і вагою вантажу Q, підніманого з допомогою рухомого блока або з допомогою поліспастів, ми не зважили на опори — на тертя осі блока і на той опір, що його являє жорсткість вірьовки (опір згинанню). Цей опір полягає ось у чому. В наслідок своєї жорсткості або неповної гнучкості та частина вірьовки, що йде вгору, дотикається кола блока трохи вище кінця горизонтального діаметра, та ж частина вірьовки, що йде вниз, залишає коло трохи нижче другого кінця цього діаметра (рис. 58). А тому плече вантажу трохи збільшується, плече сили P трохи зменшується.

В наслідок жорсткості вірьовки і тертя осі сила P, яку треба прикласти для зрівноваження вантажу Q, більша ваги цього вантажу. Відношення $\frac{Q}{P}=\eta$ називають коефіцієнтом корисної дії блока; для блоків, вживаних у практиці, воно дорівнює приблизно $\frac{3}{4}$ або 75%.

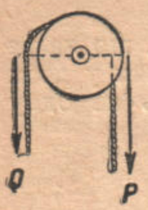

Рис. 58.

Розглянемо тепер роботу поліспаста, беручи до уваги коефіцієнт корисної дії блоків, які входять до його складу.

Нехай на зовнішній вільний кінець вірьовки (рис. 59) діє сила P, яка повинна підняти вантаж Q. Тоді, припускаючи коефіцієнт корисної дії блоків рівним η, знайдемо, що натяг, створений силою P у першій вірьовці, $P_1=P\cdot\eta$; у другій вірьовці $P_2=P_1\cdot\eta=P\cdot\eta^2$; у третій — $P_3=P\cdot\eta^3$ і в останній — $P_4=P\cdot\eta^4$. Якщо вживають поліспаст з n вірьовками, то натяг n-ої вірьовки $P_n=P\cdot\eta^n$. Через те що вантаж Q повинен дорівнювати сумі всіх натягів, то

$$Q=P_1+P_2+\ldots+P_n=P\cdot\eta+P\cdot\eta^2+\ldots+P\cdot\eta^n=P\cdot\eta\,\frac{1-\eta^n}{1-\eta},$$

отже:

$$Q=P\frac{\eta}{1-\eta}(1-\eta^n). \tag{7}$$

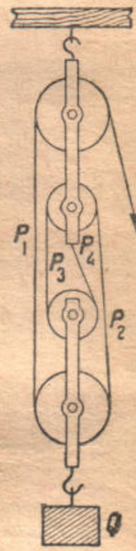

Рис. 59.

Ця формула показує, що із збільшенням числа вірьовок n діяння сили P зростає не пропорціонально числу вірьовок, а значно повільніше. При звичайному коефіцієнті корисної дії $\eta=\frac{3}{4}$, застосовуючи яке завгодно велике число блоків, діяння сили можна збільшити тільки в три рази. Дійсно, при n дуже великому η^n можна вважати рівним нулеві, тоді

$$Q=P\frac{\eta}{1-\eta}=P\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=3P.$$

В наслідок тертя і жорсткості вірьовок виграш у силі при збільшенні числа блоків зростає дуже повільно, а тому звичайно поліспасти роблять тільки з двох або трьох пар блоків.

§ 45. Диференціальний ланцюговий поліспаст. Диференціальний поліспаст (рис. 60) складається з двох різного діаметра блоків, що становлять одно ціле та укріплені в нерухомій обіймиці, і одного рухомого блока, до гака якого підвішується підніманий вантаж. Безконечний ланцюг охоплює, як видно з рисунка, всі блоки (жолобки їх мають виступи, які перешкоджають ковзанню ланцюга) так, що коли потягнути вниз за той кінець вільної петлі ланцюга, який іде з великого нерухомого блока, то ланцюг буде намотуватися на великий блок і змотуватися з малого, в наслідок чого вантаж почне підніматися.

Знайдемо співвідношення між силою P і вантажем Q, застосовуючи принцип можливих переміщень.

Нехай подвійний блок дістав переміщення, що визначається поворотом за годинниковою стрілкою на кут $\delta\varphi$. Тоді точка прикладання сили P переміститься в напрямі сили на величину $R\cdot\delta\varphi$, а, значить, сила P виконає при цьому роботу $P\cdot R\cdot\delta\varphi$. При повороті подвійного блока на кут $\delta\varphi$ ланцюг A буде намотуватися і вкоротиться на $R\cdot\delta\varphi$, ланцюг B буде змотуватися і видовжуватися на $r\cdot\delta\varphi$; отже, та петля, на якій висить вантаж Q, загалом укоротиться на $\frac{1}{2}(R-r)\cdot\delta\varphi$, і проти ваги вантажу Q буде витрачена робота $\frac{1}{2}Q(R-r)\cdot\delta\varphi$ (в суму робіт вона увійде з знаком мінус).

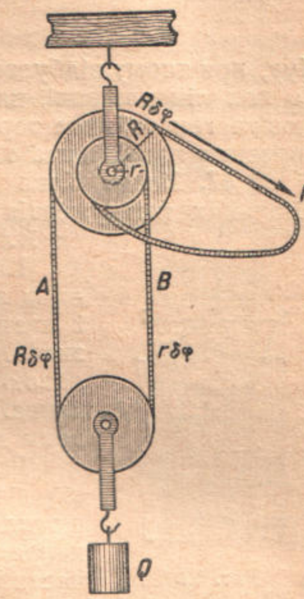

Рис. 60. Диференціальний ланцюговий поліспаст.

За принципом можливих переміщень маємо:

$$P\cdot R\cdot\delta\varphi-\frac{1}{2}Q(R-r)\delta\varphi=0,$$

або

$$P=Q\frac{R-r}{2R}. \tag{8}$$

Відношення радіусів нерухомих блоків беруть звичайно від $\frac{7}{8}$ до $\frac{14}{15}$, отже, рушійна сила становить від $\frac{1}{16}$ до $\frac{1}{30}$ піднімового вантажу.

§ 46. Похила площина. Кут тертя. Нехай тіло M, що важить Q, лежить на похилій площині (кут нахилу α) і нехай на нього діє сила P, паралельна площині (рис. 61). Розкладемо силу Q на дві складові: по довжині похилої площини і перпендикулярно до неї. Тоді нормальний тиск на площину буде $Q\cdot\cos\alpha$, а сила тертя, що дорівнює добуткові нормального тиску на коефіцієнт тертя k, буде $k\cdot Q\cdot\cos\alpha$.

Надамо тілу M нескінченно малого переміщення λ вгору по похилій площині і, за принципом можливих переміщень, прирівняємо до нуля суму робіт усіх прикладених до тіла сил:

Рис. 61.

$$P\cdot\lambda-Q\sin\alpha\cdot\lambda-kQ\cos\alpha\cdot\lambda=0.$$

Звідси:

$$P=Q(\sin\alpha+k\cos\alpha).$$

Якщо сила P більша за знайдене значення, то тіло буде рухатися прискорено вгору по похилій площині.

Надамо тепер тілу M нескінченно малого переміщення λ вниз по похилій площині, при цьому робота сили P буде негативна. Дістанемо аналогічно до попереднього:

$$P=Q(\sin\alpha-k\cos\alpha).$$

Якщо сила P менша за цю величину, то тіло M буде прискорено рухатися вниз по похилій площині. Об'єднуючи обидва випадки, можна умови рівноваги написати так:

$$Q(\sin\alpha-k\cos\alpha)\leqslant P\leqslant Q(\sin\alpha+k\cos\alpha). \tag{9}$$

Якщо збільшувати кут нахилу площини α, то рушійна складова $Q \sin \alpha$ буде зростати, а сила тертя $kQ \cos \alpha$ буде зменшуватися; при якомусь куті нахилу α тіло M почне рівномірно рухатися вниз. У цьому випадку

$$Q \sin \alpha = k \cdot Q \cos \alpha,$$

звідки

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{10}$$

Кут, при якому відбувається (під діянням сили ваги) рівномірний рух тіла по похилій площині, називають **к у т о м т е р т я**. Коефіцієнт тертя дорівнює тангенсові кута тертя. Це співвідношення дає зручний спосіб для визначення коефіцієнта тертя.

§ 47. Клин. Клин становить необхідну частину всіх розколюючих і різальних інструментів (сокири, ножі, різці та ін.), вживається часто для скріплювання частин машин, а також для стискання тіл.

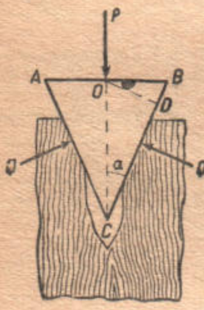

Рис. 62.

Клин має вигляд трикутної призми (рис. 62), в якої один з двогранних кутів значно гостріший за два інші і називається **к у т о м з а г о с т р е н н я**, а ребро C називається вістрям або лезом. Грань AB називається головою клина, а грані AC і BC — боками або щоками клина. Клин можна розглядати як сполучені своїми основами дві похилі площини.

Розглянемо умову рівноваги клина, що перебуває під діянням рушійної сили P і опорів Q, Q. Припустимо, що клин перемістився на нескінченно малу віддаль λ у напрямі сили P. Нехай це переміщення λ становить n-у частину OC. Тоді точка прикладання сили Q буде зсунута по лінії цієї сили на ту саму n-у частину OD, а через те що $\frac{OD}{OC} = \sin \alpha$, то, отже, точка прикладання сили Q буде зсунутою на віддаль $\lambda \sin \alpha$. За принципом можливих переміщень маємо:

$$P \cdot \lambda - 2Q \cdot \lambda \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$\frac{P}{Q} = 2 \sin \alpha = \frac{AB}{BC}. \tag{11}$$

Отже, рушійна сила так відноситься до опору, як ширина голови клина до його щоки. Чим гостріший клин, тим більша його розсуваюча дія.

Розглянемо тепер співвідношення між P і Q, взявши до уваги і тертя, яке в клині являє досить значну величину. Сила тертя, яка чисельно дорівнює добуткові коефіцієнта тертя на нормальний тиск, тобто в даному разі $k \cdot Q$, прикладена дотично до щік клина. При просуванні клина на віддаль λ, що дорівнює n-ій частині OC, буде виконана робота проти опорів Q на шляху $\lambda \sin \alpha$ і, крім того, буде виконана робота проти сил тертя kQ на шляху, що дорівнює n-ій частині DC, тобто на шляху $\lambda \cos \alpha$. Отже, при рівновазі:

$$P \cdot \lambda - 2Q \cdot \lambda \sin \alpha - 2kQ \cdot \lambda \cos \alpha = 0,$$

звідки

$$P = 2Q (\sin \alpha + k \cos \alpha). \tag{12}$$

Ця формула набуде іншого вигляду, якщо клин не просувається вперед, як у щойно розглянутому випадку, а, навпаки, бічний тиск виштовхує його. В цьому випадку:

$$P = 2Q (\sin \alpha - k \cos \alpha). \tag{13}$$

Взявши тут $P=0$ (затримуюча сила), знайдемо:

$$\sin\alpha = k\cdot\cos\alpha, \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}\alpha = k.$$

Це означає, що при $\operatorname{tg}\alpha = k$ (або менше) клин, що є в тілі, сам по собі не може бути виштовхнутий ніякими бічними тисками Q і затримується на місці силами тертя.

Тертя в клині являє значну величину, яка перевищує у кілька разів величину сили P. Тому, наприклад, тонка сокира легко входить у дерево, але, з другого боку, і дуже загрузає в ньому, і для коління дров зручніший колун — більш важкий і з більшим кутом загострення.

§ 48. Гвинт. Гвинт має дуже поширене застосування: він служить для передачі сили і перетворення руху (червякова передача); для піднімання тягарів (домкрат); для стискання тіл (гвинтові преси); для сполучення частин машин (болти).

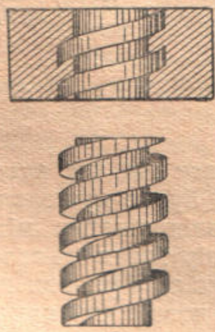

Рис. 63*a*.

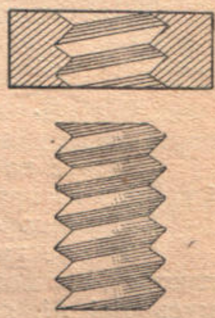

Рис. 63*b*.

Гвинт складається з циліндричного стрижня, на якому зроблена різь вздовж гвинтової лінії. Різь роблять прямокутною або трикутною, гострою (рис. 63*a* і 63*b*), залежно від призначення гвинта.

Гайка (рис. 63) являє собою призматичне тіло з циліндричним отвором, на внутрішній поверхні якого є цілком така сама прямокутна або гостра різь.

Гайка рухається по різі гвинта або, навпаки, гвинт рухається по різі гайки як якесь тіло по похилій площині. Рис. 64 являє розгортку гвинтової лінії; h називається ходом або відстанню гвинта, r — радіус гвинта, α — кут нахилу, при чому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r}$. Припустимо, що, діючи силою P на рукоятку гвинта A, поміщеного в нерухомій гайці B (рис. 65), ми піднімаємо вантаж Q. Знайдемо співвідношення між P і Q.

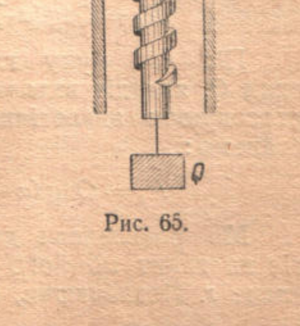

Рис. 65.

Нехай гвинт повернувся на нескінченно малий кут $\delta\varphi$. Тоді сила P виконає роботу на переміщенні $l\cdot\delta\varphi$, при цьому вантаж Q трохи підніметься. Якби гвинт зробив один оборот, тобто повернувся б на кут 2π, вантаж Q піднявся б на h, отже, при повороті гвинта на $\delta\varphi$ він підніметься на $h\cdot\frac{\delta\varphi}{2\pi}$; при цьому проти ваги вантажу буде виконана робота $Q\frac{h}{2\pi}\delta\varphi$.

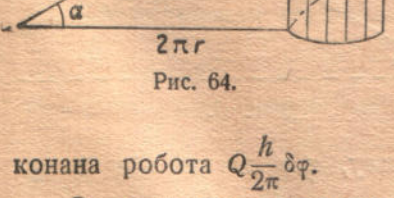

Рис. 64.

За принципом можливих переміщень маємо:

$$P\cdot l\delta\varphi - Q\frac{h}{2\pi}\delta\varphi = 0,$$

звідки

$$\frac{P}{Q}=\frac{h}{2\pi l}. \tag{14}$$

Отже, рушійна сила відноситься до опору, як хід гвинта до кола, описаного кінцем його рукоятки.

Позначаючи через P_0 силу, прикладену до самого кола гвинта, і беручи до уваги, що в цьому випадку $l=r$, $\frac{h}{2\pi l}=\frac{h}{2\pi r}=\operatorname{tg}\alpha$, тангенсові кута нахилу гвинта, дістанемо:

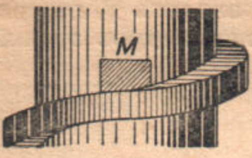

Рис 66.

$$\frac{P_0}{Q}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Невзяте до уваги під час виведення цих формул тертя між гвинтом і гайкою насправді буває дуже значне.

Визначимо співвідношення між P і Q, беручи до уваги сили тертя.

Через те що опір тертя не залежить від величини поверхень, які стикаються, ми можемо собі уявити все навантаження зосередженим на якомусь тілі M, яке ковзає по єдиному гвинтовому ходу (рис. 66). Інакше кажучи, ми можемо розглядати рух якогось тіла з вагою Q по похилій площині з кутом α (рис. 67).

Нехай P_0 означає, як і раніше, силу, що діє на гвинт по його колу. Розкладемо сили Q і P_0 на складові: ми бачимо, що нормальний тиск дорівнює сумі $Q\cos\alpha+P_0\sin\alpha$, а звідси сила тертя дорівнює $k(Q\cos\alpha+P_0\sin\alpha)$.

Надамо гвинтові нескінченно малого повороту; при цьому точка M дістане деяке нескінченно мале переміщення λ вгору по похилій площині. Тоді при цьому переміщенні робота сил P_0, Q і сили тертя відповідно виразиться $P_0\cos\alpha\cdot\lambda$, $-Q\sin\alpha\cdot\lambda$ і $-k(Q\cos\alpha+P_0\sin\alpha)\cdot\lambda$. Отже, умова рівноваги набуде вигляду:

$$P_0\cos\alpha\cdot\lambda-Q\sin\alpha\cdot\lambda-k(Q\cos\alpha+P_0\sin\alpha)\lambda=0,$$

звідки

$$P_0=Q\frac{\sin\alpha+k\cos\alpha}{\cos\alpha-k\sin\alpha}.$$

Підставляючи тут замість коефіцієнта тертя k рівну йому величину $\operatorname{tg}\varphi$, де φ — кут тертя, дістанемо:

$$P_0=Q\operatorname{tg}(\alpha+\varphi). \tag{15}$$

Під час руху гвинта в сторону сили Q, яка діє вздовж осі гвинта, застосовуючи аналогічні міркування, дістанемо:

$$P_0=Q\operatorname{tg}(\alpha-\varphi). \tag{16}$$

Рис. 67.

Ми розглядали досі силу P_0, яка діє на гвинт по його колу, тобто має плече r. Позначаючи, як і раніше, через P силу, яка діє на кінець рукоятки, тобто має плече l, і маючи на увазі пропорцію $\frac{P}{P_0}=\frac{r}{l}$, дістанемо:

$$P=Q\,\frac{r}{l}\operatorname{tg}(\alpha\pm\varphi). \tag{17}$$

З формули (15) видно, що і для гвинтів, так само як і для поліспастів, не можна довести виграш на силі[1]) до якого завгодно степеня (застосовуючи гвинти з довільно малим ходом), бо при α зникаючо малому $\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)=\operatorname{tg}\varphi$ — якійсь скінченній величині. Тому із зменшенням кута α швидко зменшується і коефіцієнт корисної дії гвинта (відношення корисної роботи до витраченої); наприклад, при кутах $\alpha=20^\circ$, 3° і 1° коефіцієнти корисної дії (якщо взяти коефіцієнт тертя $k=0{,}1$) відповідно будуть: 0,8; 0,34 і 0,15.

З формули (16) видно, що при $\alpha=\varphi$ сила $P_0=0$, тобто якщо кут нахилу гвинта дорівнює або менший кута тертя, то гвинт буде триматися на своєму місці виключно силою свого тертя об гайку. В металічних гвинтах з мастилом коефіцієнт тертя $k=0{,}1$, що відповідає кутові тертя $\approx 6^\circ$. Отже, гвинт під навантаженням, яке діє вздовж осі, може бути витиснутий з гайки тільки тоді, коли кут нахилу гвинта більший 6° (для гвинтів без мастила $k=0{,}18$ і $\varphi=10^\circ$). Кут же нахилу гвинтів, уживаних на практиці, роблять завжди менший, приблизно $2-4^\circ$, отже, гвинт сам виходити з гайки не може.

Відзначимо, що в гвинтах з трикутною різзю тертя значно більше, ніж у гвинтах з прямокутною, а тому перші вживаються переважно для сполучення частин, а другі — для передачі сили і перетворення рухів.

§ 49. Умови рівноваги вільного твердого тіла. Всяке переміщення вільного твердого тіла можна розглядати як якийсь поступний рух і обертання навколо якоїсь осі. Який завгодно поступний рух може бути розкладений у свою чергу на три поступних рухи по трьох координатних осях x, y і z, а обертання навколо будьякої осі може бути розкладене на три обертання навколо координатних осей.

Отже, довільне нескінченно мале переміщення твердого тіла може бути замінене шістьма елементарними переміщеннями: трьома поступними переміщеннями по напряму координатних осей і трьома обертаннями навколо координатних осей.

Ці шість можливих переміщень незвідні, не можуть взаємно замінюватися, вони незалежні. Вільне тверде тіло, як кажуть, має шість степенів вільності.

За принципом можливих переміщень для рівноваги необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулеві сума робіт усіх прикладених сил для всякого можливого переміщення. Отже, ми дістанемо стільки рівнянь, скільки незалежних можливих переміщень може мати дане тіло, або інакше, скільки „степенів вільності“ воно має. Ми дістанемо ці рівняння, якщо розглянемо окремо кожне з зазначених шести переміщень.

Візьмемо поступне переміщення, паралельне осі x, при якому всі точки тіла пересуваються на величину δx. Якщо позначити проекцію сили на вісь x через X, то робота цієї сили при вказаному переміщенні виразиться:

$$X\cdot\delta x.$$

Додаючи роботи всіх прикладених сил і позначаючи суму знаком $\sum$ за принципом можливих переміщень, дістанемо:

$$\sum(X\cdot\delta x)=0$$

або, виділяючи спільний множник,

$$\delta x\cdot\sum X=0,$$

звідки

$$\sum X=0,$$

[1]) Тут розуміємо виграш на силі, одержуваний в результаті застосування самого гвинта; для збільшення виграшу на силі служить рукоятка l.

тобто сума проекцій усіх сил на вісь x повинна дорівнювати нулеві. Подібні ж рівняння дістанемо також для осей y і z, тобто

$$\sum Y=0,\ \sum Z=0.$$

Розглянемо тепер обертальне переміщення навколо якоїсь осі O (рис. 68). При цьому будьяка точка тіла A дістане переміщення AA_1, розміщене в площині, перпендикулярній до осі O, і рівне $\delta\varphi\cdot r$, де $\delta\varphi$ — нескінченно малий кут повороту тіла навколо осі O, а r — віддаль точки від осі.

Якщо в точці A прикладена якась сила F, то її роботу на переміщенні AA_1 знайдемо так.

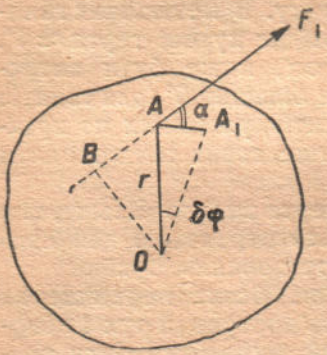

Рис. 68.

Розкладемо силу F на дві складових, з яких одна йде паралельно осі O, а друга розміщена в площині, перпендикулярній до осі, і являє собою проекцію сили F на цю площину.

Робота першої складової дорівнює нулеві, бо вона перпендикулярна до переміщення AA_1. А робота складової F_1 виразиться так:

$$F_1\cdot AA_1\cdot\cos\alpha=F_1\cdot\delta\varphi\cdot r\cdot\cos\alpha,$$

де α — кут між F_1 і переміщенням AA_1.

Опустивши перпендикуляр OB з точки O на лінію діяння сили F_1, дістанемо

$$OB=r\cdot\cos\alpha,$$

і вираз роботи матиме вигляд

$$F_1\cdot OB\cdot\delta\varphi.$$

Але $F_1\cdot OB$, тобто добуток проекції сили F (на площину, перпендикулярну до осі O) на найкоротшу віддаль між силою F і віссю O, як відомо, називається моментом сили відносно осі O. Позначимо його через $m(F)$.

Отже, робота сили F дорівнює добуткові моменту сили на кутове переміщення.

Склавши такі вирази робіт для всіх сил, додавши їх і прирівнявши за принципом можливих переміщень суму їх до нуля, дістанемо:

$$\sum m(F)\cdot\delta\varphi=0,$$

або, виносячи спільний множник $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi\cdot\sum m(F)=0,$$

звідки

$$\sum m(F)=0,$$

тобто сума моментів усіх сил відносно осі O повинна дорівнювати нулеві. Цю умову можна застосувати до кожного з трьох обертань навколо координатних осей x, y і z.

Отже, ми маємо такі шість умов рівноваги вільного твердого тіла:

$$\left.\begin{array}{ll}\sum X=0 & \sum m_x(F)=0\\ \sum Y=0 & \sum m_y(F)=0\\ \sum Z=0 & \sum m_z(F)=0\end{array}\right\},\qquad(18)$$

тобто *суми проекцій усіх сил на три координатні осі повинні дорівнювати нулеві і суми моментів тих самих сил відносно трьох координатних осей теж повинні дорівнювати нулеві.*

§ 50. Умови рівноваги невільного твердого тіла. Невільним твердим тілом називається таке, вільність переміщення якого обмежена будьякими умовами. Розглянемо два випадки.

1. Тіло з однією нерухомою точкою. Для такого тіла ніяке поступне переміщення неможливе, але воно може обертатися навколо якої завгодно з осей, що проходять через нерухому точку.

Обертання навколо якої завгодно осі може бути розкладене на три обертання навколо трьох координатних осей; це і є три можливих незалежних переміщення, що їх допускає зв'язок.

Для кожного з них сума робіт усіх прикладених сил повинна дорівнювати нулеві. А це, як ми бачили в попередньому параграфі, приводить до таких трьох умов:

$$\left.\begin{aligned}\sum m_x(F)=0\\ \sum m_y(F)=0\\ \sum m_z(F)=0\end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

тобто *для рівноваги тіла, яке має одну нерухому точку, сума моментів усіх сил відносно кожної з координатних осей повинна дорівнювати нулеві.*

2. Тіло з двома нерухомими точками (або з закріпленою віссю обертання). Єдиним можливим переміщенням для даного тіла є обертання навколо осі, яка проходить через ці дві точки. Отже, для рівноваги тіла, яке має закріплену вісь обертання, сума моментів усіх сил відносно осі обертання повинна дорівнювати нулеві:

$$\sum m(F)=0. \tag{20}$$

РОЗДІЛ III.

ДИНАМІКА ТВЕРДИХ ТІЛ.

§ 51. Поступний і обертальний рухи твердих тіл. У механіці твердим тілом називається сукупність матеріальних частинок, взаємне розміщення яких залишається незмінним. Основні закони механіки визначають рух окремої матеріальної точки. А тому для повного опису руху нетвердого тіла, частинки якого не підлягають умові абсолютної незмінності взаємного розміщення, треба було б знати сили, прикладені до кожної частинки зокрема. Для твердого тіла в цьому немає потреби. У цьому разі який завгодно рух можна уявити як результат суміщення двох елементарних рухів: поступного, при якому *яка завгодно лінія, мислено проведена всередині тіла і зв'язана з його частинками, переміщується паралельно самій собі*, і обертального, при якому *всі точки тіла описують кола навколо якоїсь осі обертання.* Розмежування довільного руху на два рухи — поступний і обертальний — приводить до значного спрощення і, крім того, дозволяє сформулювати закони обертальних рухів твердих тіл так, що кожний з цих законів є аналогічним одному з елементарних законів механіки.

Неважко бачити, що під час поступного руху траєкторії всіх точок тіла паралельні одна одній, а швидкості точок однакові. Тому досить знати рух однієї будьякої точки для того, щоб можна було легко встановити положення всього тіла у просторі в будьякий момент часу. Тіло рухається поступно так, як коли б уся його маса була зосереджена в центрі маси.

Прикладом поступного руху можуть служити: вільне падання тіл під діянням сили тяжіння (§ 20), рух поршня в циліндрі і т. ін.

Для характеристики обертального руху вводять поняття про кутову швидкість і кутове прискорення, які повинні бути однакові в кожний даний момент для всіх частинок тіла. У зв'язку з незмінністю взаємного розміщення частинок, як буде показано нижче, лінійні швидкості і лінійні прискорення є пропорціональними віддалі частинок від осі обертання. Цим визначається та виключна роль, яку відограє віддаль частинок від осі обертання в динаміці обертальних рухів твердого тіла: віддаль від осі обертання r входить у неявній формі в усі рівняння обертальних рухів. В явній формі вона не бере участі в цих рівняннях, але вона входить у ті величини, які тут замінюють поняття сили і маси. В динаміці обертальних рухів замість сил і мас розглядаються моменти сил і моменти інерції.

Нагадаємо (§ 39), що моментом сили F, розміщеної в площині, перпендикулярній до осі обертання, називають добуток величини сили на найкоротшу віддаль лінії її діяння від осі обертання (рис. 69):

$$M = F \cdot p. \quad (1)$$

В окремому і найважливішому випадку, коли сила, прикладена до будьякої точки тіла, діє по напряму дотичної до кола, описуваного цією точкою, момент сили, згідно з наведеним означенням, виразиться добутком величини сили на радіус кола (рис. 70):

$$M = F \cdot r. \tag{1a}$$

М о м е н т о м і н е р ц і ї будьякої частинки з масою m, яка перебуває на віддалі r від осі обертання, називають добуток маси цієї частинки на квадрат її віддалі від осі обертання:

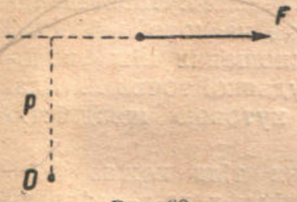

Рис. 69.

$$I = mr^2. \tag{2}$$

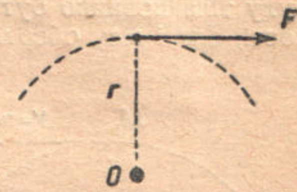

Рис. 70.

Введення цих величин, фізичний зміст яких стане ясним з поданих нижче теорем, дозволяє надати всім рівнянням обертального руху такого вигляду, який цілком подібний до рівнянь поступного руху.

§ 52. Кутова швидкість і кутове прискорення. Під час обертального руху твердого тіла всі точки тіла описують кола навколо нерухомої прямої, що є віссю обертання, при чому ці кола розміщені в площинах, перпендикулярних до осі обертання.

Якщо через будьяку точку тіла, яка не лежить на осі, і через вісь обертання провести площину, то при обертанні тіла ця площина буде повертатися на якийсь кут φ, яким і визначиться положення тіла в даний момент (рис. 71). З часом кут повороту φ змінюється: він являє якусь функцію часу; отже, можна написати:

$$\varphi = f(t).$$

Якщо відомий вид цієї функції, то для будьякого моменту часу t можна визначити кут повороту φ, а, отже, і положення тіла.

Обертання називають рівномірним, якщо за два які завгодно рівні проміжки часу тіло повертається на однакові кути або (це те саме) зміна кута повороту пропорціональна часові. В цьому разі відношення φ/t є величина, що називається „кутовою швидкістю". Позначаючи кутову швидкість літерою ω, можемо написати:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{3}$$

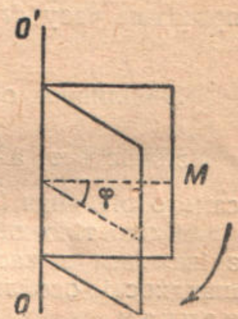

Рис. 71.

Таким чином, кутова швидкість рівномірного обертання є зміна кута повороту за одиницю часу.

Якщо обертання нерівномірне, то під кутовою швидкістю розуміють відношення нескінченно малого кута повороту $d\varphi$ до того нескінченно малого проміжка часу dt, протягом якого тіло повертається на цей кут $d\varphi$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

Інакше кажучи, кутова швидкість є перша похідна від кута повороту по часу: якщо $\varphi = f(t)$, то $\omega = f'(t)$. [Аналогічно: лінійна швидкість поступного прямолінійного руху є перша похідна від пройденого тілом шляху по часу: якщо $s = f(t)$, то $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$.]

Одиницею кутової швидкості є кутова швидкість такого рівномірного обертання, при якому тіло за 1 *сек* повертається на кут в 1 радіан[1]). Цю одиницю кутової швидкості позначають так: $1/сек = сек^{-1}$.

Саме тільки числове значення кутової швидкості ще не цілком визначає обертання твердого тіла. Справді, наприклад, з кутовою швидкістю в 5 $сек^{-1}$ тіло може обертатися навколо безлічі осей, різно орієнтованих у просторі. Очевидно, що для повної характеристики обертального руху тіла повинно бути вказане не тільки числове значення кутової швидкості, але і вісь обертання, а також напрям обертання навколо цієї осі.

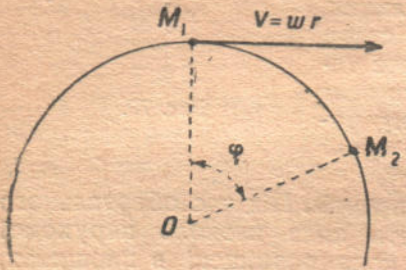

Рис. 72. Колова швидкість дорівнює добуткові кутової швидкості на радіус.

Знайдемо співвідношення між „коловою" швидкістю v будь-якої точки M тіла, яке обертається, і кутовою швидкістю обертання тіла ω.

Під час обертання тіла кожна його точка описує коло радіуса r, де r — віддаль даної точки від осі обертання. Нехай M_1 є положення точки в якийсь початковий момент, а M_2 — її положення через t *сек* (рис. 72). Позначивши дугу M_1M_2 через s, а кут повороту M_1OM_2 через φ, можемо, на підставі співвідношення між кутом у радіанах, радіусом і довжиною дуги, написати:

$$s = r \cdot \varphi. \tag{5}$$

Ділячи обидві частини цієї рівності на час t і беручи до уваги, що s/t є швидкість v, а φ/t — кутова швидкість ω (при рівномірному обертанні), знайдемо:

$$v = r \cdot \omega. \tag{6}$$

Отже, колова швидкість дорівнює добуткові кутової швидкості на радіус.

В разі нерівномірного обертання ми могли б для елементарно малого проміжка часу dt написати:

$$ds = r \cdot d\varphi.$$

Поділивши обидві частини рівності на dt і беручи до уваги, що $\frac{ds}{dt}$ є швидкість v, а $\frac{d\varphi}{dt}$ — кутова швидкість ω, ми знову прийшли б до того самого рівняння (6).

Якщо тіло обертається нерівномірно, то, значить, кутова швидкість змінюється з часом, і можна схарактеризувати скорість зміни кутової швидкості особливою величиною, яку називають **кутовим прискоренням**.

Якщо за нескінченно малий проміжок часу dt кутова швидкість змінилася на $d\omega$, то під кутовим прискоренням ξ розуміють відношення

$$\xi = \frac{d\omega}{dt}. \tag{7}$$

[1]) Нагадаємо, що кут у радіанах виражається відношенням довжини дуги кола до радіуса, а саме $\varphi = \frac{s}{r}$. Беручи тут $s = r$, маємо: $\varphi = 1$, тобто один радіан є кут, довжина дуги якого дорівнює радіусові. Беручи в тій самій формулі $s = 2\pi r$ (довжина кола), знайдемо $\varphi = 2\pi$, тобто один оборот вимірюється кутом 2π радіан. З другого боку, один оборот вимірюється кутом у $360°$, отже: 1 радіан $= \frac{360}{2\pi} = 57°\,14'\,47''$.

Одиницею кутового прискорення є $1/сек^2 = сек^{-2}$, тобто таке прискорення, коли в кожну секунду кутова швидкість зростає на одиницю кутової швидкості.

Під час обертання тіла прискорення різних його точок, так само як і швидкість, залежить від віддалей цих точок від осі обертання: чим далі точка від осі обертання, тим більша її швидкість і прискорення. Через те що під час обертання тіла кожна точка описує коло навколо осі обертання, то, взагалі кажучи, прискорення точки j напрямлене (рис. 73), як і в усякому криволінійному русі, всередину вгнутості кривої і може бути розкладене на дві складові — тангенціальне прискорення $j_\tau = \frac{dv}{dt}$ і доцентрове прискорення $j_r = \frac{v^2}{r}$.

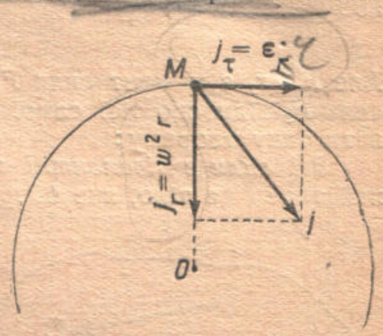

Рис. 73. Колове прискорення дорівнює добуткові кутового прискорення на радіус.

Знайдемо вираз цих двох прискорень через кутову швидкість і кутове прискорення. Через те що $v = \omega \cdot r$, а r для даної точки є величина незмінна, то нескінченно мала зміна швидкості dv зумовлена нескінченно малою зміною кутової швидкості $d\omega$. Отже:

$$dv = r \cdot d\omega \text{ і } j_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{r d\omega}{dt};$$

через те що $\frac{d\omega}{dt}$ є кутове прискорення ξ, то:

$$j_\tau = \xi \cdot r. \tag{8}$$

Підставляючи у вираз доцентрового прискорення $\frac{v^2}{r}$ замість v добуток $\omega \cdot r$ і скоротивши на r, дістанемо:

$$j_r = \omega^2 \cdot r. \tag{9}$$

§ 53. Еквівалентні сили. Теорема про моменти. Уявлення про рівні сили, що домінує в динаміці поступних рухів, у динаміці обертальних рухів поступається місцем перед поняттям про „еквівалентні сили". Еквівалентними ми називаємо такі сили, які, діючи на окремі матеріальні точки тіла, різно віддалені від осі обертання, виконують однакову роботу при зміщенні цих точок на той самий кут відносно осі обертання.

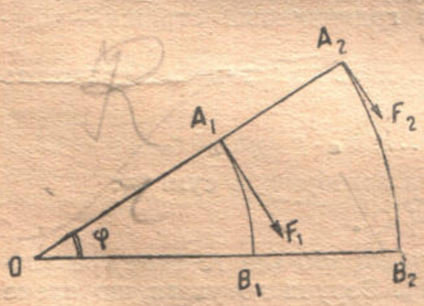

Рис. 74.

Розглянемо тепер, якій умові повинні задовольняти еквівалентні сили.

Нехай дві точки твердого тіла A_1 A_2 (рис. 74) змістилися на той самий кут φ відносно осі обертання O, при чому на точки A_1 і A_2 діють еквівалентні сили F_1 і F_2. Позначимо віддалі точок від осі обертання відповідно через r_1 і r_2. При зміщенні на кут φ точка A_1 пройде шлях $A_1B_1 = \varphi \cdot r_1$; отже, робота сили F_1 виразиться добутком $F_1 \cdot \varphi \cdot r_1$. Для точки A_2 відповідно вираз для шляху буде $\varphi \cdot r_2$, і робота сили F_2 виразиться добутком $F_2 \cdot \varphi \cdot r_2$.

Згідно з означенням поняття еквівалентності еквівалентні сили повинні виконати однакову роботу при зміщенні точок їх прикладання на той самий кут. А тому можна написати:

$$F_1 \cdot \varphi \cdot r_1 = F_2 \cdot \varphi \cdot r_2,$$

або

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2. \tag{10}$$

Але $F_1 \cdot r_1$ є момент сили F_1 відносно осі обертання O, а $F_2 \cdot r_2$ є момент сили F_2 відносно тієї самої осі. На підставі цього ми можемо сформулювати таку теорему:

дві сили еквівалентні щодо обертання, якщо їх моменти рівні. Нехай тепер на тіло, яке обертається навколо якоїсь осі, діють кілька сил, довільно напрямлених.

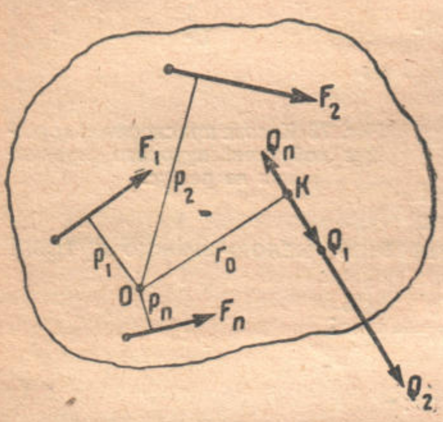

Рис. 75.

Проведемо площину, перпендикулярну до осі обертання, і розкладемо кожну з даних сил на дві взаємно перпендикулярні складові так, щоб одна пішла паралельно осі обертання, а друга лежала в проведеній площині. Усі складові сил, паралельні осі обертання, обертального моменту не дають, а, отже, залишаються для розгляду тільки складові, розміщені в площині, перпендикулярній до осі обертання.

Таким чином, не порушуючи загальності міркувань, ми можемо вважати всі сили, прикладені до тіла, розміщеними в площині, перпендикулярній до осі обертання. Нехай такими силами будуть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ з плечами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (рис. 75).

На підставі теореми про еквівалентність сил ми можемо кожну з цих сил F замінити іншою силою Q з довільно вибраним, наприклад, рівним одиниці довжини, плечем r_0; тоді ми дістанемо сили $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, прикладені в тій самій точці K і напрямлені по одній прямій в ту або іншу сторону, зважаючи на знак відповідного моменту (нагадаємо, що моменти сил, обертаючих за годинниковою стрілкою, умовилися вважати позитивними, моменти ж сил, обертаючих проти годинникової стрілки,— негативними).

Ці сили можуть бути визначені з таких співвідношень, що виражають умови еквівалентності:

$$F_1 \cdot p_1 = Q_1 \cdot r_0; \quad F_2 \cdot p_2 = Q_2 \cdot r_0, \ldots; \quad F_n \cdot p_n = Q_n \cdot r_0,$$

а їх рівнодійна, очевидно, буде дорівнювати алгебричній сумі їх:

$$R = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n.$$

Знайдемо тепер момент M цієї рівнодійної або (це те саме) результуючий момент усіх даних сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Беручи до уваги, що плече сили R дорівнює r_0, маємо:

$$M = R \cdot r_0 = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) \cdot r_0 = F_1 \cdot p_1 + F_2 \cdot p_2 + \ldots + F_n \cdot p_n,$$

або

$$M = \sum F \cdot p, \tag{11}$$

де знак $\sum$ означає алгебричну суму.

Отже, *результуючий момент кількох обертаючих сил дорівнює алгебричній сумі моментів окремих сил.*

§ 54. Еквівалентні маси. Теорема про моменти інерції. Якщо в динаміці поступних рухів розглядають рівні маси, то в динаміці обертальних рухів їх місце займають еквівалентні маси, при чому під еквівалентними масами розуміють такі маси, які під діянням еквівалентних обертаючих сил набувають рівних кутових прискорень.

Розглянемо умову еквівалентності мас. Нехай дві маси m_1 і m_2 (рис. 76), розміщені від осі обертання на віддалях r_1 і r_2, перебувають під діянням еквівалентних (тобто таких, що мають рівні моменти) сил F_1 і F_2 і дістають однакове кутове прискорення ξ. Позначаючи лінійне прискорення маси m_1 через $j_{\tau 1}$, а маси m_2 через $j_{\tau 2}$ і застосовуючи вираз сили через масу і прискорення, дістанемо:

$$F_1 = m_1 \cdot j_{\tau 1};$$
$$F_2 = m_2 \cdot j_{\tau 2},$$

але через те що $j_{\tau 1} = \xi \cdot r_1$ і $j_{\tau 2} = \xi \cdot r_2$ (§ 52), то вирази для сил матимуть вигляд:

$$F_1 = m_1 \cdot \xi \cdot r_1,$$
$$F_2 = m_2 \cdot \xi \cdot r_2.$$

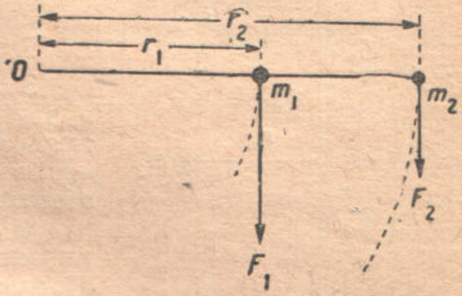

Рис. 76.

Але за умовою сили F_1 і F_2 еквівалентні, отже:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2,$$

або, підставляючи сюди значення F_1 та F_2 і скорочуючи на ξ, дістанемо умову еквівалентності мас:

$$m_1 \cdot r_1^2 = m_2 \cdot r_2^2. \qquad (12)$$

Як бачимо, під час обертального руху важливе значення має величина, яка виражається добутком маси на квадрат віддалі її від осі обертання. Ця величина визначає інертність тіла щодо обертального руху. Вона дістала назву „моменту інерції". Момент інерції прийнято позначати літерою I.

Отже, умову еквівалентності мас можна виразити так:
дві маси еквівалентні щодо обертання, якщо рівні їх моменти інерції.

Застосовуючи цю умову еквівалентності, очевидно, можна якусь масу m, що перебуває від осі обертання на віддалі r, замінити еквівалентною їй масою μ, яка перебуває від тієї ж осі на якійсь довільно вибраній віддалі r_0, при чому ця маса μ може бути визначена з співвідношення:

$$I = m \cdot r^2 = \mu \cdot r_0^2.$$

Взявши r_0 рівним одиниці довжини, ми бачимо, що момент інерції будь-якої маси m чисельно дорівнює еквівалентній щодо обертання масі μ, розміщеній на віддалі одиниці довжини від осі обертання ($I = \mu \cdot 1^2$).

Нехай треба знайти момент інерції системи, яка складається з n незмінно сполучених мас $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (рис. 77), які обертаються навколо тієї самої осі і розміщені від неї на віддалях $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Замінимо всі ці маси еквівалентними їм масами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, розміщеними від осі обертання на віддалі r_0:

$$\mu_1 r_0^2 = m_1 \cdot r_1^2; \quad \mu_2 r_0^2 = m_2 \cdot r_2^2, \ldots, \quad \mu_n r_0^2 = m_n \cdot r_n^2.$$

Сумарна маса μ, що дорівнює сумі $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, розміщена на віддалі r_0, еквівалентна щодо обертання всім масам, які складають розглядану нами систему. Отже, момент інерції даної системи дорівнює моментові інерції маси μ:

$$I = \mu \cdot r_0^2 = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) \cdot r_0^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2,$$

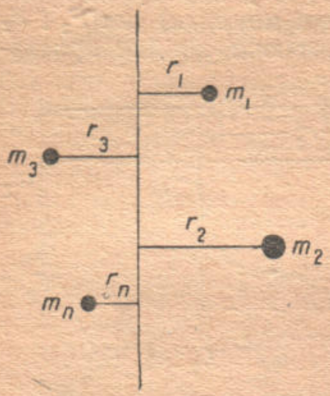

Рис. 77.

або, що те саме:

$$I = \sum_1^n mr^2 \text{ [1]}. \tag{13}$$

З формули mr^2 видно, що одиницею моменту інерції є 1 $г \cdot см^2$, тобто момент інерції такої маси, яка еквівалентна щодо обертання масі в 1 *г*, розміщеній на віддалі 1 *см* від осі обертання.

§ 55. Основне рівняння динаміки обертальних рухів. Якщо до якогось тіла, що може обертатися навколо нерухомої осі, прикладено кілька обертаючих сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ з плечами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то, згідно з попереднім, усю сукупність їх можна замінити однією еквівалентною силою R, що має довільно вибране плече r_0 і визначається з співвідношення:

$$Rr_0 = \sum F \cdot p.$$

Так само маси окремих частинок тіла можна замінити еквівалентною масою μ, розміщеною на тій же, що й для сили R, віддалі r_0 від осі обертання і визначуваною з співвідношення:

$$\mu \cdot r_0^2 = \sum mr^2.$$

Отже, виявиться, що якась сила R діє на масу μ (рис. 78), і за другим законом механіки прискорення j_τ знайдемо з співвідношення:

$$R = \mu \cdot j_\tau.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на r_0, можна його представити в такому вигляді:

$$R \cdot r_0 = \mu \cdot r_0^2 \cdot \frac{j_\tau}{r_0}.$$

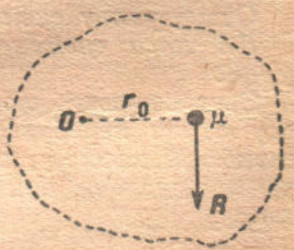

Рис. 78.

Але $\frac{j_\tau}{r_0}$ є кутове прискорення ξ (форм. 8), $R \cdot r_0$, рівне $\sum F \cdot p$, є не що інше, як результуючий момент M, а $\mu \cdot r_0^2$, рівне $\sum mr^2$, являє момент інерції I. А тому можна написати:

$$M = I \cdot \xi, \tag{14}$$

[1]) Якщо замість скінченного числа n матеріальних точок ми будемо мати суцільне тіло, то можна розділити його на елементарні маси dm; тоді сума скінченного числа доданків перейде в суму нескінченно великого числа їх, і момент інерції виразиться інтегралом:

$$I = \int r^2 \cdot dm.$$

тобто *обертальний момент дорівнює добуткові моменту інерції на кутове прискорення.*

Через те що $\xi = \frac{d\omega}{dt}$, то рівняння (14) можна переписати так:

$$M = I\frac{d\omega}{dt}. \qquad (15)$$

При виведенні цього основного рівняння динаміки обертальних рухів ми припускали, що момент інерції тіла залишається під час обертання незмінним (віддаль мас від осі обертання не змінюється).

Якби ми врахували можливість зміни моменту інерції, то замість рівняння (15) дістали б таке рівняння:

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt}. \qquad (16)$$

§ 56. Закон зберігання моменту кількості руху. До основного рівняння обертального руху:

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

входить величина $I\omega$. Вияснимо її фізичний зміст. Під час обертального руху тіла кожна його частинка з масою m описує коло якогось радіуса r, маючи при цьому якусь швидкість v (рис. 79). Добуток $m \cdot v$ є кількість руху даної частинки. Якщо числове значення вектора кількості руху помножити на найкоротшу віддаль напряму цього вектора від осі обертання, тобто в даному разі на радіус r, то ми дістанемо нову величину mvr, яка має назву *моменту кількості руху відносно даної осі.* Пригадаймо, що величина моменту сили визначається аналогічним способом (§ 39 і 51).

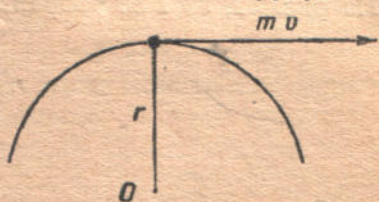

Рис. 79.

Взявши суму моментів кількості руху всіх частинок, які складають тіло, що обертається, дістанемо момент кількості руху всього даного тіла:

$$\sum mv \cdot r = \sum m \cdot \omega r \cdot r = \sum m\omega r^2,$$

або, виносячи за знак суми спільний для всіх точок множник ω і маючи на увазі, що $\sum mr^2$ є момент інерції I, знаходимо:

$$\sum m\omega r^2 = \omega \sum mr^2 = I \cdot \omega.$$

Отже, *момент кількості руху тіла відносно осі обертання дорівнює добуткові моменту інерції на кутову швидкість.*

Звернемося до основного рівняння

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt}$$

і розглянемо окремий випадок, коли на тіло або зовсім не діють зовнішні сили, або вони такі, що їх рівнодійна не дає моменту відносно осі обертання ($M = 0$). Тоді:

$$d(I\omega) = M \cdot dt = 0.$$

Але якщо зміна величини $I\omega$ дорівнює нулеві, то, значить, сама величина $I\omega$ залишається сталою:

$$I\omega = \text{const.} \tag{17}$$

Отже, *якщо на тіло не діють зовнішні сили* (або результуючий момент їх відносно осі обертання дорівнює нулеві), *то момент кількості руху тіла залишається незмінним.* Цей закон має назву закону зберігання моменту кількості руху.

Наведемо кілька прикладів, які ілюструють цей закон.

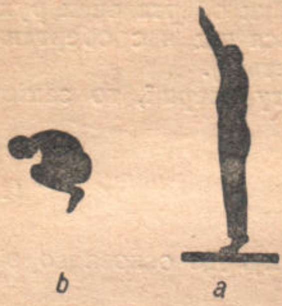

Рис. 80. Сальто-мортале.

Гімнаст під час стрибка через голову (рис. 80) підгортає до тулуба руки і ноги. Цим він зменшує свій момент інерції, а через те що добуток $I\omega$ повинен залишатися незмінним, то кутова швидкість обертання ω зростає, і за короткий проміжок часу, поки гімнаст перебуває в повітрі, він встигає зробити повний оборот.

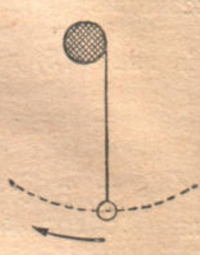

Рис. 81.

Нехай кулька, прив'язана до нитки, намотується на палку (рис. 81); мірою того, як зменшується довжина нитки, зменшується момент інерції кульки і, отже, зростає кутова швидкість. Ряд цікавих дослідів можна зробити, ставши на платформу, яка обертається на шарикопідшипнику. На рис. 82, 83 і 84 зображені деякі з цих дослідів.

Рис. 82. Обертання людини, яка стоїть на ослінчику, прискориться, якщо вона опустить руки, і сповільниться, якщо вона їх підніме.

Рис. 83. Якщо зробити рух руками в один бік, ноги разом з верхньою платформою ослінчика повернуться в другий бік.

Рис. 84. Якщо ми піднімемо велосипедне колесо над головою і надамо йому обертального руху, то сами разом з платформою почнемо обертатися в протилежний бік.

§ 57. Кінетична енергія мас, що обертаються. Якщо тіло рухається поступно, то всі точки його мають однакову швидкість v. Кінетична енергія будьякої частинки тіла з масою Δm буде $\frac{\Delta m \cdot v^2}{2}$, а кінетична енергія K усього тіла буде знайдена як сума таких виразів, тобто

$$K=\sum \frac{\Delta m \cdot v^2}{2}.$$

Виносячи спільний множник $\frac{v^2}{2}$ за знак суми, маємо:

$$K=\frac{v^2}{2}\sum \Delta m=\frac{mv^2}{2},$$

де $\sum \Delta m = m$ — маса даного тіла. Отже, в разі поступного руху тіла його кінетична енергія має такий самий вираз, як і для матеріальної точки.

Якщо тіло обертається навколо якоїсь осі, то, як було зазначено вище (§ 52), колові швидкості точок пропорціональні віддалям точок від осі обертання:

$$v=\omega \cdot r,$$

де ω — кутова швидкість.

Візьмемо суму кінетичних енергій всіх частинок тіла, що обертається:

$$K=\sum \frac{\Delta m \cdot v^2}{2}=\sum \frac{\Delta m \cdot \omega^2 r^2}{2}.$$

Винесемо спільний для всіх частинок множник $\omega^2/2$ за знак суми:

$$K=\frac{\omega^2}{2}\sum \Delta m \cdot r^2,$$

де $\sum \Delta m \cdot r^2$ є не що інше, як момент інерції I. Отже, кінетична енергія тіла, що обертається, визначається такою формулою:

$$K=\frac{I\omega^2}{2}. \tag{18}$$

Ця формула відрізняється від формули, яка визначає кінетичну енергію тіла при поступному русі, тим, що замість маси тіла m сюди входить момент інерції I і замість швидкості v — кутова швидкість ω.

Великою кінетичною енергією маховика, який обертається, користуються в техніці, щоб зберегти рівномірність ходу машини при навантаженні, яке раптово змінюється. На початку, щоб змусити маховик з великим моментом інерції обертатися, потрібна витрата значної роботи машиною, зате при раптовому включенні великого навантаження машина не спиняється і виконує роботу коштом запасу кінетичної енергії маховика.

§ 58. Формули для обчислення моментів інерції деяких тіл. Обчислюють моменти інерції тіл з допомогою інтегрального числення[1]). Не

---

[1]) Щоб дати уявлення про хід подібних розрахунків, знайдемо момент інерції стрижня відносно перпендикулярної до нього осі (рис. 85*а*). Нехай q є переріз стрижня, а ρ — густина. Виділимо елементарно малу частину стрижня, яка має довжину dx і перебуває на віддалі x від осі обертання. Тоді її маса $dm = q \cdot dx \cdot \rho$. Через те що вона перебуває на віддалі x від осі обертання, то її момент інерції $dI = q \cdot dx \cdot \rho \cdot x^2$. Інтегруємо в границях від нуля до l:

$$I=\int_0^l q \cdot \rho \cdot x^2 dx = q \cdot \rho \int_0^l x^2 dx = q \cdot \rho \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l = \frac{1}{3} q \cdot \rho\, l^3,$$

але через те що $q \cdot \rho \cdot l$ є маса m усього стрижня, то $I=\frac{1}{3} ml^2$.

виконуючи тут цих обчислень, наведемо значення моментів інерції деяких тіл (припускається, що кожне з цих тіл має однакову в усіх своїх ділянках густину).

1. Момент інерції прямого тонкого с т р и ж н я відносно осі, перпендикулярної до стрижня, яка проходить через його кінець (рис. 85*a*):

$$I = \frac{1}{3} ml^2. \qquad (19)$$

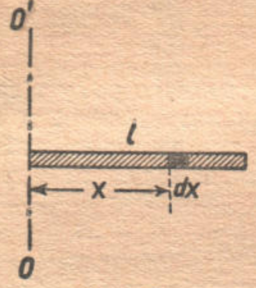

Рис. 85*a*.

Рис. 85*b*.

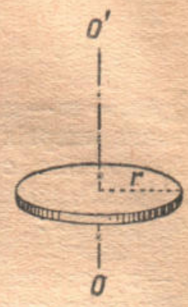

Рис. 85*c*.

2. Момент інерції тонкого круглого к і л ь ц я відносно осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна до його площини (рис. 85*b*):

$$I = mr^2. \qquad (20)$$

3. Момент інерції к р у г л о г о д и с к а (або ц и л і н д р а) відносно осі, яка проходить через його центр і перпендикулярна до його площини (п о л я р н и й момент інерції диска; рис. 85*c*):

$$I = \frac{1}{2} mr^2. \qquad (21)$$

Рис. 85*d*.

4. Момент інерції тонкого круглого д и с к а відносно осі, яка збігається з його діаметром (е к в а т о р і а л ь н и й момент інерції диска; рис. 85*d*):

$$I = \frac{1}{4} mr^2. \qquad (22)$$

5. Момент інерції к у л і відносно осі, яка збігається з її діаметром (рис. 85*e*):

$$I = \frac{2}{5} mr^2. \qquad (23)$$

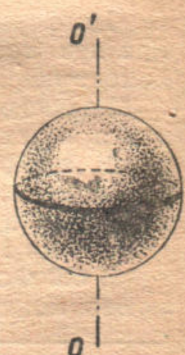

Рис. 85*e*.

§ 59. Теорема про залежність моменту інерції тіла від положення осі обертання. Нехай стрижень *AB* (рис. 86) з центром ваги в точці *C* обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі *O*, перпендикулярної до площини рисунка. Припустимо, що протягом якогось проміжка часу він перемістився з положення *AB* в *A'B'*, при чому центр ваги описав дугу *CC'*. Це переміщення стрижня можна розглядати так, ніби стрижень спершу поступно (тобто залишаючись собі паралельним) перемістився в положення $A''B''$ і потім повернувся навколо C' в положення $A'B'$. Позначимо OC (віддаль центра ваги від осі обертання) через a, а кут BOB' через φ. Під час руху стрижня з положення AB в положення $A''B''$ переміщення кожної його частинки однакове з переміщенням центра ваги, тобто воно дорівнює CC', або $a \cdot \varphi$. Щоб дістати дійсний рух стрижня, ми можемо припустити, що обидва зазначені рухи відбуваються одночасно. Відповідно до цього кінетичну енергію стрижня, який обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через O, можна розкласти на дві частини. Перша частина — це кінетична енергія поступного руху стрижня; всі точки стрижня мають при цьому ту саму швидкість; швидкість однієї точки стрижня, а саме точки C нам відома: вона дорівнює $a \cdot \omega$, а, отже, ця частина кінетичної енергії дорівнює $\frac{1}{2} m (a\omega)^2$, де m — маса стрижня.

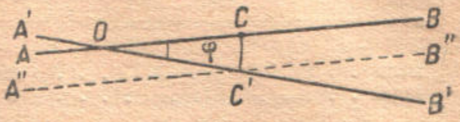

Рис. 86.

Друга частина кінетичної енергії — це кінетична енергія обертального руху стрижня з кутовою швидкістю ω навколо його центра ваги C. Вона дорівнює $\frac{1}{2} I_c \omega^2$, де I_c — момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через центр ваги і паралельна осі, яка проходить через O. Припустимо тепер, що I є момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через O; розглядаючи рух стрижня як обертання навколо осі O, ми можемо стверджувати, що кінетична енергія стрижня дорівнює $\frac{1}{2} I \omega^2$. Отже:

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2.$$

Звідси, скорочуючи всі члени рівняння на $\frac{\omega^2}{2}$, знаходимо:

$$I = I_c + m a^2. \qquad (24)$$

Отже, *момент інерції відносно якої завгодно осі обертання дорівнює моментові інерції відносно паралельної осі, яка проходить через центр ваги, доданому до добутку маси тіла на квадрат віддалі центра ваги тіла від осі обертання.*

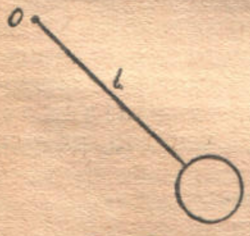

Рис. 87.

Нехай куля з масою m і радіусом r підвішена в точці O на нитці завдовжки l („фізичний маятник", рис. 87). Треба визначити момент інерції кулі відносно осі, яка проходить через точку O. Через те що момент інерції кулі відносно діаметра, інакше кажучи, відносно осі, яка проходить через центр ваги, дорівнює $\frac{2}{5} m r^2$, а віддаль між осями в даному разі дорівнює $l + r$, то на підставі формули (24) шуканий момент інерції дорівнює:

$$I = \frac{2}{5} m r^2 + m (l + r)^2.$$

§ 60. Зіставлення законів прямолінійного поступного руху і обертання навколо нерухомої осі. Формули, які визначають обертальний рух навколо нерухомої осі, аналогічні формулам для прямолінійного поступного руху.

В нижченаведеній таблиці зіставлено основні величини і рівняння, які визначають ці рухи:

Таблиця 5.

Поступний рух (прямолінійний)	Обертальний рух (навколо нерухомої осі)
маса . . . . m	I . . . . момент інерції
шлях . . . . s	φ . . . . кут повороту
швидкість . . . . $v=\frac{ds}{dt}$	$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$ . . . . кутова швидкість
прискорення . . . . $j=\frac{dv}{dt}$	$\xi=\frac{d\omega}{dt}$ . . . . . . кутове прискорення
кількість руху . . . . mv	$I\omega$ . . . . момент кількості руху
сила . . . . F	M . . . . момент сили
основне рівняння . . . $\left\{\begin{array}{l} F=mj \\ F=\frac{d\,(mv)}{dt}\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l} M=I\cdot\xi \\ M=\frac{d(I\omega)}{dt}\end{array}\right\}$ . . . . . основне рівняння
робота . . . . $F\cdot s$	$M\varphi$ . . . . робота
кінетична енергія . . . . $\frac{mv^2}{2}$	$\frac{I\omega^2}{2}$ . . . . кінетична енергія

§ 61. Вільні осі. Якщо тіло A обертається навколо осі OO_1, яка проходить через центр ваги тіла C (рис. 88 a), то доцентрові сили, необхідні для обертання частин тіла, що лежать вище і нижче середнього перерізу, можуть бути викликані тільки тиском підшипників O і O_1 на вісь. Тому і вісь буде тиснути на підшипники. Якщо дати змогу тілу повертатися навколо горизонтальної осі, то воно займе положення, зазначене на рис. 88b, при якому всі доцентрові сили зрівноважуються і не будуть діяти ніякі сили. В такому разі верхній підшипник буде зовсім зайвим; якщо ми видалимо верхнє закріплення, то це не зробить ніякого впливу на вісь. Таку вісь, відносно якої зрівноважуються доцентрові сили тіла, що обертається, називають *вільною віссю* тіла. Якщо тіло має вісь повної симетрії, то, очевидно, ця вісь симетрії і буде вільною віссю.

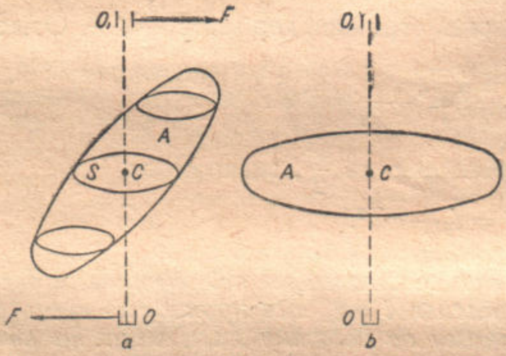

Рис. 88 (a, b).

Можна довести, що в усякому тілі існує три взаємно перпендикулярні вільні осі. Наприклад, для коробки, зображеної на рис. 88c, вільними осями будуть три взаємно-перпендикулярні напрями A, B і C, які проходять через її центр ваги. При цьому момент інерції відносно осі A — найбільший, C — найменший і відносно осі B має проміжне значення.

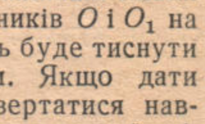

Рис. 88c.

Нехай тіло обертається без прикладання до нього зовнішніх сил навколо однієї з вільних осей. Щодо стійкості обертанння, як виявляється, неоднаково, яка саме з вільних осей служить віссю обертання. Дослід і теорія показують, що обертання навколо осей з найбільшим і найменшим моментом інерції виявляється стійким, а обертання навколо осі з середнім моментом інерції — нестійким.

Якщо кинути догори коробку, надавши їй при цьому обертання навколо A або C, то це обертання буде відбуватися рівно, без коливань. А спроба примусити коробку обертатися навколо осі B завжди приводить до коливань.

Розглянемо ряд простих дослідів, які дають наочне уявлення про вільні осі обертання.

Якщо паличку підвісити за кінець на нитці і другий кінець нитки почати швидко обертати з допомогою відцентрової машини або пальцями (рис. 89,*a*), то паличка буде обертатися в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що перпендикулярна до довжини палички і проходить через її середину. Це і є вільна вісь обертання, при чому момент інерції палички при такому положенні осі — максимальний.

Так само буде обертатися в горизонтальній площині важке кільце або кружок товстого картону, підвішений за край (рис. 89,*b*).

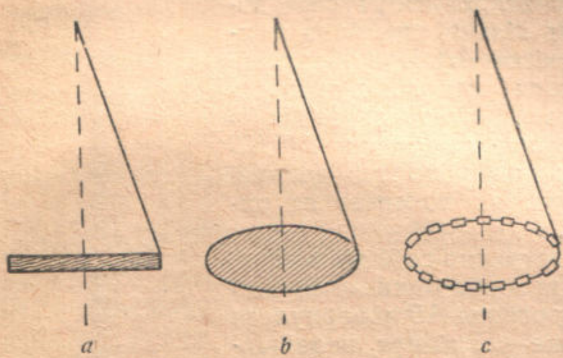

Рис. 89. Вільні осі:
a — паличка, *b* — картонний кружок, *c* — ланцюжок.

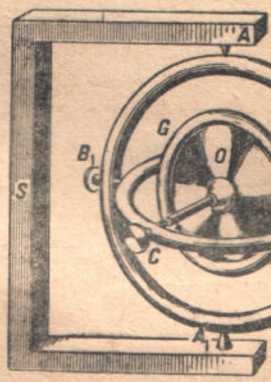

Рис. 90. Гіроскоп на підвісі Кардана.

Зв'язаний кінцями ланцюжок при такому досліді розміститься у вигляді горизонтального кільця (рис. 89, *c*) і буде поводитися як пружне тверде тіло. Навіть під час різкого руху ланцюжка вгору або вниз разом з ниткою горизонтальна площина кільця буде зберігатися.

Поняття про вільну вісь обертання має велике значення для техніки. Саме, треба змусити обертові частини машини обертатися навколо їх вільних осей, або, як кажуть, треба добре їх центрувати. Інакше, тиск на вісь, особливо при великих швидкостях, може призвести навіть до поламу машини.

§ 62. Гіроскоп. Гіроскопом називають тверде тіло, яке обертається з великою кутовою швидкістю навколо якоїсь осі, що змінює в загальному випадку своє положення як у просторі, так і в самому тілі. Звичайно гіроскоп являє собою однорідне тверде тіло обертання, центр ваги якого міститься на геометричній осі. В техніці гіроскоп вживають як маховик з масивним ободом.

Головним питанням у теорії гіроскопа є встановлення залежності між зовнішніми силами, які діють на гіроскоп, зміною положення його осі і силами інерції, що при цьому розвиваються.

Гіроскоп, приведений до обертання навколо осі симетрії (вільна вісь), намагається зберегти напрям своєї осі незмінним у просторі; гіроскоп тим більш стійкий, чим більша кутова швидкість обертання і чим більший момент інерції гіроскопа відносно осі обертання.

Це можна показати, наприклад, на гіроскопічному приладі Бонenбергера (рис. 90). Тут здійснено так званий карданів підвіс. На стояку S біля осі AA_1 обертається зовнішнє кільце, всередині якого навколо осі BB_1, перпендикулярної до AA_1, обертається друге кільце. Всередині цього кільця навколо осі CC_1, перпендикулярної до BB_1, обертається гіроскоп O.

Через таку будову вісь гіроскопа може вільно набувати будьякого напряму в просторі.

Якщо гіроскоп з допомогою шнурка швидко обертати навколо осі симетрії, то напрям цієї осі залишається незмінним, якого б положення не надати стоякові S.

Якщо ж до гіроскопа, який обертається, прикласти пару сил, що намагається повернути його навколо осі, перпендикулярної до осі обертання гіроскопа, то він дійсно почне повертатися, але тільки навколо третьої осі, перпендикулярної до перших двох. Розглянемо це разюче на перший погляд явище і вияснимо його причини.

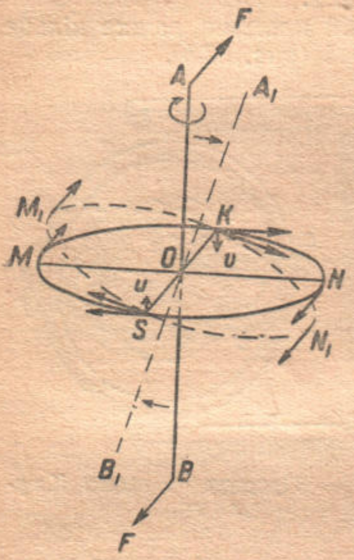

Рис. 91*a*.

Нехай (рис. 91*a*) AB являє вісь гіроскопа, а коло $MKNS$ схематично зображає кільце, незмінно зв'язане з віссю AB. При обертанні гіроскопа за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з кінця осі A, точки $MKNS$ мають швидкості, дотичні до кола, як показано на рисунку.

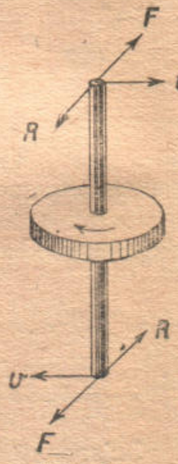

Рис. 91*b*.

Поставимо собі запитання, які сили треба прикласти, щоб вісь гіроскопа AB повернулася на дуже малий кут, перейшовши з положення AB в положення A_1B_1. Тоді на такий самий кут повернеться і коло, прийшовши в положення M_1KN_1S, і всі точки його, крім точок M і N, змінять напрями своїх швидкостей. Точки K і S набудуть якихось додаткових швидкостей v і u, паралельних осі AB. Додаткові швидкості точок півкола MSN паралельні u і лежать у межах від 0 до u. Так само додаткові швидкості точок півкола MKN паралельні v і лежать у межах від 0 до v. Щоб надати цих додаткових швидкостей, треба прикласти до точок півкола MSN сили, напрямлені паралельно OA, а до точок півкола MKN — сили, напрямлені паралельно OB. Вся сукупність цих сил може бути замінена якоюсь парою сил, вісь якої має напрям ON. Дві сили F, що утворюють цю пару, можна прикласти до будьяких точок гіроскопа, наприклад, до кінців A і B його осі.

Таким чином, ми приходимо до такого висновку: щоб обертати вісь гіроскопа AB навколо якоїсь перпендикулярної до неї осі KS, треба прикласти до гіроскопа момент, що обертає його навколо осі MN, перпендикулярної до перших двох.

Навпаки, якщо прикласти обертаючий момент, що змушує гіроскоп повернутися навколо якоїсь осі, перпендикулярної до осі обертання гіроскопа, то він буде обертатися навколо третьої осі, перпендикулярної до перших двох.

Під час свого руху вісь гіроскопа буде тиснути на опори (або підшипники, в які вона заключена), рівні прикладеним силам F. Розвиваються так звані г і р о с к о п і ч н і с и л и, при чому гіроскопічний момент рівний і протилежний моментові прикладених сил.

На рис. 91*b* схематично зображено гіроскоп, стрілкою позначено напрям його обертання; F — активні сили, які ми прикладаємо до гіроскопа, v — напрям переміщення, R — гіроскопічні сили.

Із зазначеного випливає таке загальне правило:

гіроскоп намагається розмістити вісь свого обертання так, щоб вона утворювала можливо менший кут з віссю змушуваного обертання і щоб обидва обертання відбувалися в одному напрямі (рис. 91*c*).

Прагнення осі гіроскопа збігтися з віссю додаткового обертання і є основним законом дії гіроскопа.

Рис. 91*c*.

Це правило допоможе нам далі визначити в одних випадках напрям повороту осі гіроскопа, а в інших — напрям гіроскопічних сил[1]).

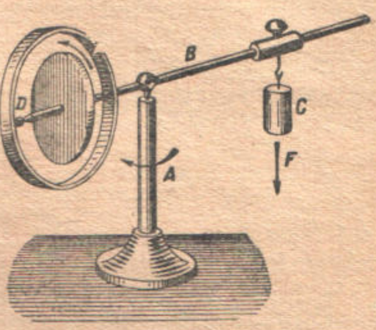

Рис. 92. Гіроскоп Ф е с с е л я.

Усе зазначене можна експериментально показати з допомогою гіроскопа Ф е с с е л я (рис. 92) На стояку A на шарнірі укріплено стрижень B, що може обертатися і в вертикальній, і в горизонтальній площинах. На стрижні B з одного боку є пересувний вантаж C, а з другого — кільце, в якому розміщено обертовий диск D. Коли вантаж C зрівноважує диск, то частини прилада зберігають дане їм розміщення, хоча б диск і обертався. Якщо вантаж переважує і намагається обертати систему у вертикальній площині вниз з деякою силою F, то система почне обертатися в горизонтальній площині у напрямі, показаному стрілкою (згідно з правилом, наведеним вище).

Розглянемо ще рух дзиги, зображеної на рис. 93. Під діянням сили тяжіння вона падає дуже повільно, але в наслідок обертаючого моменту сили тяжіння вісь її описує круглу конічну поверхню. Рух осі дзиги називається п р е ц е с і є ю і описуваний нею конус — к о н у с о м п р е ц е с і ї. Обидва рухи — обертання дзиги навколо осі симетрії і прецесійний рух цієї осі — відбуваються в ту саму сторону. Неважко розібратися в характері руху дзиги, якщо застосувати виведене вище правило: справді, вісь змушуваного обертання для моменту, зображеного на рисунку, напрямлена перпендикулярно до рисунка і до нас. Вісь обертання дзиги намагається стати паралельно їй, через те ж, що нижній кінець осі нерухомий, верхній кінець буде рухатися перпендикулярно до рисунка в напрямі до нас[2]). Якщо прецесійний кут α зберігає ту саму величину, то прецесія називається точною. Звичайно ж описаний вище рух осі супроводиться невеликими періодичними змінами прецесійного кута; такий рух називається н у т а ц і є ю. Цікавий випадок прецесійного руху являє собою рух земної осі.

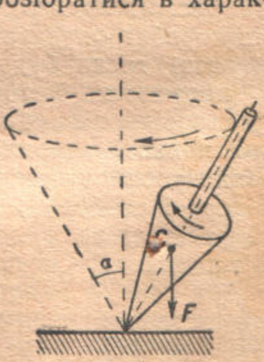

Рис. 93.

Через те, що Земля являє собою не кулю, а трохи сплюснутий еліпсоід обертання, то притягання Сонця дає рівнодійну, що не проходить

---

[1]) У першому випадку за вісь змушуваного обертання треба вважати напрям, перпендикулярний до FF, в другому випадку — напрям, перпендикулярний до vv. Додатним кінцем осі вважають той, з якого здається, що обертання відбувається за годинниковою стрілкою.

[2]) Тут момент сили тяжіння, що намагається збільшити кут α, зрівноважується з гіроскопічним моментом, що намагається зменшити цей кут.

через центр мас Землі (як було б у випадку кулі). Справді, частини B (рис. 93*а*) через свою більшу близькість до Сонця зазнають сильнішого притягання, ніж частини A, а тому рівнодійна сил F_1 і F_2 не проходить через центр мас (точку O) і дає відносно нього обертаючий момент, який намагається повернути Землю в напрямі, зазначеному стрілкою S_2.

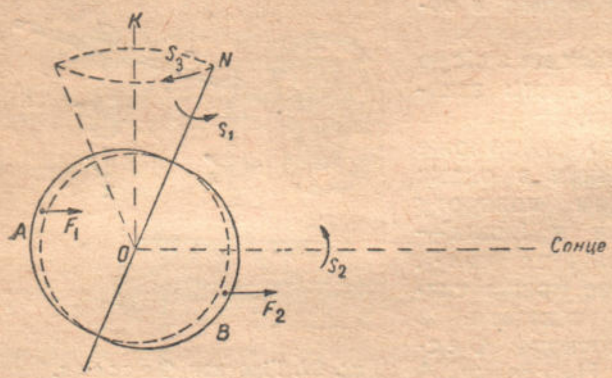

Рис. 93*а*.

При відсутності обертання Землі земна вісь ON неминуче сумістилася б з напрямом OK (перпендикуляр до площини земної орбіти) і в цьому разі рівнодійна сил F_1 і F_2 пройшла б через точку O.

Але в наслідок обертання Землі її вісь опише конус прецесії в напрямі, зазначеному стрілкою S_2, що легко встановити, застосовуючи вищезазначене правило.

Прецесійний рух земної осі відбувається дуже повільно — повний конус вона описує протягом, приблизно, 26 000 років. Аналогічно до Сонця діє й Місяць і в наслідок близькості його до Землі його роль в прецесії навіть значно більша ролі Сонця. Через те що прецесійні сили Сонця і Місяця постійно змінюють свою величину, то явище прецесії виявляється дуже складним.

Розглянемо тепер деякі явища, які відбуваються під час руху обертових механізмів, наприклад, на кораблях або аеропланах.

Двигуни, встановлені на кораблях, можуть виявити значні реактивні моменти як при качці корабля, так і при зміні курсу. На рис. 94 подано розріз корабля, вздовж корпуса якого розташована турбіна AB. Під час кілевої качки вісь турбіни змінює з часом своє положення. В наслідок цього з'являються тиски осі на підшипники, що можуть досягти великих значень. На рис. 94 подано випадок, коли ніс корабля опускається. При його піднятті тиски будуть напрямлені в протилежні сторони. Подібні до цього явища ми спостерігаємо і при польоті аероплана, при чому роль гіроскопа відограють тут пропелер і мотор. Якщо пропелер обертається за стрілкою годинника (коли дивитися з боку льотчика), то при повороті аероплана направо ми дістанемо реактивний момент, який нахиляє перед аероплана вниз, а при повороті наліво — угору. Відзначимо, що при зміні висоти польоту аероплан відповідно повертається навколо вертикальної осі.

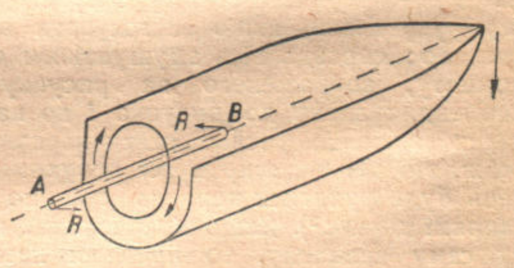

Рис. 94.

Гіроскопічні сили відограють певну роль в усіх галузях техніки, де трапляються диски, колеса, маховики і т. ін., що швидко обертаються. В залізничній справі гіроскопічні сили виявляються на закругленнях колії, збільшуючи вертикальний тиск коліс на зовнішню рейку і зменшуючи тиск на внутрішню. Під час руху велосипеда гіроскопічні сили мають велике значення, відограючи вже тут корисну роль, а саме: реактивний момент коліс, які обертаються, сприяє стійкості велосипеда.

Гіроскоп має багато застосувань у науці і в техніці. Обрі (1898) поклав його в основу прилада для регулювання руху мін. Гіроскоп на кардановому підвісі, що знаходиться в задній частині мін, при пострілі приводиться до швидкого обертального руху (близько 10 000 *об/хв*). Вісь гіроскопа горизонтальна; залишаючись незмінною, вона зберігає напрям пострілу і діє на рулеве керування, що виправляє відхилення руху.

Гіроскоп часто застосовують для приведення нестійких систем до стану стійкої рівноваги або для поліпшення вже наявної рівноваги, тобто для стабілізації системи. Сюди належить застосування гіроскопа як стабілізатора для вагонів однорейкової залізниці (гіроскоп перешкоджає перекиданню вагона) або для корабля, щоб заспокоїти бортову качку.

Цікавий також прилад, що базується на принципі гіроскопа, так званий гірокомпас. Він являє собою дзигу, яка швидко обертається (мотор трифазного струму, що робить близько 25 000 *об/хв*); дзига на особливому поплавку плаває в посудині з ртуттю і вісь її встановлюється в площині меридіана. В даному разі джерелом зовнішнього обертаючого моменту є добове обертання Землі навколо її осі. Під його діянням вісь обертання гіроскопа намагається стати в напрямі осі обертання Землі, а через те що обертання Землі діє на гіроскоп безперервно, вісь гіроскопа, кінець-кінцем, і набуває цього положення, тобто встановлюється вздовж меридіана і залишається в ньому надалі зовсім так само, як звичайна магнітна стрілка.

Не зважаючи на ряд конструктивних труднощів для усунення впливів, які спотворюють покази цього прилада, гірокомпаси починають входити в практику і замінюють магнітні компаси, бо вплив залізних корабельних частин і електричних установок корабля дуже відбивається на показах магнітного компаса.

За принципом гіроскопа будують прилади, які вказують широту місця, а також прилади, які дозволяють визначати положення горизонтальної площини. Ці останні прилади мають особливо важливе значення при польотах аероплана вночі або в тумані.

§ 63. Удар. При зустрічі двох твердих тіл, що рухаються, між ними відбувається взаємодіяння, яке називають ударом. Явище це полягає в тому, що реакції, які виникають у точці стикання, змінюють протягом дуже малого проміжка часу швидкості кожного тіла.

Під час удару обидва тіла зазнають зміни форми (деформації); процес удару можна поділити на дві фази. Протягом першої фази тіла зближаються; обидва тіла виконують роботу проти сил реакції; їх загальна кінетична енергія зменшується; відносна швидкість (у момент зустрічі вона не дорівнює нулеві, інакше не було б удару) зменшується до нуля; на цьому перша фаза і закінчується. Вслід за цим настає друга фаза: тіла починають віддалятися одно від одного, відновлюючи свою форму, при цьому реакції виконують позитивну роботу, жива сила системи зростає, відносна швидкість, змінивши знак, зростає абсолютною величиною, нарешті, тіла відокремлюються; цим і закінчується процес удару.

Спостереження показують, що відносна швидкість після удару не досягає своєї попередньої числової величини. За Ньютоном, відношення числової величини нормальної складової відносної швидкості після удару до її величини перед ударом є фізична константа, яка характеризує природу тіл, що стикаються, і не залежить від величини відносної швидкості і мас тіл. Цю константу ε називають *коефіцієнтом відновлення*. Числове значення її лежить між 0 і 1:

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

1. Якщо для тіл, які стикаються, $\varepsilon = 0$, то такі тіла називають абсолютно непружними; весь процес удару для таких тіл полягає тільки

в першій фазі: тіла, досягши максимального зближення, форми своєї не відновлюють і обидва рухаються далі як одно ціле; при цьому буде втраченою деяка частина кінетичної енергії, що пішла на роботу деформації.

2. Якщо $\varepsilon = 1$, то тіла, які стикаються, називають абсолютно пружними; в цьому разі зміна форми, яка сталася протягом першої фази, цілком усувається в другій фазі; відносна швидкість досягає попередньої числової величини, жива сила системи цілком відновлюється.

В дійсності для всіх тіл коефіцієнт ε має значення між 0 і 1, тобто лежить між цими двома крайніми ідеальними випадками. Проте, дослід показує, що, наприклад, слонова кістка і сталь близько підходять до тіл, які мають абсолютну пружність, а свинець — до тіл абсолютно непружних. А тому і розрахунки, зроблені для удару тіл абсолютно пружних і непружних, часто з великою точністю подають справжній хід явища.

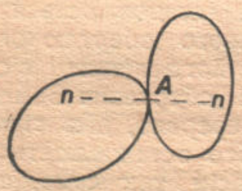

Рис. 95.

Пряму nn, що проходить через точку стикання тіл A (рис. 95) і є нормальною до поверхні їх стикання, називають лінією удару.

Якщо лінія удару проходить через центри ваги обох тіл, то удар називають центральним. (Відзначимо, що удар між однорідними кулями завжди буде центральним.)

Якщо до удару обидва тіла рухалися по лінії удару, удар називається прямим; у противному разі — косим.

Далі ми будемо розглядати прямий центральний удар. Позначимо через m_1 і m_2 маси тіл, які співударяються; через v_1 і v_2 [1]) — їх швидкості перед ударом; через v_1' і v_2' — їх швидкості після удару. Тоді, застосовуючи закон зберігання кількості руху (§ 29), можна написати:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{25}$$

Це означає, що

сума кількостей руху тіл після удару дорівнює сумі кількостей руху перед ударом. (Під час удару обидва тіла складають одну систему, на яку діють тільки внутрішні сили, а тому загальна кількість руху залишається незмінною.)

1. Удар непружних тіл ($\varepsilon = 0$). Як уже було показано вище, в цьому випадку весь процес удару закінчується першою фазою, обидва тіла після удару рухаються як одно ціле з тією самою швидкістю. Позначаючи цю спільну для обох тіл швидкість через u і застосовуючи рівняння (25), можна написати:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u + m_2 u,$$

звідки

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{26}$$

Через те що під час удару непружних тіл вони деформуються і ця деформація не відновлюється, частина кінетичної енергії втрачається: вона іде на роботу деформації. Позначимо її через K_1 і знайдемо її значення.

До удару кінетична енергія була $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$, а після удару вона стала $\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}$ або, підставляючи значення з формули (26): $\frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

---

[1]) Будемо вважати швидкості і кількості руху позитивними, коли вони напрямлені в певну сторону (наприклад, вправо); напрямлені в іншу сторону будемо вважати негативними.

Отже, втрата кінетичної енергії або робота деформації виразиться:

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \tag{27}$$

Розглянемо докладніше роботу деформації для окремого випадку, який найчастіше трапляється на практиці, а саме — того, коли одно з тіл, наприклад, перше, було перед ударом нерухомим. Кінетична енергія ударяючого тіла, а, отже, і запас тієї роботи, яку воно може виконати, $K = \frac{m_2 v_2^2}{2}$. Втрату кінетичної енергії або роботу деформації дістанемо з формули (27), беручи в ній $v_1 = 0$:

$$K_1 = \frac{m_1 m_2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_2 v_2^2}{2} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} = K \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Залишок же кінетичної енергії K_2, тобто та робота, яку можуть виконати тіла, що рухаються, після удару, знайдемо простим відніманням:

$$K_2 = K - K_1 = K - K\frac{m_1}{m_1 + m_2} = K\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = K\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Отже, ми дістаємо:

$$K_1 = K\frac{m_1}{m_1 + m_2} = K\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}; \quad K_2 = K\frac{m_2}{m_1 + m_2} = K\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}. \tag{28}$$

На практиці застосовують удар для робіт двоякого роду. Роботи першого роду полягають у зміні форми тіл (деформації), наприклад, при куванні, карбуванні і штампуванні металу, при роздробленні тіл і т. ін. З виразу для роботи деформації K_1 видно, що тим більша частина всієї кінетичної енергії K буде використана для нашої мети, чим маса ударяючого тіла буде менша маси нерухомого тіла. Ось чому, наприклад, ковадла роблять такими масивними.

Роботи другого роду полягають у переміщенні тіл після удару і подоланні при цьому опорів; це буває, наприклад, при забиванні паль у землю, цвяхів, клинків і т. ін. У цьому разі, очевидно, наша мета не в деформації кінця палі або головки цвяха, а в просуванні їх. Тому треба прагнути до того, щоб K_1 було мінімальним, а, навпаки, K_2 було максимальним; це буде тоді, коли відношення $\frac{m_1}{m_2}$ буде найменшим, тобто маса нерухомого тіла малою порівняно з масою ударяючого тіла. А тому, наприклад, при забиванні цвяхів вигідно, щоб маса молотка була в багато разів більша маси цвяха; при забиванні паль маса копрової баби повинна бути значно більша маси палі.

2. Удар пружних тіл ($\varepsilon = 1$). При ударі пружних тіл перед кінцем першої фази удару, яку можна назвати „фазою стиску“, швидкості обох тіл матимуть те саме значення (як і при непружному ударі). Отже, зміна швидкості першого тіла буде $(v_1 - u)$, а другого $(u - v_2)$. Через те що протягом другої фази („фази відновлення“) імпульси взаємних реакцій тіл будуть у наслідок повної пружності і повного зникнення деформації такі самі, як і протягом першої фази, то і зміни швидкостей тіл протягом цієї другої фази будуть такі самі, як і протягом першої. Тому повна зміна швидкості першого тіла на кінець удару буде $2(v_1 - u)$, а другого тіла $2(u - v_2)$; швидкості тіл після удару будуть:

$$v_1' = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1; \quad v_2' = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2.$$

Підставивши сюди замість u його значення з формули (26), дістанемо:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{2m_1v_1 - v_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (29)$$

Розглянемо два окремих випадки.

1. *Якщо маси тіл рівні* ($m_1 = m_2$), то з формул (29) виходить:

$$v_1' = v_2; \quad v_2' = v_1,$$

тобто обидва тіла після удару обмінюються своїми швидкостями. В разі, коли одно тіло перед ударом було в спокої, то після удару тіло, яке рухалося, спиниться, а тіло, яке зазнало удару, буде рухатися з швидкістю тіла, що його вдарило. Наприклад, якщо дві пружних кульки A і B (рис. 96) підвісити на рівних нитках і одну з них, приміром, A, відвести від вертикалі на кут α, то вона під час падання ударить другу кульку B і спиниться, а кулька B відхилиться на такий самий кут α.

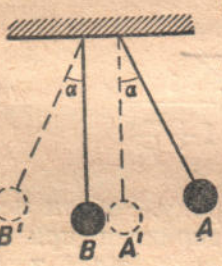

Рис. 96.

2. *Якщо маси не рівні і одна з них була перед ударом у спокої* ($m_1 > m_2$; $v_1 = 0$), то з формул (29) дістанемо:

$$v_1' = \frac{2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = -v_2\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Якщо при цьому маса m_1 незмірно більша за масу m_2, то, припускаючи $m_1 = \infty$, дістанемо $v_1' = 0$; $v_2' = -v_2$, тобто нерухоме велике тіло, яке зазнало удару, залишиться в спокої, а мале тіло, що його вдарило, відскочить від нього з початковою швидкістю у протилежний бік.

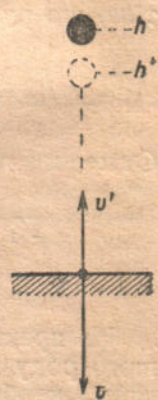

Рис. 97.

Якщо, користуючись формулами (29), підрахувати кінетичну енергію обох тіл після удару, тобто $\frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}$, то дістанемо: $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$.

Отже, *під час цілком пружного удару кінетична енергія системи залишається незмінною.*

Наприкінці розглянемо, як з досліду можна визначити коефіцієнт відновлення ε. Нехай з висоти h падає пружна кулька на пружну горизонтальну площину (рис. 97). Тоді швидкість кульки у момент дотикання до площини можна знайти за формулою $v = \sqrt{2gh}$. Після удару вона підніметься вгору на якусь висоту h', меншу за h. Відповідну швидкість v' кульки після удару знайдемо за формулою $v' = \sqrt{2gh'}$. Тоді

$$\varepsilon = \frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gh'}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

Відзначимо, що ε для слонової кістки і загартованої сталі дуже близький до 1, а, наприклад, для свинцю являє дуже малий дріб.

Вводячи до розгляду коефіцієнт відновлення ε, можна дістати формули для удару не цілком пружних тіл.

РОЗДІЛ IV.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ГІДРОМЕХАНІКИ.

§ 64. Відмінність між рідинами і твердими тілами. Гідромеханіка[1]) є механіка нетвердих тіл.

Нетверді тіла можна поділити на такі три групи: 1) рідини з великою в'язкістю, 2) рідини з малою в'язкістю і 3) гази. Ці групи переходять одна в одну, і між ними з погляду механіки не можна провести строгого розмежування.

Головна відмінність між в'язкими рідинами (наприклад, патока, шевський вар, підігрітий асфальт) і твердими тілами полягає в різній здатності цих тіл протидіяти зовнішнім впливам, які намагаються змінити їх форму. В той час як деформація твердих тіл пропорціональна величині діючої сили (закон Гука[2]), деформація в'язкої рідини залежить не стільки від величини сили, скільки від часу діяння сили. За достатньо великий проміжок часу яка завгодно мала сила може зробити яку завгодно велику деформацію в'язкої рідини: асфальт повільно витікає з отвору в бочці; пробка, залита шевським варом, випливає згодом на його поверхню, піщинка, що впала на поверхню патоки, повільно тоне і падає на дно.

§ 65. Міри тиску. Для того, щоб оцінити спричинювану якоюсь силою деформацію тіла, треба знати не тільки величину сили, а й величину поверхні, на якій ця сила розподілена. *Силу, що діє на одиницю площі, називають тиском.*

Слід пам'ятати, що тиск, як і всяка сила, може виникнути тільки в наслідок взаємодіяння двох тіл: тиск стінок посудини на рідину дорівнює величиною і протилежний напрямом тискові, що його рідина робить на стінки посудини. Молекули рідини легкорушні; а тому в спокійній рідині не може виникнути сила, напрямлена тангенціально до поверхні тіла, поміщеного в рідину, або до поверхні стінок посудини. Сила, з якою рідина діє на тіло, що стикається з нею, завжди напрямлена перпендикулярно до поверхні стикання.

Тиск іноді буває рівномірно розподілений по поверхні. В цьому разі, щоб обчислити тиск p, досить буде повну силу F, що діє на дану поверхню, поділити на величину площі S цієї поверхні:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{1}$$

Коли зовнішні сили нерівномірно розподілені по поверхні тіла, беруть або середній тиск на цю поверхню, або вказують тиск у різних точках поверхні. Коли говорять про тиск у будьякій точці, то умовно розуміють під „точкою" елементарно малу ділянку поверхні dS; через граничну малість виділеної так ділянки поверхні можна вважати, що

[1]) Від грецького hydor — вода.
[2]) Див. § 98.

сила dF, яка тисне на цю ділянку, розподілена по поверхні ділянки dS рівномірно. А тому під **тиском** у **точці** поверхні розуміють відношення:

$$p = \frac{dF}{dS}. \qquad (2)$$

Застосовують різні одиниці для вимірювання тиску[1]. В абсолютній системі CGS одиницею сили є *дина* і одиницею площі — *см*^{2}; тому одиницею тиску служить $1\ \frac{\text{дина}}{\text{см}^2}$ — так звана *барія*[2]. Мільйон барій має назву *бар*; 0,001 бара називається *мілібар* — 1 *мб*.

В техніці одиницею тиску часто служить 1 *кг**/*м*^{2}.

Як одиницю тиску застосовують також фізичну і технічну атмосфери. **Фізична (нормальна) атмосфера** є той тиск, що його своєю вагою робить стовп ртуті заввишки 760 *мм*. Неважко підрахувати[3], що фізична атмосфера $= 76 \cdot 13{,}6 = 1033$ *г**/*см*^{2} $= 1{,}033$ *кг**/*см*^{2}. **Технічною атмосферою** називають тиск в 1 *кг** на 1 *см*^{2}.

Інші одиниці для вимірювання тиску вказані в таблиці 6.

Таблиця 6.

Міри тиску[1].

1 бар $= 10^6$ барій $= 1$ мегадині на 1 *см*^{2} $= 0{,}987$ нормальної атмосфери = тискові 750,1 *мм* ртутного стовпа $= 1{,}020$ технічної атмосфери.

1 мілібар $= 10^3$ барій $= 1000$ дин на 1 *см*^{2} = тискові 0,75 *мм* ртутного стовпа.

1 барія $= 10^{-6}$ барів $= 1$ дина на 1 *см*^{2}.

1 п'єза $= 1$ стен на 1 *м*^{2} $= 1{,}02$ кілограма-сили на 1 *дм*^{2} $= \frac{1}{100}$ бара $= 0{,}00987$ нормальної атмосфери = тискові 7,50 *мм* ртутного стовпа $= 0{,}0102$ технічної атмосфери $= 102$ *мм* водяного стовпа.

1 нормальна атмосфера = тискові 760 *мм* ртутного стовпа $= 1{,}033$ технічної атмосфери = тискові 10 330 кілограмів-сил на 1 *м*^{2} $= 101{,}3$ п'єзи $= 1{,}013$ бара $= 1013$ мілібарів.

1 технічна атмосфера = тискові 1 кілограма-сили на 1 *см*^{2} = тискові 10 000 кілограмів-сил на 1 *м*^{2} $= 0{,}968$ нормальної атмосфери = тискові 735,6 *мм* ртутного стовпа = тискові 10 *м* водяного стовпа $= 98$ п'єзам $= 0{,}98$ бара $= 980$ мілібарів.

1 кілограм-сила на 1 *мм*^{2} $= 100$ технічним атмосферам $= 9800$ п'єз $= 98$ барів.

1 кілограм-сила на 1 *м*^{2} $= \frac{1}{10\,000}$ технічної атмосфери $= 98$ баріям $= 1$ *мм* водяного стовпа.

1 міліметр ртутного стовпа $= 0{,}001316$ нормальної атмосфери $= 1333$ барій $= 1{,}360$ грама-сили на 1 *см*^{2} $= 0{,}1333$ п'єзи $= 0{,}0136$ *м* водяного стовпа $= 1{,}333$ мілібара.

1 метр водяного стовпа $= 0{,}1$ кілограма-сили на 1 *см*^{2}.

§ 66. В'язкість (внутрішне тертя). Молекулярна будова рідин. Ідеальна рідина. В'язкістю називають здатність рідини чинити опір відносному переміщенню своїх частин.

Вивчити цю властивість можна так: візьмемо дві пластинки, змочені будьякою рідиною (рис. 98), і почнемо переміщати верхню пластинку відносно нижньої у напрямі, показаному стрілкою. Шари рідини, які без-

[1]) Розмірність тиску: $[p] = [F/S] = ML/T^2L^2 = MT^{-2}L^{-1}$.

[2]) Від грецького báros — **вага**.

[3]) Питома вага ртуті $= 13{,}6$ *г**/*см*^{3}. В означенні фізичної і технічної атмосфери мають на увазі **вагу** на висоті рівня моря і на широті 45°.

посередньо стикаються з цими пластинками, прилипають до них. Шар, який прилип до нижньої пластинки, залишається в спокої, а всі інші шари переміщуються, ковзають один по одному з швидкістю тим більшою, чим більша їх віддаль від нижнього шару. В'язкість рідини позначається в тому, що виникає сила, яка перешкоджає переміщенню шарів рідини, а, отже, і пластинок. Позначимо цю силу внутрішнього тертя через f; відносну швидкість переміщення самого верхнього і самого нижнього шару позначимо через Δv, віддаль між ними — через Δl і площу пластинок — через S.

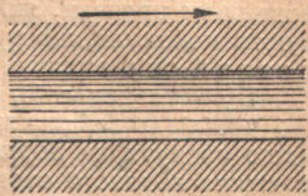

Рис. 98. Внутрішнє тертя рідин.

Ньютон показав, що сила внутрішнього тертя f пропорціональна площі S стикання шарів рідини, які рухаються, і пропорціональна „градієнтові [1]) швидкості" $\frac{\Delta v}{\Delta l}$:

$$f = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta l},$$

або, при нескінченно малій віддалі між шарами:

$$f = \eta S \frac{dv}{dl}. \qquad (3)$$

Коефіцієнт η називають *коефіцієнтом в'язкості* рідини (коефіцієнтом внутрішнього тертя) [2]).

Коефіцієнт в'язкості показує, скільком динам повинна дорівнювати сила, щоб у шарі рідини, який має товщину 1 *см* і площу 1 *см*^{2}, ця сила рухала верхню поверхню шару відносно нижньої з швидкістю 1 *см/сек.*

Величина η, як показує дослід, коливається в широких межах і залежить від температури.

В'язкість властива не тільки рідинам, але в меншій мірі і газам.

Нижче наведено коефіцієнти в'язкості деяких рідких і газоподібних речовин.

Речовина	Коефіцієнт в'язкості при 18° C
Рицинова олія	12
Гліцерин	11
Спирт	0,017
Вода	0,0106
Ефір	0,0026
Кисень	0,0002
Повітря	0,00018
Водень	0,000088

[1]) Слово „градієнт" походить від латинського „gradior" — ступаю, іду. Поняття „градієнт" може бути застосоване до якої завгодно величини, що залежить від положення точки у просторі (говорять, наприклад, про градієнт густини, якщо густина в різних точках тіла неоднакова, про градієнт температури, якщо тіло в різних точках неоднаково нагріте, і т. ін.). Під градієнтом величини φ розуміють границю, до якої наближається відношення $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$, при нескінченному меншанні Δl, де Δl означає мале переміщення в напрямі найбільшого зростання величини φ, а $\Delta\varphi$ означає спостережувану при цьому переміщенні зміну величини φ; градієнт φ по напряму l = границі $\left[\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\right]_{\Delta l \rightrightarrows 0}$.

Інакше, під градієнтом розуміють „просторову швидкість зміни величини" (але не швидкість зміни цієї величини в часі).

[2]) З формули Ньютона легко встановити розмірність коефіцієнта в'язкості:

$$[\eta] = \left[\frac{f\,\Delta l}{S\,\Delta v}\right] = \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{L}{L^2} \cdot \frac{T}{L} = ML^{-1}T^{-1}.$$

Молекули рідини перебувають у такому швидкому тепловому русі, що властива кристалічним тілам упорядкованість просторового розподілу молекул у рідинах є порушеною. Проте, густина рідини мало відрізняється від густини твердого тіла з тієї ж самої речовини, а тому *сили молекулярного взаємодіяння в рідинах майже так само великі, як і в твердих тілах.*

Через рухливість молекул рідина виявляє надзвичайно малий опір зовнішнім впливам, які змінюють її форму. Але завдяки силам, які зв'язують молекули, що рухаються одна відносно однієї, рідина виявляє величезний опір впливам, які намагаються змінити її об'єм.

Щоб уявити собі, наскільки великий опір рідин стискові, припустимо, що у циліндр заввишки 1 *м* і з поперечним перерізом 1 $см^2$ налита вода; якщо тиснути на поршень, який закриває зверху воду, силою в 220 *кг*, то довжина водяного стовпа зменшиться тільки на 1 *см*[1]).

Як тільки усунути сили, що спричинили стиск рідини, об'єм рідини набуває попередньої величини.

Рідина, отже, майже не має пружності форми, але має величезну пружність об'єму. В технічних розрахунках рідину вважають за абсолютно нестисливу.

Закони гідромеханіки набувають особливо простого характеру в застосуванні до так званих ідеальних рідин.

Ідеальним рідинам приписують такі властивості: 1) відсутність в'язкості і 2) абсолютну нестисливість.

§ 67. Конспект відомих з курсу середньої школи відомостей про рідини. І. Поверхня рідини. Поверхня рідини в невеликій посудині горизонтальна. Поверхня великих водних просторів — морів і океанів — нормальна до напряму сили тяжіння і має тому форму еліпсоїда. Поверхня рідини, яка налита в циліндр, що обертається навколо своєї осі, набуває форми параболоїда обертання.

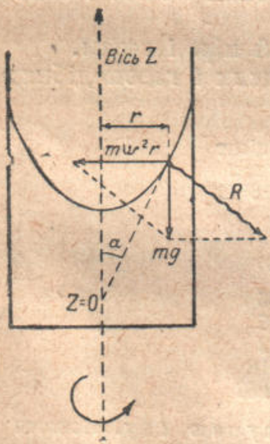

Рис. 99.

Доведення. Вага mg кожної частинки рідини, яка обертається, виявляється динамічно як доцентрова сила $m\omega^2 r$ і статично в тиску R, який розглядана частинка робить на інші частинки рідини. Тут m — маса частинки, r — віддаль її від осі обертання і ω — кутова швидкість (рис. 99). Поверхня рідини повинна бути нормальною до R.

З рисунка 99 видно, що

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{z} = \frac{dr}{dz} = \frac{mg}{m\omega^2 r}$$

або

$$\frac{g}{\omega^2} dz = r dr.$$

Інтегруючи, дістаємо рівняння параболи:

$$\frac{2g}{\omega^2} z = r^2 + C.$$

II. Закон Паскаля: *зовнішній тиск на рідину передається в усі сторони рівномірно.*

Уявимо собі рідину, вміщену в замкнену посудину, закриту двома поршнями, площі яких S і S_0. На поршні діють сили P і P_0 (рис. 100). Вся система перебуває в рівновазі. Через те що тиски поршнів повинні бути рівними, можна написати: $\frac{P}{S} = \frac{P_0}{S_0}$, або $\frac{P}{P_0} = \frac{S}{S_0}$.

[1]) Якщо числа, наведені в таблиці, вміщеній у § 114, помножити на 100, то числа ці покажуть, на яку частку сантиметра зменшується висота однометрового стовпа зазначених у таблиці рідин при навантаженні в 1 *кг* на 1 $см^2$ поперечного перерізу стовпа. Для більшості рідин це будуть тисячні частки сантиметра.

III. Розподіл тиску у вагомій рідині[1]).

Теорема 1. *Тиск рідини на дно посудини не залежить від форми посудини* (рис. 101) і дорівнює сумі тиску на вільну поверхню рідини і ваги стовпа рідини заввишки h при поперечному перерізі цього стовпа в одиницю площі:

$$p = p_0 + \rho g h$$

(тут ρ — маса одиниці об'єму рідини і g — прискорення сили тяжіння).

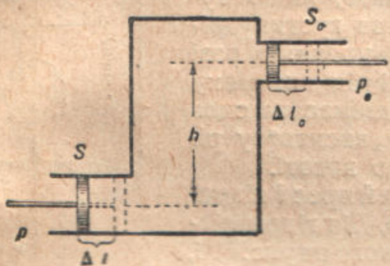

Рис. 100. До закону Паскаля.

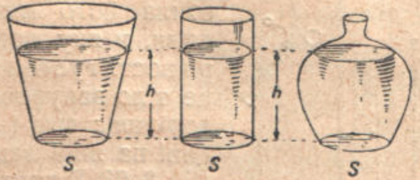

Рис. 101. Сила тиску рідини на дно посудин, зображених на рисунку, однакова (висоти рівнів однакові і площі основ рівновеликі).

Ця теорема, а разом з нею і закон Паскаля, можуть бути дуже легко виведені із закону зберігання енергії. Уявимо собі наповнену рідиною посудину (рис. 100) з двома поршнями, площі яких позначимо через S і S_0. Віддаль між центрами ваги цих площ позначимо через h. Тиск на нижній поршень нехай буде p і на верхній p_0. Вся система перебуває в рівновазі. Просунемо перший поршень вперед на дуже малий шлях Δl. Якийсь об'єм рідини $S\Delta l$ увійде всередину циліндра і просуне другий поршень на віддаль Δl_0. Робота $pS\Delta l$, виконана першим поршнем, мінус робота другого поршня $p_0 S_0 \Delta l_0$, повинна за законом зберігання енергії дорівнювати потенціальній енергії об'єму рідини $S_0 \Delta l_0$, піднятого на висоту h:

$$pS\Delta l - p_0 S_0 \Delta l_0 = \rho g S_0 \Delta l_0 h.$$

Скорочуючи рівні об'єми $S\Delta l$ і $S_0 \Delta l_0$, дістанемо:

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Теорема 2. Тиск у рідині збільшується в міру занурення. *Середній тиск на бічну поверхню посудини дорівнює добуткові площі цієї поверхні на віддаль від центра ваги цієї поверхні до вільного рівня рідини.*

Теорема 3. *У сполучених посудинах рідина встановлюється на однакових рівнях* (рис. 102).

Рис. 102. У сполучених посудинах рідина встановлюється на однакових рівнях.

У місцевостях, які мають форму котловини, де є пухкий шар грунту (галька, пісок, гравій), що міститься між двома водонепроникними шарами з глини, опади проходять через грунт і скупчуються в пухких шарах. Якщо в низькому місці зробити свердловину до водоносного шару, то вода буде підніматися і може навіть бити з свердловини назовні сильним струменем. Колодязі, зроблені так, називають артезіанськими.

Теорема 4. *Висоти стовпів рідин різної густини в сполучених посудинах обернено пропорціональні густинам рідин*:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{5}$$

На рис. 103 зображено прилад Уатта, що служить для визначення невідомої густини рідини шляхом порівняння її з рідиною, густина якої добре відома: водою або ртуттю.

[1]) Доведення поданих тут теорем є майже в кожному початковому курсі фізики. Див. „Фізика" Ф. і П., част. I, § 66 — 71 і „Курс фізики" Ф. і П. част. I, § 76 — 86.

IV. Закон Архімеда. *Тіло, занурене в рідину, зазнає діяння підіймальної сили, яка дорівнює вазі витиснутої ним рідини*[1]) (рис. 104).

Вага тіла і підіймальна сила діють одна одній назустріч: якщо переважає вага, то тіло опускається на дно, якщо переважає підіймальна сила, тіло піднімається на поверхню. Тіло тоне в рідині, якщо густина тіла більша за густину цієї рідини. Тіло випливає, якщо густина його менша за густину рідини, в яку воно занурене. В разі рівності густин тіла і рідини, в яку це тіло занурене, підіймальна сила дорівнює вазі і тіло „висить" у рідині на якій завгодно висоті.

Рис. 103. Прилад Уатта для порівнювання густини рідин. Гумова трубка служить для висмоктування повітря.

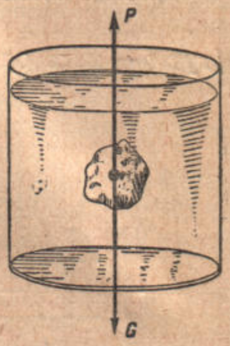

Рис. 104. До закону Архімеда. G — вага тіла, P — підіймальна сила, що дорівнює вазі витиснутої тілом рідини.

§ 68. Гідравлічний прес і гідравлічний акумулятор. Дія гідравлічного преса, зображеного на рис. 106, базується на законі Паскаля. Два циліндри, один з малим, другий з великим діаметром, сполучені трубкою, наповнені водою або олією. Малий циліндр A має поршень, який служить для нагнітання рідини у великий циліндр B. Клапан v служить для засмоктування рідини в малий циліндр, клапан w перешкоджає рідині виходити назад. Запобіжний клапан u відкривається в той момент, коли тиск у великому циліндрі перевищить границю, визначувану навантаженням на важіль, який притискує пробку клапана u.

За законом Паскаля, сили, які діють на поршні великого і малого циліндрів, відносяться як площі поршнів або як квадрати діаметрів:

$$\frac{P}{p}=\frac{S}{s}=\frac{D^2}{d^2}. \tag{6}$$

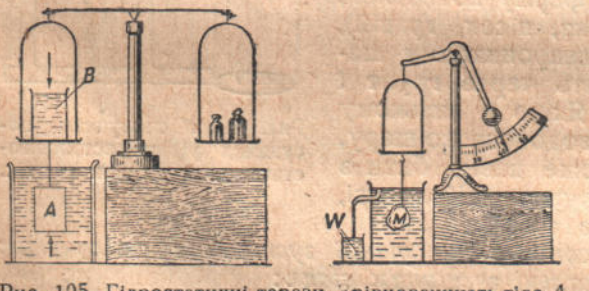

Рис. 105. Гідростатичні терези. Зрівноважують тіло A, потім занурюють його у воду і наливають у посудину B стільки води, щоб відновилася рівновага.

Тиск у трубах може бути доведений до 500 *ат* і більше, а тому з допомогою гідравлічного преса розвивають величезні сили — близько 14—15 тисяч тонн. Зрозуміло, що при цьому чим більше ми виграємо на силі, тим більше програємо на шляху: великий поршень проходить шлях у стільки разів менший за шлях малого поршня, у скільки разів його площа більша.

Застосовують гідравлічний прес в найрізноманітніших галузях техніки. У металообробній промисловості гідравлічні преси застосовують для великих поковок і виготовлення товстостінних предметів із сталі або заліза.

---

[1]) На законі Архімеда базується один з найпростіших способів визначення питомої ваги твердих тіл: досліджуване тіло зважують спершу в повітрі, потім, зануривши його у воду, зважують удруге. Визначена таким способом „втрата ваги" дозволяє точно встановити об'єм, що його займає досліджуване тіло (рис. 105).

На законі Паскаля базується також дія гідравлічного акумулятора, який служить для підтримання сталого тиску рідини в трубах, що живлять гідравлічні машини.

Будова акумулятора зображена на рис. 107. Циліндр A прикріплено сполучною муфтою до фундаменту S. У циліндрі рухається поршень F,

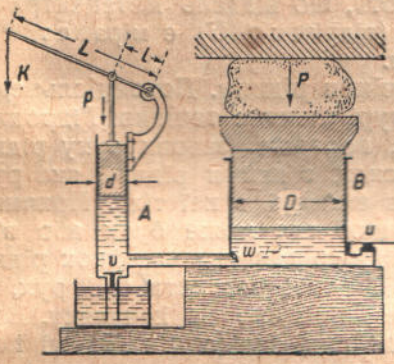

Рис. 106. Гідравлічний прес.

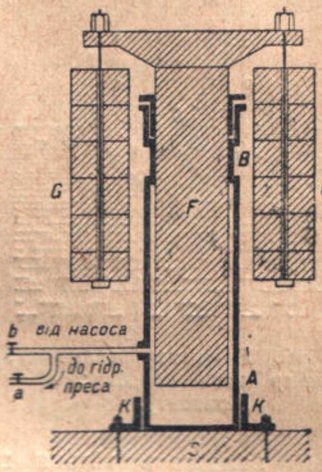

Рис. 107. Гідравлічний акумулятор.

до якого прикріплена поличка, навантажена ящиками G з залізним ломом або чавунними плитами.

Щоб запобігти просочуванню рідини, є шкіряна ущільнювальна муфта B.

„Зарядка" акумулятора полягає в тому, що піднімають поршень з вантажем. Для цього паровим або електричним насосом нагнітають в акумулятор воду. З акумулятора вода йде до машин.

§ 69. Плавучість і стійкість корабля. Вага корабля дорівнює вазі об'єму витиснутої ним води. Цей об'єм називають водотоннажністю корабля; він служить мірою здатності корабля триматися на воді, маючи задане углиблення (мірою „плавучості"). Об'єм витиснутої кораблем води повинен залишатися сталим при різних положеннях корабля.

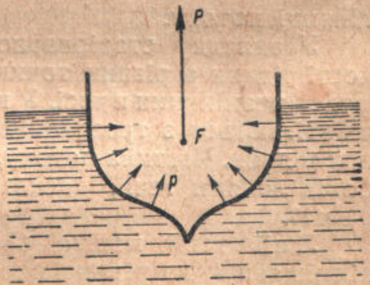

Рис. 108. Плавучість корабля.

Підіймальна сила розподілена по всій підводній частині корабля (рис. 108). На кожну елементарно малу частину підводної поверхні корабля діє елементарна підіймальна сила. Рівнодійна всіх цих сил P є повною підіймальною силою або плавучістю корабля. Точку прикладання цієї рівнодійної (на рис. 108 точка F) називають *центром тиску* або, як прийнято в російській літературі, *центром величини.* Центр величини збігається з центром ваги витиснутої рідини. При різних положеннях корабля центр витискуваної ним рідини, інакше, центр величини — точка F — переміщується (рис. 109).

Для того, щоб корабель зберігав стійкість, необхідно, щоб центр величини і центр ваги корабля лежали на тій самій прямовисній лінії. Для характеристики стійкості корабля служить уявлення про так званий *метацентр.* Метацентр є точка перетину лінії, проведеної через центр ваги корабля і через початкове положення центра величини (при невідхиленому корпусі корабля), з вертикальною лінією, на яку зміщується центр величини під час нахилення корабля (на рис. 109 метацентр — точка M). Якщо метацентр лежить **в и щ е** центра ваги, то, як неважко побачити з рис. 109, вага корабля і виштовхна сила під час нахилення корпусу корабля утворюють пару сил, яка повертає корабель у вихідне положення. Момент цієї пари пропорціональний віддалі метацентра M від центра ваги G; а тому вважають, що віддаль метацентра від центра ваги (відрізок MG) є міра **с т і й к о с т і** корабля.

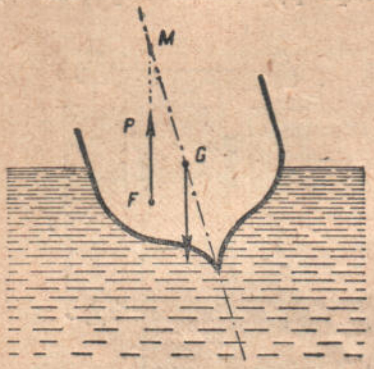

Рис. 109. F — центр величини; G — центр ваги корабля; M — метацентр.

§ 70. Течіння рідини. Потенціальне, ламінарне і турбулентне течіння. Гідродинаміка вивчає, поперше, закони руху рідини, подруге, ті сили, з якими рідина, яка рухається, діє на вміщені в неї тіла. Причиною виникнення цих сил може бути або **в'я з к і с т ь**, або **і н е р ц і я** тих частинок рідини, які бувають змушені змінити свій рух, обминаючи тіло, вміщене на їх шляху. Величина і напрям цих сил (сил в'язкості і сил інерції) залежать тільки від **в і д н о с н о г о** переміщення рідини і тіла, яке перебуває в ній.

Щоб визначити сили, спричинювані інерцією рідких мас, треба знати траєкторії і швидкості окремих частинок рідини перед і після того, як тіло було внесене в потік. Швидкість частинок рідини в різних ділянках потоку має різну величину. Щоб мати повне уявлення про напрям швидкості у кожній точці потоку, на рисунку, що зображає цей потік, проводять лінії, напрям яких у кожній точці **з б і г а є т ь с я з н а п р я м о м ш в и д к о с т і**. Ці лінії називають **л і н і я м и т е ч і ї**[1]). Лінії течії проводять так, щоб **г у с т о т а** їх зображала в певному масштабі **в е л и ч и н у ш в и д к о с т і** в тій або іншій ділянці потоку.

У випадку стаціонарного течіння швидкості рідини в різних точках потоку залишаються незмінними в часі. У цьому разі лінії течії збігаються з траєкторіями окремих частинок рідини. Частина потоку, обмежена з усіх боків лініями течії, називається **т р у б к о ю т е ч і ї**.

Лінії течії можна зробити видимими, підмішавши до рідини порошок алюмінієвої бронзи або пустивши в неї струмінь фарби.

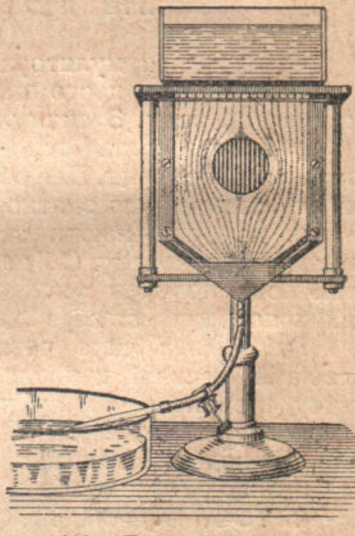

Рис. 110. Прилад для спостереження над лініями течії.

На рис. 110 зображено прилад, призначений для спостережень над лініями течії. Він складається з плоскої скляної посудини, яка вгорі розширюється в резервуар, поділений пополам вертикальною перегородкою. Одну половину цього резервуара наповнюють чистою водою, а другу — забарвленою водою. Обидва резервуари сполучаються маленькими

[1]) Аналогічно з допомогою *силових ліній* зображають напрям вектора напруженості в якій завгодно точці електричного, магнітного або гравітаційного поля.

отворами з внутрішнім простором посудини. Отвори переднього резервуара зсунуті відносно отворів заднього на половину віддалі між отворами. Струмені забарвленої і чистої води, чергуючись, витікають у простір між плоскими скляними стінками посудини і дають чітку картину ліній течії рідини.

На рис. 111 схематично зображено картину, яку маємо при обтіканні круглого циліндра.

Спостерігаючи описаним вище способом лінії течії, можна помітити, що характер течіння рідини великою мірою залежить від близькості стінок посудини. На розподіл швидкостей поблизу стінок впливають сили тертя і форма потоку. Далі від стінок розподіл швидкостей зумовлюється *тільки* формою потоку. Назвемо перший, складніший, випадок *течінням при терті*, другий — *вільним течінням*.

Рис. 111. Лінії течії.

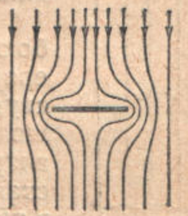

Рис. 112. Течіння рідини, яка огинає поміщену в ній пластинку. Картина, яку бачить нерухомий відносно пластинки спостережник.

На рис. 112 і 113 зображені лінії течії вільного стаціонарного потоку при обтіканні тонкої пластинки, поставленої перпендикулярно до потоку. На рис. 112 зображена картина, яку бачить спостережник, нерухомий відносно пластинки: частинки рідини, зустрівши пластинку, відхиляються від початкового шляху; струмені рідини, обхопивши пластинку з обох боків, замикаються позаду неї. На рис. 113 зображена картина, що її бачить нерухомий відносно рідини спостережник, повз якого проходить пластинка: частинки рідини, відкинуті вперед і в сторони рухомою пластинкою, обходять її краї і йдуть у простір, який звільнився позаду пластинки. В цьому разі лінії течії дуже подібні до силових ліній плоского провідника, зарядженого з одного боку позитивною, з другого — негативною електрикою. В наслідок цієї аналогії, яка легко може бути розвинута і поглиблена математично, *вільне течіння, яке встановилося, називають потенціальним течінням*.

Течіння при терті буває або шаруватим — „ламінарним“ [1]) або вихровим, „турбулентним“ [2]). При ламінарному течінні шари рідини ковзають один по одному без обертання з швидкостями, які збільшуються в міру віддалення від стінок посудини. Особливо зручно спостерігати ламінарне течіння у вузькій скляній трубці (рис. 114, *a*). Поки течіння має шаруватий характер, струмінь фарби, пущений у трубку, залишається різко обмеженим. При збільшенні швидкості настає такий момент, коли течіння переходить у турбулентне: різка межа між чистою і забарвленою рідиною зникає, і вся трубка стає заповненою неправильними рухами (рис. 114, *b*).

Рис. 113. Те саме течіння, що на рис. 112. Картина, яку бачить спостережник, нерухомий відносно рідини.

Рис 114. *a*) Ламінарне і *b*) турбулентне течіння вздовж капілярної трубки.

---

[1] Від латинського lamina — *пластинка*.
[2] Від латинського turbulentus — *неспокійний*.

При турбулентному течінні частинки рідини перестають ковзати вздовж стінок трубки і одна біля однієї і починають робити обертальні рухи. Точніше уявлення про турбулентний рух можна дістати так. Уявимо собі, що всередину трубки щільно вставлено кругле гумове кільце, крізь яке проходить стрижень (рис. 115). Якщо всовувати стрижень всередину трубки, то кільце буде котитися без ковзання, пересуваючись вперед з швидкістю, яка дорівнює половині швидкості стрижня. Турбулентний рух рідини вздовж трубки має такий самий характер: у місцях дотикання рідини до трубки утворюються вихрові кільця, які „котяться" всередині трубки.

Рис. 115. Модель, яка пояснює турбулентне течіння в трубці.

Кінетична енергія ламінарного течіння рідини являє собою енергію поступного руху частинок рідини. Кінетична енергія турбулентно - текучої рідини складається з енергії поступного і обертального рухів частинок рідини. Звідси видно, що для приведення частинок рідини до вихрового руху треба витратити додаткову роботу; це виявляється в різкому зростанні о п о р у течінню при перетворенні ламінарного течіння в турбулентне.

§ 71. Теорема про нерозривність струменя. *Добуток швидкості нестисливої і нев'язкої рідини на поперечний переріз трубки течії є величина стала.*

Дійсно, об'єм рідини, яка втікає за 1 *сек* в один кінець трубки течії, повинен дорівнювати об'ємові рідини, яка витікає з протилежного кінця, бо рух частинок рідини зображається лініями течії, і тому не може бути течіння крізь бічну поверхню трубки; рідина не затримується всередині трубки, і густина її залишається сталою. Виділимо мислено будьяку частину трубки течії (рис. 116) і позначимо площі поперечного перерізу трубки на початку і в кінці виділеної частини через S_1 і S_2; швидкості рідини для цих перерізів нехай будуть v_1 і v_2. За 1 *сек* всередину розгляданої частини трубки течії увійде об'єм рідини v_1S_1; з протилежного кінця за 1 *сек* витече об'єм рідини v_2S_2. На підставі зазначеного

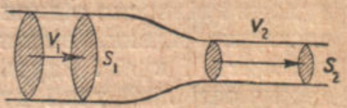

Рис. 116. Через різні перерізи трубки течії в рівні проміжки часу протікають рівні об'єми рідини.

$$v_1S_1 = v_2S_2. \tag{7}$$

Це рівняння справедливе для яких завгодно двох перерізів трубки течії; отже, згідно з висловленою вище теоремою для всіх перерізів трубки:

$$vS = \text{const}.$$

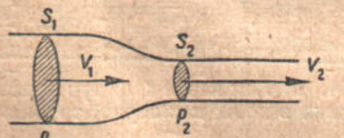

Рис. 117. До виведення рівняння Б е р н у л л і.

§ 72. Рівняння Бернуллі. У звуженій частині трубки течії швидкість рідини більша, ніж у решті потоку. Поступаючи у вузьку частину трубки течії, рідина рухається п р и с к о р е н о; отже, на рідину, яка втікає у вузьку частину трубки течії, діє з боку рідини, яка перебуває ще в широкій частині трубки, якась сила.

Очевидно, що ця сила виникає в наслідок різниці тисків у широкому і вузькому місці трубки. Сила напрямлена у бік вузької частини трубки; значить, у широких місцях трубки тиск більший, ніж у вузьких. Інакше кажучи, *в місцях звуження трубки течії тиск знижений.*

Нехай за час Δt маса рідини m втікає в один кінець трубки течії з перерізом S_1 (рис. 117). Позначимо швидкість її течіння в цьому місці трубки течії через v_1 і тиск через p_1. За час Δt у трубку втікає маса рідини m, яка несе в трубку енергію, що дорівнює сумі трьох доданків:

1) кінетичної енергії $\frac{mv_1^2}{2}$;

2) роботи, яку виконує рідина, поступаючи в трубку течії; ця робота дорівнює силі (тобто добуткові тиску p_1 на площу трубки S_1), помноженій на шлях $v_1\Delta t$, пройдений рідиною за час Δt; робота ця, отже, дорівнює $p_1 S_1 v_1 \Delta t$;

3) потенціальної енергії тяжіння рідини mgh_1 (тут g — прискорення сили тяжіння і h_1 — висота підйому).

З таких самих доданків складається енергія, яку виносить маса рідини m, що витікає за той самий проміжок часу Δt з протилежного кінця трубки течії з поперечним перерізом S_2, де швидкість рідини v_2 і тиск p_2.

При стаціонарному течінні енергія трубки повинна залишатися незмінною; отже:

$$\frac{mv_1^2}{2}+p_1S_1v_1\Delta t+mgh_1=\frac{mv_2^2}{2}+p_2S_2v_2\Delta t+mgh_2.$$

Згідно з рівнянням нерозривності струменя об'єм рідини, яка втікає в трубку за час Δt, тобто $S_1v_1\Delta t$, дорівнює об'ємові рідини, що витікає за той самий проміжок часу з трубки течії: $S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t$. Поділимо обидві частини попереднього рівняння на ці рівні один одному об'єми, взявши до уваги, що маса рідини, поділена на її об'єм: $\frac{m}{Sv\Delta t}$, являє густину рідини ρ. Дістаємо рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\rho gh_1=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\rho gh_2. \tag{8}$$

В цьому рівнянні тиск p виражають у *дин/см²*, висоту h — в *см*, густину ρ — в *г/см³* і швидкість v — в *см/сек*; $g=981$ *см/сек²*.

В технічній системі тиск p виражають у *кг*/м²* [1]) або в *мм* водяного стовпа, висоту h — у *м*, густину ρ — в технічних одиницях маси на *м³* (для цього ρ, виражене в *кг/м³*, ділять на 9,81), швидкість v виражають у *м/сек*; $g=9{,}81$ *м/сек²*.

При течінні рідини по якомусь горизонтальному рівню потенціальна енергія рідини залишається незмінною і рівняння Бернуллі спрощується:

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Тиск p називають статичним тиском. Величину $\rho v^2/2$, яка має, як неважко переконатися, розмірність тиску, називають динамічним тиском. Ми бачимо, що *при горизонтальному течінні рідини сума статичного і динамічного тисків залишається величиною сталою.* Ця сума називається повним тиском.

Принципіально статичний тиск треба вимірювати з допомогою манометра, нерухомого відносно текущої рідини. Практично буває досить узяти манометр, площина отвору якого розміщена, як показано на рис. 118,*А*, паралельно лініям течії. Повний тиск вимірюють манометром, отвір якого розміщений перпендикулярно до ліній течії; попавши в отвір, рідина „втрачає" свою швидкість; динамічний тиск у

[1]) Нагадаємо, що символ *кг** означає кілограм-силу, на відміну від символа *кг*, який означає кілограм-масу. За означенням технічна одиниця маси є така маса, яка під діянням сили в 1 *кг** набуває прискорення 1 *м/сек²*. Це є маса, яка в 9,81 раза перевищує масу одного кілограма. Отже, щоб виразити густину ρ в технічних одиницях маси на *м³*, треба ρ, виражене в *кг/м³*, поділити на 9,81 (§ 4).

цій трубці дорівнюватиме нулеві, статичний тиск, що залишився, дорівнюватиме сумі статичного і динамічного тисків текущої рідини, отже, манометр покаже повний тиск (рис. 118, *B*). Зображений на цьому рисунку прилад має назву трубки Піто. Зрозуміло, що зображені на рис. 118 манометричні трубки *A* і *B* можуть бути замінені трубками, відведеними від текущої рідини до металічного манометра.

Рис. 118. *A*) Для вимірювання статичного тиску отвір манометричної трубки розміщують паралельно лініям течії; *B*) для вимірювання повного тиску отвір манометричної трубки розміщують перпендикулярно до ліній течії (трубка Піто).

§ 73. Поширення теореми Бернуллі на весь потік. Теорема Бернуллі була нами доведена для однієї трубки течії. Але вона є справедливою для яких завгодно двох точок потенціального потоку. Розглянемо, наприклад, потік, який обтікає циліндричне тіло, вісь якого перпендикулярна до площини рисунка (рис. 119). На достатньо великій віддалі від циліндра лінії течії, а, отже, і трубки течії будуть мати такий самий характер, як в незбуреному потоці.

Швидкість v_0 і тиск p_0 в якій завгодно точці „незбуреного" потоку мають ту саму величину. Виберемо, як на рис. 119, у двох різних трубках течії по два довільних перерізи, з яких один візьмемо так далеко від циліндра, щоб можна було не зважати на спричинюване ним збурення, а другий візьмемо біля поверхні циліндра. Пишемо для кожної трубки рівняння Бернуллі:

$$\frac{\rho v_0^2}{2}+p_0=\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1;$$

$$\frac{\rho v_0^2}{2}+p_0=\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2,$$

де v_0 і p_0 — швидкість і тиск незбуреного потоку, а v_1 і v_2, p_1 і p_2 — швидкості і тиски в двох трубках поблизу циліндра. Дві величини, нарізно рівні третій, рівні між собою. А тому;

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2};$$

це доводить справедливість рівняння Бернуллі для двох довільно обраних точок потоку[1]).

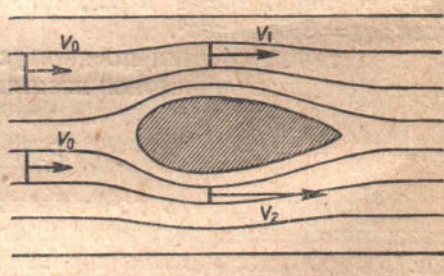

Рис. 119. Теорему Бернуллі можна застосувати для яких завгодно двох точок стаціонарного потоку.

§ 74. Границя застосовності рівняння Бернуллі. Рівняння Бернуллі було нами виведене з припущенням, що енергія текущої рідини залишається незмінною. В дійсності ж деяка частина енергії витрачається на роботу, напрямлену проти сил тертя; в зв'язку з цим рідина нагрівається, і внутрішня енергія рідини, яку ми вважали за сталу і тому не брали

[1]) Доводячи, що рівняння Бернуллі може бути узагальнене на весь потік, ми взяли до уваги, що в різних точках збуреного потоку однакові не тільки швидкості, а й статичні тиски. Останнє, зрозуміло, для вагомих рідин, неправильне: тиск зростає в міру збільшення глибини. Для аеро- і гідродинамічних розрахунків (але не для статичних) ця обставина звичайно не має практичного значення, бо розміри дирижаблів, аеропланів і підводних човнів дозволяють у динамічних розрахунках не зважати на зміну тиску з глибиною і брати якийсь середній тиск, який з достатньою точністю можна вважати за сталий по всій висоті цих тіл.

до уваги, зростає. Ми припускали також, що частинки рідини не проходять крізь бічну поверхню трубки течії. В дійсності ж тепловий рух порушує течіння рідини по певних лініях течії.

Тим то до дуже в'язких рідин рівняння Бернуллі не можна застосувати. Але для таких рідин, як вода, а також і для повітря рівняння Бернуллі практично є досить точним.

§ 75. Прилади, дія яких пояснюється рівнянням Бернуллі. Сума статичного і динамічного тисків залишається сталою величиною, а тому в струмені статичний тиск завжди буває менший, ніж у нерухомій рідині, і при великих швидкостях може стати навіть негативним. У цьому разі рідина, яка протікає по вузькій частині трубки, перебуватиме в стані всебічного розтягу, через те ж що міцність рідини на розрив велика (§ 115), негативний тиск може досягти значної величини. Якщо тиск у нерухомій рідині дорівнював атмосферному, то тиск у струмені буде менший атмосферного. Струмінь буде виявляти засмоктуючу дію. На цьому явищі базується дія цілого ряду приладів, наприклад, усім відомого пульверизатора, зображеного на рис. 120. По трубці a продувають повітря. Струмінь, що виходить через сопло b, засмоктує воду в трубку c і розпилює її.

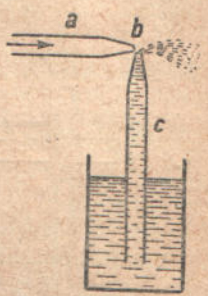

Рис. 120. Пульверизатор.

Інжектор. Інжектором називають пароструминний насос, який служить для живлення водою парових котлів паровозів, пароплавів, локомобілів і т. ін. На рис. 121 зображено найпростіший інжектор. Через патрубок D до інжектора підводиться з котла пара, яка, пройшовши через сопло u, поступає з великою швидкістю у змішувач a.

Через засмоктуючу дію струменя, а також конденсацію пари — тиск у змішувачі знижується; у нього входить вода по патрубку W з коробки інжектора. Із змішувача струмінь води з великою швидкістю входить у дифузор K, що розширюється, втрачає свою швидкість, тиск в дифузорі різко підвищується, стає вищим, ніж у котлі, в наслідок цього піднімається зворотний клапан, і вода поступає в котел. Між змішувачем і дифузором залишають щілину b, крізь яку при пусканні інжектора виходять надвишок води і пари.

Рис. 122. Водоструминний насос.

Струмінь води, що виходить із сопла, створює розрідження в резервуарі A. Трубка B прилучається до резервуара, з якого слід викачати повітря.

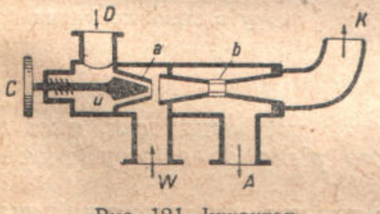

Рис. 121. Інжектор.

При пусканні інжектора потрібно менше пари, ніж під час роботи повним ходом, а тому сопло має регулюючий пристрій C.

За цим самим принципом працює паровозний конус, який утворює сильну тягу в димарі.

Водоструминні насоси. Водоструминні насоси базуються на всисному діянні водяного струменя. Принцип діяння цих насосів зрозумілий з рис. 122.

Водоструминні насоси вживаються як повітряні насоси в конденсаторних установках при парових турбінах, у лабораторіях і т. ін. І водо- і пароструминні насоси дуже надійні в роботі, але коефіцієнт корисної дії їх надзвичайно малий, тому вживають їх у тих випадках, коли є велика кількість пари (спрацьована пара) або води, що їх чомусь не можна використати економічніше.

Карбюратор. Карбюратором називається прилад, який живить бензиновий двигун внутрішнього згорання робочою сумішкою — сумішкою пального з повітрям. Будова карбюратора зображена на рис. 123. По трубі *К* зовнішнє повітря всмоктується в циліндр мотора. У звуженій частині труби — дифузорі *Л* — утворюється знижений тиск, і бензин з поплавкової камери *Н*, де тиск дорівнює атмосферному, через калібровану трубочку (через жиклер *А*) витікає в дифузор і випаровується в прохідному повітрі. Для того щоб бензин не виливався через жиклер, у поплавковій камері є поплавок *Д*, з якими сполучена голка *Г*, що закриває доступ бензину з бака, як тільки рівень його підніметься вище отвору жиклера. Дросельна заслінка *В* регулює швидкість повітря, а разом з тим і швидкість бензину, який поступає в мотор.

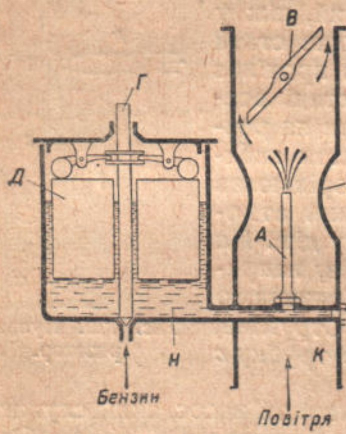

Рис. 123. Карбюратор.

§ 76. Витікання рідини з отвору. Користуючись теоремою Б е р н у л л і, легко можна визначити, з якою швидкістю буде витікати рідина з бічного отвору в посудині або під діянням власної ваги, або під діянням постійного тиску на її поверхню. На рис. 124 зображена рідина, що витікає з швидкістю v з отвору A з площею S. Тиск у струмені рідини можна вважати рівним атмосферному тискові p. Тиск всередині посудини на рівні отвору позначимо через p_1. Складаємо рівняння Б е р н у л л і для трубки течії, яка починається всередині посудини і закінчується в струмені:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Швидкість рідини v_1 всередині посудини наближено можна вважати рівною нулеві ($v_1=0$). А тому:

$$p_1-p=\frac{\rho v^2}{2}.$$

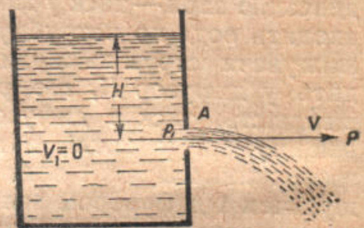

Рис. 124. Витікання рідини з отвору в стінці посудини.

Якщо різниця тисків всередині посудини і в струмені утворюється вагою стовпа рідини з висотою h, то $p_1-p=\rho gh=\frac{\rho v^2}{2}$, і

$$v=\sqrt{2gh}. \tag{9}$$

Швидкість v, з якою витікає рідина, дорівнює тій швидкості, якої набула б частинка рідини, падаючи від вільного рівня до отвору (теорема Т о р і ч е л л і).

§ 77. Течіння рідини по трубі. Під час течіння рідини по трубі якась частина її енергії витрачається на роботу проти сил тертя і перетворюється на внутрішню енергію. Тому можна написати, взявши до уваги зазначене в § 72:

$$\left(\frac{mv_1^2}{2}+p_1S_1v_1\Delta t+mgh_1\right)-\left(\frac{mv_2^2}{2}+p_2S_2v_2\Delta t+mgh_2\right)=\text{роботі тертя за час } \Delta t.$$

Поділивши обидві частини на об'єм $S_1v_1\Delta t=S_2v_2\Delta t$, дістанемо:

$$\left(\frac{\rho v_1^2}{2}+p_1+\rho gh_1\right)-\left(\frac{\rho v_2^2}{2}+p_2+\rho gh_2\right)=C=\text{роботі тертя в одиниці об'єму}$$

за 1 *сек.*

Якщо швидкість течіння рідини однакова на всьому протязі труби і труба прокладена горизонтально, то статичний тиск повинен зменшитися, бо в цьому разі $p_1 - p_2 = C$. Зменшення тиску можна помітити з допомогою прилада, зображеного на рис. 125. Чим вужча труба і чим більша в'язкість рідини, тим більша робота тертя, тим швидше спадає тиск. Спадання напору в водопровідних трубах із збільшенням віддалі від водопровідної станції пояснюється тертям всередині труб.

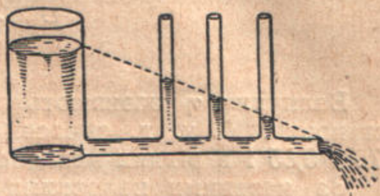

Рис. 125. Течіння рідини по трубці. Через тертя тиск в кінці трубки менший, ніж на початку.

§ 78. Використання енергії текущої рідини. Найпростіше використати енергію текущої рідини, поставивши на її шляху зігнуту пластинку. Ударяючись об пластинку, рідина буде рухати її, втрачаючи при цьому частину своєї швидкості. Енергія рідини буде передаватися пластинці.

На рис. 126 зображена така пластинка, об яку з абсолютною швидкістю v_0 ударяється струмінь води і після удару збігає по пластинці з відносною швидкістю v_2.

Під дінням струменя пластинка рухається з швидкістю v_1. Абсолютна швидкість води v_0 дорівнює, очевидно, геометричній сумі відносних швидкостей v_1 і v_2.

Пробігши по пластинці, вода стікає з її нижнього кінця з зменшеною відносною швидкістю v_2'. Абсолютна швидкість стікаючої води v_0', яка дорівнює сумі відносних швидкостей v_1' і v_2', буде значно менша початкової швидкості v_0. Якщо за секунду по пластинці збігає маса рідини m, то енергія E, віддавана щосекунди, дорівнюватиме кінетичній енергії, втраченій рідиною за цей час:

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0'^2}{2}. \tag{10}$$

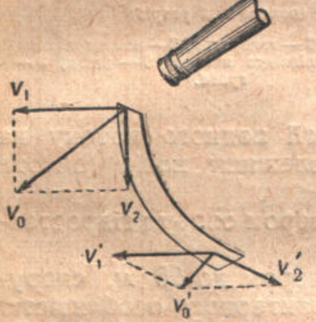

Рис. 126. Швидкість v_0 рідини, яка ударяється об пластинку, зменшується. Пластинка починає рухатися з швидкістю v_1.

Найбільшим це віддавання енергії буде в тому разі, коли пластинка рухається з швидкістю, що дорівнює половині швидкості рідини. Справді, якщо пластинка нерухома, тиск на неї буде найбільший, але пластинка не переміщується, і тому ніякої роботи вона не виконає. Якщо ж пластинка рухається з швидкістю рідини, то гідродинамічний тиск на неї дорівнює нулеві: робота знов дорівнює нулеві. Робота вимірюється добутком сили на переміщення; а тому

робота, виконувана пластинкою, буде найбільшою тоді, коли пластинка рухається з проміжною швидкістю, яка дорівнює половині швидкості потоку.

§ 79. Гідравлічні силові установки. Типи гідростанцій. Описаним вище способом можна використати енергію природних водних потоків, водопадів, річок і ін. Якщо за 1 *сек* падає Q *м³* води з висоти H, то від даного потоку за 1 *сек* можна теоретично мати роботу $1000 \cdot Q \cdot H$ *кг*м/сек* або потужність

$$P_{\max} = \frac{1000 \cdot H \cdot Q}{75} \text{ к. с.}$$

Дійсна ж потужність буде менша теоретично обчисленої:

$$P = \eta P_{max} = \eta \frac{1000HQ}{75} \text{ к. с.} \tag{11}$$

Величину η називають **коефіцієнтом корисної дії** (к. к. д.) установки. К. к. д. сучасних гідравлічних установок коливається між 0,75 і 0,85 і в рідких випадках доходить до 0,95.

За наявними неповними підрахунками запас водної енергії в СРСР визначається в 65 мільйонів *к. с.*, що становить 9% всіх світових запасів „білого вугілля".

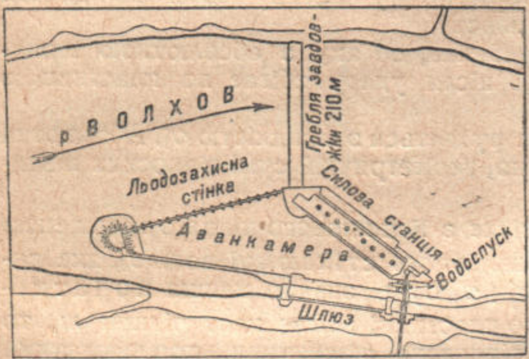

Рис. 127. План Волховської гідроелектростанції (схема).

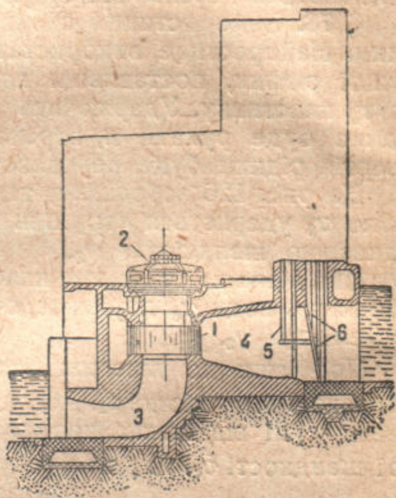

Рис. 128. Волховська ГЕС (поперечний розріз)

1 — турбіна, 2 — генератор, 3 — всмоктувальна труба, 4 — підвідна камера, 5 — щити, 6 — грати.

Споруди, які служать для перетворення енергії водного потоку на електричну, називають гідроелектростанціями. Належний напір (висота падання) води створюється з допомогою греблі.

За величиною створюваного напору і за характером споруд гідростанції поділяються на два типи.

1) Низьконапірні станції річкового типу з напором до 20 *м*, споруджувані на рівнинних річках з малим падінням. Характерною особливістю цих станцій є безпосередня близькість греблі до будинку станції (рис. 127). Вода, пройшовши льодозахисну стінку, попадає (рис. 128) в аванкамеру 6, звідки крізь захисні грати 5 проходить до підвідної камери 4 і, далі, до турбін 1. Надмір води відводиться через водоспуск, що має щитовидний, роликовий або сегментний затвор.

2) Середньонапірні (близько 50 *м*) і високонапірні (понад 50 *м*) станції, які характеризуються тим, що, перше ніж попасти в турбіни, вода проходить по безнапірних або напірних водоводах.

§ 80. Водяні двигуни. Турбіни Френсіса, Каплана і Пельтона. Основною частиною всякого водяного двигуна є робоче колесо, що має лопатки; діючи на ці лопатки, вода рухає колесо. Якщо при цьому використовується енергія текущої рідини (§ 78), то двигун називається **водяною турбіною**. Якщо ж використовується тільки вага води,— то **водяним колесом**.

Будовані і експлуатовані тепер турбіни поділяються на **напірні** і **вільнострумипні**.

Принцип дії напірних турбін (рис. 128 і 129) полягає ось у чому: вода попадає у підвідну камеру 4 під великим тиском, але з малою швидкістю. Пройшовши через вузьку частину підвідної камери і напрямне колесо, вода набуває великої швидкості, — її потенціальна енергія переходить у кінетичну, яка передається робочому колесу. Лопатки робочого колеса повинні бути зроблені так, щоб, проходячи по них, вода втратила якнайбільшу частину своєї швидкості. Всмоктувальна труба (рис. 128), що розширяється до вихідного отвору, служить для зменшення швидкості води при виході її з турбіни. З всмоктувальної труби вода виходить при атмосферному тиску і з швидкістю, яка приблизно дорівнює тій, з якою вона поступала у підвідну камеру. Отже, напірні турбіни використовують усю потенціальну енергію води, що є на висоті верхнього б'єфа.

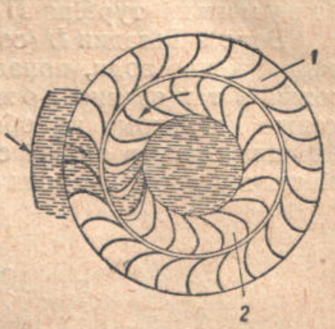

Рис. 129. Напрямне колесо турбіни — 1, робоче колесо — 2.

За типом робочих коліс напірні турбіни поділяються на турбіни Френсіса і турбіни Каплана.

Турбіна Френсіса. Робоче колесо турбіни Френсіса (рис. 130) поміщене всередині напрямного колеса з рухомими лопатками, які напрямляють воду перпендикулярно до осі робочого колеса, по дотичних до його лопаток. Пройшовши по лопатках робочого колеса, вода із значно зменшеною швидкістю витікає в напрямі осі колеса і попадає у відсмоктувальну трубу. Відносна швидкість витікання води з робочого колеса залишається перпендикулярною до його осі, але напрямленою не по нормалі, а по дотичній до обода.

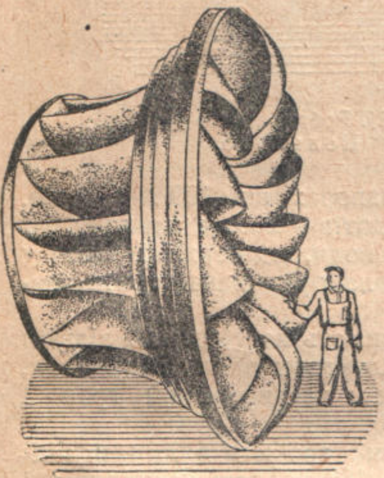
Рис. 130. Робоче колесо турбіни Френсіса.

Турбіни Френсіса мають надзвичайно велике поширення. Вони застосовуються при найрізноманітніших напорах (від 0,5 до 250 *м*). Їх к. к. д. доходить до 94,5, а потужність — до 90 000 *к. с.* (на Дніпрогесі).

Турбіни Каплана і пропелерні турбіни. Для використання великих витрат води з малим напором застосовують турбіни Каплана і пропелерні, робочі колеса яких нагадують зовнішнім виглядом корабельний гвинт (рис. 131). Турбіни Каплана роблять з рухомими лопатками; це дозволяє при всякій витраті води ставити лопатки в найвигідніше положення і тим збільшувати к. к. д. турбіни.


Рис. 131. Робоче колесо турбіни Каплана з рухомими лопатками.

Свірська ГЕС устаткована турбінами Каплана потужністю 37 200 *к. с.* з напором в 11 *м*, які роблять 75 *об/хв*.

Регулювання ходу турбіни. Звичайно турбіни безпосередньо сполучаються з генераторами змінного струму, отже, буває необхідно підтримувати стале число оборотів турбіни при різних навантаженнях генератора і різних напорах води. Досягається це регулюванням надходження води в турбіну; для цього напрямні колеса мають рухомі лопатки, оберттанням яких змінюють кількість води, що попадає в турбіну. Лопатки регулюють або руками, або з допомогою автоматів, які діють за принципом регулятора Уатта.

При малих витратах води і великих напорах застосовують вільноструминні турбіни Пельтона (рис. 132*a*).

Вода з насадки *H* (сопла), всередині якої рухається голка, що регулює надходження води, попадає на робоче колесо (рис. 132*b*), яке має лопатки, кожна з так званим ножем усередині. Попавши на лопатку, у напрямі, майже дотичному до обода колеса, струмінь води розрізається ножем і відхиляється в обидві сторони, втрачає швидкість і віддає колесу свою кінетичну енергію; коштом цього і працює турбіна.

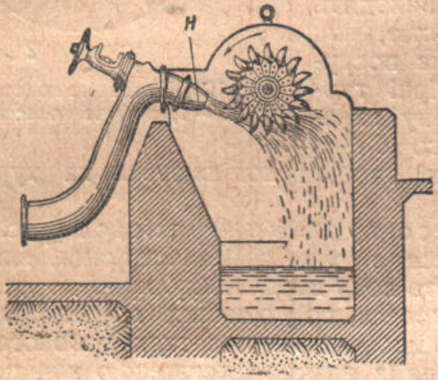

Рис. 132*a*. Схема турбіни Пельтона.

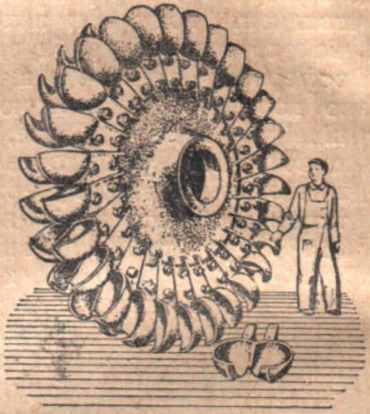

Рис. 132*b*. Робоче колесо турбіни Пельтона.

Застосовують турбіни Пельтона при напорах від 100 *м* і вище. Їх потужність доходить 20 000 *к. с.* і число оборотів — 200 за хвилину. Ці турбіни використовують тільки частину напору води, від верхнього б'єфу і до входу в робоче колесо, але при великих напорах така втрата значення не має.

§ 81. Хвилі на поверхні рідини. Хвилі виникають не тільки на вільній поверхні рідини, але взагалі на поверхні розділу двох рідин, наприклад, масла і води або солоної і прісної води, а також на дифузійній границі двох газів різної густини.

Рух частинок рідини, яка хвилюється, можна зробити видимим, підмішавши до неї алюмінієві блискітки. На рис. 133 зображено хвилі, які поширюються по поверхні води, налитої у плоскостінний скляний жолоб.

На рис. 134 зображено хвилі на поверхні розділу масла і води, утворені з допомогою того самого жолоба. Ми бачимо, що вільна поверхня масла в цьому разі майже спокійна.

Гребені хвилі, як добре видно на цих рисунках, високі й вузькі, заглибини — положисті й широкі. Хвилі поширюються по всіх напрямах від джерела коливання з деякою швидкістю, яка залежить від віддалі між гребенями — від довжини хвилі.

Якщо спостерігати хвилі з боку, можна подумати, що рухається увесь верхній шар рідини. Легко переконатися, що це не так; для цього досить кинути на поверхню води кусочки корка або соломинки; кожна частинка рідини тільки коливається біля деякого положення, але не переміщується разом з хвилею. Рис. 135 зроблено за фотознімком, знятим з експозицією, яка дорівнює періодові хвилі. На цьому рисунку видно, що частинки рідини, яка хвилюється, рухаються по колових траєкторіях. Чим глибше частинка, тим менше коло вона описує, і на деякій віддалі від поверхні рідини частинки залишаються зовсім нерухомими. Цього і слід було чекати, бо інакше, щоб створити хвилі на поверхні океану, довелося б привести до руху рідину на всій його глибині, а для цього потрібна була б величезна витрата енергії, чого, як відомо, в дійсності немає.

Опір, що його зазнає корабель, який рухається у воді, пояснюється головне тим, що частина його енергії витрачається на створення хвиль, які неминуче виникають під час руху корабля. А тому завданням корабельних конструкторів є надати обводам корабля такої форми, при якій він утворював би щонайменшу хвилю.

а

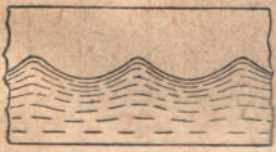

Рис. 133. Хвилі на поверхні води, спостережувані з допомогою скляного жолоба.

б

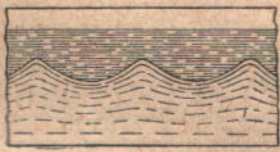

Рис. 134. Хвилі на поверхні масла і води.

в

Рис. 135. Частинки рідини, яка хвилюється, рухаються по колових траєкторіях.

Виникненням хвиль на поверхні розділу прісної і солоної води пояснюється дуже цікаве явище — так звана „мертва вода", що її спостерігають недалеко від гирла річок, особливо в Скандінавських фіордах. Кораблі, які йдуть по воді, раптом гальмуються в наслідок того, що корабель, попавши на поверхню розділу прісної і солоної води, розводить на ній невидиму з поверхні моря хвилю.

На поверхні розділу двох шарів атмосфери різної (через різницю температур) густини теж нерідко виникають хвилі, які рухаються з дуже малою швидкістю і стають помітними в наслідок періодичної конденсації водяної пари, піднімaної на гребенях хвиль у холодніші шари атмосфери, де вона утворює так звані „хвилясті" хмари.

Швидкість поширення хвиль на поверхні рідини залежить від співвідношення між глибиною рідини і довжиною хвилі. У найзагальнішому випадку швидкість поширення хвиль виражається досить складною формулою; але для тих класів хвиль, у яких довжина хвилі досить велика абож, навпаки, досить мала порівняно з глибиною рідини, зазначена формула дуже спрощується.

У припливних хвиль (зумовлених сукупною дією тяжіння до Сонця і Місяця) довжина хвилі досягає сотень кілометрів, тобто є величиною дуже великою, порівнюючи з глибиною моря. В наслідок цього швидкість поширення v припливних хвиль практично залежить тільки від глибини моря H і визначається формулою:

$$v = \sqrt{gH},$$

де g — прискорення сили тяжіння.

У звичайних морських хвиль довжина хвилі, навпаки, дуже мала порівняно з глибиною. У зв'язку з цим швидкість поширення цих хвиль залежить тільки від довжини хвилі і визначається формулою:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

де λ — довжина хвилі.

В разі надзвичайно коротких, так званих **капілярних** хвиль головну роль відограють міжчасткові сили, а не сила тяжіння. Швидкість поширення капілярних хвиль визначається формулою:

$$v=\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}},$$

де σ — поверхневий натяг (§ 186), ρ — густина рідини.

РОЗДІЛ V.

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ АЕРОМЕХАНІКИ.

§ 82. Закон Бойля. Густина газу при нормальному тиску в кілька сотень і навіть тисяч разів менша густини рідини, з якої даний газ утворився. Це означає, що при нормальних умовах середні віддалі між молекулами газу в десятки разів перевищують віддалі між молекулами рідини. Молекулярні сили в газах виявляються тому в значно меншій мірі, ніж у рідинах.

В наслідок теплового руху молекул газ займає весь наданий йому об'єм. Зовнішній тиск може в багато разів зменшити об'єм, що його займає газ. Дослід показує, що *об'єм газу при незмінній температурі обернено пропорціональний тискові* (закон Бойля-Маріотта) — $pV = \text{const}$. Цей закон був би цілком точним, якби молекули газу були нескінченно малими і між ними зовсім не існувало сил взаємодіяння. Проте, таких „ідеальних“ газів у дійсності не існує. Але чим менша густина газу, тим менше виявляються сили взаємодіяння його молекул і тим більше газ наближається за своїми властивостями до ідеального газу. Для таких газів, як повітря, водень, кисень, гелій, азот, відхилення від закону Бойля при не дуже великих тисках (близько 30 — 50 *ат*) не такі великі, щоб їх треба було брати до уваги в технічних розрахунках.

§ 83. Атмосфера. Барометрична формула. Земля оточена повітряною оболонкою — атмосферою. Повітря не розлітається в світовому просторі, бо цьому перешкоджають сили тяжіння: для того, щоб залишити Землю, молекула повітря, яка перебуває на верхній границі атмосфери, повинна мати швидкість більшу 10 *км/сек*, а середня швидкість теплового руху молекул повітря значно менша за цю величину.

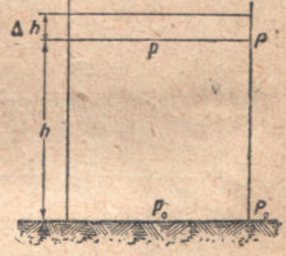

Рис. 136. До виведення барометричної формули.

Подібно до шару рідини, атмосфера тисне на всяке тіло, яке перебуває в ній. Дослід показує, що на рівні моря нормальний тиск атмосфери $p = 760$ *мм* Hg $= 1{,}033$ *кг*/см²*. При цьому тиску і температурі 0°C густина повітря дорівнює 1,293 *кг/м³*. За цими даними можна було б визначити товщину атмосфери, як ми робили це для шару рідини, якби густина повітря скрізь була та сама. Але за законом Бойля густина повітря прямо пропорціональна тискові; в міру підйому шар повітря, що залишається, стає тоншим, тиск, що його він чинить, зменшується, і тому з висотою густина повітря меншає.

Нехай на рівні землі тиск дорівнює p_0 і густина повітря ρ_0, а на висоті h — тиск p і густина ρ (рис. 136). При зміні висоти на якусь величину Δh тиск зміниться (зменшиться) на величину Δp. Якщо шар dh настільки тонкий, що густину повітря в ньому можна вважати однаковою, то $dp = -g\rho dh$. Тут ρ є густина повітря на висоті h; за законом Бойля:

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}.$$

Отже:

$$dp = -g\rho_0 \frac{p}{p_0} dh.$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на p. Зауважимо, що $\frac{dp}{p} = d\ln p$, де $\ln$ — знак натурального логарифма. Проінтегруємо тепер одержане рівняння в границях від рівня моря ($h = 0$) до висоти h і відповідно від тиску $p = p_0$ до p:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -g \frac{\rho_0}{p_0} \int_0^h dh.$$

Знаходимо:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -g \frac{\rho_0 h}{p_0}.$$

Беручи до уваги, що $g\rho_0 = 1{,}293$ *кг*/м³* і $p_0 = 1{,}0333$ *кг*/см²* $= 10\,333$ *кг*/м²*, підрахуємо, що права частина написаного вище співвідношення дорівнює $-0{,}000125\, h$, при чому висота h тут повинна бути виміряна в метрах. Якщо ми умовимось розуміти під h висоту, виміряну в кілометрах, то коефіціент при h треба збільшити в тисячу разів. Отже, приходимо до такого барометричного закону зменшення тиску атмосферного повітря з висотою:

$$p = p_0 e^{-0{,}125 h}; \tag{1}$$

тут h виміряно в кілометрах, а тиски p на висоті h *км* і p_0 на рівні моря — у довільних, але, зрозуміло, тотожних одиницях.

Спад тиску з висотою графічно зображено на рис. 137.

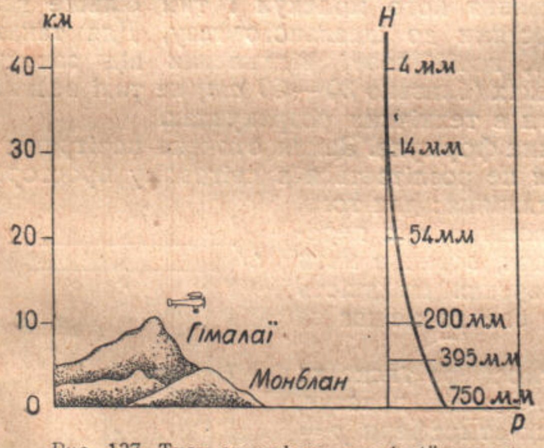

Рис. 137. Тиск атмосфери на різній висоті.

Барометрична формула має широке застосування в геодезії, авіації і метеорології.

Барометрична формула була б точною, якби температура повітря на всіх висотах була однакова. В дійсності в атмосфері теплової рівноваги немає; температура повітря з висотою знижується. В зв'язку з цим зміна густини повітря з висотою зумовлюється не самим тільки зменшенням ваги шару атмосфери, який лежить вище, але також і зниженням температури повітря. Цей спад температури повітря в міру віддалення від поверхні Землі в різних частинах земної кулі неоднаковий.

По багатьох країнах, у тому числі і в СРСР, взято як основу для порівняння с т а н д а р т н у атмосферу, розрахунок якої проводиться з припущенням, що тиск на рівні моря при 15° C становить 1013 мілібарів $=$ $= 760$ *мм* Hg і спад температури з висотою дорівнює 6,5° на 1000 *м*.

Співвідношення між висотою, тиском, густиною і температурою стандартної атмосфери наведено в такій таблиці:

Таблиця 7.

Стандартна атмосфера.

Висота	Тиск $\frac{p}{p_0}$	Густина $\frac{\rho}{\rho_0}$	Температура
0	1	1	15
1 000	0,887	0,907	8,5
2 000	0,784	0,822	2
3 000	0,692	0,742	— 4,5
4 000	0,608	0,669	— 11
5 000	0,533	0,601	— 17,5
6 000	0,465	0,538	— 24
7 000	0,405	0,481	— 30,5
8 000	0,351	0,428	— 37
9 000	0,303	0,381	— 43
10 000	0,261	0,337	— 50

§ 84. Прилади, які служать для вимірювання тиску. Будова приладів, які служать для вимірювання тиску, відома з шкільного курсу[1]); а тому тут ці прилади ми описуємо конспективно.

Манометр. Тиск рідин і газів вимірюють з допомогою манометрів.

Рис. 138. Відкритий рідинний манометр.

Відкритий рідинний манометр (рис. 138) складається з U-подібної трубки, наповненої будьякою малолеткою рідиною. Одно коліно трубки сполучене з резервуаром, де треба виміряти тиск, друге — з атмосферою. З різниці рівнів у колінах трубки судять про величину вимірюваного тиску.

Для вимірювання великих тисків служить закритий рідинний манометр (рис. 139), що складається з U-подібної трубки, запаяної з одного кінця. Відкритий кінець трубки сполучають з резервуаром, де треба виміряти тиск. Закритий кінець трубки містить повітря, спершу під атмосферним тиском. Це повітря стискається, і з зменшення його об'єму можна судити про величину вимірюваного тиску: якщо повітря буде стиснутим у два рази, тиск дорівнює 2 *ат*; у три рази — 3 *ат* і т. д.

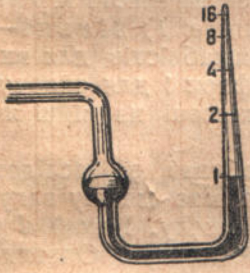

Рис. 139. Закритий рідинний манометр.

Металічний манометр (рис. 140) складається з зігнутої металічної трубки, запаяної з одного кінця, другий кінець трубки прилучають до резервуара, тиск у якому треба виміряти. Під діянням газу або рідини, що надходять у трубку, трубка намагається розігнутися. Кінець трубки сполучений з стрілкою, яка вказує тиск на шкалі. Прилади, які служать для вимірювання атмосферного тиску, називаються барометрами.

Рис. 140. Металічний манометр.

Ртутний барометр (рис. 141) складається з скляної трубки завдовжки близько 90 *см*, запаяної з одного кінця. Цю трубку наповнюють ртуттю до країв і занурюють відкритим кінцем у резервуар з ртуттю. При цьому вживають усіх запобіжних заходів, щоб у трубку не попало повітря. Ртуть виливається з трубки доти, поки тиск ртутного стовпа не стане рівним тискові атмосфери. Над ртуттю утворюється безповітряний простір — торічеллієва пустота. Нормальний атмосферний тиск зрівноважує стовп

[1]) „Фізика" Ф. і П., ч. I, § 8) — 92.

ртуті заввишки 760 *мм*, тобто становить[1]) $76 \cdot 13{,}596 = 1033{,}3$ *г*/см²* = 1013 мілібарів.

Атмосферний тиск змінюється залежно від стану погоди в невеликих межах (на кілька сантиметрів ртутного стовпа); а тому в барометрах, призначених для лабораторної і метеорологічної служби, поділки позначають тільки на тій частині шкали, яка лежить біля 76 *см*. Для точних барометричних відліків вводять поправку на температуру, бо густина ртуті і довжина шкали від нагрівання змінюються. Термометр поміщають звичайно на самому барометрі.

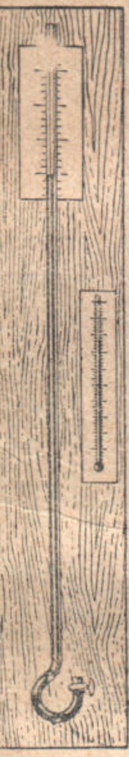

Рис. 141. Ртутний барометр.

Металічний барометр — *анероїд* (рис. 142) — складається з металічної коробки з пружною кришкою, з якої викачано повітря. Кришка затримується сильною пружиною, бо інакше вона була б втиснута атмосферним тиском. При зміні тиску кришка або прогинається, або випинається і з допомогою системи важелів приводить до руху стрілку, яка рухається по шкалі з поділками, зробленими на підставі порівняння показів анероїда з показами ртутного барометра.

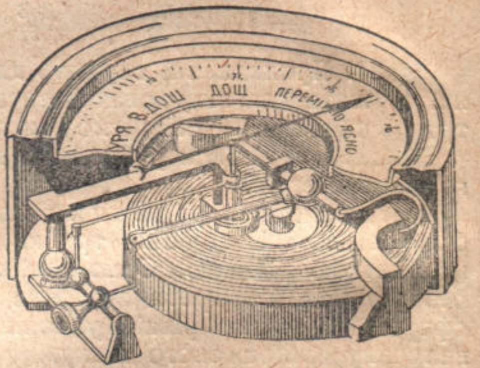

Рис. 142. Металічний барометр (анероїд).

§ 85. Аеростат. Аеростатом називають літальний апарат легший за повітря, що базується на законі Архімеда. Тепер будують аеростати двох типів: 1) вільні — сферичні, вживані для підготовки дирижаблістів для висотних польотів з метою вивчення атмосфери і для спорту, і 2) прив'язні — змійкові (рис. 143), вживані на війні як нерухома спостережна вишка.

Підіймальної сили аеростат набуває в наслідок того, що поміщений в його оболонку газ має меншу вагу, ніж повітря тієї ж температури і того ж тиску. Нехай d є вага 1 *м³* „льотного" газу і d_n — вага 1 *м³* повітря. Очевидно, що кожний кубічний метр льотного газу має в повітрі підіймальну силу $f = d_n - d$. Якщо об'єм аеростата є V, то повна підіймальна сила аеростата дорівнює:

$$F = V\,(d_n - d). \tag{2}$$

Вільна (залишкова) підіймальна сила аеростата $F_{вільн} = F - Q$, де Q — сумарна вага оболонки, спорядження і всіх вантажів аеростата. Ця сила змушує аеростат підніматися від землі.

Для наповнення аеростатів уживають звичайно один з таких газів: водень $d = 0{,}0896$ *кг*/м³*, $f = 1{,}2$ *кг*/м³*; гелій $d = 0{,}18$ *кг*/м³*, $f = 1{,}1$ *кг*/м³*; світильний газ d від 0,45 до 0,67 *кг*/м³*, f від 0,62 до 0,84 *кг*/м³*.

В міру піднімання вгору тиск на оболонку аеростата зменшується, газ, що наповнює аеростат, розширяється і частина його виходить назовні через відросток (апендикс) сферичного аеростата; підіймальна сила аеростата зменшується з висотою. Є, проте, простий пристрій, який дозволяє зберігати підіймальну силу аеростата незмінною до якоїсь, правда невеликої, висоти піднімання. Цей пристрій полягає ось у чому: всередині

[1]) Вага 1 *см³* ртуті дорівнює 13,596 г.

оболонки аеростата поміщають **балонет** — мішок з повітрям, з якого в міру піднімання повітря витискується льотним газом, що розширяється. Змійкові аеростати звичайно мають балонети.

У вересні 1933 року радянські льотчики Прокоф'єв, Бірнбаум і Годунов досягли світового рекорду висоти піднімання на стратостаті[1]) „СССР", який піднявся на висоту 19 *км*. 30 січня 1934 року Усискін, Васенко і Федосеєнко на стратостаті „Осоавиахим" піднялися на ще більшу висоту (близько 22 *км*). Цей політ закінчився аварією стратостата і трагічною загибеллю льотчиків. За кордоном Пікар у 1931 році досяг висоти 16 *км*.

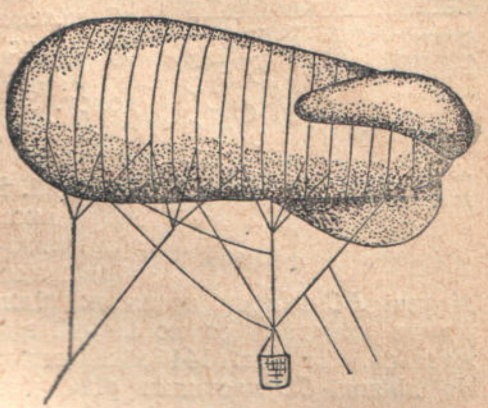

Рис. 143. Прив'язний (змійковий) аеростат.

§ 86. Теорема Бернуллі в застосуванні до руху повітря. Рух повітря багато в чому подібний до течіння нев'язкої рідини. Особливістю повітря, порівняно з рідинами, є більша стисливість повітря. Беручи цю особливість до уваги і повторюючи ті самі міркування, що наведені були в § 74 при виведенні рівняння Бернуллі, можна дістати видозмінене рівняння Бернуллі, в якому стисливість повітря заздалегідь передбачена. Виявляється, проте, що при не дуже великих швидкостях практично немає потреби вдаватися до цього уточнення рівняння Бернуллі. Дійсно, нехай течіння повітря порушене будьяким тілом. Швидкість повітря поблизу тіла позначимо через v, а на досить великій віддалі від нього — через v_0. За теоремою Бернуллі різниця тисків Δp, зумовлена різницею швидкостей, дорівнює

$$\Delta p = p_0 - p = \frac{\rho}{2}(v^2 - v_0^2). \qquad (3)$$

Нехай швидкість повітря далеко від тіла $v_0 = 0$, а швидкість поблизу нього $v = 100$ *м/сек*. Тоді різниця тисків $\Delta p = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{0{,}13 \cdot 100^2}{2} = 650\,кг/м^2$. Якщо тиск p_0 незбуреного потоку є атмосферний тиск 10 333 $кг/м^2$, то $\Delta p/p = 0{,}063$, і за законом Бойля такий самий стиск повітря. Отже, помилка, яку ми зробимо, вважаючи в цьому разі повітря нестисливим, буде дорівнювати тільки 6%. Швидкість 100 *м/сек* є швидкість 360 *км/год*. Ми бачимо, отже, що *в наближених розрахунках руху літака можна не брати до уваги стисливість повітря і користуватися найпростішою формою рівняння Бернуллі.* Зрозуміло, що в задачах балістики (вчення про політ снарядів), де доводиться мати справу з швидкостями близько 900 *м/сек*, брати до уваги стисливість повітря необхідно.

Рис. 144. Тіло, охоплюване лініями течії, рухається у нев'язкій рідині без опору.

§ 87. Парадокс Ейлера. Вище (§ 71) вже було сказано, що сили, які діють на тіло в потоці рідини чи газу, можуть бути або силами в'язкості, або силами інерції. В тому, що стосується сил в'язкості, теорія добре погоджується з дослідом: при не дуже великих швидкостях опір рухові тіла у в'язкій рідині, як того вимагає закон Ньютона (§ 66), пропорціональний лінійним розмірам тіла, швидкості руху і в'язкості рідини.

[1]) Стратостатом називають аеростат з герметично закритою гондолою, призначений для дослідження верхніх шарів атмосфери — стратосфери.

Але рух тіла у нев'язкій рідині (рис. 144) не створює в потоці жодних змін: швидкості частинок рідини на деякій віддалі позаду тіла залишаються такими самими, як перед ним, кількість руху рідини не змінюється, отже, і кількість руху тіла також повинна залишатися незмінною. Значить, на тіло з боку рідини не повинні діяти ніякі сили інерції. Ми приходимо, отже, до парадоксального висновку, що суперечить нашому повсякденному досвідові: *у нев'язкій рідині тіло, обхоплюване лініями течії, рухається без опору* (парадокс Ейлера).

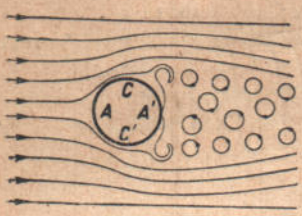

Рис. 145.

Пояснимо докладніше суть зазначеного парадоксу. Зустрічаючись з поверхнею тіла в точці A (рис. 144), частинки рідини змушені змінити початковий прямолінійний напрям руху на криволінійний. В зв'язку з цим вони діють на поверхню тіла з якоюсь силою; а тому в просторі AB тиск на поверхню тіла підвищується. На рис. 144 місця підвищеного тиску позначені знаками плюс. На ділянці BC напрям частинок рідини знову змінюється: тепер частинки рідини намагаються по інерції відійти від тіла. На цій ділянці тиск знижується. На рис. 144 місця зниженого тиску позначені знаком мінус. На ділянці CD частинки рідини знову будуть тиснути на поверхню тіла. Аналогічний розподіл сил буває і на нижній поверхні тіла. Очевидно, що в наслідок симетричного розподілу тисків рівнодійна сила дорівнює нулеві.

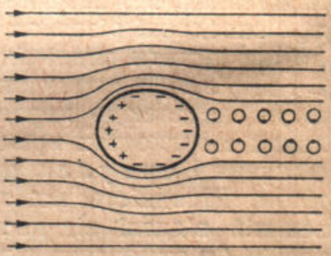

Рис. 146. Тіло, поміщене в потік реальної рідини або газу, зазнає опору рухові, позаду тіла виникають вихри, і тиск на передній поверхні залишається незрівноваженим.

§ 88. Аеродинамічні сили. Виникнення вихрів і лобовий опір. Головним завданням аеродинаміки є вивчення сил, які діють на тіла, що рухаються в повітрі. Ці сили називаються аеродинамічними силами.

Як було роз'яснено в попередньому параграфі, у нев'язкій рідині тіло не повинне було б зазнавати опору своєму рухові. Очевидно, що причину виникнення аеродинамічних сил треба шукати в тих ускладненнях картини руху, які спричинені внутрішнім тертям. Наведені тут рисунки потоків, які обтікають тіла різної форми (рис. 145, 146, 147), пояснюють суть справи. Ми відразу помічаємо, що рух не подібний до тієї картини, яка зображена на рис. 144. Лінії течії тут не замикаються позаду тіла;

Рис. 147. *a*) Потік, який щойно почав обтікати циліндр. Вихри ще не утворилися.
b) Потік, що обтікає циліндр невеликий час. Утворилося два вихри.
c) Потік, що обтікає циліндр довгий час. Вихри відриваються і відносяться потоком.

позаду тіла середовище (рідина або повітря) набуває вихрового руху. Тут тиск на передню поверхню тіла не зрівноважується більше тиском на задню поверхню: виникає деякий лобовий опір Q.

Причиною виникнення вихрів є внутрішнє тертя. Найближчий до поверхні тіла тонкий шар рідини або газу прилипає до тіла або, як кажуть, адсорбується тілом і залишається тому нерухомим. Товщина цього нерухомого шару надзвичайно мала — її можна порівнювати з діаметром молекули. Шари рідини або газу, які близько лежать, рухаються з швидкостями, що поступово зростають у міру віддалення від поверхні тіла, при чому шар, віддалений тільки на кілька міліметрів від поверхні тіла, рухається вже майже з такою самою швидкістю, як і всі шари вільного потоку, що лежать далі.

На рис. 145 показано, як відбувається рух у зоні, яка безпосередньо прилягає до поверхні тіла, що має форму циліндра. В точках A і A' тиск досягає найбільшої величини. У точках C і C' — він найменший. Під діянням різниці тисків рідина поблизу поверхні перетікає із місць з підвищеним тиском у місця низького тиску. А тому на ділянці $A'C$ рідина рухається в зворотному до потоку напрямі і поблизу точки C стикається з рідиною, яка обтікає ділянку AC. Це зіткнення шарів рідини, які рухаються назустріч один одному, приводить до утворення вихрів. Вихри, які відірвалися, утворюють позаду тіла вихровий шлях або вихрову „пелену“.

В наслідок утворення вихрів тиск на передню поверхню тіла не зрівноважується меншим щодо величини тиском на задню поверхню тіла.

А тому *завжди, коли рух тіла в середовищі супроводиться утворенням вихрів, тіло зазнає лобового опору, на подолання якого повинна бути витрачена робота* (рис. 146). Ця робота перетворюється на кінетичну енергію вихрів. В наслідок в'язкості вихри поступово розпадаються, і, отже, робота, витрачувана на подолання лобового опору, в кінцевому підсумку перетворюється на енергію хаотичного (теплового) руху частинок середовища.

Лобовий опір може бути обчислений за формулою:

$$Q = c\rho S v^2, \tag{4}$$

де ρ — густина середовища, S — площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до швидкості незбуреного потоку („міделевий переріз“), v — швидкість незбуреного потоку і c — числовий коефіцієнт, різний для тіл різних форм[1]). Якщо тіло має легкообтічну форму, то різниці тисків у

[1]) Зазначену формулу можна вивести методом розмірності, міркуючи для цього так. Виходимо з того, що лобовий опір повинен якось залежати від густини рідини, від швидкості руху і від розмірів та форми тіла. Припустимо (це буде правильно тільки для не дуже малих і не дуже великих швидкостей), що

$$Q = c \cdot \rho^x S^y v^z,$$

де x, y і z — якісь, поки невідомі нам додатні або від'ємні, цілі або дробові степені, а c — абстрактний числовий коефіцієнт. Позначаючи одиницю довжини через L, одиницю маси через M і одиницю часу через T та пригадавши розмірність сили Q, густини ρ, площі S і швидкості v, можемо написати, що розмірність лівої частини формули повинна бути такою самою, як і розмірність правої частини:

$$\frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^x (L^2)^y \left(\frac{L}{T}\right)^z.$$

Очевидно, що це співвідношення можна переписати так:

$$MLT^{-2} = M^x L^{2y-3x+z} T^{-z}.$$

Очевидно далі, що числа x, y і z повинні бути такими, щоб кожна з одиниць M, L і T входила в ліву і праву частини рівності з рівними показниками. На підставі цього маємо три таких рівняння:

з прирівнювання показників при M: $1 = x$;
з прирівнювання показників при L: $1 = 2y - 3x + z$;
з прирівнювання показників при T: $-2 = -z$.

Звідси:

$$x = 1;\ z = 2;\ y = 1.$$

Отже:

$$Q = c\rho S v^2.$$

різних ділянках його поверхні, створені різницею швидкості, будуть незначні: зустрічний рух шарів рідини поблизу поверхні буде слабкий; зриву струменів і завихрення рідини майже не буде, і опір, якого зазнає тіло, рухові буде невеликий. Навпаки, якщо тіло обмежене гострими кутами (наприклад, плоска пластинка, поставлена перпендикулярно до потоку), то різниці тисків, спричинені зміною швидкості при обтіканні гострих кутів, будуть великими, вихрів утворюється багато, і лобовий опір буде значним. На рис. 148 подані тіла різних розмірів і форм, які мають той самий опір.

Найбільш легкообтічною є витягнута, краплеподібна форма, така, якої надають усім сучасним дирижаблям. Тіло подібної форми майже зовсім не створює в потоці вихрів (рис. 149), і його опір викликається майже виключно силами тертя.

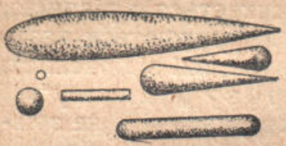

Рис. 148. Різні тіла, що мають однаковий лобовий опір.

Рис. 149. Тіло легкообтічної краплеподібної форми не утворює в потоці вихрів і рухається без опору.

§ 89. Опір в'язкості. Закон Стокса. Числа Рейнольдса. Крім сил динамічного тиску, які мають вихрове походження і тому посередньо зв'язані з в'язкістю, на тіло, поміщене в повітряний потік, діють також і безпосередньо сили в'язкості (§ 66). При малих швидкостях і великих поверхнях опір в'язкості має превалююче значення. Наприклад, при легкообтічній формі опір дирижабля зумовлений головне силами в'язкості.

Завдяки безпосередньому виявленню сил в'язкості наведена в попередньому параграфі формула для обчислення опору

$$Q = c\rho S v^2$$

справедлива тільки в деяких границях зміни швидкості. Дослід показує, що при малих швидкостях (близько 1 *м/сек*) опір пропорціональний не квадратові, а першому степеневі швидкості. При цьому виявляється ясно виражена залежність сили опору від коефіцієнта в'язкості η.

При достатньо малих швидкостях опір, що його зазнає тіло під час руху у в'язкому середовищі, підлягає законові Стокса.

Опір пропорціональний першому степеневі швидкості, пропорціональний коефіцієнтові в'язкості і пропорціональний лінійним розмірам тіла[1])

$$Q = 6\pi\eta r v. \tag{5}$$

При великих швидкостях, близьких до швидкості звука, опір зростає, очевидно, пропорціонально кубові швидкості. Під час руху тіла з швидкістю, більшою ніж швидкість звука, знову стає справедливим закон квадрата швидкості.

Ми бачимо, отже, що, бажаючи застосувати формулу

$$Q = c\rho S v^2$$

[1]) Подібно до формули опору для великих швидкостей цей закон можна вивести методом розмірності, якщо виходити з припущення, що при малих швидкостях у більшій мірі позначається коефіцієнт в'язкості середовища, ніж густина середовища:

$$Q = K\eta^x S^y v^z,$$

де K — абстрактний коефіцієнт. Якщо застосувати міркування, подане в попередній примітці, то виявляється, що $x = z = 1$, а $y = \frac{1}{2}$.

до яких завгодно швидкостей руху, ми повинні розглядати коефіцієнт опору c як деяку функцію коефіцієнта в'язкості середовища η, густини середовища ρ, швидкості руху v і лінійних розмірів тіла l. Можна цілком строго довести, що коефіцієнт опору c залежить тільки від числової величини відношення $\frac{\rho l v}{\eta}$. Чому це так, неважко зрозуміти: коефіцієнт опору c є абстрактним числом, а тому функціональна залежність c від величин η, ρ, l, v повинна зводитися до залежності від такої комбінації цих величин, яка сама являє абстрактне число; неважко переконатися, що відношення $\frac{\rho l v}{\eta}$ якраз і являє абстрактне число. Зазначене відношення називають числом Рейнольдса. Отже, *коефіцієнт опору являє* якусь, дотепер ще не цілком вияснену *функцію чисел Рейнольдса:*

$$c=f(R), \text{ де } R=\frac{lv\rho}{\eta}. \tag{6}$$

Якщо дослідним шляхом були визначені сили аеродинамічного опору для геометрично подібних тіл різних розмірів, наприклад, для літака і його моделі, то рівні коефіцієнти c дістанемо тільки в тому разі, коли досліди будуть проведені при рівних числах Рейнольдса. Ця умова створює дуже великі труднощі для техніки аеродинамічних вимірів: чим менші розміри l досліджуваної моделі, тим більшою повинна бути при інших рівних умовах швидкість v повітряного потоку, а при швидкостях, більших за 400 *м/сек*, не можна, як уже було відзначено, вважати повітря нестисливим. Швидкість сучасних винищувачів доходить до 500 *км/год* (приблизно 140 *м/сек*), отже, для випробовування в повітряному потоці втроє меншої щодо розмірів моделі цього літака довелося б провадити випробовування при швидкості повітря близько 400 *м/сек*. Такі швидкості в лабораторних установках недосяжні, а тому вважають за краще випробовувати моделі, які наближаються до справжніх розмірів літака; для цього доводиться випробовувати літак по частинах.

§ 90. Аеродинамічні труби. Аеродинамічна труба в найпростішому випадку є циліндр, всередині якого проганяють повітря з допомогою вентилятора, розміщеного біля одного з кінців. Біля другого кінця всередині труби поміщають випробовувану модель розміром, у кілька разів меншим від внутрішнього діаметра труби (рис. 150).

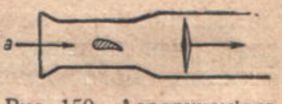

Рис. 150. Аеродинамічна труба прямої дії.

Аеродинамічна труба повинна створювати для моделі такі самі умови, в яких перебуває літак, що рухається в повітрі. Повітряний потік повинен набігати з однаковою швидкістю на різні частини моделі. Крім того, всі струмені повітряного потоку повинні переміщатися паралельно один одному: в потоці не повинно бути завихрювань. Щоб досягти цього, трубам надають своєрідної форми.

На рис. 150 і 151 зображені характерні форми аеродинамічних труб. На першому з них (рис. 150) зображена схема труби прямої дії: повітря засмоктується з приміщення, в якому встановлена труба, проганяється по ній, обдуваючи модель, і видаляється вентилятором з другого кінця.

Бувають також труби замкненого типу. Під час роботи в такій трубі циркулює та сама кількість повітря. Модель поміщають всередині труби у прямій частині, звичайно ближче до всисної частини вентилятора. Іноді замкнену трубу роблять з двох труб, розміщених симетрично з двох боків відносно головної труби; це має на меті зробити більш рівномірним надходження повітря до робочої частини. Труби прямої дії потребують великих приміщень для установки і, крім того, в них відбуваються великі втрати кінетичної енергії повітря. Цих хиб не мають

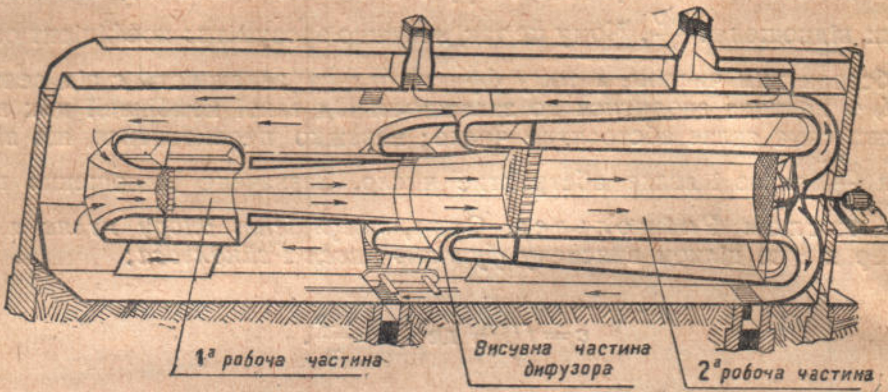

Рис. 151. Велика аеродинамічна труба „ЦАГИ" складається з двох робочих частин. Ліву частину труби можна відсунути. В цьому випадку випробовують у ширшій правій частині.

замкнені труби, але конструкція замкнених труб складніша і дорожча і, крім того, в них повітря при тривалій роботі труби дуже нагрівається в результаті тертя.

Як уже було зазначено в попередньому параграфі, швидкість повітряного потоку в трубі повинна бути в стільки разів більша за швидкість руху досліджуваного літака, у скільки разів лінійні розміри літака більші за лінійні розміри моделей.

Рис. 152. Вихрова пелена позаду несучої поверхні.

Рис. 153*a*. Швидкість повітря біля заднього окрайка крила має дуже значну величину (на рисунку показано згущенням ліній течії).

§ 91. Деякі відомості з теорії авіації. Крило літака. Про розрахунок крила. Літак або аероплан досить знайомий тепер кожному; не спиняючись на описі його зовнішнього вигляду, ми пояснимо тут призначення й будову окремих його деталей і головне розглянемо роль крила літака. Поперечний переріз крила має характерну форму, так званий профіль Жуковського (рис. 152). Під час руху в повітрі крило зазнає підіймальної сили і лобового опору. Але, як ми вияснили в § 88, сили, які діють на тіло в повітряному потоці, можуть виникнути тільки в наслідок взаємодіяння тіла, яке рухається, з створеними ним у потоці вихрами. Отже, і підіймальна сила і лобовий опір крила виникають в наслідок взаємодіяння з крилом якихось викликаних рухом крила вихрових систем. Таких вихрових систем три.

Рис. 153*b*. На початку руху біля заднього окрайка виникає „розгонний вихор".

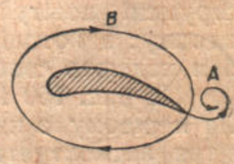

Рис. 154. Колове течіння крила (приєднаний вихор).

1) Вихрова пелена, що виникає позаду крила, як і позаду всякого тіла. Існуванням цієї вихрової пелени і силами в'язкості поясню-

ється частина лобового опору крила — так званий профільний опір Q_p. Ці вихри видно на рис. 152.

2. Швидкість потоку, який обтікає гострий задній окрайок крила, повинна мати дуже значну величину (рис. 153*a*), а тому на початку руху літака тут виникає вихор великої потужності, так званий розгонний вихор *A*, який захоплюється потоком, і після цього біля заднього окрайка утворюється точка зриву струменів (рис. 153*b*). Через те ж що в замкненій системі (крило — повітря) момент обертання повинен залишатися сталим, то *навколо крила встановлюється колове течіння B* (циркуляція повітря), момент обертання якого дорівнює моментові обертання надмірного або розгонного вихру *A* (рис. 154). Це циркуляційне течіння додається до течіння повітря назустріч крилу, в наслідок цього швидкість повітря над крилом стає більшою, ніж під крилом (рис. 155). На підставі теореми Бернуллі тиск повинен бути більшим там, де менша швидкість. А тому під крилом утворюється місце підвищеного тиску, над крилом — зниженого: крило набуває деякої підіймальної сили *P*. На рис. 156 зображено розподіл місць з підвищеним і зниженим тиском по крилу. З цього рисунка видно, що *підіймальна сила зумовлюється не стільки тиском на нижню частину крила, скільки всисною дією повітря на його верхню поверхню.*

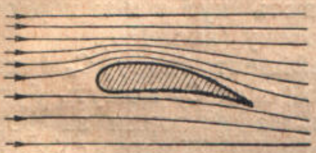

Рис. 155. Накладання циркуляції на зустрічний потік. Швидкість повітря, пропорціональна густині ліній течії, над крилом буде більша, ніж під крилом.

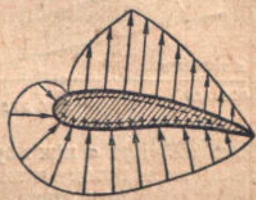

Рис. 156. Розподіл тиску на несучу поверхню.

3. Циркуляція навколо крила — несучий вихор — не закінчується біля його кінців, але збігає з них. Крім того, через знижений тиск над крилом повітря перетікає, як показано на рис. 157, з нижньої поверхні крила на верхню. Це течіння повітря, додаючись до вихру, який збігає з кінців крила, утворює позаду крила так звані вихрові вуси, або вихрові джгути. Робота, що витрачається на утворення

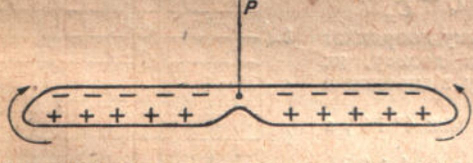

Рис. 157. Завдяки різниці тисків повітря перетікає з нижньої поверхні крила на верхню.

Рис. 158. Нормальний тиск розкладається на підіймальну силу *P* і індуктивний лобовий опір.

цих вихрів, зумовлює існування додаткового опору Q_i, який називають індуктивним опором. Індуктивний опір тим менший, чим більше відношення довжини крила до його ширини; це відношення називають видовженням крила. Підіймальна сила і лобовий опір, як показують дослід і теорія, пропорціональні квадратові швидкості руху v, площі несучої поверхні літака S і густині повітря ρ:

$$P = C_y \rho S v^2, \tag{7}$$

$$Q_p = C_p \rho S v^2, \tag{8}$$

$$Q_i = C_i \rho S v^2 \cdot \tag{9}$$

тут P означає підіймальну силу, а Q_p і Q_i — профільний і індуктивний лобові опори. Коефіцієнти C_y, C_p і C_i називають коефіцієнтами підіймальної сили і опору. Звичайно профільний і індуктивний опори крила розглядають разом, називаючи їх суму просто лобовим опором Q:

$$Q = Q_p + Q_i = (C_p + C_i)\,\rho S v^2 = C_x \rho S v^2. \tag{10}$$

Коефіцієнт $C_x = C_p + C_i$ називають коефіцієнтом лобового опору крила. Величини коефіцієнтів C_x і C_y залежать від форми крила і від його положення відносно потоку — кута атаки. Кутом атаки називають кут α між хордою крила і напрямом потоку (рис. 159).

Рис. 159. Кут α між хордою крила і напрямом потоку називається кутом атаки.

Теоретично коефіцієнт опору C_x і коефіцієнт підіймальної сили C_y можуть бути обчислені для крил різної форми за формулами, запропонованими Жуковським, Прандтлем і Чаплигіним з достатньо великим степенем точності. Експериментально коефіцієнти C_x і C_y визначають в аеродинамічних лабораторіях; з цією метою модель крила обдувають в аеродинамічній трубі. Результати досліду часто зображають графічно у вигляді так званих поляр Лілієнталя (рис. 160). По осі x відкладають коефіцієнт лобового опору C_x, по осі y — коефіцієнт підіймальної сили C_y. Ординати точок на кривій відповідають коефіцієнтам підіймальної сили і лобового опору при різних кутах атаки. Маючи поляру Лілієнталя для будьякого крила, можна визначити, якщо швидкість руху літака відома, підіймальну силу і лобовий опір, а також кут атаки α, при якому відношення $\varepsilon = \frac{C_y}{C_x}$ — якість крила — буде найбільшим. Для цього досить провести дотичну до поляри Лілієнталя з початку координат. На рис. 160 C_x і C_y являють собою коефіцієнти лобового опору і підіймальної сили всього літака, а не самого тільки крила.

Приклад розрахунку. Визначимо, користуючись полярою Лілієнталя (рис. 160), необхідну площу крила і необхідну потужність мотора для такого літака, вага якого $G = 4000$ *кг* і швидкість якого при найвигіднішому куті атаки $v = 216$ *км/год*.

Насамперед знайдемо найвигідніший кут атаки, тобто такий кут, при якому відношення $\frac{P}{Q} = \frac{C_y}{C_x}$ буде найбільшим. Для цього проведемо від початку координат дотичну до поляри Лілієнталя. Точка дотику, як легко зміркувати, відповідає найбільшому відношенню $\frac{C_y}{C_x}$. В нашому прикладі цей кут лежить між 4° і 6°, а відповідні цій точці C_x і C_y дорівнюють 0,04 і 0,37. Взявши до уваги, що підіймальна сила повинна зрівноважувати вагу літака

$$P = G = 4000 \text{ кг},$$

знаходимо площу крила S:

$$S = \frac{P}{C_y \rho v^2} = \frac{4000}{0{,}37 \cdot 0{,}13 \cdot 60^2} = 23 \text{ м}^2.$$

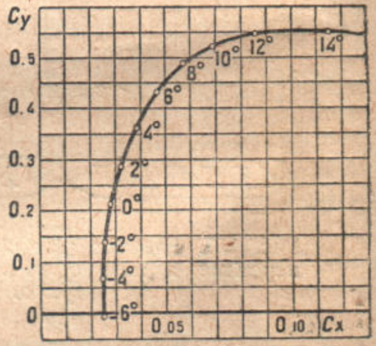

Рис. 160. Поляра Лілієнталя.

Знаючи необхідну площу крила, визначаємо опір літака Q:

$$Q = C_x \rho S v^2 = 0{,}04 \cdot 0{,}13 \cdot 23 \cdot 60^2 = 432 \text{ кг}.$$

Потужність мотора повинна бути принаймні такою, щоб кожної секунди могла бути витрачена робота, яка дорівнює добуткові сили Q на переміщення літака за 1 *сек* — v, отже, необхідна потужність мотора:

$$N = Qv = \frac{432 \cdot 60}{75} \approx 345 \text{ к. с.}$$

§ 92. Стійкість літака в повітрі. Одним з найскладніших питань теорії авіації є питання про стійкість літака в повітрі. Літак повинен сам повертатися до стану стійкого руху після того, як він був відхилений від цього стану на невеликий кут. Літак повинен також мати органи керування, які дозволяли б льотчикові повернути літак у стійке положення, якщо чомусь літак опиниться так сильно відхиленим від нього, що самовирівнювання стає неможливим.

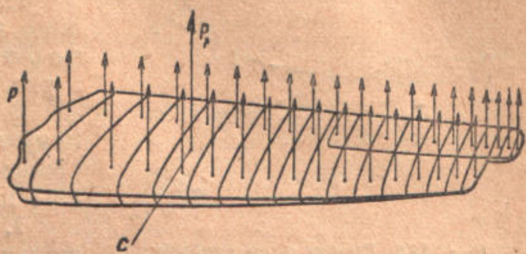

Рис. 161. На кожну ділянку несучої поверхні діє елементарна підіймальна сила p. Рівнодійна цих сил P_1 називається повною підіймальною силою, а її точка прикладання C — центром тиску.

Стійкість літака насамперед залежить від взаємного розміщення центра ваги і точки прикладання підіймальної сили.

Підіймальна сила розподілена по всій поверхні крил літака: на кожну частину крила діє елементарна підіймальна сила (рис. 161); усі ці підіймальні сили паралельні одна одній. Їх рівнодійна для обох крил є повною підіймальною силою літака, а точка прикладання цієї рівнодійної — центром тиску.

Для стійкого руху літака в повітрі необхідно, щоб центр ваги і центр тиску були на одній вертикальній прямій. Треба мати на увазі, що *положення центра тиску непостійне. Воно залежить від кута атаки і крену літака.* Крилам літака надають такої форми[1]), що при відхиленні літака від нормального положення виникає пара сил, яка повертає літак у вихідне положення.

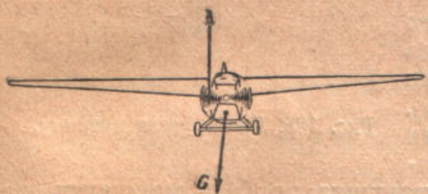

Рис. 162. Кут атаки крила, яке опустилося, збільшується, підіймальна сила його зростає, і пара, що виникла (підіймальна сила — вага), вирівнює літак.

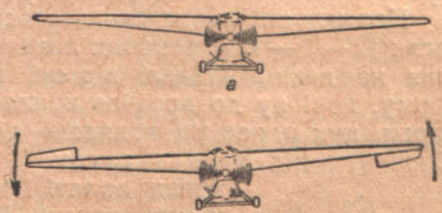

Рис. 163. Тиск повітря на елерони нахиляє або вирівнює літак.

При великих кутах крену льотчик удається до елеронів — додаткових крилець на кінцях крила — і штучно збільшує кут атаки крила, яке опустилося, опускаючи на ньому елерон. Елерон крила, яке піднялося, у той же час піднімається. Тиск повітря на елерони утворює пару, яка повертає літак у вихідне положення (рис. 163).

Для збереження поздовжньої стійкості служить стабілізатор — несуча поверхня на хвості літака. При підніманні або опусканні хвоста тиск повітря на стабілізатор повертає літак у вихідне положення.

[1]) Для цього кінці крил літака роблять трохи задертими вгору. При малих кренах кут атаки крила, яке опустилося, як легко зміркувати, збільшується, а тому зростає підіймальна сила цього крила; кут атаки крила, яке піднялося, зменшується — підіймальна сила цього крила меншає; в наслідок цього точка прикладання рівнодійної підіймальних сил обох крил — центр тиску — переміщується до крила, яке опустилося, і виникає пара сил, що випрямляє літак (рис. 162).

При великих кутах крену підіймальна сила крила, яке опустилося, переходить через максимум, що лежить близько 18°, починає меншати, і момент пари, яка утворилася, вже не буде повертати літак у вихідне положення. В цьому разі вирівнюють літак, як пояснено в тексті, з допомогою елеронів.

Кінець стабілізатора зроблено рухомим, і він служить **рулем глибини**, який в міру потреби можна опускати або піднімати, регулюючи цим напрям польоту літака у вертикальній площині (рис. 164).

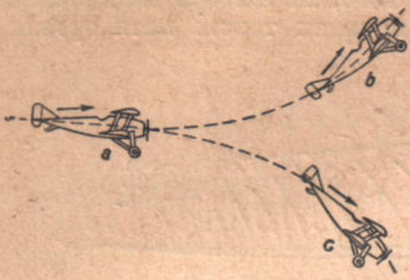

Рис. 164. Діяння руля глибини.

Напрям польоту в горизонтальній площині регулюють з допомогою **руля поворотів і кіля**, діяння яких зрозуміле з рис. 165.

§ 93. Гвинт (пропелер). Сила тяги і потужність пропелера. Пропелер або гвинт вживається в найрізноманітніших випадках. Існують гвинти таких типів.

1. **Гребний гвинт** — гвинт, якого вживають для утворення тяги на літаках, дирижаблях (рис. 166) і кораблях.

2. **Гвинт-двигун** — вітряк і робоче колесо пропелерної турбіни; його призначення—перетворювати енергію водяного або повітряного потоку на механічну роботу.

3. **Вентилятор** — гвинт, вживаний для утворення повітряного потоку.

4. **Анемометр** — гвинт, вживаний для визначення швидкості потоку за швидкістю обертання.

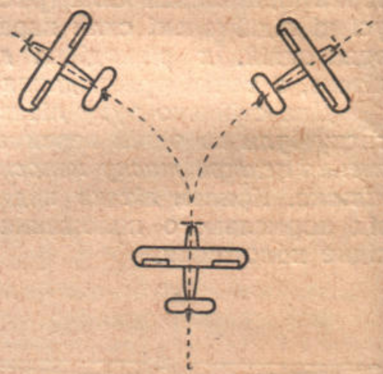
Рис. 165. Діяння руля напряму.

Основи теорії гвинта однакові в усіх випадках, але методи проектування їх різні, бо, крім аеродинамічних міркувань, доводиться зважати на міцність і граничні розміри.

Нормальний гвинт складається з певного числа (2 — 3 — 4) однакових лопатей, переріз яких на деякій віддалі від осі гвинта має форму, подібну до профіля крила (рис. 166). Хорди цих перерізів нахилені до площини обертання під якимсь кутом θ. Кут установки лопаті і відносна товщина профіля меншають на кінець лопаті. Шлях, який гвинт проходить за один оборот, рухаючись у середовищі, як у твердому тілі, називають **відстанню гвинта** H. Пропелер працює в податливому середовищі, а тому шлях, пройдений ним у дійсності за один оборот — **поступ гвинта** H_a, менший відстані (рис. 167). Різниця між відстанню і поступом називається **ковзанням гвинта**: $S = H - H_a$.

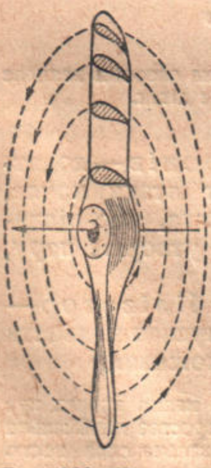
Рис. 166. Повітряний гвинт — пропелер.

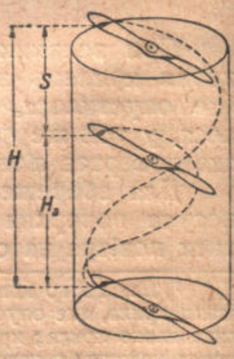

Рис. 167. Відстань — H, поступ — H_a і ковзання — S гвинта.

Тяга повітряного гвинта утворюється тим, що *гвинт приводить до вихрового руху і відкидає назад деяку масу повітря. Сила тяги гвинта при цьому дорівнює зміні кількості руху повітря за одну секунду.*

В наслідок роботи гвинта перед ним утворюється знижений тиск, позаду нього — підвищений, і повітря, засмоктуючись передньою частиною гвинта і відштовхуючись його задньою частиною, половину додаткової швидкості набуває перед пропелером і половину — за ним.

Якщо швидкість повітря, яке обтікає гвинт, дорівнює $V+v$, де V — швидкість поступного руху гвинта і v — половина додаткової швидкості, що її гвинт надає повітрю, і якщо радіус гвинта є r, то відкинута ним за 1 *сек* маса повітря $m=\pi r^2 \rho (V+v)$, а сила тяги гвинта F (визначувана зміною кількості руху повітря):

$$F=2mv=2\pi r^2 \rho (V+v) v. \tag{11}$$

Потужність, використовувану гвинтом, знайдемо, помноживши силу тяги гвинта F на шлях, що його він проходить за 1 *сек*, тобто на швидкість руху гвинта відносно повітря:

$$N=F(V+v). \tag{12}$$

Частина цієї потужності FV, яку називають корисною потужністю, витрачається на поступний рух гвинта, частина Fv — втрачувана потужність — на надання відкидуваному повітрю кінетичної енергії.

Відношення корисної потужності до витрачуваної називається коефіцієнтом корисної дії гвинта η:

$$\eta=\frac{FV}{F(V+v)}=\frac{V}{V+v}. \tag{13}$$

Інакше витрачувану потужність можна виразити як добуток моменту M пари, яка гальмує обертання гвинта, на його кутову швидкість; тоді

$$\eta=\frac{FV}{M\omega}. \tag{14}$$

Неважко зміркувати, що сила тяги гвинта буде найбільшою, коли гвинт працює, не переміщуючись поступно ($V=0$; ковзання S дорівнює відстані H). Рівною нулеві тяга стає тоді, коли швидкість повітря позаду гвинта і перед ним та сама ($v=0$, ковзання $S=0$). В обох цих випадках коефіцієнт корисної дії $\eta=0$. Цей висновок можна безпосередньо зробити з написаних нами формул.

У викладеній теорії „ідеального" гвинта не взято до уваги вихровий рух повітря; а тому дані аеродинамічних випробувань гвинтів трохи відрізняються від величин, здобутих з допомогою наведених вище формул.

Для того щоб утворити певну тягу, гвинт повинен відкидати або велику масу повітря $M=\pi R^2 \rho (V+v_1)$ з малою швидкістю v_1, або малу масу $m=\pi r^2 \rho (V+v_2)$ з великою швидкістю v_2; легко зміркувати, що в першому випадку кінетична енергія, надавана відкинутому повітрю $\frac{Mv_1^2}{2}$, буде менша, ніж у другому $\frac{mv_2^2}{2}$, а тому вигідніше користуватися гвинтами великого діаметра і великої відстані.

Робота гвинта залежить також від форми лопаті. Розглянемо на рис. 168 сили, які діють на елемент лопаті. Тут V — швидкість поступного руху гвинта, ωr — колова швидкість обертання, V_0 — рівнодійна цих швидкостей і φ — кут між цією рівнодійною і площиною обертання. (Вісь, навколо якої обертається гвинт, зображена лінією OO'). Кут атаки α лопаті дорівнює різниці між кутом установки θ і кутом φ: $\alpha=\theta-\varphi$. Елемент лопаті дає, подібно до несучої поверхні, підіймальну силу P і опір Q в напрямах перпендикулярному і паралельному швидкості зустрічного потоку повітря. Ці сили можна розкласти на тягу F і гальмування гвинта T. Для того щоб обертати пропелер, треба подолати момент гальмуючої сили. Тяга буде найбільшою і гальмування найменшим, коли кут атаки буде найвигіднішим: $\alpha = 4°$. Але швидкість обертання ωr збільшується на кінець пропелера, кут φ зменшується, і для того, щоб α залишався тим самим, кут установки θ також повинен зменшуватися на кінець лопаті.

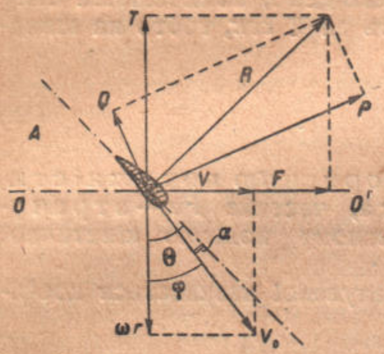

Рис. 168. Сили, які діють на лопать гвинта.

P — підіймальна сила; Q — опір; F — сила тяги; T — гальмування; V — швидкість поступного руху літака; ωr — лінійна швидкість обертання лопаті; θ — кут установки; φ — кут між дійсним напрямом руху лопаті і площиною обертання; α — кут атаки.

В тому разі, коли швидкість літака стає надто великою, гвинт за один оборот може пройти віддаль, більшу за відстань (ковзання — негативне); кут атаки лопаті стане від'ємним, і гвинт буде працювати спершу як гальмо, а потім як вітряк. Цей випадок ми маємо при роботі вітряного двигуна або пропелерної турбіни.

З усього зазначеного вище можна зробити такі висновки: з аеродинамічного погляду найвигіднішим буде гвинт великого діаметра з вузькою лопаттю, з великим кутом установки, що обертається з великою швидкістю. Але міркування міцності не дозволяють при будуванні повітряних гвинтів іти в цьому напрямі надто далеко.

Сила тяги гвинта використовується на деяких літальних апаратах як підіймальна сила. Такі апарати називаються гелікоптерами. Різних гелікоптерів тепер збудовано дуже багато, але придатної для експлуатації конструкції ще немає.

§ 94. Безмоторне літання. Планеризм. Крило літака набуває підіймальної сили за рахунок поступного руху, що його надає літакові гвинтомоторна група. Але можливий політ на літаку і без мотора. Такий політ називають плануванням, а безмоторний літак — планером. Принципіально будова й керування планером нічим не відрізняються від будови і керування літаком. Щоб почати політ, планер потребує запуску. Запускають планер подібно до змія — проти вітру. Планер ставлять на вершині або на схилі горба чи гори, строго проти вітру, льотчик сідає на своє місце, 3—4 чоловіка з стартової команди задержують планер за костиль хвоста, по одному або по два за кожне крило, а 6—8 чоловік за дві віроьвки розтягають товстий гумовий джгут, вдягнений на гачок біля носа планера. Коли джгут досить розтягнутий, ті, що держать планер, на команду відпускають його, і планер під діянням розтягнутої гуми, пробігши 10—12 *м*, злітає вгору. Джгут у цей час сам зіскакує з гака.

Рис. 169. Отто Лілієнталь з своїм першим планером.

Надавши маленького кута планування, злегка опустивши ніс планера, льотчик підтримує його стійкість рулями й елеронами, і планер по похилій ковзає — „планує“ в долину. Сили, які діють на планер під час польоту, зображені на рис. 170.

Якщо планер зустріне висхідні течії повітря, — такі течії звичайно завжди бувають під час вітряної погоди біля гірських схилів — і вертикальна складова швидкості п і д н я т т я п о в і т р я буде більша вертикальної складової швидкості з н и ж е н н я п л а н е р а, то планер може літати без зниження або підніматися вгору (ширяти). Максимальна висота польоту на планері, досягнута таким способом, становить 2000 *м*.

Щоб був можливий ширяючий політ, вертикальна швидкість планера повинна бути незначною, але це можливо тільки тоді, коли кут планування малий. Тоді буде малою і складова Q' сили тяжіння літака, а це можливо тільки в тому разі, коли малий лобовий опір Q, бо інакше сили, які діють на планер, не будуть взаємно зрівноважуватися. З цією метою планерові надають найвигідніших аеродинамічних форм: ставлять крила з великим видовженням для зменшення індуктивного лобового опору і, щоб зменшити мінімальну швидкість польоту планера, збільшують площу крил так, щоб навантаження на 1 $м^2$ не перевищувало 15 — 17 *кг**.

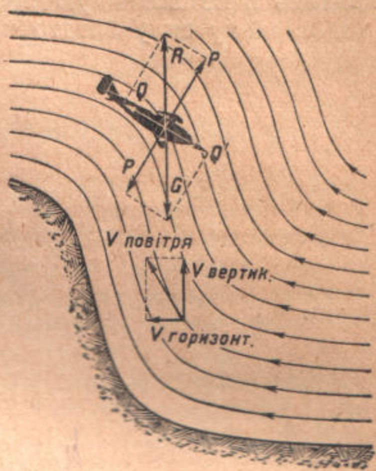

Рис. 170. Сили, які діють на планер при польоті з рівномірною швидкістю. Вага G зрівноважується рівнодійною R підіймальної сили P і лобового опору Q.

Через малу швидкість при злітанні і посадці планер може обходитися без шкідливого в аеродинамічному відношенні шасі, яке у планера замінює одно напівзаховане в фюзеляжі колесо або лижа.

Польоти на планерах дають велику користь при відшукуванні найвигідніших в аеродинамічному відношенні і найстійкіших у польоті форм літака, а також при підготовці пілотів.

Крім того, планеризм є корисним і захоплюючим видом спорту.

§ 95. **Дирижабль.** Описана в § 85 повітряна куля (аеростат) летить за напрямом вітру і, попавши в швидку повітряну течію, може пройти значну віддаль.

Рис. 171. Дирижабль.

Можна зробити аеростат керованим, встановивши на ньому мотор з повітряним гвинтом. Таким аеростатам надають легкообтічної форми (рис. 171). Керовані аеростати називаються д и р и ж а б л я м и.

Дирижаблі поділяються на три групи: 1) м'я к і, оболонка яких зберігає певну форму через тиск газу, що її наповнює, 2) н а п і в ж о р с т к і, що мають опорну раму, яка перешкоджає оболонці згинатися в поперечному напрямі, і, нарешті, 3) ж о р с т к і, що мають твердий остов з легкого металу, обтягнутий або бавовняною тканиною (дирижаблі системи Ц е п п е л і н а) або тонкими листами дуралюміну (англійські й американські системи).

Розміри одного з останніх німецьких дирижаблів LZ-127 такі: об'єм водню, що міститься в 17 „мішках", 105 000 $м^3$; довжина — 237 *м*; найбільший діаметр — 30,5 *м*; переріз — правильний 28-кутник; 5 моторних гондол, кожна з одним пропелером; загальна потужність — 2650 *к. с.*; максимальна швидкість — 125 *км/год*, ходова швидкість — 111 *км/год*, підіймальна сила дирижабля — 30 000 *кг**; корисний вантаж: на 10 000 *км* шляху — 15 000 *кг**.

Через те що вага повітряного корабля в дорозі ввесь час зменшується в наслідок використання пального, доводиться поступово випускати водень.

Щоб уникнути надто великих втрат порівняно дорогого водню, на LZ-127 вживають газоподібне пальне (блаугаз), густина якого дорівнює приблизно густині повітря. Це паливо дає подвійну перевагу: зберігає водень і, не збільшуючи ваги корабля, дозволяє використовувати його підіймальну силу багато корисніше.