

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА  
ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ТУРБАЛ МАРІАНА ЮРІЇВНА**

УДК 004.4:55 0.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

МЕТОДИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ СЕЙСМІЧНИХ ДАНИХ ТА  
ПРОГНОЗУВАННЯ НА ОСНОВІ СОЛІТОННОГО ПІДХОДУ

122 – Комп'ютерні науки

12 – Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 /М.Ю. Турбал/

Науковий керівник Мартинюк Петро Миколайович, доктор технічних наук,  
професор

Рівне - 2024

## АНОТАЦІЯ

*Турбал М. Ю.* Методи інтелектуального аналізу сейсмічних даних та прогнозування на основі солітонного підходу. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». – Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, 2024.

*Зміст анотації.* Дисертація присвячена вирішенню актуального наукового завдання вдосконалення програмно-апаратних комплексів сейсмічного моніторингу шляхом врахування локалізованих солітоноподібних збурень та розробки нових підходів до прогнозування їх траєкторій .

У вступі обґрунтовано актуальність дослідження, наведено зв'язок роботи з науково-дослідними темами, визначено мету та завдання дослідження, об'єкт та предмет дослідження, наведено перелік методів дослідження, що застосовувались для досягнення мети дисертаційної роботи. Сформульовано наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий творчий внесок здобувача. Подано відомості щодо апробації та опублікування результатів дослідження.

У першому розділі «Огляд програмних комплексів сейсмічного моніторингу та математичних моделей сейсмічних процесів» проаналізовано існуючі програмні комплекси сейсмічного та хвильового моніторингу з точки зору можливостей прогнозування сейсмічних поштовхів.

Розглянуто основні підходи та моделі, що використовуються для аналізу сейсмічних процесів. Серед теорій, які пояснюють виникнення передвісників, виділяється дилатантно-дифузійна модель, модель лавинно-нестійкого утворення тріщин, модель “крип”, в рамках якої розглядається виникнення землетрусу через прискорення руху бортів існуючого розлому. В дилатантно-дифузійній моделі поява передвісників землетрусів пояснюється надходженням води в зону майбутнього землетрусу після того, як через різке

зростання тектонічних напруг там починається масове утворення мікротріщин. Суть моделі лавинно-нестійкого утворення тріщин полягає в тому, що різні стадії утворення тріщин призводять до зміни фізичних характеристик середовища і можуть розглядатись як довгострокові передвісники.

Відзначено, що значної уваги заслуговує модель сейсмічного процесу, в основі якої розглядаються локалізовані солітоноподібні збурення як один з можливих фізичних механізмів, що впливають на процеси виникнення сейсмічних поштовхів. Розглянуто основні підходи до аналітичного опису процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень у нелінійних середовищах. Проблема моделювання процесів виникнення та поширення відокремлених хвиль має декілька аспектів, зокрема, це аналітичний опис профілю хвилі та наявність низки специфічних властивостей солітона, які гарантуються деякими методами вже на етапі їх застосування і не потребують додаткового дослідження. Наявність таких методів зумовлює їх складність. В той же час, профіль хвилі може змінюватись в часі, тоді така хвиля вже не буде солітоном в класичному розумінні, однак може мати солітонні властивості, які потребують додаткового дослідження. Солітонні розв'язки рівнянь, що розглядаються в рамках структурно-феноменологічного підходу, наприклад, є окремими частковими випадками розв'язків і не дають можливості вирішити питання утворення відокремленої хвилі з довільного початкового збурення.

У другому розділі «Методи ідентифікації траєкторій локалізованих збурень в областях сейсмічної активності» розглянуто метод T-представлень для дослідження властивостей траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах. Детально розглянуто моделі типу мілкої води та траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень в твердих анізотропних тілах. Застосування методу T-представлень дозволило провести дослідження траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в областях змінної густини. Виявлено властивості локалізованих солітоноподібних збурень, зокрема, показано, що локалізовані солітоноподібні від'ємні

збурення при взаємодії з областями малої густини різко змінюють свої траєкторії, має місце ефект на зразок відбивання на кванту світла на границі середовищ з різною густиною. Аналогічно ведуть себе додатні збурення у анізотропному твердому тілі у випадку руху в напрямку зростання густини, досліджено характер зміни траєкторій. Наявність такої властивості слід враховувати в процесі моделювання траєкторій локалізованих хвиль.

Складовими компонентами моделі сейсмічного процесу, що враховує локалізовані солітоноподібні збурення, є, зокрема, оператори, що визначають траєкторії солітоноподібних хвиль, функціонал який описує ймовірність виникнення землетрусу певної магнітуди в заданий момент часу в заданій точці за рахунок солітонних механізмів. Для обрахунку ймовірності поштовху, що відбувається в результаті проходження відокремленої хвилі через області, де накопичується сейсмічна енергія, необхідно робити оцінки траєкторій солітоноподібних хвиль за результатами спостережень їх окремих точок.

Метод прогнозування, що пропонується, полягає у виділенні з загальної сукупності землетрусів підпоследовностей, викликаних однією і тою ж солітоноподібною хвилею та побудові гіпотетичної траєкторії для кожної такої хвилі. Знаючи відстань між окремими поштовхами вздовж траєкторії можна оцінити швидкість. Знаючи окремі точки траєкторії, можна зробити оцінку самої траєкторії. Маючи оцінки швидкості та траєкторії кожної солітоноподібною хвилі, можна оцінити її положення в будь-який момент часу. Тоді можна оцінити сукупність положень солітоноподібних хвиль в будь-який момент часу та уточнити ймовірність поштовху.

У третьому розділі «Алгоритми прогнозування траєкторій локалізованих збурень, що ґрунтуються на основі інтерполяційних многочленів» розглянуто метод прогнозування на основі многочленів з оптимальним вибором степеня. Основна ідея полягає у розробці методики, яка дозволяє здійснювати аналіз прогнозних значень на основі інтерполяційних многочленів та виявляти випадки, коли вдається знайти найкращий степінь інтерполяційного многочлена для екстраполяції. Також здійснюється

дослідження властивостей прогнозів як середнього арифметичного прогнозних значень на основі інтерполяційних многочленів та доводяться деякі граничні властивості інтерполяційних многочленів.

У четвертому розділі «Пірамідальний алгоритм та його модифікації» розглянуто новий підхід до вирішення задачі екстраполяції. Основна ідея методу прогнозування, полягає в розробці ефективної методики знаходження прогнозного значення функції на основі точкових даних без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій. При цьому при побудові прогнозу використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у розділених різницях спеціального виду. Розглянуто відповідні необхідні та достатні умови, коли застосування критерію є ефективним. Запропоновано алгоритм екстраполяції, що полягає у побудові таблиці розділених різниць, інтерполюванні значень в середніх точках, вибору рядка таблиці у відповідності до критерію оптимального вибору та побудові обчислювальної процедури для знаходження прогнозного значення. Показано, що базовий пірамідальний метод еквівалентний побудові кубічного прогнозу по відповідному рядку таблиці розділених різниць. При цьому розглянуто концепцію інтервалу невизначеності та показано, що при виконанні базового критерію прогнозне значення потрапляє в середнє значення інтервалу невизначеності. Побудовано вдосконалення базового пірамідального критерію з врахуванням динаміки зміни функції на останньому інтервалі. Розглянуто новий клас похідних, який названий ML-похідною. Побудовано модифікацію базового пірамідального методу на основі ML-похідних, знайдено відповідний критерій для оптимального вибору рядка таблиці скінченних різниць.

У п'ятому розділі розглянуто приклади програмної реалізації відповідних алгоритмів. Запропоновано структурну схему розробки інформаційних систем сейсмічного моніторингу, які б враховували локалізовані солітоноподібні збурення та відповідні моделі сейсмічних

процесів. Розроблено online-додаток для дослідження локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності.

Основні наукові результати дисертації опубліковано в 24 працях, зокрема: дев'ять статей [2], [3], [5]-[11] у наукових фахових періодичних виданнях України; п'ять статей у закордонних фахових періодичних виданнях [1],[4],[12]-[14]; видано один патент на корисну модель [24]; вісім публікацій [16]-[23] у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових, науково-технічних конференцій. З них чотири роботи входить до міжнародних наукометричних баз Scopus та WoS [1]-[4].

*Ключові слова:* інтелектуальна система, дані, протокол, WEB-сервіс, сейсмічний процес, моніторинг, програмно-апаратний комплекс, солітоноподібне збурення, екстраполяція, многочлен, пірамідальний алгоритм, інформаційна система.

## SUMMARY

*Turbal M. Yu.* Methods of seismic data intelligent analysis and forecasting based on the soliton approach. - Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 122 «Computer Science». – National university of water and environmental engineering, Rivne, 2021.

*Contents of the summary.* The dissertation is devoted to the solution of the actual scientific problem on improvement of software and hardware complexes of seismic monitoring by taking into account localized soliton - like disturbances and development of new approaches to forecasting their trajectories. The introduction explains the relevance of the study, discovers the connection between the work and the research topics, sets the purpose and defines the research object and subject, lists the research methods used to achieve the goal of the thesis. The scientific novelty, practical significance of the obtained results, and personal creative contribution of the applicant are formulated. Information on approbation and publication of research results is given.

The first section "Review of mathematical models and software systems of seismic monitoring" analyzes the existing software systems of seismic and wave monitoring in terms of the ability to predict seismic shocks. One of the scientific directions that underlies the development of programs that have forecasting subsystems is neural network technologies based on the so-called Kohonen maps. In particular, networks learning the Feedforward Back Propagation method and the Guttenberg-Richter function to determine seismic activity are used to construct medium-term forecasts.

The main approaches and models used for the analysis of seismic processes are considered. Among the theories that explain the origin of the precursors, we can distinguish the dilatant-diffusion model, the model of avalanche-unstable crack formation, the “creep” model, which considers the occurrence of an earthquake due to the acceleration of the existing fault. In the dilatant-diffusion model, the

appearance of earthquake precursors is explained by the inflow of water into the zone of the future earthquake after the massive formation of microcracks begins there due to a sharp increase in tectonic stresses.

The essence of the avalanche-unstable crack formation model is that different stages of crack formation lead to changes in the physical characteristics of the environment and can be considered as long-term precursors.

It is noted that the model of seismic process deserves considerable attention, based on which localized soliton-like perturbations are considered as one of the possible physical mechanisms influencing the processes of seismic shocks. The main approaches to the analytical description of the processes of propagation of localized soliton - like perturbations in Hellenic media are considered.

The problem of modeling the processes of origin and propagation of isolated waves has several aspects, in particular, an analytical description of the wave profile and the presence of a number of specific properties of soliton, which are guaranteed by some methods at the stage of their application and do not require further study. The presence of such methods determines their complexity. At the same time, the wave profile may change over time, then such a wave will no longer be a soliton in the classical sense, but may have soliton properties that require further study.

Soliton solutions of equations considered in the framework of the structural-phenomenological approach, for example, are isolated partial cases of solutions and do not make it possible to solve the problem of formation of a separate wave from an arbitrary initial perturbation.

In the second section "Approximate methods for studying the trajectories of localized soliton-like perturbations in continuous media based on T-representations" the method of T-representations for studying the properties of trajectories of localized soliton-like perturbations in continuous media is considered. Models of shallow water type and trajectory of localized soliton-like perturbations in solid anisotropic bodies are considered in detail. The application of the T-representation method allowed to study the trajectories of localized soliton-like perturbations in the regions of variable density.



The properties of localized soliton-like perturbations are revealed, in particular, it is shown that localized soliton-like negative perturbations in interaction with low-density regions change their trajectories sharply, there is an effect like reflection on a quantum of light at media boundaries of different densities. Similarly, snbe conducts positive perturbations in an anisotropic solid in the case of motion in the direction of density increase, and the nature of the change in trajectories is investigated. The presence of such a property should be taken into account in the process of modeling the trajectories of localized waves.

In the third section "Model of seismic process, taking into account the soliton component. seismic processes and their specifics, problems of seismic zoning are considered. The components of the model of the seismic process, which takes into account the localized soliton-like perturbations, are, in particular, operators that determine the trajectories of soliton-like waves, functional that describes the probability of an earthquake of a certain magnitude at a given time at a given point due to soliton mechanisms. to calculate the probability of a shock (partial case of functional I) that occurs as a result of the passage of a separate wave through areas where seismic energy accumulates, it is necessary to estimate the trajectories of soliton-like waves based on observations of their individual points.

The proposed method of forecasting is to select from the total set of earthquakes subsequences caused by the same soliton-like wave and construct a hypothetical trajectory for each such wave. Knowing the distance between the individual shocks along the trajectory, you can estimate the speed. Knowing the individual points of the trajectory, you can estimate the trajectory itself. Having estimates of the speed and trajectory of each soliton-like wave, you can estimate its position at any time. Then you can estimate the set of positions of soliton-like waves at any time and specify the probability of shock.

The fourth section "Special algorithms for predicting the trajectories of localized soliton-like perturbations" discusses the method of forecasting based on polynomials with optimal choice of degree. The main idea of this work is to develop a method interpolation polynomial for extrapolation. The properties of predictions

as the arithmetic mean of predicted values on the basis of interpolation polynomials are also studied and some limiting properties of interpolation polynomials are proved.

The fifth section "Pyramid method of forecasting and its modification" discusses a new approach to solving the problem of extrapolation. The main idea of the forecasting method is to develop an effective method of finding the predicted value of a function based on point data without direct use of any specific classes of extrapolation functions. Thus at construction of the forecast the maximum quantity of the information which is concentrated in the separated differences of a special kind is used.

The relevant necessary and sufficient conditions for the application of the criterion are effective. An extrapolation algorithm is proposed, which consists in constructing a table of separated differences, interpolating values at midpoints, selecting a table row according to the optimal selection criterion, and constructing a computational procedure for finding the predicted value. It is shown that the basic pyramidal method is equivalent to the construction of a cubic forecast on the corresponding row of the table of separated differences.

In this case, the concept of the uncertainty interval is considered and it is shown that when performing the basic criterion, the pronoun value falls into the average value of the uncertainty interval. The improvement of the basic pyramidal criterion is constructed taking into account the dynamics of function change in the last interval. A new class of derivatives, which is called ML-derivative, is considered. A modification of the basic pyramidal method based on ML-derivatives is constructed, the corresponding criterion for the optimal choice of the row of the table of finite differences is found.

In the sixth section examples of software implementation of narrative algorithms are considered. The structural scheme of development of information systems of seismic monitoring which would consider the localized soliton-like disturbances and corresponding models of seismic processes is offered. An online

application for the study of localized soliton-like perturbations in areas of seismic activity has been developed.

The main scientific results of the dissertation were published in 24 works, in particular: nine articles [2], [3], [5]-[11] in scientific professional periodicals of Ukraine; five articles in foreign professional periodicals [1], [4], [12]-[14]; one patent for a utility model was issued [24]; eight publications [16] - [23] in the materials of international and all-Ukrainian scientific, scientific and technical conferences. Of these, four works are included in the international scientometric database Scopus [1]-[4].

Keywords: intellectual system, data, protocol, WEB-service, seismic process, monitoring, hardware and software complex, soliton-like disturbance, extrapolation, polynomial, pyramidal algorithm, information system.

## Список публікацій здобувача за темою дисертації

*Публікації у наукових виданнях, що індексуються у наукометричних базах Scopus, Web of Science:*

1. Turbal Y., Bomba A., Sokh A., Radoveniuk O., Turbal M. Pyramidal method of extrapolation for short time series. *International journal of computing science and mathematic.* 10(6). 2019. P. 122-130. <https://doi.org/10.1504/IJCSM.2019.104025>. **Scopus** (0.5/0.1 д.а.; авторський внесок–розробка алгоритму та чисельні експерименти).
2. Turbal Y., Sh likhta G., Turbal M., Turbal B. The polynomial forecasts improvement based on the algorithm of optimal polynomial degree selecting. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 5/4 (125). 2023. P. 34–42. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.289292>. **Scopus** (1/0.25 д.а.; авторський внесок–розробка загального алгоритму вибору многочлена оптимального степеня та обґрунтування умови застосування середнього арифметичного поліноміальних погнозів)
3. Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Radovenyuk E. A method of determining the maximum height of localized circular waves in the proximity of shallow water. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies.* 4(5/76). 2015. P. 13–16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.47859> **Scopus** (0.5/0.15 д.а.; авторський внесок–програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)
4. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Driwi A.A., Kunanets N. Modification of the "pyramidal" algorithm of the small time series forecasting . *CEUR Workshop Proceedings.* 2853. 2021. pp. 323–332. <https://dblp.org/db/conf/intelitsis/intelitsis2021.html> **Scopus** (0.56/0.13 д.а.; авторський внесок–програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

*Статті у фахових наукових виданнях України*

5. Бомба А.Я., Сьох А.П. Турбал Ю.В., Турбал М.Ю. Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць. *Вісник*

Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління" . Том 33. 2017. С.36-51. ISSN 2304-6201. (1/0.25 д.а.; авторський внесок – програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

6. Bomba A.Ya., Turbal M.Y., Sokh A.P., Radoveniuk O.V. Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv , Series Physics & Mathematics* . Vol. 2. 2017. P.146-151. ISSN 1812-5409. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–алгоритм просторового узагальнення, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

7. Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Турбал М. Ю. Модифікація "пірамідального" методу екстраполяції часових рядів на основі  $\mu\lambda$  – похідних. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* № 8. 2019. С. 28-33. ISSN 2222-0631. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–побудова таблиці  $\mu\lambda$  -похідних для базових функцій, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

8. Турбал Ю.В. , Бомба А.Я., Турбал Ю.В.,Турбал М.Ю. Деякі аспекти екстраполяції на основі інтерполяційних многочленів . *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології* . Вип. 33. 2021. С. 175-180 . ISBN 1816-1545. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок – обґрунтування можливості побудови прогнозного значення як середнього арифметичного поліноміальних прогнозів, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

9. Бомба А.Я., Турбал Ю.В., Радовенюк О.В., Клап А.В.,Турбал М.Ю. Метод аналізу процесів поширення кругових солітоноподібних хвиль в рамках наближення мілкої води. *Вісник НУВГП.* Вип. 3(71). Ч. 2. 2015. С.343-348. (0.6/0.13 д.а.; авторський внесок – теоретичні дослідження профілю локалізованого збурення та чисельні експерименти)

10. Турбал Ю.В., Бомба А.Я., Дріві А.А., Сумая А.Д., Турбал М.Ю. Локалізовані хвилі у соціокомунікативних середовищах. *Вісник НУВГП.* Вип.

1(89). 2020. С.97-106. (0.6/0.13 д.а.; авторський внесок – програмна реалізація та чисельні експерименти)

11. Бомба А.Я., Турбал Ю.В., Радовенюк О.В., Турбал М.Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання сейсмічних процесів на основі солітонного підходу. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. №2/5(22). 2015. С.26-30. ISSN 2226-3780 . (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–алгоритм ідентифікації траєкторій локалізованих збурень, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

*Статті у інших наукових виданнях*

12. Bomba A., Turbal Y., Turbal M. Method for studing the multi-solitone solutions of the Kortevveg de-Vries type equations. *Journal of difference equation*. Vol. 2015. P.1-10..doi 10.1155/2015/703039. (0.56/0.12 д.а.; авторський внесок– програмна реалізація та чисельні експерименти)

13. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Sokh A. T-transformation method for studing the multi-solitone solutions of the Kortevveg-de Vries type equations. *Journal of Mathematics and System Sciense*. № 7 . 2015. P. 279–285. doi:10.17265/2159-5291/2015.07.001 (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–дослідження солітон-солітонної взаємодії шляхом чисельного експерименту)

14. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Radoveniuk O. Method of Earthquake Prediction Based on the Soliton Mechanisms of Some Shocks. *Journal of Environmental Science and Engineering B*. № 3. 2014. P. 151-155. DOI:10.17265/2162-5263/2014.03.004 (0.5/0.12 д.а.; авторський внесок– програмна реалізація процесу побудови траєкторій солітоноподібних збурень та чисельні експерименти)

15. Турбал Ю.В., Турбал,М.Ю. Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає необхідні та достатні умови існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл. *Волинський математичний вісник*. №1. 2013. С.99–109. (0.62/0.3 д.а.; авторський внесок– чисельні експерименти)

*Публікації в матеріалах конференцій (тези доповідей)*

16. Turbal, Y., Turbal, M., Drivi, A. A., Ali, A. S. S. On the equivalence of the forecast value construction in the “pyramidal” extrapolation method and cubic forecast. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. (4). 2020. P. 67–70. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2020.15>

17. Turbal Y., Bomba A., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O. One method of data extrapolation. *XXX International Conference Problem of decision making under uncertainties*. Vilnius, 2017. P.122

18. Турбал Ю.В., Турбал М.Ю., Радовенюк О.В., Сьох А.П. Математичні моделі сейсмічних процесів, що враховують солітонну компоненту. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції*, м. Рівне . 2015. С.167-168.

19. Турбал Ю.В. Бомба А.Я., Турбал М.Ю. Математичні моделі сейсмічних процесів: солітонний підхід та  $\Omega$ -теорія. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції*, м. Рівне . 2018. С.35-36.

20. Turbal Y., Bomba A., Turbal M. M-modification of the “Pyramidal” Method of Data Extrapolation. *Modeling, Control and Information Technologies . Proceedings of III International scientific and practical conference*. 2019. С.21-24.

21. Turbal Y., Bomba A., Turbal M. Modeling of the solitary waves trajectories in “shallow water” environment. *Modeling, Control and Information Technologies . Proceedings of VI International scientific and practical conference*. 2023. P.96-101

22. Bomba A.Ya., Turbal Y.V., Turbal M.Y., Turbal B.Y. Extrapolation method based on averaged polynomial forecasts. *Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2023): Abstracts of XXXVIII Int. Conference, Poliana, Ukraine*. 2023. P.25.

23. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Driwi A. A. On the problem of the polynomial extrapolations convergence. *Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021): Abstracts of XXXVI Int. Conference, Poliana, Ukraine. 2021. P.110.*

*Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:*

24. Патент 63026 Україна, МПК (2011.01) G01V 1/00. Спосіб прогнозування афтершоків [Текст]/Турбал М.Ю.; заявник та власник Турбал Юрій Васильович. №u201102262; заявл. 25.02.2011 ; опубл 26.09.2011 бюл. № 18.5 с.:іл



## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ.....</b>	<b>20</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>21</b>
<b>РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ СЕЙСМІЧНОГО МОНІТОРИНГУ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СЕЙСМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ .....</b>	<b>28</b>
1.1. Сучасний стан проблеми прогнозування сейсмічних поштовхів та моделі, що пояснюють їх виникнення .....	28
1.2 Хвилі деформації та їх зв'язок з сейсмічними процесами. ....	34
1.3 Концепція локалізованих солітоноподібних збурень як генераторів сейсмічних поштовхів .....	42
1.4. Програмні комплекси сейсмічного моніторингу та алгоритми побудови прогнозів .....	46
<b>Висновки до першого розділу .....</b>	<b>53</b>
<b>РОЗДІЛ 2           МЕТОДИ   ІДЕНТИФІКАЦІЇ   ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ   ЗБУРЕНЬ   В   ОБЛАСТЯХ   СЕЙСМІЧНОЇ АКТИВНОСТІ .....</b>	<b>55</b>
2.1. Конструктивний метод дослідження траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах, що ґрунтується на основі Т-представлень. ....	55
2.1.1 Середовища типу “мілкої води” .....	58
2.1.2 Відокремлені хвилі в анізотропних пружних тілах .....	64
2.2 Задачі районування та уточнення ймовірностей сейсмічних поштовхів на основі траєкторій локалізованих збурень.....	69
2.3. Евристичні алгоритми ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль та прогнозування .....	73
<b>Висновки до другого розділу.....</b>	<b>77</b>

## **РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ЗБУРЕНЬ, ЩО ГРУНТУЮТЬСЯ НА ОСНОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ..... 79**

3.1 Конструктивна процедура побудови прогнозного значення на основі інтерполяційного многочлена Н'ютона-Грегорі другого виду..... 79

3.2. Співвідношення для обрахунку прогнозного значення на основі інтерполяційних многочленів..... 82

3.3. Алгоритм вибору вибору оптимального степеня інтерполяційного многочлена для екстраполяції ..... 85

**Висновки до третього розділу..... 91**

## **РОЗДІЛ 4 “ПІРАМІДАЛЬНИЙ” АЛГОРИТМ ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ..... 93**

4.1 Базовий “пірамідальний” метод прогнозування..... 93

4.2 Деякі властивості пірамідального методу..... 104

4.2.1 Про еквівалентність процедури побудови пірамідального прогнозу та кубічної екстраполяції..... 105

4.2.2. Квадратичний прогноз та процедура пірамідального методу..... 107

4.3 Інтервали прогновної невизначеності..... 111

4.4 Пірамідальний алгоритм без серединних точок ( $\Xi$ -алгоритм)..... 113

4.5 Модифікація  $\Xi$  -алгоритму..... 115

4.6 ML-Модифікація “пірамідального” методу екстраполяції..... 121

**Висновки до четвертого розділу..... 130**

## **РОЗДІЛ 5 ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА АНАЛІЗУ ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ЗБУРЕНЬ В ОБЛАСТЯХ СЕЙСМІЧНОЇ АКТИВНОСТІ..... 132**

5.1 WEB-сервіси для роботи з даними сейсмічного моніторингу ..... 132

	19
5.1.1 WEB-сервіс FDSN та його специфіка.....	132
5.1.2 Сервіс FDSNWS Dataselect .....	136
5.1.3 Сервіс FDSNWS Station.....	139
5.1.4 Сервіс FDSNWS Event .....	140
5.2 Структура програмного комплексу.....	141
<b>Висновки до п'ятого розділу .....</b>	<b>160</b>
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>161</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>164</b>
<b>ДОДАТКИ.....</b>	<b>186</b>
Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації.....	186
Додаток Б. Довідки про впровадження.....	191
Додаток В. Траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень при різних початкових умовах.....	194
Додаток Г. Специфікації параметрів для веб-сервісів FDSN .....	201

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ

IS – Інформаційна система.

SAM (англ. Seismic, acoustic, and magnetic) – модель пружних відбивань.

ASR (англ. Advanced Seismic Receiver) – приймач сейсмічних сигналів.

WSG (англ. Windows Seismic Grafer) – програма для обробки сейсмічних сигналів та отримання параметрів гіпоцентрів сейсмічних поштовхів.

HPC (англ. High Performance Computing) – високопродуктивні обчислення.

USGS (англ. U.S. Geological Survey) – геологічна служба США.

M8 – алгоритм прогнозування землетрусів.

ML –метод екстраполяції, модифікація пірамідального методу.

WEB (англ. World Wide Web) – інтернет-простір.

FDSN (англ. International Federation of Digital Seismograf Network) – інтернет-сервіс, Міжнародна федерація цифрових сейсмографічних мереж.

URI (англ. Uniform Resource Identifier) –уніфікований ідентифікатор ресурсів.

URL (англ. Uniform Resource Locator) – уніфікований локатор ресурсів.

WADL (англ. Web Application Description Language – мова опису інтенет-додатків.

HTTP (англ. HyperText Transfer Protocol) – протокол передачі гіпертексту.

UTC (англ. Coordinated Universal Time) – стандарт часу.

ESA (англ. European Space Agency) – Європейське космічне агентство.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Незважаючи на те, що на сьогоднішній день відомі сотні передвісників землетрусів та низка теорій, що пояснюють їх виникнення, проблема прогнозування в багатьох її аспектах залишається відкритою. А тому інтенсивні наукові дослідження в даній галузі проводяться і сьогодні, зокрема, в напрямку розробки програмно-апаратних комплексів сейсмічного моніторингу.

Складність прогнозування сейсмічних поштовхів вимагає врахування усіх можливих фізичних явищ, що відбуваються в зонах сейсмічної активності. Останніми роками експериментально зафіксовані пульсаційні збурення у гірських породах, відмінні від сейсмічних хвиль гармонічного типу [72,111,112], розглядалися відокремлені хвилі деформації [120,124]. Ці результати підтверджують перспективність побудови моделей сейсмічних процесів, що враховують відокремлені хвилі деформації солітонного типу та розробки програмних комплексів, що враховують солітонну складову.

Однак, відокремлені хвилі складно зафіксувати в силу їх просторової локалізації. При аналізі сейсмічних процесів, наприклад, локалізовані хвилі можна зафіксувати лише по серіях сейсмічних поштовхів, які вони можуть зумовлювати і які фіксуються сейсмічними станціями. Тоді важливою є задача аналізу даних спостережень, методи групування даних, які можна віднести до одної відокремленої хвилі з метою побудови оцінки її траєкторії. Інформація про траєкторії відокремлених хвиль та характер їх руху має важливе прикладне значення у випадках, коли відокремлені хвилі самі становлять небезпеку (як, наприклад, цунамі) чи є причиною інших небезпечних для людини явищ (наприклад, землетрусів).

У вітчизняній школі кібернетики та інформатики, котра створена В. М. Глушковым, досягнуто значних результатів у напрямку розвитку новітніх інформаційних технологій. Передумовою побудови солітонних моделей сейсмічних процесів та відповідних програмно-апаратних систем

моніторингу сейсмічних поштовхів стали роботи вітчизняних вчених С.А. Вижви, О.В. Кендзери, Г.Т. Продайводи а також А.В. Вікуліна, Г.В. Дрейдена, Я. Козака, Я. Сілени, Н.І. Остросабліна, Б.Д. Анніна, А.В. Порубова. Важливе місце серед методів знаходження солітонних розв'язків еволюційних рівнянь займають теоретичні результати Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольського, В.Є. Захарова, А.М. Самойленка, А.К. Прикарпатського, В.Г. Самойленка, М.М. Притули, І.Т. Селезова, В.Ф. Губарєва, А.Я. Бомби, О.А. Рябенка., П.М. Мартинюка, Ю.В. Турбала.

Наявність великих об'ємів інформації, яку необхідно враховувати при вирішенні проблеми прогнозування землетрусів, зумовлює необхідність використання відповідних програмно-апаратних комплексів, що об'єднують апаратні системи моніторингу та відповідні програмні комплекси для обробки та аналізу даних. Однак, існуючі програмні комплекси містять, як правило, лише підсистеми статистичного аналізу і не дають можливості здійснювати короткострокові прогнози поштовхів з прийнятною точністю. А тому розробка програмного забезпечення для прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень, що базується на основі сучасних підходів до екстраполяції даних є актуальною науково-практичною задачею.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційне дослідження пов'язане з науково-дослідною роботою Національного університету водного господарства та природокористування, зокрема науковою темою «Методи ідентифікації параметрів та математичні моделі, що ґрунтуються на базі багатоканальних систем масового обслуговування», номер держреєстрації №0114U0011181, де здобувачу належить метод ідентифікації параметрів .

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційного дослідження є вдосконалення алгоритмічного забезпечення програмно-апаратних комплексів сейсмічного моніторингу шляхом розробки нових підходів до інтелектуального аналізу даних та прогнозування в умовах малих виборок з використанням моделей сейсмічних процесів, що враховують локалізовані

солітоноподібні збурення. Досягнення поставленої мети вимагає виконання таких завдань:

1. Визначити можливі шляхи підвищення ефективності програмно-апаратних комплексів сейсмічного моніторингу з врахуванням нових фізичних механізмів в областях сейсмічної активності та розробки на їх основі нових алгоритмів аналізу даних та прогнозування.

2. Поширити загальну методику дослідження локалізованих солітоноподібних збурень на основі T-представлень на випадок хвиль деформації, що можуть виникати в областях сейсмічної активності та дослідити особливості траєкторій локалізованих збурень у областях зміни густини.

3. Вдосконалити математичну модель сейсмічного процесу, що враховує локалізовані солітоноподібні збурення, шляхом застосування нових методів прогнозування їх траєкторій.

4. Вдосконалити існуючі підходи до екстраполяції даних на основі многочленів шляхом розробки методів автоматизованого вибору оптимального степеня екстраполяційного многочлена.

5. Розробити нові підходи до інтелектуального аналізу сейсмічних даних, в основі яких лежить технологія пошуку закономірностей у рядах розділених різниць.

6. Розробити програмний комплекс для інтелектуального аналізу солітонної складової хвильових процесів в зонах сейсмічної активності на основі даних сейсмічного моніторингу.

**Об'єкт дослідження.** Методи аналізу та обробки даних у програмно-апаратних комплексах сейсмічного моніторингу.

**Предмет дослідження.** Моделі, методи та алгоритми інтелектуального аналізу сейсмічних даних та прогнозування на основі солітонного підходу.

**Методи дослідження.** Для досягнення поставленої в дисертаційній роботі мети використані наступні методи дослідження: методи системного та порівняльного аналізу для обґрунтування актуальності та постановки

наукового завдання дисертаційної роботи; методи інтерполяції та екстраполяції функцій; методи інтелектуального аналізу даних; апарат модельно-орієнтованих підходів та методи формування ієрархічних систем в процесі розробки програмного комплексу.

### **Наукова новизна отриманих результатів.**

1. Набув подальшого розвитку метод дослідження траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень у нелінійних середовищах на основі T-представлень, який відрізняється вибором специфічного представлення форми профілю хвиль та розглядом інфінітимального випадку, що дозволило оцінити траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень та врахувати отримані результати у відповідному програмному забезпеченні для прогнозування траєкторій локалізованих хвиль.

2. Удосконалено математичну модель сейсмічного процесу, що враховує локалізовані солітоноподібні збурення в областях сейсмічної активності, шляхом застосування нових методів прогнозування траєкторій окремих локалізованих хвиль на основі серій сейсмічних поштовхів, що дозволило вдосконалити відповідні модулі прогнозування у програмно-апаратних комплексах сейсмічного моніторингу.

3. Вперше розроблено методи автоматизованого вибору оптимального степеня екстраполяційного многочлена на основі точкових даних спостережень. Це дозволило створити алгоритми екстраполяції даних на основі інтерполяційних многочленів, що характеризуються меншою похибкою екстраполяції у порівнянні з класичними методами екстраполяції на основі многочленів та використати їх для прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності.

4. Вперше розроблено “пірамідальний” підхід до екстраполяції даних, який характеризується наявністю спеціальних алгоритмів пошуку закономірностей у рядах розділених різниць та не використовує явних аналітичних залежностей для побудови функції прогнозу. Це дало змогу розробити низку методів екстраполяції даних, які дозволили в межах умов



застосування даної методики уникнути значних похибок екстраполяції, пов'язаних з використанням явних функціональних інтерполяційних залежностей.

5. Отримали подальший розвиток методи розробки архітектури інформаційних систем для дослідження сейсмічних процесів з врахуванням модулів аналізу та прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності. Це дає можливість інтегрувати модулі аналізу та прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в існуючі програмно-апаратні комплекси сейсмічного моніторингу чи створювати окремі незалежні сервіси для ідентифікації локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності і відповідно, уточнення ймовірності майбутніх можливих сейсмічних поштовхів .

**Практичне значення отриманих результатів.** Розглянуті методи моделювання локалізованих солітоноподібних збурень у нелінійних середовищах, спеціальні методи екстраполяції даних дозволили удосконалити сучасне програмне забезпечення для обробки даних сейсмічного моніторингу. Методи, представлені у дисертаційному дослідженні, зокрема, прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень реалізовано у відповідному програмному комплексі та як online-сервіс. Результати роботи впроваджено у навчальний процес Національного університету водного господарства та природокористування (акт впровадження від 10.02.2021 р.) .

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати дисертаційної роботи сформульовані та отримані автором самостійно. У наведених працях (Додаток А), опублікованих із співавторами, здобувачеві належать: зокрема у [1] знайдено критерій ефективності відповідної обчислювальної процедури пірамідального методу для побудови екстраполяції , [2] – запропоновані певні модифікації розділених різниць , [3] – запропоновано метод ідентифікації точки максимуму локалізованої хвилі, [4] – запропоновано модифікацію

алгоритму вибору рядка таблиці розділених різниць для побудови прогнозу, [5] – запропоновано обґрунтування пірамідального підходу, [6]–здійснено просторове узагальнення пірамідального підходу, [7] – здійснено програмну реалізацію алгоритмів прогнозування в межах М-модифікації, [8] –здійснено чисельний аналіз методу автоматизованого вибору степеня многочлена для екстраполяції, [9] – здійснено узагальнення методу Т-представлень на двохвимірний випадок, [10] –здійснено дослідження можливості виникнення локалізованих збурень у соціокомунікативних середовищах, [11] – розроблено алгоритм моделювання локалізованих збурень та наведено приклад аналізу сейсмічного процесу в префектурі Фукусіма, Японія, 2011 р., [12]-[13]–дослідження методу Т-представлень для рівнянь типу Кортевега де-Вріза, [14]–запропоновано модель сейсмічного процесу.

З наукових робіт, опублікованих у співавторстві, у дисертаційній роботі використані результати особистих досліджень здобувача.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертаційної роботи доповідались на конференціях: “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”- матеріали Всеукраїнської наукової конференції, м. Рівне, 2015р.; “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS-2015)”-матеріали міжнародної конференції, Львів, 24-25 вересня, 2015р.; “IV Міжнародна науково-практична конференція ІТ&І”, Київ, 2017; “IntelITSIS’2021: 2nd International Workshop on Intelligent Information Technologies and Systems of Information Security”, March 24–26, 2021, Khmelnytskyi; “Modeling, control & information technologies”, 2020 05.11.2020 - 07.11.2020, Україна; Computational & Information Technologies for Control & Modeling (CITCM), 2021, Rivne; “XXX International Conference Problem of decision making under uncertainties”. Vilnius, Lithuania, 2017; “Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015)”, XXVI Int. Conference, Shidnitsa, Ukraine, May 11-15– 2015; “Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2015)”: XXVI Int. Conference, Odesa, Ukraine, August, 23-28– 2015.

**Публікації.** Основні наукові результати дисертації опубліковано в 24 працях, зокрема: дев'ять статей [2], [3], [5]-[11] у наукових фахових періодичних виданнях України; п'ять статей у закордонних фахових періодичних виданнях [1],[4],[12]-[14]; видано один патент на корисну модель [24]; вісім публікацій [16]-[23] у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових, науково-технічних конференцій. З них чотири роботи входить до міжнародних наукометричних баз Scopus та WoS [1]-[4].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 238 найменувань та додатків. Повний обсяг дисертації складає 185 сторінок, основний зміст викладено на 140 сторінках, де наведено 51 рисунок та 15 таблиць.

## РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ПРОГРАМНИХ КОМПЛЕКСІВ СЕЙСМІЧНОГО МОНІТОРИНГУ ТА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СЕЙСМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

### 1.1. Сучасний стан проблеми прогнозування сейсмічних поштовхів та моделі, що пояснюють їх виникнення

Землетруси – це короткотривалі, раптові коливання Землі, які викликані змінами в стані надр планети. Початкові поштовхи породжують різноманітні пружні хвилі складної структури, що поширюються в товщі гірських порід, зокрема, гармонічні сейсмічні хвилі.

Процес накопичення сейсмічної енергії перед потужним землетрусом супроводжується змінами у геофізичних полях, зокрема, спостерігаються аномальні зміни стану земної кори, пов'язані з виникненням незначних сейсмодислокацій, відбуваються зміни сейсмічного режиму, низка електромагнітних явищ в земній корі та атмосфері (зокрема, іоносфері), зміни хімічного стану природних вод та ґрунтів, гідродинамічні зміни тощо [75-76]. Такі зміни можна ідентифікувати та класифікувати як певні передвісники землетрусів. На сьогодні відомо кілька сотень передвісників. Велика група стосується зміни певних фізичних параметрів, зокрема, геологічних, геохімічних, гідродинамічних, геодезичних, космічних. В той же час є низка біологічних передвісників, що враховують поведінку рослин та тварин перед землетрусом.

За останні сто років сейсмологи розробили та обговорили величезну кількість концепцій для оцінки фізики землетрусів та їх передбачуваності. При цьому розглядалися різні типи форшоків [1],[2]; прискорене вивільнення сейсмічного моменту, передсейсмічна активація або форшокова активність, сповільнення-прискорення моментного випуску [3]-[4]; досейсмічний спокій, попередні рої, закономірності зростання сейсмічної активності [5]-[6],[1]; внутрішня або зовнішня сейсмічна міграція [7]-[8], теорії, що пояснюють запуск землетрусу та виникнення форшоків, афтершоків [9]-[10], пружні відбивання і взаємодія кулонівських напружень, а також накопичення

напружень, модель (SAM) [11]; сейсмічні розриви [12]-[13]; критичні області визначені кулонівським напруженням та/або області спокою [13]-[14]; переривчаста критичність, моделі «критичної точки», систематичне збільшення сейсмічності з середнього рівня до сильного землетрусу, сейсмічну активацію, критичні фазові переходи, прискорений сейсмічний викид (ASR), збільшення кореляційних довжин або довжини кореляції активації, корельовану сейсмічність, самоорганізовану критичність, фазові переходи, критичні явища, просторово-часові кореляції, кооперативну поведінку порогових систем [15]-[17], степеневий закон вивільнення деформації Беніоффа, модель послідовності афтершоків епідемічного типу, теорія груп перенормування для ієрархічних систем, моделі пучків волокон, моделі перколяції, механіка безперервного пошкодження, «сингулярності скінченного часу» [18]-[19], теорії прискорення сейсмічності [20]-[21], самоподібність мереж розломів [22]-[23], періоди повторення та взаємоповторюваності [24]-[25].

Існує низка моделей, які пояснюють виникнення передвісників, зокрема, модель лавинно-нестійкого утворення тріщин [26], дилатантно-дифузійна модель [27], модель “крип”, в рамках якої розглядається виникнення розломів, що динамічно змінюють конфігурацію в часі, відбувається рух бортів розлому і це призводить до виникнення сейсмічного поштовху.

Модель лавинно-нестійкого тріщиноутворення була запропонована В. Н. Мячкіним [27]. Вона передбачає процес взаємодії полів напружень тріщин і локалізації областей, де вони утворюються. Напруги, що діють тривалий час в гірських породах, викликають поступове утворення тріщин. Коли досягається деяка критична щільність тріщин, починається лавиноподібний процес їх об'єднання, що супроводжується концентрацією тріщин в одній вузькій зоні, в якій і відбувається макророзрив, що призводить до землетрусу.

Існують також моделі нестійкого ковзання, консолідації та ін. Суть моделі лавинно-нестійкого утворення тріщин полягає в тому, що різні стадії

утворення тріщин призводять до зміни фізичних характеристик середовища і можуть розглядатись як довгострокові передвісники.

Особливостями дилатантно-дифузійної моделі є врахування надходженням води в зону майбутнього землетрусу, дифузія. За рахунок надходження води відбувається різке зростання тектонічних напруг, починається масове утворення мікротріщин. Згідно дилатантно-дифузійної моделі, процес підготовки землетрусу поділяється на три стадії. Перша характеризується збільшенням тектонічної напруги; друга - виникненням мікротріщин відриву, коли напруги практично дорівнюють межі міцності порід. При цьому відбувається деяке збільшення обсягу порід, зване дилатансією. Якщо напруги продовжують зростати, то це призводить до макроруйнування обсягу порід, до землетрусу.

При дослідженні сейсмічних процесів найбільш розвинутими є статистичні методи. Відомий емпіричний закон Гутенберга-Ріхтера [28] ґрунтується на припущенні експоненційної залежності ймовірності сейсмічного поштовху від магнітуди, має місце співвідношення виду:  $P\{Mag > M\} = e^{-\beta M}$ . Формула Оморі описує залежність кількості поштовхів від заданої нижньої границі магнітуди та часу:

$$n(t) = K / (t + c)^p,$$

де  $K$  - параметр, що залежить від нижньої границі магнітуди,  $c$ ,  $p$  - параметри, що не залежать від цієї границі. Якщо зобразити  $n(t)$  у двічі логарифмічному масштабі, отримаємо пряму, нахил якої  $p$ .

Т.Утсу [30] досліджував зв'язок магнітуди основного поштовху і інтенсивності афтершокової активності та отримав співвідношення виду:  $\log_{10} A = \alpha M + const$ , де  $A$  - кількість афтершоків.

Т. Утсу і А. Секі [30] знайшли зв'язок площі сейсмоактивного регіону і магнітуди основного поштовху:  $\log_{10} S = 1.2M - 4.0$ . З врахуванням останніх законів можна отримати співвідношення виду:

$n(t) = 10^{0.85(M_0 - M_r) - 1.83} / (t + 0.3)^{1.3}$ , де  $M_0$  -магнітуда головного поштовху,  $n(t)$  - кількість поштовхів магнітуди  $M$  і більше.

Низка дослідників, зокрема С. Ломніз та Ф. Нава [31], розглядали послідовність поштовхів, зокрема, афтершоків як нестационарний пуассонівський процес. Д. Веа-Джонс [33] дослідив можливість застосування методів Джефріса для обґрунтування незалежності моментів поштовхів. Аналогічні результати отримані С. Ломнізом та А. Хаком за допомогою автокореляцій. Однак, при аналізі багатьох серій замлетрусів відповідний зв'язок все ж був виявлений. Міграція окремих землетрусів досліджувалась у роботах К. Могі, Я. Огати і К. Катсури, Т.Утсу.

Д. Веа-Джонс і Р.Девіес [33] запропонували модель, в межах якої розглядається декілька основних рівномірно розподілених в часі поштовхів, кожен з яких генерує серію афтершоків. Була визначена умовна ймовірність афтершоку на інтервалі  $(t, t + dt)$ , що згенерований основним поштовхом в момент часу  $t_0$  як  $\sigma_{t_0}(t)dt$ , де

$$\sigma_{t_0}(t) = \begin{cases} \xi f(t - t_0), & t \geq t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

$\xi$  -середня кількість подій, зумовлених основним поштовхом.

В роботі [33] розглядалась функція виду:  $f(t) = (p - 1)c^{p-1} / (c + t)^p$ . Ломніз і Нава [31] розглядали величину  $\xi$  з попередньої моделі пропорційною величині  $M - M_r$ , де  $M$  -магнітуда основного поштовху,  $M_r$  -залишкова магнітуда.

Д. Кендал [34] розглядав сейсмічні процеси в межах теорії процесів народження та смерті. Для кожного процесу  $x$ , який існує в момент  $t$ , на інтервалі  $(t, t + dt)$  існує ймовірність народження  $g(t)dt$  і смерті  $h(t)dt$ .

Процеси народження та смерті розглядались А. Ховксом у роботі [34]. При цьому розглядались міграції  $\mu$  в кожен момент часу, що мали інтенсивність, яка визначається співвідношенням:

$$\lambda(t) = E[dN(t) | \text{history of } N(s) \text{ at time } t] / dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \Pr[\text{ivent}(t, t + dt) | \text{history of } N(s) \text{ at time } t] = \mu + \sum_{t_i < t} g(t - t_i).$$

Такий процес можна розглядати і з точки зору кластеризації [34]. Процес  $N_c(t)$  моментів народження центрів кластерів можна вважати пуассонівським з параметром  $\mu$ . Кластер допоміжних подій, утворений нащадками, асоціюється з кожною подією  $N_c(t)$ , причому інтенсивність процесу визначається за допомогою співвідношення:

$$\begin{aligned} \lambda_j(t) &= E[dN_j(t) | \text{history of } N_m(s) \text{ for all } m \text{ at time } t] / dt = \mu_j + \sum_m \sum_{t_i^m < t} g_{im}(t - t_i^m) = \\ &= \mu_j + \sum_m \int_0^t g_{im}(t - s) dN_m(s). \end{aligned}$$

Автори розглядали випадок, коли  $g_{im}(t) = c(m)g(t)$ . Зауважимо, що для цієї моделі розглядалися різні варіанти інтенсивності та функції  $g(t)$ . Так С. Ломніз [31] розглядав випадок  $\lambda(t) = \mu + \sum_{t_i < t} c(m_i)g(t - t_i)$ ,  $g(t) = ae^{-\alpha t}$ , Я. Огата

$$-g(t) = K / (t + c)^p, \text{ Я. Огата і Х. Акаїке } -g(t) = \sum_{k=1}^k a_k t^{k-1} e^{\alpha t}.$$

Епідемічні та тригерні моделі порівнювались і було показано, що епідемічні моделі дають кращі результати на розглядуваних даних.

Серед моделей, які пояснюють виникнення сейсмічних поштовхів, вирізняється ротаційна модель А.В. Вікуліна [36]. Ця модель особливо корелюється з солітонними підходами, що взяті за основу фізичної моделі в даній роботі, оскільки там виникає рівняння SIN-Гордона, що має солітонні розв'язки. В роботі [36] розглядаються окремі частини земної кори, які можуть обернутися і створювати поля пружних напруг. Автор назвав їх сейсмофокальними блоками. Рівняння для блоку можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = K_0^2 \sin \theta. \text{ А це відоме рівняння SIN-Гордона, яке має розв'язки}$$

виду:

$$\theta(z, t) = 4 \arctg \exp(\pm K_0 \gamma (z - vt - z_0)), \gamma = [1 - v^2 / c^2]^{-1/2}, v, z_0 \text{-сталі.}$$



Обидва розв'язки описують локалізовану зміну кута від двох напрямків:  $\theta = 0, \theta = 2\pi$ . Відповідні розв'язки автор називав солітоном та антисолітоном. Окрім того, рівняння SIN-Гордона має розв'язки як комбінації солітона та антисолітона, які називаються бризерами а також N-солітонні розв'язки.

В роботах [35,36] було отримано низку фундаментальних результатів. Зокрема, було продемонстровано незалежність магнітуди сильних афтершоків від часу. Було введено поняття продуктивності землетрусу відносної магнітуди (число ініційованих безпосередньо цим землетрусом подій магнітудою не нижче за поріг, що визначається фіксованою різницею щодо цього землетрусу).

Встановлено, що ця величина має експонентний розподіл, а середнє значення розподілу швидко зменшується з глибиною вогнища. Експонентний розподіл числа афтершоків відносної магнітуди пояснює форму розподілу різниці магнітуди основного поштовху та найсильнішого афтершоку (закон Бота). Розмах (дисперсія) цього розподілу визначається значенням параметра  $b$  закону Гутенберга-Ріхтера, а положення моди розподілу середнім значенням числа афтершоків відповідної магнітуди. Це дозволяє оцінити залежність різниці магнітуди основного поштовху і найсильнішого афтершоку від часу.

В.І. Кейліс-Борок та І.М. Гельфанд [37] запропонували феноменологічний підхід до ідентифікації сейсмонебезпечних зон, заснований на морфоструктурному районуванні та розпізнаванні образів. Методологія дозволяє визначати сейсмогенні вузли, в яких можливе виникнення сильних землетрусів за комплексом геологічних, геоморфологічних та геофізичних ознак, які не містять інформації про відому сейсмічність регіону, що вивчається. У період 1972-2018 років було вивчено загалом 26 сейсмоактивних регіонів світу та опубліковано карти, що показують положення розпізнаних сейсмонебезпечних вузлів у кожному регіоні. Згодом у 11 із цих регіонів сталися землетруси відповідних магнітуд. Було проведено аналіз кореляції пост-публікаційних подій відповідних магнітуд із розпізнаними раніше

сейсмогенними вузлами. Тест був виконаний з використанням каталогу землетрусів NEIC, оскільки він з однаковою точністю визначає місцезнаходження та магнітуди землетрусів у всьому світі. Було встановлено, що 86% таких подій відбулися в розпізнаних сейсмогенних вузлах. Проведений аналіз демонструє достатню ефективність та надійність методики розпізнавання сейсмогенних вузлів та підтверджує загалом гіпотезу про зв'язок сильних землетрусів із вузлами.

## **1.2 Хвилі деформації та їх зв'язок з сейсмічними процесами.**

Останніми роками все більш широко використовуються хвильові уявлення для пояснення окремих аспектів сейсмічних процесів, зокрема, міграції сейсмічності. Геологічні середовища моделюються пружними, квазіпружними, пластичними або в'язкопластичними тілами, які під дією зовнішньої сили мають деформації об'єму (розтяг та стиск) та форми (зсув). Якщо до середовища прикласти силу, то в ньому завжди виникає хвиля. В фізиці найбільш загальне визначення хвильових рухів полягає в наступному. Хвилі - це зміни стану середовища (збурення), що поширюються в цьому середовищі та які несуть з собою енергію. Головна властивість усіх хвиль, незалежно від їх природи, полягає в тому, що у хвилі здійснюється перенесення енергії без перенесення речовини .

Проходження хвилі деформацій через геологічне середовище супроводжується різними сейсмічними, гідрогеологічними, електрокінетичними, геохімічними та іншими ефектами. Теоретичною основою відповідних уявлень стали хвилі деформації. К. Касахара [38] продемонстрував записи нахиломірів, з яких випливало існування в земній корі деформацій, які мігрують вздовж Тихоокеанського узбережжя о. Хонсю з сходу на захід з аномально низькою швидкістю (близько 20 км/рік). Виявлена просторова кореляція міграції деформацій з режимом сейсмічної та вулканічної активності прилягаючих територій давала ключ до розуміння механізму передачі напруг у земній корі.

Формування концепції деформаційних (тектонічних) хвиль Землі розвивалося на основі двох відкриттів: міграції вогнищ сильних землетрусів уздовж глибинних розломів [40,41] та глобальної тектоніки плит [42]. Уявлення про літосферні плити, розділені потужними розломами та підстилані в'язкою астеносферою, привели до побудови трьох типів теоретичних моделей деформаційних хвиль:

- 1) моделей шаруватих середовищ (літосфера – астеносфера) ;
- 2) моделей шаруватих середовищ з додаванням ефекту вигину жорсткої літосферної плити [42,43] ;
- 3) моделей розломів з в'язким прошарком між бортами (в'язко-пружні) [ 44; 45].

Ці моделі були призначені для опису повільних хвиль деформації, що відповідають міграції сильних землетрусів вздовж трансформних розломів та жолобів (впадин). У міру накопичення даних натурних спостережень і лабораторних експериментів були виявлені нові факти, які неможливо пояснити в рамках лінійної теорії пружності (в'язко-пружності чи пружнопластичності). Пошуки аналогій та побудова нових, нелінійних, математичних моделей деформування розломно-блокових геологічних середовищ були мотивовані саме цими обставинами.

Окремим етапом розвитку теорії деформаційних хвиль Землі почався після опублікування В.М. Ніколаєвським статті [46], в якій було, по суті, постульовано рівняння  $\sin$ -Гордона для моделювання в блоковому геологічному середовищі повільних відокремлених хвиль. Ознаки цих хвиль спостерігалися у вигляді міграції аномалій геофізичних полів поблизу розломів [47].

Ще у 1969 р. американський фізик В. Ельзассер вперше розглянув механізм передачі напруг уздовж контакту літосфера - астеносфера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{h_1 h_2 E_1}{\mu}.$$

Рівняння (1) має вигляд рівняння дифузії або рівняння теплопровідності. Ключовим моментом моделі є в'язке зчеплення між літосферою та астеносферою, що характеризується параметром довжина хвилі обурення. Зі стандартного розв'язку рівняння дифузії випливає, що швидкість ковзання плити рівна 1 см/рік, що добре узгоджується з даними сучасних GPS-вимірювань в різних регіонах світу [47; 48].

М. Ботт і Д. Дін [49] вперше застосували модель Ельзассера (1) при дослідженні міграції напруги на межах літосферних плит і ввели термін «stress or strain waves».

Д. Андерсон [50] узагальнив модель Ельзассера з метою з'ясування механізму міграції землетрусів в зоні субдукції і оцінив швидкість хвилі напруги вздовж острівної дуги в 50-170 км/рік. Хвиля деформації генерується в зоні субдукції та поширюється зі швидкістю  $v$  вздовж розлому по плиті, що занурюється. При вибраних параметрах моделі Ельзассера ( $h_1=50$  км,  $h_2=200$  км,  $\mu=5 \times 10^{18}$  Па·с,  $E_1=10^{11}$  Па) швидкість переносу зсувної деформації після часу  $t_1=1$  рік дорівнює  $v=170$  км/рік і зменшується до  $v=50$  км/рік після проходження відстані 520 км за  $t_2=10$  років. Ці розрахунки відповідають даним про швидкості міграції землетрусів [51-52].

Дж. Райс [53] модифікував модель Ельзассера, замінивши ньютонівську реологію в'язкої астеносфери на максвеллівську реологію в'язкопружного тіла. Введення цієї поправки було необхідно, щоб врахувати ту обставину, що астеносфера реагує на швидкі навантаження як пружне тіло, а в низькошвидкісній межі відклик астеносфери на навантаження буде, як і в моделі Ельзассера, тільки в'язким.

Модель Райса була доповнена та застосована для аналізу поширення деформаційних фронтів через кору та літосферу [54]. Було, зокрема, показано, що зчеплення між літосферою та астеносферою контролює просторово-часовий розподіл ланцюгів послідовних сильних землетрусів вздовж меж

літосферних плит (трансформних розломів). З моделі також випливає, що перенесення напруг здійснюється і від меж вглиб плит, що може бути одним з пояснень виникнення внутрішньоплитних землетрусів та їхньої міграції. Проте міграція внутрішньоплитних землетрусів відбувається складніше і залежить від взаємодії систем розломів [55]. Згодом двовимірний варіант моделі [54] використаний при моделюванні аномального руху земної кори, виявленого GPS-спостереженнями в центральній частині о. Хонсю (Японія) [56].

Подальша модифікація моделі Ельзассера полягала в обліку латеральної неоднорідності літосфери [57]. Основні особливості цієї моделі полягають у тому, що потоншення літосфери забезпечує високі амплітуди дифузійної напруги, а швидкість міграції напруг зростає з потовщенням літосфери. Це, до речі, може служити поясненням причини настільки широкого діапазону значень швидкості міграції землетрусів у різних сейсмоактивних регіонах. В.М. Ніколаєвський [41] доповнив модель Ельзассера новим елементом – вигином літосферної плити, що призвело до строгої математичної теорії поширення деформаційних (тектонічних) хвиль.

Введення вертикальних рухів, пов'язаних із вигином літосфери, істотно змінює сценарій еволюції тектонічних рухів. Результуюча система рівнянь записується для зсувів  $u$  літосфери вздовж контакту з астеносферою та для вертикальних зсувів:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha}{1-v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left( h_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Phi \right) + v_0 + w_0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{E_1 h_1^3}{12\gamma(1-v^2)} \frac{\partial \eta^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{N}{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{2\mu}{\gamma h_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + w_0 \right)$$

де  $\Phi$ -асоційовані перетоки речовини астеносфери,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ -швидкість напірного потоку,  $v_0$ -стаціонарна швидкість зсуву літосфери відносно астеносфери,  $w_0$ -стаціонарна швидкість астеносфери,  $N = E_1 h_1 (1-v^2)^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}$ -сила стиску, що діє на літосферу,  $\gamma = \rho_1 g$ -питома вага літосферної плити.

Двовимірна модель (3) взаємодії літосфери та астеносфери за рахунок вертикальних зсувів та в'язких дотичних напруг на їх контакт дає як розв'язок або періодичні хвилі малої інтенсивності (стоячі та дифузійні), або відокремлені хвилі [41; 42].

Якщо вертикальні зсування літосфери відсутні ( $\eta=0$ ) і перетоків в астеносфері немає ( $\Phi=0$ ), то модель (3) при  $v^2 \ll 1$  еквівалентна рівнянню Ельзассера (1) – рівнянню простого горизонтального стиску – розтягнення літосфери.

Б.І. Біргером [58] було запропоновано модель поширення напруг у вигляді хвиль дифузійного типу. На відміну від моделі Ельзассера, літосфера представлена як тонка пружна пластина, а астеносфера – як в'язкопружний напівпростір.

У моделі Дж. Севіджа [59] рух блоків земної кори вздовж трансформного розлому представлено у вигляді потоку крайових дислокацій. Перенесення напруги за розломом визначено в термінах концентрації  $k$  та потоку  $q$  дислокацій. Швидкість зростання деформації пропорційна потоку дислокацій. Дифузійний механізм грає основну роль у динаміці потоку дислокацій, кінематична поведінка якого контролюється фізичними властивостями зони розлому. Результуюче рівняння має вигляд [59]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -c \frac{\partial q}{\partial x} + D \frac{\partial q^2}{\partial x^2} \quad (4)$$

де  $c = \frac{\partial q}{\partial k}$  – швидкість,  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Важливо те, що механізм потоку дислокацій призводить до крипових хвиль (creep waves) вздовж трансформного розлому – хвиль напруг. За розрахунками Дж. Севіджа, швидкість таких хвиль уздовж трансформного розлому Сан-Андреас складає порядку 10 км/рік, залежить від амплітуди деформації та збільшується з її зростанням. Згідно з гіпотезою Дж. Севіджа, крипові хвилі викликають різку зміну руху в розломі та пов'язані з міграцією сильних землетрусів вздовж північно-східної околиці Тихого океану. За

даними про міграцію землетрусів було встановлено поширення фронту напруг у напрямку з північного заходу на південний схід уздовж розлому Сан-Андреас зі швидкістю 30-50 км/год [60].

У моделі Белла [61] блоки земної кори розділені «м'якими» ослабленими перехідними зонами - прошарками, які можуть являти собою тріщинуваті флюїдонасичені середовища з модулями пружності, набагато меншими, ніж модулі матеріалу блоків. На основі цього було запропоновано моделі та здійснено оцінки міграції деформаційних збурень вздовж ланцюжків. Швидкість повільної хвилі напруги в блоковому геосередовищі визначається тільки геометричними розмірами блоків  $a$  і частотою  $\omega$  їх коливань. При розмірах блоків порядку 10 км і частоті  $10^{-5}$ – $10^{-8}$   $\text{с}^{-1}$  швидкість має значення  $(10^{-3}$ - $10^{-1})$  м/с або 30 км/рік - 10 км/добу, що узгоджується з даними численних спостережень. Швидкість звичайної сейсмічної хвилі  $c = \sqrt{E/\rho} = 2.5$ – $7.5$  км/с і залежить лише від фізичних властивостей середовища, де поширюється хвиля.

В.М. Ніколаєвським була сконструйована пружна модель, що відповідала блоковій будові літосфери або земної кори з урахуванням інерції кінематично незалежних поворотів мікроплит або поворотних коливань блоків гірської породи, що становлять тіла розломних зон земної кори. Відповідна модифікація механіки Коссера призвела до балансу моментів кількості руху у вигляді рівняння  $\sin$ -Гордона [41]. Розв'язки рівняння  $\sin$ -Гордона – кінки. Тепер відомо, що ці кінки (перегини) є солітонами у строгому математичному сенсі [62]. Форма цих функцій збігається з записами аномалій геофізичних полів, що спостерігаються. Крім того, солітон  $\sin$ -Гордона може зупинятися і знову приходити в рух без зміни своєї топології, що дає можливість моделювати динаміку розломів. І, нарешті, кінк під час руху (повільному ковзанні) випромінює лінійні хвилі (фонони), які можуть бути аналогом епізодичного сейсмічного тремору у зонах субдукції [63]. Рівняння  $\sin$ -Гордона, вперше отримане при описі дислокацій у кристалах, а потім успішно

використане в теорії феромагнетизму, квантової оптики, фізиці елементарних частинок, в біології, має кілька якісно відмінних аналітичних рішень у вигляді фононів, кінків, бризерів, усамітнених хвиль, швидких і повільних кноїдальних хвиль. У задачах сейсмології та геомеханіки кожному з цих рішень відповідає свій хід еволюції системи блоків та розломів [64].

У циклі статей Н. Гершензона [63-64] показано, що рівняння  $\sin$ -Гордона є «відповідним інструментом» для описування широкого спектру особливостей, що спостерігаються для звичайних та «повільних» землетрусів, ковзання та сейсмічного тремору. В рамках моделі [64] основні рішення збуреного рівняння  $\sin$ -Гордона – солітони (кінки) та ангармонічні коливання (фонони) інтерпретовані як імпульси ковзання та сейсмічний тремор, відповідно. Сейсмічний тремор (випромінювання фононів) може виникати внаслідок прискорення або уповільнення імпульсу ковзання (кінка), взаємодії імпульсу ковзання з великими нерівностями межі плит, впливу зовнішнього збурення напруги на межі плит.

Відомою є теорія D-хвиль, автором якої є Ш.А. Губерман [65]. Згідно з цією теорією, землетруси виникають як результат проходження через області накопичення сейсмічної енергії особливих хвиль, що рухаються вздовж меридіанів Землі.

Аналіз пружних, в'язкопружних, пружнопластичних та автохвильових моделей деформаційних хвиль Землі показує, що жодна з них не може пояснити все різноманіття спостережуваних ефектів [65]. Кожна модель придатна для опису тільки деякої частини фіксованих даних, що залежать від багатofакторного впливу властивостей реального геосередовища і різних складних для визначення в натурних умовах параметрів. А тому навряд чи можливе створення універсальних математичних моделей. Найбільш результативним може виявитися евристичний підхід – підбір за аналогією такого простого механізму, який давав би можливість нехтуючи конкретними деталями охопити всі якісні особливості явища та моделювати ефекти, що спостерігаються.



В останні роки на якісно новому рівні активізувалися дослідження спрямованої міграції землетрусів – першооснови концепції деформаційних хвиль Землі. Це пов'язано, насамперед, зі створенням унікальних баз даних, з розробкою нових методик дослідження сейсмічного процесу у планетарному масштабі та із застосуванням сучасних інформаційно-обчислювальних технологій для обробки та аналізу величезних обсягів вихідної інформації. У сукупності все це дає можливість отримувати нові кількісні оцінки параметрів міграції землетрусів для побудови хвильових моделей сеймотектонічного режиму Землі та вивчати «тонку структуру» та особливості розподілу швидкостей сейсмічної міграції активності різних енергетичних рівнів.

Кількісно деформаційні хвильові процеси можна умовно розділити на дві групи: глобальні тектонічні хвилі зі швидкістю 1-100 км/рік та деформаційні хвилі в розломах зі швидкістю 1-10 км/добу. З моделей [66-68] слідує, що при швидкості деформаційних хвиль близько 100 км/рік більше переважатимуть пружні взаємодії сусідніх сегментів у зоні розлому, тоді як при менших швидкостях в'язкопружні властивості нижньої кори і верхньої мантії відіграють головну роль у повільному переміщенні фронту деформації, наприклад після найсильніших землетрусів [69].

Ще одним прикладом односторонньо спрямованого переміщення природних аномалій є міграція сейсмічної та вулканічної активності. У 1976 р. французький дослідник К. Бло зазначав, що землетруси та виверження вулканів у зоні субдукції «вишиковуються» в ланцюжок подій, швидкість включення яких становить близько 300 км/рік (~1 км/доба). При цьому вулканічна активність на околицях континентів – це результат, у тому числі, «тектонічного процесу» – перенесення деформацій уздовж літосфери, що занурюється, проявом якого є землетруси [69].

А.В. Вікулін з колегами [35] встановив просторову кореляцію міграції сейсмічної та вулканічної активності в межах найбільш тектонічно активних регіонів Землі: околиці Тихого океану, Альпійсько-Гімалайського поясу, Серединно-Атлантичного хребта.

Таким чином, перші здогади про просторову кореляцію міграції деформацій з сейсмічною та вулканічною активністю були підтвержені численними дослідженнями та змінилися впевненістю, що сейсмічність та виверження вулканів управляються деяким внутрішнім хвильовим процесом і його відображенням на земній поверхні.

Незважаючи на значні успіхи в теоретичних та експериментальних дослідженнях, сучасний стан проблеми генерації та детектування деформаційних хвиль Землі залишається поки що складним. Найголовніше питання - це питання про фізичні механізми генерування повільних деформаційних хвиль. Чи є хвилі наслідком коливальних (обертальних) рухів різномасштабних блоків земної кори (літосферних плит) або хвилі збурюються при ковзанні на контакті блоків (плит)? Основні труднощі з'ясування домінуючого механізму генерування та поширення деформаційних хвиль полягає в тому, що спостереженню доступний лише інтегральний ефект багатьох факторів різної природи, фізична суть яких не завжди зрозуміла.

### **1.3 Концепція локалізованих солітоноподібних збурень як генераторів сейсмічних поштовхів**

Як бачимо з наведеного вище огляду, багато дослідників намагались знайти певний зв'язок між окремими сейсмічними поштовхами, певні закономірності у сейсмічних процесах. Прикладом таких спроб є теорія омега-послідовностей, яка описана у циклі статей та монографії Ю. Жалогара [70]. В цих роботах розглядалися зростаючі та спадні послідовності сейсмічних поштовхів, різноманітні моделі. Однак, виникає низка запитань стосовно фізичних механізмів, які лежать в основі відповідних зв'язків між окремими сейсмічними поштовхами. Адже адекватність та ефективність математичної моделі залежить від того, наскільки точно вона відображає відповідні фізичні процеси.

В роботах А.Бомби, Ю.Турбала [71]-[76] та ін. запропоновано в основі фізичних механізмів, що суттєво впливають на сейсмічні процеси, зокрема, зв'язок між окремими сейсмічними поштовхами у локалізованих зонах

сейсмічної активності, розглядати саме локалізовані солітоноподібні збурення. Гіпотеза про локалізовані солітоноподібні деформаційні збурення як можливі генератори сейсмічних поштовхів покладена в основі алгоритмів прогнозування сейсмічних поштовхів, які пропонуються в даній роботі та становлять основу відповідного програмного забезпечення. В її основі лежать уявлення про те, що у випадку проходження локалізованої солітоноподібної хвилі деформації через зону накопичення сейсмічної енергії зростає ймовірність сейсмічного поштовху. Автори врахували тут декілька моментів. Як вже згадувалось вище, існує проблема ідентифікації хвилі деформації. Однак в межах даного підходу ця проблема частково вирішується так – про наявність хвилі може сигналізувати серія сейсмічних поштовхів, що нею зумовлені. Кожен землетрус викликає появу однієї або кількох одиночних хвиль, що віддаляються від гіпоцентру землетрусу. Деякі хвилі потім проходять через зони нагромадження сейсмічних енергій, що викликає нові землетруси, які, у свою чергу, можуть генерувати нові солітони. Метод прогнозування, який був запропонований у роботах передбачає виділення послідовностей землетрусів (з загальної популяції землетрусів), які викликані одним і тим же солітоном, і побудова гіпотетичної траєкторії цих солітонів. Знаючи відстань між окремими землетрусами вздовж траєкторії солітона можна оцінити швидкість, на основі якої можна оцінити його положення в заданий момент часу. Маючи інформацію про положення солітона в певний момент часу, можна визначити «солітонну складову» ймовірності сейсмічного поштовху в заданій точці у заданий момент часу.

Зауважимо, що така концепція може бути застосована лише у випадку відносно локалізованого в просторі та часі сейсмічного процесу. Однак аналіз багатьох сейсмічних процесів показує, що перед основним поштовхом може бути кілька десятків і навіть сотень незначних поштовхів. Так, наприклад, відбувалось перед поштовхом у префектурі Фукусіма в 2011 році. Такі рої землетрусів можна пояснити впливом локалізованих хвиль. Очевидно, що мова може йти лише про короткостроковий прогноз місця та часу сейсмічного

поштовху. У випадку поштовху магнітудою 9 за шкалою Ріхтера у провінції Фукусіма в 2011 році цікавим було і те, що переважна кількість форшоків відбулась на глибині поверхні Мохоровичича в районі Японії. Приблизно однакова глибина форшоків також свідчить на користь локалізованих хвиль.

Однак, при такому підході виникає низка нових задач, зокрема розробка алгоритмів ідентифікації локалізованих збурень, вивчення поведінки таких хвиль при проходженні через зони зміни густини в межах певних фізичних уявлень та моделей, питання взаємодії хвиль, оцінка зміни ймовірності поштовхів при наявності солітонної складової.

В основі нових алгоритмів, що дозволяють уточнити ймовірності сейсмічних поштовхів, покладено врахування процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень в областях накопичення сейсмічної енергії. Відповідні програмні комплекси повинні здійснювати аналіз сейсмічних поштовхів(форшоків) чи будь-яких передвісників у глибині Землі, аналізувати можливі траєкторії солітоноподібних збурень протягом спостережуваного сейсмічного процесу та будувати їх прогнози. А тому з метою досягнення максимальної прогнозової точності у відповідних алгоритмах слід враховувати особливості руху локалізованих солітоноподібних збурень.

Автори роботи [79] розглядали поодинокі хвилі в анізотропних пружних середовищах, і показали, що існують розв'язки відповідних систем диференціальних рівнянь руху у вигляді одиночних хвиль. Отже, аномальні локалізовані хвилі деформації [79] та особливості їх виникнення можна пояснити не лише в рамках формалізму теорії пружності з мікроструктурою а також в рамках класичної теорії анізотропного пружного тіла .

На відміну від лінійних хвиль, для яких застосовується принцип лінійної суперпозиції, нелінійні хвилі описуються нелінійними рівнянь, тому принцип суперпозиції зазвичай не застосовується. Це означає, що нелінійні хвильові рівняння більш важко проаналізувати математично, і для них немає загального аналітичного методу рішення. Виявляється, що знайти розв'язки

диференціального рівняння, що гарантують солітонні властивості, принаймні незмінність амплітуди локалізованого збурення, форми профілю, дуже нелегко. Диференціальні рівняння різних типів, що характеризуються нелінійністю, мають багатий клас розв'язків, серед яких можуть існувати такі, що описують локалізовані хвилі.

Математичні моделі, які описують поширення відокремлених хвиль, прийнято розділяти на два класи: інтегровані та неінтегровані за допомогою методу оберненої задачі розсіювання [81].

У багатьох роботах показано, що в інтегрованих моделях локалізовані хвилі ведуть себе подібно до частинок [82-95], при зіткненнях вони зберігають свої характеристики і має місце лише зсув фаз. Відповідний факт підтверджений у численних експериментах, в яких досліджувались хвилі в плазмі, рідина з бульбашками газу, стратифікована рідина а також електромагнітні хвилі. В той же час для систем, які не інтегруються за допомогою методу оберненої задачі розсіювання, має місце ряд інших ефектів, зокрема випромінювання цугів нелінійних хвиль, розщеплення окремих хвиль та утворення нових солітоноподібних хвиль, злиття кількох хвиль та утворення нової серії пружних відбивань. При зіткненнях солітоноподібні хвилі випромінюють частину своєї енергії, тобто має місце непружна зіткнення.

Основні зусилля вчених були направлені на знаходження форми профілю локалізованого збурення для кожного диференціального рівняння, що розглядалось. При цьому кожен тип рівнянь потребував спеціальних підходів та методів [96]-[130]. Цій проблематиці присвячено сотні публікації. Ще Д.Й. Кортевег та Г. де Вріс [89] отримали своє знамените рівняння, яке можна записати у вигляді

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.4)$$

Це рівняння має розв'язок виду :

$$u(x,t) = 2\chi^2 ch^{-2} \chi(x - 4\chi^2 t - \varphi)$$

де  $\chi$ -константа, що визначає параметри локалізації солітона та його швидкість,  $\varphi$ -параметр, що визначає точку відліку. Графік відповідної функції зображений на рис.1.1. За допомогою рівняння КдВ описується низка процесів в середовищах з слабкою дисперсією.

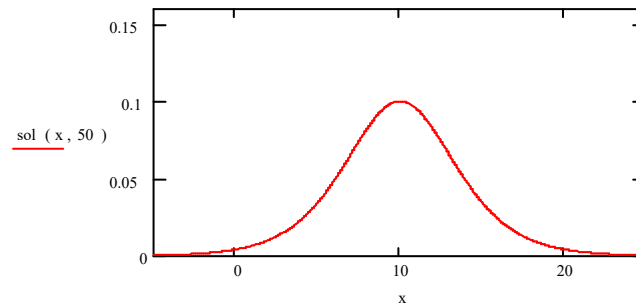


Рис.1.1.Солітонний розв'язок рівняння КдВ в момент часу  $t=0$

Зокрема, це хвилі на мілкій воді, іонно-звукові хвилі, хвильові процеси при передачі сигналів у трансмембранному нервовому волокні, хвильові процеси у твердих тілах, зокрема хвилі у багатокомпонентних сумішах тіл, що деформуються, дислокаційні механізми пластичної течії в кристалах.

Солітонні розв'язки рівнянь, що розглядаються в рамках структурно-феноменологічного підходу, наприклад, є окремими частковими випадками розв'язків і не дають можливості вирішити питання утворення відокремленої хвилі з довільного початкового збурення. Особливо проблематичним зараз є аналітичний опис відокремлених хвиль у багатовимірних випадках. Навіть для добре вивченої системи рівнянь типу «мілкої води» лише нещодавно були знайдені періодичні аналітичні розв'язки і автору не відомі методи аналітичного дослідження відокремлених хвиль.

Таким чином, в основі алгоритмів ідентифікації локалізованих солітоноподібних збурень та прогнозування їх траєкторій слід використовувати наближені підходи.

#### **1.4. Програмні комплекси сейсмічного моніторингу та алгоритми побудови прогнозів**

Всі програмні комплекси для обробки та аналізу сейсмологічних даних можна класифікувати за певними ознаками в залежності від завдань, які ними

розв'язуються. Певна спроба класифікації наведена, зокрема, в роботі [131]. В основі класифікації покладено завдання, що розв'язуються за допомогою відповідних програмних комплексів, зокрема: моніторинг, аналіз даних та візуалізація, обробка даних спостережень, прогнозування.

Приклади програм-моніторів: програмний комплекс SeismicPortal [132] що працює в режимі реального часу та має можливості формувати вибірки сейсмічних подій та їх візуалізації, містить підсистему роботи з картами і забезпечує можливість роботи з великими об'ємами даних; OSAP Portal (проект для аналізу сейсмостійкості будівель); Hazard Portal ( FP7 проект «Гармонізація сейсмічної небезпеки в Європі»); програмний комплекс Earth Alerts/Version 2011, що працює в режимі реального часу та дозволяє отримувати інформацію про сейсмічні події (та цунамі).

До програмних комплексів аналізу та візуалізації, зокрема, відносять: WSG (Windows Seismic Grafer) – програма для обробки сейсмічних сигналів та отримання параметрів гіпоцентрів сейсмічних поштовхів [133]; SEISAN–комплекс, що складається з бази даних для аналізу даних про землетруси в цифровій та аналоговій формі та пакету програм для аналізу ([seis.geus.net/software/seisan](http://seis.geus.net/software/seisan)); HYPO71-91 – консольна програма для розрахунку основних параметрів землетрусів за первинними даними обробки [134]; Tesseral Technologies Inc. - пакет скінченно-різницевого моделювання хвильового поля [136]; CWP/SU - комплекс сейсмічних утиліт з відкритим кодом [137].

Існують також безкоштовні програми з аналогічними функціями: FreeUSP [138], CPSeis [139], SPARC [140], SEPLib [141], BotoSeis [142], GeBR [143], SeaSeis [144], GPLib++[145], JavaSeis (комплекс, що має попередній стек для вводу-виводу сейсмічних даних та містить можливості їх обробки в Eclipse [146], Seismic Lab [147], CREWES [148], SW3D [149], Seismon [150], Seismic\_Handler [151].

JavaSeis [146] — це проект з відкритим вихідним кодом, який надає інфраструктуру для паралельного введення-виведення та обчислень для

додатків для обробки сейсмічних даних і зображень за допомогою мови програмування Java. JavaSeis — це не система обробки сейсмічних даних, а скоріше набір об'єктно-орієнтованих класів і методів для створення геофізичних програмних додатків. На сьогоднішній день найширше використання JavaSeis було з системою сейсмічної обробки SeisSpace. Проект JavaSeis розміщений у SourceForge, веб-сховищі проектів з відкритим кодом. JavaSeis використовує паралельні обчислення як важливий компонент високопродуктивних обчислень (HPC). Була побудована модель паралельних обчислень, яка дуже добре працює як на спільній пам'яті, так і на обчислювальному обладнанні з розподіленою пам'яттю, дозволяючи користувачам створювати алгоритми, не прив'язуючи свої програми до певної апаратної платформи.

Madagascar [152] – це програмний пакет з відкритим вихідним кодом для багатовимірного аналізу даних та відтворюваних обчислювальних експериментів. Даний програмний комплекс являє собою зручний інструмент трансферу технологій для дослідників, що працюють з цифровими зображеннями та обробкою даних у геофізиці та суміжних областях. Технологія, розроблена з використанням системи управління проектами, передається у вигляді записаних історій змін.

Madagascar, будучи відносно новим пакетом, слідує сучасним методам розробки програмного забезпечення, таким як інкапсуляція модулів та розробка через тестування. Розробка через тестування використовується не тільки як гнучка практика створення програмного забезпечення, але і як спосіб наукового обґрунтування геофізичних досліджень, які включають чисельні експерименти. Адже відтворюваність та експертна оцінка лежать в основі реальної науки в області обчислювальної геофізики та є основною мотивацією розвитку Madagascar.

Пакет Madagascar складається з двох рівнів: основні програми низького рівня (які зазвичай розробляються мовою програмування C і працюють як фільтри даних) і потоки обробки високого рівня (що описуються з



використанням мови програмування Python), які об'єднують основні програми та повністю документують історії обробки даних. Madagascar розповсюджується під стандартною ліцензією з відкритим вихідним кодом GPL, яка не накладає обмежень на використання та модифікацію коду. Доступ до модифікації вихідного репозиторію не контролюється однією організацією, а розподіляється порівну між різними розробниками. Це забезпечує відкриту співпрацю між різними групами, розкиданими по всьому світу. Програми в Madagascar можуть передаватися та виконуватися з командного рядка.

В основі програмного продукту Delivery лежить байєсівський метод інверсії сейсмічних даних [153]. Jive3D являє собою пакет моделювання та томографічної інверсії, здатний моделювати сейсмічні типи даних в широкому часовому діапазоні [154]. Програма WaveletExtractor дозволяє формувати оптимальні вибірки з набору сейсмічних та каротажних даних та містить функції оцінки: невизначеності для вейвлетів, інформації типу “час-глибина”, рівня шуму для оцінки сейсмічної інверсії [155]. Програма SLIMpy надає можливості обробки сейсмічних даних пакетів, таких як Мадагаскар, через перевантаження операторів [156]. Можливості обробки даних проекту SEIZMO включають функції кореляційного аналізу, згортки, видалення тренда, диференціювання, інтегрування, інтерполяції, зміни частоти дискретизації, фільтрації, злиття, відповіді переносу (response transferring), обертання, укладання, спектрального аналізу, конусоутворення і віконного аналізу (windowing) [157]. Програма GeoSeis використовується для аналізу переломленого сейсмічного сигналу [158]. Програмний комплекс Passeis дозволяє проводити пасивний сейсмічний аналіз [159].

Програми відображення сейсмічних сигналів: Mines JTK (обробка і відображення сигналу) [160]. kogeо [161] – включає в себе геофізичний аналіз і візуалізацію, SIOSEIS являє собою програмний пакет для розширення можливостей та управління, відображення морської сейсмічності і заломлення даних [162]. Landmarc SeisWorks 3D вирішує завдання візуалізації, аналізу та інтерпретації сейсмічних даних, програмний комплекс mech-Lander

використовується для побудови (візуалізації) осередків землетрусів.

Система прогнозу іоносферних даних на основі нейронної мережі [163] базується на спільному застосуванні вейвлет-перетворень і нейронних мереж. Для навчання мережі використовувались перетворені за допомогою вейвлет-розкладу четвертого рівня сигнали сейсмічно-спокійних років. В основу системи була покладена тришарова мережа прямої передачі сигналу з двома сигмоїдальними і одним лінійним шарами [163]. Також розроблена програма для обчислення ймовірностей сейсмічних подій, яка реалізує ймовірнісну модель інтерпретації каталогу землетрусів та дозволяє представити сейсмічний режим у вигляді інтегральних функцій розподілу або функцій щільності розподілу ймовірностей, на основі яких будується ймовірнісна модель сейсмічності. Ю.А. Полозовим і О.В. Мандриковою запропоновано алгоритм для обчислення функції належності сейсмогенеруючих факторів до нечітких підмножин факторів впливу на сейсмічну активність, що дозволяє підвищити точність вирішення задач прогнозування; запропонована модель прогнозування, яка дозволяє будувати прогнози для локальної ділянки земної кори, розроблена на основі математичного апарату нечітких множин та нечіткої логіки .

В.Н. Вапніком був запропонований алгоритм «Фортран узагальнений портрет» (ФУП) [164-165]. Ідея алгоритму полягає у відновленні залежностей за емпіричними даними, в основі яких лежить задача розпізнавання - задача ідентифікації періодів підвищеної сейсмонебезпеки за допомогою побудови гіперплощини, що розділяє простір заданих ознак. Програмно-алгоритмічний комплекс включає в себе програми для вирішення завдань: навчання розпізнаванню образів, відновлення регресії, інтерпретації результатів непрямих експериментів .

Геоінформаційна система під керівництвом Е.А.Левіної розроблена для прогнозу землетрусів та гірських ударів на конкретних територіях - в Байкальській рифтовій зоні і Норільському родовищі [166].

Під керівництвом П.М. Шебаліна була розроблена Інформаційна система автоматичної оцінки сейсмічної небезпеки після сильних землетрусів AFCAST[167]. Ця система працює у режимі часу близькому до реального. Оцінюються область епіцентрів очікуваних афтершоків, максимальна магнітуда та тривалість небезпечного періоду. Для оцінки використовують дані каталогу ANSS ComCat Геологічної служби США (USGS). В даний час ведеться прогноз можливих афтершоків землетрусів магнітудою 6.5 і більше.

Алгоритм M8 [168] був розроблений шляхом ретроактивного аналізу сейсмічності, що передувала найбільшим (M8+) землетрусам у всьому світі, звідси і його назва. Він заснований на простій фізичній схемі передбачення, яку можна описати як наступну послідовність кроків.

Прогноз спрямований на землетруси магнітудою  $M_0$  і вище. Розглядаються різні значення  $M_0$  з кроком 0,5. Накладаються кола діаметром  $D(M_0)$  для сканування сейсмічної території. У межах кожного кола розглядається послідовність землетрусів з афтершоками  $\{t_i, m_i, h_i, b_i(e)\}$ ,  $i = 1, 2 \dots$ . Тут  $t_i$  – час виникнення,  $t_i \leq t_{i+1}$ ;  $m_i$  – магнітуда,  $h_i$  – глибина фокусу, а  $b_i(e)$  – кількість афтершоків протягом перших  $e$  днів. Послідовність нормується нижньою межею магнитуди  $M_{\min}(C)$ , причому  $C$  є стандартним значенням середньорічної кількості землетрусів у послідовності. Шкала магнітуд, яка використовується, повинна відображати потужність джерел землетрусу. Відповідно, MS зазвичай приймається для більших величин, тоді як  $m_b$  використовується для менших. Для багатьох каталогів можна налаштувати використання максимальної зареєстрованої величини ( NEIC GHDB).

Для кожної послідовності обчислюються декілька ковзних середніх у ковзних часових вікнах  $(t - s, t)$  та діапазоні величин  $M_0 \geq M_i \geq M_{\min}(C)$ . Вони відображають різні показники інтенсивності землетрусного потоку, його відхилення від довготривалої тенденції та групування землетрусів. Ці середні значення включають:  $N(t)$ , кількість основних поштовхів;  $L(t)$ , відхилення  $N(t)$  від довгострокового тренду,  $L(t) = N(t) - N_{\text{cum}}(ts) \times (t-t_0)/(ts-t_0)$ ,  $N_{\text{cum}}(t)$  –

сукупна кількість основних поштовхів з  $M \geq M_{\min}(C)$  від початку послідовності  $t_0$  до  $t$ ;  $Z(t)$  – лінійна концентрація основних поштовхів, що оцінюється як відношення середнього діаметра джерела,  $l$ , до середньої відстані між ними  $r$ ;  $i$   $B(t) = \max\{b_i\}$ , максимальна кількість афтершоків (міра кластеризації землетрусів). Послідовність землетрусів  $\{i\}$  розглядається у часовому вікні  $(t - s', t)$  та в діапазоні магнітуд  $(M_0 - p, M_0 - q)$ . Кожна з функцій  $N$ ,  $L$ ,  $Z$  розраховується для  $C = 20$  і  $C = 10$ . В результаті послідовність землетрусів отримує надійний усереднений опис семи функцій:  $N$ ,  $L$ ,  $Z$  (двічі) і  $B$ .

«Дуже великі» значення визначаються для кожної функції за умови, що вони перевищують  $Q$  процентів (тобто вони вищі за  $Q\%$  значень, що зустрічаються).

Тривога «час підвищеної ймовірності», оголошується на п'ять років, коли принаймні шість із семи функцій, включаючи  $B$ , стають «дуже великими» у вузькому часовому вікні  $(t - u, t)$ . Для стабілізації прогнозу ця умова потрібна для двох послідовних моментів,  $t$  і  $t+0,5$  року.

Алгоритм  $M8$  має кілька узагальнень. Суть модифікації  $M8S$  цього алгоритму можна описати так:

1. Розглядається сейсмічна територію, розглядаються дані з даного каталогу в смузі близько  $0,5R-1,0R$  поблизу її кордону.  $R$  — радіус кіл дослідження, які використовуються в  $M8$ .
2. Сканується територія з меншими колами радіуса  $r$ , розподіленими по дрібній сітці. Знаходяться усі місцеві сейсмічно активні місця та зберігаються лише точки сітки, де середньорічна швидкість сейсмічної активності в межах малого кола перевищує заданий поріг. Точки сітки з низькою активністю виключаються з подальшого аналізу.
3. Виключаються точки сітки, де даних недостатньо для застосування алгоритму  $M8$  в  $C_I$  з центром на них. Включаються окремі або пари ізольованих точок сітки.

4. Застосовується алгоритм M8 за допомогою  $C_l$ , центрованих у кожній із інших точок сітки.
5. Не враховуються тривоги M8 як випадково приписані, якщо вони не задовольняють такій умові кластеризації: переважна більшість, тобто  $n\%$ ,  $C_l$ , зосереджених у сусідніх точках сітки, які залишаються в аналізі, перебувають у стані тривоги.

Одним з наукових напрямків, що лежить в основі розробки програм, які мають підсистеми прогнозування, є нейромережеві технології, які базуються на так званих картах Кохонена. Відповідні нейронні мережі відносять до класу мереж, що самонавчаються (з навчанням без вчителя) та виконують завдання візуалізації і кластеризації з використанням певних критеріїв для отримання прогнозів, зокрема широтного розподілу сейсмічної активності та астрономічних характеристик. Для побудови середньострокових прогнозів використовують, зокрема, мережі, що навчаються методом зворотного поширення помилки (Feedforward Back Propagation) та функції Гуттенберга - Ріхтера для визначення сейсмічної активності [169].

### **Висновки до першого розділу**

1. На основі аналізу ефективності існуючого математичного та програмного забезпечення, що використовується для дослідження сейсмічних процесів, математичних моделей, які пояснюють виникнення сейсмічних поштовхів, визначено сучасний стан проблеми прогнозування сейсмічних процесів.

2. Останніми роками все більш широко використовуються хвильові уявлення для пояснення окремих аспектів сейсмічних процесів, зокрема, міграції сейсмічності. На якісно новому рівні активізувалися дослідження спрямованої міграції землетрусів – першооснови концепції деформаційних хвиль Землі. Формування концепції деформаційних (тектонічних) хвиль Землі розвивалося на основі двох відкриттів: міграції вогнищ сильних землетрусів уздовж глибинних розломів та глобальної тектоніки плит.

Проходження хвилі деформацій через геологічне середовище супроводжується різними сейсмічними, гідрогеологічними, електрокінетичними, геохімічними та іншими ефектами.

3. Останніми роками розроблена концепція локалізованих солітоноподібних збурень як генераторів сейсмічних поштовхів, в межах якої в основі фізичних механізмів, що суттєво впливають на сейсмічні процеси, зокрема, зв'язок між окремими сейсмічними поштовхами у локалізованих зонах сейсмічної активності, розглядаються саме локалізовані солітоноподібні збурення.

4. Дослідження існуючих програмних комплексів, що використовуються для обробки та аналізу сейсмологічних даних, показує необхідність вдосконалення модулів прогнозування.

5. Гіпотеза про локалізовані солітоноподібні деформаційні збурення як можливі генератори сейсмічних поштовхів покладена в основі алгоритмів прогнозування сейсмічних поштовхів, які пропонуються в даній роботі та становлять основу відповідного програмного забезпечення.

Застосування такого підходу дозволить розробити принципово нові алгоритми, які суттєво покращать оцінки ймовірностей сейсмічних поштовхів за умов ідентифікації локалізованих солітоноподібних збурень в глибині Землі на основі даних сейсмічного моніторингу.

## **РОЗДІЛ 2 МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ЗБУРЕНЬ В ОБЛАСТЯХ СЕЙСМІЧНОЇ АКТИВНОСТІ**

В якості фізичних явищ, які є основою відповідних методів аналізу даних та прогнозування, розглядаються процеси поширення локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності. Останніми роками з'явилось низка публікацій, які стосуються розгляду саме хвильових механізмів в зонах сейсмічної активності. Однак, саме локалізовані солітоноподібні хвилі деформацій в зонах сейсмічної активності розглядались відносно недавно [73], [75], [76]. Це пов'язано з тим, що такі хвилі дуже складно ідентифікувати чи експериментально виявити—адже мова йде про глибини порядку кількох десятків кілометрів. А тому тут на допомогу може прийти лише математичне моделювання а також деякі експериментальні дослідження хвиль у земній корі, які відрізняються від класичних сейсмічних хвиль гармонічного типу. Однак, для ефективної програмної реалізації та побудови алгоритмів прогнозування необхідно знати, які саме властивості мають хвилі, про які тут йде мова, як вони ведуть себе у областях стрімкої зміни густини середовища, яка їх швидкість поширення тощо. В низці робіт було запропоновано ідентифікувати такі хвилі за даними сейсмічних станцій—адже проходячи через зону накопичення сейсмічної енергії локалізована хвиля, очевидно, впливатиме на ймовірність поштовху і може виступати в якості його генератора. Тоді за серіями сейсмічних поштовхів можна ідентифікувати саму хвилю. Така головна ідея досліджень, що наведені в даному розділі.

### **2.1. Конструктивний метод дослідження траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах, що ґрунтується на основі Т-представлень.**

Очевидно, що для побудови адекватних алгоритмів прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень у нелінійних

середовищах необхідно мати інформацію про можливий характер цих траєкторій. Оскільки фізичні експерименти провести на практиці неможливо-адже локалізовані солітоноподібні збурення можуть утворюватись на значних глибинах (наприклад, на рівні поверхні Мохоровичича, яка сягає кількох десятків кілометрів), необхідно розглядати відповідні математичні моделі. Однак, якщо знаходити точні розв'язки відповідних нелінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, що моделюють відокремлені хвилі деформації, то виникає складна математична проблема знаходження відповідних класів солітонних розв'язків. А тому для аналітичного дослідження відповідних траєкторій в роботі скористаємось підходом, який дозволяє досліджувати рух лише максимуму збурення локалізованої хвилі абстрагуючись від її конкретної форми профілю. Такий підхід був запропонований останніми роками з метою конструктивного дослідження траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень та дістав назву метод Т-представлень. Цей метод має наближені варіанти, коли розв'язки представляють собою гауссіани та легко може бути поширений на багатовимірні випадки [72], [74], [75], [77]. Метод Т-представлень дозволяє уникнути розв'язання складних задач математичної фізики та являє собою по суті спеціальний алгоритм дослідження модельних систем диференціальних рівнянь на предмет можливого існування та характеру руху локалізованих збурень у відповідних середовищах.

Суть методу полягає у наступному. Нехай маємо деяке середовище, у якому можуть існувати локалізовані солітоноподібні збурення. Для моделювання відповідних  $n$  - вимірних збурень будемо використовувати представлення виду (Т-представлення):

$$(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})^T = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T W(x, t), \quad (2.1)$$

де  $W(x, t) = \exp(-\mu(x, \tilde{x}(t)) / \varepsilon)$  – функція, що описує форму хвилі,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t))$  – координата точки максимуму відповідного збурення,  $\mu(a, b)$  – деяка функція,  $a, b \in R^n$  (в найпростішому



випадку це функція міри, визначена на множині інтервалів  $\{[a,b], a, b \in R^n\}$ , коли збурення матиме в певному розумінні симетрію; часто в основі конструювання даної функції є відстань  $|x - \tilde{x}(t)|$  в евклідовому просторі),  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))^T$  – амплітудні функції (в подальшому розглядатимуться більш складніші залежності амплітудних характеристик від просторових змінних та часу,  $\gamma_i = \gamma_i(t, x), i = \overline{1, n}$ ),  $\varepsilon$  – параметр локалізації збурення,  $(u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$  – відповідні збурення.

Для одновимірного випадку відповідне представлення розглядалось у вигляді:

$$u(x, t) = \gamma(t) \exp(-g(x - \tilde{x}(t)) / \varepsilon), \quad (2.2)$$

де  $g(\cdot)$  – функція, що задовольняє умови:

$$g(x) \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) \geq 0. \quad (2.3)$$

Додаткові умови, які накладаються на функцію  $g(\cdot)$ , визначаються класом збурень, що нас цікавлять та зумовлюються специфікою самого середовища, у якому поширюються відповідні збурення. Очевидно, що функція  $\gamma \exp(-g(x - \tilde{x}(t)) / \varepsilon)$ , де  $g(\cdot)$  задовольняє умови (2.3), може описати додатна збурення будь-якої форми, де  $\gamma$  є амплітудним параметром,  $\varepsilon$  – параметр, що визначає локалізацію збурення. Зауважимо, що параметр  $\varepsilon$  зручно використовувати у інфінітесимальних випадках ( $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty$ ). Тоді фактично ми нехтуємо профілем хвилі та досліджуємо траєкторію та амплітуду. Такий підхід дозволяє суттєво спростити відповідний математичний апарат та є в певному розумінні універсальним.

Подальша деталізація представлення (2.2) визначатиметься характеристиками середовища, у якому розповсюджуються хвилі, зокрема, рівняннями, що описують хвильові процеси.

Відповідний підхід був застосований у роботах [71],[74] для розв'язання рівнянь типу КдВ, досліджено бризерні розв'язки, багатосолітонні розв'язки. Звичайно, що нас цікавитимуть просторові випадки поширення

локалізованих солітоноподібних збурень. Відповідний метод розглянемо на прикладах рівнянь типу мілкої води та рівнянь руху анізотропного твердого тіла.

### 2.1.1 Середовища типу “мілкої води”

В роботах [10], [184] застосовано метод Т-представлень для знаходження розв’язків рівнянь типу мілкої води. Рівняння типу мілкої води мають важливе практичне значення, оскільки описують великомасштабні атмосферні та океанічні течії, зокрема, в середніх широтах. Зауважимо, що землетруси часто виникають на глибинах порядку поверхні Моховичича [41], яка також являє собою різку границю між середовищами з різною густиною за деякими оцінками, густина нижче від поверхні Мохо, зростає в декілька разів. В такому випадку, поверхня Моховичича може розглядатись як границя середовищ і для опису явищ, які там відбуваються, можна використовувати з певним рівнем наближення різноманітні підходи, зокрема, рівняння типу мілкої води. Аналог з мілкою водою, зокрема, підтримує той факт, що речовина нижче від поверхні Мохо знаходиться у в’язкому стані за рахунок високого тиску.

В декартових рівняння мілкої води мають вигляд [173,174]:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + gh_x &= fv, \\ v_t + uv_x + vv_y + gh_y &= -fu, \\ h_t + (uh)_x + (vh)_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де  $u, v$  компоненти вектора швидкості,  $h$  – глибина шару рідини над рівним дном;  $f$  – параметр Коріоліса (частота повертання),  $g$  – прискорення вільного падіння.

Система рівнянь мілкої води легко може бути узагальнена на випадок течії політропного газу, якщо зробити формальну заміну змінних  $h$  та  $\frac{gh^2}{2}$  на

$\rho$  та  $\rho^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$  відповідно, де  $\gamma$  – показник адіабати.

Розглянемо систему рівнянь газової динаміки гравітуючого диску [175]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \varphi} \right) + u \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{v \partial \sigma}{r \partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - B \gamma_s \sigma^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \sigma^{\gamma_s - 2} \frac{B \gamma_s}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де  $u(r, \varphi, t), v(r, \varphi, t)$  - радіальна та азимутальна компоненти швидкості газу відповідно,  $\sigma(r, \varphi, t)$  - поверхнева густина газового диску,  $\Phi(r, \varphi, t)$  - гравітаційний потенціал,  $B, D$  - деякі невід'ємні сталі.

З аналізу, проведеного у роботі [175], відповідна модель розглядається для випадку, коли кутова швидкість обертання є константою, що означає обертання газового диску як твердого тіла. Зауважимо, що система (2.5) є квазілінійною.

Нехай  $u_0(r) \equiv 0, v_0(r), \sigma_0(r, \varphi, t), \Phi_0(r)$  - функції, що є розв'язками системи (2.5) (рівноважні компоненти швидкості, густини та гравітаційного потенціалу відповідно). Підставивши ці функції в систему (2.5), отримуємо систему для "рівноважних" значень:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} + \frac{v_0 \partial \sigma_0}{r \partial \varphi} = 0, \\ -\frac{v_0^2}{r} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - B \gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{3}{2r} D B \sigma_0^{\gamma_s - 1}, \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} = -\sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{B \gamma_s}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Будемо шукати розв'язок системи (2.5) (аналогічно як в роботі [175]) у вигляді суми рівноважних величин та деяких збурень:

$$\begin{aligned} \sigma(r, \varphi, t) &= \sigma_0(r, \varphi, t) + \sigma_1(r, \varphi, t), \\ \Phi(r, \varphi, t) &= \Phi_0(r) + \Phi_1(r, \varphi, t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u(r, \varphi, t) = u_1(r, \varphi, t),$$

$$v(r, \varphi, t) = v_0(r, \varphi, t) + v_1(r, \varphi, t).$$

Будемо підставляти співвідношення (2.6) в систему (2.5). В результаті отримаємо систему для збурень:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} + \sigma_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{\partial v_1}{r \partial \varphi} \right) + u_1 \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{v_1}{r} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} \\ & + \frac{1}{r} \left( \sigma_1 u_1 + u_1 r \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \sigma_1 r \frac{\partial u_1}{\partial r} + \sigma_1 \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + v_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} \right) = 0, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} - B\gamma_s \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} - \\ & - B\gamma_s (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{3}{2r} BD (\gamma_s - 1) \sigma_0^{\gamma_s - 2} \sigma_1 + \frac{v_1^2}{r} - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi}, \\ & \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{u_1 v_0}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_1 \sigma_0^{\gamma_s - 3} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{B\gamma_s}{r} \sigma_0^{\gamma_s - 2} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} - \frac{B\gamma_s}{r} (\gamma_s - 2) \sigma_0^{\gamma_s - 3} \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varphi} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} - \frac{v_1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{u_1 v_1}{r}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введемо вектор-функцію збурень  $f_1(r, \varphi, t) = (u_1(r, \varphi, t), v_1(r, \varphi, t), \sigma_1(r, \varphi, t))$ .

Тоді функцію  $f_1(r, \varphi, t)$  будемо знаходити у вигляді:

$$f_1(r, \varphi, t) = \varepsilon_0 \psi_f(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon), \quad (2.8)$$

де  $\psi_f(t) = (\psi_u(t), \psi_v(t), \psi_\sigma(t))$ ,  $\psi_u(t)$ ,  $\psi_v(t)$ ,  $\psi_\sigma(t)$ ,  $\tilde{r}(t)$ ,  $\tilde{\varphi}(t)$  - деякі функції,

причому  $\tilde{r}(t) \geq 0$ ,  $\psi_\sigma(t) \geq 0$ ,  $\varepsilon$  - малий параметр,  $\varepsilon_0$  - деяка константа,

$$\omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{g(r - \tilde{r}(t)) + g(\varphi - \tilde{\varphi}(t))}{\varepsilon} \right\},$$

де  $g(x)$  - функція, яка має властивості:

$$g(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty), \quad g(0) = 0, \quad g(-x) = g(x), \quad \text{існують константи } \alpha_1, \tilde{\alpha}_1, \\ \alpha_2, \tilde{\alpha}_2, c_1 > 0, c_2 > 0, 0 < \alpha_1, \tilde{\alpha}_1 < 1, 0 < \alpha_2, \tilde{\alpha}_2 < 1 \text{ а також}$$

$\varepsilon > 0$  такі, що  $\tilde{c}_1 g^{\tilde{\alpha}_1}(x) \leq |g'(x)| \leq c_1 g^{\alpha_1}(x)$ ,  $|g''(x)| \leq c_2 g^{\alpha_2}(x)$  у області  $\{x : g(x) \leq -\varepsilon \ln \varepsilon\}$ .

Бачимо, що в такому випадку збурення (2.6) являє собою самотню хвилю [184], причому точка максимуму збурення рухається за траєкторією, що описується в полярній системі координат функціями  $\tilde{r}(t)$  та  $\tilde{\varphi}(t)$ .

Підставляючи співвідношення (2.8) в систему (2.5), можна отримати загальну систему, що визначають існування наближених розв'язків. Зокрема, за умов  $\gamma_s = 3 \sigma_0 + \varepsilon_0 \psi_\sigma(t) \omega(r, \varphi, t, \varepsilon) = 0$

$$\begin{aligned} \psi'_u(t) - \frac{2v_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} - 3B \sigma_0(\tilde{r}(t), \tilde{\varphi}(t)) \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} / \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0 \psi_v^2(t)}{\tilde{r}(t)} &= 0 \\ \psi'_v(t) + \psi_u(t) \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \frac{\psi_u(t) v_0}{\tilde{r}(t)} + \frac{\psi_u(t) \varepsilon_0 \psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} &= 0, \\ \tilde{\varphi}'(t) - \frac{v_0}{\tilde{r}(t)} - \frac{\psi_v(t)}{\tilde{r}(t)} \varepsilon_0 &= 0, \\ \tilde{r}'(t) - \psi_u(t) \varepsilon_0 &= 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

Будемо розв'язувати цю систему в середовищі Mathcad 14.0. и з використанням функції Odesolve():

$$\begin{pmatrix} u1 \\ v1 \\ \varphi1 \\ r1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}, u, T1, 1000 \right]$$

Визначимо початкові умови. Перші два значення задаватимуть радіальну та азимутальну компоненту швидкості локалізованої хвилі, два інших значення-початкові координати точки максимуму збурення в полярній системі координат- радіус та кут. Поверхневу густину будемо розглядати як функцію, що залежить лише від радіуса та виберемо її у вигляді:

$$\sigma_0(r, \varphi) = C + B e^{-\alpha r} + \sum_{i=0}^k a_i e^{-\frac{(r-R_i)^2}{l_i}},$$

де  $C, B, \alpha, a_i, R_i, l_i$ -деякі константи. Аналогічно визначимо рівноважну функцію, що визначає швидкість обертання середовища:

$$v_0(r, \varphi) = \alpha r + \sum_{i=0}^k g e^{-\frac{(r-R_i)^2}{l_i}}.$$

Зауважимо, що в областях, де поверхнева густина має локальні максимуми, аналогічно веде себе і швидкість обертання. Це добре корелюється з реальними спостереженнями за гравітуючими газовими дисками, де поверхнева густина та швидкість ведуть себе саме так [175]. В нашому чисельному експерименті будемо одночасно “запускати” дві локалізовані хвилі та спостерігати, якими будуть їх траєкторії. Відповідні початкові умови та функції густини, швидкості наведені на Рис.2.1.

Результат моделювання зображено на Рис.2.2. Два солітони стартують з точок  $(0,380), (0,390)$ , азимутальні складові їх однакові, однак радіальні відрізняються і рівні відповідно 5 та 58. При цьому перший солітон притягується до області максимальної густини, “коливаючись” в її околі.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{s}}(r, fi) &:= 10 + 10 \exp(-0.01r) + \left[ g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R)^2]}{150}\right] + g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R1)^2]}{150}\right] + g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R2)^2]}{150}\right] + g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R3)^2]}{150}\right] \right] \\
 \underline{\underline{y}}(r, fi) &:= 0.001r + g v \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R)^2]}{150}\right] + g v \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R1)^2]}{150}\right] + g v \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R2)^2]}{150}\right] + g v \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r-R3)^2]}{150}\right]
 \end{aligned}$$
  

$\underline{\underline{R}} := 385$ $R1 := 285$ $R2 := 485$ $R3 := 185$	$y_0(0) = 5$ $y_1(0) = 180$ $y_2(0) = 0$ $y_3(0) = 380$	$y_0(0) = 58$ $y_1(0) = 180$ $y_2(0) = 0$ $y_3(0) = 390$
---	--	---

$$\underline{\underline{T}}1 := 16.2\epsilon \quad \underline{\underline{eps}} := 0.2$$

Рис.2.1. Початкові умови та система рівнянь

Другий солітон, що мав більшу початкову швидкість, рухається по криволінійній траєкторії, наближаючись до кола, де густина має локальний максимум, перетинає його, траєкторія при цьому переломлюється подібно до променя світла і далі стає практично прямолінійною. Бачимо, що при великому  $T$  радіальна складова стає прямою, а азимутальна – прямує до константи, солітон віддаляється від центра, асимптотично наближаючись до руху по деякій прямій, віддаляючись від центра.

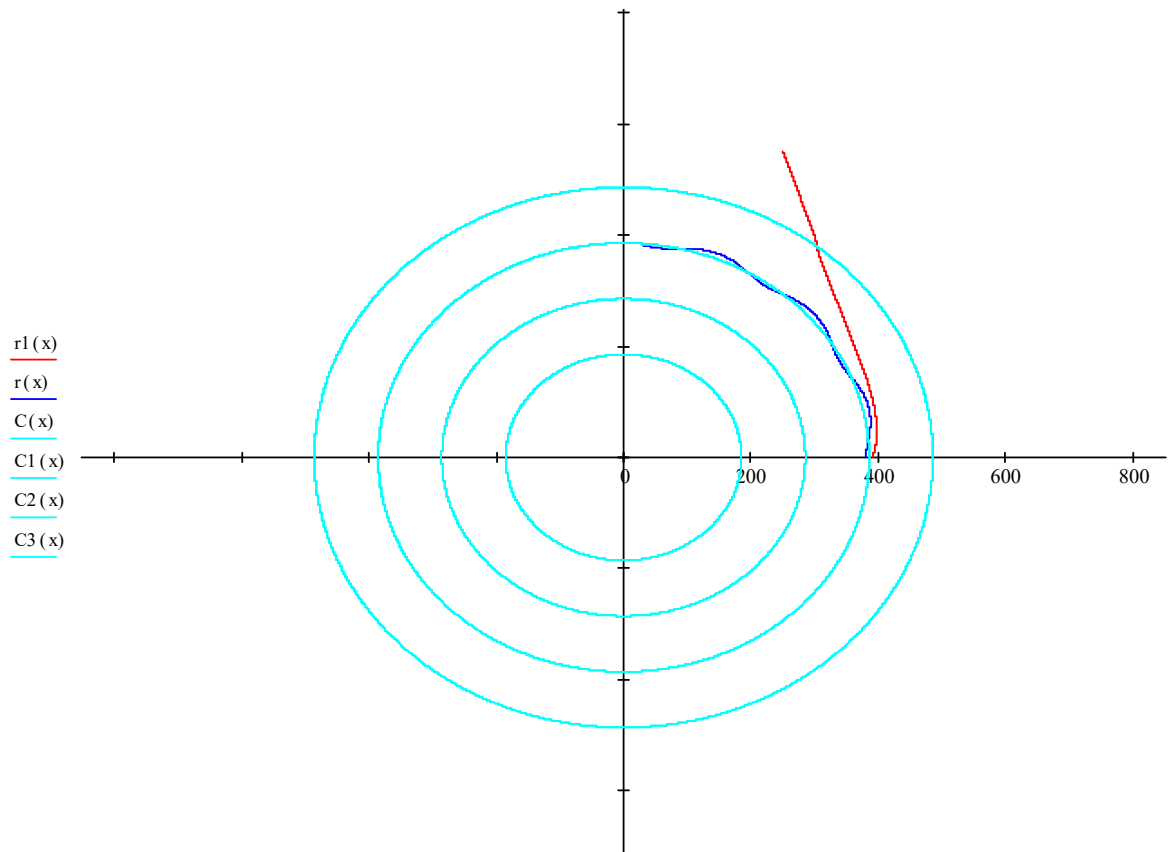
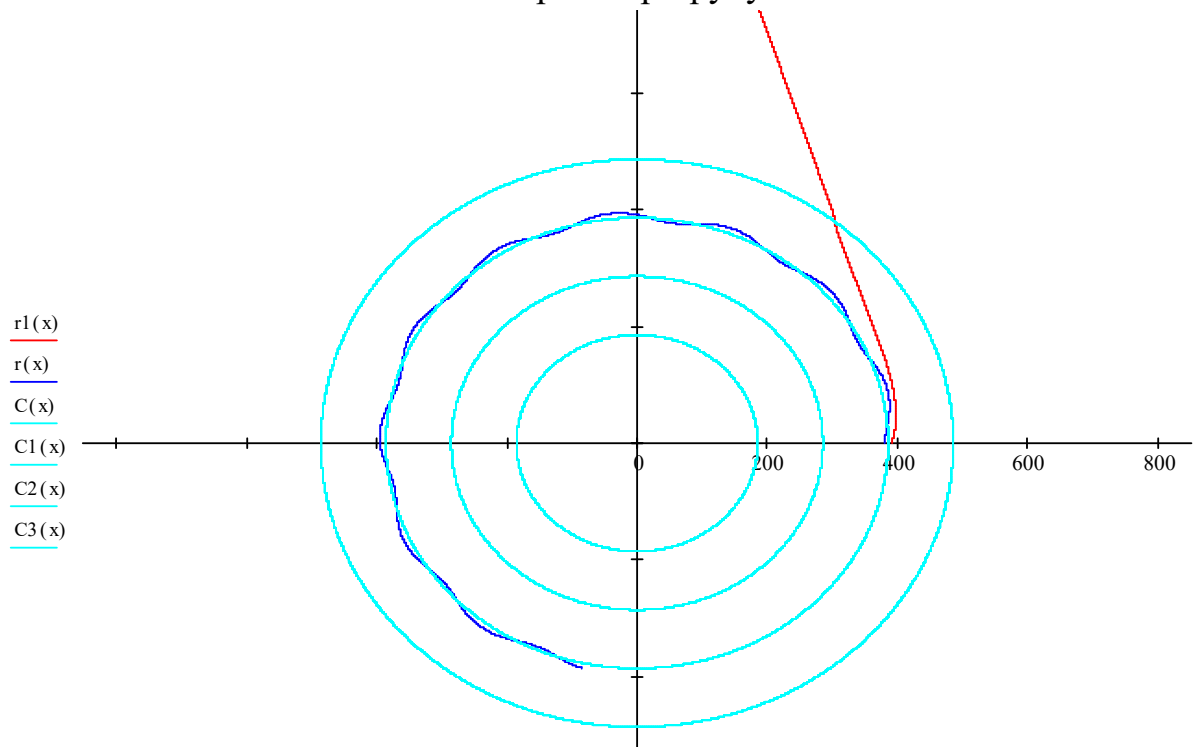


Рис.2.2. Траєкторії руху хвиль

Рис.2.3. Траєкторії хвиль на часовому інтервалі  $[0, T]$ ,  $T=150$ .

Відповідну поведінку повільнішого солітона можна трактувати двояко-наближення до області максимальної густини та відштовхування від області мінімальної. Зауважимо, що тут фактично маємо антисолітон, від'ємне збурення густини. Оскільки густина змінюється неперервно, солітон плавно і відбивається. Якщо б існувала чітка границя областей зміни густини, очевидно, мали б явище відбивання на зразок закону Снеліуса. Детальніше дослідження поведінки локалізованої хвилі наведено в Додатку Б. Отже, локалізована солітоноподібна хвиля в суцільному середовищі рухатиметься в напрямку максимуму густини в областях, де вона є гладкою функцією і матимуть місце відбивання при наявності різкої зміни густини. Зауважимо, що схожі характеристики для одновимірного випадку наведено у роботах [177]-[178].

Таким чином, на основі методу Т-представлень досліджено характер траєкторій відокремлених хвиль при різних початкових значеннях їх швидкостей та у випадку області змінної густини, що має характер кілець. При цьому показано, що хвиля веде себе аналогічно до променя світла, відбиваючись від границі чи проходячи через неї в залежності від величини початкових швидкостей. Зауважимо, що ми не знаємо точний профіль хвилі чи всі її властивості, зокрема, чи є вона солітоном. Однак, для розробки відповідного програмного комплексу, що містить підсистеми прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень ці питання не є такими важливими і виходять за рамки даної роботи.

### **2.1.2 Відокремлені хвилі в анізотропних пружних тілах**

Розглянемо характер траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в анізотропних пружних тілах. Вибір саме такої моделі твердого тіла зумовлений тим, що гірські породи на глибинах можуть мати високий ступінь анізотропії пружних властивостей [178]. Зауважимо, що існує низка робіт, у яких досліджується зв'язок анізотропії з сейсмічною активністю. Зокрема, в роботі [179] показано, що ряд сейсмоактивних областей Вірменії



характеризуються значною анізотропією порід, причому анізотропія зростає в очагах сейсмічної активності. Слід зауважити також про фіксацію пульсаційних збурень у гірських породах, відмінних від звичайних сейсмічних хвиль [179], [180], [181]. Вказані результати мають дуже важливе значення в контексті досліджень, представлених в даній роботі.

Для зручності програмної реалізації та представлення вхідних даних використаємо запис рівнянь руху анізотропного твердого тіла не в тензорному вигляді, як зазвичай, а з використанням диференціального оператора виду:

$$\Theta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1}, \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \right). \quad (2.10)$$

Тоді рівняння руху для анізотропного твердого тіла запишуться у вигляді, де явно виділяються усі необхідні коефіцієнти (пружні сталі) :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ((c_{11}, c_{66}, c_{55}, 2c_{16}, 2c_{15}, 2c_{56}), \Theta u) + ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{12} + c_{66}, c_{14} + c_{56}, c_{46} + c_{25}), \Theta v) + ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{36} + c_{45}), \Theta w), \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = ((c_{16}, c_{26}, c_{45}, c_{66} + c_{12}, c_{56} + c_{14}, c_{25} + c_{46}), \Theta u) + ((c_{66}, c_{22}, c_{44}, 2c_{26}, 2c_{46}, 2c_{24}), \Theta v) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta w), \quad (2.12)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ((c_{15}, c_{46}, c_{35}, c_{14} + c_{56}, c_{13} + c_{55}, c_{45} + c_{36}), \Theta u) + ((c_{56}, c_{24}, c_{34}, c_{46} + c_{25}, c_{36} + c_{45}, c_{23} + c_{44}), \Theta v) + ((c_{55}, c_{44}, c_{33}, 2c_{45}, 2c_{35}, 2c_{34}), \Theta w). \quad (2.13)$$

$c_{ij}$ —пружні сталі.

Розв'язки системи (2.11)–(2.13) знаходяться у формі T-представлень:

$$\begin{pmatrix} u(x_1, x_2, x_3, t) \\ v(x_1, x_2, x_3, t) \\ w(x_1, x_2, x_3, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_u(t) \\ \psi_v(t) \\ \psi_w(t) \end{pmatrix} W(x_1, x_2, x_3, t), \quad (2.14)$$

де  $W(x_1, x_2, x_3, t) = e^{\frac{g(x_1 - \bar{x}_1(t))}{\varepsilon_1} + \frac{g(x_2 - \bar{x}_2(t))}{\varepsilon_2} + \frac{g(x_3 - \bar{x}_3(t))}{\varepsilon_3}}$ ,  $g(x)$  - довільна додатна неперервно-

диференційовна функція, яка має мінімум точці 0,  $g(0) = 0$ ,  $\psi_u(t)$ ,  $\psi_v(t)$ ,  $\psi_w(t)$  - функції, які визначають компоненти амплітуди відповідного збурення,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - параметри, що визначають локалізацію збурення.

В роботі [182] проведено аналіз анізотропії пружних властивостей для кристалів різних типів та показано, що локалізовані хвилі незмінної амплітуди можуть існувати.

Для оцінки траєкторій в роботі [182] отримано систему:

$$\begin{aligned}\tilde{x}'(t, x) &= \chi(c_{11} / \rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t, x)\right), \\ \tilde{y}'(t, x) &= \chi(c_{11} / \rho)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t, x), \\ \psi'_u(t, x) &= -\chi(c_{11})^{1/2} \psi_u(t, x) \frac{1}{4} \rho^{-3/2} \rho' - \chi(c_{11})^{1/2} \rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x}, \\ 4\rho'' - 5\rho^{-1}(\rho')^2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Загальний розв'язок системи (2.15) має вигляд [252]:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \frac{1}{(cx + a)^4}, \quad \tilde{x}(t, x) = t + \Phi\left(x + \frac{\chi}{(c_{11})^{1/2} c(cx + a)}\right), \\ \tilde{y}(t, x) &= x - t - \Phi_1\left(x + \frac{\chi}{(c_{11})^{1/2} c(cx + a)}\right), \\ \psi_u(t, x) &= (cx + a) \mathcal{H}\left(t + \frac{1}{\chi(c_{11})^{1/2} c}\right),\end{aligned}$$

де  $\Phi, \Phi_1, \mathcal{H}$  - довільні функції,  $c, a$  - сталі.

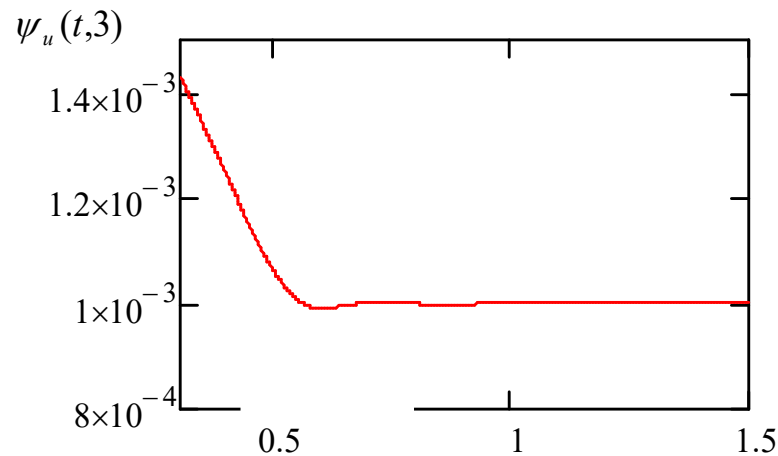
Розглянемо приклад. Нехай  $c_{11} = 1$ ,  $\rho(x) = \frac{10}{(x - 6)^4}$ ,  $\chi = 1$ ,

$x \in [0, 5], t \in [0, 3]$ . При цьому:

$$\begin{aligned}\psi'_u(t, x) &= -\chi(c_{11})^{1/2} \psi_u(t, x) \frac{1}{4} \rho^{-3/2} \rho' - \chi(c_{11})^{1/2} \rho^{-1/2} \frac{\partial \psi_u(t, x)}{\partial x}, \\ \psi_u(0, x) &= 0.002, \psi_u(t, 0) = 0.002.\end{aligned}$$

Графік функції  $\psi_u(t, 3)$  показаний на рис.2.4.

Бачимо, що амплітудна функція на початку часового інтервалу спадає, далі спостерігаються певні коливання, після чого вона стає константою.

Рис.2.4 Графік функції  $\psi_u(t,3)$ 

Аналогічна поведінка спостерігається для всіх значень  $x$  з інтервалу дослідження.

Розв'язок крайової задачі

$$\tilde{x}'(t,x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{x}(t,x)\right),$$

$$\tilde{x}(0,x) = 0, \tilde{x}(t,0) = 0$$

відповідно при  $x = 0.1, t = 0.4$ , представлений на рис.2.5-2.6. А для задачі

$$\tilde{y}'(t,x) = \chi(c_{11}/\rho)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{y}(t,x), \tilde{y}(0,x) = \sin x, \tilde{y}(t,0) = 0,$$

на рис.2.7-2.8 (відповідно при  $x = 0.4, t = 0.2$ ).

Аналіз траєкторій показує наявність ефектів відбивання хвилі як в напрямку зростання так і спадання щільності. При цьому фрагменти траєкторій між точками відбивання близькі до прямолінійних чи спіралей. Зауважимо, що при сталій густині матимемо прямолінійні траєкторії.

Очевидно, що для визначення абсциси точки максимуму  $x_{\max}$  збурення необхідно розв'язати рівняння  $x - \tilde{x}(x,t) = 0$ . Звідси  $y_{\max} = \tilde{y}(x_{\max}, t)$ . На рис. 2.9 представлена множина точок, на якій досягає максимальне значення функція  $W = W(x, y, z, t)$ .

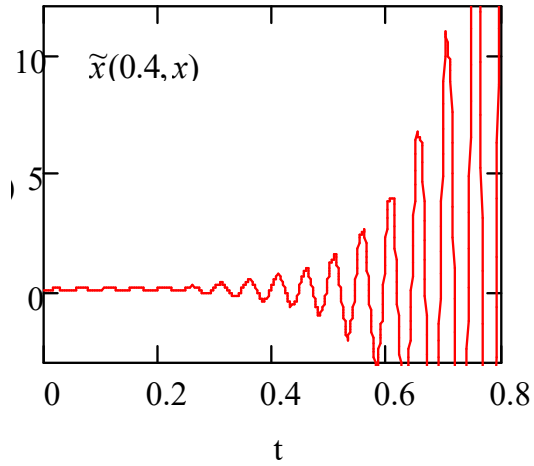
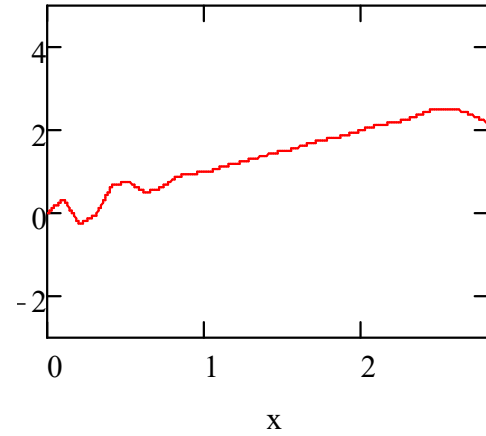
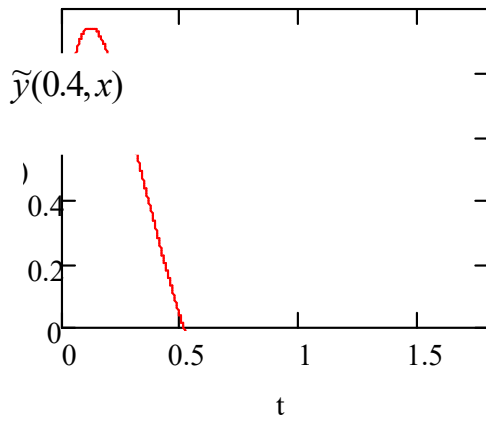
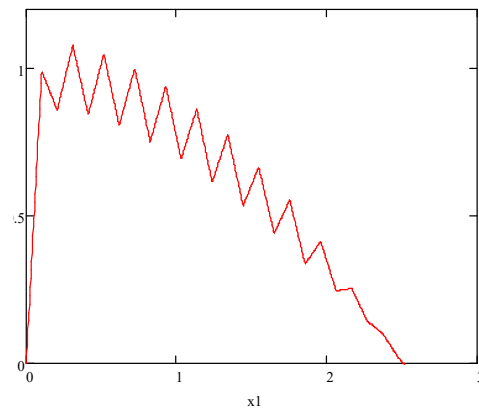
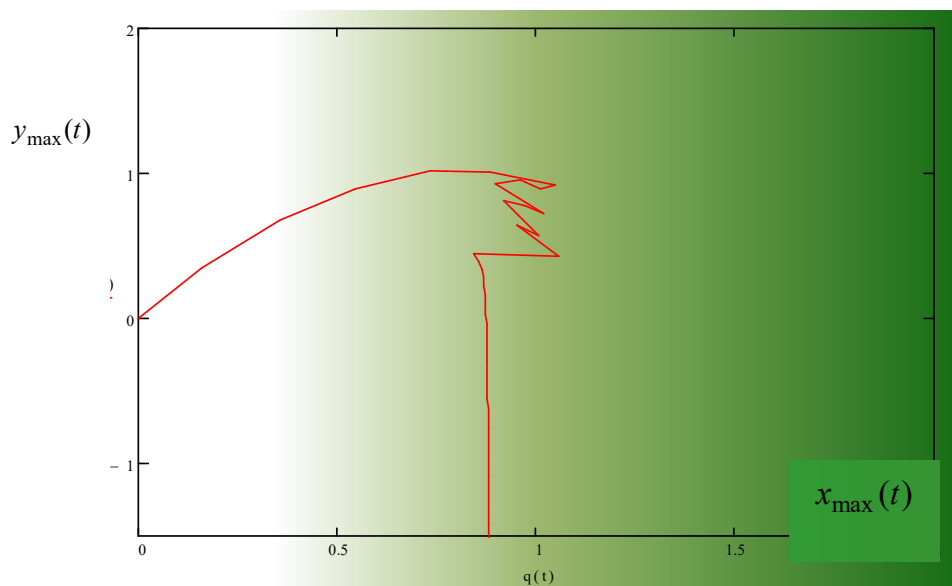
Рис.2.5 Графік  $\tilde{x}(t,0.1)$ Рис.2.6. Графік  $\tilde{x}(0.4, x)$ Рис.2.7 Графік  $\tilde{y}(t,0.1)$ Рис.2.8 Графік  $\tilde{y}(0.4, x)$ 

Рис.2.9 Траєкторія руху відокремленої хвилі

Зауважимо, що тут мова не йде про солітони, а лише локалізовані самотні хвилі, амплітуда яких не змінюється чи змінюється слабо.

## 2.2 Задачі районування та уточнення ймовірностей сейсмічних поштовхів на основі траєкторій локалізованих збурень

Під землетрусом (поштовхом) розумітимемо вектор  $(x, t, \mu)$ , де  $x$  - гіпоцентр, ( $x \in \Omega$ ),  $t$  - час поштовху ( $t \in R^+$ ),  $\mu$  - енергія (магнітуда).

В якості базової формальної моделі сейсмічного процесу [73],[205] що враховує виникнення та поширення солітоноподібних хвиль - генераторів сейсмічних поштовхів, будемо розглядати динамічну систему виду:

$$\Sigma = \{T, \Omega, G_0, E, Y, S, I\}, \quad (2.16)$$

де  $T = [t_0, t_1] \subset R$  - часовий інтервал;  $\Omega \subset R^3$  - фазовий простір;  $G_0 \subset \Omega \times T \times M$  - початкова множина землетрусів;  $E$  - функція розподілу накопичення сейсмічної енергії;  $Y: T \times \Omega \rightarrow T \times \Omega$  - оператор, що визначає траєкторії солітоноподібних хвиль;  $S_t \subset \Omega$  - множина координат солітоноподібних хвиль в момент часу  $t$ ,  $S = \{S_t, t \in [t_0, t_1]\}$ ;  $I: \Omega \times \Omega(E) \times S \times T \times M(T) \rightarrow [0, 1]$  - функціонал, який описує ймовірність виникнення землетрусу певної магнітуди в заданий момент часу в заданій точці за рахунок солітонних механізмів.

В якості вихідних даних будемо розглядати послідовності гіпоцентрів чи епіцентрів сейсмічних поштовхів, що вже відбулися:  $(x_1, t_1, \mu_1), (x_2, t_2, \mu_2), \dots, (x_k, t_k, \mu_k)$ , де  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - гіпоцентри(епіцентри) землетрусів,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  - моменти поштовхів,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  - магнітуди. Таким чином, модель (2.16) може використовуватись, наприклад, лише для прогнозування головного поштовху, якщо наявні форшоки або для прогнозування подальшого перебігу сейсмічного процесу, наступного поштовху. Це принциповий момент, який окреслює межі застосування нашої методики.

На сьогодні широко використовується сейсмічне районування, яке полягає у виділенні окремих областей за ймовірностями виникнення

землетрусів певної магнітуди протягом певного періоду часу [27]. Приклад карти сейсмічного районування України наведено на Рис.2.10.

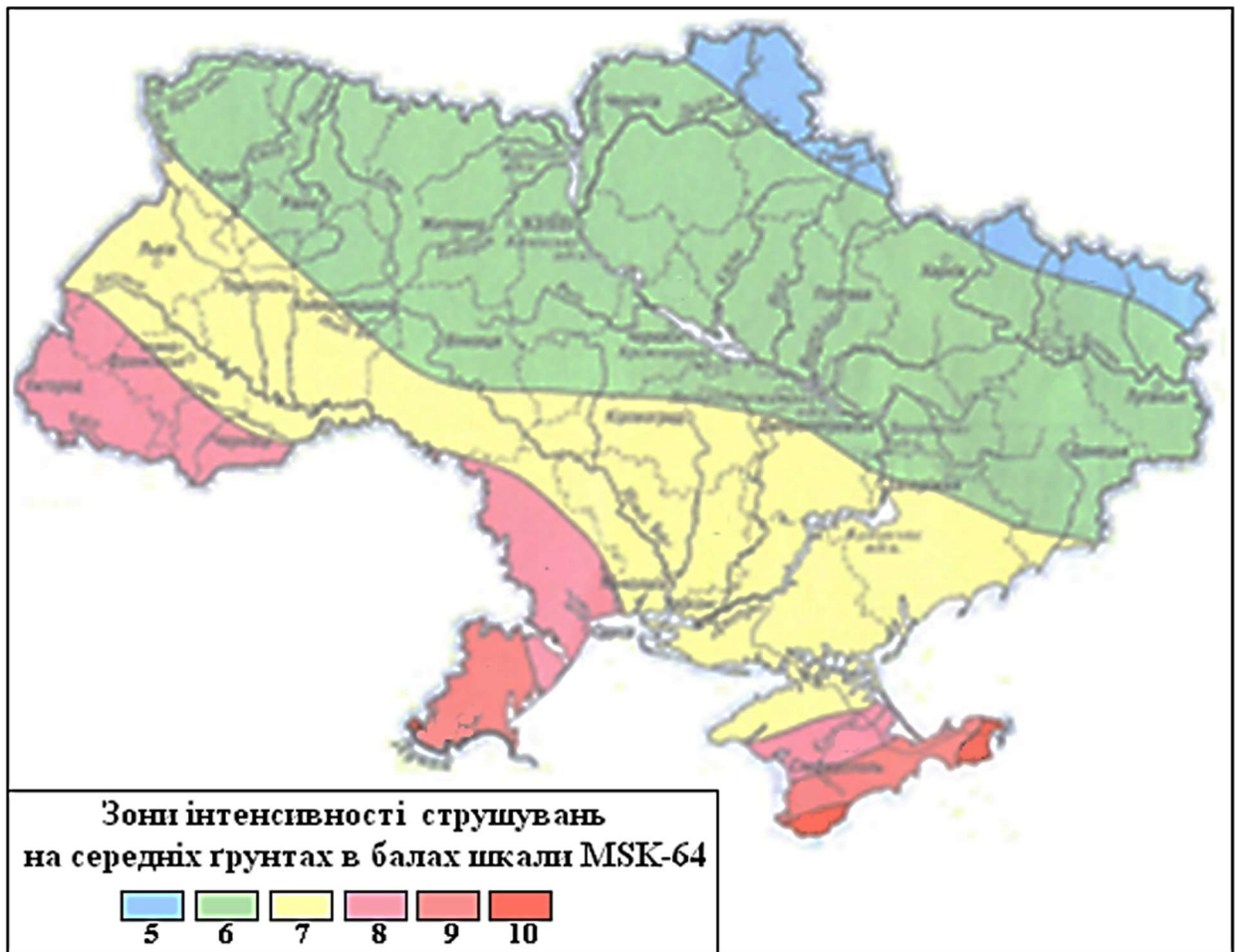


Рис. 2.10 Генеральна карта загального сейсмічного районування території України (ЗСР-2004-С для періоду повторюваності землетрусів 5000 років)

Нехай  $\mu(x,t)$  – випадкова величина, що описує інтенсивність землетрусу в точці  $x$  в момент часу  $t$ . В такому випадку задачу районування можемо сформулювати так: для кожної точки  $x$  необхідно знайти таке значення  $M$ , що  $P\{\mu(x,t) > M, t \in [0, T]\} = \varepsilon$ .

Відповідне значення  $M$  знаходиться за базами даних (каталогами) землетрусів в даній точці протягом відповідного часу. Як бачимо, карти сейсмічного районування дають лише загальні уявлення про сейсмічну небезпеку в певному регіоні. Коли відбувається сейсмічний поштовх, то за

такими картами складно спрогнозувати подальший перебіг сейсмічного процесу та побудувати карти тривоги для відповідних регіонів України чи світу.

На основі солітонного підходу можна уточнити ймовірність сейсмічного поштовху а також побудувати відповідні карти тривоги для регіонів в режимі реального часу.

Нехай  $\tilde{x} = (x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l)$  послідовність точок, що належать одній вже ідентифікованій траєкторії локалізованого солітоноподібного збурення. Розглянемо такі випадкові події:

$$A(x, t, M) = \{ \text{в точці } x \text{ в момент часу } t \text{ відбувся поштовх магнітуди } > M \},$$

$$Is(\tilde{x}) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l, \text{ існує} \},$$

$$S(\tilde{x}, y, t) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l, \text{ зумовлює поштовх з гіпоцентром в точці } y \text{ в момент часу } t \},$$

$$Id(\tilde{x}, y, t) = \{ \text{солітоноподібна хвиля, що ідентифікується за послідовністю } x_{j_1}, t_1, x_{j_2}, t_2, \dots, x_{j_l}, t_l \text{ знаходиться в точці } y \text{ в момент часу } t \},$$

$$E(x, t, M) = \{ \text{в точці } x \text{ в момент часу } t \text{ накопичилась сейсмічна енергія, достатня для виникнення поштовху магнітуди } > M \},$$

$$NS = \{ \text{сейсмічний поштовх не зумовлений солітоноподібними хвилями} \}.$$

Тоді маємо:

$$P\{A(x, t, M)\} = P\{\mu(x, t) > M\} = P\{\mu(x, t) > M / S(\tilde{x}, x, t)\}P\{S(\tilde{x}, x, t)\} + \\ + P\{\mu(x, t) > M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t)\}P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} = P\{\mu(x, t) > M / S(\tilde{x}, x, t)\},$$

$$E(x, t, M) \} P\{E(x, t, M)\} P\{S(\tilde{x}, x, t)\} + P\{\mu(x, t) = M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} = \\ = P\{E(x, t, M)\} P\{S(\tilde{x}, x, t) / Is(\tilde{x})\} P\{Is(\tilde{x})\} + \\ + P\{\mu(x, t) = M / \bar{S}(\tilde{x}, x, t), E(x, t, M)\} P\{\bar{S}(\tilde{x}, x, t)\} P\{E(x, t, M)\},$$

$$P\{S(\tilde{x}, x, t)\} = \int_G P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, y, t)\} P\{Id(\tilde{x}, dy, t)\}.$$

Нехай  $P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, y, t)\} = f_{N(x, \varepsilon)}(x - y)P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, x, t)\}$ , де  $f_{N(x, \varepsilon)}(z)$  - функція, що описує щільність нормального розподілу  $N(x, \varepsilon)$ . Тоді

$$P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, y, t)\} = f_{N(x, \varepsilon)}(x - y)P\{S(\tilde{x}, x, t) / Id(\tilde{x}, x, t)\}.$$

Розглянемо випадок, коли може існувати  $n$  солітоноподібних хвиль  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , які рухаються в зоні накопичення сейсмічної енергії.

Розглянемо такі випадкові події:

$$Is(i_k) = \{i_k\text{-та солітоноподібна хвиля існує}\},$$

$$S_i(x, t) = \{i\text{-та солітоноподібна хвиля зумовлює поштовх в точці } x \text{ в момент часу } t \},$$

$$S_{ij} = \{i\text{-та та } j\text{-та солітоноподібна хвилі при їх взаємодії зумовлюють поштовх в точці } x \text{ в момент часу } t \}, \dots$$

Тоді неперетинними будуть події:  $S_{i_1, \dots, i_k} \bar{S}_{i_{k+1}} \dots \bar{S}_{i_n}, 1 \leq k \leq n$ . Використовуючи формулу повної ймовірності, маємо очевидне співвідношення:

$$P\{\mu(x, t) > M\} =$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k}^n P\{Is(i_1)\} P\{Is(i_2)\} \dots P\{Is(i_k)\} P\{S_{i_1, \dots, i_k}(x, t)\} P\{E(x, t, M)\} P\{\bar{S}_{i_{k+1}}\} \dots P\{\bar{S}_{i_n}\} +$$

$$+ P\{\mu(x, t) > M / NS, E(x, t, M)\} P\{NS\} P\{E(x, t, M)\},$$

де  $i_1, i_2, \dots, i_k, 1 \leq k \leq n$ -усі підмножини з множини індексів  $\{1, 2, \dots, n\}$ , що містять  $k$  елементів,  $1 \leq k \leq n, P\{S_i(x, t)\} = P\{S_i(x, t) / Is(i)\} P\{Is(i)\}$ .

Зауважимо, що ймовірність  $P\{S_i / Is(i)\}$  можна оцінити, аналізуючи відповідний процес форшокових поштовхів (знаходиться частота події, яка полягає в тому, що епіцентр форшоку співпадає з положенням прогнозованої локалізованої хвилі у відповідний момент часу). Аналогічно можна оцінити  $P\{S_{i_1, \dots, i_k}(x, t)\}$ . Таким чином, для обрахунку ймовірності поштовху, що відбувається в результаті проходження відокремленої хвилі через області, де накопичується сейсмічна енергія, необхідно робити оцінки траєкторій солітоноподібних хвиль за результатами спостережень їх окремих точок.



### 2.3. Евристичні алгоритми ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль та прогнозування

Нехай заданою є початкова множина сейсмічних поштовхів в деякому регіоні виду:  $G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)\}$ , де  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - координати поштовхів,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  - відповідні моменти часу. Будемо вважати, що відповідні поштовхи зумовлені проходженням локалізованих солітоноподібних збурень через зони накопичення сейсмічної енергії.

Стоїть завдання за результатами спостережень визначити траєкторії відокремлених хвиль, оцінити їх швидкості та побудувати прогноз, тобто оцінити множину  $S_t$ .

Очевидно, що в такій постановці маємо лише частковий випадок ситуації, яка виникає в реальності – адже проходження локалізованої солітоноподібної хвилі через зону накопичення сейсмічної енергії – це далеко не єдиний механізм виникнення сейсмічного поштовху.

Перший етап розв'язання такої задачі – це виокремлення підпоследовностей поштовхів, які зумовлені однією і тою ж локалізованою хвилею. Очевидно, що це в певному сенсі задача кластеризації, що належить до галузі інтелектуального аналізу даних (Data Mining). Однак, в даному випадку не будемо використовувати штучні нейронні мережі, а скористаємось специфікою досліджуваного фізичного явища та використаємо результати математичного моделювання, наведені вище.

На першому етапі будемо використовувати інформацію про характер швидкості хвилі. Припустимо, що в конкретному фізичному середовищі має місце спадання швидкості солітоноподібної хвилі (це впливає безпосередньо з результатів чисельних експериментів, наведених у Додатку В). У такому випадку із множини  $G_0 = \{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_k, t_k)\}$  можемо виділяти такі підпоследовності  $(x_{i_1}, t_{i_1}), (x_{i_2}, t_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, t_{i_k})$ , для яких виконується умова:

$$\tilde{v}_{i_1 i_2} \geq \tilde{v}_{i_2 i_3} \geq \dots \geq \tilde{v}_{i_{k-1} i_k}, \text{ де}$$

$$\tilde{v}_{ij} = \frac{\rho(x_j, x_i)}{t_j - t_i}, j > i, i, j = 1, k, \rho(x_j, x_i) - \text{відстань між точками.}$$

Зважаючи на характеристики швидкостей, що є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь, можемо отримати інші умови, наприклад, умову випуклості функції швидкості:

$$\tilde{v}_r \leq \tilde{v}_{r-1} + \frac{\tilde{v}_{r+1} - \tilde{v}_{r-1}}{\bar{t}_{r+2} - \bar{t}_r} (\bar{t}_{r+1} - \bar{t}_r), \quad \text{де} \quad \bar{t}_r = t_r \quad \text{або} \quad \bar{t}_r = \frac{t_r - t_{r-1}}{2},$$

$$\tilde{v}_r = \frac{\rho(x_{i_{r+1}}, x_{i_r})}{t_{i_{r+1}} - t_{i_r}}, r = 1, 2, \dots, k-1.$$

В процесі ідентифікації траєкторій можемо також запропонувати підхід, що ґрунтується на властивостях автокореляційних функцій. Дійсно, розглянемо послідовність  $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_l}$  абсцис чи ординат точок  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$  і визначимо коефіцієнт автокореляції:

$$R_l^1 = \frac{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)(r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)}{\sqrt{\sum_{i=2}^l (r_{j_i} - \bar{r}_1)^2 (r_{j_{i-1}} - \bar{r}_1)^2}}, \bar{r}_1 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_i}, \bar{r}_2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=2}^l r_{j_{i-1}}.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт автокореляції  $R_{l+1}^2$  для ряду  $r_{j_1}, r_{j_2}, \dots, r_{j_{l+1}}$ . У тому випадку, якщо точка  $x_{j_{l+1}}$  не має кореляційного зв'язку з  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$ , то одержимо нерівність  $R_l^1 > R_{l+1}^2$ . За умови суттєвого відносного зменшення коефіцієнта кореляції точка  $x_{j_{l+1}}$  не включається у відповідну підпослідовність.

Зауважимо, що за допомогою коефіцієнта кореляції можемо шукати і прогнозне значення траєкторії як максимум коефіцієнта кореляції, розглядаючи окремо абсциси та ординати координат епіцентрів сейсмічних поштовхів.

Зауважимо, що чисельне моделювання траєкторії відокремленої хвилі, що рухається в анізотропному твердому тілі, наведене вище, показало, що траєкторія локалізованої хвилі переважно прямолінійна або являє собою

фрагменти спіралей. Зауважимо, що на етапі попереднього аналізу даних можемо розглядати два підходи. Перший враховує вплив відокремлених хвиль з врахуванням їх руху вглиб Землі чи до поверхні (тоді матимемо тривимірну модель), другий—лише хвилі, які рухаються на рівні поверхні Мохоровичича в обмеженому районі, коли можемо обмежитись двохвимірним випадком. Може виникнути і одновимірний випадок, коли солітон рухається вздовж розлому земної кори.

У двохвимірному випадку випадку логічно в процесі побудови траєкторій розглядати прямолінійні траєкторії або криві в класі функцій виду  $r(\varphi(t)) = \alpha_1 e^{-\mu_1 \varphi(t)} + \alpha_2 e^{-\mu_2 \varphi(t)} + \dots + \alpha_m e^{-\mu_m \varphi(t)}$ . Нехай  $x_{j_k} = r_{j_k} e^{i\varphi_{j_k}}$ ,  $k = \overline{0, l}$ . Тоді можемо одержати систему співвідношень виду:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1^{\varphi_0} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_0} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_0} &= r_{j_0}, \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_1} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_1} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_1} &= r_{j_1}, \\ \dots & \\ \alpha_1 \beta_1^{\varphi_l} + \alpha_2 \beta_2^{\varphi_l} + \dots + \alpha_m \beta_m^{\varphi_l} &= r_{j_l}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

де  $e^{-\mu_i} = \beta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Без обмеження загальності можемо вважати, що  $\varphi_0 = 0$ . Як випливає з результатів роботи [183], система (2.18) має єдиний розв'язок для випадку  $l = 2m - 1$  або  $l = 2m$  якщо послідовність  $r_{j_0}, r_{j_1}, \dots, r_{j_l}$  строго позитивна. Можна показати, що якщо система (2.18) сумісна, то з ймовірністю 1 точки  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$  належать траєкторії однієї солітоноподібної хвилі.

Розглянемо ще один підхід, що ґрунтується на виборі деякої кривої, яка добре моделює траєкторію локалізованої хвилі. Такий підхід може бути ефективним, якщо хвилі рухаються в областях, де не змінюється муттєво густина. Тако області часто виникають на практиці, наприклад, солітоноподібні хвилі рухаються вздовж розломів земної кори ніби по каналах. Нехай  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}$  - деяка підпослідовність даних спостережень,  $L = \{(r, \varphi) : r = f(\varphi)\}$  - деяка крива, записана в полярній системі координат, що

проходить через ці точки. Розглянемо точку  $x_{j_{l+1}} = r_{j_{l+1}} e^{i\varphi_{j_{l+1}}}$ . Розглянемо подію  $A_{l+1} = \{x_{j_{l+1}} \in s_\varepsilon(x), x \in L\}$ , де  $s_\varepsilon(x)$ -коло радіуса  $\varepsilon$  та умову  $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}, x_{j_{l+1}} \text{ належать одній траєкторії}\}$ .

Тоді ймовірність події  $A_{l+1}$  визначається співвідношенням:

$$P\{x_{j_{r+1}} \in s_\varepsilon(x), x \in L\} = \begin{cases} \int_{s_\varepsilon(x)} f_\xi(z) dz, \text{ якщо виконано } \bar{B}, \\ 1, \text{ якщо виконано } B, \end{cases}$$

де  $f_\xi(z)$ -відповідна функція розподілу. Якщо наступила подія  $A_{l+1}$ , ймовірність якої мала в загальному випадку, то можемо вважати, що  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_l}, x_{j_{l+1}}$  належать траєкторії одного і того ж збурення.

Таким чином, якщо деяка підпоследовність поштовхів ідентифікована в контексті належності до однієї і тієї ж хвилі, то можемо оцінити і саму траєкторію. Знаючи відстань між окремими поштовхами вздовж траєкторії, можна оцінити швидкість. Маючи оцінки швидкості та траєкторії кожної солітоноподібної хвилі, можна оцінити її положення в будь-який момент часу.

В якості вихідних даних будемо розглядати последовність виду:

$(x_1, t_1, \mu_1), (x_2, t_2, \mu_2), \dots, (x_k, t_k, \mu_k)$ , де  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - гіпоцентри землетрусів,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  - моменти поштовхів,  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  - магнітуди.

Для ідентифікації та прогнозування областей локалізації відокремлених хвиль застосуємо наступний алгоритм :

1. Визначаються швидкості  $\tilde{v}_{ij} = \frac{\rho(x_j, x_i)}{t_j - t_i}, j > i, i, j = 1, 2, \dots, n$  ( $\rho(\cdot)$ -відстань

між епіцентрами чи гіпоцентрами).

2. З усієї последовності землетрусів виділяються підпоследовності  $(x_{i_1}, t_{i_1}), (x_{i_2}, t_{i_2}), \dots, (x_{i_k}, t_{i_k})$  з врахуванням певних критеріїв, зокрема:

А)  $\tilde{v}_1 > \tilde{v}_2 > \dots > \tilde{v}_{k-1}$

Б)  $\tilde{v}_r \leq \tilde{v}_{r-1} + \frac{\tilde{v}_{r+1} - \tilde{v}_{r-1}}{\bar{t}_{r+2} - \bar{t}_r} (\bar{t}_{r+1} - \bar{t}_r)$ , де  $\bar{t}_r = t_{i_r}$  або  $\bar{t}_r = \frac{t_{i_r} - t_{i_{r-1}}}{2}$ ,

$$\tilde{v}_r = \frac{\rho(x_{i_{r+1}}, x_{i_r})}{t_{i_{r+1}} - t_{i_r}}, r = 1, 2, \dots, k-1$$

3. Для кожної виділеної підпоследовності землетрусів визначається прогнозна швидкість на основі часового ряду емпіричних швидкостей. В найпростішому випадку прогнозна швидкість може визначатись на основі співвідношень:  $\tilde{v}_k(t) = Ce^{-\mu(t-t_{i_{k-2}})}$ ,  $\mu = -\frac{\ln(\tilde{v}_{k-1}/\tilde{v}_{k-2})}{t_{i_k} - t_{i_{k-1}}}$ ,  $C = \tilde{v}_{k-1}e^{\mu(t_{i_k} - t_{i_{k-2}})}$
4. Для кожної підпоследовності для заданого моменту часу визначається прогнозна траєкторія. Для її оцінки здійснюється врахування специфіки траєкторії руху ідентифікованої хвилі в даному середовищі, можливість відбивань, рух по спіралях. Для цього можна використовувати, наприклад, певні апроксимаційні криві, зокрема криві, які в полярній системі координат мають вигляд:  $r = c_1e^{\mu_1(\varphi-\varphi_0)} + c_2e^{\mu_2(\varphi-\varphi_0)} + \dots + c_me^{\mu_m(\varphi-\varphi_0)}$ , ( $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, c_1, c_2, \dots, c_m, \varphi_0$  - деякі параметри, оцінка яких здійснюється з врахуванням гіпоцентрів
5. Для кожної підпоследовності для заданого моменту часу визначаємо положення солітона з врахуванням швидкості руху та прогнозної траєкторії. Області, утворені проекцією координат усіх солітоноподібних хвиль на поверхню Землі, вважаються сейсмо-небезпечними в даний момент часу.

### Висновки до другого розділу

1. Наведені в цьому розділі результати дозволяють побудувати низку узагальнень властивостей локалізованих солітоноподібних збурень, що рухаються в суцільних середовищах:

- Траєкторія суттєво залежить від густини середовища. В областях різкої зміни густини характерним є різка зміна траєкторії на зразок відбивання променя світла. При цьому траєкторія є нелінійною.

- Від'ємні збурення можуть відбиватись від областей меншої густини і притягуватись до областей більшої густини. Додатні збурення навпаки, притягуються до областей меншої густини та відштовхуються від областей більшої.

- Аналіз траєкторій локалізованих збурень в анізотропному твердому тілі показує наявність ефектів відбивання хвилі як в напрямку зростання так і спадання щільності. При цьому фрагменти траєкторій між точками відбивання близькі до прямолінійних чи спіралей. Зауважимо, що при сталій густині матимемо прямолінійні траєкторії.

2. Розроблено нову методику уточнення ймовірності сейсмічного поштовху, яка відрізняється від традиційного методу сейсмічного районування врахуванням ідентифікованих траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень та відповідно, корекції ймовірності сейсмічного поштовху.

4. Запропоновано низку нових алгоритмів ідентифікації траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень, що відрізняються врахуванням специфіки поведінки локалізованих солітоноподібних збурень при їх русі у областях неоднорідного середовища з анізотропією пружних властивостей.

### **РОЗДІЛ 3. АЛГОРИТМИ ПРОГНОЗУВАННЯ ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ ЗБУРЕНЬ, ЩО ГРУНТУЮТЬСЯ НА ОСНОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МНОГОЧЛЕНІВ**

Для прогнозування траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень будемо застосувати наступний підхід. Якщо розглянути епіцентри поштовхів, що зумовлені однією хвилею в декартовій системі координат, то можемо окремо будувати прогноз по абсцисах та ординатах гіпоцентрів. В такому випадку задача зводиться до класичної одновимірної задачі екстраполяції.

#### **3.1 Конструктивна процедура побудови прогнозного значення на основі інтерполяційного многочлена Н'ютона-Грегорі другого виду.**

Найбільш поширеними на сьогодні методами короткострокового прогнозування часових рядів є методи екстраполяції [184-187]. Серед відомих методів екстраполяції можна виділити методи, що ґрунтуються на основі інтерполяційних многочленів [184, 185] (найчастіше використовується інтерполяційний многочлен Н'ютона другого виду), узагальнених інтерполяційних многочленів по різних системах функції Чебишева [186,187] (многочлени, експоненти, тригонометричні функції), методи, що ґрунтуються на основі аналізу тренду [188], радіальних базисних функцій, методи екстраполяції на основі сплайнів [189–191] (кубічних, В-сплайнів, кривих Без'є), різноманітні статистичні підходи [192–195].

Наближенню неперервних та диференційованих функцій многочленами присвячено велику кількість робіт. Добре відома теорема Вейерштрасса, результати В. К. Дзядика, А. Ф. Тімана [185] про наближення неперервних функцій многочленами на скінченному інтервалі. В такому випадку, на основі відповідних многочленів можна розв'язувати і задачу екстраполяції за правилом “добре проінтерполую–обережно проекстраполую”. Однак, з наведених результатів не зрозуміло, як наближати функцію коли не виконуються умови відповідних теорем, зокрема, коли мова йде саме про інтерполяційні многочлени, а не довільні, або коли функція визначена на нескінченному інтервалі.

Очевидно, що задача екстраполяції є дуже складною і загалом некоректною. Адже очевидно, що для будь-якої сукупності точок  $(t_1, x_1), (t_2, x_2), \dots, (t_n, x_n)$  існує безліч кривих, які через них проходять чи якимось їх наближають, і тому складно стверджувати, що якась одна крива (модель) є саме тим законом, який вичерпно описує явище та дозволить ефективно спрогнозувати його поведінку у майбутньому. Гіпотеза про закон, якому відповідають точкові спостереження, є ефективною, якщо вона дозволяє прогнозувати відповідний процес з прийнятною точністю починаючи з деякого кроку спостережень. Та на практиці знайти ефективну гіпотезу вдається далеко не завжди.

Нехай маємо деякі значення функції  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , визначені в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$  відповідно. Необхідно оцінити значення цієї функції  $f_{n+1}$ , що визначене в деякій точці  $x = x_{n+1} > x_n$ . Таким чином, маємо задачу екстраполяції функції, що задана таблично. Для розв'язання такої задачі на практиці, зокрема, використовують інтерполяційні многочлени Н'ютона другого виду [196] за умови, коли точка  $x$  знаходиться недалеко від точки  $x_n$ .

Як відомо [196], інтерполяційні многочлени Н'ютона першого та другого виду, відповідно, записуються у вигляді:

$$\begin{aligned}
 P_1^N(x) &= f_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
 &+ f(x_0, x_1, \dots, x_N)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{N-1}), \\
 P_2^N(x) &= f_n + f(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots \\
 &+ f(x_{n-N}, \dots, x_n)(x - x_{n-N+1}) \dots (x - x_n), \\
 \text{де } f(x_i, x_j) &= \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i}, \quad i \neq j, \\
 f(x_i, x_j, \dots, x_k, x_l) &= \frac{f(x_j, \dots, x_l) - f(x_i, \dots, x_k)}{x_l - x_i}.
 \end{aligned}$$

Нехай

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+j} - x_i}, \quad (3.1)$$

$$\Delta^0 f_i = f_i.$$

Очевидно, що  $\Delta^j f_i = f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j})$ . Тоді

$$P_2^N(x) = f_n + \Delta^1 f_{n-1}(x - x_n) + \Delta^2 f_{n-2}(x - x_{n-1})(x - x_n) + \dots$$



$$+ \Delta^N f_{n-N} (x - x_{n-N+1}) \dots (x - x_n).$$

На практиці значення многочленів обчислюють з використанням таблиці розділених різниць (див. Табл.1).

Таблиця 3,1

Схема обрахунку розділених різниць

					$f_{n+1}$	$x_{n+1}$
				$\Delta^1 f_n$		
			$\Delta^2 f_{n-1}$		$f_n$	$x_n$
		$\Delta^3 f_{n-2}$		$\Delta^1 f_{n-1}$		
	$\Delta^4 f_{n-3}$		$\Delta^2 f_{n-2}$		$f_{n-1}$	$x_{n-1}$
		$\Delta^3 f_{n-3}$		$\Delta^1 f_{n-2}$		
	$\Delta^4 f_{n-4}$		$\Delta^2 f_{n-3}$		$f_{n-2}$	$x_{n-2}$
$\Delta^5 f_{n-5}$		$\Delta^3 f_{n-4}$		$\Delta^1 f_{n-3}$		
...	...	...	...	...	...	...
$\Delta^5 f_1$		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^1 f_3$		
	$\Delta^4 f_1$		$\Delta^2 f_2$		$f_3$	$x_3$
		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^1 f_2$		
			$\Delta^2 f_1$		$f_2$	$x_2$
				$\Delta^1 f_1$		
					$f_1$	$x_1$

Припустимо, що для деякого  $k$  виконується умова:

$$\Delta^k f_{n-k+1} = \Delta^k f_{n-k}. \quad (3.2)$$

В такому випадку прогнозне значення може бути знайдено за наступною очевидною обчислювальною процедурою:

$$\Delta^{i-1} f_{n-i+2} = \Delta^i f_{n-i+1} (x_{n+1} - x_{n+1-i}) + \Delta^i f_{n-i}, \quad i = k, 0. \quad (3.3)$$

Позначимо  $x_{n+1} = x$ . З врахуванням (3.1) маємо:

$$\Delta^k f_{n-k} = \Delta^k f_{n-k+1} = \frac{\Delta^{k-1} f_{n-k+2} - \Delta^{k-1} f_{n-k+1}}{x - x_{n-k+1}}.$$

Звідси

$$\Delta^{k-1} f_{n-k+2} = \Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) + \Delta^{k-1} f_{n-k+1},$$

$$\begin{aligned} \Delta^{k-2} f_{n-k+3} &= \Delta^{k-1} f_{n-k+2} (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2} = \\ &= (\Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) + \Delta^{k-1} f_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2} = \\ &= \Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-1} f_{n-k+1} (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{k-3} f_{n-k+4} &= \Delta^{k-2} f_{n-k+3} (x - x_{n-k+3}) + \Delta^{k-3} f_{n-k+3} = \\ &= (\Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-1} f_{n-k+1} (x - x_{n-k+2}) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2}) (x - x_{n-k+3}) + \\ &+ \Delta^{k-3} f_{n-k+3} = \Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) (x - x_{n-k+3}) + \\ &+ \Delta^{k-1} f_{n-k+1} (x - x_{n-k+2}) (x - x_{n-k+3}) + \Delta^{k-2} f_{n-k+2} (x - x_{n-k+3}) + \Delta^{k-3} f_{n-k+3}, \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \Delta^k f_{n-k+1} (x - x_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) \dots (x - x_n) + \\ &+ \Delta^{k-1} f_{n-k+1} (x - x_{n-k+2}) (x - x_{n-k+3}) \dots (x - x_n) + \dots + f_n. \end{aligned}$$

Тоді за умови (3.2) виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \Delta^k f_{n-k} (x - x_{n-k+1}) (x - x_{n-k+2}) \dots (x - x_n) + \\ &+ \Delta^{k-1} f_{n-k+1} (x - x_{n-k+2}) (x - x_{n-k+3}) \dots (x - x_n) + \dots + f_n. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким чином, при виконанні умови (3.2) прогнозне значення функції  $f_{n+1}$  в деякій точці  $x = x_{n+1}$  визначається як значення многочлена Н'ютона другого виду (формула інтерполювання назад) степеня  $k$ , що еквівалентне обчислювальній процедурі (3).

### 3.2. Співвідношення для обрахунку прогнозного значення на основі інтерполяційних многочленів

**Твердження 1.** Нехай маємо рівномірну сітку з кроком  $\Delta$ , відомі значення деякої функції  $f_i = f(i\Delta), i = n, n-1, \dots, n-m$ . Тоді прогнозне значення функції, побудоване на основі інтерполяційного многочлена Н'ютона другого виду  $P_2^N(x)$  в точці  $(n+1)\Delta$  може бути знайдене на основі співвідношення:

$$P_2^m((n+1)\Delta) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1}. \quad (3.5)$$

Доведення

Позначимо  $f_{n+1}^m = P_2^m((n+1)\Delta)$ . Розглянемо детальніше таблицю розділених різниць (див. Табл.3.2). Тут крок сітки рівний 1.

Легко бачити, що у випадку, коли крок сітки рівний 1, має місце співвідношення:

$$\Delta^i f_j = \frac{\sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k f_{j+i-k}}{i!}. \quad (3.6)$$

Таблиця 3.2

## Фрагмент таблиці розділених різниць

6	$f_6$				
		$\Delta^1 f_5$			
5	$f_5$		$\Delta^2 f_4$		
		$\frac{f_5 - f_4}{1}$		$\Delta^3 f_3$	
4	$f_4$		$\frac{f_5 - 2f_4 + f_3}{1*2}$		$\Delta^4 f_2 =$ $= \frac{f_5 - 4f_4 + 6f_3 - 4f_2 + f_1}{1*2*3*4}$
		$\frac{f_4 - f_3}{1}$		$\frac{f_5 - 3f_4 + 3f_3 - f_2}{1*2*3}$	
3	$f_3$		$\frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{1*2}$		$\frac{f_5 - 4f_4 + 6f_3 - 4f_2 + f_1}{1*2*3*4}$
		$\frac{f_3 - f_2}{1}$		$\frac{f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1}{1*2*3}$	
2	$f_2$		$\frac{f_3 - 2f_2 + f_1}{1*2}$		
		$\frac{f_2 - f_1}{1}$			
1	$f_1$				

У випадку довільної рівномірної сітки з кроком  $\delta$  :

$$\Delta^i f_j = \frac{\sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k f_{j+i-k}}{i! \delta^i} \quad (3.7)$$

Відповідне співвідношення легко довести методом математичної індукції по індексу  $i$ . Дійсно, при  $i=1$  співвідношення (3.6) очевидне. Тоді

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!} (f_{j+1+n} + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k f_{j+1+n-k} - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f_{j+n-k}) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (f_{j+1+n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} C_n^{k+1} f_{j+n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k f_{j+n-k} - (-1)^n f_j) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (f_{j+1+n} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^{k+1} f_{j+n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k f_{j+n-k} - (-1)^n f_j) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (f_{j+1+n} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n+1}^{k+1} f_{j+n-k} - (-1)^n f_j) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} (f_{j+1+n} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_{n+1}^k f_{j+n-k+1} - (-1)^n f_j) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k C_{n+1}^k f_{j+n+1-k}
\end{aligned}$$

Таким чином, має місце співвідношення (3.6).

Якщо скористатись припущенням (3.2) та будувати прогнозне значення за процедурою (3.3), то легко бачити, що прогнозне значення—це просто сума відповідних скінченних різниць з попередньої діагоналі таблички, помножених на відповідні значення. Зокрема, для відповідних значень з Табл.3.2 маємо:

$$\Delta^3 f_3 = 4 \frac{f_5 - 4f_4 + 6f_3 - 4f_2 + f_1}{2*3*4} + \frac{f_5 - 3f_4 + 3f_3 - f_2}{2*3} = \frac{2f_5 - 7f_4 + 9f_3 - 5f_2 + f_1}{2*3},$$

$$\Delta^2 f_4 = 3 \frac{2f_5 - 7f_4 + 9f_3 - 5f_2 + f_1}{2*3} + \frac{f_5 - 2f_4 + f_3}{2} = \frac{3f_5 - 9f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1}{2},$$

$$\Delta^1 f_5 = 2 \frac{3f_5 - 9f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1}{2} + f_5 - f_4 = 4f_5 - 10f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1,$$

$$f_6 = f_5 + \Delta^1 f_5 = f_5 + 4f_5 - 10f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1 = 5f_5 - 10f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1.$$

Або, в іншому записі,

$$f_6 = 1(2(3(4\Delta^4 f_1 + \Delta^3 f_2) + \Delta^2 f_3) + \Delta^1 f_4) + f_5 = 5f_5 - 10f_4 + 10f_3 - 5f_2 + f_1.$$

Бачимо, що прогнозне значення знаходиться як сума всіх рядочків “знакозмінного” трикутника Паскаля (див. Рис.3.1), елементи якого помножені на відповідні значення функції. В загальному випадку можемо записати наступне рекурентне співвідношення:

$$\varphi_1 = \Delta^{n-1} f_1$$

$$\varphi_i = (n-i+1)\varphi_{i-1} + \Delta^{n-i} f_i, i=2,3,\dots,n$$

$$f_{n+1} = \varphi_n$$

Легко бачити, що всі міркування, наведені вище, справедливі, коли крок сітки довільний та рівний  $\delta$ .

				1		
			1	-1		
		1	-2	1		
	1	-3	3	-1		
1	-4	6	-4	1		
1	5	-10	10	-5	1	

Рис.3.1 Фрагмент трикутника Паскаля

Тоді, враховуючи відоме комбінаторне співвідношення  $\sum_{k=i}^n C_k^i = C_{n+1}^{i+1}, i = 0,1,2,\dots$

отримуємо Твердження 1.

### 3.3. Алгоритм вибору вибору оптимального степеня інтерполяційного многочлена для екстраполяції

Будемо будувати прогнозні значення на основі інтерполяційних многочленів Н'ютона другого виду. На основі Твердження 1 будь-який прогноз за допомогою інтерполяційного многочлена на рівномірній сітці можна легко побудувати, причому довільного степеня.

Легко бачити, що побудувати ефективний прогноз на основі інтерполяційних многочленів вдається далеко не завжди. Розглянемо, наприклад, таку просту послідовність:  $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, 1$ . Тоді за співвідношенням (5) прогнозне значення на основі многочлена степені  $m-1$  визначається за формулами:

$$f_{n+1}^1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{k-1} C_1^k f_{n-k+1} = 1,$$

$$f_{n+1}^2 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} C_2^k f_{n-k+1} = 3,$$

$$f_{n+1}^3 = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k-1} C_3^k f_{n-k+1} = 3 + 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1,$$

...

$$f_{n+1}^m = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1} = 2^m - 1.$$

Але очевидно, для нашої послідовності наступне прогнозне значення рівне - 1.

Виникає завдання: як вибрати степінь інтерполяційного многочлена так, щоб похибка екстраполяції була мінімальною. Очевидно, що в такій постановці задача виглядає некоректною-адже ми нічого не знаємо про наступне значення функції, окрім відповідних значень, заданих у попередніх точках. Тут неможливо ввести поняття похибки (адже ми нічого не знаємо про наступне значення функції, а отже, немає з чим порівнювати побудоване якимось чином прогнозне значення) якщо не розглядати певних додаткових вимог до функції, що екстраполюється чи припущень стосовно майбутньої її поведінки. Розглянемо декілька прикладів.

Нехай маємо функцію  $f(x) = x^6 \sin(x)$ . В таблиці 3.3 в першому рядку наведено значення функції в точках 13,14,15,16,17,18,19, у наступних рядках-значення інтерполяційних многочленів відповідного степеня, побудованих по попередніх точках в аналогічній точці. Таким чином, можна визначити, який степінь многочлена є найкращий для обрахунку прогнозного значення та знайти похибку. В таблиці 1 найкраще прогнозне значення виділено кольором. В результаті отримуємо, що для значення функції в точці 13 найкращий проноз дає многочлен 8 степеня, 14-6,15-9,16-3,17-10(а можливо і більше значення),18-4,19-6,20-10(а можливо і більше). Таким чином, задача вибору найкращого інтерполяційного многочлена для екстраполяції є актуальною.

Таблиця 3.3 Ілюстрація вибору найкращого степеня інтерполяційного многочлена для екстраполяції

Степ. мн.	2028066	7458814	7407185	-4830216	-23205798,3	-25542746,5	7051105,37	58428496,05
1	-1432853	5658330	12889561	7355556	-17067617,19	-41581380,5	-27879694,62	39644957,2
2	-35984,6	9119249	14690045	1873180	-29253389,43	-47719561,6	-11841060,62	74575757,19
3	1825368	11183300	13029610	-5409680	-35956785,15	-41671970,4	10335754,49	93467923,18
4	3428506	11385997	9305124	-1,1E+07	-35377320,8	-28920983,6	26464978,47	90183274,05
5	4273126	9985558	5377940	-1,3E+07	-29175431,55	-16749461,1	29843215,59	70769400,96
6	4173055	7740498	2851196	-1,1E+07	-21075603,19	-10779827,8	21049930,2	47977290,74
7	3259596	5595508	2569512	-6344812	-15005019,32	-12910022,9	6287011,563	33978465,9
8	1910319	4363978	4432818	-1507139	-13490423,94	-21110801,9	-6345711,969	34742559,71
9	625813,2	4481726	7527653	1467228	-16813501,12	-30826176,3	-10777656,53	48139377,05
10	-117658	5883979	10504741	1346760	-23110945,61	-37218473,4	-5494226,726	65968138,95

В Таблиці 3.4 наведено значення середніх арифметичних 10 інтерполяційних прогнозів, мінімальні та максимальні значення, що визначають інтервал поліноміальної невизначеності, довжину відповідного інтервалу та його середину. Як бачимо з даного прикладу, найкращий для прогнозу степінь інтерполяційного многочлена той, прогнозне значення для якого мінімально відхиляється від середнього значення усіх прогнозів. Іншими словами, середнє значення усіх поліноміальних прогнозів дає найкращий прогноз.

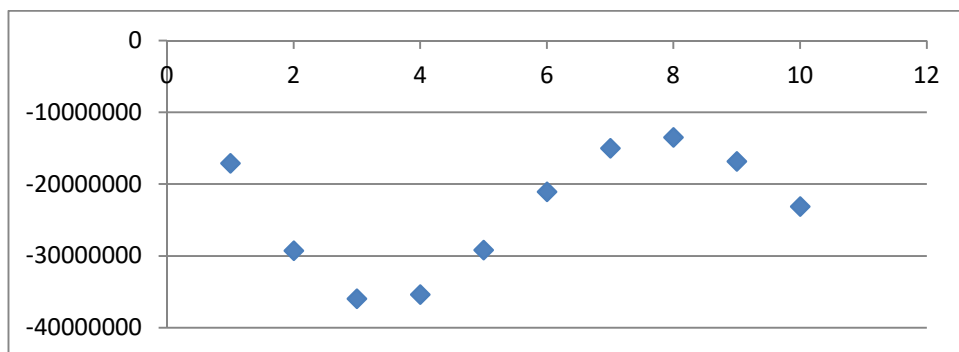


Рис.3.2. Точки екстраполяції на основі інтерполяційних многочленів 1,2,... степенів відповідно (значення 5 стовпчика Таблиці 3.3).

В Таблиці 3.4 наведені аналогічні значення для функції в точках 7,7.5,8,8.5,9,9.5,10,10.5

Таблиця 3.4 Додаткові параметри при аналізі прогнозних значень

серед. арифм	1790929	7539812	8317820	-3608186	-23632603,73	-28948865,9	3164253,986	59944714,49
мін	-1432853	4363978	2569512	-1,3E+07	-35956785,15	-47719561,6	-27879694,62	33978465,9
макс	4273126	11385997	14690045	7355556	-13490423,94	-10779827,8	29843215,59	93467923,18
середина	1420137	7874988	8629779	-2787244	-24723604,54	-29249694,7	981760,4845	63723194,54
довжина інтервал	5705979	7022019	12120533	20285601	22466361,21	36939733,75	57722910,21	59489457,27

Бачимо, що спостерігається суттєве зміщення до многочленів більших степеней. При цьому спостерігається в певному розумінні збіжність починаючи вже з многочлена 7 степеня, відповідні прогнозні значення відносно мало відрізняються. Очевидно, що в такій ситуації слід вибирати многочлен максимального степеня. При цьому середні значення також дадуть добрий прогноз при великій кількості спостережень.

Таблиця 3.5 Ілюстрація вибору найкращого степеня інтерполяційного многочлена для

Ст. мн.	77293,81635	166943,8	259354,3	301149	219016,7	-55243	-544021	-1178876
1	45484,63119	138363,5	256593,9	351764,8	342943,7	136884,3	-329503	-1032799
2	68251,75281	170172,7	285174,2	354525,3	292327,9	12957,22	-521630	-1247318
3	79978,85931	179214,8	281945,3	328705,4	238951,7	-60354,1	-589830	-1269709
4	82985,34509	176529,7	269674,4	306114,4	211395,3	-80289,1	-584719	-1223900
5	81439,29737	170838,2	260088,5	295794,3	206429,9	-72667,8	-559673	-1183202
6	78795,20853	166692,7	256194,2	295060,1	211784,6	-60081	-542248	-1167550
7	76939,00941	165191,3	256445,3	298220,3	217873,5	-52849	-537410	-1169323
8	76335,94938	165546,1	258197,8	301129,3	220802,2	-51705,9	-539804	-1175934
9	76607,99981	166504	259595,5	302285,9	220821,9	-53491,5	-543341	-1180151
10	77139,69265	167189,8	260035,4	302044,7	219685,1	-55296,7	-545093	-1180831

Графік для першого стовпчика

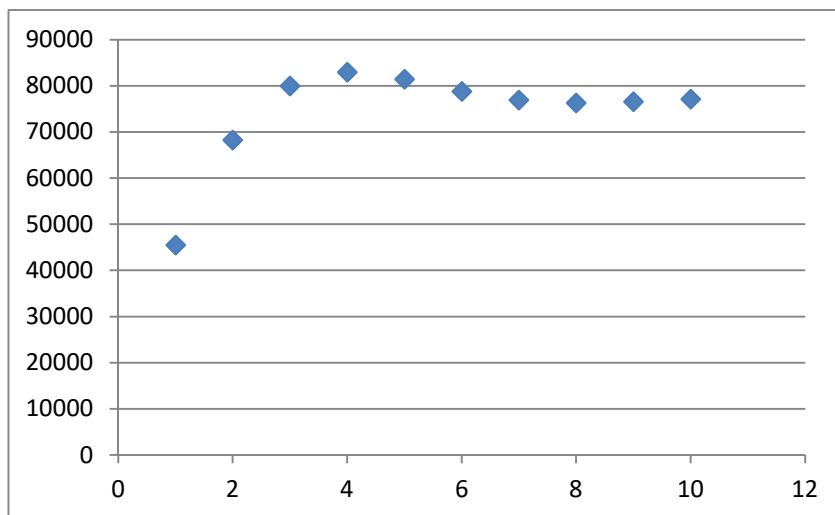


Рис.3.3 Точки екстраполяції на основі інтерполяційних многочленів 1,2,... степенів відповідно (значення першого стовпчика Таблиці 4).

Нехай маємо функцію  $f(x) = \exp(x)$ . В Таблиці 3.6 наведені аналогічні значення для функції в точках 7,7.5,8,8.5,9,9.5,10,10.5. Легко бачити, що має місце тенденція до збіжності, послідовність прогнозних значень монотонна та обмежена, відстань між сусідніми точками прямує до 0. В такій ситуації вибираємо многочлен максимального степеня.



Таблиця 3.6 Ілюстрація вибору найкращого степеня інтерполяційного многочлена

Ст.	1097	1808	2981	4915	8103	13360	22026	36316
1	927	1528	2519	4154	6849	11291	18616	30693
2	1030	1698	2799	4615	7609	12546	20685	34103
3	1070	1765	2910	4797	7909	13040	21499	35445
4	1086	1791	2953	4868	8027	13234	21819	35973
5	1093	1801	2970	4897	8073	13310	21945	36181
6	1095	1805	2977	4908	8091	13340	21994	36262
7	1096	1807	2979	4912	8098	13352	22014	36295
8	1096	1808	2980	4914	8101	13357	22021	36307
9	1097	1808	2981	4914	8102	13359	22025	36312
10	1097	1808	2981	4915	8103	13359	22026	36314

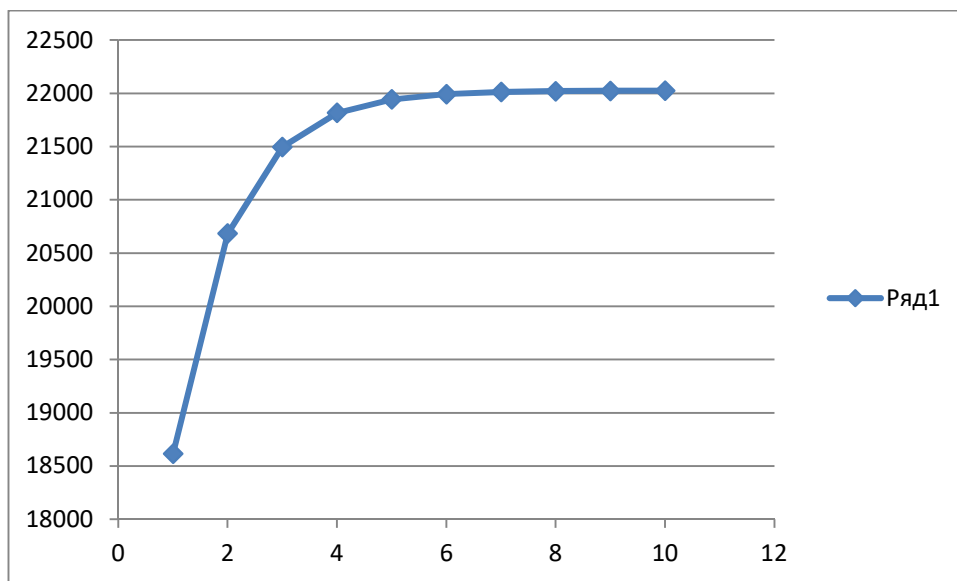


Рис.3.4. Точки екстраполяції на основі інтерполяційних многочленів 1,2,... степенів відповідно (значення сьомого стовпчика Таблиці 6).

Легко бачити, що має місце тенденція до збіжності, послідовність прогнозних значень монотонна та обмежена, відстань між сусідніми точками прямує до 0. В такій ситуації вибираємо многочлен максимального степеня.

Визначимо умову, коли прогноз, визначений як середнє арифметичне прогнозів на основі інтерполяційних многочленів може бути ефективним.

Маємо:

$$P_2^m((n+1)\Delta) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1},$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}^m &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1} = C_m^1 f_n + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1} = \\ &= C_m^1 f_n + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k f_{n-k+1} - \sum_{k=2}^m (-1)^k C_m^k f_{n-k+2} + \sum_{k=2}^m (-1)^k C_m^k f_{n-k+2} = \\ &= C_m^1 f_n + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) - \sum_{i=1}^{m-1} f_{n+1}^i. \end{aligned}$$

Звідси

$$0 = C_m^1 f_n + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) - \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i,$$

$$0 = C_m^1 f_{n+1} + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) - \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i,$$

$$f_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i - \frac{1}{m} \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}),$$

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i - \frac{1}{m} \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) - (f_n - f_{n+1}) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i - \frac{1}{m} \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) - (f_n - f_{n+1}). \end{aligned}$$

З останнього співвідношення безпосередньо впливає наступний метод екстраполяції. Нехай  $f_{n+1}^i = P_2^i((n+1)\Delta)$ . Тоді прогнозне значення  $f_{n+1} = f((n+1)\Delta)$  знаходимо у вигляді:

$$f_{n+1} = \frac{1}{\hat{m}} \sum_{i=1}^{\hat{m}} f_{n+1}^i, \quad (3.8)$$

$$\text{де } \hat{m} = \arg \min_m \left| \frac{1}{m} \left( \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) + \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i \right) - f_n \right|. \quad (3.9)$$

При цьому оцінка абсолютної похибки екстраполяції визначається виразом:

$$\text{error} = \left| \frac{1}{m} \left( \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) + \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i \right) - f_n \right|. \quad (3.10)$$

При цьому, на практиці, можна скористатись відносною похибкою виду:

$$verror = \left| \frac{1}{m} \left( \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} C_m^k (f_{n-k+1} - f_{n-k+2}) + \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i \right) - f_n \right| / \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_{n+1}^i. \quad (3.11)$$

Наведені вище приклади дозволяють побудувати алгоритм вибору найкращого многочлена для екстраполяції серед інтерполяційних многочленів.

1. Будуються прогнози для усіх можливих інтерполяційні многочленів в залежності від об'єму експериментальних даних на основі співвідношення (3.5).
2. Здійснюється аналіз отриманої послідовності на предмет наявності тенденції до збіжності (зокрема, коли відстань між сусідніми екстраполяційними точками монотонно зменшується ).
  - 2.1 За умови наявності тенденції до збіжності в якості прогнозного значення вибирається прогноз многочлена найбільшого степеня.
  - 2.2 За умов монотонного зростання приростів в якості найкращого прогнозу вибирається многочлен мінімального степеня.
  - 2.3 За умов відсутності монотонності послідовності екстраполяційних точок, однак наявності деякого фіксованого інтервалу їх локалізації вибирається прогноз по многочлену, значення якого мінімально відрізняється від середнього значення по множині прогнозів.
3. Обчислюється похибка (3.11) та за умов її малості застосовується процедура побудови прогнозу (3.8) .
4. В інших випадках алгоритм не дає відповіді стосовно можливості побудови ефективного прогнозу на основі інтерполяційних многочленів.

### **Висновки до третього розділу**

1. Знайдено обчислювальну процедуру для знаходження екстрапольованого на один крок вперед значення функції на основі інтерполяційних многочленів довільного степеня за умови відомих значень

функції у вузлах рівномірної сітки, що створює можливості для ефективного та розв'язання задач екстраполяції на основі многочленів довільного степеня.

2. Вперше запропоновано алгоритм вибору найкращого інтерполяційного многочлена на основі певних евристик, пов'язаних з тенденцією до збіжності прогнозних значень, побудованих на основі інтерполяційних многочленів. Такий алгоритм дозволяє суттєво підвищити можливості застосування многочленів в задачах прогнозування та створення програмного забезпечення з автоматизованим вибором степеня многочленів для побудови прогнозів.

3. Запропоновано умову обрахунку прогнозного значення як середнього арифметичного інтерполяційних прогнозів та відповідну умову для оцінки похибки екстраполяції. Співвідношення для оцінки похибки може бути використане для визначення меж застосуванні відповідного методу прогнозування.

## РОЗДІЛ 4 “ПІРАМІДАЛЬНИЙ” АЛГОРИТМ ТА ЙОГО МОДИФІКАЦІЇ

### 4.1 Базовий “пірамідальний” метод прогнозування.

Очевидно, що прогноз траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень має фундаментальне значення у методах прогнозування сейсмічних поштовхів, що розглянуті вище. На сьогодні розроблено низку якісних та кількісних підходів до прогнозування. Якщо якісні методи носять суб'єктивний характер і будуються на основі думок і суджень експертів, то кількісні методи ґрунтуються на побудові прогнозу як функції від попередніх даних [2].

Основна ідея методу прогнозування, описаного в роботах [2]-[5] полягає в розробці ефективної методики знаходження прогнозного значення функції на основі точкових даних без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій. При цьому при побудові прогнозу використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у розділених різницях спеціального виду. Розглянемо детальніше згадану методику.

Нехай маємо задачу екстраполяції функції, що задана таблично. Для розв'язання такої задачі на практиці використовують, як правило, інтерполяційні многочлени Н'ютона другого виду за умови, коли точка  $x$  знаходиться недалеко від кінцевої точки інтервалу визначення функції.

Очевидно, що умова (3.2) є досить грубим припущенням стосовно поведінки функції, заданої  $k$ -тим рядком таблиці розділених різниць. Тому прогноз на основі інтерполяційної формули Н'ютона матиме значну похибку екстраполяції. Основна ідея методу, що вибраний для розрахунків та детально описаний в роботах [196]-[197], полягає у побудові вдосконаленої процедури знаходження значення  $\Delta^k f_{n-k+1}$  на основі  $k$ -того рядка таблиці (відмінної від співвідношення (4.3.2)) а також визначенні такого параметра  $k$ , для якого похибка відповідної апроксимації для тестових функцій була б мінімальною.

Нехай  $x_i^c = (x_i + x_{i+1})/2$  – середини відповідних відрізків, модифіковані скінченні різниці будуються наступним чином:

$$\begin{aligned}\Delta^1 f_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}, i = \overline{1, n-1}, \\ \Delta^2 f_i &= \frac{\Delta^1 f_{i+1} - \Delta^1 f_i}{x_{i+1}^c - x_i^c}, i = \overline{1, n-2}, \\ \Delta^3 f_i &= \frac{\Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i}{x_{i+2} - x_{i+1}}, i = \overline{1, n-3},\end{aligned}$$

В загальному випадку маємо співвідношення:

$$\Delta^j f_i = \begin{cases} \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1} - x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}}, j = 2k+1, \\ \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+\frac{j}{2}}^c - x_{i+\frac{j}{2}-1}^c}, j = 2k, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$j = \overline{1, n-1}, i = \overline{1, n-j}.$$

$$\text{Нехай } r_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}^c, j = 2k, \\ x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1}, j = 2k+1, \end{cases} l_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}-1}^c, j = 2k, \\ x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}, j = 2k+1. \end{cases}$$

Тоді

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \Delta^{j-1} f_i}{r_i^j - l_i^j}. \quad (4.2)$$

Очевидно, що різниці (4.2) краще апроксимують похідні функції та відрізняються від класичних, які розглядаються при побудові інтерполяційних многочленів Н'ютона.

Зауважимо, що у випадку знаходження наступного значення для будь-якого ряду  $k$  таблиці скінченних різниць  $\Delta^k f_{n-k+1}$ , легко можна збудувати прогнозне значення функції у точці  $x_{n+1}$  (див. рис.1) за наступною обчислювальною процедурою:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+2} = \Delta^{j-1} f_{n-j+1} + \Delta^j f_{n-j+1} (r_{n-j+1}^j - l_{n-j+1}^j), j = \overline{k, 1} \quad (4.3)$$

Проінтерполюємо значення функції у проміжних точках  $x_i^c, i = \overline{1, n-1}$ , визначивши значення функції  $f_i^c, i = \overline{1, n-1}$  та знайдемо відповідні скінченні різниці:

$$\Delta^j f_i^c = \begin{cases} \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x_{i+\frac{j}{2}+1}^c - x_{i+\frac{j}{2}}^c}, j = 2k+1, \\ \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x_{i+\frac{j}{2}+1} - x_{i+\frac{j}{2}}}, j = 2k, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$j = \overline{1, n-2}, i = \overline{1, n-j}.$$

Ввівши величини  $\hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}+1}, j = 2k, \\ x_{i+\frac{j}{2}+1}^c, j = 2k+1, \end{cases}$   $\hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+\frac{j}{2}}, j = 2k, \\ x_{i+\frac{j}{2}}^c, j = 2k+1, \end{cases}$

з (4.4) отримуємо:

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{\hat{r}_i^j - \hat{l}_i^j}.$$

Розглянемо співвідношення виду:

$$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c = \frac{\left( \frac{f_n - f_{n-1}^c}{x_n - x_{n-1}^c} - \frac{f_{n-1}^c - f_{n-1}}{x_{n-1}^c - x_{n-1}} \right)}{\frac{(x_n - x_{n-1})}{2}},$$

...

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1})}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)} \right) 2 \quad (4.5)$$

де  $i = \overline{2, n-1}$ ,

$$r_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}+1}, i = 2k, \\ x_{n-\frac{i}{2}}^c, i = 2k+1, \end{cases} c_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}^c, i = 2k, \\ x_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k+1, \end{cases} l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x_{n-\frac{i}{2}-1}^c, i = 2k+1, \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} x_{n-\frac{i}{2}-1}^c, i = 2k, \\ x_{n-\frac{i}{2}-1}, i = 2k+1. \end{cases}$$

Нехай має місце рівність:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c \quad (4.6)$$

Очевидно, що при виконанні співвідношення (4.6) можна збудувати процедуру знаходження невідомого значення функції у точці  $x_n^c$  аналогічну до (4.3).

Відповідні співвідношення мають вигляд :

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c (\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j) \quad (4.7)$$

$$j = \overline{i, 1}.$$

Знайдемо необхідні та достатні умови для виконання співвідношення (4.6). Нехай виконується (4.6). Маємо:

$$\Delta^j f_i^c = \begin{cases} \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1}^c - x_{i+\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^c}, j = 2k + 1, \\ \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \Delta^{j-1} f_i^c}{x_{i+\frac{j}{2}+1} - x_{i+\frac{j}{2}}}, j = 2k, \end{cases}$$

$$\Delta^i f_{n-i}^c = \begin{cases} \frac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{x_{n-i+\lfloor \frac{i}{2} \rfloor+1}^c - x_{n-i+\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}^c}, i = 2k + 1, \\ \frac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{x_{n-i+\frac{i}{2}+1} - x_{n-i+\frac{i}{2}}}, i = 2k, \end{cases} = \frac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{r_i - l_i}.$$

Таблиця 4.1 Схема обчислення модифікованих скінченних різниць

					$f_n^c$	$x_n^c$
					$f_n$	$x_n$
			$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c$	$\Delta^1 f_{n-1}$	$f_{n-1}^c$	$x_{n-1}^c$
		$\tilde{\Delta}^3 f_{n-3}^c$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-2}^c$	$f_{n-1}$	$x_{n-1}$
	$\tilde{\Delta}^4 f_{n-4}^c$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-3}^c$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$f_{n-2}^c$	$x_{n-2}^c$
$\tilde{\Delta}^5 f_{n-5}^c$	$\Delta^4 f_{n-4}$	$\Delta^3 f_{n-4}^c$	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^1 f_{n-3}^c$	$f_{n-2}$	$x_{n-2}$
...	...	...	...	...	...	...
$\Delta^5 f_1$	$\Delta^4 f_1^c$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^2 f_2^c$	$\Delta^1 f_3$	$f_3^c$	$x_3^c$
	$\Delta^4 f_1$	$\Delta^3 f_1^c$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^1 f_2^c$	$f_3$	$x_3$
		$\Delta^3 f_1$	$\Delta^2 f_1^c$	$\Delta^1 f_2$	$f_2^c$	$x_2^c$
			$\Delta^2 f_1$	$\Delta^1 f_1^c$	$f_2$	$x_2$



$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 f_1 & f_1^c & x_1^c \\ & f_1 & x_1 \end{array}$$

Отже, умова (4.6) запишеться у вигляді:

$$\left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{r_i - c_i} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{c_i - l_i} \right) 2 = \frac{\Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c}{r_i - l_i}.$$

або

$$\left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{r_i - c_i} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{c_i - l_i} \right) 2 = \Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c \quad (4.8)$$

Нехай  $i = 2k$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+2}^c - x_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+1}^c} = \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i}{2}+1}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c}, \\ \Delta^{i-1} f_{n-i}^c &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]+1}^c - x_{n-i+\left[\frac{i-1}{2}\right]}^c} = \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}-1}^c}. \end{aligned}$$

Співвідношення (4.8) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} &2 \left( \frac{\left( \Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c \right)}{r_i - c_i} - \frac{\left( \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1} \right)}{c_i - l_i} \right) = \\ &= \Delta^{i-1} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-1} f_{n-i}^c = \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i}{2}+1}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}-1}^c}. \end{aligned}$$

Розглянемо праву частину останньої рівності. Маємо послідовність очевидних співвідношень:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i}{2}+1}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}-1}^c} = \\ &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c + \Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i}{2}+1}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \\ &- \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1} + \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}-1}^c} = \\ &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x_{\frac{n-i}{2}+1}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \\
& - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} = \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \\
& - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} + \\
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} + \\
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \\
& - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} = \\
& = \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \right) \frac{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} + \\
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} - \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} \right) \times \\
& \times \frac{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}-1}^c} = \\
& = 2 \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{n-\frac{i}{2}+1} - x_{n-\frac{i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{n-\frac{i}{2}}^c - x_{n-\frac{i}{2}}^c} \right).
\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i+1}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c} \right) \frac{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i+1}{2}}}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} + \\
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}} - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} \right) \times \\
& \times \frac{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}} - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} + \\
& + \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} = 2 \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} \right), \\
& \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i+1}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c} \right) \frac{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i+1}{2}}}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} + \\
& + \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{x_{\frac{n-i}{2}} - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} \right) \frac{x_{\frac{n-i}{2}} - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} = \\
& = \left( \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c} - \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

Отримали лінійну комбінацію, яка доводить, що точки  $\left( x_{\frac{n-i}{2}}^c, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c \right)$ ,

$\left( x_{\frac{n-i}{2}}, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c \right), \left( x_{\frac{n-i+1}{2}}, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c \right)$  лежать на одній прямій за умов:

$$\frac{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i+1}{2}}}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c} = \frac{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} \quad \text{або} \quad \frac{x_{\frac{n-i}{2}} - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c}{x_{\frac{n-i}{2}}^c - x_{\frac{n-i-1}{2}}^c} = \frac{x_{\frac{n-i+1}{2}} - x_{\frac{n-i}{2}}^c}{x_{\frac{n-i+1}{2}}^c - x_{\frac{n-i}{2}}^c}.$$

Таким чином, отримали необхідну умову для виконання (4.6). Легко показати, що отримана умова є і достатньою, розглянувши наведене вище доведення у зворотному порядку. Аналогічно розглядаємо випадок  $i = 2k + 1$ .

В загальному випадку можемо сформулювати твердження:

**Твердження 1.** Для виконання умови (4.6) необхідно і достатньо, щоб точки  $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c)$ ,  $(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c)$ ,  $(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$  лежали на одній прямій.

Очевидно, що остання умова виконуватиметься (з точністю, яка відповідає точності наближення другої похідної скінченними різницями виду (4.5)), якщо на інтервалі  $[l_i, r_i]$  крива, що проходить через відповідні точки, являтиме собою кубічний многочлен.

Нехай при деякому значенні  $i$  виконується умова:

$$\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} = \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i}. \quad (4.9)$$

Покажемо, що точки  $(c_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)$ ,  $(l_i, \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)$ ,  $(ll_i, \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)$  лежать на одній прямій. Дійсно, з умови (10) маємо:

$$\begin{aligned} \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c &= \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \frac{(c_i - l_i)(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = \\ &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c (c_i - ll_i) + (c_i - l_i)(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = \\ &= \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c (l_i - ll_i) + (c_i - l_i) \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{c_i - ll_i} = \frac{\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c (l_i - ll_i)}{c_i - ll_i} + \frac{(c_i - l_i) \Delta^{i-2} f_{n-i}^c}{c_i - ll_i}; \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \frac{c_i(l_i - ll_i)}{c_i - ll_i} + \frac{ll_i(c_i - l_i)}{c_i - ll_i} = l_i.$$

При виконанні (4.9) має місце рівність:

$$\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = 0.$$

Останній результат впливає з наступного співвідношення:

$$\begin{aligned} &\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = \\ &= \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = \\ &= \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c + \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} - \\ &- \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1})}{c_i - l_i} \frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} + \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{l_i - ll_i} \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} - \\
&- \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{l_i - ll_i} = \\
&= \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1})}{c_i - l_i} \frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} + \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{l_i - ll_i} \frac{l_i - c_i}{c_i - ll_i} = \\
&= \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1})}{c_i - l_i} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{l_i - ll_i} \right) \frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що у випадку коли функція має точку, де змінюється її випуклість, то її найкраще апроксимувати многочленом 3 степені саме на інтервалі, що містить цю точку. Дійсно, в точці зміни випуклості друга похідна є 0 для обох функцій, значення їх співпадають. Якщо провести кубічну криву через точки, абсциси яких  $ll_i, l_i, c_i, r_i$  при виконанні умови (4.8) (в точці  $l_i$  - зміна випуклості) то, очевидно, що її відхилення від реального значення функції буде мінімальним у порівнянні з кубічною інтерполяцією на інших інтервалах. Адже в цьому випадку мінімальним є відхилення других похідних а, отже, і кривизни вихідної функції та кубічної інтерполяції, що забезпечить мінімум відхилення самих значень функцій при їх співпаданні у вузлах інтерполяції. Таким чином, довільну функцію найкраще інтерполювати кубічним многочленом в області, яку можна ідентифікувати, зокрема, за допомогою умови (4.9).

Отже, можемо запропонувати наступний алгоритм екстраполяції:

1. Будується таблиця скінченних різниць виду (4.1).
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках, таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями.
3. Знаходяться такі значення  $i^*$ , для яких

$$i^* = \arg \min_i \left| \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1})}{c_i - l_i} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - ll_i} \right|$$

4. Обраховується значення  $\tilde{\Delta}^{i^*} f_{n-i^*}^c$  за співвідношенням (4.5).
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами :

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c (\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j) \tag{4.10}$$

$$j = \overline{i^*, 1}$$

Розглянемо приклади застосувань описаного вище методу. Нехай маємо функцію  $f(x) = x^6 \sin(x)$ , визначену в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3, ..., 11. Графік функції наведено на Рис.4.5, фрагмент таблиці розділених різниць (4.5) - на Рис.4.2. У першому рядку таблиці - значення аргументу, далі – значення функції та відповідні розділені різниці. Оптимальне значення  $i^*$ , для якого виконується умова (4.10) – це значення  $i^* = 9$ ,  $i^* - 2 = 7$ - значення індекса відповідної розділеної різниці, якій відповідає 9-тий рядок таблиці. При цьому

$$\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - l_i} = 610713,879, \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} = 611585,256. \text{ Відповідне}$$

значення скінченної різниці  $\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = -703068,269$ . При цьому з використанням процедури (10) отримали прогнозне значення функції в точці 11.5, яке рівне -2017907,745, точне значення -2024974,077. Таким чином, відносна похибка становить 0,00350181.

	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	
	77293,81635	166943,8435	259354,3	301149,0278	219016,7	-55242,97922	-544021,1109	-1178876,453	-1771543,65	-2017907,745
	150719,7327	182060,5119	134205,2	-40337,6683	-356392	-763037,7708	-1123633,474	-1227522,539	-839031,292	
	91730,28601	-16514,5484	-222398	-490597,191	-722700	-767241,4668	-464484,7686	284602,1818		
	-131480,362	-314128,466	-474083	-500301,922	-276644	258215,3339	1051843,649			
	-317475,309	-342602,281	-186173	197438,3672	758517,3	1328487,924				
	-143322,651	131301,8524	540040,6	944690,7125	1131050					
	377570,6711	683363,2992	813388,9	591008,909						
	610713,879	435818,189	-92354,4							
	-64772,1786	-703068,269								
	-1140076,81									

Рис.4.1 Фрагмент таблиці розділених різниць

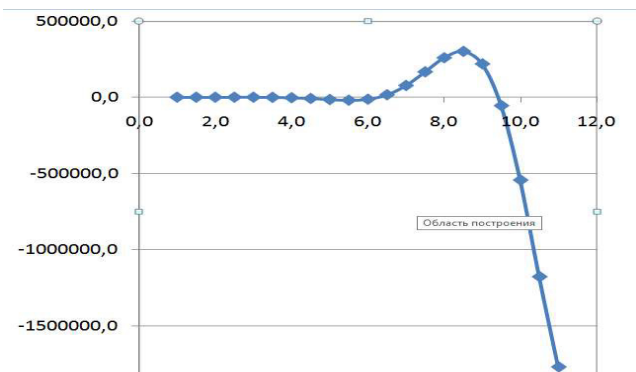
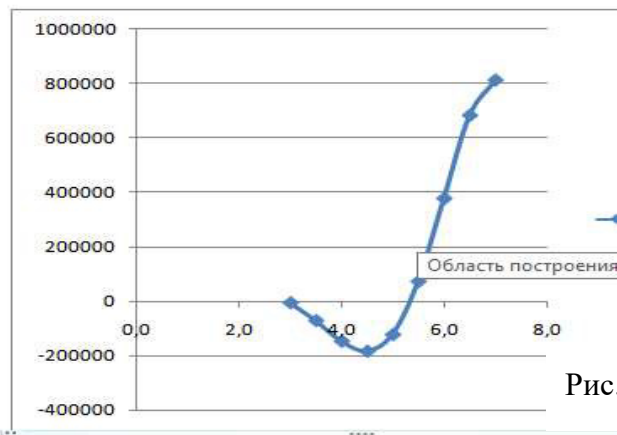


Рис.4.2 Графік функції  $x^6 \sin(x)$

Рис.4.3 Графік  $\tilde{\Delta}^i f^c_{n-i^*}$ 

6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5
-13036,4	16224,1	77293,8	166943,8	259354,3	301149,0	219016,7	-55243,0	-544021,1	-1183977,5
35753,9	90330,2	150719,7	182060,5	134205,2	-40337,7	-356392,0	-763037,8	-1128734,5	
88383,4	114965,8	91730,3	-16514,5	-222398,2	-490597,2	-722700,1	-772342,5		
67799,3	3346,8	-131480,4	-314128,5	-474082,6	-500301,9	-281745,3			
-71206,5	-199279,6	-317475,3	-342602,3	-186173,5	192337,3				
-215972,1	-246268,8	-143322,7	131301,9	534939,6					
-123019,7	72649,4	377570,7	678262,2						
256948,2	500590,4	605612,8							
476262,2	348664,6								
-21040,3									

Рис.4.4 Фрагмент таблиці розділених різниць

Розглянемо цю ж саму функцію та знайдемо її прогнозне значення в точці 10.5. Фрагмент таблиці розділених різниць наведений на рис.4.4. Оптимальні значення  $i^* = 7$ ,  $\tilde{\Delta}^i f^c_{n-i^*} = 534939,6$ . Прогнозне значення рівне  $-1183977,5$ , відповідне точне значення  $-1178876,5$ , відносна похибка становить  $0,0043$ . Аналіз відносних похибок показує, що запропонований метод дає суттєво кращі результати екстраполяції у порівнянні з аналогом многочлена Н'ютона найкращого степеня.

Зауважимо, що оптимальна заміна скінченної різниці модифікованою відбувається тоді, коли скінченні різниці меншого на 2 порядку ведуть себе наприкінці інтервалу їх визначення аналогічно, як на рис. 6. – чотири останні точки потрапляють в область зміни випуклості функції.

Очевидно, що у випадку нерівномірної сітки отримати виконання умови (10) вдасться далеко не завжди. Але тут принциповим є той факт, що у області зміни випуклості функцію доцільно апроксимувати кубічним многочленом, причому відповідна область знаходиться наприкінці інтервалу визначення функції, заданої скінченними різницями відповідного порядку. В такому

випадку крок 3 алгоритму можна змінити, наприклад, так: знаходиться значення  $i^*$  таке, для якого точка  $(l_i + l_{i+1})/2$  мінімально відхиляється від точки зміни випуклості функції, що визначається скінченними різницями порядку  $i - 2$  (відповідну функцію за скінченними різницями можна визначити, наприклад, як кубічний сплайн.). Зауважимо, що область зміни випуклості наприкінці інтервалу визначення відповідних різниць виникає тоді, коли функція, що задана скінченними різницями на одиницю меншого порядку, має на відповідному інтервалі локальний екстремум. Якщо такої ситуації в таблиці скінченних різниць немає, то отримуємо точність екстраполяції, що співпадає з точністю екстраполяції на основі многочленів Н'ютона другого виду. Зауважимо також, що крок сітки має бути таким, щоб хоча б чотири точки потрапляли у область, де функція має локальний екстремум або змінює свою випуклість.

Таблиця 4.2 Порівняння точності екстраполяції для різних методів

Степінь	Метод модифікованих різниць		Обернена інтерполяційна формула Н'ютона	
	Прогнозне значення	Відносна похибка	Прогнозне значення	Відносна похибка
9	-852308,1	0,2770	-827646,1	0,2979
8	-1056370,1	0,1039	-812423,4	0,3108
7	-1289000,1	0,0934	-845657,5	0,2827
6	-1484668,7	0,2593	-866348,2	0,2651
5	-1587615,1	0,3467	-874351,3	0,2583
4	-1562487,8	0,3254	-861504,3	0,2692
3	-1402534,1	0,1897	-823699,5	0,3013
2	-1134334,9	0,0378	-772984,9	0,3443
1	-818280,9	0,3059	-818280,9	0,3059

#### 4.2 Деякі властивості пірамідального методу.

Як бачимо, головна ідея пірамідального підходу полягає в тому, щоб вибирати такий рядок  $i^*$  таблиці модифікованих розділених різниць, в якому



функція , задана відповідними дискретними точками є фактично лінійною. В такому випадку в рядку  $i^*-2$  вона має бути кубічною, якщо розглядати відповідні розділені різниці як аналог похідних, відповідно в рядку  $i^*-1$ -квадратичною. Однак, такі міркування вимагають більш детального дослідження-адже ми маємо справу з точковими значеннями на деякій сітці.

**4.2.1 Про еквівалентність процедури побудови пірамідального прогнозу та кубічної екстраполяції.**

Нехай маємо фрагмент таблиці розділених різниць. Без обмеження загальності будемо вважати, що  $x_k - x_{k-1} = 0.5$ . Якщо будувати прогноз по  $l$  рядку, останні значення якого  $\Delta^k f_l, \Delta^k f_{l+1}, \Delta^k f_{l+2}, \Delta^k f_{l+3}$ , то відповідне прогнозне значення знаходиться у відповідності з простою процедурою (ілюстрація наведена у таблиці ). Спочатку знаходимо величину  $4\Delta^k f_{l+3} - 8\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1}$  у відповідності до співвідношення (4.5) . Далі скористаємось процедурою зворотного ходу і знаходимо  $4\Delta^k f_{l+3} - 8\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1} + (\Delta^k f_{l+2} - \Delta^k f_l)$ . Тоді

$$\begin{aligned} \Delta^k f_{l+3} &= 4\Delta^k f_{l+3} - 8\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1} + (\Delta^k f_{l+2} - \Delta^k f_l) + \Delta^k f_{l+2} = \\ &= 4\Delta^k f_{l+3} - 6\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1} - \Delta^k f_l \end{aligned} \tag{4.11}$$

$\Delta^k f_l$	$\Delta^k f_{l+1}$	$\Delta^k f_{l+2}$	$\Delta^k f_{l+3}$	$\Delta^k f_{l+4}$
$\Delta^k f_{l+1} - \Delta^k f_{l-1}$	$\Delta^k f_{l+2} - \Delta^k f_l$	$\Delta^k f_{l+3} - \Delta^k f_{l+1}$	$4\Delta^k f_{l+3} - 8\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1} + (\Delta^k f_{l+2} - \Delta^k f_l)$	
*	$\Delta^k f_{l+3} - 2\Delta^k f_{l+1} + \Delta^k f_{l-1}$	$4\Delta^k f_{l+3} - 8\Delta^k f_{l+2} + 4\Delta^k f_{l+1}$		

Рис.4.5.Ілюстрація до роботи пірамідального алгоритму

Нехай  $\Delta^k f_l = z1, \Delta^k f_{l+1} = z2, \Delta^k f_{l+2} = z3, \Delta^k f_{l+3} = z4$ . Будемо розглядати ці числа як значення кубічної функції в точках  $x, x + d, x + 2d, x + 3d$  відповідно. Тоді отримуємо систему лінійних рівнянь :

$$\begin{aligned} c_1x^3 + d_1x^2 + e_1x + f_1 &= z1 \\ c_1(x + d)^3 + d_1(x + d)^2 + e_1(x + d) + f_1 &= z2 \\ c_1(x + 2d)^3 + d_1(x + 2d)^2 + e_1(x + 2d) + f_1 &= z3 \end{aligned}$$

$$c_1(x + 3d)^3 + d_1(x + 3d)^2 + e_1(x + 3d) + f_1 = z_4$$

Матриця коефіцієнтів є матрицею Вандермонда:

$$A = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ (x+d)^3 & (x+d)^2 & x+d & 1 \\ (x+2d)^3 & (x+2d)^2 & x+2d & 1 \\ (x+3d)^3 & (x+3d)^2 & x+3d & 1 \end{pmatrix}$$

Застосуємо правило Крамера та розв'яжемо систему:

$$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & x^2 & x & 1 \\ z_2 & (x+d)^2 & x+d & 1 \\ z_3 & (x+2d)^2 & x+2d & 1 \\ z_4 & (x+3d)^2 & x+3d & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} x^3 & z_1 & x & 1 \\ (x+d)^3 & z_2 & x+d & 1 \\ (x+2d)^3 & z_3 & x+2d & 1 \\ (x+3d)^3 & z_4 & x+3d & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & z_1 & 1 \\ (x+\Delta)^3 & (x+\Delta)^2 & z_2 & 1 \\ (x+2\Delta)^3 & (x+2\Delta)^2 & z_3 & 1 \\ (x+3\Delta)^3 & (x+3\Delta)^2 & z_4 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} x^3 & x^2 & x & z_1 \\ (x+\Delta)^3 & (x+\Delta)^2 & x+\Delta & z_2 \\ (x+2\Delta)^3 & (x+2\Delta)^2 & x+2\Delta & z_3 \\ (x+3\Delta)^3 & (x+3\Delta)^2 & x+3\Delta & z_4 \end{pmatrix}$$

Для знаходження відповідних визначників використаємо символні операції в середовищі Mathcad . Тоді отримаємо:

$$\det A = 12d^6, c1 = \det A_1 / \det A =$$

$$-(2*d^3*z1 - 6*d^3*z2 + 6*d^3*z3 - 2*d^3*z4) / (12*d^6),$$

$$d1 = \det A_2 / \det A =$$

$$(30*d^4*z2 - 12*d^4*z1 - 24*d^4*z3 + 6*d^4*z4 - 6*d^3*x*z1 + 18*d^3*x*z2 - 18*d^3*x*z3 + 6*d^3*x*z4) / (12*d^6),$$

$$e1 = \det A_3 / \det A =$$

$$(36*d^5*z2 - 22*d^5*z1 - 18*d^5*z3 + 4*d^5*z4 - 6*d^3*x^2*z1 + 18*d^3*x^2*z2 - 18*d^3*x^2*z3 + 6*d^3*x^2*z4 - 24*d^4*x*z1 + 60*d^4*x*z2 - 48*d^4*x*z3 + 12*d^4*x*z4) / (12*d^6),$$

$$f1 = \det A_4 / \det A = (12*d^6*z1 + 2*d^3*x^3*z1 + 12*d^4*x^2*z1 - 6*d^3*x^3*z2 - 30*d^4*x^2*z2 + 6*d^3*x^3*z3 + 24*d^4*x^2*z3 - 2*d^3*x^3*z4 - 6*d^4*x^2*z4 + 22*d^5*x*z1 - 36*d^5*x*z2 + 18*d^5*x*z3 - 4*d^5*x*z4) / (12*d^6).$$

Після підстановки всіх виразів для коефіцієнтів у вираз  $c_1(x + 4d)^3 + d_1(x + 4d)^2 + e_1(x + 4d) + f_1$  отримуємо :

$$c_1(x + 4d)^3 + d_1(x + 4d)^2 + e_1(x + 4d) + f_1 = 4z^2 - z^1 - 6z^3 + 4z^4.$$

Отримали співвідношення (4.11).

Отже, обґрунтували досить важливу властивість. Виявляється, прогноз, що будується вже після вибору рядка таблички розділених різниць на основі формули (4.5), еквівалентний прогнозу, що будується на основі кубічного многочлена, побудованого за останніми 4 точками цього рядка.

#### 4.2.2. Квадратичний прогноз та процедура пірамідального методу.

Розглянемо співвідношення, що покладене в основу вибору початкового рядка таблиці скінченних різниць для побудови прогнозного значення в межах пірамідального методу екстраполяції

$$\frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{c_i - l_i} = \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{c_i - l_i} \quad (4.11)$$

-143322,6513	131301,8524	540040,6479
377570,6711	683363,2992	813388,8601
610713,879	435818,189	-92354,39021
-64772,17865	-703068,2692	767223,6468
-1140076,805	817477,591	227182,9989
611585,2563	134114,2918	0,420677591
871,3773032	0,196256211	0,656601761

Рис.4.6 Приклад обрахунку таблиці модифікованих скінченних різниць та вибору рядка для побудови початкового прогнозу

Розглянемо скінченну різницю, побудовану на “коротшому” інтервалі

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(c_i - l_i)} \right) / \frac{(r_i - l_i)}{2}$$

та скінченну різницю, побудована на “довшому” інтервалі , яка має вигляд:

$$\Delta^i f_{n-i}^c = \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)} \right) / (r_i - l_i)$$

Розглянемо рівність відповідних різниць:

$$\frac{\left(\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(r_i-c_i)}-\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1})}{(c_i-l_i)}\right)}{\frac{(r_i-l_i)}{2}} = \left(\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(rr_i-c_i)}-\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i}^c)}{(c_i-ll_i)}\right)/(r_i-l_i)$$

Остання умова покладена в основі алгоритму “зворотного ходу” обрахунків прогнозного значення у пірамідальному методі. Звідси

$$2\left(\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(r_i-c_i)}-\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1})}{(c_i-l_i)}\right) = \left(\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(rr_i-c_i)}-\frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i}^c)}{(c_i-ll_i)}\right) \quad (4.12)$$

Розглянемо такі скінченні різниці:

$$f_0 = \frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i}^c)}{(c_i-ll_i)}, \quad f_1 = \frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1})}{(c_i-l_i)}$$

$$f_2 = \frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(r_i-c_i)}, \quad f_3 = \frac{(\Delta^{i-2}f_{n-i+2}^c-\Delta^{i-2}f_{n-i+1}^c)}{(rr_i-c_i)}$$

Очевидно, що відповідні різниці –це значення, зосереджені в точках

$$l_i \quad \frac{l_i+c_i}{2} \quad \frac{r_i+c_i}{2} \quad r_i \quad \text{відповідно. З співвідношення (4.12) отримуємо:}$$

$$2(f_2 - f_1) = (f_3 - f_0) \quad (4.13)$$

Нехай  $z = f_1 - f_0$ ,  $x = f_2 - f_1$ ,  $y = f_3 - f_2$ . Тоді умова (4.13) запишеться у вигляді:  $z+x+y=2*x$  або  $y+z=x$ . Якщо сформулювати умову сталих різницевих прискорень, то отримуємо:  $x-2z=2y-x$ ,  $2x=2y+2z$ ,  $y+z=x$ . Звідси  $y+z+x=2x$ . Отримали умову (4.13).

Отже, умова (4.13) еквівалентна умові рівності приростів зміни швидкості для послідовності точок .

Зауважимо, що умова рівності приростів зміни швидкості для довільних інтервалів , що пропорційні 0.25, 0.5, 0.25 є необхідною для проходження через відповідні точки функції  $y = x^2$ . Дійсно, маємо значення точок на осі абсцис  $a - \frac{b-a}{2} = \frac{3a-b}{2}$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $b + \frac{b-a}{2} = \frac{3b-a}{2}$ . Відповідні значення функції:  $\frac{(3a-b)^2}{4}$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $\frac{(3b-a)^2}{4}$ .

Маємо прирости:

$$\frac{\left(a^2 - \frac{(3a-b)^2}{4}\right)}{\frac{b-a}{2}}, \quad b + a \frac{\left(\frac{(3b-a)^2}{4} - b^2\right)}{\frac{b-a}{2}}, \quad (b+a) - \frac{\left(a^2 - \frac{(3a-b)^2}{4}\right)}{\frac{b-a}{2}}, \quad \frac{\left(\frac{(3b-a)^2}{4} - b^2\right)}{\frac{b-a}{2}} - (b+a)$$

a)

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{(3b-a)^2}{4} - b^2\right)}{\frac{b-a}{2}} - (b-a) - (b-a) + \frac{\left(a^2 - \frac{(3a-b)^2}{4}\right)}{\frac{b-a}{2}} = \\ & = \frac{2\left(\frac{(3b-a)^2}{4} - b^2 + a^2 - \frac{(3a-b)^2}{4}\right)}{b-a} - 2(b-a) = \frac{2\left(\frac{4(b-a)^2(b+a)}{4} - (b^2 - a^2)\right)}{b-a} - 2(b+a) = 0 \end{aligned}$$

Нехай маємо значення довільної функції  $f_0, f_1, f_2, f_3$ , зосереджені в точках  $\frac{3a-b}{2}, a, b, \frac{3b-a}{2}$  та виконується умова рівності приростів на відповідних інтервалах:

$$f_2 - f_1 - 2(f_1 - f_0) = 2(f_3 - f_2) - (f_2 - f_1)$$

$$f_2 - 3f_1 + 2f_0 = 2f_3 - 3f_2 + f_1$$

Звідси

$$f_3 - f_0 = 2(f_2 - f_1). \quad (4.14)$$

Легко бачити, що для будь-яких значень  $f_0, f_1, f_2, f_3$  таких, що виконується (4.14) можна підібрати квадратичну функцію, що проходить через відповідні точки. Отже, виконання умови рівності приростів зміни швидкості для 4 значень функції в точках  $\frac{3a-b}{2}, a, b, \frac{3b-a}{2}$  еквівалентне проходженню через ці точки параболи  $y = d_2x^2 + d_1x + d_0$ . Таким чином, можемо сформулювати наступну властивість.

*Твердження.* Виконання умови (4.12) еквівалентне проходженню параболи  $y = d_2x^2 + d_1x + d_0$  через точки

$$\begin{aligned} & \left(l_i, \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(c_i - l_i)}\right), \left(\frac{l_i + c_i}{2}, \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(c_i - l_i)}\right) \\ & \left(\frac{r_i + c_i}{2}, \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)}\right), \left(r_i, \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(rr_i - c_i)}\right) \end{aligned}$$

Отже, задача звелась до знаходження ситуації, коли квадратична функція найкраще описує поведінку функції, з останні точки якої визначають з таблиці скінченних різниць. Тоді умова оптимального квадратичного наближення

(мінімізація похибки) еквівалентна умові оптимального виконання співвідношення (4.14).

Будемо аналізувати ситуацію, коли квадратична функція найкраще прогнозує довільну функцію за трьома точками. Нехай відомі значення функції у точках  $x, x + d, x + 3d$   $f(x), f(x + d), f(x + 3d)$ . Необхідно визначити таку точку  $x$ , при якій квадратичний прогноз у точці  $x + 4d$  мінімально відхиляється від реального значення функції  $f(x + 4d)$ .

Отже, маємо задачу:

$$\begin{aligned}
 & |f(x + 4d) - a(x + 4d)^2 - b(x + 4d) - c| \rightarrow \min, \\
 & f(x) = a(x)^2 + b(x) + c, \\
 & f(x + d) = a(x + d)^2 + b(x + d) + c, \\
 & f(x + 3d) = a(x + 3d)^2 + b(x + 3d) + c, \\
 & f(x + 4d) - a(x + 4d)^2 - b(x + 4d) - c \\
 & = f(x + 4d) - f(x) - a(8xd + 16d^2) - b(4d) = \\
 & = f(x + 4d) - f(x) - (3df(x + d) - 2df(x) - df(x + 3d)) \frac{(8xd + 16d^2)}{-6d^3} - \\
 & \frac{(8d^2f(x) - 9d^2f(x + d) + d^2f(x + 3d) - 6dxf(x + d) + 4dxf(x) + 2dxf(x + 3d))(4d)}{-6d^3} = f(x + 4d) + \\
 & f(x) \left( -1 + 2d \frac{8xd + 16d^2}{-6d^3} - \frac{4d8d^2}{-6d^3} - \frac{4d84dx}{-6d^3} \right) + f(x + \\
 & d) \frac{-3d(8xd + 16d^2) + 4d - 9d^2 + 24d^2x}{-6d^3} + f(x + 3d) \left( \frac{d(8xd + 16d^2) - 4d^3 - 8d^2x}{-6d^3} \right) = \\
 & = f(x + 4d) - f(x) + 2f(x + d) - 2f(x + 3d).
 \end{aligned}$$

Отже, похибка квадратичної екстраполяції запишеться у вигляді:

$$\Delta(x) = f(x + 4d) - f(x) + 2f(x + d) - 2f(x + 3d).$$

Будемо аналізувати, при яких значеннях аргумента  $x$  для довільної функції та фіксованого значення  $d$  похибка є мінімальною. Легко показати, що  $\Delta(x) = 0$  для довільної лінійної та квадратичної функції та довільних значень  $x$  та  $d$ . Зауважимо, що ця умова є і достатньою для того, щоб функція  $f(x)$  була многочленом 2 степеня.

Дійсно розглянемо інфінітимальний випадок коли  $d \rightarrow 0$  та скористаємося розкладами в ряд Тейлора відповідних функцій. Маємо:

$$\begin{aligned} f(x + 4d) - f(x) + 2f(x + d) - 2f(x + 3d) \\ = f(x) + f'(x)4d + f''(x)8d^2 + f'''(x)\frac{64}{6}d^3 + o(d^3) - \\ -f(x) + 2f(x) + 2f'(x)d + f''(x)d^2 + f'''(x)\frac{1}{3}d^3 + o(d^3) - 2f(x) - \\ 6f'(x)d - f''(x)9d^2 - f'''(x)9d^3 + o(d^3) = 2f'''(x)d^3 + o(d^3). \end{aligned}$$

Звідси  $f'''(x) = 0$  для будь-якого  $x$ .

### 4.3 Інтервали прогнозної невизначеності

Нехай задані значення деякої функції у точках  $x, x + d, x + 3d$ . Необхідно оцінити значення функції у точці  $x + 4d$ . Будемо використовувати принцип максимуму інформації про динамічні характеристики функції, який полягає в тому, що прогнозне значення- це точка, що лежить на інтервалі прямої  $y=x + 4d$ , який утворений “мінімально-можливим” та “максимально-можливим” значеннями, які обраховуються за попередніми відомими значеннями функції. Для обрахунку максимально-можливого значення необхідно проаналізувати, наскільки максимальним може бути приріст на прогнозованому інтервалі. Для цього потрібно порахувати максимальну швидкість зміни (приріст) на всіх попередніх інтервалах, приріст з врахуванням швидкості зміни швидкості(прискорення)-якщо прискорення додатне, то й приріст на останньому інтервалі може бути більшим з врахуванням прискорення, ніж максимальний приріст на попередніх інтервалах. Тоді слід проаналізувати, швидкість зміни прискорення і т.д. З усіх можливих значень прогнозних приростів на останньому інтервалі необхідно знайти максимум. Аналогічно знаходиться мінімальний приріст-мінімум серед приростів на попередніх інтервалах, мінімум з врахуванням прискорень(якщо десь є від’ємне, то отримаємо менше прогнозне значення, ніж простий мінімум серед приростів на попередніх інтервалах) і т.д.

Будемо вважати, що функція, що задана трьома точками, має інтервал невизначеності, що визначається як інтервал максимальної довжини на прямій, що проходить через абсцису прогнозної точки перпендикулярно до осі абсцис, який визначається за принципом максимального використання інформації про характер функції у цих 3 точках. За 3 точками можна визначити швидкість зміни функції на двох інтервалах між 3 точками та прискорення. Якщо іншої інформації про функцію на цьому інтервалі немає, то легко визначити максимальне та мінімально можливе значення функції у прогнозній точці. Нехай  $y_1, y_2, y_3$  прирости функції на інтервалах  $[x, x + d]$  та  $[x + d, x + 3d]$ ,  $[x + 3d, x + 4d]$  відповідно.

При квадратичному прогнозі  $y_3 = y_2 - y_1$ . Тоді значення величини прогнозної точки може бути знайдене з врахуванням приросту:  $y_1 + y_2 + y_2 - y_1 = 2y_2$

Нехай  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_2 > 2y_1$ . Функція зростає, швидкість зростання також зростає. Тоді максимальне значення знаходитимемо з умови (прискорення сталі):  $y_3 - y_2 = y_2 - y_1$ . Тоді  $y_3^{max} = 2y_2 - y_1, 2y_3 - y_2 = y_2 - 2y_1, y_3 = y_2 - y_1$   
 $y_3^{min} = y_1 = \min\{y_1, y_2\}$ . Тоді отримуємо інтервал невизначеності  $[2y_1 + y_2, y_1 + y_2 + 2y_2 - y_1] = [2y_1 + y_2, 3y_2]$ . Його середнє значення:  $y_1 + 2y_2$ .

Вважатимемо, що інтервал невизначеності— це простір елементарних наслідків, а прогнозна точка— це випадкова величина, що має рівномірний розподіл на інтервалі невизначеності. Нехай  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_2 \leq 2y_1$ . В цьому випадку функція зростає, швидкість зростання спадає. Тоді максимальне значення знаходитимемо з умови

$$y_3^{max} = \max\{2y_2 - y_1, y_1, y_2\} = \begin{cases} y_1, y_2 \leq y_1, \\ 2y_2 - y_1, \frac{y_2}{2} \leq y_1 < y_2. \end{cases}$$

$$y_3^{min} = \min\{y_1, y_2, 2y_2 - y_1\} = \begin{cases} 2y_2 - y_1, y_2 \leq y_1, \\ y_1, \frac{y_2}{2} \leq y_1 < y_2. \end{cases}$$

Тоді отримуємо інтервал невизначеності  $[y_1 + y_2 + y_3^{min}, y_1 + y_2 + y_3^{max}]$ .



Середнє значення:  $2y_2 + y_1$ .

Очевидно, що квадратичний прогноз співпадає з серединою інтервалу невизначеності, якщо  $y_1 = 0$ . Аналогічні міркування можемо провести у випадку монотонного спадання функції. Нехай  $y_1 \geq 0, y_2 \leq 0$ . Тоді  $y_3^{max} = \max\{2y_2 - y_1, y_1, y_2\} = y_1$ ,  $y_3^{min} = \min\{y_1, y_2, 2y_2 - y_1\} = 2y_2 - y_1$ . Тоді отримуємо інтервал невизначеності  $[y_1 + y_2 + y_3^{min}, y_1 + y_2 + y_3^{max}] = [3y_2, 2y_1 + y_2]$ . Середина інтервалу  $y_1 + 2y_2$ .

Отже, виконання умови (4.11) та відповідного вибору рядка таблиці скінченних різниць для побудови прогнозного значення  $\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c$  еквівалентне побудові прогнозової точки як середини інтервалу невизначеності, що будується за алгоритмом, розглянутим вище. Інтервал невизначеності тут будується в сенсі використання усієї інформації щодо динаміки зміни функції.

#### 4.4 Пірамідальний алгоритм без серединних точок ( $\Xi$ -алгоритм)

Нехай  $f_1, f_2, \dots, f_n$  точки часового ряду,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - відповідні моменти часу. Необхідно оцінити значення  $f_{n+1}$  в точці  $x > x_n$ . Розглянемо такі розділені різниці:

$$\begin{aligned}\Delta^1 f_i &= \frac{f_{i+2} - f_i}{x_{i+2} - x_i}, i = \overline{1, n-1}, \\ \Delta^2 f_i &= \frac{\Delta^1 f_{i+2} - \Delta^1 f_i}{x_{i+3} - x_{i+1}}, i = \overline{1, n-2}, \\ \Delta^3 f_i &= \frac{\Delta^2 f_{i+2} - \Delta^2 f_i}{x_{i+4} - x_{i+2}}, i = \overline{1, n-3}, \\ &\dots\end{aligned}$$

В загальному випадку:

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+2} - \Delta^{j-1} f_i}{x_{i+j+1} - x_{i+j-1}}, \quad (4.15)$$

$$\text{where } j = \overline{1, p}, i = \overline{1, n-j}, p = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, n = 2k + 1, \\ \frac{n-2}{2}, n = 2k. \end{cases}$$

Якщо відомі значення  $\Delta^k f_{n-2k+1}$  для будь-якого  $k$ , то невідоме значення функції в точці  $x_{n+1}$  може бути знайдене за наступною процедурою:

$$\Delta^{j-1} f_{n-2j+3} = \Delta^{j-1} f_{n-2j+1} + \Delta^j f_{n-2j+1} (x_{n-j+2} - x_{n-j}), \quad j = \overline{k, 1}. \quad (4.16)$$

Розглянемо наступні модифіковані розділені різниці:

$$\tilde{\Delta}^j f_{n-2j+1} = \frac{\left( \frac{\Delta^{j-2} f_{n-2(j-2)} - \Delta^{j-2} f_{n-2(j-2)-1}}{x_{n-j+2} - x_{n-j+1}} - \frac{\Delta^{j-2} f_{n-2(j-2)-1} - \Delta^{j-2} f_{n-2(j-2)-2}}{x_{n-j+1} - x_{n-j}} \right)}{(x_{n-j+2} - x_{n-j})/2}, \quad (4.17)$$

при  $j = 2$ ,  $\tilde{\Delta}^2 f_{n-3} = \frac{(f_n - f_{n-1} - f_{n-1} - f_{n-2})}{(x_n - x_{n-2})/2}$ . Фундаментальне значення мають

умови, при яких виконується співвідношення:

$$\Delta^k f_{n-2k+1} = \tilde{\Delta}^k f_{n-2k+1}. \quad (4.18)$$

Таблиця 4.3 Структура таблиці розділених різниць

				...	$\Delta^3 f_1$	...	$\Delta^3 f_{n-6}$	$\tilde{\Delta}^3 f_{n-5}$				
					$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_2$	...	$\Delta^2 f_{n-5}$	$\Delta^2 f_{n-4}$	$\tilde{\Delta}^2 f_{n-3}$		
	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^1 f_3$	...	$\Delta^1 f_{n-4}$	$\Delta^1 f_{n-3}$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$\tilde{\Delta}^1 f_{n-1}$				
$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	...	$f_{n-3}$	$f_{n-2}$	$f_{n-1}$	$f_n$	$f_{n+1}$			
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	...	$x_{n-3}$	$x_{n-2}$	$x_{n-1}$	$x_n$	$x_{n+1}$			

HORIZON OF PREDICTION

Тоді алгоритм  $\Xi$  полягатиме у виконанні наступних кроків:

1. Побудова таблиці розділених різниць (4.15).
2. Пошук рядка таблиці у відповідності до співвідношення:

$$k = \arg \min_i \left| \Delta^{i-1} f_{n-2i+1} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-2i+3} - \Delta^{i-2} f_{n-2i+2})}{x_{n-i+1} - x_{n-i}} \right|. \quad (4.19)$$

3. Знаходження  $\tilde{\Delta}^k f_{n-2k+1}$  за формулою (4.17).
4. Побудова прогнозного значення за процедурою (4.16).

#### 4.5 Модифікація $\Xi$ -алгоритму

Будемо використати два попередніх результати. У п. 4.3 досліджується, що процедура побудови прогнозування за формулою (4.17) еквівалентна кубічній екстраполяції. Таким чином, завдання визначення значення прогнозу у відповідному рядку пірамідального методу еквівалентно кубічному прогнозу на основі останніх 4 значень ряду даних  $\Delta^k f_{n-2k-3}, \Delta^k f_{n-2k-2}, \Delta^k f_{n-2k-1}, \Delta^k f_{n-2k}$ .

Якщо кубічна крива проходить через останні чотири точки і передбачувану п'яту точку, виконується рівняння (4.18).

Наступний додатковий результат також отримано в п.4.3. і стосується квадратичної екстраполяції. Рівняння (4.18) виконується тоді і тільки тоді, коли парабола проходить через точки:

$$\begin{aligned} & \left(x_{n-i}, \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-2i+3} - \Delta^{i-2} f_{n-2i+1}\right)}{x_{n-i+1} - x_{n-i-1}}\right), \left(\left(x_{n-i+1} + x_{n-i}\right) / 2, \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-2i+3} - \Delta^{i-2} f_{n-2i+2}\right)}{x_{n-i+1} - x_{n-i}}\right), \\ & \left(\left(x_{n-i+2} + x_{n-i+1}\right) / 2, \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-2i+4} - \Delta^{i-2} f_{n-2i+3}\right)}{x_{n-i+2} - x_{n-i+1}}\right), \left(x_{n-i+2}, \frac{\left(\Delta^{i-2} f_{n-2i+5} - \Delta^{i-2} f_{n-2i+3}\right)}{x_{n-i+3} - x_{n-i+1}}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Проаналізуємо випадки, коли парабола або кубічна крива дає найкращий прогноз. Очевидно така властивість, що чим швидше інтерполяційна крива зростає на інтервалі прогнозу, тим більша ймовірність помилки екстраполяції на основі цієї кривої.

Розглянемо перші три точки ряду (4.20) для “квадратичних” критеріїв або чотири точки

$\left(x_{n-k-3}, \Delta^k f_{n-2k-3}\right), \left(x_{n-k-2}, \Delta^k f_{n-2k-2}\right), \left(x_{n-k-1}, \Delta^k f_{n-2k-1}\right), \left(x_{n-k}, \Delta^k f_{n-2k}\right)$   
для “кубічної”.

Нехай послідовність точкових даних і зміна швидкості зростають. У цьому випадку квадратичний або кубічний прогноз також дасть збільшення, але реальна функція може зростати відповідно до істотно іншого закону, а помилка прогнозування може бути великою. Нехай послідовність точкових даних збільшується, а швидкість зміни зменшується. Тоді характер невизначеності буде суттєво залежати від швидкості зростання та наближення

до відповідного локального екстремуму, чим далі точка екстремуму від спостережуваного інтервалу зростає ступінь невизначеності дійсної функції.

Нехай абсциса точки локального екстремуму знаходиться всередині спостережуваного інтервалу. У цьому випадку квадратичне або кубічне передбачення знаходиться в зоні виходу із зони невеликої зміни функції. Невизначеність може бути великою.

Нехай квадратична або кубічна крива інтерполяції має екстремум, що збігається з останньою спостережуваною точкою. У цьому випадку невизначеність мінімальна, тому що якщо дійсна функція також має локальний екстремум, то помилка мінімальна. У той же час, якщо дійсна функція не має локального екстремуму в останній точці, але вона все одно зменшує темпи зростання. Крива оптимально передбачає певну послідовність даних, якщо інтервал прогнозування знаходиться в зоні локального екстремуму.

Таким чином, ми можемо запропонувати таку модифікацію процедури вибору рядків таблиці скінченних різниць, для якої за формулою (3) будується невідоме прогнозне значення.

Умова  $\beta$ . У пірамідальному алгоритмі замість умови (4.19) вибирається той рядок таблиці скінченних різниць, для якого остання точка мінімально відхиляється від точки локального екстремуму, що визначається кубічною або квадратною кривою інтерполяції.

Зауважимо, що умова (4.19) описує частковий випадок умови  $\beta$ . Можна довести, що за умови (4.19) точки

$$(x_{n-k-3}, \Delta^k f_{n-2k-3}), (x_{n-k-2}, \Delta^k f_{n-2k-2}), (x_{n-k-1}, \Delta^k f_{n-2k-1},)$$

лежать на одній прямій. Це означає, що функція, яка проходить через ці точки, змінює випуклість. Тоді кубічний поліном в останній точці має або наближення до локального екстремуму, або швидке збільшення функції, що призведе до більшої помилки прогнозування.

Для ілюстрації нашого методу розглянемо набір даних щодо захворюваності на COVID-19 в Україні [240]. Розглянемо статистику з

22.12.20 до 10.01.21. У нас є вхідні часові ряди: 6545, 8513, 10136, 11490, 11035, 7709, 6113, 4385, 6988, 7986, 9699, 9432, 5038, 4576, 4158, 5334, 6911, 8997, 5676, 4846, 5011. Результати оцінка за нашим модифікованим пірамідальним алгоритмом наведена у таблиці 3.

Відповідно до умови  $\beta$ , ми аналізуємо відстані від останньої точки спостереження  $(x_{n-k+2}, \Delta^{k-2} f_{n-2+4k})$  для кубічної екстраполяції або точки

$$((x_{n-k+2} + x_{n-k+1})/2, \frac{(\Delta^{k-2} f_{n-2k+4} - \Delta^{k-2} f_{n-2k+3})}{x_{n-k+2} - x_{n-k+1}})$$
 для квадратичної екстраполяції до

точки відповідного локального екстремуму.

Ілюстрація процесу побудови скінченних різниць представлена в Таблиці 4.4. Знайдено невелику відстань для рядка 8 для квадратичної екстраполяції,  $= 8$ , оптимальна відстань – для рядка 2. Графіки відповідних інтерполяційних кривих для першого випадку (рядок 8) на малюнку 4.7. Бачимо, що обидві криві екстраполяції дають хороші результати, останні точки знаходяться недалеко від точок відповідних локальних екстремумів. Наше прогнозоване значення-4023, реальне-4288.

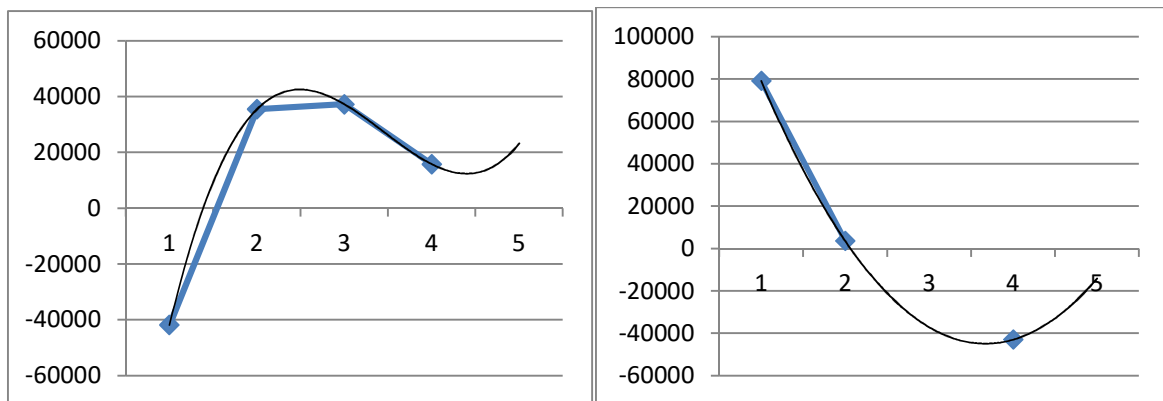
Для цього набору даних ми також можемо розглядати інший рядок № 2 у таблиці 4.4. Це оптимальна ситуація, оскільки квадратична екстраполяційна відстань від останньої точки спостереження до точки локального екстремуму прямує до 0 (див. Рисунок 3). Кубічна екстраполяція також дає хороший результат. Наша прогнозоване значення - 4675.

#### Таблиця 4.4

Фрагмент таблиці розділених різниць

0										484	501	402
	9432	5038	4576	4158	5334	6911	8997	5676	6	1	3	
1	-4661	-4856	-880	758	2753	3663	-1235	-4151	-665	-823		
2									332			
	-6302	3781	5614	3633	2905	-3988	-7814	570	8			
3										1114		
	11153	11916	-148	-2709	-7621	10719	4558	2				
4												
	16063	-11301	14625	-7473	-8010	12179	2186	1	-1660			

5				1965			
	-31662	-30688	3828	6615	2	29871	-5832
6					2325		
	-41818	35490	37303	15824	6	-7652	1982
7							
	92760	79121	19666	14047	-6196	3067	
8							
	111588	112426	93168	-1074	1814		
9							
	277732	340592	5574	-7689			
1							
	-	-	-	-			
0	681184	3626	31729				
1							
	-27278	-75495					



**Рис. 4.7:** Графіки кубічної (ліворуч) та квадратичної кривих екстраполяції

Розглянемо наступне значення 4288 (кількість випадків захворювання на COVID в Україні 11.01.21) та додамо його до нашого набору даних. Якщо ми спробуємо побудувати передбачення, використовуючи пірамідальний підхід, немає хорошої ситуації згідно з умовою  $\beta$  для всіх рядків таблиці розділених різниць, прогнозне значення 794 (див. Таблицю 4.5), це далеко від реальності. Це означає, що ми не можемо знайти шаблони прогнозування у такому наборі даних. У такій ситуації ми повинні використовувати інший метод.

Розглянемо інші точки спостереження: 5116, 6409. Ми також можемо знайти хорошу ситуацію для прогнозування (див. Рис. 4. 6), прогностичне значення 7081 (див. Таблицю 4.7), реальне спостереження - 7925. Давайте розглянемо наступний пункт 7925 і додамо його до нашого набору даних.



-11301	-14625	-7473	-8010	12179	22126	-9137	330
-30688	3828	6615	19652	30136	21316	6972	995
35490	37303	15824	23521	40968	16768	6402	
79121	-19666	-13782	10212	30554	12210		
-		11670					
112426	-92903	4	40378	18375			
-	41868						
204491	4	26074	20726				
974148	-42958	10250					

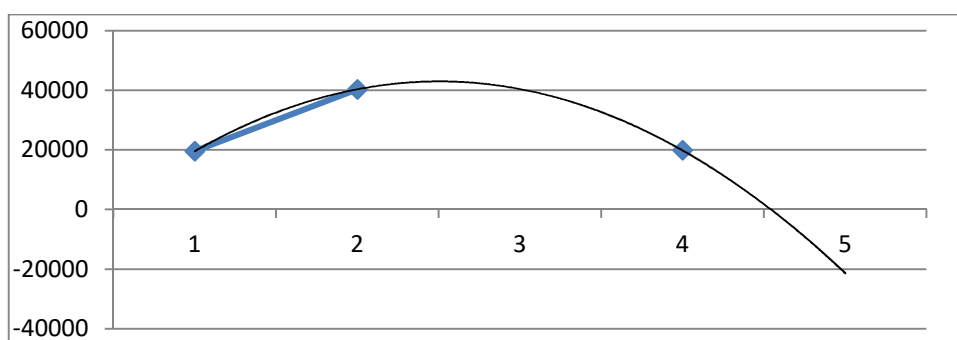
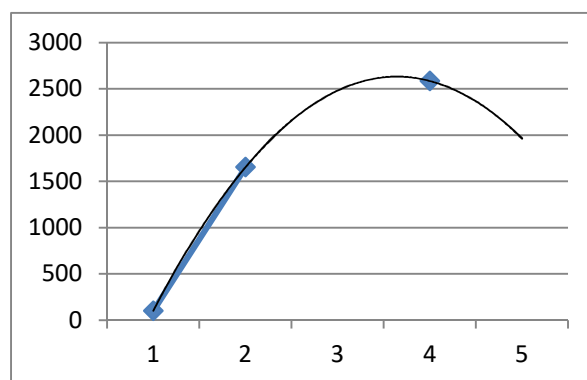
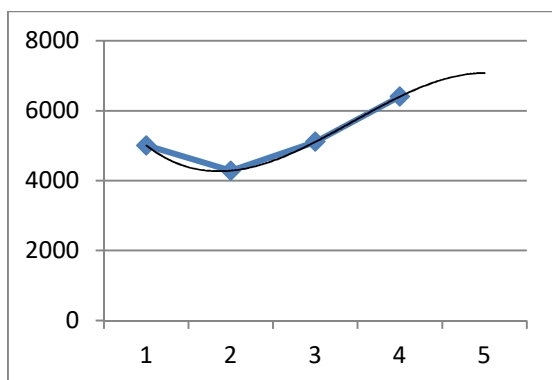


Рис.4.9: Графік квадратичної екстраполяції

Таблиця 4.7 Фрагмент таблиці розділених різниць

9	9,5	10	10,5	11
5011	4288	5116	6409	7081
-558	105	2121	1965	
770	2679	1860		
-914	5412			
18928	1656			
1326	-1551			
-556				



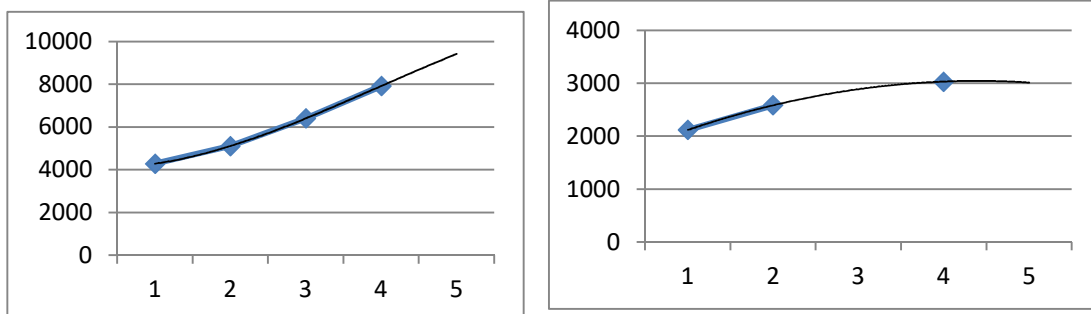


**Рис.4.10:** Графіки кубічної та квадратичної екстраполяції для оптимального випадку

Кубічна екстраполяція показує (див. Рис. 4.10), що точка прогнозу знаходиться в зоні зміни опуклості. Це дає хорошу згоду з квадратичною екстраполяцією. Але кубічну екстраполяцію не можна використовувати самостійно, оскільки неможливо ствердити за чотирма точками, що п'ята знаходиться в зоні змін опуклості для передбачуваної функції.

**Таблиця 4.8.** Фрагмент таблиці розділених різниць

6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
6911	8997	5676	4846	5011	4288	5116	6409	7925	9422
3663	-1235	-4151	-665	-558	105	2121	2809	3013	
-3988	-7814	570	3593	770	2679	2704	892		
-10719	4558	11407	200	-914	1934	2613			
12179	22126	-4358	-12321	1734	3527	2586			
30136	-16537	-34447	6092	15848	4032	-465			
-36189	-64583	22629	505043	3818	-1353				
-88104	58818	569626	-2228	-4732					
110831	657730	-15926	-10093						
732052	-35820	-18521							



**Рис.4.11:** Графіки кубічної та квадратичної екстраполяції для оптимального випадку

#### 4.6 ML-Модифікація “пірамідального” методу екстраполяції.

В основі ідеї узагальнення скінченних різниць в роботі [196] запропонована наступна модифікація поняття похідної, яку автори назвали  $\mu l$ -похідною.

*Визначення.*  $\mu l$ -похідною деякої диференційовної функції

$f(x)$  будемо називати границю виду:

$$f^{\circ}(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta},$$

де  $\mu^*(\Delta), \lambda^*(\Delta)$  є розв'язками задачі:

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) \rightarrow \min_{\lambda^*, \mu^*} \quad (4.21)$$

Очевидно, що за умови (4.21) мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned} \lambda^*(\Delta) &= \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx), \\ \mu^*(\Delta) &= \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) \int_{\Omega} f(x) p(dx) / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f(x+\Delta) f(x) p(dx) \right) / \\ & \left( \left( \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right)^2 / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f^2(x) dx \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) \rightarrow \min_{\lambda, \mu}$$

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)) f(x) p(dx) = 0$$

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)) p(dx) = 0$$

$$\lambda^*(\Delta) = \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(x+\Delta) f(x) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f^2(x) dx - \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) \int_{\Omega} f(x) p(dx) / \int_{\Omega} p(dx) + \\ & + \mu^*(\Delta) \left( \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right)^2 / \int_{\Omega} p(dx) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^*(\Delta) &= \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) \int_{\Omega} f(x) p(dx) / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f(x+\Delta) f(x) p(dx) \right) / \\ & \left( \left( \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right)^2 / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f^2(x) dx \right) \end{aligned}$$

Зауважимо, що інтеграл Лебега у визначенні може бути замінений визначеним інтегралом Рімана на деякому скінченному інтервалі  $[c, d]$ . Окрім того, в деяких задачах умова (4.22) може бути відсутня, тоді  $\mu^*(\Delta), \lambda^*(\Delta)$  є параметрами. Розглянемо приклади.

*Приклад 1.* Нехай маємо лінійну функцію  $f(x) = ax + b$ .

При  $\mu^*(\Delta) = 1, \lambda^*(\Delta) = a\Delta$  маємо:

$$\int_c^d (a(x+\Delta) + b - \mu^*(\Delta)(ax+b) - \lambda^*(\Delta))^2 dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } f^\circ(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{a(x+\Delta) + b - ax - b - a\Delta}{\Delta} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 2. Нехай  $f(x) = e^x$ ,

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) = \int_c^d (e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta))^2 dx$$

$$\text{При } \mu^*(\Delta) = e^\Delta, \lambda^*(\Delta) = 0 \text{ маємо: } \int_c^d (e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta))^2 dx = 0$$

.Тоді

$$f^\circ(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Приклад 3. Нехай  $f(x) = x^m$ .

Тоді, використовуючи співвідношення (4.3.13), маємо:

$$\mu^*(\Delta) = 1 + m\Delta C + O(\Delta^2),$$

$$\begin{aligned} \lambda^*(\Delta) &= (\int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx)) / \int_{\Omega} p(dx) = \\ &= (\int_c^d (x+\Delta)^m dx - (1 + m\Delta C) \int_c^d x^m dx) / (d - c) = \\ &= m\Delta (\int_c^d x^{m-1} dx - C \int_c^d x^m dx) / (d - c) + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} f^\circ(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta)^m - \mu^*(\Delta)x^m - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = mx^{m-1}(1 - Cx) - mC_1, \end{aligned}$$

$$C = (\int_c^d x^{m-1} dx \int_c^d x^m dx) / (d - c) - \int_c^d x^{m-1} (x)^m dx / ((\int_c^d x^m dx)^2 / (d - c) - \int_c^d x^{2m} dx)$$

$$C_1 = (\int_c^d x^{m-1} dx - C \int_c^d x^m dx) / (d - c).$$

Нехай  $f(x) = x^m$ ,

$$\int_{\Omega} (f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta))^2 p(dx) = \int_c^d ((x+\Delta)^m - \mu^*(\Delta)x^m - \lambda^*(\Delta))^2 dx$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\mu^*(\Delta) &= \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx) - \\
&- \int_{\Omega} f(x+\Delta) f(x) p(dx) / \\
&/ \left( \left( \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right)^2 / \int_{\Omega} p(dx) - \int_{\Omega} f^2(x) dx \right) = \\
&= \left( \int_c^d (x+\Delta)^m dx \int_c^d (x)^m dx / (d-c) - \int_c^d (x+\Delta)^m (x)^m dx \right) / \\
&/ \left( \left( \int_c^d (x)^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d (x)^{2m} dx \right) = \left( \int_c^d (x^m + m\Delta x^{m-1} + \dots) dx \int_c^d (x)^m dx / (d-c) \right. \\
&- \left. \int_c^d (x^m + m\Delta x^{m-1} + \dots)(x)^m dx \right) / \\
&/ \left( \left( \int_c^d (x)^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d (x)^{2m} dx \right) = 1 + \left( \int_c^d m\Delta x^{m-1} dx \int_c^d (x)^m dx / (d-c) - \right. \\
&- \left. \int_c^d m\Delta x^{m-1} (x)^m dx \right) / \left( \left( \int_c^d (x)^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d (x)^{2m} dx \right) + \dots = \\
&= 1 + m\Delta \left( \int_c^d x^{m-1} dx \int_c^d (x)^m dx / (d-c) - \int_c^d x^{m-1} (x)^m dx \right) / \\
&/ \left( \left( \int_c^d (x)^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d (x)^{2m} dx \right) + \dots = \\
&= 1 + m\Delta \left( (d^m - c^m)(d^{m+1} - c^{m+1}) / (m+1) - (d^{2m} - c^{2m}) / 2 \right) / \\
&\left( (d^{m+1} - c^{m+1})^2 / ((m+1)^2 (d-c)) - \right. \\
&- \left. (d^{2m+1} - c^{2m+1}) / (2m+1) \right) + \dots = 1 + m\Delta C + O(\Delta^2) \\
\lambda^*(\Delta) &= \left( \int_{\Omega} f(x+\Delta) p(dx) - \mu^*(\Delta) \int_{\Omega} f(x) p(dx) \right) / \int_{\Omega} p(dx) = \\
&= \left( \int_c^d (x+\Delta)^m dx - (1 + m\Delta C) \int_c^d (x)^m dx \right) / (d-c) = \\
&= m\Delta \left( \int_c^d (x)^{m-1} dx - C \int_c^d (x)^m dx \right) / (d-c) + O(\Delta^2).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta) f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta)^m - \mu^*(\Delta) x^m - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \\
&= mx^{m-1} (1 - Cx) - mC_1 \\
C &= \left( \int_c^d x^{m-1} dx \int_c^d (x)^m dx / (d-c) - \int_c^d x^{m-1} (x)^m dx \right) / \left( \left( \int_c^d (x)^m dx \right)^2 / (d-c) - \int_c^d (x)^{2m} dx \right) \\
C_1 &= \left( \int_c^d (x)^{m-1} dx - C \int_c^d (x)^m dx \right) / (d-c)
\end{aligned}$$

Нехай  $\mu^*(\Delta) = e^\Delta$ ,  $\lambda^*(\Delta) = 0$ .  $\int_c^d (e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta))^2 dx = 0$ . Тоді

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x) - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta} - \mu^*(\Delta)e^x - \lambda^*(\Delta)}{\Delta} = 0$$

$$(f(x+2\Delta) - \mu^*(\Delta)f(x+\Delta) - \lambda^*(\Delta) - f(x+\Delta) + \mu^*(\Delta)f(x) + \lambda^*(\Delta)) / \Delta =$$

$$= (f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)) / \Delta - \mu^*(\Delta)(f(x+\Delta) - f(x)) / \Delta$$

$$\int_{\Omega} ((f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)) / \Delta - \mu^*(\Delta)(f(x+\Delta) - f(x)) / \Delta)^2 p(dx) \rightarrow \min_{\mu}$$

$$\int_{\Omega} ((f(x+2\Delta) - f(x+\Delta)) / \Delta - \mu^*(\Delta)(f(x+\Delta) - f(x)) / \Delta)((f(x+\Delta) - f(x)) / \Delta) p(dx) \rightarrow \min_{\mu}$$

$$\mu^*(\Delta) = \int_{\Omega} (f(x+2\Delta) - f(x+\Delta))(f(x+\Delta) - f(x)) / \Delta^2 p(dx) /$$

$$/ \int_{\Omega} ((f(x+\Delta) - f(x))^2 / \Delta^2) p(dx).$$

Розглянуті властивості  $\mu\lambda$ -похідної показують, що вона, на відміну від класичної похідної “обнуляє” значення функцій, що мають порядок експоненційного зростання чи лінійні функції. А тому можна сподіватись, що використання різницевих аналогів такої похідної дозволить суттєво покращити методи прогнозування, які ґрунтуються на використанні скінченних різниць чи певних їх модифікацій. Зокрема, застосування різницевих аналогів  $\mu\lambda$ -похідної дозволить покращити пірамідальний метод екстраполяції, що був запропонований у роботах [1-3].

Подальше узагальнення “пірамідального” методу, описаного в роботах [3-5], ґрунтується на застосуванні відповідних  $\mu\lambda$ -узагальнень скінченних різниць. Розглядаються середні точки  $x_i^c = (x_i + x_{i+1}) / 2$  а також наступні узагальнення скінченних різниць:

$$\Delta^j f_i = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1} - \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_i - \lambda_{j-1}}{r_i^j - l_i^j}, \quad (4.23)$$

$$\text{де } r_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2}^c, & j = 2k, \\ x_{i+[j/2]+1}, & j = 2k+1, \end{cases} \quad l_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2-1}^c, & j = 2k, \\ x_{i+[j/2]}, & j = 2k+1, \end{cases}$$

$$\Delta^j f_i^c = \frac{\Delta^{j-1} f_{i+1}^c - \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_i^c - \lambda_{j-1}}{\hat{r}_i^j - l_i^j}, \quad (4.24)$$

$$\hat{r}_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2+1}, j = 2k, \\ x_{i+[j/2]+1}^c, j = 2k + 1, \end{cases} \quad \hat{l}_i^j = \begin{cases} x_{i+j/2}, j = 2k, \\ x_{i+[j/2]}^c, j = 2k + 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c &= \\ &= \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2} - \mu_{i-2} \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)(r_i - l_i)} - \mu_{i-1} \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \mu_{i-2} \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2})}{(c_i - l_i)(r_i - l_i)} - \lambda_{i-2} \right) 2 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\text{де } r_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}+1}, i = 2k, \\ x_{n-\lceil \frac{i}{2} \rceil}^c, i = 2k + 1, \end{cases} \quad rr_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}}^c, i = 2k, \\ x_{n-\lceil \frac{i}{2} \rceil+1}, i = 2k + 1, \end{cases} \quad c_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}}^c, i = 2k, \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}, i = 2k + 1, \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}}, i = 2k, \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor-1}^c, i = 2k + 1, \end{cases} \quad ll_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}-1}^c, i = 2k, \\ x_{n-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor-1}, i = 2k + 1. \end{cases}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Значення параметрів  $\mu_{j-1}$  та  $\lambda_{j-1}$  знаходяться з умови мінімізації відповідних сум квадратів різниць (дискретного аналогу умови (4.25)) або загалом можуть розглядатись як деякі параметри, що знаходяться з додаткових умов .

						...							
					$\Delta^5 f_1$	...	$\tilde{\Delta}^5 f_{n-5}^c$						
				$\Delta^4 f_1$	$\Delta^4 f_1^c$	...	$\Delta^4 f_{n-4}$	$\tilde{\Delta}^4 f_{n-4}^c$					
			$\Delta^3 f_1$	$\Delta^3 f_1^c$	$\Delta^3 f_2$	...	$\Delta^3 f_{n-4}^c$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\tilde{\Delta}^3 f_{n-3}^c$				
		$\Delta^2 f_1$	$\Delta^2 f_1^c$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^2 f_2^c$	...	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^2 f_{n-3}^c$	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\tilde{\Delta}^2 f_{n-2}^c$			
	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^1 f_1^c$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^1 f_2^c$	$\Delta^1 f_3$	...	$\Delta^1 f_{n-3}^c$	$\Delta^1 f_{n-2}$	$\Delta^1 f_{n-2}^c$	$\Delta^1 f_{n-1}$			
$f_1$	$f_1^c$	$f_1^c$	$f_2^c$	$f_3$	$f_3^c$	...	$f_{n-2}$	$f_{n-2}^c$	$f_{n-1}$	$f_{n-1}^c$	$f_n$		
$x_1$	$x_1^c$	$x_2$	$x_2^c$	$x_3$	$x_3^c$	...	$x_{n-2}$	$x_{n-2}^c$	$x_{n-1}$	$x_{n-1}^c$	$x_n$	$x_n^c$	

Рис.4.12 Таблица модифікованих скінченних різниць

Нехай виконується співвідношення:

$$\tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c = \Delta^i f_{n-i}^c. \quad (4.26)$$

Тоді процедура знаходження невідомого значення функції в точці  $x_n^c$  визначається так:

$$\Delta^{j-1} f_{n-j+1}^c = \mu_{j-1} \Delta^{j-1} f_{n-j}^c + \Delta^j f_{n-j}^c (\hat{r}_{n-j}^j - \hat{l}_{n-j}^j) + \lambda_{j-1}, \quad j = \bar{i}, 1. \quad (4.27)$$

Суть подальших міркувань полягає в тому, щоб визначити такий рядок таблиць модифікованих скінченних різниць (див. Рис.4.12), при якому співвідношення (4.26) виконується з мінімальною похибкою. Як було показано в роботі [3], необхідною та достатньою умовою для виконання (5) у випадку  $\mu^*(\Delta) = 1, \lambda^*(\Delta) = 0$  є умова, щоб точки  $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c), (l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c), (r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$  лежали на одній прямій. Очевидно, що остання умова виконуватиметься (з точністю, яка відповідає точності наближення другої похідної скінченними різницями), якщо на інтервалі  $[l_i, r_i]$  крива, що проходить через відповідні точки, являтиме собою кубічний многочлен. У випадку, коли параметри  $\mu^*(\Delta), \lambda^*(\Delta)$  визначаються з умови (4.21), відповідна необхідна та достатня умова для виконання (4.26) буде іншою.

Провівши нескладні, але досить громіздкі перетворення, можна показати, що умова (4.26) записується у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(c_i - l_i)} \right) - \\ & - \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c)}{(rr_i - r_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+2}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(r_i - c_i)} \right) \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - \\ & - \left( \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(c_i - l_i)} - \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c)}{(l_i - ll_i)} \right) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} = \\ & = (1 - \mu_{i-1}) \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c)}{(c_i - l_i)} \left( \frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \mu_{i-1}) \frac{(\Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \Delta^{i-2} f_{n-i}^c) l_i - ll_i}{(l_i - ll_i) c_i - ll_i} + \\
& + \frac{(1 - \mu_{i-2})(\Delta^{i-2} f_{n-i+1}^c - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)} \left( \frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2 \right) - \\
& - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i}^c - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Легко бачити, що при  $\mu_i = 1, \lambda_i = 0, i = \overline{1, n}$ , останнє співвідношення перетворюється на умову належності одній прямій точок  $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c)$ ,  $(l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c)$ ,  $(r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$ , яка розглядалась у роботі [3]. Зауважимо, що співвідношення (4.28) не може бути використане безпосередньо побудови прогнозу, бо  $\Delta^{i-2} f_{n-i+2}$  містить невідоме прогнозне значення. Для побудови конструктивної умови виконання співвідношення (4.28) розглянемо його неперервний аналог та отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned}
& f''(c_i) - f''(r_i) \frac{rr_i - r_i}{rr_i - c_i} - f''(l_i) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} = \\
& = (1 - \mu_{i-1}) f'((c_i + l_i)/2) \left( \frac{c_i - l_i}{c_i - ll_i} - 2 \right) + (1 - \mu_{i-1}) f'((l_i + ll_i)/2) \frac{l_i - ll_i}{c_i - ll_i} + \\
& \frac{(1 - \mu_{i-2})(f(c_i) - \lambda_{i-2})}{(r_i - c_i)} \left( \frac{r_i - c_i}{rr_i - c_i} - 2 \right) - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(ll_i) - \lambda_{i-2}}{(c_i - ll_i)} + \\
& 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2}) \Delta^{i-2} f_{n-i+1} - \lambda_{i-2}}{(c_i - l_i)} + \lambda_{i-1}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Для рівномірної сітки отримуємо диференціальне рівняння з «запізненням» виду:

$$\begin{aligned}
& f''(x) - f''(x + \Delta) \frac{1}{2} - f''(lx - \Delta) \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} (1 - \mu_{i-1}) f'((x - \Delta/2)/2) + \\
& + \frac{1}{2} (1 - \mu_{i-1}) f'(x - 3\Delta/2) - \frac{3}{2} \frac{(1 - \mu_{i-2})(f(x) - \lambda_{i-2})}{\Delta} - \\
& - \mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(x - 2\Delta) - \lambda_{i-2}}{2\Delta} + 2\mu_{i-1} \frac{(1 - \mu_{i-2})f(x - \Delta) - \lambda_{i-2}}{\Delta} + \lambda_{i-1}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Будемо знаходити його частковий розв'язок у вигляді:  $f(x) = a + e^{bx}$ .



При підстановці у (4.30) отримуємо систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів:

$$3(\mu_{i-1} - 1) \frac{1 - \mu_{i-2}}{2\Delta} a = 3(\mu_{i-1} - 1) \frac{\lambda_{i-2}}{2\Delta} - \lambda_{i-1},$$

$$b^2 - \frac{1}{2} b^2 e^{b\Delta} - \frac{1}{2} b^2 e^{-b\Delta} = \frac{3}{2} (\mu_{i-1} - 1) b e^{-b\Delta/2} + \frac{1}{2} (1 - \mu_{i-1}) b e^{-3b\Delta/2} -$$

$$- \frac{3}{2} (1 - \mu_{i-2}) / \Delta - \mu_{i-1} (1 - \mu_{i-2}) e^{-2b\Delta} / (2\Delta) +$$

$$+ 2\mu_{i-1} (1 - \mu_{i-2}) e^{-b\Delta} / \Delta.$$

Трансцедентне рівняння для невідомого параметра  $b$  має розв'язок, який можна знайти наближено. Наприклад, при  $\Delta = 1, \mu_{i-1} = 1.5, \mu_{i-2} = 6.4$  можемо отримати значення  $b = -1.12$ .

Таким чином, бачимо, що для виконання умови (4.19) достатньо, щоб точки  $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c), (l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c), (r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$  лежали на кривій, що визначається функцією виду:  $f(x) = a + e^{bx}$ . Аналогічна умова для класичних різниць, як вже згадувалось вище, була пов'язана з кубічним многочленом.

Отже, можемо запропонувати наступний модифікований алгоритм екстраполяції:

1. Будується таблиця модифікованих скінченних різниць .
2. Проводиться інтерполяція функції в середніх точках, таблиця скінченних різниць доповнюється середніми значеннями .
3. Для кожного рядка таблиці скінченних різниць визначається рядок, для якого точки  $(c_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i}^c), (l_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i-1}^c), (r_i, \tilde{\Delta}^i f_{n-i+1}^c)$  лежать на кривій  $f(x) = a + e^{bx}$ .
4. Обраховується прогнозне значення  $\tilde{\Delta}^{i*} f_{n-i}^c$ .
5. Знаходиться прогнозне значення функції за формулами (4.27).

Розглянемо спочатку тестовий приклад застосування описаного вище підходу. Нехай маємо функцію  $f(x) = x^6 \sin(x)$ , визначену в точках 1, 1.5, 2, 2.5, 3, ..., 11. Аналогічний приклад був розглянутий у роботі [3]. Пірамідальний

метод в [3] дав прогнозне значення функції, рівне  $-2017907,745$ , при цьому точне значення  $-2024974,077$ . Розглянемо зараз модифікацію методу з застосуванням  $\mu\lambda$ -похідних. Фрагмент таблиці модифікованих розділених різниць наведено на Рис.2., відповідні значення параметрів-на Рис.3.

7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	
166943,8435	259354,3282	301149,0278	219016,6599	-55242,97922	-544021,1109	-1178876,453	-1771543,65	-2024933,995	-2024974
279154,9363	140108,7662	-128432,8304	-487000,1943	-810101,981	-891724,3434	-498434,6459	528796,955		
426487,2904	129506,3308	-357539,6943	-928773,9162	-1341712,523	-1246968,876	-295156,3383			
407728,6265	-784026,9848	-1058280,247	-984172,8286	-318194,9601	1046556,185				
686826,2732	-650551,6205	-200145,8438	740085,2868	2030729,013					
163138,8812	486680,4293	1390636,907	2158937,604						

Рис.4.13 Фрагмент таблиці модифікованих скінченних різниць

miu_new	lamb_new
2,017187003	-175716,69
-0,924	0
1	0
1	0
1	0
1	0

Рис.4.14 Значення параметрів для  $\mu\lambda$ -різниць

Як бачимо, заміна класичних різниць  $\mu\lambda$ -різницями у першому та другому рядку таблиці розділених різниць дозволяє отримати прогнозне значення в точці 11.5, яке рівне  $-2024933,995$  для відповідного тестового прикладу, що є значно кращим результатом у порівнянні з класичним пірамідальним підходом.

### Висновки до четвертого розділу

1. Вперше розроблено пірамідальний алгоритм прогнозування на основі малих виборок даних, в основі якого покладена концепція знаходження прогнозного значення без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій та суттєво використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у розділених різницях спеціального виду.

2. Досліджено фундаментальні властивості запропонованого алгоритму, зокрема:

- Виявлено, що прогноз, побудований на основі відповідного рядка таблиці розділених різниць, номер якого визначається у відповідності до спеціальної процедури, еквівалентний побудові прогнозу на основі кубічного тренду чи параболічного тренду( для попереднього рядка таблиці), що дозволило суттєво вдосконалити саму процедуру вибору оптимального рядка таблиці та відповідний критерій.
- Встановлено, що розроблений метод будує прогнозне значення, яке співпадає з центром інтервалу невизначеності, що будується у відповідності до спеціальної процедури, що дало можливість сформулювати саму формальну концепцію пірамідального прогнозу як знаходження центру інтервалу невизначеності, який будується з максимальним використанням інформації про можливу поведінку досліджуваного процесу.

3. Запропоновано модифікацію базового пірамідального алгоритму, яка відрізняється застосуванням в якості критерію оптимального вибору рядка інформацію про досягнення локального екстремуму наприкінці інтервалу дослідження. Проведені чисельні дослідження такої модифікації, які показали її більшу ефективність на 25-30% у порівнянні з базовим пірамідальним алгоритмом при її застосуванні до даних, що містять випадкову складову (проведено дослідження захворюваності на COVID в Україні)..

4. Вперше запропоновано використання ML-похідних та їх різницевих аналогів в межах пірамідального підходу, знайдено відповідний критерій вибору оптимального рядка таблички, який включає в себе розв'язок диференціального рівняння з запізненням. Проведені чисельні експерименти показали ефективність даної методики, однак на тестових вибірках, що використовувались, перевага перед модифікованим пірамідальним методом виявилась незначною (в межах 5-10%), що не зменшує перспектив подальших досліджень даної модифікації пірамідального підходу.

## **РОЗДІЛ 5 ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТА АНАЛІЗУ ТРАЄКТОРІЙ ЛОКАЛІЗОВАНИХ СОЛІТОНОПОДІБНИХ ЗБУРЕНЬ В ОБЛАСТЯХ СЕЙСМІЧНОЇ АКТИВНОСТІ**

### **5.1 WEB-сервіси для роботи з даними сейсмічного моніторингу**

#### **5.1.1 WEB-сервіс FDSN та його специфіка**

Фундаментальним аспектом при розробці програмного забезпечення для аналізу сейсмічних поштовхів є підсистеми отримання, представлення та передачі сейсмологічних даних. До таких даних належать часові ряди, пов'язані метадані, параметри подій та інші.

На сьогодні розроблено низку форматів сейсмічних даних та програм, що здійснюють їх конвертацію [131]. В якості прикладів форматів представлення сейсмічних даних можемо виділити наступні: DASS- формат запису для цифрових станцій “Геотех”; XDATA - формат запису пунктами спостережень радіотелеметричної системи NANOMETRIX; PCC-1 формат запису пунктами спостережень радіотелеметричної системи PCC; Для полегшення обміну даними міжнародним товариством з прикладної геофізики був розроблений стандарт SEG-Y. В деяких країнах [132] застосовувались формати СЦС-3, СОС-ПС, СОС-Сайбер, ССЦ-2, ССЦ-3, ССЦ-4, SEG-B, SEG-D. Для їх перетворення в формат SEG-Y використовується, зокрема, програмний комплекс ARCOPY (інші пакети, що працюють з SEG-Y: GSEGYView, SegyMAT, SegyPY, SeiSee, SeisView) [133].

З метою уніфікації використання даних різним клієнтським програмним забезпеченням Міжнародною федерацією цифрових сейсмографічних мереж FDSN (International Federation of Digital Seismograph Networks) була визначена специфікація представлення даних [200]. Специфікація визначає назви служб, параметри запиту та очікувані результати.

Головні сервіси є наступні:

- Dataslect–повертає часові ряди даних в форматі FDSN miniSEED;
- Station-повертає метадані у форматі FDSN StationXML ;

- Event – повертає параметричні дані для подій в QuakeML;

Версії сервісів визначаються у відповідності до трьохцифрової моделі x.y.z. у вигляді *SpecMajor.SpecMinor.Implementation*.

*SpecMajor* – головна специфікація версії для визначення сумісності з усіма попередніми версіями. Початкове значення цього параметра рівне 1.

*SpecMinor* – мінорна (другорядна) специфікація версії, яка інкрементується коли опціональні параметри чи здатності додаються до попередніх специфікацій, однак зворотна сумісність підтримується попередніми головними версіями. Наприклад 1.# означає що сервіс буде сумісний з версією 1.0 . Значення стартує з 0.

*Implementation*: ціле значення специфічне для кожного центру обробки даних. Корисне для сервісних оновлень, виправлень помилок але немає відповідності до специфікацій.

Разом *SpecMajor* та *SpecMinor* версії дозволяють клієнтам визначати очікувані властивості сервісів.

Сервіси можуть бути викликані з використанням підмножини REST та HTTP методів. Зокрема всі сервіси будуть викликані з використанням HTTP метода GET або метода HTTP POST у випадках коли параметри вибору мають великий розмір.

Наступний базовий URI патерн використовується в кожному дата центрі FDSN:

`<site>/fdsnws/<service>/<majorversion>/`

де *service* є одним із *dataselect*, станція чи подія *SpecMajor* FDSN web сервісом.

Наприклад базовий URL для версії 1 FDSN станції ORFEUS має вигляд:

`www.orfeus-eu.org/fdsnws/station/1/`

Всі сервіси доступні через TCP/IP port 80.

Сервіси підтримують такі методи:

- *query* – для посилення запиту даних чи інформаційного запиту;
- *version* – для запиту повної версії сервісу ;

- `application.wadl` – запит WADL для інтерфейсу.

Наприклад, надсилання запитів до служби станції ORFEUS буде виконуватися за допомогою цього сервісу виглядатиме так:

`http://www.orfeus-eu.org/fdsnws/station/1/query?<key=value parameters>`

Аналогічно запит виконання версії такого самого сервісу може бути зроблений через URI:

`http://www.orfeus-eu.org/fdsnws/station/1/version`

який повертає як простий текст рядок що визначає версію програмного забезпечення, наприклад “1.2.8”.

Запит WADL для аналогічного інтерфейсу:

`http://www.orfeus-eu.org/fdsnws/station/1/application.wadl`

Будь-який центр обробки даних, що реалізує один або кілька з цих інтерфейсів обслуговування, повинен реалізовувати всі зазначені методи та параметри запиту та відповідати шаблонам викликів і очікуваним результатам, щоб вважатися такими, що відповідають специфікації. Виняток становлять методи аутентифікації, які повинні підтримуватися лише центрами обробки даних, яким потрібна аутентифікація для доступу до певних наборів даних.

Запити URI до веб-сервісів FDSN не повинні перевищувати 2000 байт, включаючи кодування URL. Найпоширеніші запити будуть набагато коротшими. Запити мають бути закодовані URL у відповідності до стандартної практики перед поданням до служби, але служби повинні обробляти нековдані подання, наскільки це можливо.

Нижче наведено загальні відповіді, які повинні використовуватися всіма службами. Якщо надіслано правильно відформатований запит, але дані не повертаються користувачеві, служба повинна повернути статус HTTP 204 (немає вмісту). Обмеження на обсяг інформації, що повертається для будь-якого даного запиту, може встановлюватися незалежно для кожної служби

кожним центром обробки даних. Якщо клієнт подає запит, який призведе до набору даних за межі служби, служба повинна повернути HTTP-статус 413 (запит занадто великий).

Усі помилки, повідомлені клієнту, або коди статусу HTTP 4xx або 5xx, повинні включати повідомлення про помилку, передане як текст/звичайний MIME-тип, використовуючи такий шаблон:

```
Error <CODE>: <SIMPLE ERROR DESCRIPTION>
<MORE DETAILED ERROR DESCRIPTION>
Usage details are available from
<SERVICE DOCUMENTATION URI> Request:
<SUBMITTED URL>
Request Submitted:
<UTC DATE TIME>
Service version:
<3-LEVEL VERSION
```

Загальні та специфічні параметри запиту для кожної служби зведені в Таблицю 1. Додатку Г. У цій таблиці назви абревіатур є прийнятними синонімами для даного імені параметра. Для певної служби та групи параметрів кожен набір параметрів підгрупи є ексклюзивним; наприклад, для виклику до служби `fdsnws--station` клієнт повинен надати визначення простого часу або часу вікна, але не обидва. Специфічні значення параметрів для служби описані в Таблиці 2. Додатку.

Параметри обмеження каналу також можна подати у вигляді списків, розділених комами, щоб вибрати два або більше значень за допомогою одного запиту. Наприклад, параметр каналу може використовуватися для визначення кількох каналів:

*channel=LHE,LHN,LHZ,BHZ* (індивідуальні значення також можуть включати специфічні символи)

Усі значення часу вказуються в UTC і повинні використовувати одну конкретну варіацію стандарту ISO 8601 з додаванням мілісекунд:

YYYY--MM--DDTHH:MM:SS.ssssss

де поля відповідають стандарту ISO 8601, а «Т» розділяє дату і час. «sssss» — це мілісекунди, виражені між роздільною здатністю від 1/10 секунди до мікросекунди; вони не обов'язково повинні бути присутніми.

Підтримуються два коротших варіанти формату часу: YYYY---MM---DDTHH:MM:SS (аналог YYYY---MM---DDTHH:MM:SS.000000), де мілісекунди інтерпретуються як нулі та YYYY---MM---DD (аналог YYYY---MM---DDT00:00:00.000000) де година, хвилина, секунда і мілісекунда інтерпретуються як нулі.

Параметр starttime слід інтерпретувати в контексті вибору будь-яких даних або інформації (зразки часових рядів, походження землетрусів, епохи метаданих) у певний час або пізніше, ніж зазначене значення. Аналогічно, endtime задає можливість вибирати будь-які дані чи інформацію до зазначеного значення. Параметри startbefore, startafter, endbefore і endafter, що використовуються тільки для служби fdsnws-station, визначають вибір інформації, яка строго починається або закінчується до або після вказаного значення часу; вони не збігають інформацією про події, що відбулися точно у вказаний час. Ці параметри вибору призначені спеціально для метаданих і корисні для порівняння інформації, яка в іншому випадку була б складною з іншими параметрами часу.

### 5.1.2 Сервіс FDSNWS Dataselect

Служба підтримує наступні методи:

- query – подати запит на дані;
- queryauth – аутентифікувати та подати версію запиту даних – запитати номер версії повного сервісу ;
- application.wadl – запитати WADL для інтерфейсу.



Служба повинна приймати запити, сформульовані з використанням параметрів вибору, зазначених у таблиці 1: простий час, обмеження каналу та параметри, специфічні для fdsnws-dataselect. Таблиця 2 містить описи параметрів для цієї служби. Ці параметри можна надіслати за допомогою методів HTTP GET або POST. Метод POST корисний, щоб дозволити надсилати велику кількість параметрів запиту. Для методу GET параметри повинні бути представлені як пари ключ=значення і не можуть бути вказані більше одного разу; якщо параметр подано кілька разів, результат не визначено.

Для методу POST усі параметри мають бути представлені як частина тіла POST. Параметри quality, minimumlength та longestonly мають бути вказані у вигляді пар ключ=значення в окремих рядках, а параметри простого часу та обмеження каналу необхідно повторювати стільки разів, скільки необхідно за такою схемою:

```
quality=M minimumlength=0.0 longestonly=FALSE
```

```
NET STA LOC CHA
```

```
STARTTIME
```

```
ENDTIME NET STA
```

```
LOC CHA
```

```
STARTTIME
```

```
ENDTIME NET STA
```

```
LOC CHA
```

```
STARTTIME
```

```
ENDTIME
```

Це має бути надіслано до URI “<site>/fdsnws/dataselect/1/query”.

Усі правила для параметрів застосовуються однаково, незалежно від того, вони вказані за допомогою методів GET або POST, за винятком порожніх ідентифікаторів розташування, які мають бути вказані як «—» у тілі POST через пропуски, які використовуються як роздільник полів.

Результати успішного запиту мають бути повернуті у вигляді потоку miniSEED з використанням типу MIME `application/vnd.fdsn.mseed`. Точна природа miniSEED, що повертається цією службою, залежить від центру обробки даних. Центр може вирішити видалити повторювані дані або скоротити до точного вікна, зазначеного абонентом. Очікується, що часовий ряд представлятиме необроблені, «сирі» записані дані, надані оператором мережі або власником даних.

При застосуванні методу `queryauth` від клієнта слід запросити дайджест-аутентифікацію HTTP (RFC 2617). Після успішної аутентифікації запит має бути прийнято та оброблено відповідно до методу запиту. Облікові дані автентифікації (база даних користувачів і пов'язані схеми ліцензування) залежать від центру обробки даних.

При застосуванні методу `version` служба повертає версію реалізації як простий текстовий рядок, використовуючи тип MIME `text/plain`. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

При застосуванні методу `application.wadl` служба повертає відповідний WADL опис інтерфейсу з використанням типу MIME `додаток/xml`. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

Усі помилки, що повертаються клієнту, мають використовувати відповідний тип і шаблон.

#### Приклад 5.1.

Запит усіх каналів даних від станції IU COLA за перші 12 годин 2021 року за допомогою запиту GET:

```
http://service.iris.edu/fdsnws/dataselect/1/query?network=IU&station=COLA
&starttime=2021--01--- 01T00:00:00&endtime=2021--01---01T12:00:00
```

Запит усіх каналів даних LHE, LHN, LHZ від станції IU COLA за перші 12 годин 2012 року за допомогою запиту POST:

```
http://service.iris.edu/fdsnws/dataselect/1/query
```

Структура POST запиту:

```
quality=M
```

```
IU COLA 00 LHE 2012-01-01T00:00:00
2021-01-01T12:00:00 IU COLA 00 LHN
2021-01-01T00:00:00 2021-01-01T12:00:00
IU COLA 00 LHZ 2021-01-01T00:00:00
2021-01-01T12:00:00
```

### 5.1.3 Сервіс FDSNWS Station

Служба повинна підтримувати наступні методи:

- `query` – подати запит на дані;
- `version` – запит на номер версії повного сервісу;
- `application.wadl` – запитати WADL для інтерфейсу.

Служба повинна приймати запити, сформульовані з використанням параметрів вибору, визначених у таблиці 1: часові обмеження, обмеження каналу, географічні обмеження та перераховані параметри, які є специфічними для `fdsnws--станції`. Таблиця 3 містить описи параметрів для цієї служби.

Ці параметри слід подавати як пари ключ=значення за допомогою методу HTTP GET і не можуть бути вказані більше одного разу; якщо параметр подано кілька разів, результат не визначено. Параметр `рівня` контролює кількість деталей, включених у повернені результати FDSN StationXML з такою ієрархією: мережа, станція, канал і відповідь. Наприклад, якщо запитується рівень станції, елементи станції будуть включені в результати, але не інформація, пов'язана з каналом або відповіддю.

Результати успішного запиту мають бути повернуті як FDSN StationXML з використанням типу MIME додаток/xml.

При використанні методу `version` служба повертає версію реалізації як простий текстовий рядок, використовуючи тип MIME `text/plain`. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

Для методу `application.wadl` Служба повертає відповідний WADL опис інтерфейсу з використанням типу MIME додаток/xml. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

Усі помилки, що повертаються клієнту, мають використовувати тип і шаблон, описаний у розділі Загальні відповіді на службу.

## Приклад 5.2.

Запит метаданих для всіх каналів від станції IU COLA без обмежень за часом:

<http://service.iris.edu/fdsnws/station/1/query?network=IU&station=COLA>

Requesting metadata for all BH\* channels between latitude --10 and --45 and longitude between 112 and 155 (e.g. Australia):

[http://service.iris.edu/fdsnws/station/1/query?channel=BH\\*&maxlatitude=---10&minlatitude=---45&minlongitude=122&maxlongitude=155](http://service.iris.edu/fdsnws/station/1/query?channel=BH*&maxlatitude=---10&minlatitude=---45&minlongitude=122&maxlongitude=155)

### 5.1.4 Сервіс FDSNWS Event

Служба підтримує наступні методи:

- **query** – запит на дані;
- **catalogs** – запит на доступні каталоги ;
- **contributors** – запит на доступну версію для учасників ;
- **version** – запит на номер версії повного сервісу ;
- **application.wadl** – запитати WADL для інтерфейсу

Служба повинна приймати запити, сформульовані з використанням параметрів вибору, зазначених у таблиці 1: часові та географічні обмеження та перераховані параметри, які є специфічними для події fdsnws. Таблиця 4 Додатку містить описи параметрів для цієї служби. Ці параметри слід подавати як пари ключ=значення за допомогою методу HTTP GET і не можуть бути вказані більше одного разу; якщо параметр подано кілька разів, результат не визначено. Результати успішного запиту мають повертатися як QuakeML 1.2 із використанням типу MIME application/xml.

Служба повертає список доступних каталогів у простій схемі XML, показаній нижче, використовуючи тип MIME application/xml. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

```
<Catalogs>
```

```
<Catalog>EMSC</Catalog>
```

```
<Catalog>GCMT</Catalog>
<Catalog>NEIC PDE</Catalog>
<Catalog>ISC</Catalog>
</Catalogs>
```

Служба для методу Contributors повертає список доступних учасників у простій схемі XML, показаній нижче, використовуючи тип MIME application/xml. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

```
<Contributors>
  <Contributor>NEIC</Contributor>
  <Contributor>EMSC</Contributor>
  <Contributor>ISC</Contributor>
</Contributors>
```

Служба для методу version повертає версію реалізації як простий текстовий рядок, використовуючи тип MIME text/plain. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

Для методу application.wadl повертається відповідний WADL опис інтерфейсу з використанням типу MIME application/xml. Усі параметри, подані разом із методом, будуть ігноровані.

Наприклад, запит для всіх подій магнітудою 6 і більше у 2021 році виглядатиме так:

```
http://service.iris.edu/fdsnws/event/1/query?minmag=6&starttime=2021-01--
01T00:00:00 &endtime=2022-01-01T00:00:00
```

## 5.2 Структура програмного комплексу

Розглянуті вище сервіси та формати представлення даних використані у програмному комплексі, що розроблений для чисельних експериментів та перевірки ефективності методів ідентифікації траєкторій відокремлених хвиль, що можуть спричиняти сейсмічні поштовхи. Відповідне програмне забезпечення розроблялось протягом декількох років, наявні як локальні так і WEB-версії.

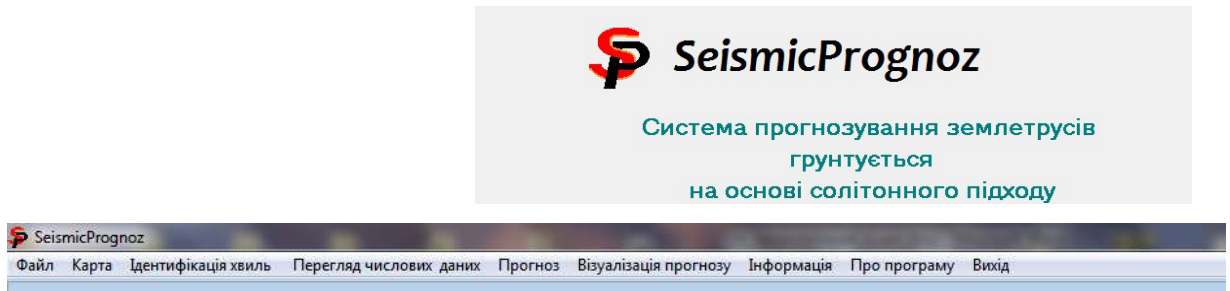


Рис.5.1 Головне меню програми (локальна версія)



Рис.5.2. Основні компоненти програмного комплексу

Програмний комплекс має наступні функціональні компоненти: підсистему отримання вхідних даних шляхом підключення до віддалених баз даних та формування відповідних SQL-запитів; підсистему візуалізації поштовхів та корекції даних, що базується на використанні статичних карт Google та Google API; підсистему аналізу вхідних даних, яка включає формування матриці швидкостей та алгоритм ідентифікації траєкторій солітоноподібних хвиль на основі методів, описаних вище; підсистему побудови прогнозу траєкторій та їх візуалізації.

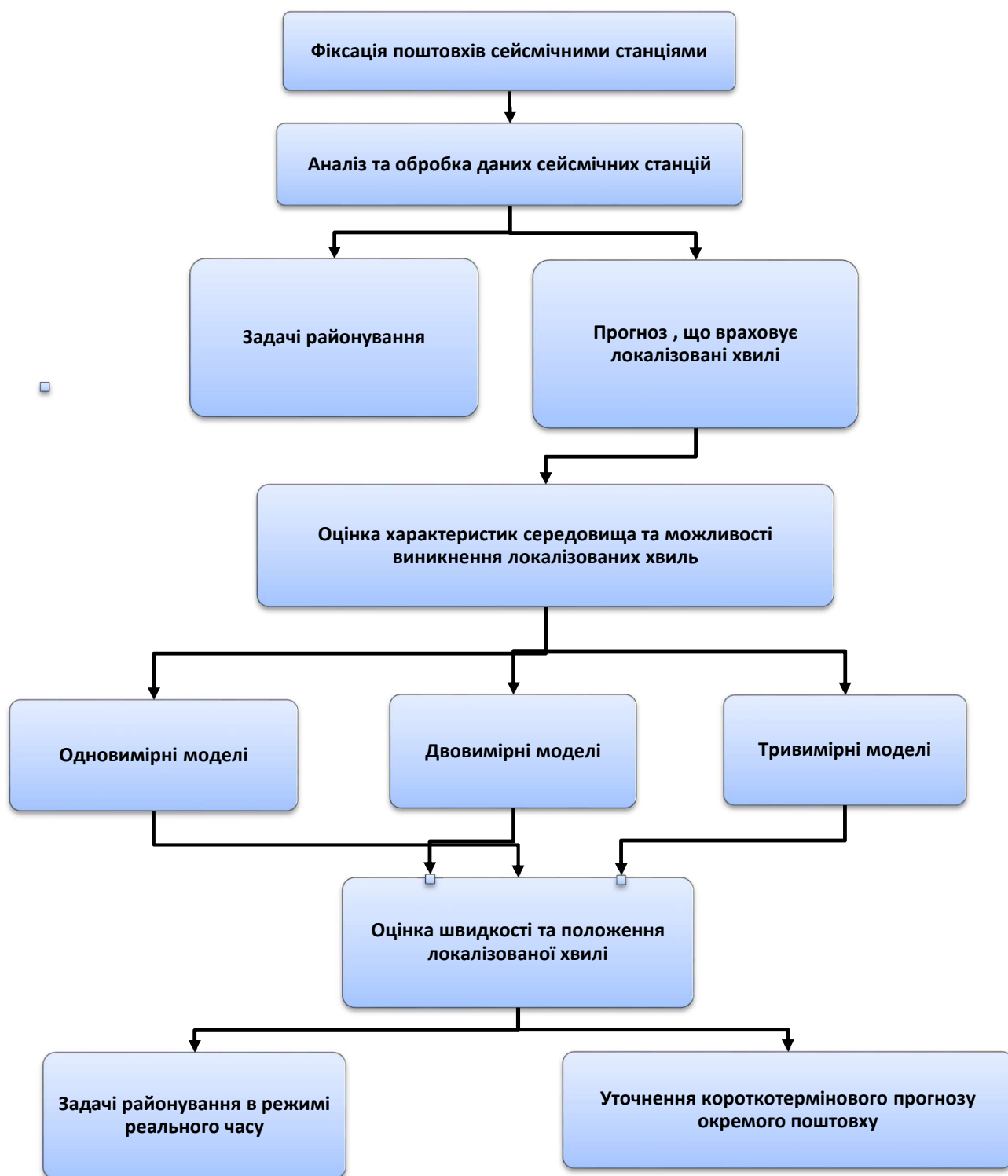


Рис.5.3. Концептуальна модель побудови прогнозів в системах сейсмічного та хвильового моніторингу

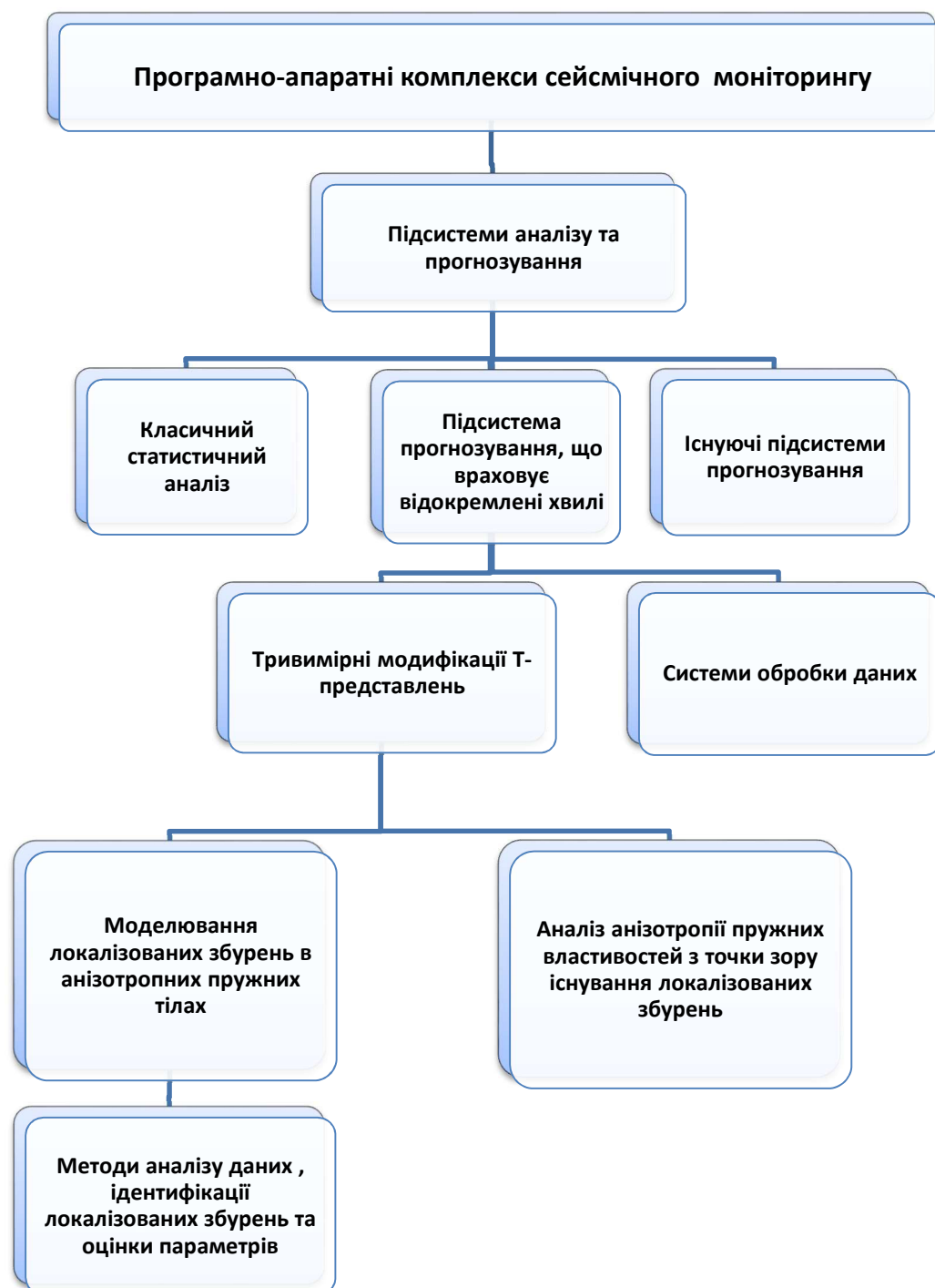


Рис.5.4. Підсистема прогнозування, що враховує локалізовані хвилі в структурі програмно-апаратного комплексу моніторингу сейсмічних процесів



На рис.5.1 зображено пункти головного меню програмної системи, 5.2-основні компоненти програмного комплексу, 5.3- концептуальну модель побудови прогнозів в системах сейсмічного та хвильового моніторингу.

В локальній версії програми реалізована багатопотокова обробка даних, оскільки алгоритм ідентифікації має експоненційну складність та вимагає значного часу роботи при наявності великої кількості даних. Також в програмі реалізовано можливість призупиняти та продовжувати розрахунки, формувати проміжні вихідні файли тощо. Програма дозволяє автоматично формувати URL для отримання відповідної статичної карти Google в залежності від вибраної області дослідження та координат відповідних поштовхів та має низку параметрів для налаштування алгоритму ідентифікації солітоноподібних хвиль та прогнозування їх траєкторій(див. Рис.5.5).

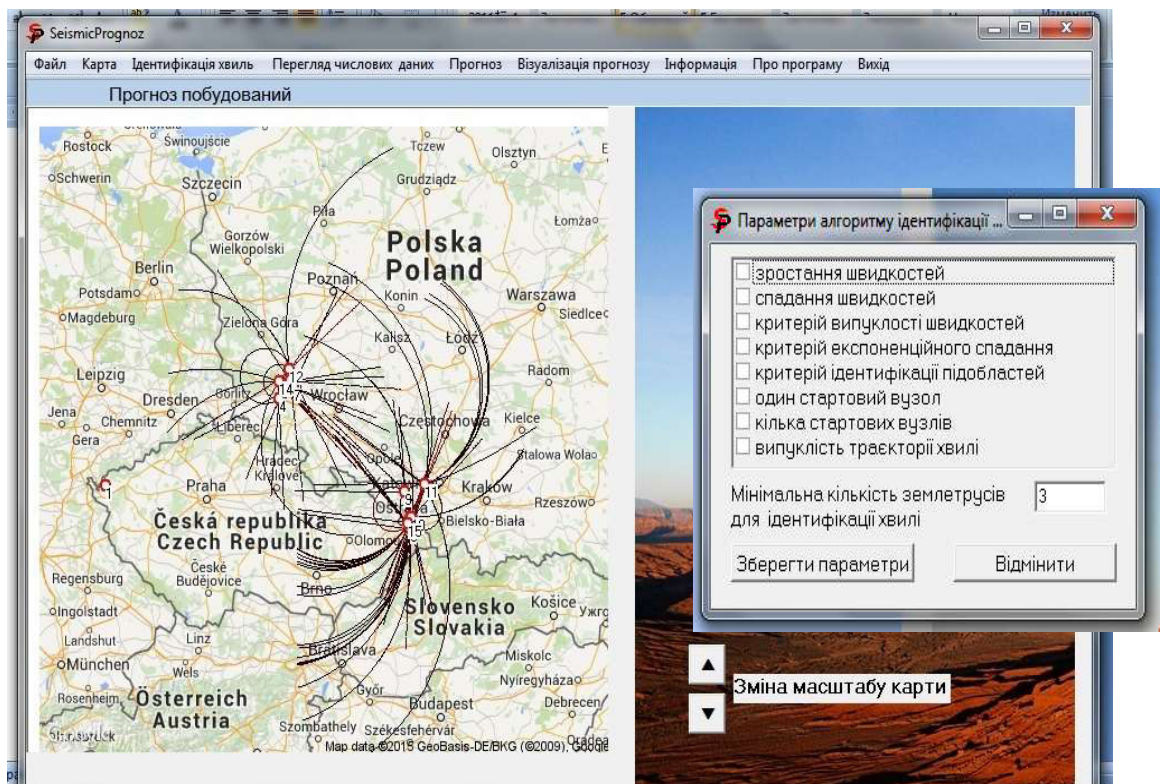


Рис.5.5. Ідентифікація солітоноподібних хвиль для сейсмічного процесу в районі Польщі-Чехії, 2018 рік

На рис.5.2 зображена структура програмно-апаратного комплексу моніторингу сейсмічних та хвильових процесів, що містить підсистему аналізу локалізованих збурень.

*Приклад 1* Землетрус в районі Японського архіпелагу 11 березня 2011 року.

Цей землетрус ми розглядали не випадково в силу низки причин. По перше, це найбільший останній землетрус століття, найбільший землетрус в районі Японії за всю історію сейсмологічних спостережень та четвертий чи п'ятий найпотужніший землетрус у світі. По друге, специфіка форшокових сейсмічних поштовхів була такою, що всі вони відбулись на глибині поверхні Мохоровичича, яка для цього регіону становить 10-11 км. Розглянемо результати моделювання, які були отримані при аналізі 13 поштовхів, що відбулись в районі Японських островів за 3 доби перед землетрусом магнітудою 8.9 (який відбувся 11 березня 2011 року). На рис.5.6 цифрами від 0 до 12 позначені епіцентри форшоків, епіцентр головного поштовху позначено кругом максимального радіусу (він знаходиться поблизу епіцентру форшоку з номером 1). Кривими та прямими лініями позначено прогнози траєкторії солітоноподібних хвиль, розраховані за допомогою розробленого програмного забезпечення до моменту основного поштовху. При оцінці траєкторій солітоноподібних хвиль враховані гіпотетичні швидкості солітоноподібних хвиль та можливість їх відбивання від областей з підвищеною густиною порід. За допомогою методу аналізу швидкостей, описаного в розділі 2, ідентифікувались поштовхи, які зумовлювались однією хвилею. Самі траєкторії апроксимувались кривими в класі логарифмічних спіралей та прямих у випадку відбивання, проводилась оцінка швидкостей. Як бачимо, форшоки розташувались таким чином, що велика кількість можливих траєкторій солітоноподібних хвиль проходила через область, де відбувся максимальної магнітуди поштовх. Більше того, в момент сейсмічного поштовху в околі 10 км. від поштовху знаходилась максимальна кількість солітоноподібних збурень, які прогнозувались.

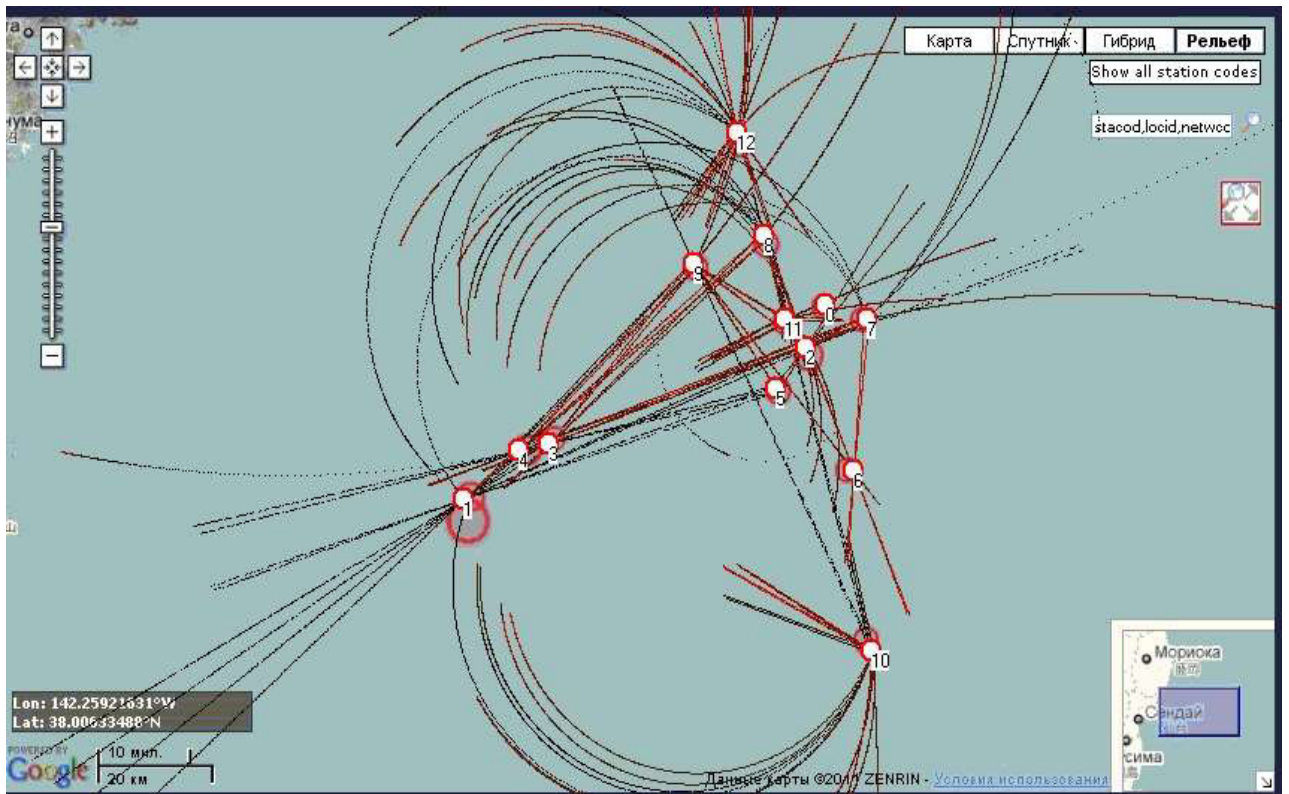


Рис.5.6. Модель сейсмічного процесу в районі Японських островів, Dataset 8-11 березня 2011 р.

Аналіз швидкостей показує, що до моменту основного поштовху саме хвилі другого типу досягли точки гіпоцентру, хвилі ж першого типу не встигли до цього моменту часу (відзначимо, що оцінки були взяті досить грубі і окремі з хвиль першого типу насправді також могли дійти до точки, де відбувся основний поштовх). Однак, хвилі, що досягли точки фокусування пізніше, могли бути генераторами численних афтершоків, які відбулись після основного поштовху під час японського землетрусу 11 березня.

Таким чином, аналіз відповідного сейсмічного процесу показує, що для поштовху магнітудою 9.6, що відбувся неподалік узбережжя префектури Фукусіма (Японія) 11 березня 2011 р. можна зробити наступні висновки:

1. Через кругову область радіусом 10 км з центром у епіцентрі головного поштовху потягом 3 діб з моменту першого форшоку і до моменту виникнення головного поштовху пройшла максимальна кількість прогнозних

траєкторій локалізованих збурень. Отже, аналізуючи траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень протягом всього періоду сейсмічної активності з моменту виникнення першого форшоку і до головного поштовху можливо було чітко одентифікувати область можливого головного поштовху, який теж відбувся на глибині поверхні Мохоровичича.

2. В момент початку головного поштовху в радіусі 10 км. від епіцентра знаходилась максимальна кількість прогнозних локалізованих солітоноподібних збурень, що добре видно на динамічній моделі, яка знаходиться в мережі Інтернет за покликанням <http://seismo.kiev.ua/DeltaSoliton01.html>. Це означає, що за допомогою розробленого модуля прогнозування на основі солітонного підходу можна було спрогнозувати і час даного сейсмічного поштовху з точністю до 0.5-1 год.

3. Оцінка швидкостей руху відповідних збурень дозволила оцінити довжину тривожного періоду для основного поштовху тривалістю порядку 7 год (форшокова активність при цьому становила в середньому 2 год. між окремими поштовхами).

Цей приклад розглядався також фахівцями відділу сейсмічної небезпеки Інституту геофізики НАН України та була побудована динамічна модель поширення хвиль в режимі реального часу, яку розробив працівник відділу та розробник порталу [seismo.kiev.ua](http://seismo.kiev.ua) С. Щербина [237]. Сама модель знаходиться за покликанням <http://seismo.kiev.ua/DeltaSoliton01.html>.

Зауважимо, що отриманий результат в даному випадку – це не просто співпадіння. Справа в тому, що геофізика сейсмічних поштовхів в районі Японських островів визначається геологічною будовою земної кори в цьому регіоні та характеризується виникненням значної кількості сейсмічних поштовхів саме на глибинах поверхні Мохоровичича, в чому легко переконатись, аналізуючи каталоги сейсмічних поштовхів принаймні протягом останніх десятиліть. А як підтверджують результати математичного моделювання у розділі 2, саме в таких областях виникають стійкі локалізовані хвилі деформації солітонного типу. Причиною виникнення саме в той момент

катастрофічного поштовху стала і специфічна конфігурація форшоків, яка спричинила «бомбардування» солітонами області гіпоцентру головного поштовху, виникнення своєрідної лінзи, яка сфокусувала та спрямувала велику кількість локалізованих хвиль в область майбутнього гіпоцентру. Не слід забувати і той факт, що солітони на поверхні води, наприклад, це відомі «хвилі-вбивці», які мають величезну енергію та можуть навіть нанести значних руйнувань кораблям, що підтверджують результати проекту MaxWave європейського космічного агентства ESA [238].

*Приклад 2* Побудова прогнозу землетрусів в районі острова Суматра.

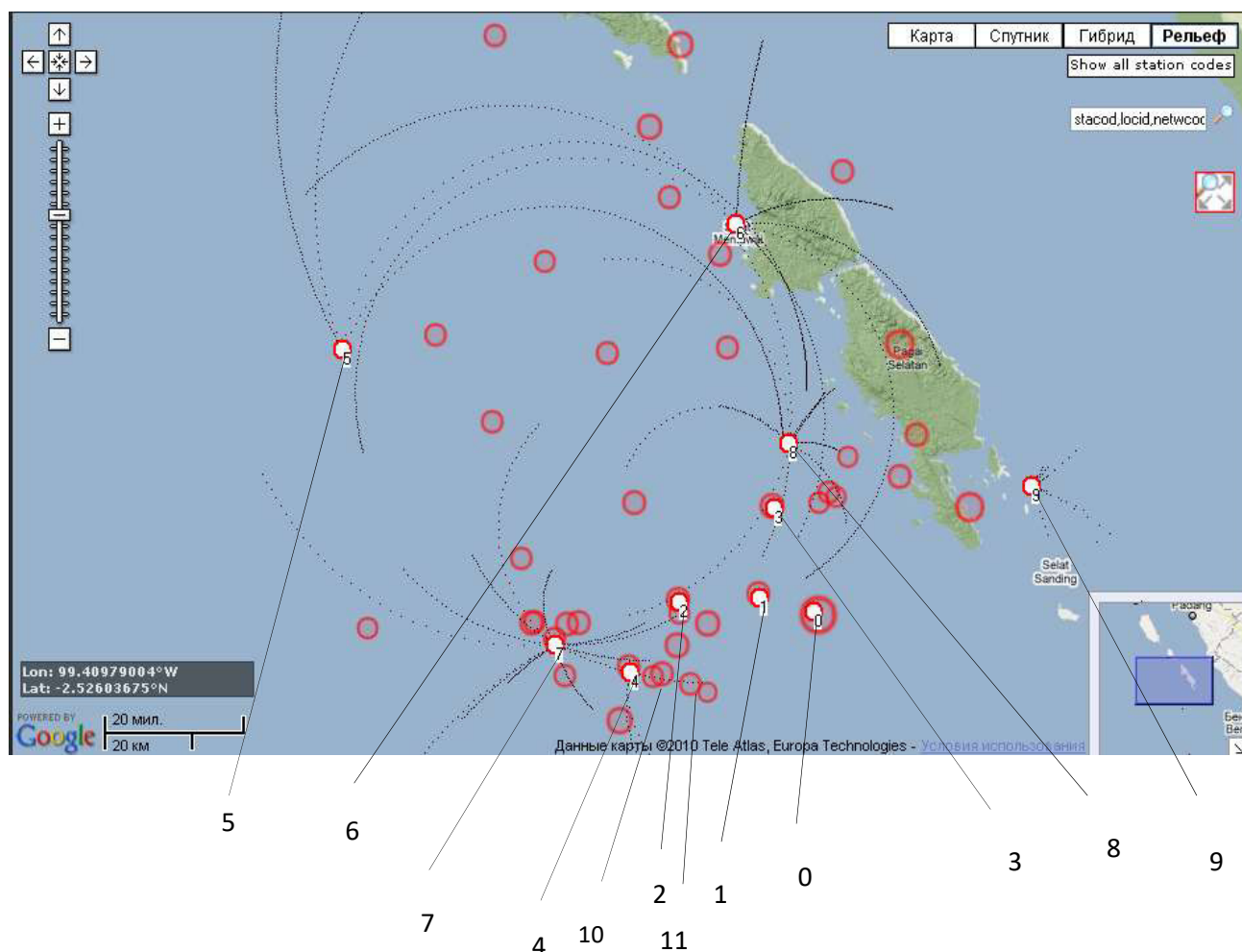


Рис.5.7. Моделювання траєкторій солітоноподібних хвиль під час сейсмічного процесу в районі о.Суматра

Розглянемо методологію побудови короткотермінового прогнозу на прикладі серії землетрусів, які відбулися в районі острова Суматра з 26.10.16

по 28.10.16. На рис.5.7 зображено приклад прогнозу для регіону, що знаходиться неподалік від острова Суматра. Вхідні дані: інформація про гіпоцентри та час початку десяти землетрусів, що відбулись в цьому регіоні в період з 26.10.16 по 27.10.16, їх епіцентри позначені цифрами від 0 до 9 в порядку зростання моментів часу їх початку.

Прогнозні траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень зображені на малюнку кривими. Якщо проаналізувати траєкторії, то бачимо, що солітон з прогножною траєкторією 10 потрапляє точно в епіцентр прогнозованого землетрусу 11. При цьому причини початкових поштовхів могли бути різними, їх дослідити чи спрогнозувати нашими методами неможливо через відсутність додаткових даних.

### *Приклад 3* Прогнозування поштовху в районі Чилі, 2017 р.

На рис.5.8 показано інформацію про поштовхи, що відбулись перед основним поштовхом останнього великого землетрусу біля узбережжя Чилі.

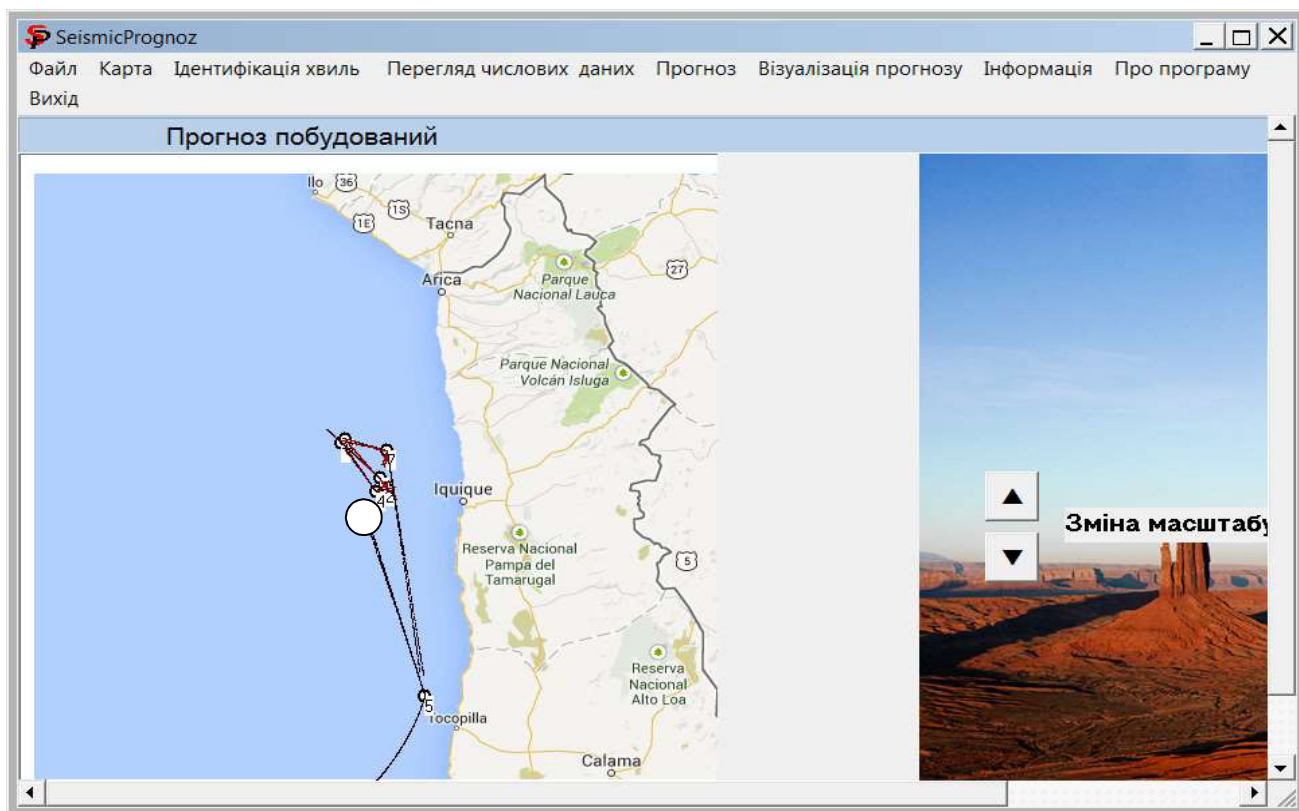


Рис.5.8. Прогнозування поштовху в районі Чилі, 2017 р.

Показано результати солітонного аналізу послідовностей поштовхів та побудовано прогнозні траєкторії відокремлених хвиль. Область основного

поштовху зображена кругом. Як бачимо, зафіксовано прогнозу траєкторію солітоноподібної хвилі, що потрапила в область, де відбувся основний поштовх в момент самого поштовху.

Клієнт-серверний web-додаток написаний з використанням фреймворку Dash та мови програмування Python. Клієнтська частина розроблена з допомогою технологій Dash з використанням React.js, серверна – на python. Dash ідеально підходить для створення та розгортання програм обробки та візуалізації даних. Він абстрагує всі технології та протоколи, необхідні для створення повноцінної веб-програми від інтерактивної візуалізації даних. Dash — це програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом, випущене згідно з дозвоільною ліцензією MIT.

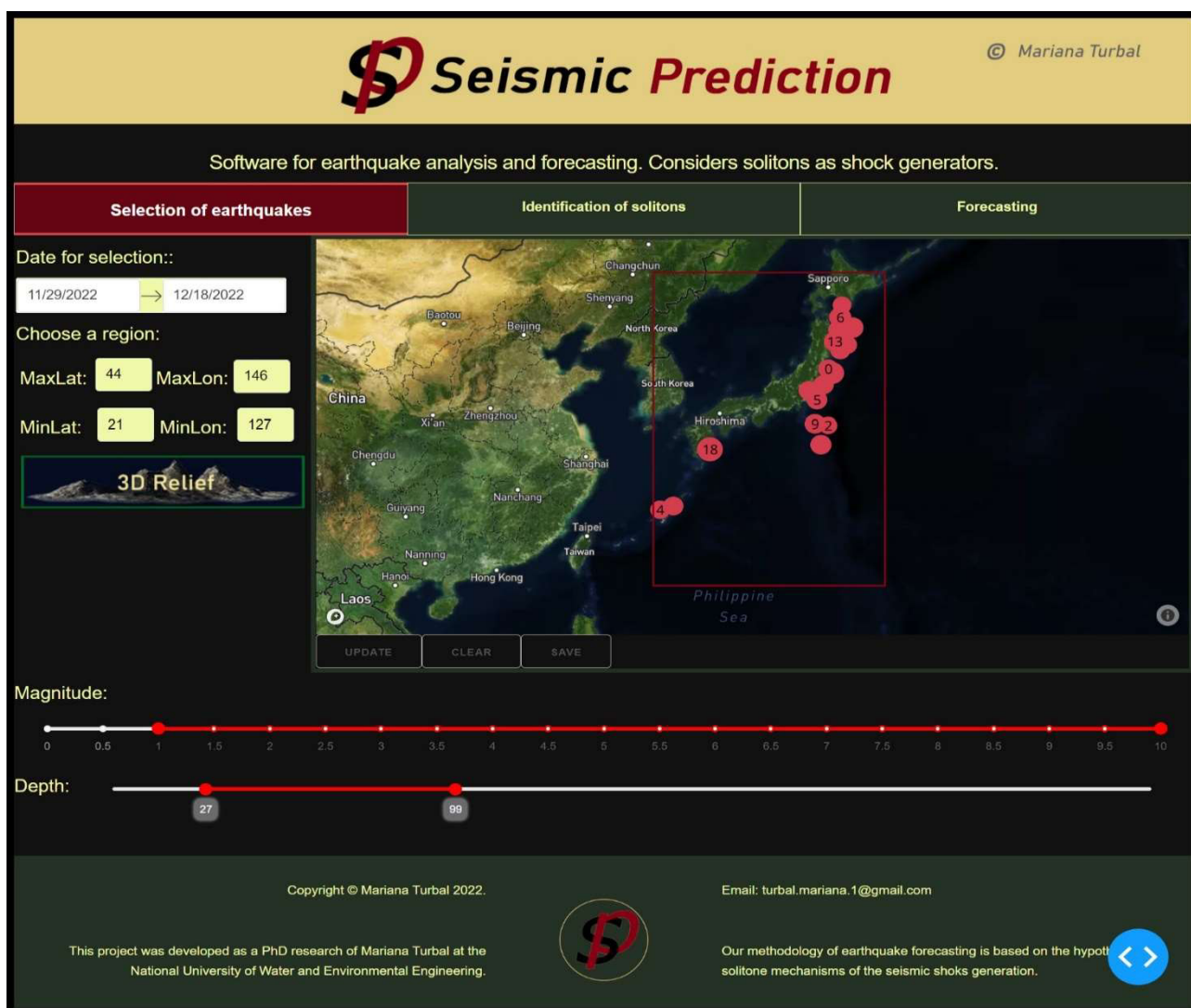


Рис.5.9 Вигляд головної сторінки

Розглянемо основні функціональні можливості нашого додатку. Інформаційна система, що пропонується, складається із трьох основних модулів: модуль вибору даних, модуль ідентифікації локалізованих солітоноподібних збурень, які можуть бути генераторами сейсмічних поштовхів, модуль прогнозування.

Перший модуль відповідає за вибір даних. Дані для роботи програмного комплексу отримуються у форматі GeoJSON із портала <https://earthquake.usgs.gov/>. Даний ресурс - USGS - є частиною Національної програми зменшення небезпеки землетрусів (NEHRP), заснованої Конгресом США у 1977 році, а Розширена національна сейсмічна система (ANSS) USGS була створена Конгресом як об'єкт NEHRP. Геологічна служба США та її партнери відстежують і звітують про землетруси. Для формування вибірки землетрусів спочатку необхідно задати часовий проміжок – початкову та кінцеву дату. У програмі використовується формат дати/часу ISO8601. Якщо часовий пояс не вказано, передбачається UTC. Часові параметри, що використовуються для формування запиту:

Табл. 5.1 Параметри задання часового інтервалу для спостереження

Параметр	Тип	Значення по замовчуванню	Опис
<code>endtime</code>	String	present time	Кінець спостережуваного періоду. Використовується формат дати/часу ISO8601. Якщо часовий пояс не вказано, передбачається UTC.
<code>starttime</code>	String	NOW - 30 days	Початок спостережуваного періоду.
<code>updatedafter</code>	String	null	Отримувати події, оновлені після вказаного часу.

Далі необхідно вказати регіон для спостереження. Регіон обмежується прямокутником, який задається наступними параметрами. Необхідно вказати мінімальну широту та максимальну широту, мінімальну довготу та максимальну довготу. Кожна із сторін прямокутника для необхідного регіону



задається прямою, яка формується параметром `minlatitude`, або `maxlatitude`, або `minlongitude`, або `maxlongitude`. Зліва область обмежується мінімальною довготою, справа – максимальною довготою, знизу – мінімальною широтою, зверху – максимальною широтою. Параметри задаються із врахуванням наступних обмежень.

Табл. 5.1 Параметри вибору області

Параметр	Тип значень, які приймаються	Значення по замовчуванню	Опис
<code>minlatitude</code>	Decimal [-90,90] degrees	-90	Мінімальна широта
<code>minlongitude</code>	Decimal [-360,360] degrees	-180	Мінімальна довгота
<code>maxlatitude</code>	Decimal [-90,90] degrees	90	Максимальна широта
<code>maxlongitude</code>	Decimal [-360,360] degrees	180	Максимальна довгота

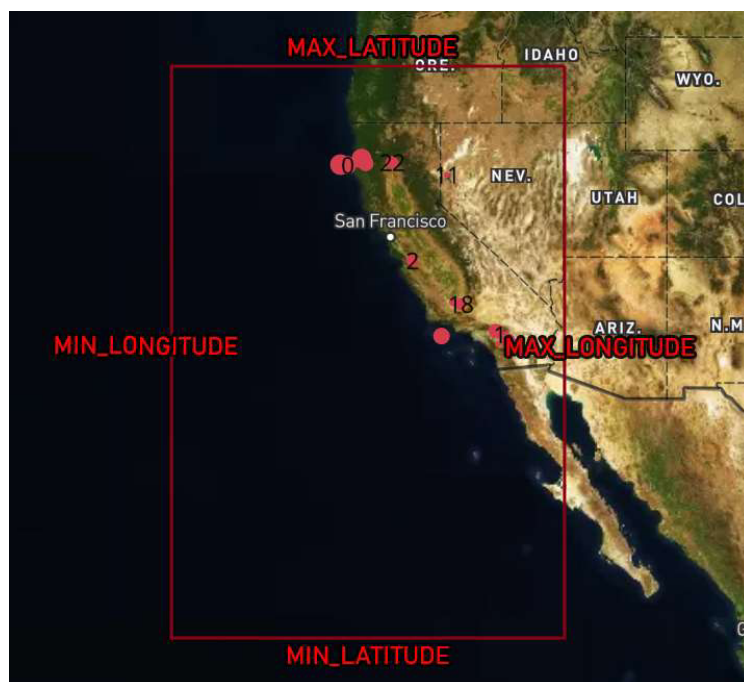


Рис. 5.10 Вибір області для дослідження

Також задаємо, якщо необхідно обмеження по магнітуді – мінімальна та максимальна магнітуди поштовхів, кожне значення вимірюється у шкалі від 0 до 10 та глибину – максимальну та мінімальну, глибина вимірюється у км.

В результаті отримуємо вибірку землетрусів. Вибірка отримується у форматі JSON.

```
{
  "type": "FeatureCollection",
  "metadata": {
    "generated": 1671385904000,
    "url": "https://earthquake.usgs.gov/fdsnws/event/1/query.geojson?starttime=2022-12-14%2000:00:00&endtime=2022-12-18%2000:00:00&maxlatitude=44&minlatitude=21&maxlongitude=246&minlongitude=227&minmagnitude=0&maxmagnitude=9.5&mindepth=15&maxdepth=31&eventtype=earthquake&orderby=time-asc",
    "title": "USGS Earthquakes",
    "status": 200,
    "api": "1.13.6",
    "count": 35,
    "features": [
      {
        "type": "Feature",
        "properties": {
          "mag": 1.1,
          "place": "24 km SW of Empire, Nevada",
          "time": 1670983486395,
          "updated": 1671145426016,
          "tz": null,
          "url": "https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eventpage/nn00853491",
          "detail": "https://earthquake.usgs.gov/fdsnws/event/1/query?eventid=nn00853491&format=geojson",
          "felt": null,
          "cdi": null,
          "mmi": null,
          "alert": null,
          "status": "reviewed",
          "tsunami": 0,
          "sig": 19,
          "net": "nn",
          "code": "00853491",
          "ids": "nn00853491",
          "sources": "nn",
          "types": "origin,phase",
          "data": {
            "nst": 4,
            "dmin": 0.299,
            "rms": 0.0685,
            "gap": 302.43,
            "magType": "ml",
            "type": "earthquake",
            "title": "M 1.1 - 24 km SW of Empire, Nevada",
            "geometry": {
              "type": "Point",
              "coordinates": [-119.5753, 40.4444, 19.7]
            },
            "id": "nn00853491"
          }
        },
        "type": "Feature",
        "properties": {
          "mag": 1.1,
          "place": "24 km SW of Empire, Nevada",
          "time": 1670983529795,
          "updated": 1671145801684,
          "tz": null,
          "url": "https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/eventpage/nn00853492",
          "detail": "https://earthquake.usgs.gov/fdsnws/event/1/query?eventid=nn00853492&format=geojson",
          "felt": null,
          "cdi": null,
          "mmi": null,
          "alert": null,
          "status": "reviewed",
          "tsunami": 0,
          "sig": 19,
          "net": "nn",
          "code": "00853492",
          "ids": "nn00853492",
          "sources": "nn",
          "types": "origin,phase",
          "data": {
            "nst": 5,
            "dmin": 0.3,
            "rms": 0.0312,
            "gap": 302.44,
            "magType": "ml",
            "type": "earthquake",
            "title": "M 1.1 - 24 km SW of Empire, Nevada",
            "geometry": {
              "type": "Point",
              "coordinates": [-119.5689, 40.4424, 19.5]
            },
            "id": "nn00853492"
          }
        }
      ]
    }
  }
}
```

Рис.5.11 Приклад вибірки даних про поштовхи

Для наочного зображення поштовхів у програмі використовуються карти марбох. Карти Марбох відносяться до бібліотеки з відкритим кодом Марбох GL JS, яка інтегрована в Plotly.py. Для роботи з картами необхідно отримати Марбох Access Token. Цей токен вказується через функцію налаштування `px.set_mapbox_access_token()`. Стиль обраної у програмі карти - "satellite-streets".

Відразу після задання параметрів вибірки ми отримуємо зображення поштовхів на карті (Рис.5.12.).

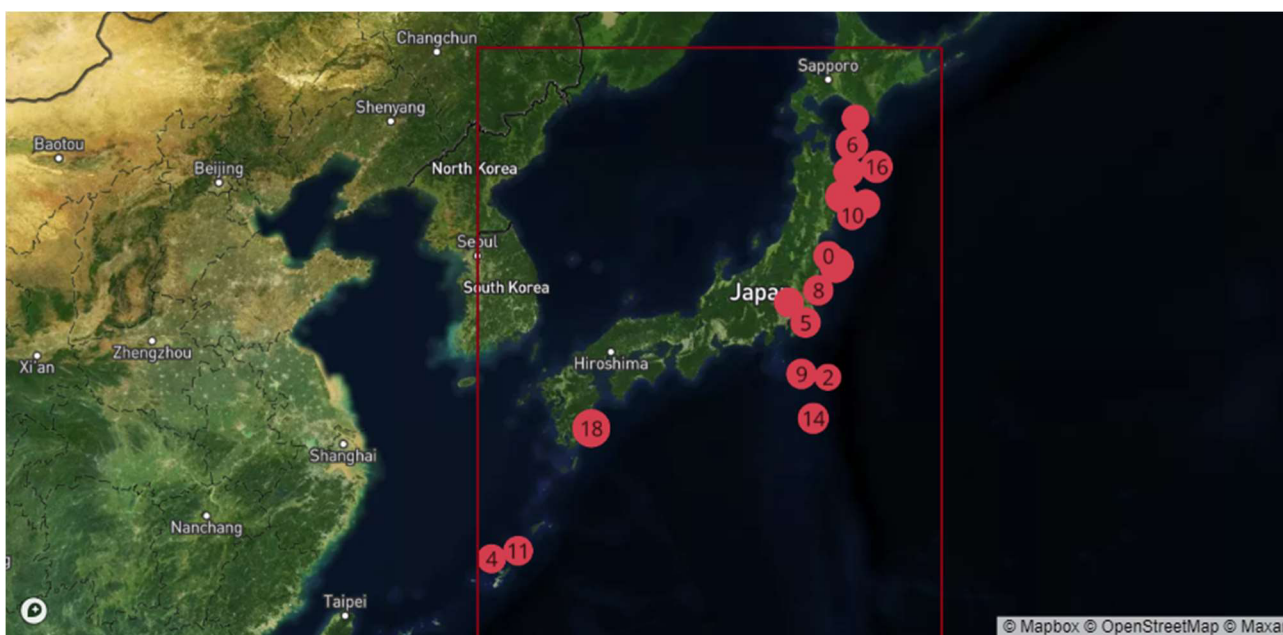


Рис. 5.12 Зображення поштовхів на карті

Також у програмі реалізовано можливість побудови 3D карти – деталізований рельєфний варіант, який моделює поверхню земної кулі.

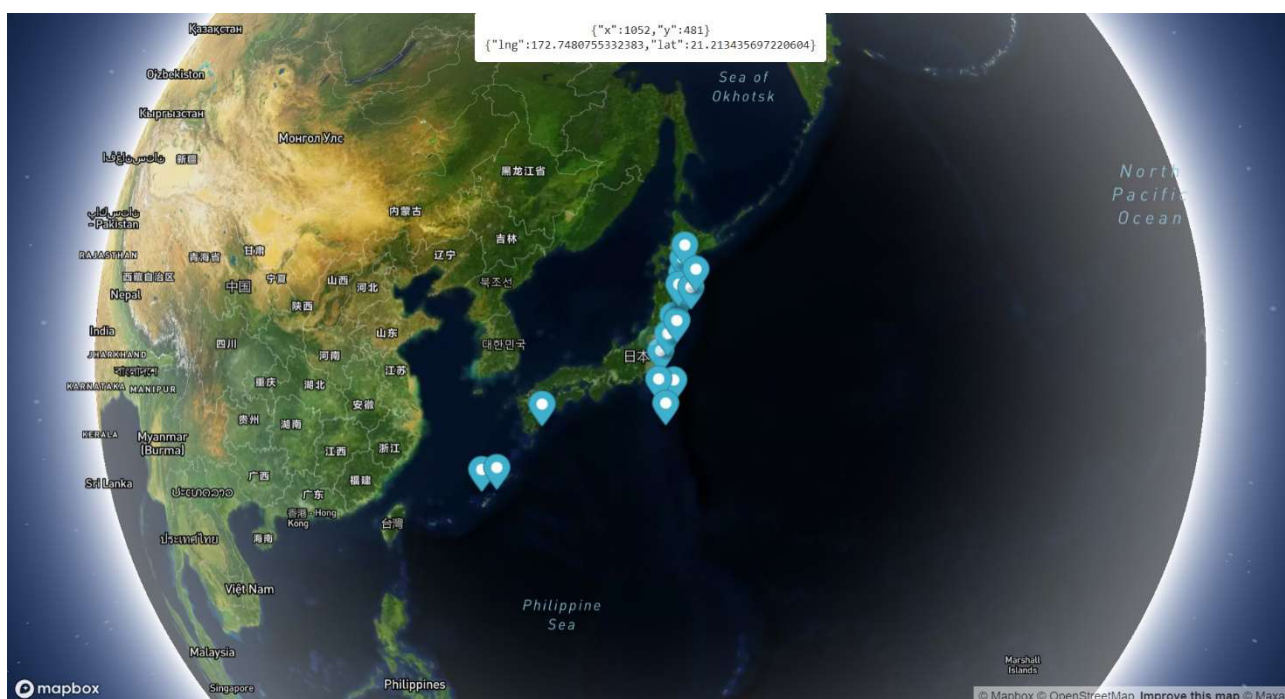


Рис.5.13 Приклад побудови карти

Натиснувши на кнопку “Рельєф” ми отримуємо обрану нами послідовність поштовхів із отриманої вибірки на глобусі. Реалізовано

масштабування – прокручуючи колесо мишки можна збільшувати масштаб карти отримуючи досить велику точність даних.



Рис. 5.14. Рельєф

Наступний модуль – ідентифікація локалізованих солітоноподібних збурень. Для виділення траєкторій у програмі необхідно задати наступні параметри: параметр випуклості послідовності швидкостей, що будується для відповідної серії поштовхів, обмеження на відстань між сусідніми поштовхами, параметр спадання чи зростання швидкостей, один чи декілька стартових вузлів. Відповідна сторінка для задання параметрів зображена на Рис.5.15. Також доступна функція 3D карти, де можна краще дослідити траєкторії відокремлених хвиль. На 3D карті будуються проекції відокремлених хвиль на поверхню землі. Приклад побудови таких проекції можна побачити на Рис.5.15.

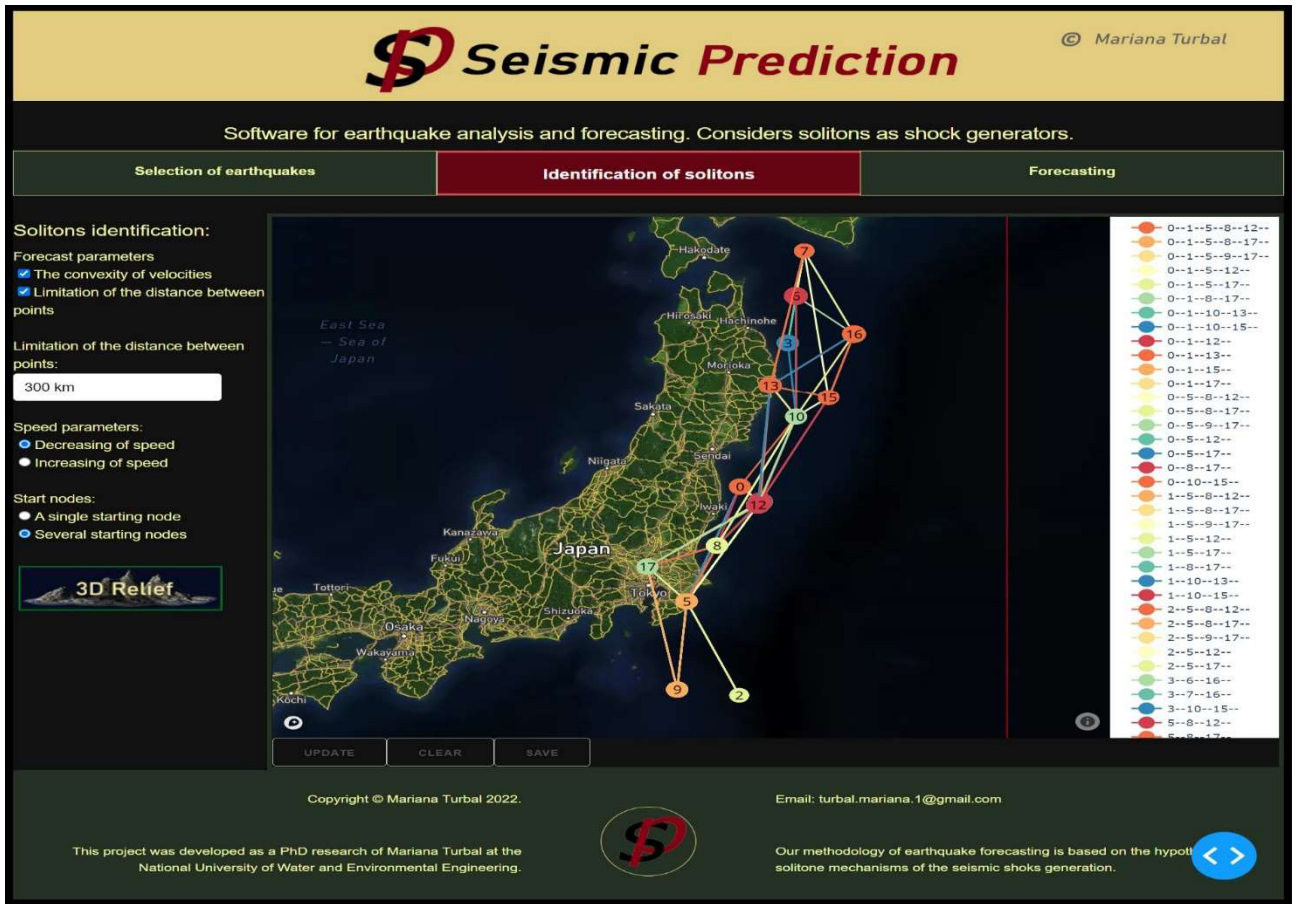


Рис. 5.15 Задання параметрів виділення підпоследовностей



Рис. 5.16 Відображення рель'єфу



Рис. 5.17 Приклад проєкції траєкторій відокремлених хвиль на поверхню землі.

Третій модуль – модуль прогнозування. На основі запропонованих у роботі алгоритмах в програмі реалізовано два типи прогнозування – метод прогнозування, що базується на використанні спіральних кривих та пірамідальний метод. Для того, щоб побудувати прогноз для відповідної вибірки необхідно обрати одну з двох кнопок. Також необхідно задати час прогнозу. Час задається в годинах.

Selection of earthquakes	Identification of solitons	Forecasting
The time interval for the forecast: <input data-bbox="512 1547 719 1592" type="text" value="24"/>	<input data-bbox="762 1547 1091 1592" type="button" value="FORECAST BASED ON THE SPIRAL CURVE"/>	<input data-bbox="1134 1547 1399 1592" type="button" value="PYRAMIDAL FORECAST METHOD"/>

Рис.5.17 Деталізація параметрів

Сторінка побудови прогнозу зображена на рисунку 5.18.

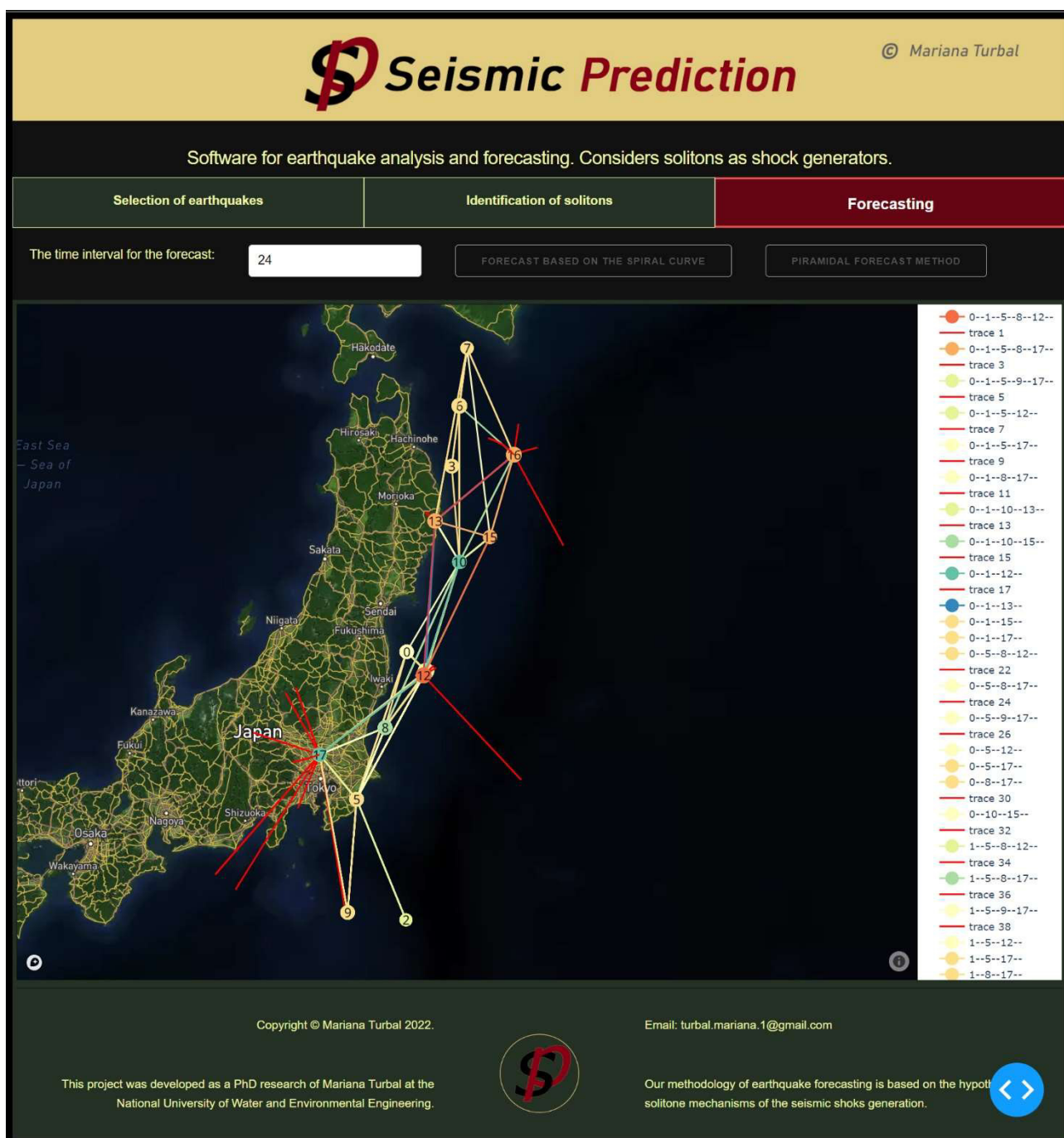


Рис. 5.18 Приклад прогнозу

## Висновки до п'ятого розділу

1. Вперше запропоновано використання у існуючих програмно-апаратних комплексах сейсмічного та хвильового моніторингу вдосконалених модулів для аналізу сейсмічних процесів на предмет можливості ідентифікації траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності, що відрізняються можливістю побудови прогнозів траєкторій відповідних локалізованих хвиль.

2. У відповідності з архітектурою програмної реалізації, що пропонується, відповідні модулі можуть існувати як частина існуючих систем чи як окремі додатки. А тому в якості прикладів розроблено дві програмні реалізації—десктопний додаток та WEB-додаток Seismic Prediction, що відрізняється наявністю трьох основних модулів: модуль вибору даних, модуль ідентифікації локалізованих солітоноподібних збурень, які можуть бути генераторами сейсмічних поштовхів та модуль прогнозування.

3. Комп'ютерні експерименти, що проводились на основі вказаного програмного забезпечення підтвердили ефективність запропонованих алгоритмів прогнозування сейсмічних процесів в межах солітонного підходу. Зокрема, в якості прикладу, було розглянуто вхідні дані стосовно сейсмічного процесу в районі префектури Фукусіма (2011 р.) та отримано підтвердження місця сейсмічного поштовху з точністю до 10 км. Аналогічні результати отримані при дослідженні сейсмічних процесів в сейсмоактивних областях планети, зокрема, в районах о. Пасхи, Чилі, о. Суматра та ін.

4. Важливим фактором досліджень є визначення структури вхідних даних, зокрема, глибини сейсмічних поштовхів—визначення глибин на рівні, зокрема, поверхні Мохоровичича при побудові ефективних прогнозів є ще одним підтвердженням ефективності солітонного підходу. Адже, як показали теоретичні дослідження, солітоноподібні хвилі часто виникають в областях, де різко змінюється густина середовища.



## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальне наукове завдання, яке полягає у вдосконаленні алгоритмічного забезпечення програмно-апаратних комплексів сейсмічного моніторингу шляхом розробки нових підходів до інтелектуального аналізу даних та прогнозування в умовах малих виборок з використанням моделей сейсмічних процесів, що враховують локалізовані солітоноподібні збурення. У результаті виконання роботи:

1. В межах «солітонних» уявлень про механізми виникнення окремих сейсмічних поштовхів удосконалено математичну модель сейсмічного процесу, що враховує локалізовані солітоноподібні збурення в областях сейсмічної активності шляхом використання вдосконаленої процедури прогнозування окремих локалізованих хвиль на основі серій сейсмічних поштовхів. Це дозволило реалізувати низку нових алгоритмів ідентифікації траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень, що відрізняються врахуванням специфіки поведінки локалізованих солітоноподібних збурень при їх русі у областях неоднорідного середовища з анізотропією пружних властивостей а також запропонувати вдосконалення методу сейсмічного районування шляхом врахуванням ідентифікованих траєкторій локалізованих солітоноподібних збурень та відповідно, корекції ймовірності сейсмічного поштовху.

2. Запропоновано швидкий алгоритм знаходження прогнозного значення на основі інтерполяційних многочленів довільного степеня, який відрізняється відсутністю процедури обрахунку параметрів многочлена. На основі цього алгоритму вперше запропоновано метод вибору найкращого інтерполяційного многочлена на основі певних евристик, пов'язаних з тенденцією до збіжності прогнозних значень, побудованих на основі інтерполяційних многочленів. В роботі показано, що відносна похибка при використанні довільних многочленів для вибраних тестових функцій досягала більше 50%, при цьому екстраполяція на основі усередненого поліноміального прогнозу давала порядку 5%. Такий алгоритм дозволяє суттєво підвищити

можливості застосування многочленів в задачах прогнозування та створення програмного забезпечення з автоматизованим вибором степеня многочленів для побудови прогнозів.

3. Вперше розроблено пірамідальний алгоритм прогнозування на основі малих виборок даних, в основі якого покладена концепція знаходження прогнозного значення без прямого використання будь-яких конкретних класів екстраполяційних функцій та суттєво використовується максимальна кількість інформації, яка зосереджена у розділених різницях спеціального виду. Досліджено властивості запропонованого алгоритму, зокрема:

- Виявлено, що прогноз, побудований на основі відповідного рядка таблиці розділених різниць, номер якого визначається у відповідності до спеціальної процедури, еквівалентний побудові прогнозу на основі кубічного тренду чи параболічного тренду (для попереднього рядка таблиці), що дозволило суттєво вдосконалити саму процедуру вибору оптимального рядка таблиці та відповідний критерій.

- Встановлено, що розроблений метод будує прогнозне значення, яке співпадає з центром інтервалу невизначеності, що будується у відповідності до спеціальної процедури, що дало можливість сформулювати саму формальну концепцію пірамідального прогнозу як знаходження центру інтервалу невизначеності, який будується з максимальним використанням інформації про можливу поведінку досліджуваного процесу.

Запропоновано модифікацію базового пірамідального алгоритму, яка відрізняється застосуванням в якості критерію оптимального вибору рядка інформацію про досягнення локального екстремуму наприкінці інтервалу дослідження. Проведені чисельні дослідження такої модифікації, які показали її більшу ефективність на 25-30% у порівнянні з базовим пірамідальним алгоритмом при її застосуванні до даних, що містять випадкову складову .

4. Вперше запропоновано поняття ML-похідних, побудована їх таблиця для відомих аналітичних функцій та запропоновано використання їх різницевих аналогів в межах пірамідального підходу. Знайдено відповідний

критерій вибору оптимального рядка таблиці розділених різниць, який включає в себе розв'язок диференціального рівняння з запізненням. Проведені чисельні експерименти показали ефективність даної методики, однак на тестових вибірках, що використовувались, перевага ML-модифікації перед модифікованим пірамідальним методом виявилась незначною (в межах 5-10%), що не зменшує важливість такого підходу та перспектив подальших досліджень даної модифікації пірамідального алгоритму.

5. Отримали подальший розвиток методи розробки архітектури модулів прогнозування та аналізу даних у програмно-апаратних комплексах сейсмічного та хвильового моніторингу з врахуванням існування локалізованих солітоноподібних збурень в областях сейсмічної активності та специфіки їх траєкторій. Відповідне програмне забезпечення розроблене з використанням даних USGS (геологічної служби США) та вдосконалених алгоритмів прогнозування в часі областей локалізації солітоноподібних збурень.

Комп'ютерні експерименти, що проводились на основі вказаного програмного забезпечення, підтвердили ефективність запропонованих алгоритмів прогнозування сейсмічних процесів в межах солітонного підходу. Зокрема, в якості прикладу, було розглянуто вхідні дані для сейсмічного процесу в районі префектури Фукусіма, Японія та отримано підтвердження місця сейсмічного поштовху з точністю до 10 км. Аналогічні результати отримані при дослідженні сейсмічних процесів в сейсмоактивних областях планети, зокрема, в районах о. Пасхи, Чилі, о. Суматра та ін.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

- [1] Kanamori H. Earthquake Prediction: An Overview. *International Handbook of earthquake and Engineering Seismology* 81B. 2003. P. 1205-1216.
- [2] Helmstetter A., Sornette D. Foreshocks and Earthquakes Predictability. *CERN records*. 2009. 20 p.
- [3] Jordan T.H., Jones L.M. Operational earthquake forecasting: some thoughts on why and how. *Seismological Research Letters*. 2010. 81(4). DOI:10.1785/gssrl.81.4.571
- [4] Papadimitriou P. Identification of seismic precursors before large earthquakes: Decelerating and accelerating seismic patterns. *Journal of Geophysical Research* 2008. 113. B04306. 20 p.
- [5] Kanamori H. The nature of seismicity patterns before large earthquakes. Earthquake Prediction: An International Review. *AGU Monograph. AGU, Washington, D.C.* 1981. pp. 1–19.
- [6] Mogi K. Seismicity in western Japan and long term earthquake forecasting, in Earthquake Prediction: An International Review. *Maurice Ewing. Ser.* 1981., vol. 4, edited by D. W. Simpson and P. G. Richards. pp. 43–51.
- [7] Lippiello E., Marzocchi W., de Arcangelis L., Godano, C. Spatial organization of foreshocks as a tool to forecast large earthquakes. *Scientific Reports*. 2012. 2, 846. doi:10.1038/srep00846.
- [8] Kato A., Obara K., Igarashi T., Tsuruoka H., Nakagawa S., Hirata N. Propagation of Slow Slip Leading Up to the 2011 Mw 9.0 Tohoku-Oki Earthquake. *Science*. 2012.335. P.705–708.
- [9] Brodsky E.E. The spatial density of foreshocks. *Geophysical Research Letters* 2011. 38/10, L10305. doi:10.1029/2011GL047253.
- [10] Shearer P.M., Lin G. Evidence for Mogi doughnut behaviour in seismicity preceding small earthquakes in southern California. *Journal of Geophysical Research*. 2009. 114.

- [11] King G.C., Bowman D.D. The evolution of regional seismicity between 685 large earthquakes. *J. Geophys. Res.* 2003. 108.
- [12] Stein S., Geller R.J., Liu M. Why earthquake hazard maps often fail and what to do about it? *Tectonophysics*. 2012. 562–563. P. 1–25.
- [13] Parsons T., Geist E.L. Is there a basis for preferring characteristic earthquakes over a Gutenberg– Richter distribution in probabilistic earthquake forecasting. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2009. 99. p. 2012–2019.
- [14] Petersen M.D., Cao T., Campbell K.W., Frankel A.D. Time-independent and time-dependent seismic hazard assessment for the state of California: uniform California earthquake rupture forecast model. *Seismological Research Letters* . 2007. 78. doi:10.1785/gssrl.78.1.99
- [15] Mignan A., Tiampo K.F. Testing the Pattern Informatics index on synthetic seismicity catalogues based on the Non-Critical PAST. *Tectonophysics*. 2010. 483. P. 255–268.
- [16] Papazachos C.B. Minimum preshock magnitude in critical regions of accelerating seismic crustal deformation. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata* 2003. Vol. 44/2. P. 103-113
- [17] Mc Kernon C., Main I.G. Regional variations in the diffusion of triggered seismicity. *Journal of Geophysical Research* 110. 2005. (B5). B05S05
- [18] Huc M., Main I.G. Anomalous stress diffusion in earthquake triggering: Correlation length, time dependence, and directionality. *Journal of Geophysical Research*. 2003. 108 (B7).2324
- [19] Ben-Zion Y., Lyakhovsky V. Accelerated seismic release and related aspects of seismicity patterns on earthquake faults. *Pure and Applied Geophysics*. 2002. 159. P. 2385–2412.
- [20] Turcotte D.L., Newman W.I., Shcherbakov R., Micro and macroscopic models of rock fracture. *Geophysical Journal International*. 2003. 152. P. 718–728.

- [21] Mignan, A. Functional shape of the earthquake frequency-magnitude distribution and completeness magnitude. *J. Geophys. Res.* 2012 *117*, B08302. doi:10.1029/2012JB009347
- [22] Mignan, A., Di Giovambattista R. Relationship between accelerating seismicity and quiescence, two precursors to large earthquakes. *Geophysical Research Letters*. 2008.*35*, L15306. doi:10.1029/2008GL035024
- [23] Robertson M.C., Sammis C.G., Sahimi M., Martin A.J. Fractal analysis of three-dimensional spatial distributions of earthquakes with a percolation interpretation. *J. Geophys. Res.* 1995. 100. 609-620
- [24] Ouillon G., Castaing B., Sornette D. Hierarchical scaling of faulting. *J. Geophys. Res.* 1996. 101. P. 5477-5487.
- [25] Bakun W.H. Implications for prediction and hazard assessment from the 2004 Parkfield earthquake. *Nature* . 2005. 437. P. 969 – 974.
- [26] Порубов А.В. Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах ... дисс. докт. физ.мат. наук. СПб.: Гос. Технический университет, 2006.313с.
- [27] Кендзера О. В. Сейсмічна небезпека і захист від землетрусів (практичне впровадження розробок Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України) . *Вісник Національної академії наук України*. 2015. № 2. С. 44-57. Режим доступу: [http://nbuVol.govVol.ua/j-pdf/vnanu\\_2015\\_2\\_10.pdf](http://nbuVol.govVol.ua/j-pdf/vnanu_2015_2_10.pdf)
- [28] Richter E.F. *Elementary Seismology*. W.H. Freeman, San Francisco. 1958. 768 p.
- [29] Ogata Y. Statistical Models for Earthquake Occurrences. *Journal of the American Statistical Association*. 1998. 83: 401.
- [30] Utsu T. Representation and analysis of the earthquake size distribution: a historical review and some new approaches. *Pure Appl. Geophys.* 1999. 155: 509–35.
- [31] Lomnitz C. , Nava F.A. The Predictive Value of Seismic Gaps. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1983.*73*: 1815–24.

- [32] Vere–Jones D. Some models and procedures for space–time point processes. *Environ. Ecol. Stat.* 2008. P.1007–1086.
- [33] Vere–Jones D. , Ben–Zion Y., Ziga R. Statistical Seismology . *Pure Appl. Geophys.* 2005.Vol.162. P. 1023–1026.
- [34] Kendall D. G. Stochastic processes and population growth. *Journal of the Royal Statistical Society.* 1949. Ser. B, 11.–P. 230–264.
- [35] Vikulin A.V., Melekestsev I.V., Dinara A.R., Ivanchin A.G., Vodinchar G.M., Dolgaya A.A., Gusakov V.K. Information computational system for modeling of seismic and volcanic processes as a foundation of research on wave geodynamic phenomena. *Computational Technologies* 2012.17 (3). P. 34–54
- [36] Vikulin A.V., Ivanchin A. G. A model of inertial earthquake’s source. L. P. Zonenshain memorial conference on plate tectonics: GEOMAR.1993.
- [37] Kuznetsov I.V., Keilis-Borok V.I. The interrelation of earthquakes of the Pacific seismic belt. *Earth Science Sections.* 1997.355 (6). P. 869–873.
- [38] Kasahara K. Earthquake fault studies in Japan. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 1973. 274 (1239). P. 287–296.  
<https://doi.org/10.1098/rsta.1973.0055>.
- [39] Mogi K. Migration of seismic activity. *Bulletin of the Earthquake Research Institute.* 1968. 46, 53–74.
- [40] Isacks B., Oliver J., Sykes L.R. Seismology and the new global tectonics. *Journal of Geophysical Research.* 1968. 73 (18),5855–5899.  
<https://doi.org/10.1029/JB073i018p05855>.
- [41] Nikolaevsky V.N. Mechanics of geomaterials and earthquakes. In: Science and technics results. *Mechanics of deformed solid body.* 1983.Vol. 15. p. 149–230
- [42] Nikolaevsky V.N., Ramazanov T.K. Theory of fast tectonic waves. *Applied Mathematics and Mechanics* 1985. 49 (3). P. 462–469

- [43] Ida Y. Slow-moving deformation pulses along tectonic faults. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1974. 9 (4), 328–337. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(74\)90060-0](https://doi.org/10.1016/0031-9201(74)90060-0).
- [44] Bella F., Biagi P.F., Caputo M., Della Monica G., Ermini A., Manjgaladze P., Sgrigna V., Zilpimian D. Very slowmoving crustal strain disturbances. *Tectonophysics*. 1990. 179 (1–2), 131–139. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(90\)90362-C](https://doi.org/10.1016/0040-1951(90)90362-C).
- [45] Nikolaevsky V.N. Mathematical modeling of solitary deformation and seismic waves. *Trasactions AN*. 1995. 341 (3), P.403–405 .
- [46] Nikolaevsky V.N. Geomechanics and Fluid Dynamics. Nedra. 1996. 447 p.
- [47] Bird P. An updated digital model of plate boundaries. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 2003. 4 (3), 1027. <https://doi.org/10.1029/2001GC000252>.
- [48] Kreemer C., Blewitt G., Klein E.C. A geodetic plate motion and global strain rate model. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2014. 15 (10), 3849–3889. <https://doi.org/10.1002/2014GC005407>.
- [49] Bott M.H.P., Dean D.S. Stress diffusion from plate boundaries. *Nature*. 1973. 243 (5406), 339–341. <https://doi.org/10.1038/243339a0>.
- [50] Anderson D.L. Accelerated plate tectonics. *Science*. 1975. 187 (4181), 1077–1079. <https://doi.org/10.1126/science.187.4181.1077>.
- [51] Yoshida A. Migration of seismic activity along intraplate seismic belts in the Japanese islands. *Tectonophysics*. 1988. 145 (1–2), 87–99. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(88\)90318-6](https://doi.org/10.1016/0040-1951(88)90318-6).
- [52] Molchanov O.A., Uyeda S. Upward migration of earthquake hypocenters in Japan, Kurile–Kamchatka and Sunda subduction zones. *Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C* . 2009. 34 (6–7), 423–430. <https://doi.org/10.1016/j.pce.2008.09.011>.



- [53] Rice J.R. The mechanics of earthquake rupture. *A.M. Dziewonski, E. Boschi (Eds.), Physics of the Earth's Interior. Italian Physical Society.* 1980. p. 555–649.
- [54] Lehner F.K., Li V.C., Rice J.R. Stress diffusion along rupturing plate boundaries. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 1981. 86 (B7). P. 6155–6169. <https://doi.org/10.1029/JB086iB07p06155>.
- [55] Liu M., Stein S., Wang H. 2000 years of migrating earthquakes in North China: how earthquakes in midcontinents differ from those at plate boundaries. *Lithosphere* 2011. 3 (2). P. 128–132. <https://doi.org/10.1130/L129.1>.
- [56] Takahashi K. Seno T. Diffusion of crustal deformation from disturbances arising at plate boundaries – a case of the detachment beneath the Izu Peninsula, central Honshu, Japan. *Earth, Planets and Space.* 2005. 57 (10), P. 935–941. <https://doi.org/10.1186/BF03351873>.
- [57] Albarello D., Bonafede M. Stress diffusion across laterally heterogeneous plates. *Tectonophysics.* 1990. 179 (1–2), P. 121–130. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(90\)90361-B](https://doi.org/10.1016/0040-1951(90)90361-B).
- [58] Birger B.I. Propagation of stresses in the Earth's lithosphere. *Fizika Zemli.* 1989. Vol. 12, P. 3–18.
- [59] Savage J.C. A theory of creep waves propagating along a transform fault. *Journal of Geophysical Research.* 1971. 76 (8). P. 1954–1966. <https://doi.org/10.1029/JB076i008p01954>.
- [60] Malin P.E., Alvarez M.G. Stress diffusion along the San Andreas fault at Parkfield, California. *Science.* 1992. 256 (5059), P. 1005–1007. <https://doi.org/10.1126/science.256.5059.1005>.
- [61] Bella F., Biagi P.F., Caputo M., Della Monica G., Ermini A., Manjgaladze P., Sgrigna V., Zilpimian D., Very slowmoving crustal strain disturbances. *Tectonophysics.* 1990. 179 (1–2). P. 131–139. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(90\)90362-C](https://doi.org/10.1016/0040-1951(90)90362-C).
- [62] Scott A.C. *The Nonlinear Universe. Chaos, Emergence, Life.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York. 2007. 365 p.

- [63] Gershenzon N.I., Bambakidis G., Hauser E., Ghosh A., Greager K.C. Episodic tremors and slip in Cascadia in the framework of the Frenkel-Kontorova model. *Geophysical Research Letters*. 2011. 38 (1), L01309. <https://doi.org/10.1029/2010GL045225>.
- [64] Gershenzon N.I., Bambakidis G. Model of deep nonvolcanic tremor part II: Episodic tremor and slip. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2015. 105 (2A), 816–830. <https://doi.org/10.1785/0120140225>.
- [65] Быков В.Г. Предсказание и наблюдение деформационных волн Земли. *Геодинамика и тектонофизика*. 2018;9(3):721-754. <https://doi.org/10.5800/GT-2018-9-3-0369>
- [66] Peyrard M., Kruskal M.D. Kink dynamics in the highly discrete sine-Gordon system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1984. 14 (1), P. 88–102. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90006-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90006-X).
- [67] Makarov P.V., Peryshkin A.Y. Slow motions as inelastic strain autowaves in ductile and brittle media. *Physical Mesomechanics*. 2017. 20 (2). P. 209–221. <https://doi.org/10.1134/S1029959917020114>.
- [68] Sanders C.O. Interaction of the San Jacinto and San Andreas fault zones, Southern California: triggered earthquake migration and coupled recurrence intervals. *Science*. 2017. 260 (5110). P. 973–976. <https://doi.org/10.1126/science.260.5110.973>.
- [69] Blot C. 1981. Earthquakes at depth beneath volcanoes, forerunners of their activities. Application to White Island, New Zealand. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*. 1981. 9 (4), 277–291. [https://doi.org/10.1016/0377-0273\(81\)90040-8](https://doi.org/10.1016/0377-0273(81)90040-8).
- [70] Jure Žalohar The omega theory. A New Physics of Earthquakes. 1-st edition. Elsevier. 2018. 558 p.
- [71] Bomba A., Turbal Y., Turbal M. Method for studying the multi-solitone solutions of the Korteweg de-Vries type equations. *Journal of difference equation*. Vol. 2015. P.1-10..doi 10.1155/2015/703039

- [72] Turbal Y. The trajectories of self-reinforcing solitary wave in the gas disc of galaxies. Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic.2010. P.112–118.
- [73] Turbal Y. ,Turbal M., Bomba A., Radoveniuk O. Method of Earthquake Prediction Based on the Soliton Mechanisms of Some Shocks. *Journal of Environmental Science and Engineering B*. № 3. 2014. P. 151-155.
- [74] Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Sokh A. T-transformation method for studying the multi-solitone solutions of the Kortevveg-de Vries type equations. *Journal of Mathematics and System Science*. № 7 . 2015. P. 279–285.
- [75] Бомба А.Я., Турбал Ю.В. Дослідження нелінійних ефектів взаємодії відокремлених хвиль деформації з областями змінної густини в анізотропному пружному тілі. *Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. Вип.18. С.86–91.
- [76] Бомба А.Я., Турбал Ю.В., Радовенюк О.В., Турбал М.Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання сейсмічних процесів на основі солітонного підходу. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. №2/5(22). 2015. С.26-30.
- [77] Бомба А.Я., Рябенко О.А., Турбал Ю.В. Модифікація Т-представлень для знаходження бризерних розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Вріза. *Вісник НУВГП*. 2014. №2. С.99-106.
- [78] Бомба А.Я., Турбал Ю.В. Методы анализа данных и прогнозирование траекторий уединенных волн . *Проблемы управления и информатики*. 2015. №5. С.34-43.
- [79] Бомба А.Я., Турбал Ю.В. Прогнозирование траекторий уединенных волн деформации в анизотропных упругих телах. *Проблемы управления и информатики*. 2014. №3. С.12-22.
- [80] Бомба А.Я., Турбал Ю.В. Метод дослідження багатосолітонних розв'язків рівнянь типу Кортевега-де Вріза на основі Т-представлень. *Вісник ТНТУ*. 2015. №1. С.112-119 .

- [81] Абловиц М., Сегюр Х. Солитоны и метод обратной задачи . Мир. 1987. 479 с.
- [82] Samsonov A.M. Strain solitons in solids and how to construct them. *Chapman & Hall/CRC*. 2001.
- [83] Christov C.I., Velarde M.G .Dissipative solitons. *Physica D*. 1995. V. 86. P. 323–347.
- [84] Collet B., Pouget J. Nonlinear dynamics of localized modes in elastic thin plates. Proceedings of the 2nd European Oscillation Conference, Prague, September 9–13. 1996. P. 113–118.
- [85] Crighton D.G. Applications of KdV. *Acta Applicandae Mathematicae*. 1995. V. 39. P. 39–67.
- [86] Elmer F.J. Nonlinear dynamics of dry friction. *J. Phys. A: Math. Gen*. 1997. Vol. 30. P. 6057–6063.
- [87] Engelbrecht J. Nonlinear wave dynamics. Complexity and simplicity Kluwer. Acad. Publ. Dordrecht. 1997.
- [88] Engelbrecht J., Berezovski, A., Salupere A. Nonlinear wave processes of deformation in solids. Pitman. Boston. 1983.
- [89] Engelbrecht J., Braun M. Nonlinear waves in nonlocal media. *Appl. Mech. Rev.* 1998. Vol. 51. No 8. P. 475–488.
- [90] Engelbrecht J., Khamidullin Y. On the possible amplification of nonlinear seismic waves . *Phys. Earth Planet. Inter.* 1988. V. 50. P. 39–45.
- [91] Engelbrecht J. One–Dimensional Deformation waves in Nonlinear Viscoelastic Media. *Wave Motion*. 1979. Vol. 1. P. 65–74.
- [92] Engelbrecht J., Cermelli P., Pastrune F. Wave hierarchy in microstructured solids. *Geometry, Continua and Microstructure*. Ed. Maugin G.A. Herman Publ. Paris. 1999. P. 99–111.
- [93] Newell A.C. The history of the soliton. *Trans. ASME. Journ. Appl. Mech.* 50. 1983. №46. P. 1127– 1138.
- [94] Jeffrey A., Engelbrecht J. *Nonlinear Waves in Solids*. Springer Verlag. Wien. 1994.

- [95] Adomian G. The fifth-order Kortevég–de Vries equation. *Internet J. Math. and Math. Sci.* 1996. Vol. 19. No. 2 .C. 415.
- [96] Alvaro H. S., Gomez C.A. Exact solutions for a third-order KdV equation with variable coefficients and forcing term. *Mathematical problems in engineering.* 2009. Vol. 2009. P. 214–222.
- [97] Sachdev P.L. Nonlinear diffusive waves. Cambridge Univ. Press. 1987.
- [98] Asaraii A. Infinite series method for solving the improved modified KdV equation. *Studies in Mathematical Sciences.* 2012. Vol.4. No.2. P.25–31.
- [99] Bila N., Mansfield E., Clarkson P. Symmetry group analysis of the shallow water and semi-geostrophic equations . *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2006. V. 59. P. 95–123.
- [100] Collet B. Lattice approach for shear horizontal solitons in cubic crystal elastic plates. *Materials Science Forum.* 1993. V. 123–125. P. 417–426.
- [101] Dai H. H. Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney–Rivlin rod. *Acta Mech.* 1998. Vol. 127. P. 193–207.
- [102] Danilov V. G. Weak asymptotic method for the study of propagation and interaction of infinitely narrow  $\delta$ -solitons. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2003. No. 90. P. 1–27.
- [103] Doronin G.G., Larkin N,A. Well and ill-posed problems for the KdV and Kawahara equations . *Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.)* . 2008. Vol.26 1–2. P. 133–137.
- [104] El-Azab M. S. , El-Kalla I. L. Convergence of Adomain method for solving KDV–Burger equation. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST).* 2012. Vol. 4 No.5.
- [105] Elwaki S. A. , EL-Labany S. K., Zahran S. K., Sabry M. A.. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations. *Phys. Lett. A.* 299. 2002. P. 179–188.
- [106] Engelbrecht J., Maugin G.A. Deformation waves in thermoelastic media and the concept of internal variables. *Arch. Appl. Mech.* 1996. Vol. 66. P. 200–207.

- [107] Erbay S. Coupled modified Kadomtsev–Petviashvili equations in dispersive elastic media. *Intern. J. Nonl. Mech.* 1999. Vol.34. P. 289–297.
- [108] Erbay S., Erbay H.A. Nonlinear wave modulation in micropolar elastic media–I. longitudinal waves; II. Transverse waves. *Int. J. Engng. Sci.* 1991. Vol. 29. P. 859–868.
- [109] Erofeev V.I. , Potapov A.I. Longitudinal strain waves in non-linearly elastic media with couple stresses . *Int. J. Nonl. Mech.* 1993. Vol. 28. P. 483–488.
- [110] Erofeev V.I. Wave processes in Solids with microstructure. World Scientific. – Singapore. – 2003.
- [111] Evans D. J., Raslan K. R. The tanh function method for solving some important nonlinear partial differential equation. *Int. J. comput. Math.* 2005. P. 82– 89.
- [112] Fan E. Extended tanh–function method and its applications to nonlinear equations. *Phys. Lett. A.* 2000. P. 212–218.
- [113] Gao Y. T., Tian B.. Generalized hyperbolic–function method with computerized symbolic computation to construct the solitonic solutions to nonlinear equations of mathematical physics. *Comput. Phys. Commun.*2001. №133.C. 158–164.
- [114] Grekova E. Nonlinear constitutive equations of polar media consisting of rotating particles. *Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems* . Proc of the 24 Summer School . IMEP RAS. 1997. P. 249 – 255.
- [115] Gruttmann F., Stein E., Wriggers P. Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations. *Ing. Arch.* 1989. Vol. 59. P. 54 – 67.
- [116] Huda O. , Bakoda H.. Modified Adomain Decomposition Method for the Generalized Fifth Order KdV Equations. *American Journal of Computational Mathematics.* 2013. № 3. P. 53–58.
- [117] Jae–Myouhg K., Changbum C. New exact solutons to the kdv–burgers–kuramoto equation whith the exp–function method. *Abstract and Applied Analysis.* Vol. 2012. Article ID 892420.

- [118] Alzaidy J. F. Exact Traveling Wave Solutions of Nonlinear PDEs in Mathematical Physics. *Applied Mathematics* . 2012. № 3. P. 738–745.
- [119] Kim J.M., Chun C. New exact solutions to the Kdv–Burgers–Kuramoto equation with the exp–function method, *Abstract and Applied Analysis*. 2012. Volume 2012. Article ID 892420.
- [120] Ko K. , Kuehl H.H. Energy loss of a Korteweg– deVries solitary wave in a slowly varying medium. *Physics of Fluids*. 1980. Vol. 23. №4. P.834 – 836.
- [121] Kodama U., Ablowitz M.J.. Perturbation of solitons and solitary waves, *Stud. Appl. Math.* 64. 1981. №3. P.225 – 245.
- [122] *Parker D.F., Mayer A.* Dissipation of surface acoustic waves. *Nonlinear Waves and Dissipative Effects* /Eds. Fusco D. and Jeffrey A. Longman, London. – 1991. – P. 42–51.
- [123] Parker D.F. Nonlinear surface acoustic waves and waves on stratified Media . *Nonlinear Waves in Solids/ Eds. Jeffrey A., Engelbrecht J., Springer*. 1994. P. 289–348.
- [124] Parkes E.J., B.R. Duffy An automated tanh–function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations. *Computer Phys. Comm.* 1996. Vol. 98. P. 288–300.
- [125] Zhang P. New exact solutions to the generalized Zakharov equations and the complex coupled KdV equations . *Studies in Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 2. No. 1. P. 63–72.
- [126] Porubov A. V. , Maugin G.A. On the role of cubic nonlinearity in localization of nonlinear strain waves. *Proceedings of the 17 International Symposium on Nonlinear Acoustics*. Pennsylvania. AIP Conference Proc. VOL. 838, Melville, New York, 2006. P. 151 – 156.
- [127] Salas A.H. , Gomez C. A. Exact Solutions for a Third–Order KdV Equation with Variable Coefficients and Forcing Term. *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. Vol. 2009. Article ID 737928.

- [128] Samsonov A.M., Dreiden G.V., Porubov A.V., I.VOL. Semenova I.V., Sokurinskaya E.V. Theory and observation of strain solitons in solids . *Ioffe Institute Prize Winners '96*. 1997. P. 5–14.
- [129] Shateri M., Ganji D.D. Solitary wave solution for a time–fraction generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation by a new analytical technique. *International Journal of differential equations*. 2010. Vol.2010. Article ID 954674.
- [130] Weiss J., Tabor M., Camale G.. J. The Painleve property for partial differential equations. *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 522.
- [131] Колдунова А.А., Емельяненко Т. Г. Обзор методов и программных продуктов прогнозирования землетрясений *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. 2013. Т. 17. С. 59-70 [http://nbuv.gov.ua/UJRN/apatit\\_2013\\_17\\_10](http://nbuv.gov.ua/UJRN/apatit_2013_17_10).
- [132] Програмний комплекс SeismicPortal. URL : [www.seismicportal.eu](http://www.seismicportal.eu) (дата звернення : 27.11.2023)
- [133] Програмний комплекс WSG (Windows Seismic Grafer). URL : [www.семе.gsras.ru](http://www.семе.gsras.ru) (дата звернення : 27.11.2023)
- [134] Програмний комплекс HYPO71-91. URL : [www.eas.gatech.edu](http://www.eas.gatech.edu) (дата звернення : 27.11.2023)
- [135] Програмний комплекс SEISAN. URL : [seis.geus.net/software/seisan](http://seis.geus.net/software/seisan) (дата звернення : 27.11.2023)
- [136] Програмний комплекс Tesseral Technologies. URL : [www.tesseral-geo.com](http://www.tesseral-geo.com) (дата звернення : 27.11.2023)
- [137] Програмний комплекс CWP/SU. URL : [www.cwp.mines.edu](http://www.cwp.mines.edu) (дата звернення : 27.11.2023)
- [138] Програмний комплекс FreeUSP. URL : <http://freeusp.org> (дата звернення : 27.11.2023)
- [139] Програмний комплекс CPSeis. URL : <http://sourceforge.net> (дата звернення : 27.11.2023)



- [140] Програмний комплекс SPARC . URL : <http://freeusP.org> (дата звернення : 27.11.2023)
- [141] Програмний комплекс SEPlib. URL : <http://seP.stanford.edu> (дата звернення : 27.11.2023)
- [142] Програмний комплекс BotoSeis. URL : [http://sourceforge. Net](http://sourceforge.Net) (дата звернення : 27.11.2023)
- [143] Програмний комплекс GeBR. URL : [www.geb-rproject.com](http://www.geb-rproject.com) (дата звернення : 27.11.2023)
- [144] Програмний комплекс SeaSeis. URL : <http://seaseis.com> (дата звернення : 27.11.2023)
- [145] Програмний комплекс GPLib++. URL : <http://sourceforge.net> (дата звернення : 27.11.2023)
- [146] Програмний комплекс JavaSeis. URL : <http://sourceforge.net> (дата звернення : 27.11.2023)
- [147] Програмний комплекс Seismic Lab . URL : [www.ualberta.com](http://www.ualberta.com) (дата звернення : 27.11.2023)
- [148] Програмний комплекс CREWES. URL : [www.crewes.org](http://www.crewes.org)(дата звернення : 27.11.2023)
- [149] Програмний комплекс SW3D. URL : <http://www.stefanmertl.com/science/software/seismo> (дата звернення : 27.11.2023)
- [150] Програмний комплекс Seismon. URL : [www.seismic-handler.org](http://www.seismic-handler.org) (дата звернення : 27.11.2023)
- [151] Програмний комплекс Seismic\_Handler. URL : [www.csiro.au/](http://www.csiro.au/) (дата звернення : 27.11.2023)
- [152] Програмний комплекс Madagascar . URL : <http://reproducibility.org> (дата звернення : 27.11.2023)
- [153] Програмний комплекс Delivery . URL : <http://www.unr.edu> (дата звернення : 27.11.2023)

- [154] Програмный комплекс Jive3D. URL : <http://bullard.esc.cam.ac.uk/~hobro/Jive3D> (дата звернення : 27.11.2023)
- [155] Програмный комплекс WaveletExtractor. URL : [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com) (дата звернення : 27.11.2023)
- [156] Програмный комплекс SLIMpy. URL : <http://slim.eos.ubc.ca/SLIMpy> (дата звернення : 27.11.2023)
- [157] Програмный комплекс SEIZMO. URL : <http://epsc.wustl.edu/~ggeuler/codes/m/seizmo> (дата звернення : 27.11.2023)
- [158] Програмный комплекс GeoSeis. URL : <http://www.geoseis.tr.gg> (дата звернення : 27.11.2023)
- [159] Програмный комплекс Passeis. URL : [www.mines.edu](http://www.mines.edu) (дата звернення : 27.11.2023)
- [160] Програмный комплекс Mines JTK. URL : [www.mines.edu](http://www.mines.edu) (дата звернення : 27.11.2023)
- [161] Програмный комплекс kogeo. URL : [www.kogeo.de](http://www.kogeo.de) (дата звернення: 27.11.2023)
- [162] Програмный комплекс SIOSEIS. URL : <http://sioseis.ucsd.edu> (дата звернення : 27.11.2023)
- [163] Мандрикова О.В. , Полозов Ю. А. Автоматизированный способ обработки сигналов со сложной структурой. *Информационные технологии*. 2008. № 12. С. 15-19.
- [164] Vapnik V. Statistical Learning Theory. John Wiley and Sons. 1998. ISBN: 978-0-471-03003-4. P. 768.
- [165] Vapnik V. The nature of statistical learning theory. Springer. New York. 1995. ISBN: 0-387-98780-0.
- [166] Левина Е. А. ГИС для прогноза землетрясений и горных ударов: разработка и примеры применения в Байкальской рифтовой зоне и Норильском месторождении: автореф. дис. на соискание ученой степени канд. геол. минерал. наук . 2011.

- [167] Баранов С.В., Шебалин П.Н. Глобальная статистика афтершоков сильных землетрясений: независимость времен и магнитуд. *Вулканология и сейсмология*. 2019. №2. С. 67-76.
- [168] Algorithm M8 URL: <https://www.itpz-ran.ru/en/predictions/the-stabilised-predictions/> (дата звернення : 26.11.2023)
- [169] Чонг Као Динь Исследование и применение нейросетевых технологий в задаче прогнозирования землетрясений (на примере северо-западного района Вьетнама): автореф. дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.13.01 . 2012.
- [170] Kozak J. , J. Sileny . Seismic Events with Non–shear Component. *PAGEOPH*. 1985. 123:1–P. 15.
- [171] Beresnev I. A. Wen K.L., Yeh Y.T.. Seismological evidence for nonlinear elastic ground behavior during large earthquakes . *Soil dynamics and earthquake engineering*. 1995. V. 14. P.103–114.
- [172] Godano C., Oliveri F. Nonlinear seismic waves: a model of site effects. *Intern. J. Nonl. Mech.* 1999. Vol.34. P. 457–468.
- [173] Антонова Р. А., Петвиашвили В.И. О дрейфовых солитонах в мелкой вращающейся жидкости . *Письма в ЖЭТФ*. 1998.Т. 37. № 11. С. 545–548.
- [174] Чесноков А. А. Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости . *СибЖИМ*. 2008. Т. 11, №3. С. 135–146.
- [175] Морозов А. Г., Хоперсков А.В. Физика дисков . ВГУ. 2005. 423 с.
- [176] Котельникова А.С., Нікішов В.І., Срібнюк С.М. Взаємодія поверхневих поодиноких хвиль з підводними перешкодами . *Доповіді НАНУ*. 2012. №7. С.54–59.
- [177] Котельникова А.С. Взаємодія поверхневих поодиноких хвиль з топогра-фічними неоднорідностям: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук, : 01.02.05. Київ. 2013. 17 с.
- [178] Смирнов Ю.П., Горбацевич Ф.Ф., Никитин А.Н., Тюремнов В.А. Характеристики текстуры, структуры, анизотропии пород по разрезу

Кольской сверхглубокой скважины . *Вестник МГТУ*. 2007. том 10, №2. С.285–295

- [179] Егоркина Г.В. Природа анизотропии скоростей распространения упругих свойств в условиях Армении . *Прикладная геофизика*.1975.№ 78. С. 106–119
- [180] Порубов А.В. Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах: дисс. докт. физ.мат. Наук. СПб.: Гос. Технический университет. 2006. 313с.
- [181] Порубов А.В., Самсонов А.М. Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно–упругом стержне . *Письма в ЖТФ*. 1993. Т. 19. Вып. 12. С. 26–29.
- [182] Турбал Ю.В. Дослідження анізотропії пружних властивостей матеріалів з точки зору існування відокремлених хвиль типу  $\delta$ –солітонів . *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб.наук.праць /ред.кол.:Дзюба (відп.ред.)*. Д.: Вид–во ДНУ. 2012. Вип. 18. С. 115–123.
- [183] Турбал Ю.В. Про необхідні та достатні умови сумісності деяких систем нелінійних рівнянь . *Волинський математичний вісник*. 1999. №6. С. 135–138.
- [184] Волков Е. А. Замечания к приближению функций многочленами. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1967. Том 7, №6. С. 1374–1375
- [185] В. К. Дзядык О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси. *Изв. АН СССР. Сер. Матем.* том 22, выпуск 3. 1958. С. 337–354
- [186] Turbal Y., Bomba A., Sokh A., Radoveniuk O., Turbal M. Pyramidal method of small time series extrapolation. *International journal of computing science and mathematic*. 2019.Vol. 10(4). P. 122-130. doi: 10.1504/IJCSM.2019.104025.

- [187] Bomba A., Turbal Y. Data analysis method and problems of identification of trajectories of solitary waves. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 5. P. 34-43
- [188] Monroe J. I., Hatch H. W., Mahynski N. A., Shell M. S., Shen V. K., Extrapolation and interpolation strategies for efficiently estimating structural observables as a function of temperature and density. *J. Chem. Phys.* 2020.153. 144101.
- [189] Kostinsky A.S. On the principles of a spline extrapolation concerning geophysical data. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine* . 2014. N.2 . P. 111–117. doi:10.15407/dopovidi2014.02.111
- [190] Захаров А.А. В-сплайны и В-сплайновые поверхности. МГТУ им. Баумана. 2016.
- [191] Шалагинов А.В. Кубическая сплайн экстраполяция временных рядов. *УНХ "ИПСА" НТУУ "КПИ"*. Киев. 2011.
- [192] Bakas N. P. Numerical Solution for the Extrapolation . *Problem of Analytic Functions Research* . 2019. Vol. 2019. 6. P.1-10.
- [193] Makridakis S., Bakas N. Forecasting and uncertainty: a survey. *Risk and Decision Analysis*. 2016.Vol. 6(1) . P. 37–64. .
- [194] Demiris N., Lunn D., Sharples L.D. Survival extrapolation using the poly-Weibull model.. *Stat Methods Med Res*. 2015. Vol. 24(2) P. 287–301.
- [195] Zhan Z., Yang R., Xi Z. A Bayesian Inference based Model Interpolation and Extrapolation.. *SAE Int. J. Mater. Manf.* 2012. V.5.2 . P. 357-364.
- [196] Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Турбал М. Ю. Модифікація "пірамідального" методу екстраполяції часових рядів на основі  $\mu\lambda$  – похідних. *Вісник Національного технічного університету "ХПИ". Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях*. № 8. 2019. С. 28-33. ISSN 2222-0631.
- [197] Turbal Y., Bomba A., Sokh A., Radoveniuk O., Turbal M. Spatial generalization of the pyramidal data etrapolation. *Bulletin of Taras Shevchenko*

*National University of Kyi* Vol. Series Physics & Mathematics. 2017. Vol.2 . P. 146-151.

- [198] Turbal Y., Turbal M., A.A.Driwi, S. Al Shukri, On the equivalence of the forecast value construction in the “pyramidal” extrapolation method and cubic forecast. MCIT. 2020. P. 67–70. doi.org/10.31713/MCIT.2020.15
- [199] Wang L-Y., Lee W-C. One-step extrapolation of the prediction performance of a gene signature derived from a small study. *BMJ Open*. 2014. 5.
- [200] International Federation of Digital Seismograf Networks URL: <https://www.fdsn.org/>
- [201] SEED data format. URL: [http://www.iris.edu/manuals/SEEDManual\\_V2.4.pdf](http://www.iris.edu/manuals/SEEDManual_V2.4.pdf)
- [202] QuakeML. URL: <https://quake.ethz.ch/quakeml/>
- [203] FDSNStationXML URL: <http://www.fdsn.org/xml/station/>
- [204] Web Application Description Language (WADL) URL: <http://www.w3.org/Submission/wadl/>
- [205] Ю.В. Турбал Математичне моделювання процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень в суцільних середовищах : дис. ... доктора тех. наук : 01.05.02 . 2016. 376 с.
- [206] Офіційна статистика МОЗ України. URL: [www.pravda.com.ua/cdn/covid-19/cpa/](http://www.pravda.com.ua/cdn/covid-19/cpa/)
- [207] Microsoft Azure vs. Amazon Web Services: Cloud Comparison. URL: <https://www.business.com/articles/azure-vs-aws-cloud-comparison/>.
- [208] Milyan N., Martsenyuk V. On application of cloud platforms for implementation of decision-making algorithms. *Przetwarzanie, transmisja i bezpieczeństwo informacji*. 2018. Tom 2. P. 143-153. ISBN: 978-83-65182-92-0, ISBN: 978-83-65182-94-4 .
- [209] Mitchell T. Machine Learning. McGraw-Hill series in computer science. New York : McGraw-Hill. 1997. P. 414.
- [210] Pattern: Monolithic Architecture. URL: <http://microservices.io/patterns/monolithic.html>.

- [211] Pawlak Z. Rough sets. *International Journal of Information and Computer Sciences*. 1982. Vol. 11. P. 341–356.
- [212] Peter B., Yu B., Bühlmann P. Sparse boosting. *Journal of Machine Learning Research*. Vol. 7, 2006. P. 1001–1024. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/ICASSP.2009.4959911>.
- [213] Peter M. The NIST Definition of Cloud Computing URL: <https://csrc.nist.gov/publications/detail/sp/800-145/final>.
- [214] Rouse M. Google Cloud Platform (GCP). URL: <http://searchcloudcomputing.techtarget.com/definition/Google-Cloud-Platform>.
- [215] Rouse M. Microsoft Azure Machine Learning. URL: <https://searchcloudcomputing.techtarget.com/definition/Microsoft-Azure-Machine-Learning>.
- [216] Zhan Z., Yang R., Xi Z., et al. A Bayesian Inference based Model Interpolation and Extrapolation. *SAE Int. J. Mater. Manf.* 5.2 .2012. P. 357-364. doi:10.4271/2012-01-0223
- [217] Xu K., Zhang M., Li J., Du S. S., Kawarabayashi K., Jegelka S. How Neural Networks Extrapolate: From Feedforward to Graph Neural Networks, in: *Proceedings of the International Conference on Learning Representations ICLR, Vienna Austria (2021)* URL: <http://arXiv:2009.11848v5>
- [218] Monroe J. I., Hatch H. W., Mahynski N. A., Shell M. S., Shen V. K. Extrapolation and interpolation strategies for efficiently estimating structural observables as a function of temperature and density. *J. Chem. Phys.* 2020. 153 . 144101. doi:10.1063/5.0014282.
- [219] Mahynski N. A., Errington J. R., Shen V. K. Multivariable extrapolation of grand canonical free energy landscapes. *J. Chem. Phys.* 2017. 147 . 234111. doi:10.1063/1.5006906.
- [220] Bakas N. P., Numerical Solution for the Extrapolation *Problem of Analytic Functions Research* . 2019. Vol. 2019. doi:10.34133/2019/3903187

- [221] Coşkun T. Approximation of analytic functions of several variables by linear  $k$ -positive operators. *Turkish Journal of Mathematics* . 2017. 41 (2) 426–435. doi: 10.3906/mat-1512-96.
- [222] Mai-Duy N., Le T. T., Tien C. M., Ngo-Cong D., and Tran-Cong T. Compact approximation stencils based on integrated flat radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements* . 2017. P. 79–87. doi: 10.1016/j.enganabound.2016.11.002.
- [223] Makridakis S., Bakas N. Forecasting and uncertainty: a survey. *Risk and Decision Analysis* . 2016. 6/1. P. 37–64. doi: 10.3233/RDA-150114.
- [224] Negrin M. A., Nam J., Briggs A.H. Bayesian solutions for handling uncertainty in survival extrapolation. *Med Decis Making* . 2017. 37(4) . P. 367–76. doi: 10.1177/0272989X16650669.
- [225] Conn P.B., Johnson D.S., Boveng P.L. On extrapolating past the range of observed data when making statistical predictions in ecology. *PLoS One*. 2015. 10(10):e0141416. doi:10.1371/journal.pone.0141416
- [226] Demiris N., Lunn D., Sharples L.D. Survival extrapolation using the poly-Weibull model. *Stat Methods*. 2015. *Med Res* 24(2) . P.287–301. doi:10.1177/0962280211419645 .
- [227] Jackson C., Stevens J., Ren S. Extrapolating survival from randomized trials using external data: a review of methods. *Med Decis Making* 2017. 37(4) P. 377–390. doi:10.1177/0272989X16639900.
- [228] Vickers A. An Evaluation of Survival Curve Extrapolation Techniques Using Long-Term Observational Cancer Data. *Medical Decision Making* 2019. 39(8).P. 926–938. doi:10.1177/0272989X19875950
- [229] Патент 63026 Україна, МПК (2011.01) G01V 1/00. Спосіб прогнозування афтершоків [Текст]/Турбал Ю.В.; заявник та власник Турбал Юрій Васильович. №u201102262; заявл. 25.02.2011 ; опубл 26.09.2011 бюл. № 18.5 с.:іл
- [230] Припула М. М., Прикарпатський А. К., Вовк М. І. Про повну інтегровність та лінеаризацію нелінійного рівняння типу Бюргерса–



Кортевега–де Фріза .Математичні методи і фізико–механічні поля–  
№4,51–2008.С.108-115.

- [231] Рябенко А. А. Теоретичні основи і методи розрахунків білякритичних течій рідини з вільною поверхнею : дис. ... доктора тех. наук : 05.23.16 . 2003. 376 с.
- [232] Самойленко В.Г. Самойленко Ю.І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега –де Фріза зі змінними коефіцієнтами . *Укр. мат. журнал* .2008. №1.С.388–397.
- [233] Халилов Э.Н. Прогноз землетрясений: причины неудач и новая философия . *Transactions of the International Academy of Science H&E*. 2008. Vol.3. 2007/2008. SWB.Innsbruck. P.300–315.
- [234] Турбал Ю.В. Математична модель сейсмічного процесу, що враховує повільні відокремлені хвилі деформації. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2013. №4(81). С.88–93.
- [235] Турбал Ю.В. Математичне моделювання процесу руху солітона в анізотропному пружному тілі змінної густини . *Математичне та комп'ютерне моделювання*. 2013. № 12. С.55–62
- [236] Турбал Ю.В., Турбал М.Ю. Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає необхідні та достатні умови існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл. *Волинський математичний вісник*. №1. 2013. С.99–109.
- [237] Щербина С.В. Сейсмічний портал. URL: <http://seismo.kiev.ua>
- [238] Kharif С., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue waves in the ocean. In *Rogue Waves in the Ocean*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009; p. 1

## Додатки

### Додаток А. Список публікацій здобувача за темою дисертації

*Публікації у наукових виданнях, що індексуються у наукометричних базах Scopus, Web of Science:*

1. Turbal Y., Bomba A., Sokh A., Radoveniuk O., Turbal M. Pyramidal method of extrapolation for short time series. *International journal of computing science and mathematic.* 10(6). 2019. P. 122-130. <https://doi.org/10.1504/IJCSM.2019.104025>. **Scopus** (0.5/0.1 д.а.; авторський внесок–розробка алгоритму та чисельні експерименти).
2. Turbal Y., Sh likhta G., Turbal M., Turbal B. The polynomial forecasts improvement based on the algorithm of optimal polynomial degree selecting. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 5/4 (125). 2023. P. 34–42. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.289292>. **Scopus** (1/0.25 д.а.; авторський внесок–розробка загального алгоритму вибору многочлена оптимального степеня та обґрунтування умови застосування середнього арифметичного поліноміальних погнозів)
3. Bomba A., Turbal Y., Turbal M., Radovenyuk E. A method of determining the maximum height of localized circular waves in the proximity of shallow water. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies.* 4(5/76). 2015. P. 13–16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.47859> **Scopus** (0.5/0.15 д.а.; авторський внесок–програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)
4. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Driwi A.A., Kunanets N. Modification of the "pyramidal" algorithm of the small time series forecasting . *CEUR Workshop Proceedings.* 2853. 2021. pp. 323–332. <https://dblp.org/db/conf/intelitsis/intelitsis2021.html> (0.56/0.13 д.а.; авторський внесок–програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

*Статті у фахових наукових виданнях України*

5. Бомба А.Я., Сьох А.П. Турбал Ю.В., Турбал М.Ю. Метод екстраполяції на основі модифікованих розділених різниць. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління"* . Том 33. 2017. С.36-51. ISSN 2304-6201. (1/0.25 д.а.; авторський внесок–програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

6. Bomba A.Ya., Turbal M.Y., Sokh A.P., Radoveniuk O.V. Spatial generalization of "pyramidal" data extrapolation method. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv , Series Physics & Mathematics* . Vol. 2. 2017. P.146-151. ISSN 1812-5409. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–алгоритм просторового узагальнення, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

7. Бомба А. Я., Турбал Ю. В., Турбал М. Ю. Модифікація "пірамідального" методу екстраполяції часових рядів на основі  $\mu\lambda$  – похідних. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.* № 8. 2019. С. 28-33. ISSN 2222-0631. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–побудова таблиці  $\mu\lambda$  -похідних для базових функцій, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

8. Турбал Ю.В. , Бомба А.Я., Турбал Ю.В.,Турбал М.Ю. Деякі аспекти екстраполяції на основі інтерполяційних многочленів . *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології* . Вип. 33. 2021. С. 175-180 . ISBN 1816-1545. (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–обґрунтування можливості побудови прогнозного значення як середнього арифметичного поліноміальних прогнозів, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

9. Бомба А.Я., Турбал Ю.В., Радовенюк О.В., Клап А.В.,Турбал М.Ю. Метод аналізу процесів поширення кругових солітоноподібних хвиль в рамках наближення мілкої води. *Вісник НУВГП.* Вип. 3(71). Ч. 2. 2015. С.343-348. (0.6/0.13 д.а.; авторський внесок– теоретичні дослідження профілю локалізованого збурення та чисельні експерименти)

10. Турбал Ю.В., Бомба А.Я., Дріві А.А., Сумая А.Д., Турбал М.Ю. Локалізовані хвилі у соціокомунікативних середовищах. *Вісник НУВГП*. Вип. 1(89). 2020. С.97-106. (0.6/0.13 д.а.; авторський внесок – програмна реалізація та чисельні експерименти)

11. Бомба А.Я., Турбал Ю.В., Радовенюк О.В., Турбал М.Ю. Математичне та комп'ютерне моделювання сейсмічних процесів на основі солітонного підходу. *Технологічний аудит та резерви виробництва*. №2/5(22). 2015. С.26-30. ISSN 2226-3780 . (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–алгоритм ідентифікації траєкторій локалізованих збурень, програмна реалізація алгоритму та чисельні експерименти)

*Статті у інших наукових виданнях*

12. Bomba A., Turbal Y., Turbal M. Method for studing the multi-solitone solutions of the Kortevveg de-Vries type equations. *Journal of difference equation*. Vol. 2015. P.1-10..doi 10.1155/2015/703039. (0.56/0.12 д.а.; авторський внесок– програмна реалізація та чисельні експерименти)

13. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Sokh A. T-transformation method for studing the multi-solitone solutions of the Kortevveg-de Vries type equations. *Journal of Mathematics and System Science*. № 7 . 2015. P. 279–285. doi:10.17265/2159-5291/2015.07.001 (0.5/0.13 д.а.; авторський внесок–дослідження солітон-солітонної взаємодії шляхом чисельного експерименту)

14. Turbal Y. ,Turbal M., Bomba A., Radoveniuk O. Method of Earthquake Prediction Based on the Soliton Mechanisms of Some Shocks. *Journal of Environmental Science and Engineering B*. № 3. 2014. P. 151-155. DOI:10.17265/2162-5263/2014.03.004 (0.5/0.12 д.а.; авторський внесок– програмна реалізація процесу побудови траєкторій солітоноподібних збурень та чисельні експерименти)

15. Турбал Ю.В., Турбал,М.Ю. Про наближені та точні розв'язки характеристичної системи, що визначає необхідні та достатні умови існування солітонних розв'язків рівнянь руху для анізотропних пружних тіл. *Волинський*

математичний вісник. №1. 2013. С.99–109. (0.62/0.3 д.а.; авторський внесок–чисельні експерименти)

*Публікації в матеріалах конференцій(Тези доповідей)*

16. Turbal, Y., Turbal, M., Drivi, A. A., Ali, A. S. S. On the equivalence of the forecast value construction in the “pyramidal” extrapolation method and cubic forecast. *Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference*. (4). 2020. P. 67–70. <https://doi.org/10.31713/MCIT.2020.15>

17. Turbal Y., Bomba A., Turbal M., Sokh A., Radoveniuk O. One method of data extrapolation. *XXX International Conference Problem of decision making under uncertainties*. Vilnius, 2017. P.122

18. Турбал Ю.В., Турбал М.Ю., Радовенюк О.В., Сьох А.П. Математичні моделі сейсмічних процесів, що враховують солітонну компоненту. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції*, м. Рівне . 2015. С.167-168.

19. Турбал Ю.В. Бомба А.Я., Турбал М.Ю. Математичні моделі сейсмічних процесів: солітонний підхід та  $\Omega$ -теорія. *Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів: матеріали Всеукраїнської наукової конференції*, м. Рівне . 2018. С.35-36.

20. Turbal Y., Bomba A., Turbal M. M-modification of the “Pyramidal” Method of Data Extrapolation. *Modeling, Control and Information Technologies . Proceedings of III International scientific and practical conference*. 2019. С.21-24.

21. Turbal Y., Bomba A., Turbal M. Modeling of the solitary waves trajectories in “shallow water” environment. *Modeling, Control and Information Technologies . Proceedings of VI International scientific and practical conference*. 2023. P.96-101

22. Bomba A.Ya., Turbal Y.V., Turbal M.Y., Turbal B.Y. Extrapolation method based on averaged polynomial forecasts. *Problems of decision making under*

*uncertainties (PDMU-2023): Abstracts of XXXVIII Int. Conference, Poliana, Ukraine. 2023. P.25.*

23. Turbal Y., Turbal M., Bomba A., Driwi A. A. On the problem of the polynomial extrapolations convergence. *Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021): Abstracts of XXXVI Int. Conference, Poliana, Ukraine. 2021. P.110.*

*Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:*

24. Патент 63026 Україна, МПК (2011.01) G01V 1/00. Спосіб прогнозування афтершоків [Текст]/Турбал М.Ю.; заявник та власник Турбал Юрій Васильович. №u201102262; заявл. 25.02.2011 ; опубл 26.09.2011 бюл.

№ 18.5 с.:іл

## Додаток Б. Довідки про впровадження





**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА**  
**ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ**

вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, тел. (0362)63-30-98, факс (0362) 63-32-09, mail@nuwm.edu.ua

Від 05.09.2023 р. № 011-09 **ДОВІДКА**  
 На № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ про використання в навчальному процесі  
 Національного університету водного господарства та природокористування  
 результатів дисертаційного дослідження  
**Турбал Маріани Юрїївни**  
 на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 122 «Комп'ютерні  
 науки»

Результати наукових досліджень у вигляді низки нових методів прогнозування на основі малих виборок даних, програмного комплексу для ідентифікації траєкторій локалізованих збурень у областях сейсмічної активності, що викладені у дисертаційній роботі Турбал М. Ю., здобувача вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки» (галузь знань 12 «Інформаційні технології») використовуються в навчальному процесі Національного університету водного господарства та природокористування при викладанні освітньої компоненти «Прикладна інформатика» для здобувачів освітньо-наукових програм «Економіка», «Комп'ютерні науки», «Агроєкологія»:

Тема 8. «Сучасні методи екстраполяції даних на основі многочленів з автоматизованою процедурою вибору степеня»

Тема 9. Методи прогнозування на основі пірамідального підходу.

Тема 12. Програмні комплекси спеціального призначення.

Результати дисертаційного дослідження використані в навчальному процесі з метою апробації нових методів прогнозування, їх використання якомога ширшим колом дослідників а також є підтвердженням практики використання сучасних наукових досліджень викладачів НУВГП в навчальному процесі.

Проректор з наукової роботи  
 та міжнародних зв'язків НУВГП,  
 доктор економічних наук, професор



Наталія САВІНА

Виконавець: Мартинюк П.М.  
 Тел. 0678576248



ЗАТВЕРДЖУЮ  
Генеральний директор  
ТОВ «СМАРТ КІНГ ЛТД»

Анатолій Клап

01 / 08 / 2023



**АКТ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ №1**  
результатів дисертаційного дослідження  
**Турбал Маріани Юрївни**

Комісія у складі:

Голова комісії Клап Анатолій Віталійович

Члени комісії: Ігор Бондар, Володимир Чеховський

Цим Актом засвідчує, що результати дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня доктора філософії на тему «Методи інтелектуального аналізу сейсмічних даних та прогнозування на основі солітонного підходу» які стосуються, зокрема, побудови прогнозів на основі процедур автоматизованого вибору степеня многочлена та пірамідального методу прогнозування а також відповідні програмні модулі для побудови прогнозів будуть використані при розробці експертних систем аналізу економічної динаміки та прогнозування, аналізу часових рядів та прогнозування динаміки змін валютних курсів а також для оптимізації діяльності компанії та оцінки ризиків. Відповідні результати дисертаційного дослідження продемонстрували ефективність не лише при аналізі траєкторій локалізованих збурень в областях сейсмічної активності, але й при аналізі та прогнозуванні індексів ділової активності, часових рядів економічної динаміки, що підтверджує універсальність методів прогнозування, які запропоновані у роботі .

Голова комісії

Анатолій Клап

Члени комісії

Ігор Бондар

Володимир Чеховський

## Додаток В. Траєкторії локалізованих солітоноподібних збурень при різних початкових умовах

### Приклад 2. Від'ємне збурення поверхневої густини

$$s_0(r, f_i) := 11 + 0 \exp(-0.01 \cdot r) - g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r - R)^2]}{15}\right] - g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r - R_1)^2]}{15}\right] - g \cdot 1 \exp\left[\frac{[-(r - R_2)^2]}{15}\right] - 1 \cdot g \exp\left[\frac{[-(r - R_3)^2]}{15}\right]$$

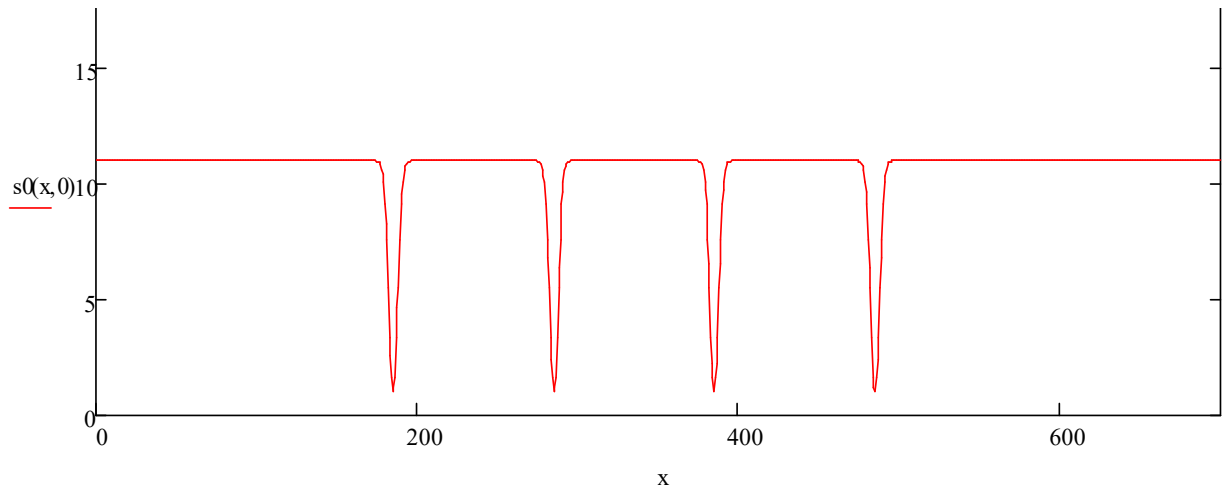


Рис.В1 Графік поверхневої густини

Початкові умови для хвилі 1:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 180$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 380$

Початкові умови хвилі 2:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 180$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 430$

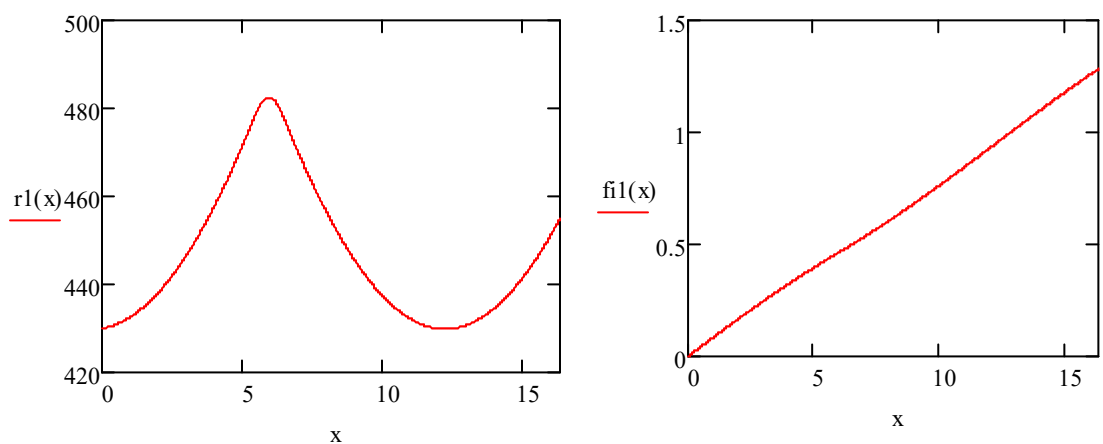


Рис.В2 Радіальна та азимутальна характеристики хвилі 1.

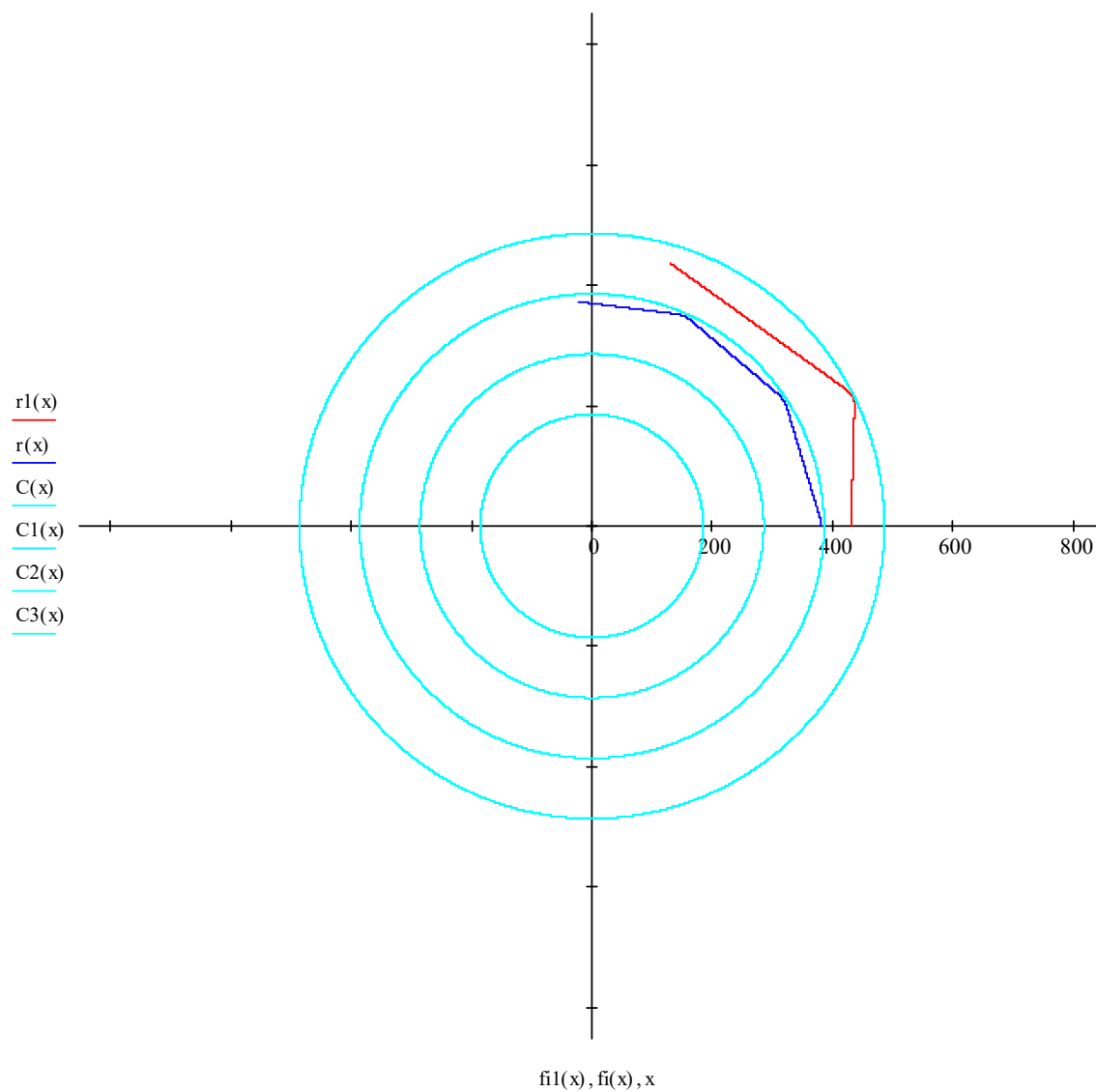


Рис.В3. Траєкторії хвиль

Приклад 3.

Початкові умови для хвилі 1:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 18c$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 38c$

Початкові умови хвилі 2:  $y_0(0) = 35$   $y_1(0) = 18c$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 43c$

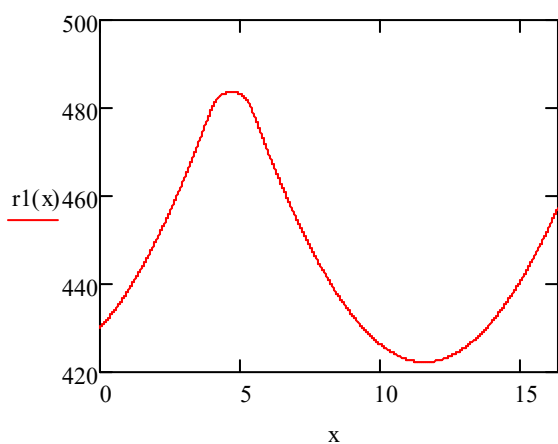


Рис.В4. Радіальна характеристика другої хвилі

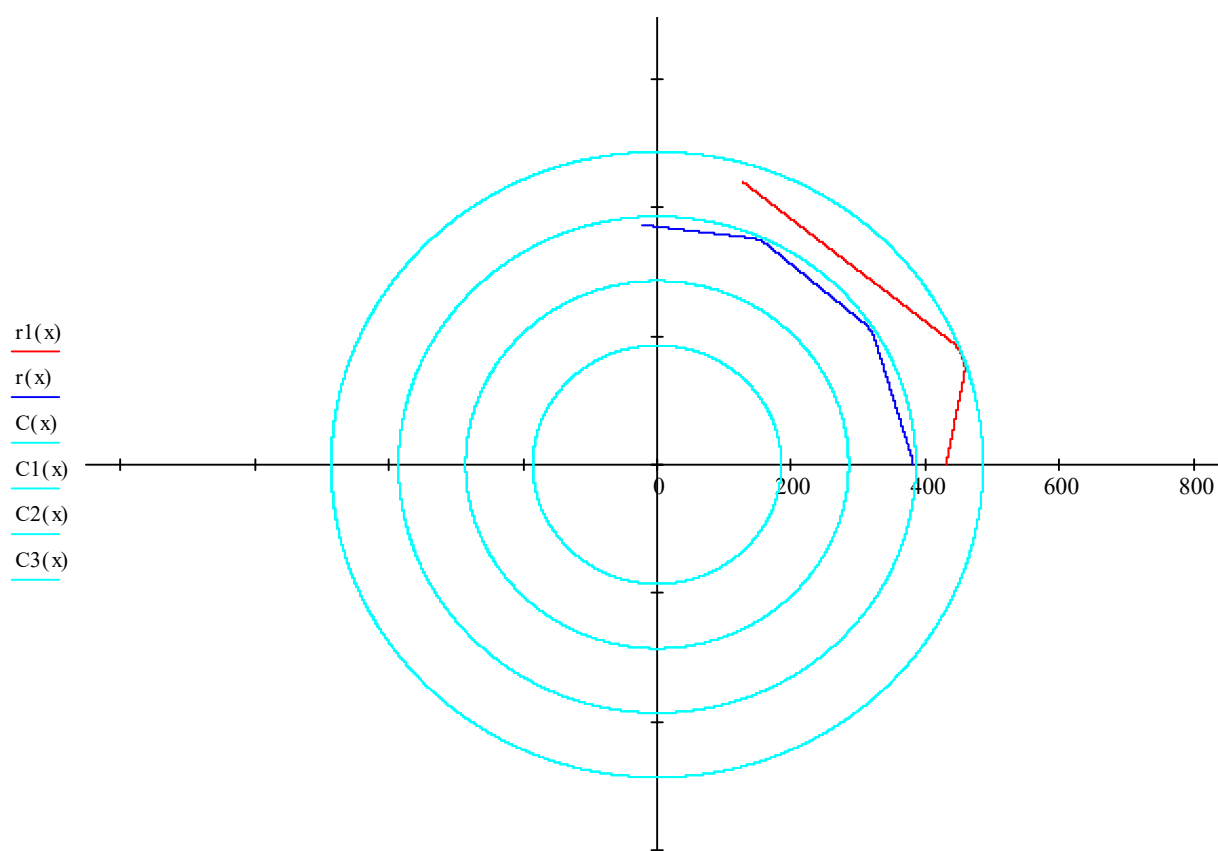


Рис.В5. Траєкторії хвиль. Хвиля 2 намагається “пробити” область низької густини за рахунок більшої радіальної початкової швидкості

Приклад 4.

Початкові умови для хвилі 1:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 18c$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 38c$

Початкові умови хвилі 2:  $y_0(0) = 35$   $y_1(0) = 8c$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 43c$

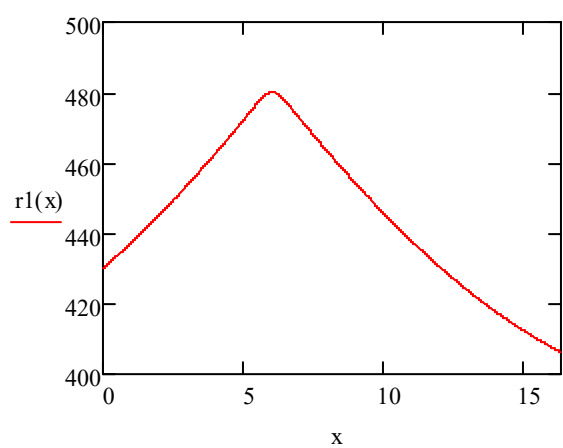


Рис.В6. Радіальна характеристика другої хвилі

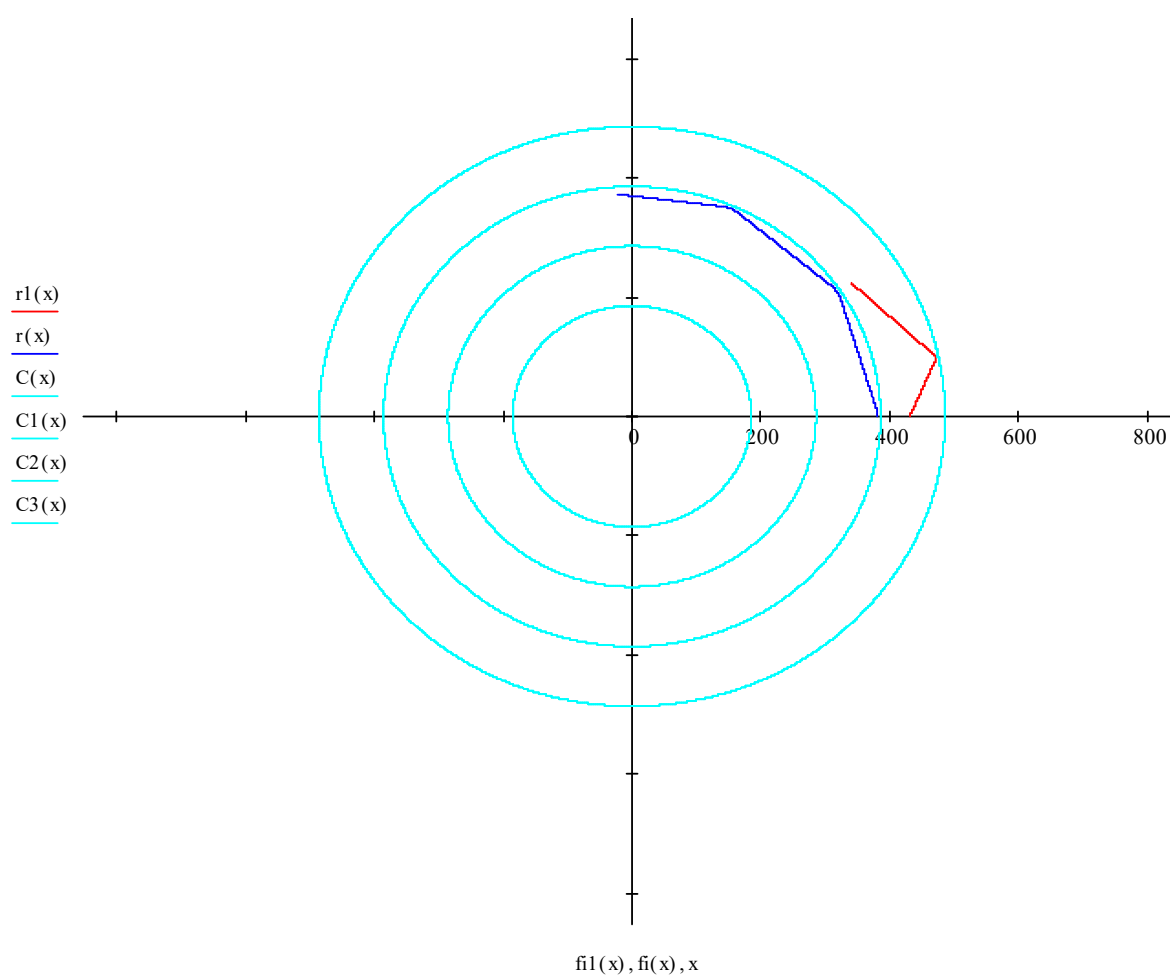


Рис.В7. Траєкторії хвиль

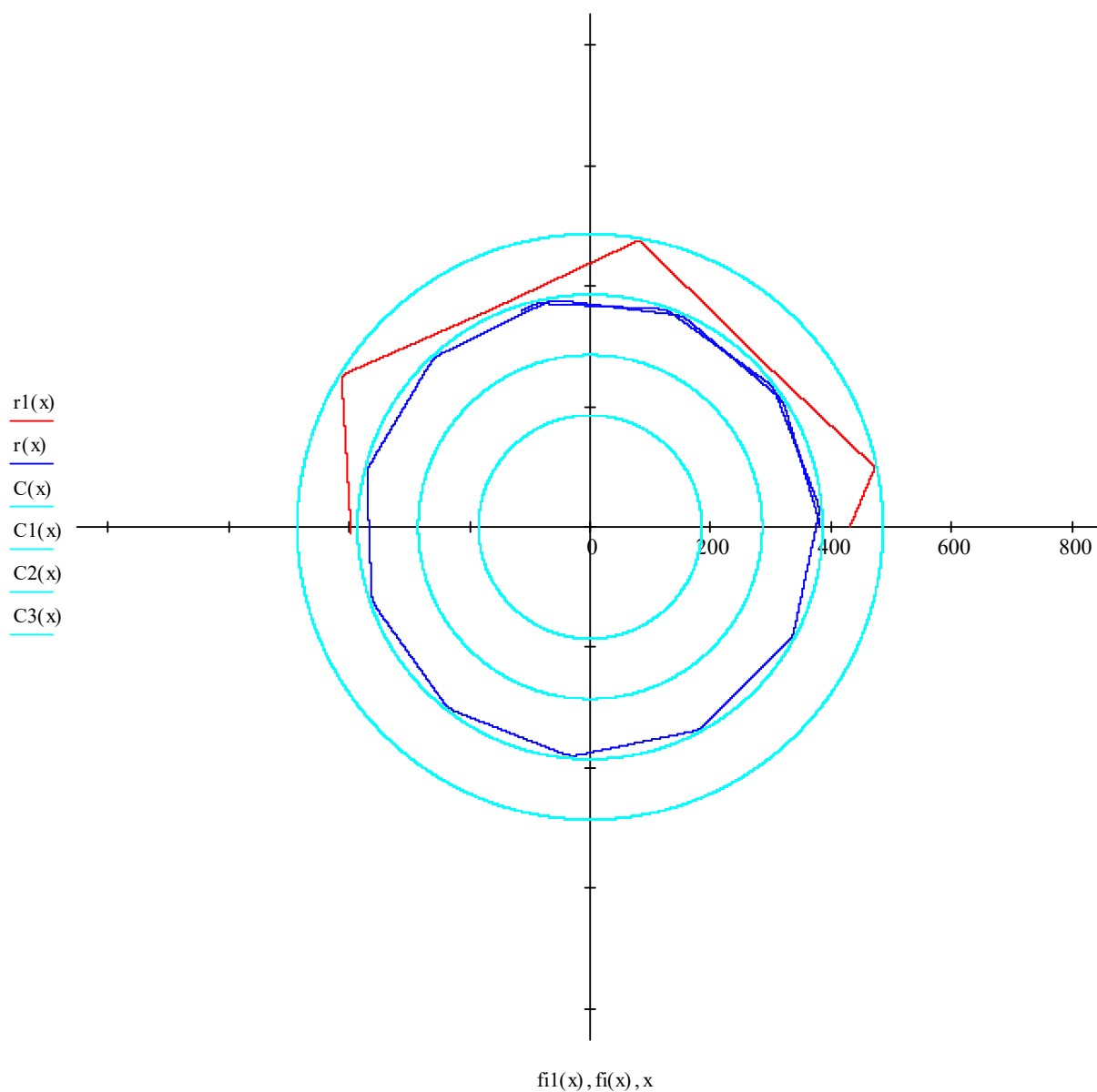


Рис.В8 Попередній випадок, більший часовий інтервал.

Приклад 5.

Початкові умови для хвилі 1:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 180$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 380$

Початкові умови хвилі 2:  $y_0(0) = 35$   $y_1(0) = 50$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 430$

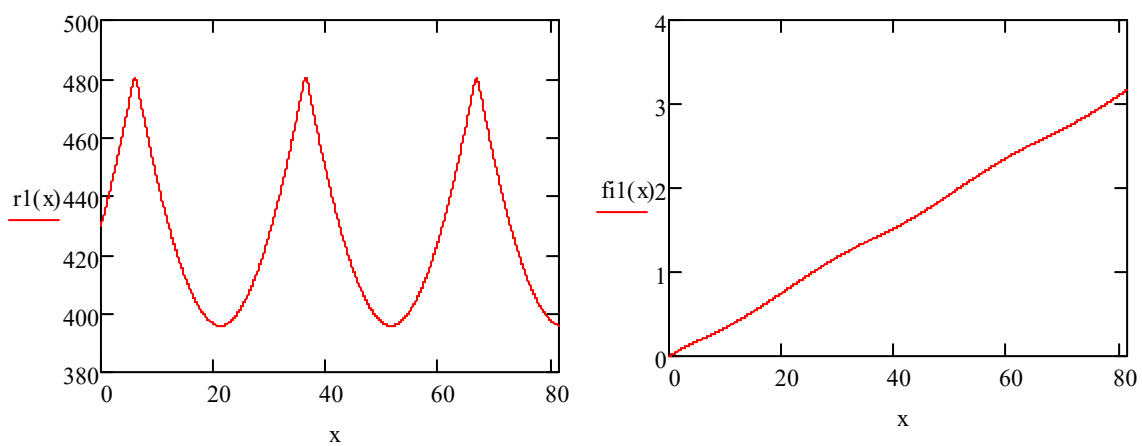


Рис.В9. Радіальна та азимутальна характеристики другої хвилі

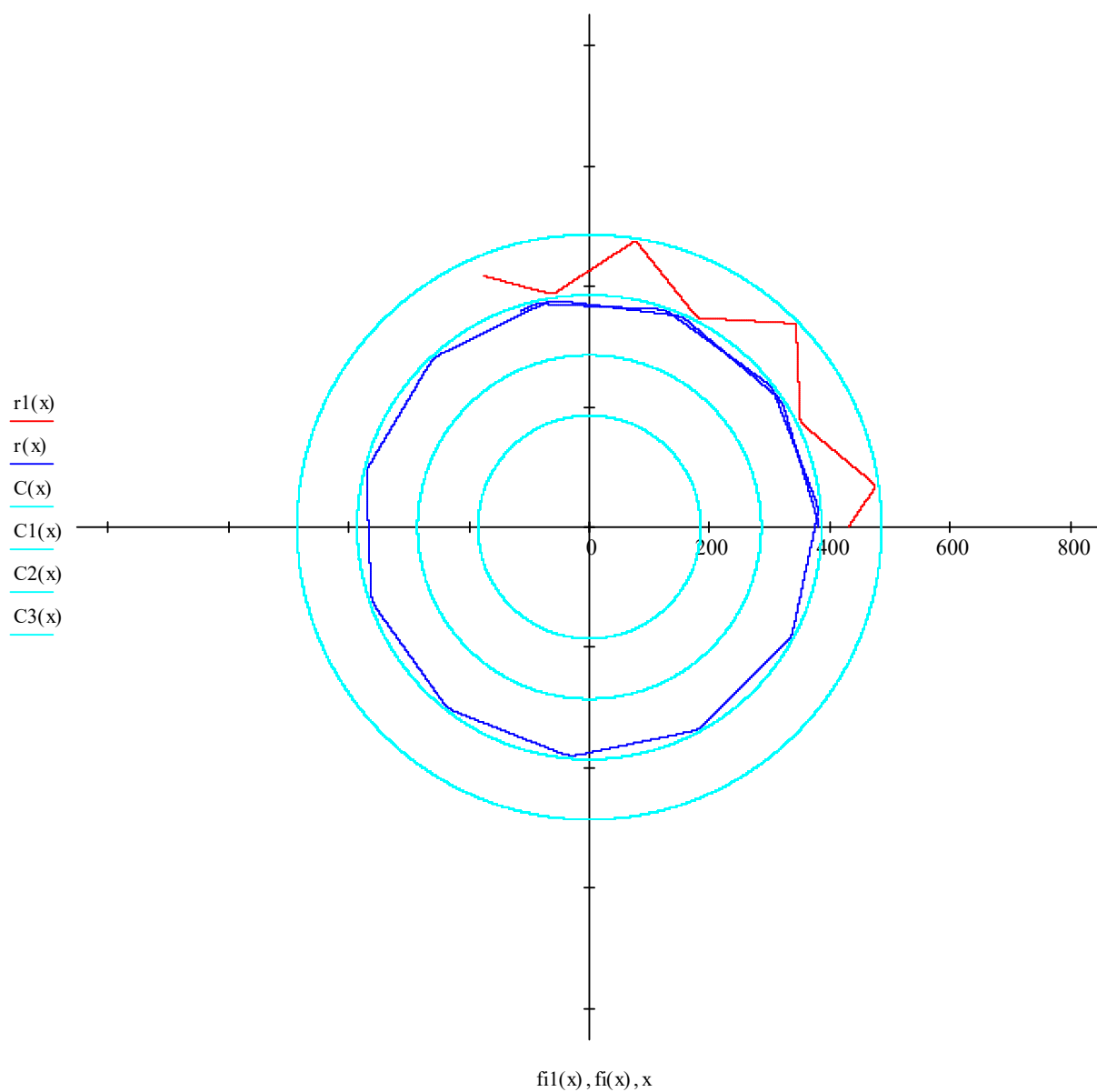


Рис.В10. Траєкторії хвиль

Приклад 6.

Початкові умови для хвилі 1:  $y_0(0) = 5$   $y_1(0) = 180$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 380$

Початкові умови хвилі 2:  $y_0(0) = 65$   $y_1(0) = -10$   $y_2(0) = 0$   $y_3(0) = 430$

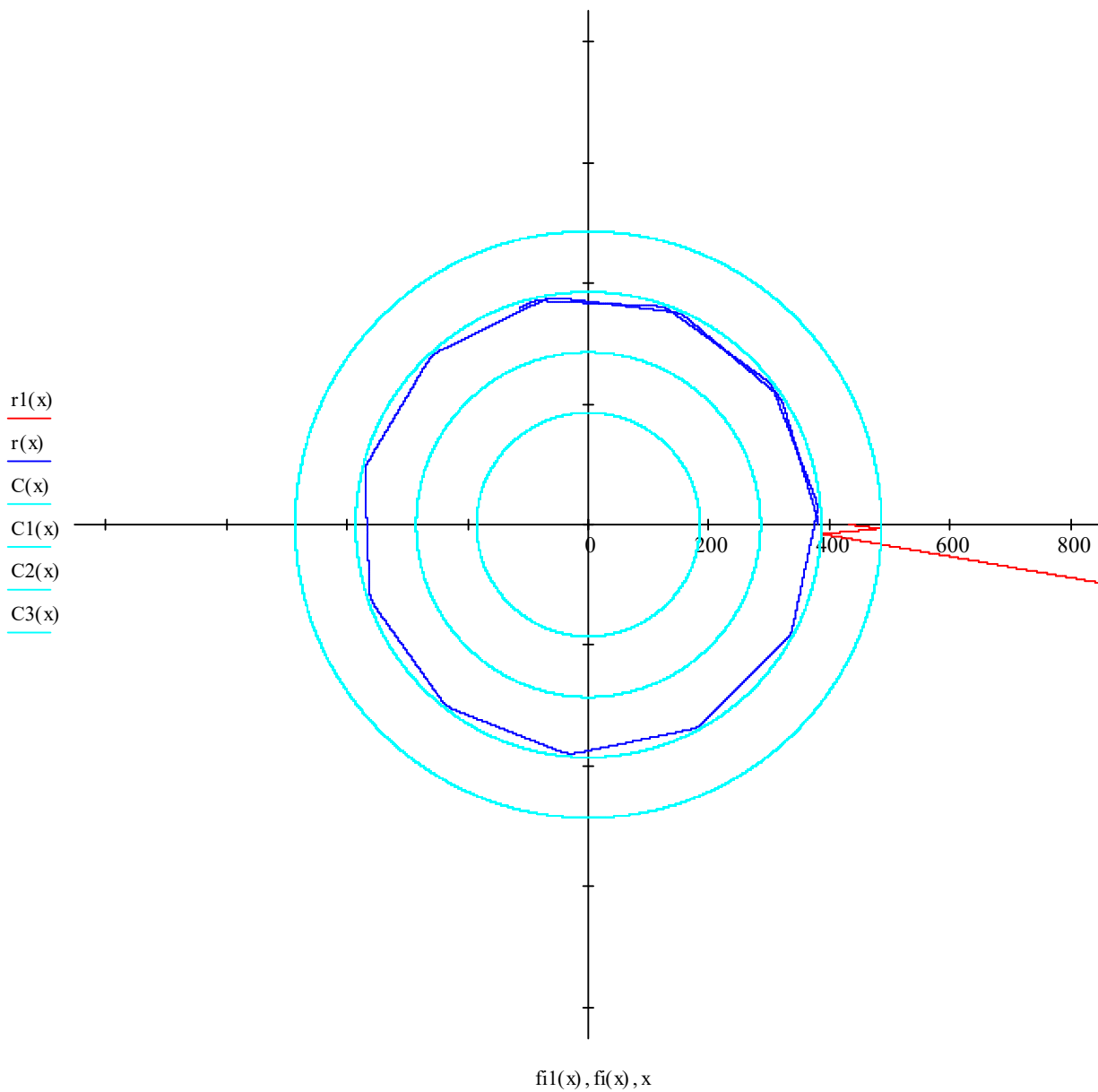


Рис.В11. Траєкторії хвиль



## Додаток Г. Специфікації параметрів для веб-сервісів FDSN

Таблиця 1 Коди загального HTTP статусу, що повертаються FDSN сервісом

Код	Опис
200	Успішний запит, результати слідують
204	Запит було правильно відформатовано та надіслано, але жодні дані не відповідають вибору
400	Поганий запит через неправильну специфікацію, нерозпізнаний параметр, значення параметра за межами діапазону тощо.
401	Неавторизовано, потрібна автентифікація
403	Помилка автентифікації або заблокований доступ до обмежених даних
413	Запит призведе до повернення занадто великої кількості даних, має бути повернуто повідомлення про помилку включити обмеження послуги в детальний опис. Обмеження послуг також повинні бути задокументовані в службі WADL.
414	URI запиту занадто великий
500	Внутрішня помилка сервера
503	Послуга тимчасово недоступна, використовується в умовах технічного обслуговування та помилок

Таблиця 2. Специфікації параметрів для веб-сервісів FDSN, включаючи служби для кожної групи, виділені курсивом

Group	Subgroup	Parameter	Abbreviation	Default	Minimum	Maximum	Type	Units
<b>time constraints</b>								
<i>simple-time fdsnws-dataselect, fdsnws-station, fdsnws-event</i>								
		starttime	Start	[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
		endtime	End	[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
	<i>window-time</i>	<i>fdsnws-station</i>						
		Startbefore		[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
		Startafter		[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
		Endbefore		[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
		Endafter		[Any]	[Any	Valid Time]	time	UTC
<b>channel constraints</b>								
<i>fdsnws-dataselect, fdsnws-station</i>								
		network	Net	[Any]	[Valid ASCII or * or ?]		string	[Not Applicable]
		station	Sta	[Any]	[Valid ASCII or * or ?]		string	[Not Applicable]
		location	Loc	[Any]	[Valid ASCII or * or ?]		string	[Not Applicable]
		channel	cha	[Any]	[Valid ASCII or * or ?]		string	[Not



Time]

	<i>fdsnws-dataselect</i>			
quality	B 0.0	SEED Quality (D,	string	[Not
minimumlength	FALSE	R, Q, M) or B	float	Applicable]
longestonly		0.0 [Any	boolean	[Not
		positive]		Applicable]
		[Not		[Not
		Applicable]		Applicable]

Таблиця 3. Опис параметрів для **fdsnws-dataselect** сервісу

Параметр	Опис
starttime	Обмежує результати вибору часових рядів у або після вказаного часу початку
endtime	Обмежує результати вибору часових рядів в або до зазначеного часу завершення
network	Вибір одного або кількох кодів мережі. Можуть бути коди мережі SEED або коди, визначені центром обробки даних. Кілька кодів розділяються комами.
station	Вибір одного або кількох кодів станцій SEED. Кілька кодів розділяються комами.
location	Вибір одного або кількох ідентифікаторів розташування SEED. Кілька ідентифікаторів розділяються комами. Як особливий випадок «--» (два тире) буде перекладено на рядок із двох пробілів, щоб відповідати порожнім ідентифікаторам розташування.
channel	Вибір одного або кількох кодів каналів SEED. Кілька кодів розділяються комами.
quality	Вибір індикатора якості SEED, обробка залежить від центру обробки даних.
minimumlength	Обмеження результатів неперервними сегментами даних мінімальної довжини
longestonly	Обмеження результатів до найдовшого безперервного сегмента на канал.

Таблиця 4. Опис параметрів для **fdsnws-station** сервісу

Параметр	Опис
starttime	Обмеження для епох метаданих, починаючи з або після вказаного часу початку.
endtime	Обмеження для епох метаданих, які закінчуються на вказаний час завершення або раніше.
startbefore	Обмеження для епох, які починаються раніше зазначеного часу.
startafter	Обмеження для епох, які починаються після зазначеного часу.
endbefore	Обмеження для епох, що закінчуються раніше зазначеного часу.
endafter	Обмеження для епох, які закінчуються після зазначеного часу.
network	Вибір одного або кілька кодів мережі. Можуть бути коди мережі SEED або коди, визначені центром обробки даних. Кілька кодів

	розділяються комами.
station	Вибір одного або кілька кодів станцій SEED. Кілька кодів розділяються комами.
location	Вибір одного або кілька ідентифікаторів розташування SEED. Кілька ідентифікаторів розділяються комами. Як особливий випадок «--» (два тире) буде перекладено на рядок із двох пробілів, щоб відповідати порожнім ідентифікаторам розташування.
channel	Вибір одного або кілька кодів каналів SEED. Кілька кодів розділяються комами.
minlatitude	Обмеження на станціях із широтою, більшою за вказаний мінімум.
maxlatitude	Обмеження на станціях із широтою, меншою за вказаний максимум.
minlongitude	Обмеження на станції з довготою, більшою за вказаний мінімум.
maxlongitude	Обмеження на станціях з довготою, меншою за вказаний максимум.
latitude	Визначення широти, яка буде використовуватися для пошуку в радіусі.
longitude	Довгота, яка використовується для пошуку в радіусі.
minradius	Обмеження результатів станцій в межах заданої мінімальної кількості градусів від географічної точки, визначеної параметрами широти та довготи.
maxradius	Обмеження результатів станціями в межах заданої максимальної кількості градусів від географічної точки, визначеної параметрами широти та довготи.
level	Рівень деталізації результатів.
includerestricted	Вказівка, чи мають результати включати інформацію для станцій з обмеженим доступом.
includeavailability	Вказівка, чи мають результати містити інформацію про доступність даних часових рядів.
updatedafter	Обмеження до метаданих, оновлених після вказаної дати; Оновлення залежать від центру обробки даних.

Таблиця 5. Опис параметрів для **fdsnws-event** сервісів

Параметр	Опис
starttime	Визначаються події в момент або після вказаного часу початку.
endtime	Визначаються події до вказаного часу завершення або в цей момент.
minlatitude	Визначаються події із широтою, більшою за вказаний мінімум.
maxlatitude	Визначаються події з широтою, меншою за вказаний максимум.
minlongitude	Визначаються події з довготою, більшою за вказаний мінімум.
maxlongitude	Визначаються події з довготою, меншою за вказаний максимум.
latitude	Визначає широту, яка буде використовуватися для пошуку в радіусі.
longitude	Визначає довготу, яка використовується для пошуку в радіусі.
minradius	Обмеження до подій у межах заданої мінімальної кількості градусів від географічної точки, визначеної параметрами широти та довготи.
maxradius	Обмеження до подій у межах заданої максимальної кількості градусів від географічної точки, визначеної параметрами широти

	та довготи.
<code>mindepth</code>	Визначаються події з глибиною більше зазначеного мінімуму.
<code>maxdepth</code>	Обмеження до подій з глибиною менше зазначеного максимуму.
<code>minmagnitude</code>	Обмеження до подій з масштабом, більшим за вказаний мінімум.
<code>maxmagnitude</code>	Обмеження до подій з величиною, меншою за вказаний максимум.
<code>magnitudetype</code>	Визначає тип величини, щоб використовувати для тестування мінімальних і максимальних меж.
<code>includeallorigins</code>	Вказівка чи потрібно включати всі події. За замовчуванням вказана залність від центру обробки даних, але допускається можливість вибрати лише деякі події.
<code>includeallmagnitudes</code>	Вказівка чи мають бути включені всі величини магнітуд для подій. За замовчуванням це залежить від центру обробки даних, але пропонується використовувати лише бажані величину.
<code>includearrivals</code>	Вказівка, які фази коливань вхідних сигналів мають бути включені
<code>eventid</code>	Вибирає конкретну подію за ідентифікатором; ідентифікатори подій визначаються центром обробки даних.
<code>limit</code>	Обмежує результати вказаною кількістю подій.
<code>offset</code>	Повертає результати, починаючи з вказаної кількості подій, починаючи з 1.
<code>orderby</code>	Упорядковує результат за часом або величиною магнітуди з такими можливостями: <i>time</i> : упорядкувати за спаданням часу початку подій <i>time-asc</i> : упорядкувати за часом зростання <i>magnitude</i> : впорядкувати за спаданням магнітуд <i>magnitude-asc</i> : впорядкувати за зростанням магнітуд
<code>catalog</code>	Вибираються події з конкретного каталогу
<code>contributor</code>	Обмеження подій зареєстрованих конкретними станціями
<code>updatedafter</code>	Вибираються події оновлені після специфічного часу