

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та  
природокористування  
Навчально-науковий інститут агроєкології та землеустрою  
Кафедра хімії та фізики

**05-06-134М**

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання практичних і самостійних робіт із навчальної дисципліни **«Фізика»** (розділ «Механіка») для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» галузі знань 14 «Електрична інженерія»; «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань «Електрична інженерія»; «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» галузі знань 17 «Електроніка, автоматизація та електронні комунікації» денної, заочної та дистанційної форм навчання денної, заочної та дистанційної форм навчання

Рекомендовано  
науково-методичною радою з якості  
навчально-наукового інституту  
енергетики,  
автоматики та водного господарства  
Протокол № 5 від 25 січня 2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних і самостійних робіт із навчальної дисципліни «Фізика» (розділ «Механіка») для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Теплоенергетика» спеціальності 144 «Теплоенергетика» галузі знань 14 «Електрична інженерія»; «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» галузі знань 17 «Електроніка, автоматизація та електронні комунікації» денної, заочної та дистанційної форм навчання. [Електронне видання] / Гаєвський В. Р., Гаращенко О. В., Соляк Л. В., Мороз М. В. – Рівне : НУВГП, 2024. – 50 с.

Укладачі: Гаєвський В. Р., доцент кафедри хімії та фізики; Гаращенко О. В., доцент кафедри хімії та фізики; Соляк Л.В., старший викладач кафедри хімії та фізики, Мороз М. В., професор кафедри хімії та фізики.

Відповідальний за випуск: Мороз М. В., доктор хім. наук, професор, завідувач кафедри хімії та фізики.

Керівник групи забезпечення спеціальності 144 «Теплоенергетика»

Костюк О. П.

Керівник групи забезпечення спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка"

Василець С. В.

Керівник групи забезпечення спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»

Христюк А. О.

© В. Р. Гаєвський, О. В. Гаращенко,  
Л. В. Соляк, М. В. Мороз, 2024  
© НУВГП, 2024

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b>		4
<b>1</b>	<b>Основні закони та співвідношення</b>	
1.1	Кінематика	5
1.2	Динаміка	7
1.3	Робота, енергія, потужність	10
1.4	Механіка рідин і газів	12
1.5	Елементи теорії відносності	13
<b>2</b>	<b>Приклади розв'язування задач</b>	
2.1	Кінематика	14
2.2	Динаміка	18
2.3	Робота, енергія, потужність	26
2.4	Механіка рідин і газів	30
2.5	Елементи теорії відносності	33
<b>3</b>	<b>Задачі для самостійного розв'язування</b>	
3.1	Кінематика	35
3.2	Динаміка	37
3.3	Робота, енергія, потужність	42
3.4	Механіка рідин і газів	45
3.5	Елементи теорії відносності	46
<b>4</b>	<b>Додатки</b>	
4.1	Фундаментальні фізичні сталі	48
4.2	Густина деяких речовин	48
4.3	Префікси для утворення кратних одиниць	48
4.4	Зв'язок деяких позасистемних одиниць вимірювання з СІ	49
4.5	Одиниці вимірювання деяких фізичних величин	49
<b>5</b>	<b>Список використаної і рекомендованої літератури</b>	50

## ПЕРЕДМОВА

Мета методичних вказівок (МВ) – навчити студентів використовувати фізичні закони, формули і співвідношення з розділу механіка для розв’язування проблем не тільки з фізики а й інженерної техніки. Задачі розділені на: кінематику, динаміку, роботу – енергію – потужність, механіку рідин і газів та елементи теорії відносності. У МВ вказані основні методичні етапи розв’язання задач з фізики

Включені у МВ задачі є типовими, що часто зустрічаються як у довідниках з фізики, так і у інженерних розрахунках. Приведена певна кількість задач з розв’язками і числовими результатами. У МВ міститься допоміжний матеріал у вигляді додатків з табличними даними, одиницями вимірювань фізичних величин та ін. При необхідності, задачі супроводжуються рисунками, що полегшує їх розв’язання. Деякі задачі є підвищеної складності і вони відмічені знаком (\*).

На початку кожного розділу приведена теоретична частина, у якій приводяться основні закони і співвідношення, а також визначення основних процесів та явищ. Така теоретична вступна частина до кожного розділу дає можливість у межах МВ знайти матеріал, необхідний для розв’язання тієї чи іншої задачі. Для розв’язання значної кількості задач не є необхідним застосування вищої математики, але деяка кількість задач, вимагає використання вищої математики і у таких випадках необхідно використовувати довідковий математичний матеріал.

Література, приведена в кінці МВ, може бути використана для більш глибокого розуміння фізичних явищ і процесів, що лежать в основі даної задачі.

# 1. Основні закони та співвідношення

## 1.1. Кінематика

- **Кінематичне рівняння руху матеріальної точки**

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ (векторний спосіб),}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \text{ (координатний спосіб),}$$

$$S = S(t) \text{ (натуральний спосіб),}$$

де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  – радіус-вектор точки,  $x, y, z$  – його проекції на осі координат,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти осей,  $S$  – шлях.

- **Швидкість точки**

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \text{ – середня швидкість,}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ – миттєва швидкість}$$

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \text{ (векторна форма)}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \text{ (модуль швидкості),}$$

$$\text{де } v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}.$$

$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$  – модуль середньої швидкості (для прямолінійного руху)

$$v = \frac{dS}{dt} \text{ – модуль миттєвої швидкості.}$$

- **Прискорення точки**

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \text{ – середнє прискорення;}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{ – миттєве прискорення;}$$

**для криволінійного руху:**

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \text{ – повне прискорення,}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} \text{ – тангенціальне прискорення,}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n} \text{ – нормальне прискорення,}$$

де  $\vec{\tau}$  – одиничний вектор дотичної до траєкторії,  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до траєкторії,  $R$  – радіус кривизни траєкторії.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ – модуль повного прискорення.}$$

$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  – модуль середнього прискорення (для прямолінійного руху),

$a = \frac{dv}{dt}$  – модуль миттєвого прискорення (для прямолінійного руху).

• **Формула шляху для рівномірного руху**  
( $v = \text{const}$ )

$$S = vt.$$

• **Формули швидкості та шляху для рівнозмінного руху** ( $a = \text{const}$ )

$$v = v_0 \pm at$$

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

(знак «+» відноситься до рівноприскореного, а «-» – для рівносповільненого рухів; в останньому випадку слід враховувати, що в певний момент часу напрямок руху точки може змінюватись).

• **Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу**

$$\varphi = \varphi(t).$$

- **Модуль кутової швидкості (середньої та миттєвої)**

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}; \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

- **Модуль кутового прискорення (середнього та миттєвого)**

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}; \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

- **Формула кута повороту для рівномірного руху по колу ( $\omega = \text{const}$ )**

$$\varphi = \omega t$$

- **Формули кутової швидкості та кута повороту для рівнозмінного руху по колу ( $\varepsilon = \text{const}$ )**

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

(знак “+” відноситься до рівноприскореного, а “-” – до рівносповільненого обертання).

- **Зв’язок між лінійними і кутовими характеристиками руху точки по колу**

$$v = \omega \cdot R; a_r = \varepsilon \cdot R; a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}, \text{ де } R \text{ – радіус кола.}$$

- **Зв’язок між кутовою швидкістю, періодом і частотою обертання**

$$\omega = 2\pi \nu, \omega = \frac{2\pi}{T}; T = \frac{1}{\nu}.$$

$\nu$  – частота,  $T$  – період.

## 1.2 Динаміка

- **Імпульс матеріальної точки**

$$\vec{p} = m\vec{v},$$

де  $m$  – маса точки,  $\vec{v}$  – її швидкість.

- **Другий закон Ньютона (три форми запису)**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$$\vec{F}dt = d\vec{p},$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

де  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  – рівнодійна всіх сил, що діють на точку,  $\vec{F}dt$  – імпульс сили.

- **Третій закон Ньютона**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де  $\vec{F}_{12}$  та  $\vec{F}_{21}$  - сили взаємодії двох матеріальних точок.

- **Сили, що розглядаються в механіці**

$$\vec{F} = m\vec{g} \text{ – сила тяжіння,}$$

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ – модуль сили гравітаційної взаємодії (закон}$$

всесвітнього тяжіння),

де:  $g$  – прискорення вільного падіння;  $G$  – гравітаційна стала;

$m_1$  та  $m_2$  – маси взаємодіючих тіл;  $r$  – відстань між ними.

$$F_{mp} = \mu N \text{ – модуль сили тертя ковзання,}$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя,  $N$  – сила нормального тиску.

$F_x = -kx$  – проекція сили пружності на напрямок деформації (закон Гука),

де  $k$  – жорсткість,  $x$  – абсолютна деформація.

При послідовному з'єднанні пружин

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n},$$

При паралельному з'єднанні пружин

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

- **Закон збереження імпульсу замкненої механічної системи**



$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const} .$$

зокрема, для системи двох взаємодіючих тіл

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 ,$$

де  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  – швидкості тіл до взаємодії,  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  – після взаємодії.

- **Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі  $z$**

$$M_z = I_z \varepsilon ,$$

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} ,$$

де  $M_z$  – результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі  $z$ ;  $I_z$  – момент інерції тіла відносно цієї осі;

$L_z = I_z \omega$  – момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі  $z$ .

- **Момент інерції матеріальної точки**

$$I_{zT} = mr^2 .$$

- **Момент інерції системи матеріальних точок та твердого тіла**

$$I_{zC} = \sum_i m_i r_i^2 , \quad I_{z.m.m.} = \int_V \rho r^2 dV ;$$

де  $\rho$  – густина тіла.

- **Момент інерції деяких тіл відносно осі, що проходить через центр мас:**

а) стрижня масою  $m$  і довжиною  $l$  відносно осі, перпендикулярної до стрижня

$$I_C = \frac{1}{12} ml^2 ;$$

б) обруча (тонкостінного циліндра) відносно осі, що співпадає з віссю циліндра

$$I_C = mR^2 ;$$

в) диска (суцільного циліндра) відносно осі, що співпадає з віссю циліндра

$$I_C = \frac{1}{2} mR^2 ;$$

г) суцільної кулі радіусом  $R$

$$I_c = \frac{2}{5} mR^2;$$

де  $m$  – маса тіла,  $R$  – його радіус.

- **Теорема Штейнера**

$$I_z = I_c + md^2,$$

де:  $I_z$  – момент інерції тіла відносно осі  $Z$ ;  $I_c$  – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас паралельно осі  $z$ ;  $d$  – відстань між осями.

- **Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи тіл, що обертаються відносно нерухомої осі**

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

де  $I_1, \omega_1$  та  $I_2, \omega_2$  – моменти інерції системи тіл та кутові швидкості в початковий та кінцевий моменти часу.

### 1.3 Робота, енергія, потужність

- **Робота постійної сили**

$$A = |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cos \alpha,$$

де  $\vec{F}$  – сила,  $\Delta\vec{r}$  – переміщення,  $\alpha$  – кут між  $\vec{F}$  і  $\Delta\vec{r}$ .

- **Робота змінної сили**

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS,$$

де  $F_S = F \cos \alpha$  – проекція вектора  $\vec{F}$  на напрямок переміщення.

- **Потужність (середня і миттєва)**

$$N_{cp} = \frac{A}{t}; \quad N = \frac{dA}{dt}.$$

- **Зв'язок між потужністю двигуна, силою тяги і швидкістю руху**

$$N = F \cdot v.$$

- **Кінетична енергія поступального руху**

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

де  $p$  – імпульс тіла,  $m$  – його маса,  $v$  – швидкість.

- **Кінетична енергія обертального руху**

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

де  $I$  – момент інерції тіла,  $\omega$  – кутова швидкість.

- **Кінетична енергія тіла, що котиться**

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

- **Теорема про зміну кінетичної енергії**

$$A = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k,$$

де  $A$  – робота рівнодійної всіх сил, що діють на тіло.

- **Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії**

$$W_p = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

де  $G$  – гравітаційна стала,  $m_1, m_2$  – маси взаємодіючих тіл,  $r$  – відстань між ними.

- **Потенціальна енергія тіла поблизу поверхні Землі**

$$W_n = mgh.$$

- **Потенціальна енергія пружно деформованого тіла**

$$W_p = \frac{kx^2}{2},$$

де  $k$  – жорсткість,  $x$  – величина абсолютної деформації.

- **Теорема про зміну потенціальної енергії**

$$W_{p2} - W_{p1} = \Delta W = -A_{nom},$$

де  $A_{nom}$  – робота потенціальних сил (зокрема сили пружності та гравітаційної сили).

- **Повна механічна енергія**

$$W_{mex} = W_k + W_p.$$

- **Закон збереження механічної енергії консервативної системи взаємодіючих тіл**

$$W_{\text{мех}} = W_k + W_p = \text{const} .$$

- Застосування законів збереження енергії та імпульсу до абсолютно пружного центрального зіткнення та абсолютно непружного центрального зіткнення:

- для абсолютно пружного

$$\vec{v}_1' = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}; \vec{v}_2' = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

де  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  – швидкості тіл до зіткнення;  $\vec{v}_1'$  і  $\vec{v}_2'$  – після зіткнення.

- для абсолютно непружного

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

де  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  – швидкості тіл до зіткнення;  $\vec{v}'$  – спільна швидкість тіл після зіткнення.

#### 1.4. Механіка рідин і газів

- Рівняння нерозривності для нестисливої рідини

$$v_1 \cdot \Delta S_1 = v_2 \cdot \Delta S_2,$$

де  $v$  – швидкість руху рідини в даному перерізі,  $\Delta S$  – його площа.

- Рівняння Бернуллі для стаціонарної течії ідеальної рідини

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} ,$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $v$  – швидкість руху рідини у даному перерізі трубки,  $h$  – висота даного перерізу трубки над деяким рівнем,  $p$  – тиск.

- Формула Торрічеллі

$$v = \sqrt{2gh} ,$$

де  $v$  – швидкість витікання рідини через отвір у стінці або дні посудини,  $h$  – висота поверхні рідини над отвором.

- Формула Пуазейля

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 \eta l},$$

де  $V$  – об'єм рідини, що протікає за час  $t$  через трубку радіусом  $r$  і довжиною  $l$ ;  $\Delta p$  – різниця тисків на кінцях трубки.

- **Формула Стокса**

$$F = 6\pi r \eta v$$

де  $F$  – сила в'язкого тертя, що діє на кульку радіусом  $r$ , яка рухається зі швидкістю  $v$  у рідині;  $\eta$  – в'язкість рідини.

## 1.5 Елементи теорії відносності

- **Релятивістське скорочення розмірів рухомих тіл**

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

де  $l_0$  – власна довжина стрижня,  $l$  – довжина стрижня в системі відліку, відносно якої він рухається зі швидкістю  $v$ ;  $c$  – швидкість світла у вакуумі.

- **Релятивістське сповільнення плину часу**

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де  $\tau_0$  – тривалість події у власній системі відліку,  $\tau$  – тривалість події у системі відліку, відносно якої годинник рухається зі швидкістю  $v$ .

- **Релятивістський імпульс**

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

де  $m$  – маса тіла,  $\vec{v}$  – його швидкість.

- **Основне рівняння динаміки у релятивістській механіці**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ або } \vec{F} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

- **Релятивістська енергія тіла.**

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- **Енергія спокою тіла**

$$E_0 = mc^2.$$

- **Кінетична енергія в релятивістській механіці**

$$E_k = E - E_0,$$

або

$$E_k = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

- **Взаємозв'язок між повною енергією та імпульсом у релятивістській механіці**

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

## 2. Приклади розв'язування задач

### 2.1 Кінематика

#### Вказівки до розв'язування задач з кінематики

1. При розв'язуванні задач з кінематики важливо, перш за все, встановити характер руху (прямолінійний чи криволінійний, наприклад, по колу; рівномірний чи рівнозмінний), щоб для його опису використати відповідні формули.

2. Необхідно уважно слідкувати, з яким типом величин і співвідношень маємо справу: векторним чи скалярним.

3. Часто буває корисним принцип незалежності рухів, коли складний рух можна розкласти на прості і розглядати їх незалежно.

**Приклад 1.** Залежність шляху від часу визначається рівнянням  $S = A + Bt + Ct^2$ , де  $A=3\text{м}$ ,  $B=3\text{м/с}$ ,  $C=2\text{м/с}^2$ . Знайти середню швидкість та середнє прискорення за другу секунду руху.

Дано:

$$S = A + Bt + Ct^2$$

$$A = 3\text{ м}$$

$$B = 3\text{ м/с}$$

$$C = 2\text{ м/с}^2$$

$$t_2 = 2\text{ с}$$

**Розв'язання**

Закон зміни швидкості:

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = (A + Bt + Ct^2)' = B + 2Ct$$

Середня

швидкість:

---


$$\langle v \rangle, \langle a \rangle - ? \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1},$$

де  $S_2$  - шлях, який пройшло тіло в

кінці другої секунди  $t_2 = 2\text{ с}$ :

$$S_2 = A + B \cdot 2 + C \cdot 2^2 = A + 2B + 4C;$$

$S_1$  - шлях, який пройшло тіло в кінці першої секунди  $t_1 = 1\text{ с}$ :

$$S_1 = A + B \cdot 1 + C \cdot 1^2 = A + B + C.$$

$$\langle v \rangle = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{A + 2B + 4C - A - B - C}{2 - 1} = B + 3C = 3 + 3 \cdot 2 = 9\text{ м/с}$$

Закон зміни прискорення:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(B + 2Ct)}{dt} = 2C = 2 \cdot 2 = 4\text{ м/с}^2 \quad - \text{ прискорення } \varepsilon$$

величиною сталою.

$$\text{Відповідь: } \langle v \rangle = 9\text{ м/с}; \quad a = 4\text{ м/с}^2.$$

**Приклад 2.** Під яким кутом  $\alpha$  до горизонту треба кинути тіло, щоб максимальна висота підйому дорівнювала дальності польоту?

Дано:

$$h_{\max} = x_{\max}$$

### Розв'язання

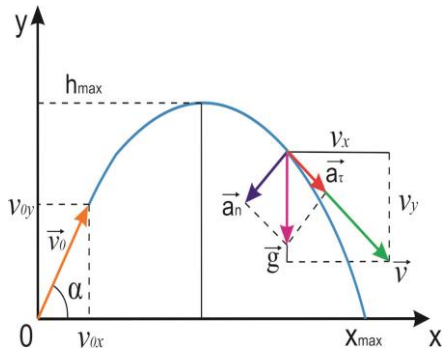
---

$\alpha - ?$

Максимальна висота підйому:

$$h_{\max} = \frac{gt_1^2}{2}, \text{ де } t_1 - \text{ час}$$

польоту до найвищої точки траєкторії, де  $v_{0y} = 0$ .



Час  $t_1$  визначимо з виразу для складової швидкості  $v_y$  у найвищій точці підйому, де  $v_y = 0$ :

$$v_{0y} - gt_1 = v_y = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{Тоді } h_{\max} = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\text{Дальність польоту: } x_{\max} = v_{0x} \cdot 2t_1,$$

де  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ;  $2t_1$  - час польоту (час підйому = часу падіння).

$$2t_1 = 2 \frac{v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$\text{Тоді } x_{\max} = v_{0x} \cdot 2t_1 = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$



З умови задачі:  $h_{max} = x_{max}$ . Прирівняємо отримані для  $h_{max}$  та

$$x_{max} \text{ вирази: } \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Після скорочень отримаємо:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 4 = 76^\circ$$

Відповідь:  $\alpha = 76^\circ$ .

**Приклад 3.** Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через 3с після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення для точок, що лежать на ободі, складає кут  $50^\circ$  з напрямком дотичної до траєкторії в цій точці.

Дано:

$$t = 3 \text{ с}$$

$$\alpha = 50^\circ$$

---


$$\varepsilon = ?$$

Для

рівноприскореного обертального руху зв'язок між лінійним (тангенціальним) прискоренням  $a_\tau$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon$ :

$$a_\tau = \varepsilon R. \text{ Отже } \varepsilon = \frac{a_\tau}{R}. \quad 3$$

рисунка видно, що  $a_\tau = a \cdot \cos 50^\circ$ . Нормальне прискорення:

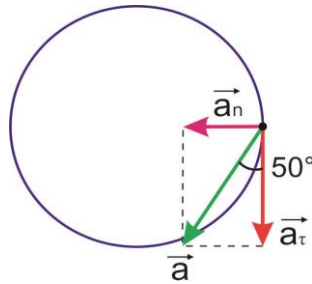
$$a_n = \frac{v^2}{R} = a \cdot \sin 50^\circ, \text{ що видно з рисунку. Для знаходження}$$

швидкості скористаємося формулою для кутової швидкості  $\omega$  рівноприскореного обертального руху без початкової швидкості

$$\omega_0 = 0 \text{ і зв'язком } \omega \text{ з } v \text{ та } R: \omega = \varepsilon t = \frac{v}{R} \Rightarrow v = \varepsilon t R.$$

Підставимо цей вираз в формулу для нормального прискорення:

**Розв'язання**



$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon^2 t^2 R^2}{R} = \varepsilon^2 t^2 R = a \cdot \sin 50^\circ. \text{ Звідси радіус колеса}$$

$$R = \frac{a \cdot \sin 50^\circ}{\varepsilon^2 t^2}. \text{ Кутове прискорення } \varepsilon \text{ буде рівне:}$$

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{a \cdot \cos 50^\circ}{a \cdot \sin 50^\circ} \varepsilon^2 t^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{tg 50^\circ}{t^2}.$$

$$\varepsilon = \frac{tg 50^\circ}{t^2} = \frac{tg 50^\circ}{3^2} = 0,13 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь:  $\varepsilon = 0,13 \text{ рад/с}^2$ .

## 2.2 Динаміка

### Вказівки до розв'язування задач з динаміки

При розгляді задач динаміки потрібно:

1. Показати на рисунку вектори всіх сил, що діють на тіло, пам'ятаючи, що на тіло діє стільки сил, скільки тіл з ним взаємодіють.

2. Для тіл, що рухаються поступально, записати основний закон динаміки поступального руху (другий закон Ньютона) у векторній формі для кожного з тіл; рівнянь має бути стільки, скільки тіл рухаються поступально.

3. Для тіл, що здійснюють обертальний рух відносно нерухомої осі, записати основний закон динаміки обертального руху.

4. Спроектувати векторні рівняння на вибрані осі координат (зручно – на напрям прискорення відповідного тіла).

5. Розв'язати одержану систему скалярних рівнянь, яких має бути стільки, скільки невідомих у задачі.

**Приклад 4.** Знайти силу тяги двигуна, якщо автомобіль рухається вгору з прискоренням  $1,2 \text{ м/с}^2$ . Нахил гори складає  $1 \text{ м}$  на кожні  $42 \text{ м}$  шляху. Маса автомобіля  $1,2 \cdot 10^3 \text{ кг}$ , коефіцієнт тертя  $\mu = 0,1$ .

Дано:

$$a = 1,2 \text{ м/с}^2$$

$$42 \cdot \sin \alpha = 1$$

$$m = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,1$$

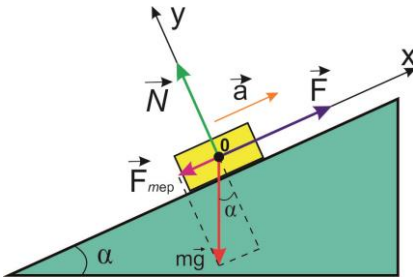
$F = ?$

### Розв'язання

Перш за все визначимо кут нахилу гори з умови:

$$\sin \alpha = \frac{1}{42} = 0,02 \Rightarrow \alpha = \arcsin 0,02 = 1,36^\circ$$

На рис. зображені сили, що діють на автомобіль:



$m \vec{g}$  - сила тяжіння,  $\vec{F}_{тер}$  - сила

тертя,  $\vec{F}$  - сила

тяги,  $\vec{N}$  - сила нормальної реакції опори. Запишемо II-ий закон Ньютона:

$$m \vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m \vec{a}.$$

Спроєкуємо це векторне рівняння на вибрані напрямки осей OX та OY.

Отримуємо систему двох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} -mg \sin \alpha + F - F_{тер} = ma & : \text{проекція на } OX \quad (1) \\ -mg \cos \alpha + N = 0 & : \text{проекція на } OY \quad (2) \end{cases}$$

З (2) знайдемо силу нормальної реакції опори:  $N = mg \cos \alpha$ .

Сила тертя  $F_{тер} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Тоді з першого рівняння системи:

$$-mg \sin \alpha + F - \mu mg \cos \alpha = ma$$

Сила тяги:  $F = ma + mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$

$$F = 1,2 \cdot 10^3 \cdot 1,2 + 1,2 \cdot 10^3 \cdot 9,8(0,02 + 0,1 \cos 1,36^\circ) = 2851 \text{ Н}$$

Відповідь:  $F = 2851 \text{ Н}$ .

**Приклад 5.** Молекула масою  $m = 4,65 \cdot 10^{-26}$  кг, що летить зі швидкістю  $v = 600 \text{ м/с}$ , стикається зі стінкою посудини під кутом  $\alpha = 60^\circ$  до нормалі і відбивається від стінки без втрати

швидкості. Знайти імпульс сили, з яким молекула подіяла на стінку.

Дано:

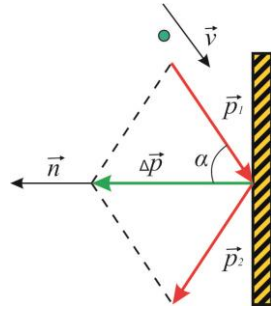
$$m = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v_1 = v_2 = v = 600 \text{ м/с}$$

$$F\Delta t = ?$$

На рисунку  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до стінки,  $\vec{p}_1$  – імпульс молекули до удару,  $\vec{p}_2$  – імпульс молекули після удару. Оскільки,  $v_1 = v_2 = v$ , то  $p_1 = p_2 = p = mv$ . Застосуємо другий закон Ньютона



$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (1)$$

Тут  $\vec{F}$  – сила, з якою стінка подіяла на молекулу. Очевидно, сила, з якою молекула подіяла на стінку, є  $-\vec{F}$  (на основі третього закону Ньютона). Тому імпульс цієї сили

$$-\vec{F}\Delta t = -\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \quad (2)$$

де  $\Delta t$  – час удару (тривалість зіткнення).

З рисунка видно, що імпульс сили, з яким молекула подіяла на стінку, перпендикулярний до стінки і спрямований на неї. Модуль імпульсу сили

$$F\Delta t = \Delta p = 2p \cos \alpha = 2mv \cos \alpha. \quad (3)$$

Обраховуючи, знаходимо

$$F\Delta t = 2 \cdot 4,65 \cdot 10^{-26} \cdot 600 \cdot \cos 60^\circ = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ (Н} \cdot \text{с)}.$$

Відповідь:  $F\Delta t = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ Н} \cdot \text{с}$ .

**Приклад 6.** З якою максимальною швидкістю  $v$  може їхати по горизонтальній площині мотоцикліст, якщо він описує дугу радіусом  $R=100\text{м}$ , а коефіцієнт тертя  $\mu=0,5$ . На який кут  $\varphi$  від вертикалі він повинен при цьому відхилитись?

Дано:

$$R = 100\text{м}$$

$$\mu = 0,5$$

$$v, \varphi - ?$$

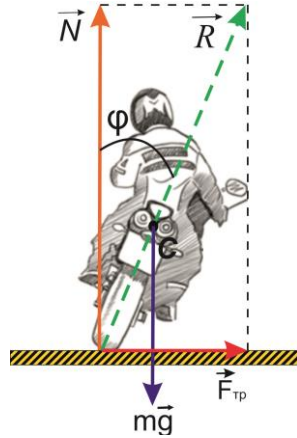
### Розв'язання

Щоб мотоцикліст міг рухатись по дузі по горизонтальній площині, він повинен нахилитись так,

щоб рівнодійна прикладених до нього трьох сил:

$m\vec{g}$  - тяжіння;  $\vec{N}$  - нормальної реакції дороги і  $\vec{F}_{тр}$  - сили тертя об дорогу надавала йому доцентрове прискорення  $\vec{a}_{доц}$ .

Оскільки центр тяжіння мотоцикліста не переміщується по вертикалі, то  $N = mg$ . Отже, доцентрове прискорення надається мотоциклісту силою тертя:



$$F_{тр} = ma_{доц} = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

В той же час сила тертя не може бути більшою від  $F_{тр\ max}$ :

$$F_{тр\ max} = \mu N = \mu mg \quad (2)$$

Отже і швидкість мотоцикліста не може бути більшою деякого граничного значення, що визначається максимально можливим значенням сили тертя. З (1) і (2) маємо:

$$\frac{mv_{max}^2}{R} = \mu mg \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu g R}.$$

Щоб визначити кут нахилу  $\varphi$  мотоцикліста від вертикалі, зауважимо, що рівнодійна  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}$  повинна проходити через центр мас O

мотоцикліста (момент рівнодійної  $\vec{R}$  відносно центра мас повинен дорівнювати нулю, бо центр мас не зміщується у вертикальній площині)

3

рисунок видно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{mp}}{N} = \frac{m v_{\max}^2 / R}{mg} = \frac{v_{\max}^2}{g R} = \frac{\mu g R}{g R} = \mu.$$

що

Кут нахилу  $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ 

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,5 \cdot 9,8 \cdot 100} = 22,1 \text{ м/с}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,6^\circ$$

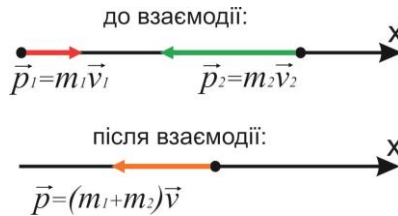
$$\text{Відповідь: } v_{\max} = 22,1 \text{ м/с; } \varphi = 26,6^\circ.$$

**Приклад 7.** Людина та візок рухаються назустріч одне одному, причому маса людини вдвічі більша від маси візка. Швидкість людини 1м/с, візка – 0,5м/с. Людина стрибає на візок та залишається на ньому. Знайти швидкість візка з людиною.

Дано:

 $m_1$  - маса візка $m_2 = 2m_1$  - маса

людини

 $v_1 = 0,5 \text{ м/с}$  $v_2 = 1 \text{ м/с}$  $v - ?$ **Розв'язання**

Закон збереження імпульса для системи людина – візок:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

$m_1 \vec{v}_1$  - імпульс візка до взаємодії,  $m_2 \vec{v}_2$  - імпульс людини до взаємодії,

$(m_1 + m_2) \vec{v}$  - імпульс візка разом з людиною після взаємодії.

Спроектуємо це векторне рівняння на вибраний напрямок осі ОХ:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -(m_1 + m_2) v.$$

Врахуємо, що маса людини вдвічі більша від маси візка:

$$m_1 v_1 - 2m_1 v_2 = -(m_1 + 2m_1) v.$$

Отже, швидкість візка з людиною:

$$v = \frac{2v_2 - v_1}{3} = \frac{2 \cdot 1 - 0,5}{3} = 0,5 \text{ м/с}.$$

Відповідь:  $v = 0,5 \text{ м/с}$ .

**Приклад 8.** Невагома і нерозтяжна нитка перекинута через блок масою 2кг. До кінців нитки прикріплені вантажі масами  $m_1=3\text{кг}$  та  $m_2=2\text{кг}$ . Знайти: 1) прискорення  $a$ , з яким рухаються вантажі, 2) натяги нитки  $T_1$  та  $T_2$  з обох боків блоку.

### Роз'язання

Дано:

$$M = 2 \text{ кг}$$

$$m_1 = 3 \text{ кг}$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$a, T_1, T_2 - ?$

На рисунку показані сили, що діють на тіла і блок. Нитка невагома і нерозтяжна, тому можна вважати, що

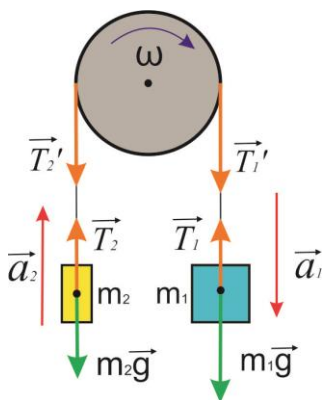
$T_1 = T_1'$  і  $T_2 = T_2'$  (за III-ім законом Ньютона);

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

Якщо нитка не ковзає по блоку, то

$$\text{кутове прискорення } \varepsilon = \frac{a}{R}.$$

Запишемо основний закон динаміки поступального руху (II-ий закон Ньютона) для кожного з тіл та основний закон динаміки обертального руху для блоку:



$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 &= m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 &= m_2 \vec{a}_2 \\ I \varepsilon &= M_2 - M_1 \end{aligned} \right\},$$

(1),

де  $M_2 = RT_2$ ,  $M_1 = RT_1$  - моменти сил натягу нитки, що діють на блок.

Спроєкуємо векторні рівняння системи (1) на напрям прискорення відповідного тіла:

$$\left. \begin{aligned} -T_1 + m_1 g &= m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \\ I \frac{a}{R} &= R(T_1 - T_2) \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Перепишемо третє рівняння системи, врахувавши, що для блока

(диска) момент інерції  $I = \frac{MR^2}{2}$ :

$$\frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} = R(T_1 - T_2) \Rightarrow MRa = 2R(T_1 - T_2).$$

Прискорення, з яким рухаються вантажі:

$$a = \frac{2(T_1 - T_2)}{M} \quad (3)$$

Перепишемо два перші рівняння системи (2) таким чином, щоб віднявши їх, знайти  $(T_1 - T_2)$ :

$$\left. \begin{aligned} T_1 - m_1 g &= -m_1 a \\ T_2 - m_2 g &= m_2 a \end{aligned} \right\} -. \quad (4)$$

Віднімемо від першого рівняння системи (4) друге:

$$(T_1 - T_2) = g(m_1 - m_2) - a(m_1 + m_2) \quad (5)$$

Підставимо (5) в (3):

$$a = 2 \cdot \frac{g(m_1 - m_2) - a(m_1 + m_2)}{M} \quad (6)$$

Розв'яжемо (6) відносно  $a$ :

$$a = \frac{2g(m_1 - m_2)}{M + 2(m_1 + m_2)}.$$

$$a = \frac{2 \cdot 9,8 \cdot (3 - 2)}{2 + 2(3 + 2)} = 1,63 \text{ м/с}^2.$$

З (4) знайдемо  $T_1$  і  $T_2$ :



$$\left. \begin{aligned} T_1 &= m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) \\ T_2 &= m_2 a + m_2 g = m_2 (a + g) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 3 \cdot (9,8 - 1,63) = 24,51 \text{ Н} \\ T_2 &= 2 \cdot (1,63 + 9,8) = 22,86 \text{ Н} \end{aligned} \right\}$$

Відповідь:  $a = 1,63 \text{ м/с}^2$ ,  $T_1 = 24,51 \text{ Н}$ ,  $T_2 = 22,86 \text{ Н}$

**Приклад 9.** Махове колесо, момент інерції якого  $I = 300 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , обертається з частотою  $\nu = 35 \text{ об/с}$ . Через одну хвилину після того, як припинилась дія обертаючого моменту, воно зупинилось. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) кількість обертів, яке зробило колесо до повної зупинки після припинення дії обертаючого моменту сили.

### Розв'язання

Дано:

$$I_Z = 300 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\nu = 35 \text{ об/с}$$

$$t_z = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с}$$

---


$$M_{\text{тр}}, \text{ Н} - ?$$

Колесо зупинилося під дією момента сил тертя  $M_{\text{тр}}$ . За основним законом динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$M_{\text{тр}} = I_Z \cdot \varepsilon \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  - кутове прискорення рівносповільненого обертового руху.

$\varepsilon$  знайдемо з формули для кутової швидкості при рівнозмінному обертовому русі:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t_z,$$

де  $\omega_0 = 2\pi\nu$  - початкова кутова швидкість.

$$\text{При зупинці } \omega = 0 \Rightarrow 0 = \omega_0 - \varepsilon t_z \Rightarrow \varepsilon t_z = \omega_0.$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_z} = \frac{2\pi\nu}{t_z} \quad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо момент сили тертя:  $M_{\text{тр}} = I_Z \cdot \frac{2\pi\nu}{t_z}$ .

$$M_{mp} = \frac{300 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 35}{60} = 1099H.$$

Для знаходження кількості обертів до зупинки колеса скористаємося формулою для кута повороту:  $\varphi = 2\pi N$ , де  $N$  - кількість обертів.

Отже, 
$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (3)$$

Рух рівносповільнений, тому для кута повороту маємо:

$$\varphi = \omega_0 t_2 - \frac{\varepsilon t_2^2}{2} \quad (4)$$

Підставимо в (4) вираз для початкової кутової швидкості  $\omega_0 = 2\pi\nu$  та кутове прискорення  $\varepsilon$  з формули (2):

$$\varphi = 2\pi\nu t_2 - \frac{2\pi\nu t_2^2}{t_2 \cdot 2} = 2\pi\nu t_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0,5 \cdot 2\pi\nu t_2 \quad (5)$$

Підставимо (5) в (3) і знайдемо кількість обертів до зупинки: 
$$N = \frac{0,5 \cdot 2\pi\nu t_2}{2\pi} = 0,5\nu t_2.$$

$$N = 0,5 \cdot 35 \cdot 60 = 1050 \text{об.}$$

Відповідь:  $M_{mp} = 1099H$ ,  $N = 1050 \text{об.}$

### 2.3 Робота, енергія, потужність

**Приклад 10.** Залежність пройденого шляху від часу має вигляд  $S = Dt^3$ , де  $D = 0,05 \text{м/с}^3$ . Маса тіла 2кг. Знайти роботу сили, що діє на тіло, за перші 3 секунди після початку руху.

#### Роз'язання

Дано:

$$S = Dt^3$$

$$D = 0,05 \text{м/с}^3$$

$$m = 2 \text{кг}$$

$$t_1 = 3 \text{с}$$

---


$$A - ?$$

Силу, що діє на тіло, знаходимо за другим законом Ньютона:

$$F = ma.$$

Прискорення тіла:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(Dt^3) = (D \cdot 3t^2)' = 6Dt.$$

Тоді сила:  $F = m \cdot 6Dt$ .

Сила  $F$  залежить від часу, тому для знаходження її роботи треба застосувати формулу змінної сили:

$$A = \int_0^{S_1} FdS = \int_0^{t_1} 6mDtd(Dt^3) = \int_0^{t_1} 6mDt \cdot 3Dt^2 dt = 18mD^2 \int_0^{t_1} t^3 dt = 18mD^2 \frac{t_1^4}{4}$$

Отже,  $A = 18mD^2 \frac{t_1^4}{4}$ .

$$A = 18 \cdot 2 \cdot 0,05^2 \cdot \frac{3^4}{4} = 1,8225 \approx 1,82 \text{ Дж}.$$

Відповідь:  $A = 1,82 \text{ Дж}$ .

**Приклад 11.** Автомобіль масою  $1m$  рушає з місця і, рухаючись рівноприскорено, проходить шлях  $20\text{м}$  за  $2$  секунди. Знайти середню потужність двигуна. Тертям знехтувати.

### Розв'язання

Дано: Сила тяги двигуна, за другим законом

$m = 1m = 1 \cdot 10^3 \text{ кг}$  Ньютона,

$S = 20\text{м}$

$t = 2\text{с}$

$N = ?$

$$F = ma.$$

Прискорення автомобіля знайдемо з формули шляху при рівноприскореному

русі без початкової швидкості  $S = \frac{at^2}{2}$ ,

звідки  $a = \frac{2S}{t^2}$ . Отже,

$$F = \frac{m \cdot 2S}{t^2}. \quad (1)$$

Зв'язок між потужністю двигуна, силою тяги і швидкістю руху

$$N = F \cdot v.$$

Оскільки нас цікавить середня потужність, то

$$N = F \cdot \langle v \rangle, \quad (2)$$

де

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t}. \quad (3)$$

Після підстановки (1) і (3) у (2) одержимо:

$$N = \frac{m \cdot 2S}{t^2} \cdot \frac{S}{t} = \frac{m \cdot 2S^2}{t^3}$$

$$N = \frac{10^3 \cdot 2 \cdot 20^2}{2^3} = 1 \cdot 10^5 \text{ (Вт)}.$$

Відповідь:  $N = 100 \text{ кВт}$ .

**Приклад 12.** Автомобіль масою 2,5т рівномірно підіймається на гору з ухилом 5м на кожні 150м шляху. Коефіцієнт тертя  $\mu = 0,07$ . Яку роботу виконує двигун автомобіля на шляху 4км?

Дано:

$$m = 2,5 \text{ т} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$h = 5 \text{ м}$$

$$\ell = 150 \text{ м}$$

$$\mu = 0,07$$

$$S = 4 \text{ км} = 4 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$$A = ?$$

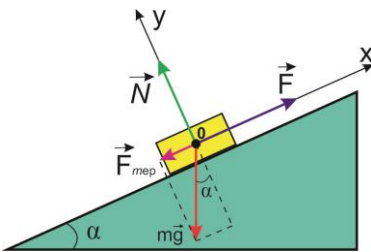
### Роз'язання

Двигун виконує роботу проти сили тертя  $F_{\text{тер}}$  і скочуючої сили, що зумовлена силою тяжіння. Знайдемо силу тяги двигуна, що направлена в напрямку осі ОХ. За другим законом Ньютона:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + m\vec{g} = m\vec{a} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{a} = 0$  - прискорення, з яким рухається автомобіль;  $\vec{N}$  - сила реакції опори,  $\vec{F}$  - сила тяги.

Виберемо осі координат ОХ та ОУ як показано на рисунку: вісь ОХ – в напрямку руху автомобіля вгору по похилій площині; вісь



ОУ – перпендикулярно до площини.

Спроектуємо векторне рівняння (1) на координатні осі, отримаємо систему двох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} F - mg \cdot \sin \alpha - F_{mp} = 0 \\ 0 = N - mg \cdot \cos \alpha \end{cases}, \quad (2)$$

де  $\alpha$  - кут похилої площини.

З другого рівняння системи (2) знайдемо силу реакції опори:

$$N = mg \cdot \cos \alpha.$$

Тоді сила тертя  $F_{mp} = \mu N = \mu mg \cdot \cos \alpha$ .

Підставимо отриманий вираз для сили тертя в перше рівняння системи (2) і знайдемо силу тяги двигуна:

$$F = mg(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha). \quad (3)$$

Сила тяги є сталою. Робота, яку виконує двигун (робота сталої сили):

$$A = F \cdot S. \quad (4)$$

Отже, після підстановки (3) в (4) отримаємо роботу двигуна:

$$A = mg(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)S. \quad (5)$$

З геометрії рисунку знайдемо:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\ell^2 - h^2}}{\ell} = \frac{\sqrt{150^2 - 5^2}}{150} \approx 1; \sin \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{5}{150} \approx 0,03$$

$$A = 2,5 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot (0,03 + 0,07 \cdot 1) 4 \cdot 10^3 \approx 9,8 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 9,8 \text{ МДж}$$

Відповідь записуємо в одиницях СІ.

$$\text{Відповідь: } A = 9,8 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

**Приклад 13.** Яку роботу потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 5см, якщо для її стискування на 1см потрібна сила 150Н?

Дано:

$$x = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$x_1 = 1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$F = 150 \text{ Н}$$

---


$$A - ?$$

### Роз'язання

Роботу сили пружності (що належить до потенціальних сил) можна визначити з теореми про зміну потенціальної енергії: робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії (зміні

потенціальної енергії з протилежним знаком):

$$A = -\Delta W_n; \quad \Delta W_n = \frac{k x^2}{2},$$

де  $x$  - зміна довжини пружини – величина абсолютної деформації.

Щоб знайти  $k$  - жорсткість пружини скористаємося визначенням сили пружності:

$$F_{np} = -k x_1,$$

де  $x_1$  - стискування пружини при дії сили 150Н.

Тоді жорсткість пружини:  $k = \frac{F_{np}}{x_1}$ .

Тоді робота сили пружності:  $A = \frac{F_{np}}{x_1} \cdot \frac{x^2}{2}$ .

$$A = \frac{150 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2}{1 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = 18,75 \text{ Дж}.$$

Відповідь:  $A = 18,75 \text{ Дж}$ .

## 2.4 Механіка рідин і газів

**Приклад 14.** По горизонтальній трубці АВ тече рідина. Різниця рівнів цієї рідини у трубках  $a$  і  $b$  дорівнює 10см. Діаметри трубок  $a$  і  $b$  однакові. Знайти швидкість потоку рідини у трубці АВ.

### Розв'язання

Дано:

$$\Delta h = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

Розглянемо два перерізи: 1-1' і 2-2'.

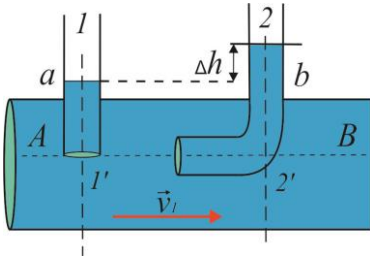
Запишемо для них рівняння Бернуллі:

---

$$v_1 - ?$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 + p_a = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 + p_a$$

тут  $p_a$  – атмосферний тиск,  $h_1 = h_2$  (труба АВ розміщена горизонтально), швидкість  $v_2 = 0$



Тоді рівняння Бернуллі матиме вигляд:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 - p_1$$

Різниця тисків у трубках  $a$  і  $b$  дорівнює гідростатичному тиску  $\rho g \Delta h$ . Тому,

$$\frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g \Delta h.$$

Звідки

$$v_1 = \sqrt{2g\Delta h}.$$

Виконавши обчислення, отримаємо

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,1} = 1 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь:  $v_1 = 1 \text{ м/с}$ .

**Приклад 15.** На дні циліндричної посудини, яка наповнена до висоти 39 см гліцерином, що має густину  $1,29 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , утримується дерев'яна кулька радіусом 2,5 мм. Скільки часу вона спливатиме на поверхню, якщо її відпустити (вважати, що протягом цього часу вона рухається рівномірно). Густина дерева  $\rho_1 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , а коефіцієнт в'язкості гліцерину  $\eta = 0,2 \text{ Па}\cdot\text{с}$ .

### Розв'язання

Дано:

$$h = 0,39 \text{ м}$$

$$d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\rho = 1,25 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_1 = 0,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$\eta = 0,3 \text{ Па}\cdot\text{с}$$

---


$$t - ?$$

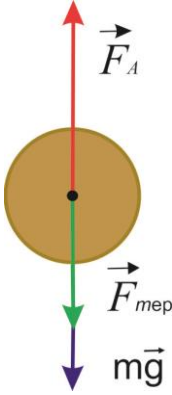
При рівномірному русі кульки сили, що діють на кульку, взаємно врівноважуються:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{mp} = 0 \quad (1)$$

І в проекції на напрямок руру запишемо

$$F_A = mg + F_{mp}. \quad (2)$$

Сила Архімеда



$$F_A = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g . \quad (3)$$

Сила внутрішнього тертя

$$F_{тер} = 6\pi \eta v . \quad (4)$$

Сила тяжіння

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g . \quad (5)$$

Тоді

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho_1 + 6\pi \eta v .$$

Підставимо швидкість рівномірного руху кульки  $v = h/t$  та радіус  $r = d/2$ , дістанемо:

$$t = \frac{18\eta h}{gd^2(\rho - \rho_1)} . \quad (7)$$

Підставимо числові значення і виконаємо обрахунок

$$t = \frac{18 \cdot 0,3 \cdot 0,39}{0,81 \cdot 25 \cdot 10^{-6} (1,25 - 0,4) \cdot 10^3} = 10(\text{с}).$$

Відповідь:  $t = 10\text{с}$  .

**Приклад 16.** В посудину ллється вода, причому за 1с наливається 0,1л води. Який повинен бути діаметр  $d$  отвору на дні посудини, щоб вода в ній утримувалась на сталому рівні  $h = 10\text{см}$ ?

Дано:

$$t = 1\text{с}$$

$$V = 0,1\text{л} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$h = 10\text{см} = 0,1\text{м}$$

---


$$d - ?$$

### Розв'язання

Скористаємося рисунком задачі №95, де в перерізі 1-1'  $S_1$

- це площа дзеркала води у посудині; в перерізі 2-2'

$S_2$  - площа отвору у дні

посудини.

За умовою нерозривності струмини:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 . \quad (1)$$



Тобто через кожний поперечний переріз за одиницю часу (1с) протікає однаковий об'єм води:  $v_1 S_1 = V$  (2)

За формулою Торрічеллі швидкість витікання рідини через отвір у дні посудини:

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Підставимо (2) та (3) в рівняння нерозривності (1):

$$V = S_2 \sqrt{2gh} \Rightarrow S_2 = \frac{V}{\sqrt{2gh}}. \quad (4)$$

Площа отвору у дні посудини:

$$S_2 = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (5)$$

Прирівняємо (4) і (5):  $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{V}{\sqrt{2gh}}$ .

Звідси діаметр  $d$  отвору на дні посудини, щоб вода в ній утримувалась на сталому рівні  $h$  буде рівний:

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi\sqrt{2gh}}}. \quad (6)$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{3,14 \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,1}}} \approx 0,0095 \approx 0,01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

Відповідь:  $d = 0,01 \text{ м}$ .

## 2.5. Елементи теорії відносності

**Приклад 17.** При якій відносній швидкості руху релятивістське скорочення довжини рухомого тіла складає 30%.

Дано:

**Розв'язання**

$$\frac{\Delta \ell}{\ell_0} = 0,3$$

Релятивістське скорочення розмірів рухомих тіл визначається формулою:

$v - ?$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

де  $l_0$  - власна довжина стрижня в системі, де він є нерухомим (його найбільша довжина);  $l$  - довжина стрижня в системі відліку, відносно якої він рухається зі швидкістю  $v$  (разом з власною системою відліку);  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с - швидкість світла у вакуумі.

За умовою релятивістське зменшення довжини  $\Delta l = l_0 - l$  складає 30% від власної довжини  $l_0$ .

Тоді з виразу  $\frac{l_0 - l}{l_0} = 0,3$  знаходимо  $\frac{l}{l_0} = 0,7$ .

З (1)  $\frac{l}{l_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,7$ . Тоді відносна швидкість

$$v = c \sqrt{1 - 0,7^2}.$$

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - 0,7^2} = 2,14 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Відповідь:  $v = 2,14 \cdot 10^8$  м/с.

**Приклад 18.** Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його повздовжні розміри зменшились в 1,5 рази?

Дано:

**Розв'язання**

$$l = \frac{l_0}{1,5}$$

Релятивістське скорочення розмірів рухомих тіл визначається формулою:

$v$  ?

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

де  $\ell = \frac{\ell_0}{1,5}$  - розміри тіла, що рухається з релятивістською швидкістю:

за умовою задачі зменшилися в 1,5 рази.

$$\text{З (1) } \frac{\ell_0}{1,5} = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \text{ Скорочуємо } \ell_0, \text{ отримаємо вираз,}$$

з якого знаходимо  $v$ :

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0,667^2 \Rightarrow v = c\sqrt{1 - 0,667^2}.$$

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{1 - 0,667^2} = 2,24 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Відповідь:  $v = 2,24 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

### 3. Задачі для самостійного розв'язування

#### 3.1 Кінематика

##### Кінематика поступального руху

1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухається зі швидкістю 80 км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Знайти середню швидкість автомобіля.

2. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Знайти середню швидкість.

3. Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулось на землю через 3 секунди. Яка була початкова швидкість тіла? На яку висоту піднялось тіло?

4. З аеростата, що знаходиться на висоті 300 м, впав камінь. За який час він долетить до землі, якщо: 1) аеростат нерухомий; 2) аеростат піднімається зі швидкістю 5 м/с; 3) аеростат опускається зі швидкістю 5 м/с.

5. \*Тіло, що вільно падає, за останню секунду свого падіння проходить половину всього шляху. Знайти: 1) з якої висоти  $H$  падає тіло; 2) тривалість його падіння.

6. Потяг рухається рівносповільнено з від'ємним

прискоренням  $|a| = 0,5 \text{ м/с}^2$ . Початкова швидкість потягу 54км/год. За який час і на якій відстані від початкової точки потяг зупиниться?

7. Залежність шляху від часу задається рівнянням  $S = At - Bt^2 + Ct^3$  де  $A=2\text{м/с}$ ,  $B=3\text{м/с}^2$ ,  $C=4\text{м/с}^3$ . Знайти: 1) залежність швидкості та прискорення від часу; 2) швидкість та прискорення тіла через 2с після початку руху.

8. Залежність шляху від часу визначається рівнянням  $S = A - Bt + Ct^2$ , де  $A=3\text{м}$ ,  $B=2\text{м/с}$ ,  $C=1\text{м/с}^2$ . Знайти середню швидкість та середнє прискорення за другу секунду руху.

9. Залежність шляху від часу дається рівнянням  $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ , де  $C=0,11\text{м/с}^2$ ,  $D=0,01\text{м/с}^3$ . Знайти: 1) за який час після початку руху прискорення тіла дорівнюватиме  $1\text{м/с}$ ; 2) чому дорівнює середнє прискорення за цей проміжок часу.

10.3 башти висотою  $H=38\text{м}$  в горизонтальному напрямку кинуто камінь зі швидкістю  $v_0=15\text{м/с}$ . Знайти: 1) час руху каменя; 2) на якій відстані  $S$  від башти він впаде на землю; 3) яку швидкість він матиме в момент падіння; 4) який кут з горизонтом складатиме траєкторія каменя у точці його падіння?

11.\*Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю  $v_0=10 \text{ м/с}$ . Знайти радіус кривизни траєкторії через 3с після початку руху.

12.\*Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю  $v_0=15\text{м/с}$ . Знайти нормальне і тангенціальне прискорення каменя через 1с після початку руху.

13.\*Тіло кинуте з початковою швидкістю  $v_0=20\text{м/с}$  під кутом  $\alpha=45^\circ$  до горизонту. Через який час після початку руху швидкість тіла складатиме кут  $\beta=30^\circ$  з горизонтом?

### **Кінематика обертального руху**

14.Колесо, що обертається рівноприскорено, досягає кутової швидкості  $\omega=20\text{рад/с}$ . При цьому воно зробило  $N=100$  обертів після початку руху. Знайти кутове прискорення колеса.

15.Вентилятор обертається з частотою  $\nu=180\text{об/хв}$ . Починаючи з деякого моменту він починає гальмувати і

обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням, чисельно рівним  $3\text{рад/с}^2$ . За який час вентилятор зупиниться? Скільки обертів зробить він до зупинки?

16.\*Точка рухається по колу радіусом  $R=10\text{см}$  з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти нормальне прискорення через  $t=20\text{с}$  після початку руху, якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту від початку руху швидкість точки дорівнює  $0,792\text{м/с}$ .

17.Точка рухається по колу радіусом  $R=20\text{см}$  з постійним тангенціальним прискоренням  $a_t=5\text{см/с}^2$ . За який час від початку руху нормальне прискорення дорівнюватиме тангенціальному?

18.\*Точка рухається по колу радіусом  $R=2\text{см}$ . Залежність шляху від часу  $S=ct^3$  де  $C=0,1\text{см/с}^3$ . Знайти нормальне і тангенціальне прискорення точки в той момент, коли її лінійна швидкість  $v=0,3\text{м/с}$ .

19.Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через  $2\text{с}$  після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення для точок, що лежать на ободі, складає кут  $60^\circ$  з напрямком дотичної до траєкторії в цій точці.

20.Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням  $\varepsilon=2\text{рад/с}^2$ . Через  $t=0,5\text{с}$  після початку руху повне прискорення колеса  $a=13,6\text{см/с}^2$ . Знайти радіус колеса.

21.Колесо радіусом  $R=0,1\text{м}$  обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням  $\varphi=A+Bt+Ct^3$ , де  $B=2\text{рад/с}$ ,  $C=1\text{рад/с}^3$ . Для точок, що лежать на ободі, знайти через  $2\text{с}$  після початку руху: 1) кутову швидкість, 2) кутове прискорення, 3) лінійну швидкість, 4) тангенціальне прискорення, 5) нормальне прискорення.

### 3.2. Динаміка

#### Динаміка поступального руху

22.До нитки підвішений вантаж масою  $1\text{кг}$ . Знайти натяг нитки, якщо вантаж: 1) піднімають з прискоренням  $a=5\text{м/с}^2$ ; 2) опускають з таким же прискоренням.

23.Автомобіль масою  $1000\text{кг}$  зупиняється при гальмуванні через  $5$  секунд, пройшовши при цьому до зупинки шлях  $25\text{м}$ .

Знайти силу гальмування.

24. Потяг масою 500т рухається рівносповільнено при гальмуванні і за 1 хвилину зменшує свою швидкість від 40км/год до 28км/год. Знайти силу гальмування.

25. Тіло масою 0,5кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого шляху від часу має вигляд  $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ , де  $C=5\text{м/с}^2$  і  $D=1\text{м/с}^3$ . Знайти величину сили, що діє на тіло наприкінці першої секунди руху.

26. Тіло масою  $m=0,5\text{кг}$  рухається так, що залежність шляху від часу визначається рівнянням  $S = A \sin \omega t$ , де  $A=5 \cdot 10^2\text{м}$ ,  $\omega=\pi$  рад/с. Знайти силу, що діє на тіло через 1/6 секунди після початку руху.

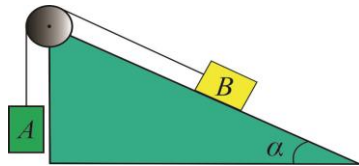
27. \*Трос лежить на столі так, що частина його звисає, і починає ковзати тоді, коли звисає 25% усієї довжини. Чому дорівнює коефіцієнт тертя  $\mu$ ?

28. Знайти силу тяги двигуна, якщо автомобіль рухається вгору з прискоренням  $1\text{м/с}^2$ . Нахил гори складає 1м на кожні 25м шляху. Маса автомобіля  $1 \cdot 10^3\text{кг}$ , коефіцієнт тертя  $\mu = 0,1$ .

29. Тіло ковзає по похилій площині, що складає кут  $45^\circ$  з горизонтом. Пройшовши шлях  $S=0,364\text{м}$ , тіло набуло швидкості  $2\text{м/с}$ , Чому дорівнює коефіцієнт тертя?

30. Тіло ковзає по похилій площині, що складає з горизонтом кут  $45^\circ$ , Залежність шляху від часу  $S=ct^2$ , де  $c=1,73\text{м/с}^2$ . Знайти коефіцієнт тертя  $\mu$ .

31. Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини ( $\alpha = 30^\circ$ ) як зображено на рисунку. Вантажі  $A$  і  $B$  рівної маси  $m_1=m_2=1\text{кг}$  сполучені ниткою, що перекинута через блок. Знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, та натяг нитки. Тертям знехтувати.



32. \*Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, що складають з горизонтом кути  $\alpha=30^\circ$  та  $\beta=40^\circ$ , як зображено на

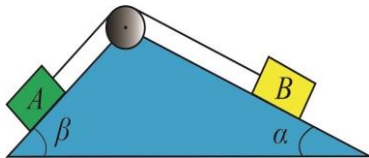


рисунок. Вантажі  $A$  та  $B$  рівної маси  $m_1=m_2=1\text{кг}$  сполучені ниткою, що перекинута через блок. Нехтуючи тертям, знайти прискорення  $a$ , з яким рухаються вантажі, та силу натягу нитки  $T$ .

33. Два вантажі масами  $m_1=7\text{кг}$  та  $m_2=11\text{кг}$  підвішені до кінців нитки, яку перетнуто через блок. Початково вантажі знаходяться на одній висоті. Через який час після початку руху відстань між вантажами дорівнюватиме  $10\text{см}$ ?

34. Яким мав би бути коефіцієнт тертя  $\mu$  між колесами автомобіля і дорогою, щоб автомобіль міг пройти закруглення радіусом  $R=200\text{м}$  при швидкості  $v=100\text{км/год}$ ?

35. \*З якою максимальною швидкістю  $v$  може їхати по горизонтальній площині мотоцикліст, якщо він описує дугу радіусом  $R=90\text{м}$ , а коефіцієнт тертя  $\mu=0,4$ . На який кут  $\varphi$  від вертикалі він повинен при цьому відхилитись?

36. Яку тривалість повинна мати доба на Землі, щоб тіла на екваторі не мали ваги?

37. Людина та візок рухаються назустріч одне одному, причому маса людини вдвічі більша від маси візка. Швидкість людини  $2\text{м/с}$ , візка –  $1\text{м/с}$ . Людина стрибає на візок та залишається на ньому. Знайти швидкість візка з людиною.

38. Потяг масою  $m=1,8 \cdot 10^5\text{кг}$ , який рухається рівномірно зі швидкістю  $0,5\text{м/с}$ , стикається з нерухомим вагоном і продовжує рухатись разом із ним. Яка маса вагона, якщо швидкість потягу зменшилась до  $0,4\text{ м/с}$ ?

39. Молекула масою  $m=4,64 \cdot 10^{-26}\text{кг}$ , що летить зі швидкістю  $v=600\text{м/с}$ , вдаряється об стінку та відбивається від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили, отриманий стінкою. Молекула рухалась нормально до стінки.

40. \*Водяний струмінь перерізом  $S=6\text{см}^2$  стикається зі стінкою під кутом  $\alpha=60^\circ$  до нормалі та відбивається від неї без втрати швидкості. Знайти силу, що діє на стінку, якщо швидкість води в струмені  $v=12\text{м/с}$ .

41. Людина масою  $60\text{кг}$ , що біжить зі швидкістю  $8\text{км/год}$ , наздоганяє візок масою  $80\text{кг}$ , що котиться зі швидкістю  $2,9\text{км/год}$  та вистрибує на нього. З якою швидкістю буде

рухатись візок після цього?

### Динаміка обертального руху

42. До ободу однорідного диска радіусом  $R=0,2\text{м}$  прикладена дотична сила  $F=98,1\text{Н}$ . При обертанні на диск діє момент сил тертя  $M_{\text{тр}}=4,9\text{Н}\cdot\text{м}$ . Знайти масу диска, якщо відомо, що він обертається з постійним кутовим прискоренням  $\varepsilon=100\text{рад/с}^2$ .

43. Однорідний стрижень довжиною  $1\text{м}$  і масою  $0,5\text{кг}$  обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину, під дією обертаючого моменту  $M=10\text{Н}\cdot\text{м}$ . Знайти кутове прискорення.

44. Однорідний диск радіусом  $R=2\text{м}$  і масою  $m=13\text{кг}$  обертається навколо осі, що проходить через його центр. Залежність кутової швидкості обертання диска від часу дається рівнянням  $\omega=A+Bt$ , де  $B=8\text{рад/с}$ . Знайти величину дотичної сили, яка прикладена до ободу диска. Тертям знехтувати.

45. Махове колесо, момент інерції якого  $I=245\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , обертається з частотою  $\omega=20\text{об/с}$ . Через одну хвилину після того, як припинилась дія обертаючого моменту, воно зупинилось. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) кількість обертів, яке зробило колесо до повної зупинки після припинення дії обертаючого моменту сили.

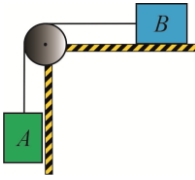
46. Невагома і нерозтяжна нитка перекинута через блок масою  $1\text{кг}$ . До кінців нитки прикріплені вантажі масами  $m_1=2\text{кг}$  та  $m_2=5\text{кг}$ . Знайти: 1) прискорення  $a$ , з яким рухаються вантажі, 2) натяги нитки  $T_1$  та  $T_2$  з обох боків блоку.

47. На барабан масою  $m_1=9\text{кг}$  намотаний шнур, до кінця якого прикріплено вантаж масою  $m_2=2\text{кг}$ . Знайти прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром.

48. На барабан радіусом  $R=20\text{см}$ , момент інерції якого  $I=0,1\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , намотаний шнур, до якого прикріплено вантаж  $m=2\text{кг}$ . До початку руху вантаж знаходився на висоті  $h=1\text{м}$  над підлогою. Знайти: 1) за який час вантаж опуститься до підлоги; 2) натяг нитки.

49. \*Блок масою  $1\text{кг}$  закріплений на краю стола. Вантажі  $A$  і  $B$  рівної маси  $m_1=m_2=1\text{кг}$  сполучені ниткою, яку перекинато





через блок (дивись рисунок). Коефіцієнт тертя тіла  $B$  об стіл рівний  $\mu=0,1$ . Блок вважати однорідним диском. Тертям у блоці знехтувати, Знайти: 1) прискорення

вантажів; 2) натяги  $T_1$  та  $T_2$  ниток.

50. Колесо, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшило за 1хв частоту обертання від 300об/хв до 180об/хв. Момент інерції колеса  $I=2\text{кг}\cdot\text{м}^2$ . Знайти: 1) кутове прискорення колеса  $\varepsilon$ ; 2) гальмівний момент  $M_{\text{тр}}$ ; 3) кількість обертів  $N$ , зроблених колесом за цю хвилину.

51. Махове колесо, момент інерції якого  $I=545\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , обертається з частотою 20об/с. Після того, як на колесо перестав діяти обертальний момент сил, воно зупинилось, зробивши 1000 обертів. Знайти: 1) момент сил тертя  $M_{\text{тр}}$ ; 2) час, що пройшов до зупинки.

52. \*По ободу шківів, насадженого на спільну вісь з маховим колесом намотано нитку, до кінця якої підвішений вантаж масою 1кг. На яку відстань повинен опуститись вантаж, щоб колесо зі шківом набуло швидкості, що відповідає частоті  $\nu=60\text{об/хв}$ ? Момент інерції колеса разом зі шківом  $I=0,42\text{кг}\cdot\text{м}^2$ , радіус шківів  $R=10\text{см}$ .

53. До ободу однорідного суцільного диска радіусом  $R=0,5\text{м}$  прикладена постійна дотична сила  $F=100\text{Н}$ . При обертанні на нього діє момент сил тертя  $M_{\text{тр}}=4\text{Н}\cdot\text{м}$ . Визначити масу диска, якщо відомо, що його кутове прискорення  $\varepsilon=12\text{рад/с}^2$ .

54. Платформа у вигляді суцільного диска радіусом  $R=1,5\text{м}$  і масою  $m=180\text{кг}$  обертається зі сталою кутовою швидкістю, що відповідає частоті  $\nu=10\text{об/хв}$ . В центрі платформи знаходиться людина масою  $m_2=60\text{кг}$ . Яку лінійну швидкість відносно землі матиме людина, якщо вона перейде на край платформи?

55. Платформа у вигляді диска рівномірно обертається навколо вертикальної осі з частотою  $\nu_1=14\text{об/хв}$ . На краю платформи стоїть людина масою  $m=90\text{кг}$ . Коли людина перейшла до центру платформи, вона почала обертатися з

частотою  $\nu_2=24$ об/хв. Визначити масу  $M$  платформи. Людину вважати матеріальною точкою.

56.\*Нерухома платформа має вигляд диска діаметром  $D=0,8$ м і масою  $m_1=6$ кг. На краю платформи стоять людинка масою  $m_2=73$ кг. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина, спіймає м'яч масою  $m_3=0,250$ кг? Траєкторія м'яча горизонтальна і проходить на відстані  $r=0,4$ м від осі платформи. Швидкість м'яча становить  $v=5$ м/с. Людину вважати матеріальною точкою.

57.У центрі горизонтальної платформи, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1=4$ рад/с, стоїть людина і тримає в руках стрижень вертикально вздовж осі обертання. З якою кутовою швидкістю  $\omega_2$  буде обертатись платформа, якщо людина поверне стрижень так, що він набуде горизонтального положення? Сумарний момент інерції людини і платформи  $I=5$ кг·м<sup>2</sup>. Довжина стрижня  $l=1,8$ м, маса  $m=10$ кг. Вважати, що центр мас стрижня з людиною знаходиться на осі обертання.

58.Горизонтальна платформа масою  $m=80$ кг та радіусом  $R=1$ м обертається з частотою  $\nu=20$ об/хв. В центрі платформи стоїть людина яка тримає у розставлених руках вантажі. Яку кількість обертів за хвилину робитиме платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від  $I_1=2,94$ кг·м<sup>2</sup> до  $I_2=0,98$ кг·м<sup>2</sup>. Платформу вважати однорідним диском, а людину – матеріальною точкою.

### 3.3. Робота, енергія, потужність

59. Автомобіль масою 2т підіймається на гору з ухилом 4м на кожні 100м шляху. Коефіцієнт тертя  $\mu = 0,08$ . Яку роботу виконує двигун автомобіля на шляху 3км?

60. Яку роботу потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 10см, якщо для її стискування на 1см потрібна сила 100Н?

61. \*Залежність пройденого шляху від часу має вигляд  $S = Dt^3$ , де  $D = 0,01$ м/с<sup>3</sup>. Маса тіла 1кг. Знайти роботу сили, що діє на тіло, за перші 5 секунд після початку руху.

62. Потяг масою  $5 \cdot 10^5$  кг підіймається зі швидкістю 36км/год на

гору з ухилом 10м на кожен кілометр шляху. Коефіцієнт тертя 0,002.

Визначити потужність двигуна.

63. Знайти, яку потужність розвиває двигун автомобіля масою 1т, якщо автомобіль їде зі сталою швидкістю 36км/год :

1) по горизонтальній дорозі; 2) на гору з ухилом 5м на кожні 100м шляху; 3) з гори з таким же ухилом. Коефіцієнт тертя у всіх випадках дорівнює 0,07.

64. При підйманні вантажу масою 2кг на висоту 1м сталою силою було виконано роботу 78,5Дж. З яким прискоренням підіймався вантаж?

65. Диск масою 1кг котиться без ковзання по горизонтальній дорозі зі швидкістю 6м/с. Знайти його кінетичну енергію.

66. Обруч і диск однакової маси котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю. Кінетична енергія обруча 40Дж. Знайти кінетичну енергію диска.

67. \*Автомобіль масою 1т рухається з гори при вимкненому двигуні зі сталою швидкістю 15м/с. Ухил гори дорівнює 4м на кожні 100м шляху. Яку потужність повинен розвивати двигун цього автомобіля, щоб рухатись з тією ж швидкістю на гору з тим же ухилом?

### **Теорема про зміну кінетичної та потенціальної енергії; закон збереження енергії в механіці**

68. Куля масою 10г підлітає до дошки товщиною 4см зі швидкістю 600м/с і, пробивши дошку, вилітає зі швидкістю 400м/с. Знайти середню силу опору.

69. Обчислити роботу, потрібну для того, щоб збільшити швидкість тіла масою 1кг від 2м/с до 5м/с на шляху 10м. На всьому шляху діє сила опору 8Н.

70. З якою швидкістю рухався вагон масою 1т, якщо при ударі об стінку кожний буфер стиснувся на 10см? Відомо, що пружина кожного буфера стискається на 1см під дією сили  $1 \cdot 10^4$ Н.

71. Яку роботу виконують гравітаційні сили при падінні на Землю тіла масою 2кг 1) з висоти 1км; 2) з висоти  $2 \cdot 10^4$  км. Маса Землі  $6 \cdot 10^{24}$  кг, радіус Землі  $6,4 \cdot 10^6$  м.

72. Диск масою 1кг і діаметром 60см обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска, з частотою 20об/с. Яку роботу потрібно виконати, щоб зупинити диск?

73. Хлопець котить обруч по горизонтальній дорозі зі швидкістю 7,2км/год. На яку відстань може закатитись обруч на гірку за рахунок його кінетичної енергії? Ухил гірки дорівнює 10м на кожні 100м шляху. Тертя відсутнє.

74. \*З похилої площини з кутом нахилу  $\alpha$  скочуються без ковзання і без тертя куля, диск і обруч. Знайти прискорення кожного з цих тіл. Початкові швидкості рівні нулю.

75. \*Ковзаняр масою 70кг стоїть на ковзанах на гладкому льоду. Яку роботу повинен виконати ковзаняр, щоб кинути в горизонтальному напрямку камінь масою 3кг зі швидкістю 8м/с?

76. \*Олівець довжиною 15см, що стоїть вертикально, падає на стіл. Яку лінійну швидкість матиме в кінці падіння 1) середина олівця; 2) верхній його кінець?

77. \*Знайти роботу розтягу двох з'єднаних одна з одною пружин з коефіцієнтами пружності  $k_1 = 400 \text{ Н/м}$  і  $k_2 = 250 \text{ Н/м}$ , якщо перша пружина при цьому розтягнулась на 2см. Задачу розв'язати у випадках, коли пружини з'єднані 1) послідовно; 2) паралельно.

### **Зіткнення тіл (абсолютно пружні та абсолютно непружні удари)**

78. Куля масою 500г, яка рухається зі швидкістю 10м/с, стикається з нерухомою кулею масою 200г, після чого обидві кулі рухаються разом. Знайти їх кінетичну енергію після зіткнення.

79. Куля масою 10г, яка летить зі швидкістю 100м/с, влучає в нерухоме тіло масою 90г і застряє у ньому. Яка кількість теплоти виділиться під час зіткнення?

80. Тіло масою 5кг стикається з нерухожим тілом масою 2,5кг. Кінетична енергія цих двох тіл після їх абсолютно непружного зіткнення – 5Дж. Знайти швидкість першого тіла до зіткнення.

81. Куля масою 1кг рухається зі швидкістю 4м/с і стикається з кулею масою 2кг, що рухається їй назустріч зі швидкістю 3м/с. Знайти швидкості куль після їх абсолютно пружного прямого центрального зіткнення.

82. Дві кулі підвішені на паралельних нитках однакової довжини так, що вони дотикаються одна до одної. Першу кулю відхиляють так, що її центр мас підіймається на висоту 4,5см, і відпускають. На яку висоту підіймуться кулі після абсолютно пружного зіткнення? Маса першої кулі 0,2кг, а другої – 0,1кг.

83. \*Куля масою 2кг стикається з нерухомою кулею і втрачає при цьому 40% кінетичної енергії. Визначити масу другої кулі. Зіткнення абсолютно пружне, пряме, центральне.

### 3.4. Механіка рідин і газів

84. На столі стоїть посудина із водою, у боковій поверхні якої є маленький отвір, розміщений на відстані  $h_1$  від дна посудини і на відстані  $h_2$  від рівня води. На якій відстані від отвору (по горизонталі) струмина води падає на стіл? Задачу розв'язати для випадків: 1)  $h_1 = 25\text{см}$ ,  $h_2 = 16\text{см}$ ; 2)  $h_1 = 16\text{см}$  і  $h_2 = 25\text{см}$ .

85. У дні циліндричної посудини є отвір діаметром  $d = 1\text{см}$ . Діаметр посудини  $D = 0,5\text{м}$ . Знайти залежність швидкості  $v$  пониження рівня води у посудині від висоти цього рівня. Знайти числове значення цієї швидкості для висоти  $h = 0,2\text{м}$ .

86. В посудину ллється вода, причому за 1с наливається 0,2л води. Який повинен бути діаметр  $d$  отвору на дні посудини, щоб вода в ній утримувалась на сталому рівні?

87. Який тиск створює компресор у фарбопульті, якщо струмина рідкої фарби вилітає з нього зі швидкістю 2,5м/с? Густина фарби  $0,8\text{г/см}^3$ .

88. Стальна кулька діаметром 1мм падає з сталою

швидкістю  $0,185\text{см/с}$  у великій посудині, наповненій касторовим маслом. Знайти динамічну в'язкість касторового масла.

89. Якої найбільшої швидкості може досягнути дощова крапля діаметром  $d = 0,3\text{ мм}$ , якщо динамічна в'язкість повітря дорівнює  $0,12 \cdot 10^{-4}\text{ Па}\cdot\text{с}$ .

90. Суміш свинцевих дробинок діаметром  $3\text{ мм}$  і  $1\text{ мм}$  опустили в бак з гліцерином глибиною  $1\text{ м}$ . На скільки пізніше впадуть на дно дробинки меншого діаметра порівняно з дробинками більшого діаметра? Динамічна в'язкість при температурі досліду  $1,47\text{ Па}\cdot\text{с}$ .

91. У бокову поверхню посудини встановлений горизонтальний капіляр, внутрішній діаметр якого  $d = 2\text{ мм}$  і довжина  $l = 1,5\text{ см}$ . У посудину налито гліцерин, динамічна в'язкість якого  $\eta = 1,0\text{ Па}\cdot\text{с}$ . Рівень гліцерину у посудині підтримується на висоті  $0,18\text{ м}$  від капіляру. Скільки часу потрібно на те, щоб з капіляру витекло  $5\text{ см}^3$  гліцерину?

92. На столі стоїть посудина, у боковій поверхні якої встановлений горизонтальний капіляр на висоті  $h_1 = 5\text{ см}$  від дна посудини. Внутрішній радіус капіляра  $r = 1\text{ мм}$  і довжина  $l = 1\text{ см}$ . В посудину налито машинне масло, густина якого  $\rho = 900\text{ кг/м}^3$  і динамічна в'язкість  $\eta = 0,5\text{ Па}\cdot\text{с}$ . Рівень масла в посудині підтримується на висоті  $h_2 = 5\text{ см}$  вище капіляра. Знайти, на якій відстані від кінця капіляра (по горизонталі) струмина масла падає на стіл.

93. Вертикальний циліндричний бак діаметром  $1\text{ м}$  і висотою  $2\text{ м}$  наповнили до краю рідиною, а потім у дні бака відкрили отвір площею  $2\text{ см}^2$ . Протягом якого часу вся рідина витече з баку?

### 3.5. Елементи теорії відносності

94. При якій відносній швидкості руху релятивістське скорочення довжини рухомого тіла складає  $0,25$ .

95. Яку швидкість повинно мати рухоме тіло, щоб його повздовжні розміри зменшились у два рази?

96. Мезони космічних променів досягають поверхні Землі з різноманітними швидкостями. Знайти відносне релятивістське скорочення розмірів мезона, швидкість якого дорівнює  $95\%$

швидкості світла.

97. У скільки разів збільшиться тривалість існування нестабільної частинки (за годинником нерухомого спостерігача), якщо вона починає рухатися зі швидкістю, яка складає 99% швидкості світла?

98. Мезон, який входить до складу космічних променів, рухається зі швидкістю, що дорівнює 95% швидкості світла. Який проміжок часу за годинником земного спостерігача відповідає одній секунді власного часу мезона?

99. \*Власний час життя мюона  $\tau_0 = 2,2 \text{ мкс}$ . Знайти час життя цієї частинки у системі відліку, в якій вона пролітає до розпаду шлях  $l = 300 \text{ м}$ .

100. Частинка масою  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$  (маса протона) розганяється під дією сили  $F = 4,8 \cdot 10^{-13} \text{ Н}$ . Через який час її швидкість стане рівною  $2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ?

101. Знайти швидкість частинки, кінетична енергія якої дорівнює її енергії спокою.

102. Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість частинки з масою  $m$  від  $0,6c$  до  $0,8c$ ? Порівняти отриманий результат зі значенням, яке дає класична формула.  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

103. Синхрофазотрон дає пучок протонів енергією  $10 \text{ ГеВ}$ . Знайти відношення швидкості протонів у цьому пучку до швидкості світла.

104. Визначити імпульс та кінетичну енергію електрона, що рухається зі швидкістю  $v = 0,9c$ .  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

105. Визначити релятивістський імпульс електрона, кінетична енергія якого  $E_k = 5 \text{ МеВ}$ .

106. Частинка рухається зі швидкістю  $v = 1 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . У скільки разів кінетична енергія частинки менша від енергії спокою?

107. \*Яку кінетичну енергію треба надати кораблю масою  $1 \cdot 10^4 \text{ кг}$ , щоб його годинник при поверненні на Землю, показував вдвічі менший час, ніж годинник на Землі? Якою буде при цьому швидкість корабля?

## 4. Додатки

### 4.1. Фундаментальні фізичні сталі

Гравітаційна стала	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Прискорення вільного падіння	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Електрична стала	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Маса електрона	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Маса протона	$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Елементарний заряд	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Електрон-вольт	$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$
Маса Землі	$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радіус Землі	$R_3 = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$

### 4.2. Густина деяких речовин

Речовина	$\rho \cdot 10^3 \text{ (кг/м}^3\text{)}$	Речовина	$\rho \cdot 10^3 \text{ (кг/м}^3\text{)}$
мідь	8,6	вода	1,00
залізо	7,9	гліцерин	1,26
свинець	11,3	касторове масло	0,89
ртуть	13,6	повітря	0,00129

### 4.3. Префікси для утворення кратних одиниць

Префікс	Позначення		Числове значення	Префікс	Позначення		Числове значення
тера	<i>T</i>	<i>T</i>	$10^{12}$	піко	<i>p</i>	<i>p</i>	$10^{-12}$
гіга	<i>G</i>	<i>G</i>	$10^9$	нано	<i>n</i>	<i>n</i>	$10^{-9}$
мега	<i>M</i>	<i>M</i>	$10^6$	мікро	<i>mk</i>	$\mu$	$10^{-6}$
кіло	<i>k</i>	<i>k</i>	$10^3$	мілі	<i>m</i>	<i>m</i>	$10^{-3}$



**4.4. Зв'язок деяких позасистемних одиниць вимірювання з СІ**

$$1\text{см} = 10^{-2}\text{м}; \quad 1\text{км} = 10^3\text{м};$$

$$1\text{см}^2 = 10^{-4}\text{м}^2;$$

$$1\text{л} = 1\text{дм}^3 = 1 \cdot 10^{-3}\text{м}^3; \quad 1\text{см}^3 = 10^{-6}\text{м}^3;$$

$$1\text{г} = 10^{-3}\text{кг}; \quad 1\text{т} = 10^3\text{кг}; \quad 1\text{г/см}^3 = 10^3\text{кг/м}^3;$$

$$1\text{кгс} = 9,8\text{Н};$$

$$1\text{км/год} = 0,28\text{м/с}$$

**4.5. Одиниці вимірювання деяких фізичних величин**

Швидкість $v$	$\text{м/с}$
Прискорення $a$	$\text{м/с}^2$
Частота обертання $\nu$	$\text{с}^{-1}$ ; $\text{об/с}$
Кутова швидкість $\omega$	$\text{рад/с}$
Кутове прискорення $\varepsilon$	$\text{рад/с}^2$
Момент інерції $I$	$\text{кг}\cdot\text{м}^2$
Сила $F$	$\text{Н}$
Момент сили $M$	$\text{Н}\cdot\text{м}$
Імпульс $p$	$\text{Н}\cdot\text{с}$ або $\text{кг}\cdot\text{м/с}$
Момент імпульсу $L$	$\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$
Жорсткість $k$	$\text{Н/м}$
Робота $A$	$\text{Дж}$
Енергія $E$ або $W$	$\text{Дж}$
Кількість теплоти $Q$	$\text{Дж}$
Потужність $P$	$\text{Вт} = \text{Дж/с}$
Тиск $p$	$\text{Н/м}^2 = \text{Па}$
Нормальна напруга $\sigma$	$\text{Н/м}^2 = \text{Па}$
Модуль Юнга $E$	$\text{Па}$
Температура по шкалі Кельвіна $T$	$\text{К}$
Динамічна в'язкість $\eta$	$\text{кг/м}\cdot\text{с}$ або $\text{Па}\cdot\text{с}$

## 5. Список використаної і рекомендованої літератури

1. Загальна фізика / за редакцією Ковалець М. О., Орленка В. Ф. Частина 1. *Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення*. Рівне : НУВГП, 2009. 396 с.
2. Фізика. Теорія і практика. Частина I. Механіка. (Практикум розв'язання задач з фізики) : навч. посібник / Гаращенко В. І., Соляк Л. В., Гаращенко О. В., Гаєвський В. Р., Мороз М. В. Рівне : НУВГП, 2020. 281 с.
3. Бендриков Г. О., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. А., Задачі з фізики для вступників до вузів. К., 1981. 368 с.
4. Гольфарб Н. Збірник запитань і задач з фізики. К., 1986. 311 с.
5. Гончаренко С. У. Фізика. Методи розв'язування задач. К., 1996. 206 с.
6. Hugh D. Young, Roger A. Freedman. University physics with modern physics. 14<sup>th</sup> edition. Pearson Education Limited. 2016. 1600 p.