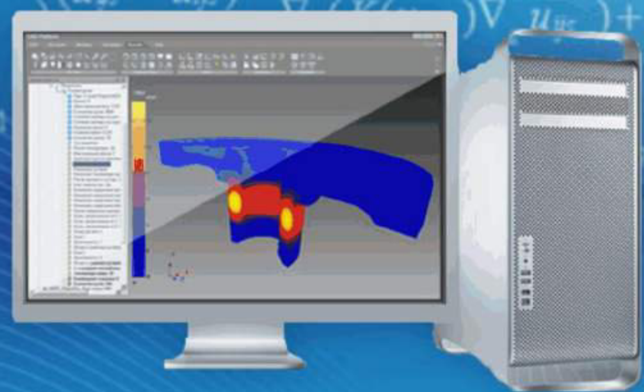
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS Excel

В. І. Бредюк, О. І. Джоші

В. І. Бредюк, О. І. Джоші

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS Excel

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

В.І. Бредюк, О.І. Джоші

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS Excel

Навчальний посібник

Рівне – 2015

УДК 004.942 (075)
ББК 65.9.23я7
Б87

Затверджено вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування. (Протокол №4 від 30 березня 2015 р.)

Рецензенти:

Власюк А.П., доктор технічних наук, професор Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад. С. Дем'янчука, м. Рівне;

Мартинюк П.М., кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

Бредюк В.І., Джоші О.І.

Б87 Економіко-математичне моделювання в середовищі табличного процесора MS Excel : Навч. посібник. – Рівне: НУВГП, 2015. – 241 с. :іл.

Навчальний посібник складається з трьох розділів, у яких розглянуто практичні аспекти економіко-математичного моделювання у середовищі табличного процесора MS Excel. Наведені приклади розв'язання найбільш типових задач, що мають достатньо широке застосування на практиці.

Посібник відповідає затвердженим робочим програмам дисциплін „Економетрика" та „Оптимізаційні методи та моделі" і призначений для студентів усіх економічних напрямів підготовки галузі знань „Економіка і підприємництво". Посібник також може бути корисним аспірантам та дослідникам, які широко застосовують на практиці економіко-математичні методи та моделі.

Табл. 41. Іл. 149. Бібліогр. 20 назв.

УДК 004.942 (075)
ББК 65.9.23я7

ЗМІСТ

Передмова 5

Розділ 1. Економетричне моделювання в середовищі табличного процесора MS Excel 7

1.1. Можливості та інструменти табличного процесора MS Excel щодо розв'язання задач економетричного моделювання 7
1.2. Вбудовані математичні функції 9
1.2.1. Математичні функції загального призначення 9
1.2.2. Функції для роботи з матрицями 19
1.2.3. Статистичні функції 26
1.3. Пакет **Анализ данных** 34
1.3.1. Загальна характеристика пакету **Анализ данных**...... 34
1.3.2. Послідовність розв'язання задач економетричного аналізу із застосуванням пакету **Анализ данных**....... 35
1.3.3. Інструмент аналізу **Регрессия** 38
1.3.4. Інструмент аналізу **Корреляция** 42
1.4. Комплексні приклади економетричного моделювання 44
1.4.1. Лінійні класичні економетричні моделі 44
1.4.2. Нелінійні економетричні моделі 73
1.4.3. Узагальнені моделі 82
1.4.4. Економетричні моделі динаміки 102
1.4.5. Симультативні моделі 110

Розділ 2. Задачі оптимізації у середовищі табличного процесора MS Excel 118

2.1. Можливості та інструменти табличного процесора MS Excel щодо розв'язання оптимізаційних задач 118
2.2. Загальна характеристика інструменту **Поиск решения** ... 119
2.2.1. Елементи управління інструменту **Поиск решения** 119
2.2.2. Налаштування інструменту **Поиск решения** 124
2.2.3. Послідовність розв'язування задач математичного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 129
2.2.4. Створення звітів.. 131
2.2.5. Коли **Поиск решения** не може знайти розв'язку.... 133

2.3 Задачі лінійного програмування 138
2.3.1. Особливості розв'язування задач лінійного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 138
2.3.2. Приклади розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 144
2.4. Транспортна задача 173
2.4.1. Особливості розв'язування транспортної задачі за допомогою інструменту **Поиск решения** 173
2.4.2. Приклади розв'язання транспортної задачі за допомогою інструменту **Поиск решения** 174
2.5. Задачі цілочислового програмування 196
2.5.1. Особливості розв'язування задач цілочислового програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 196
2.5.2. Приклади розв'язання задач цілочислового програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 197
2.6. Задачі нелінійного програмування 211
2.6.1. Особливості розв'язування задач нелінійного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 211
2.6.2. Приклади розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** 216

Розділ 3. Порівняльний аналіз інструментарію табличного процесора MS Excel 2010/2013 та MS Excel 2007 224
3.1. Загальні зауваження 224
3.2. Особливості використання пакету **Анализ данных** у середовищі табличного процесора MS Excel 2010/2013 224
3.3. Особливості використання інструменту **Поиск решения** у середовищі табличного процесора MS Excel 2010/2013 226
Додатки 235
Література 240

ПЕРЕДМОВА

Сучасні методи дослідження і управління економічними системами та процесами базуються на широкому використанні математичних методів, математичних моделей та комп'ютерних технологій. В рамках сучасної економічної науки виник і сформувався цілий науковий напрям – **економіко-математичне моделювання**, який є виразом процесу математизації науково-економічних знань і який уособлює в собі широке застосування математичних методів та моделей при дослідженні (вивченні) економічних об'єктів.

Застосування цих методів вимагає знань не тільки теоретичних засад і принципів економіко-математичного моделювання, а й практичних навичок постановки та розв'язання відповідних задач, пов'язаних з кожною конкретною ситуацією. Саме вміння на практиці своєчасно та коректно застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі робить економіста сучасним фахівцем-аналітиком високого рівня.

Навчальний посібник підготовлений відповідно до нормативних робочих програм з дисциплін „Економетрика" та „Оптимізаційні методи та моделі" для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр усіх економічних напрямів підготовки галузі знань „Економіка і підприємництво".

Метою посібника є формування у студентів – майбутніх фахівців у сфері економіки, фінансів, банківської справи, обліку та аудиту і т.і. практичних навичок розв'язання широкого класу задач економіко-математичного моделювання.

Посібник складається з трьох розділів. Перші два розділи – „Економетричне моделювання в середовищі табличного процесора MS Excel" і „Задачі оптимізації у середовищі табличного процесора MS Excel" є основними і відповідають складу модуля „Економіко-математичні методи та моделі " навчального плану для бакалаврів усіх напрямів підготовки галузі знань „Економіка і підприємництво".

Кожний основний розділ містить достатньо глибокий та вичерпний опис можливостей та інструментарію табличного процесора MS Excel, що використовуються при розв'язуванні відповідного класу задач економіко-математичного моделювання, а також приклади використання цього інструментарію.

Посібник не містить теоретичних відомостей і має чітке практичне спрямування. Фактично його можна розглядати як практичне керівництво (практикум) із застосування табличного процесора MS Excel в процесі економетричного моделювання та при розв'язанні задач математичного програмування. Такий підхід підсилює творчу складову і дає можливість студенту зосередитися в першу чергу на аналізі та змістовній інтерпретації отриманих результатів, а не на математичних операціях. Окрім цього, цей підхід забезпечує реалізацію ідеї наскрізної комп'ютерної підготовки майбутніх фахівців і дає можливість опанувати потужним, ефективним і нескладним інструментарієм, необхідним у їх майбутній професійній діяльності.

Усі приклади, що розглядаються у посібнику, реалізовано у середовищі табличного процесора MS Excel 2007, який на момент початку роботи над посібником був найбільш розповсюдженим серед користувачів. На даний час доступними для використання стали також версії MS Excel 2010 і MS Excel 2013, тому у посібнику в останньому третьому розділі наведені основні відмінності цих останніх версій від MS Excel 2007 і особливості використання наведеного у посібнику інструментарію для MS Excel 2010/2013 у порівнянні з MS Excel 2007. Це дає змогу застосувати у повній мірі на практиці в процесі економіко-математичного моделювання можливості усіх останніх версій табличного процесора MS Excel залежно від того, яка версія встановлена у користувача.

Посібник може бути використаний, в першу чергу, при виконанні лабораторних робіт з дисциплін „Економетрика" та „Оптимізаційні методи та моделі" для студентів усіх економічних напрямів підготовки та студентів напряму підготовки „Менеджмент" денної, заочної та дистанційної форм навчання, а також при виконанні курсових та розрахункових робіт студентами напряму підготовки „Економічна кібернетика" та при підготовці до заходів з контролю знань (екзамен, проміжний модульний контроль тощо).

Слід також зазначити, що посібник може бути корисним аспірантам і усім тим, хто у своїй професійній діяльності широко застосовує економетричні та оптимізайні методи і моделі, а також табличний процесор MS Excel.

РОЗДІЛ 1. ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL

1.1. МОЖЛИВОСТІ ТА ІНСТРУМЕНТИ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXSEL ЩОДО РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Економетрика – наука, пов'язана з емпіричним виведенням економічних законів. Вона використовує статистичні дані для того, щоб отримати кількісні залежності для теоретичних економічних співвідношень. Економетричні моделі, які ґрунтуються на економічній теорії та емпіричних даних, оцінюють невідомі величини в цих моделях, дають прогнози та оцінюють їх точність, для подальших рекомендації в економічній політиці.

На сьогоднішній день рівень розвитку інформаційних технологій дозволяє суттєво спростити процес економетричного моделювання з використанням спеціалізованих програмних продуктів, таких як STATISTICA, SPSS та інші. Ці програми поєднують в собі зручний інтерфейс та гнучкість у виборі задач. Проте для їх експлуатації потрібний достатньо високий рівень загальної комп'ютерної освіченості. Альтернативним та оптимальним програмним продуктом для широкого кола користувачів є використання табличного процесора MS Excel.

Основу опрацювання даних MS Excel складають формули. Формула – певна послідовність дій записана в комірку або діапазон комірок. Ознакою формули є знак « = » на початку введених даних.

Формула може містити посилання, тобто адреси комірок, вміст яких використовується в обчисленнях. Це означає, що результат обчислення формули залежить від значення, що знаходиться в іншій комірці. Комірка, що містить формулу, таким чином, є залежною. Значення, що відображається у комірці з формулою, перераховується при зміні значення комірки, на яке вказує посилання. Таким чином, правило використання формул в програмі MS Excel полягає в тому, що, якщо значення комірки залежить від інших елементів таблиці, завжди потрібно використовувати формулу. Це гарантує, що подальше редагування таблиці не порушить її цілісності і правильності обчислень, що виконується в ній.

Посилання на комірки в формулах, за замовчуванням, розглядаються як відносні. Це означає, що при копіюванні формули адреси в посиланнях автоматично змінюються відповідно до відносного розташування поточних комірок і копії, що створюється. У випадку абсолютної адресації адреси посилань при копіюванні не змінюються. Для зміни способу адресації при редагуванні формули потрібно виділити посилання на комірки і натиснути клавішу F4. Елементи адреси комірки, які використовують абсолютну адресацію, позначаються символом $.

Наступною складовою опрацювання даних в MS Excel є бібліотека вбудованих функцій. По суті, кожна вбудована функція табличного процесору MS Excel є заздалегідь визначеною простою або складною формулою. Кожна вбудована функція MS Excel має назву або унікальне ім'я та аргументи (адреси комірок з вхідними даними). Функції можуть мати як строго фіксовану, так і невизначену кількість аргументів. Під час використання функції в комірці на екрані завжди з'являється підказка, яка містить перелік усіх аргументів функції. Аргументами функцій можуть бути константи, посилання на комірки або діапазони комірок, математичні вирази, масиви значень, а також інші функції. Усі вбудовані функції табличного процесору MS Excel 2007 поділяються за декількома категоріями та активізуються з допомогою **Мастера функций**, для запуску якого передбачено декілька варіантів:

- ❖ за допомогою кнопки **Вставить функцию** в рядочку формул;
- ❖ при використанні команди **Вставить функцию** вкладки **Формулы**;
- ❖ шляхом вибору підпункту **Другие функции…** у списку команди **Сумма** групи **Редактирование** вкладки **Главная**.

Також, при розв'язанні задач економетричного моделювання, широкою популярністю користується в табличному процесорі MS Excel програмна надбудова **Пакет анализа** (**Analysis ToolPak**), який надає доступ до великої кількості статистичних функцій з допомогою зручних діалогових вікон. Для виклику цієї програмної надбудови потрібно скористатися командою **Анализ данных** вкладки **Данные**, після чого відкривається вікно, в якому наведено перелік доступних інструментів статистичного аналізу. Після вибору інструменту з'являється відповідне діалогове вікно. За його допомогою користувач може налаштувати та запустити статистичну процедуру. В такому діалоговому вікні задаються діапазони комірок, які містять вихідну статистичну інформацію; параметри виконання статистичної процедури; спосіб виводу результатів на аркуш. Зазвичай результати оформлюються у вигляді таблиць, іноді на аркуш вставляються і діаграми.

Розглянутий набір інструментів, як правило, є достатнім для проведення аналізу різноманітної статистичної інформації.

1.2. ВБУДОВАНІ МАТЕМАТИЧНІ ФУНКЦІЇ

1.2.1. Математичні функції загального призначення

Серед функцій табличного процесора MS Excel найбільш чисельну категорію складають математичні, застосування яких дозволяє значно прискорити та спростити процес обчислень. Для активізації математичних функцій у табличному процесорі MS Excel після запуску **Мастера функций** у діалоговому вікні задається категорія **Математические** і потім, із запропонованого переліку, вибирається відповідна функція (рис. 1.1).

Нижче наведено опис деяких найбільш поширених математичних функцій, які використовуються при розв'язуванні задач економетричного моделювання, зокрема: **EXP**, **LN**, **КОРЕНЬ**, **СТЕПЕНЬ**, **СУММ**, **СУММКВ**, **СУММПРОИЗВ**. Розглянемо ці функції більш детально.

Функція **EXP** – обчислює значення числа, для якого визначається експоненціальна функція з основою e. Число $e \cong 2{,}718$ є основою натурального логарифму. У поле для введення аргументу може бути введена константа, посилання на комірку або інші функції, результатом яких є число (рис. 1.2). Дана функція є оберненою до функції **LN**.

Функція **LN** – дозволяє визначити додатне число, для якого обчислюється натуральний логарифм. Дана функція є оберненою до функції **EXP**.У поле для введення аргументу може бути введена константа, посилання на комірку або інші функції, результатом яких є додатне число (рис. 1.3). Якщо аргумент даної функції має від'ємне значення, то вона видає повідомлення про помилку #ЧИСЛО!.

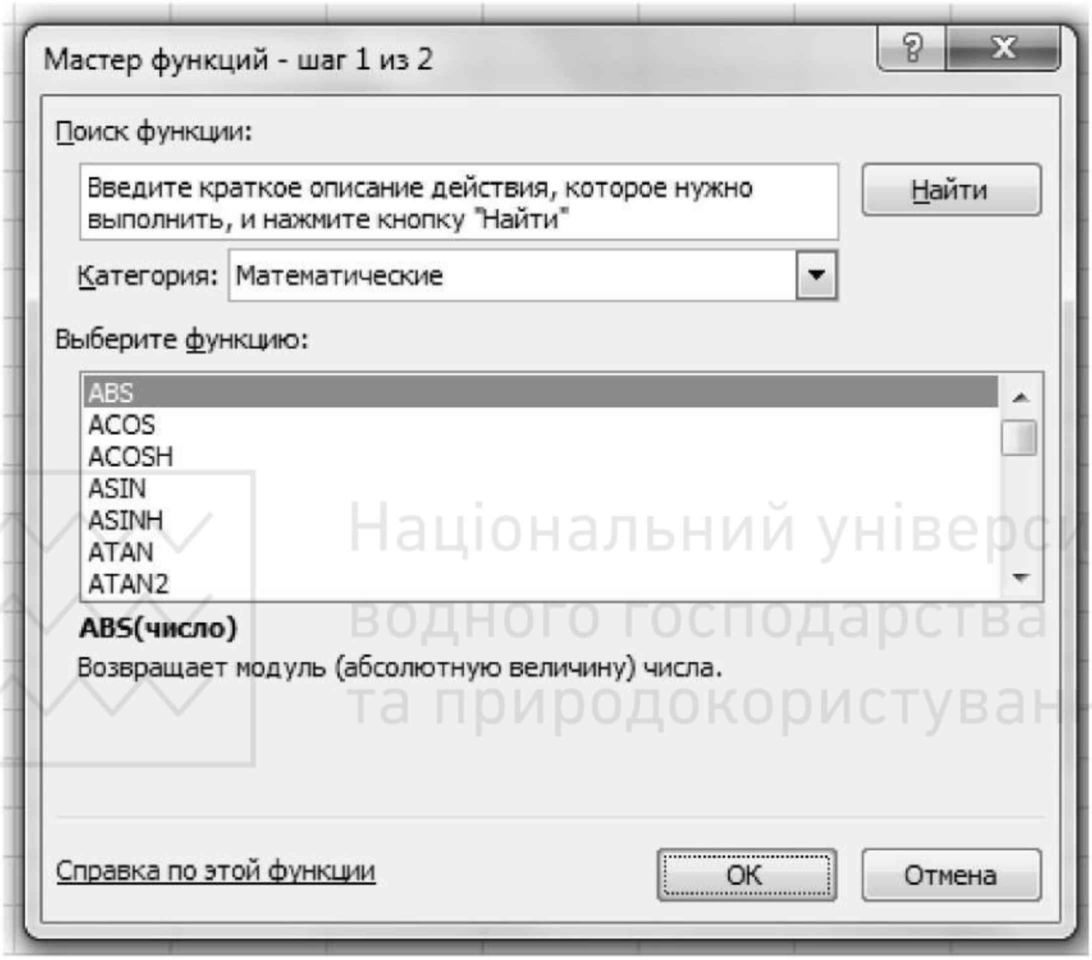


Рис. 1.1. Діалогове вікно **Мастер функций**

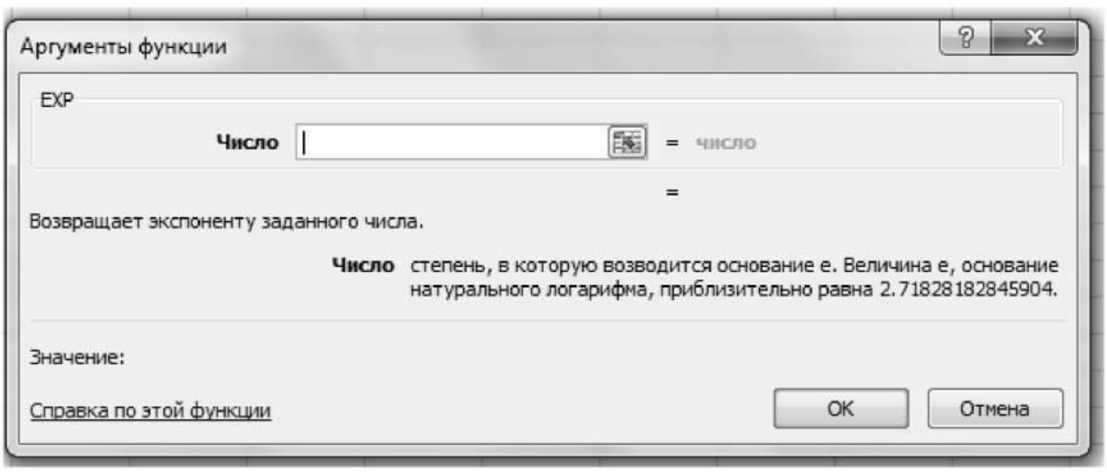


Рис. 1.2. Діалогове вікно функції **EXP**

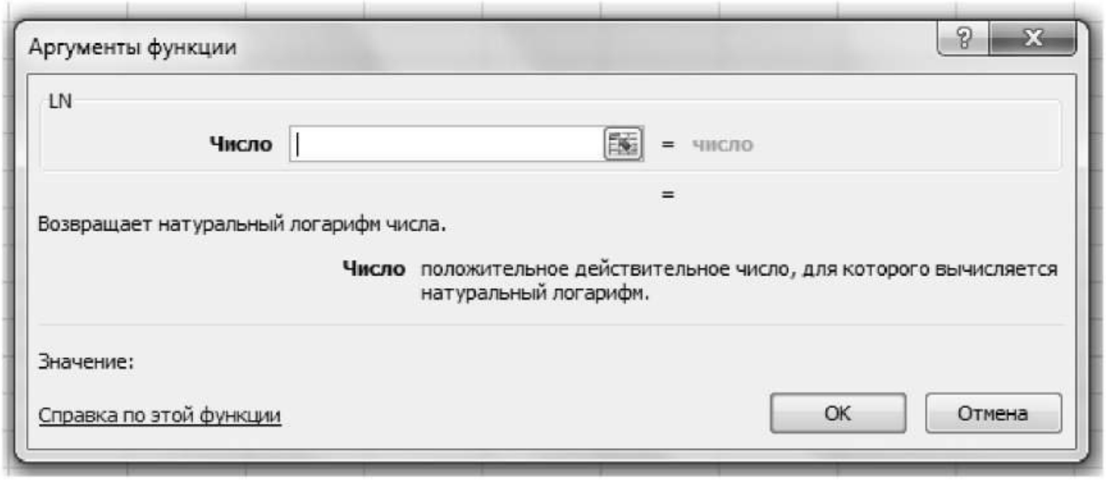


Рис. 1.3. Діалогове вікно функції **LN**

Функція **КОРЕНЬ** – розраховує число, для якого визначається квадратний корінь. Дана функціє використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\sqrt{x}$ або $x^{\frac{1}{2}}$. У поле даної функції для введення аргументу може бути введена константа, посилання на комірку або інші функції, результатом яких є число (рис. 1.4). Якщо аргумент даної функції має від'ємне значення, то функція **КОРЕНЬ** видає повідомлення про помилку #ЧИСЛО!.

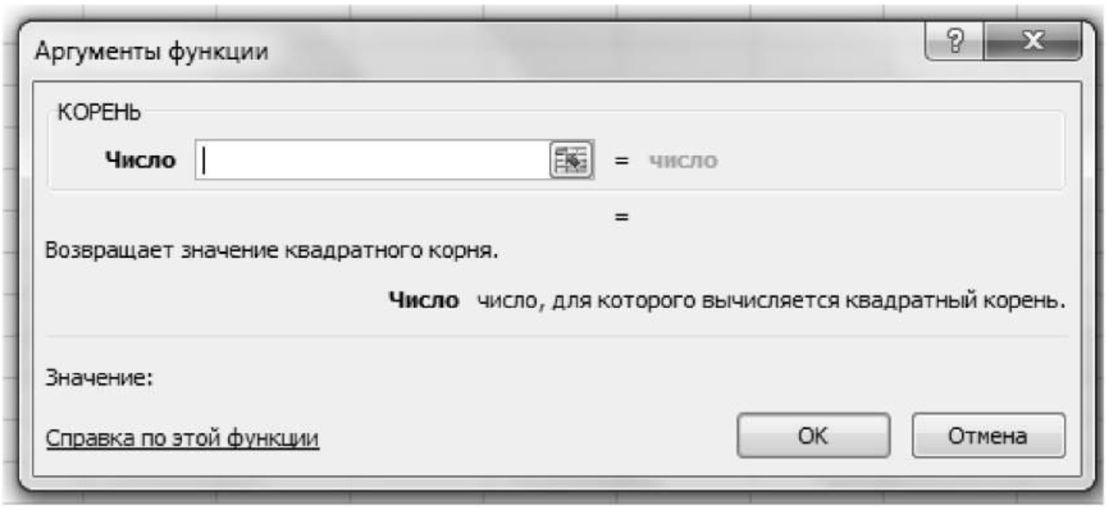


Рис. 1.4. Діалогове вікно функції **КОРЕНЬ**

Функція **СТЕПЕНЬ** – визначає результат піднесення числа у степінь. Дана функція має два поля для введення аргументів в які можуть бути введені константи, посилання на комірки або інші функції, результатом яких є числа (рис. 1.5). Ця функціє використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як x^n, або визначити корінь n –степеня: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Під час використання даної функції у рядочку формул відображається запис =СТЕПЕНЬ(число;степень), де вміст полів відокремлюються одне від одного знаком « ; ». У випадку, якщо визначається корінь додатного n –степеня з від’ємного числа, то функція СТЕПЕНЬ видає повідомлення про помилку #ЧИСЛО!.

Замість функції СТЕПЕНЬ для піднесення числа у степінь можна використовувати оператор « $\wedge$ », наприклад $3^2 = 3 \wedge 2$.

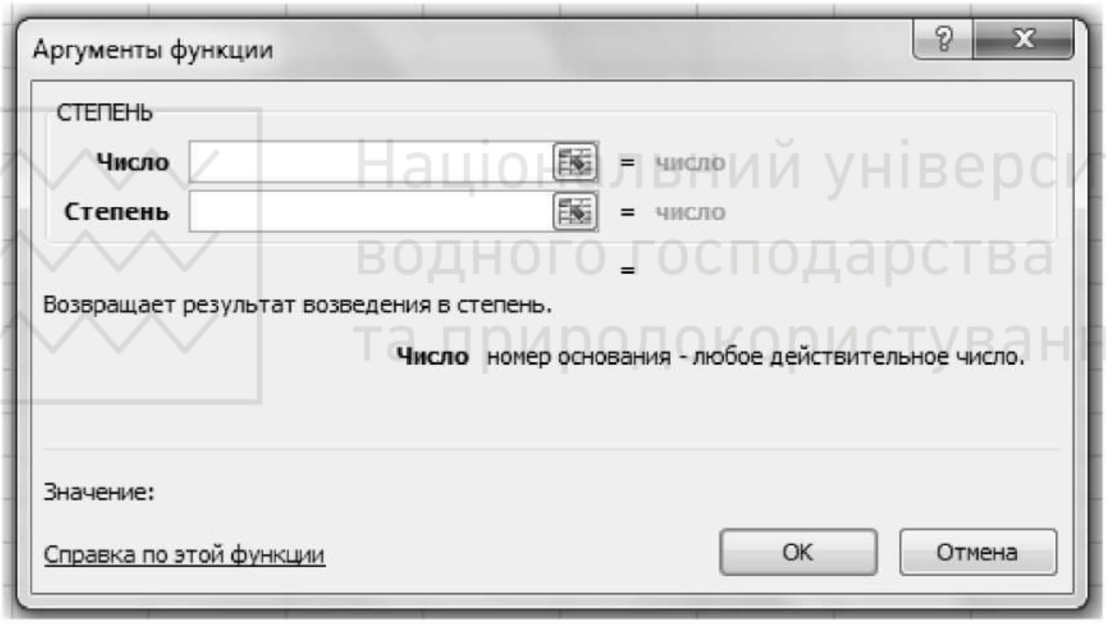


Рис. 1.5. Діалогове вікно функції **СТЕПЕНЬ**

Функція **СУММ** – сумує усі числа в інтервалі комірок. Дана функція має поля для введення від 1 до 255 аргументів в які можуть бути введені константи, посилання на окремі комірки або діапазони комірок, масиви, формули або інші функції, результатом яких є числа (рис. 1.6). Вона використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Під час використання даної функції у рядочку формул запис може бути відображений наступним чином:

❖ =СУММ(число1;число2;число3;…), де вміст полів відокремлюються одне від одного знаком « ; ». *Приклад №* 1. Функція СУММ(В2;В4) визначає суму чисел в комірках В2 та В4, тобто виконує наступні обчислення: $x_1 + x_3 = 3 + 6 = 9$ (рис. 1.7);

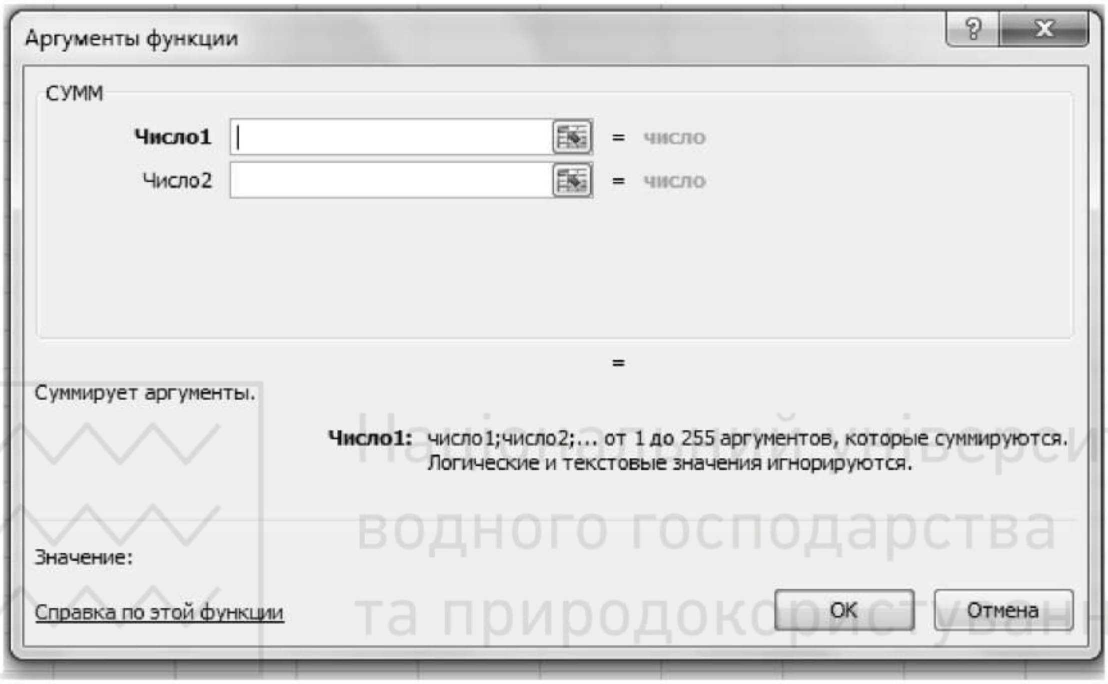
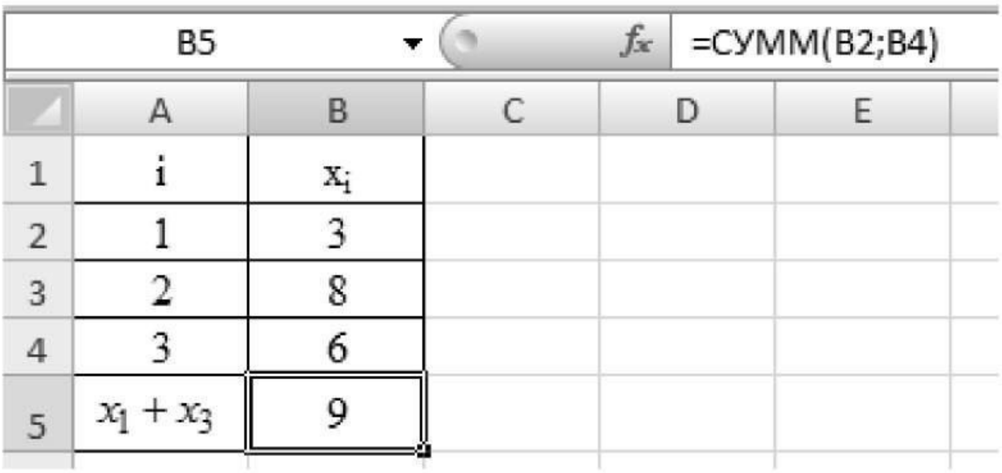


Рис. 1.6. Діалогове вікно функції **СУММ**


B5 =СУММ(B2;B4)

	A	B	C	D	E
1	i	x_i			
2	1	3			
3	2	8			
4	3	6			
5	$x_1 + x_3$	9			

Рис. 1.7. Приклад № 1 для функції **СУММ**

❖ =СУММ([адреса комірки 1]:[адреса комірки 2]), при якому в перше поле **Число 1** діалогового вікна функції **СУММ** (рис. 1.6) вводиться посилання на діапазон комірок. *Приклад № 2*. Функція СУММ(B2:B4) обчислює суму усіх чисел, які містяться в комірках від B2 до B4, тобто виконує наступні обчислення: $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3+8+6=17$ (рис. 1.8).

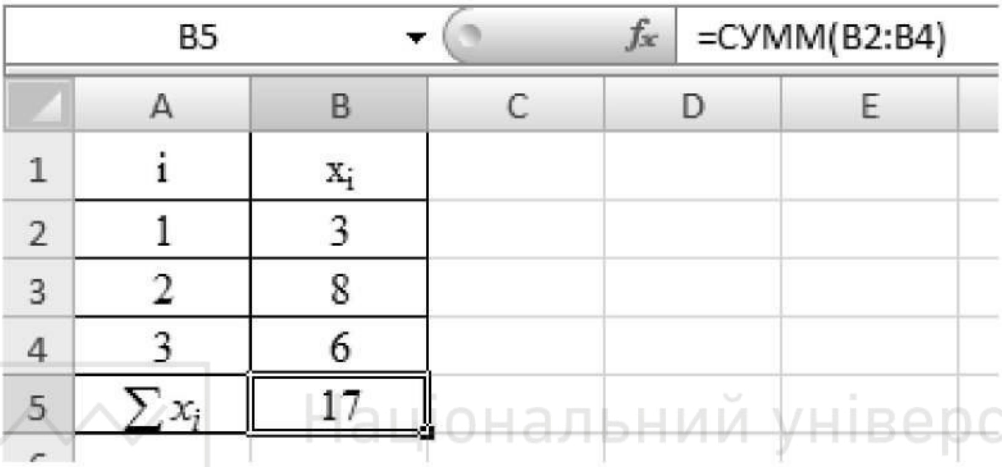


Рис. 1.8. Приклад № 2 для функції **СУММ**

Функція **СУММКВ** – обчислює суму квадратів аргументів. Дана функція має поля для введення від 1 до 255 аргументів в які можуть бути введені константи, посилання на окремі комірки або діапазони комірок, масиви, формули або інші функції, результатом яких є числа (рис. 1.9). Вона використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Під час використання даної функції у рядочку формул запис може бути відображений наступним чином:

- =СУММКВ(число1;число2;число3;…), де вміст полів відокремлюються одне від одного знаком « **;** ». *Приклад № 3*. Функція СУММКВ(B2;B4) визначає суму квадратів чисел в комірках B2 та B4, тобто виконує наступні обчислення: $x_1^2 + x_3^2 = 3^2 + 6^2 = 45$ (рис. 1.10);
- =СУММКВ([адреса комірки 1]:[адреса комірки 2]), при якому в перше поле **Число 1** діалогового вікна функції **СУММКВ** (рис. 1.9) вводиться посилання на діапазон комірок.

Приклад № 4. Функція СУММКВ(B2:B4) обчислює суму квадратів усіх чисел, які містяться в комірках від B2 до B4, тобто виконує наступні обчислення: $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 3^2 + 8^2 + 6^2 = 109$ (рис. 1.11).

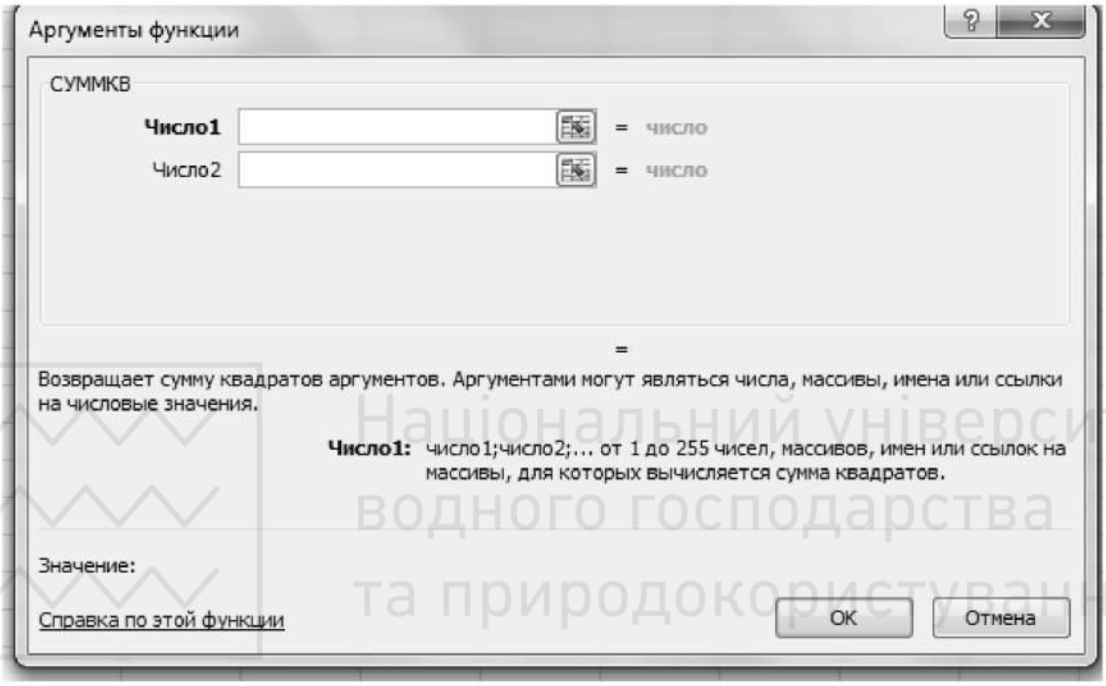


Рис. 1.9. Діалогове вікно функції **СУММКВ**

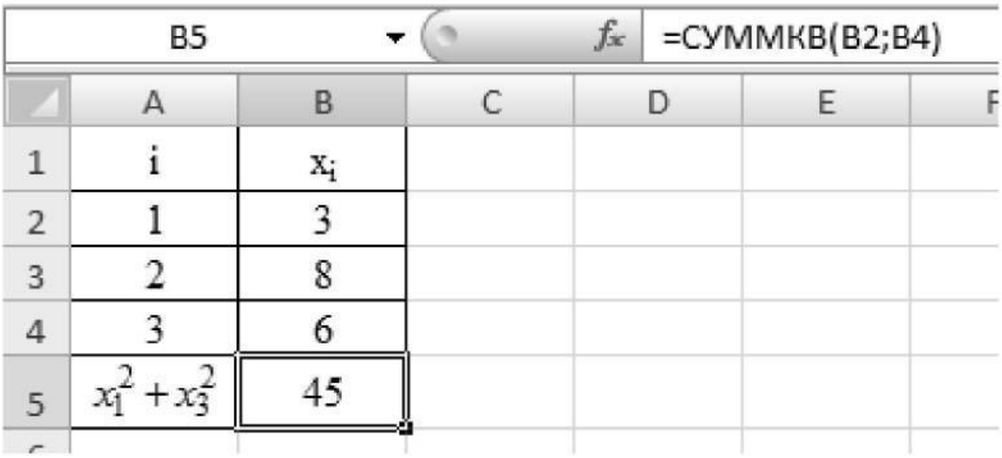
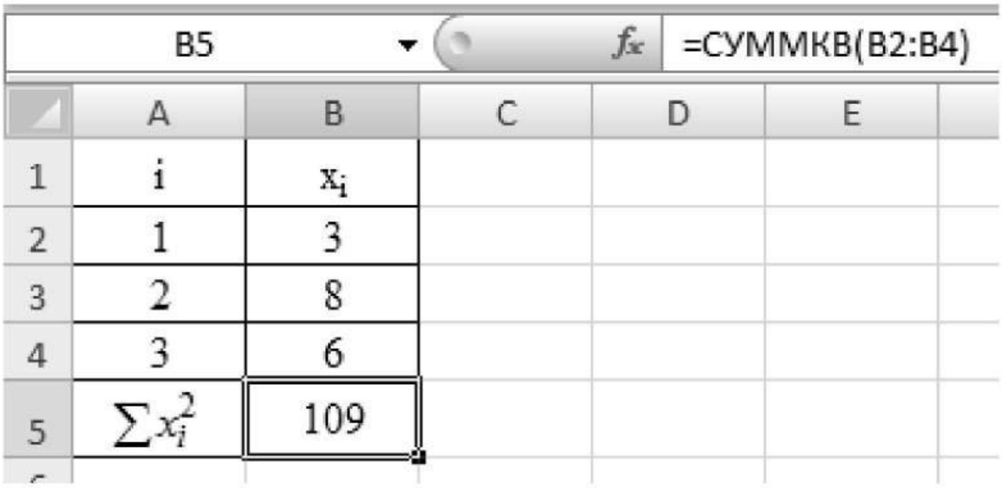


Рис. 1.10. Приклад № 3 для функції **СУММКВ**



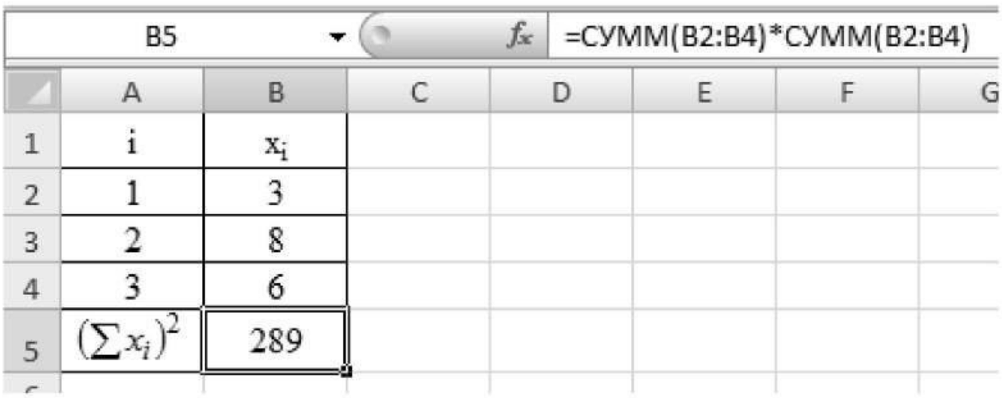
B5 | =СУММКВ(B2:B4)

	A	B	C	D	E
1	i	x_i			
2	1	3			
3	2	8			
4	3	6			
5	$\sum x_i^2$	109			

Рис. 1.11. Приклад № 4 для функції **СУММКВ**

☝ **Зауваження.**

1. Вираз $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ $\neq$ виразу $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, де вираз $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ можна представити добутком функцій **СУММ×СУММ** або **СУММ^2**.
Наприклад, функція =СУММ(B2:B4)×СУММ(B2:B4) обчислює добуток сум усіх чисел, які містяться в комірках від B2 до B4, тобто виконує наступні обчислення: $\left(\sum\limits_{i=1}^{3} x_i\right)^2 = (3+8+6)\cdot(3+8+6) = 289$ (рис. 1.12).



B5 | =СУММ(B2:B4)*СУММ(B2:B4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x_i					
2	1	3					
3	2	8					
4	3	6					
5	$\left(\sum x_i\right)^2$	289					

Рис. 1.12. Результат розрахунків виразу $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$

Функція **СУММПРОИЗВ** – визначає суму добутків масивів значень. Дана функція має поля для введення від 2 до 255 аргументів в які можуть бути введені масиви (рис. 1.13). Дана функціє використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i$ і т.п.. При використанні функції **СУММПРОИЗВ** потрібно пам’ятати, що аргументи, які є масивами, повинні мати однакову розмірність, інакше дана функція видає повідомлення про помилку #ЗНАЧ!.

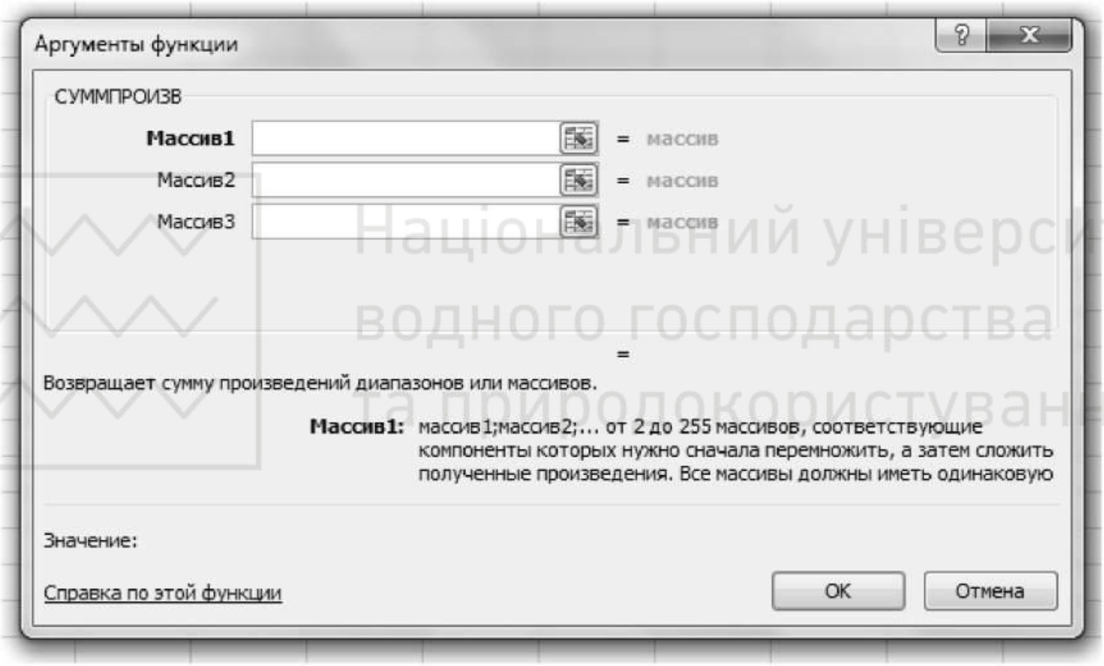


Рис. 1.13. Діалогове вікно функції **СУММПРОИЗВ**

Під час використання даної функції у рядочку формул запис відображається наступним чином: =СУММПРОИЗВ(масив1;масив2;масив3;…), де вміст полів відокремлюються одне від одного знаком « **;** ». Наприклад, функція СУММПРОИЗВ(B2:B4;C2:C4) обчислює суму добутків компонентів двох масивів x_i та y_i $(i = \overline{1,3})$, які містяться в комірках від B2 до C4, а потім додає отримані добутки, тобто виконує наступні обчислення: $\sum x_i y_i = 3 \cdot 4 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 2 = 96$.

B5 f_x =СУММПРОИЗВ(B2:B4;C2:C4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x_i	y_i				
2	1	3	4				
3	2	8	9				
4	3	6	2				
5	$\sum x_i y_i$	96					

Рис. 1.14. Приклад функції **СУММПРОИЗВ**

Зауваження.

1. Вираз $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq$ виразу $\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$, де вираз $\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$ можна представити добутком функцій **СУММ×СУММ**. Наприклад, функція =СУММ(B2:B4)×СУММ(C2:C4) обчислює добуток сум компонентів двох масивів x_i та y_i $(i=\overline{1,3})$, тобто виконує наступні обчислення: $\sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{i=1}^{3} y_i = (3+8+6)\cdot(4+9+2) = 255$ (рис. 1.15).

B5 f_x =СУММ(B2:B4)*СУММ(C2:C4)

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x_i	y_i				
2	1	3	4				
3	2	8	9				
4	3	6	2				
5	$\sum x_i y_i$	255					

Рис. 1.15. Результат розрахунків виразу $\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$

1.2.2. Функції для роботи з матрицями

MS Excel використовує особливий вид функцій, які дозволяють виконувати обчислення над масивами. Результат обчислення за допомогою цих функцій записується або у діапазон комірок (для усіх комірок масиву застосовується та сама функція), або в одну комірку.

При роботі з такими функціями слід дотримуватися наступної послідовності виконання дій:

1) виділити діапазон комірок, в яких має бути розташований результат після виконання функції;
2) викликати відповідну функцію;
3) у діалоговому вікні функції заповнити поля, відведені для аргументів функції;
4) натиснути комбінацію клавіш **Ctrl + Shift + Enter** для завершення вводу функції (для цього спочатку натискається та утримується комбінація клавіш Ctrl + Shift, а потім натискається клавіша Enter).

Розглянемо деякі функції для роботи з матрицями більш детально.

Функція **МУМНОЖ** – дозволяє отримати добуток двох масивів (рис. 1.16). Для активізації даної функції використовують **Мастер функций** та обирають категорію **Математические**. Результатом добутку є масив з кількістю рядочків, як в масиві 1 та кількістю стовпців, як в масиві 2.

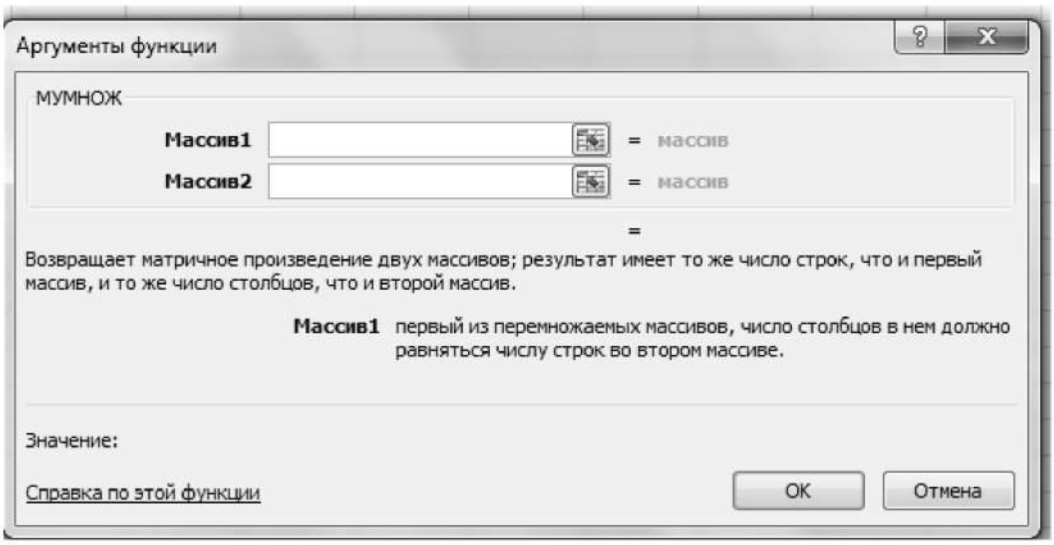


Рис. 1.16. Діалогове вікно функції **МУМНОЖ**

☝ **Зауваження.**

1. Кількість стовпців аргументу масив 1 має бути такою самою, як кількість рядочків аргументу масив 2.
2. Обидва масиви мають містити лише числа.
3. Якщо хоча б одна комірка одного з масивів є пустою чи містить текст, або якщо кількість стовпців масив 1 відрізняється від кількості рядків масив 2, то функція **МУМНОЖ** видає інформацію про помилку #ЗНАЧ!.

Наприклад, розглянемо послідовність визначення добутку двох масивів A та B (рис. 1.17).

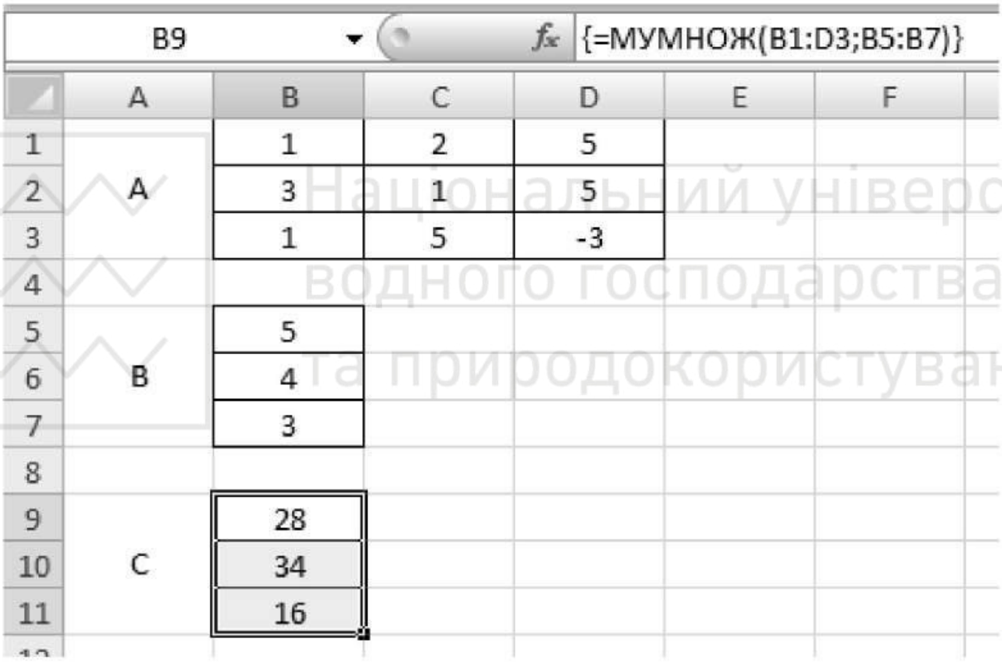


Рис. 1.17. Результати розрахунків за допомогою функції **МУМНОЖ**

Оскільки масив A має розмір 3×3, а масив B – 3×1, то результатом добутку цих двох масивів буде масив C , розміром 3×1.

Послідовність виконання дій щодо визначення добутку двох масивів наступна:

Крок 1. Виділити діапазон комірок розміром 3×1, в яких мають бути розташовані компоненти масиву C , наприклад B9:B11.

Крок 2. Викликати функцію **МУМНОЖ** (рис. 1.16).

Крок 3. Спочатку, в поле **Массив 1** ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву A, що розташовані в комірках з адресою B1:D3. Потім, в поле **Массив 2** ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву B, що розташовані в комірках з адресою B5:B7 (рис. 1.18).

Крок 4. Для завершення вводу натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter, в результаті чого отримуємо масив C, наведений на рис. 1.17.

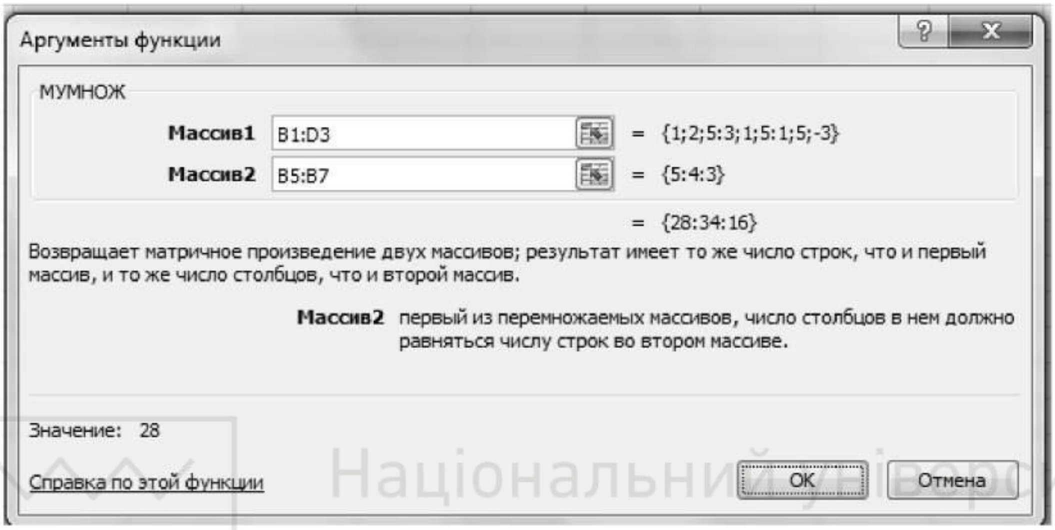


Рис. 1.18. Результат введення аргументів для функції **МУМНОЖ**

Функція **ТРАНСП** – перетворює горизонтально орієнтований діапазон комірок у вертикально орієнтований та навпаки (рис. 1.19). Для активізації даної функції використовують **Мастер функций** та обирають категорію **Ссылки и массивы**. Транспонування масиву полягає в тому, що перший рядочок масиву 1 стає першим стовпчиком нового масиву 2, другий рядочок – другим стовпчиком і т. д..

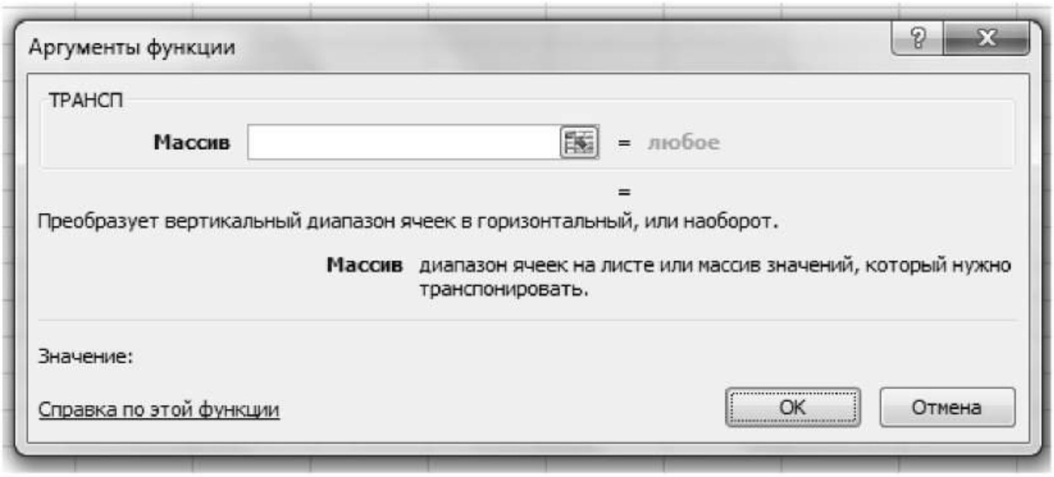


Рис. 1.19. Діалогове вікно функції **ТРАНСП**

Наприклад, розглянемо послідовність транспонування масиву A (рис. 1.20).

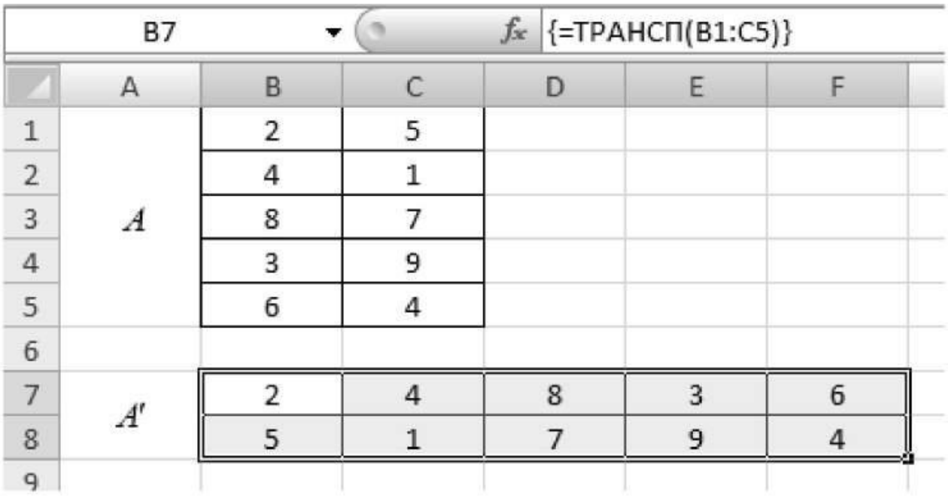


Рис. 1.20. Результати розрахунків за допомогою функції **ТРАНСП**

Оскільки масив A має розмір 5×2, то транспонований масив A′ буде мати розмір 2×5.

Послідовність виконання дій щодо транспонування масиву наступна:

Крок 1. Виділити діапазон комірок розміром 2×5, в яких мають бути розташовані компоненти транспонованого масиву A′, наприклад B7:F8.

Крок 2. Викликати функцію **ТРАНСП** (рис. 1.19).

Крок 3. В поле **Массив** ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву A, що розташовані в комірках з адресою B1:C5 (рис. 1.21).

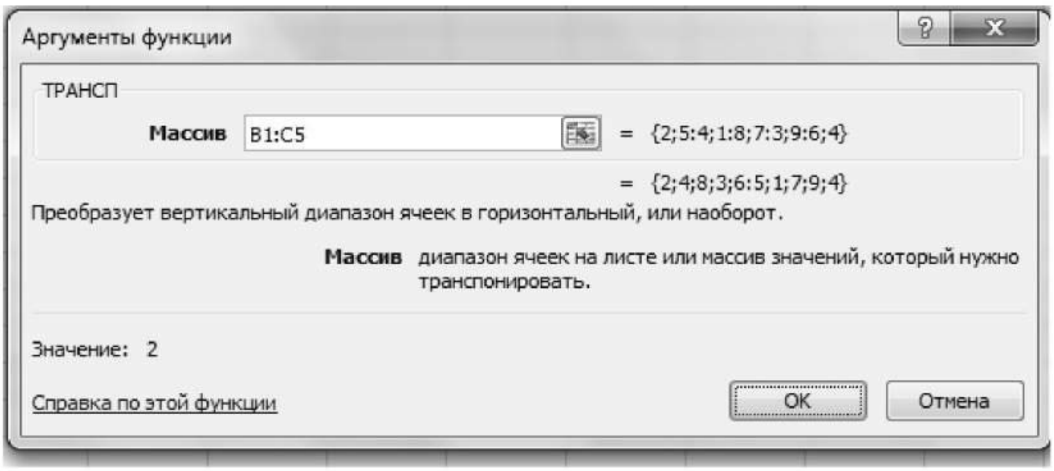


Рис. 1.21. Результат введення аргументів для функції **ТРАНСП**

Крок 4. Для завершення вводу натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter, в результаті чого отримуємо масив A', наведений на рис. 1.20.

Функція **МОБР** – дозволяє отримати обернену матрицю (рис. 1.22). Для активізації даної функції використовують **Мастер функций** та обирають категорію **Математические**. Вона застосовується до масивів у яких кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків. Деякі квадратні матриці не можуть бути оберненими, в таких випадках функція **МОБР** видає повідомлення про помилку #ЧИСЛО!. Визначник такої матриці дорівнює нулю.

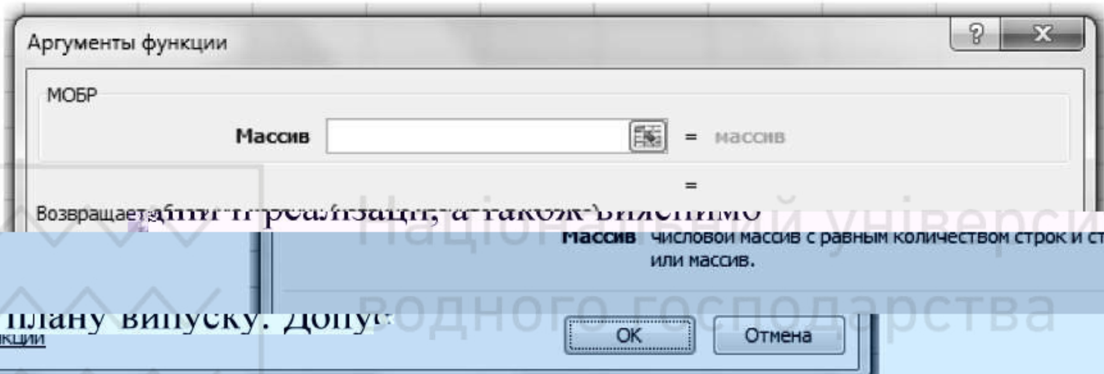


Рис. 1.22. Діалогове вікно функції **МОБР**

Наприклад, розглянемо послідовність знаходження оберненого масиву (рис. 1.23).

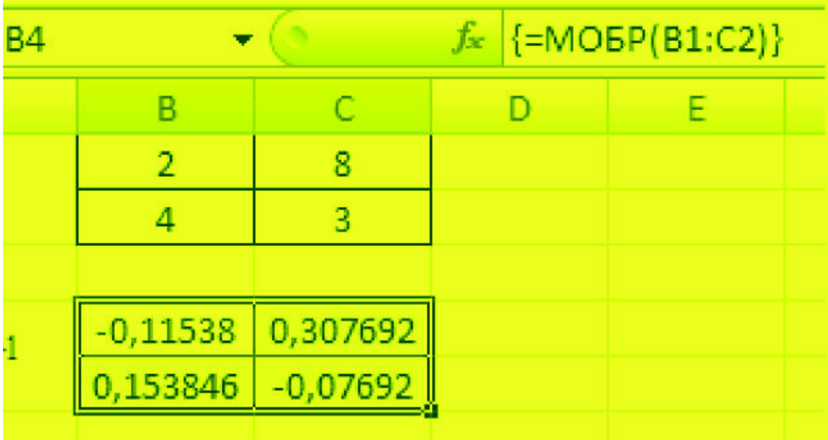


Рис. 1.23. Результати розрахунків за допомогою функції **МОБР**

Оскільки масив A має розмір 2×2, то і обернений масив A^{-1} буде мати розмір 2×2.

Послідовність виконання дій щодо знаходження оберненого масиву наступна:

Крок 1. Виділити діапазон комірок розміром 2×2, в яких мають бути розташовані компоненти оберненого масиву A^{-1}, наприклад B4:C5.

Крок 2. Викликати функцію **МОБР** (рис. 1.22).

Крок 3. В поле **Массив** ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву A, що розташовані в комірках з адресою B1:C2 (рис. 1.24).

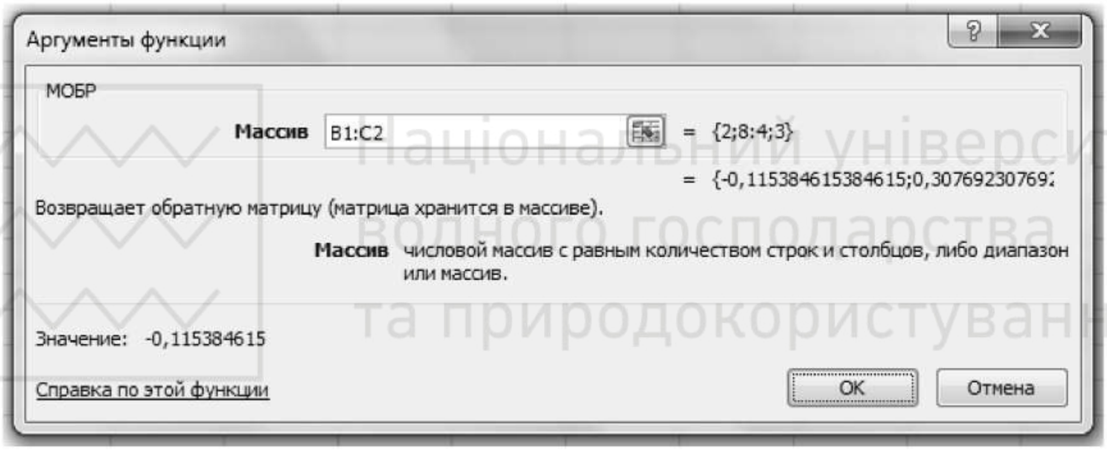


Рис. 1.24. Результат введення аргументів для функції **МОБР**

Крок 4. Для завершення вводу натиснути комбінацію клавіш Ctrl+Shift+Enter, в результаті чого отримуємо масив A^{-1}, наведений на рис. 1.23.

Функція **МОПЕД** – дозволяє обчислити визначник матриці (рис. 1.25). Для активізації даної функції використовують **Мастер функций** та обирають категорію **Математические**. Вона застосовується до масивів у яких кількість рядочків дорівнює кількості стовпчиків. Визначником матриці є число, яке обчислюється на основі значень елементів масиву.

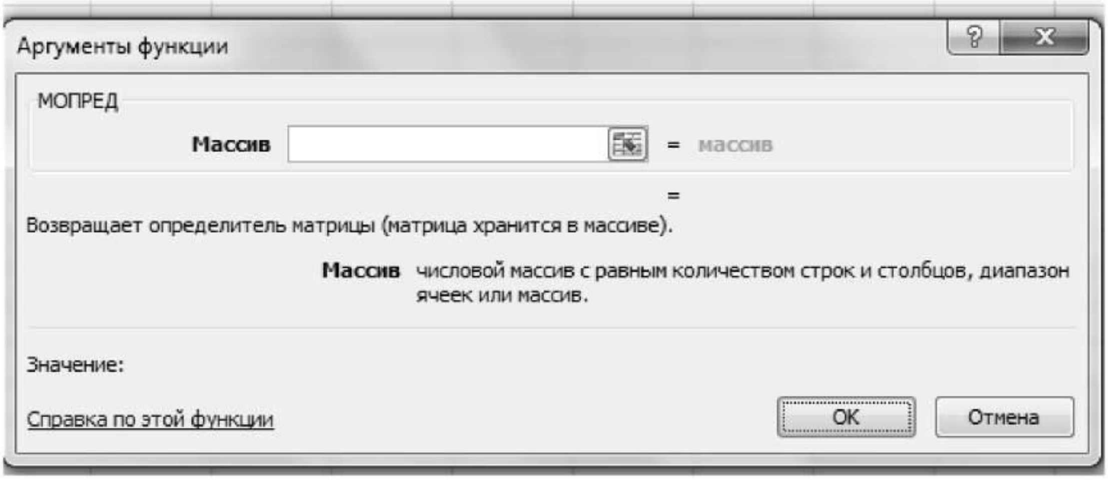


Рис. 1.25. Діалогове вікно функції **МОПРЕД**

Наприклад, розглянемо послідовність знаходження визначника масиву A (рис. 1.26).

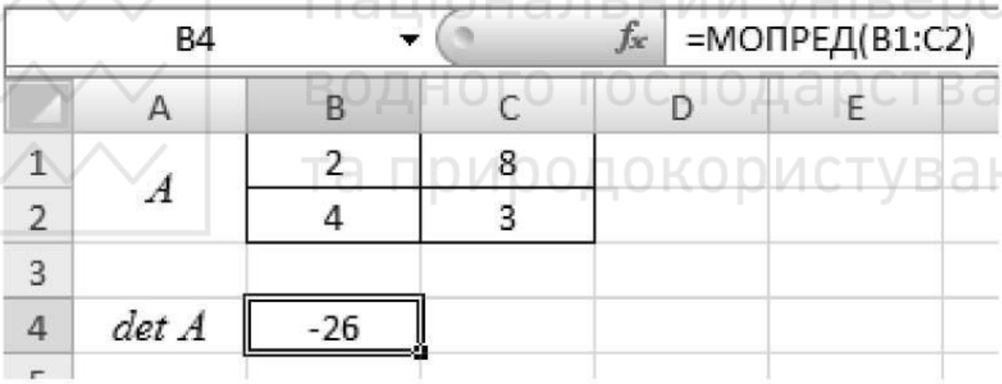


Рис. 1.26. Результати розрахунків за допомогою функції **МОПРЕД**

Результатом знаходження визначника будь–якої квадратного масиву є число det A. Послідовність виконання дій щодо обчислення визначника масиву наступна:

Крок 1. Виділити комірку, в якій має бути розташоване значення визначника масиву det A, наприклад B4.

Крок 2. Викликати функцію **МОПРЕД** (рис. 1.25).

Крок 3. В поле **Массив** ввести аргументи, які відповідають компонентам масиву A, що розташовані в комірках з адресою B1:C2 (рис. 1.27).

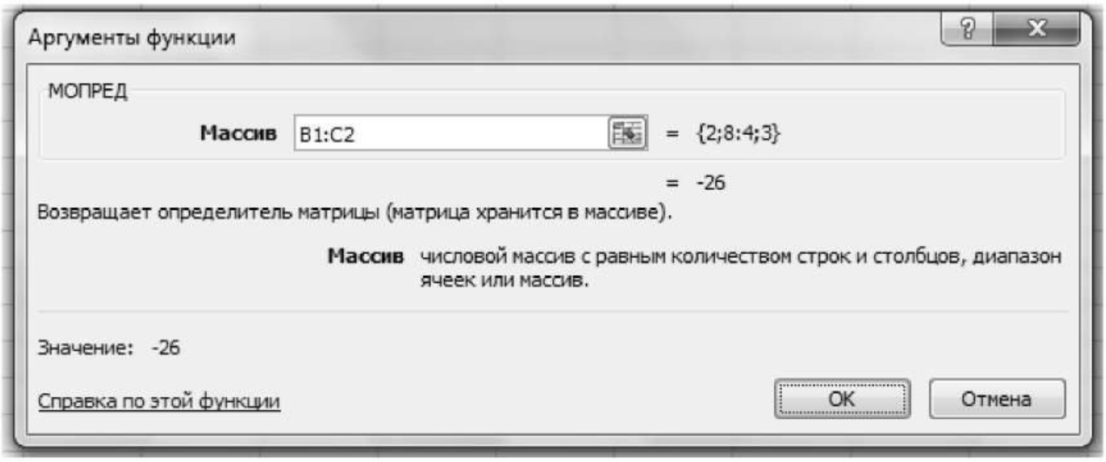


Рис. 1.27. Результат введення аргументів для функції **МОПРЕД**

Крок 4. Для завершення вводу натиснути клавішу Enter, в результаті чого отримаємо визначник масиву $\det A$, наведений на рис. 1.26.

1.2.3. Статистичні функції

Табличний процесор MS Excel містить значну бібліотеку статистичних функцій, яка користується широкою популярністю під час проведення статистичного аналізу даних. Можна стверджувати, що за спектром доступних функцій, MS Excel на сьогоднішній день майже не поступається спеціальним програмам обробки статистичних даних.

Для активізації статистичних функцій у табличному процесорі MS Excel після запуску **Мастера функций** у діалоговому вікні задається категорія **Статистические** і потім, із запропонованого переліку, вибирається відповідна функція (рис. 1.28).

Нижче наведено опис деяких найбільш поширених статистичних функцій, які використовуються при розв'язуванні задач економетричного моделювання, зокрема: **СРЗНАЧ**, **СТАНДОТКЛОНП**, **КОРРЕЛ**, **ОТРЕЗОК**, **НАКЛОН**, **FРАСПОБР**, **СТЬЮДРАСПОБР**, **ХИ2ОБР**. Розглянемо ці функції більш детально.

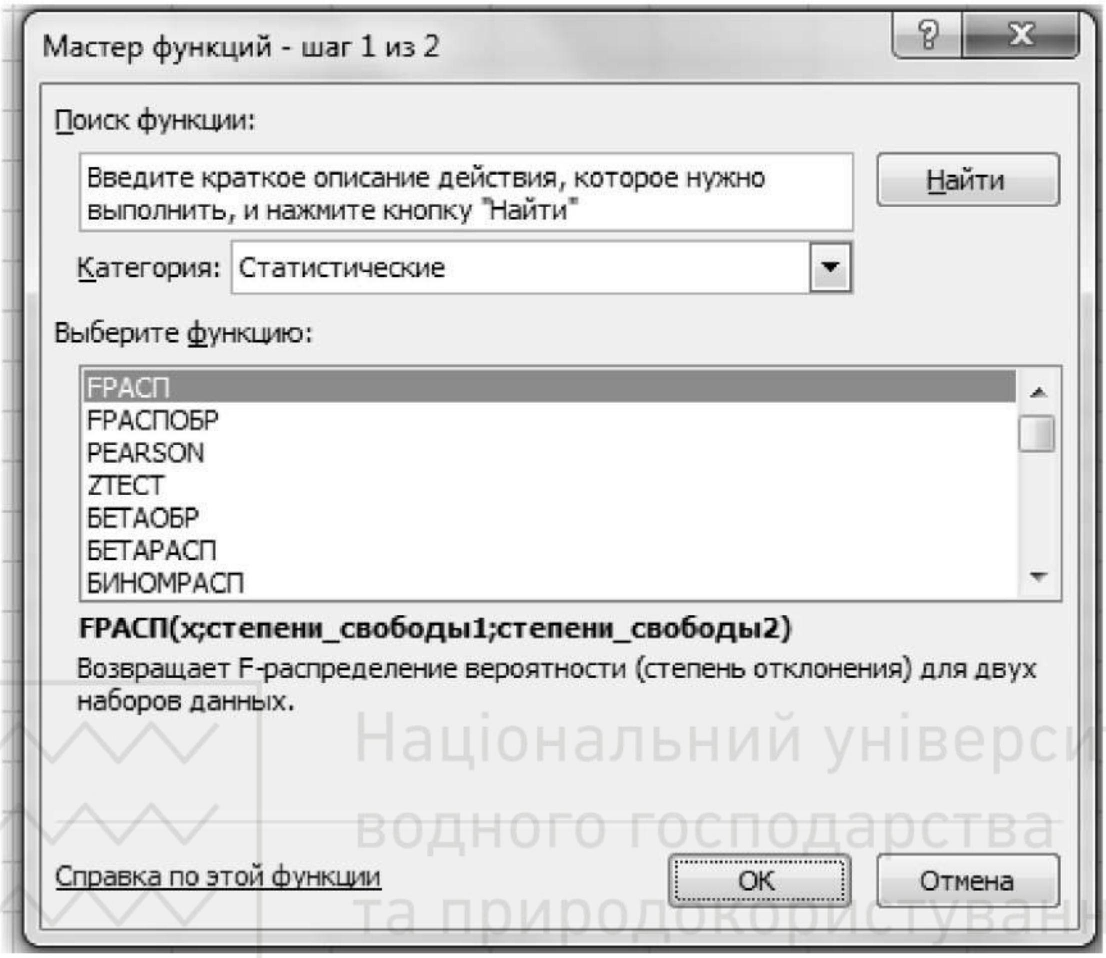


Рис. 1.28. Діалогове вікно **Мастер функций**

Функція **СРЗНАЧ** – визначає середнє арифметичне значення своїх аргументів (рис. 1.29). Дана функція має поля для введення від 1 до 255 аргументів в які можуть бути введені константи, посилання на окремі комірки або діапазони комірок, масиви, формули або інші функції, результатом яких є числа. Вона використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Під час використання даної функції у рядочку формул запис може бути відображений наступним чином:

- ❖ =СРЗНАЧ(число1;число2;число3;…), де вміст полів відокремлюються одне від одного знаком « **;** ». При цьому в перше поле **Число 1** діалогового вікна функції **СРЗНАЧ** (рис. 1.29) вводиться посилання на комірку з першим значенням, із тієї групи значень, для яких потрібно визначити середнє значення, в поле **Число 2** – з другим значенням із групи значень, і т.д.

Приклад № 5. Функція СРЗНАЧ(B2;B4) визначає суму чисел в комірках B2 та B4, тобто виконує наступні обчислення: $\dfrac{x_1 + x_3}{2} = \dfrac{3+6}{2} = 4{,}5$ (рис. 1.30);

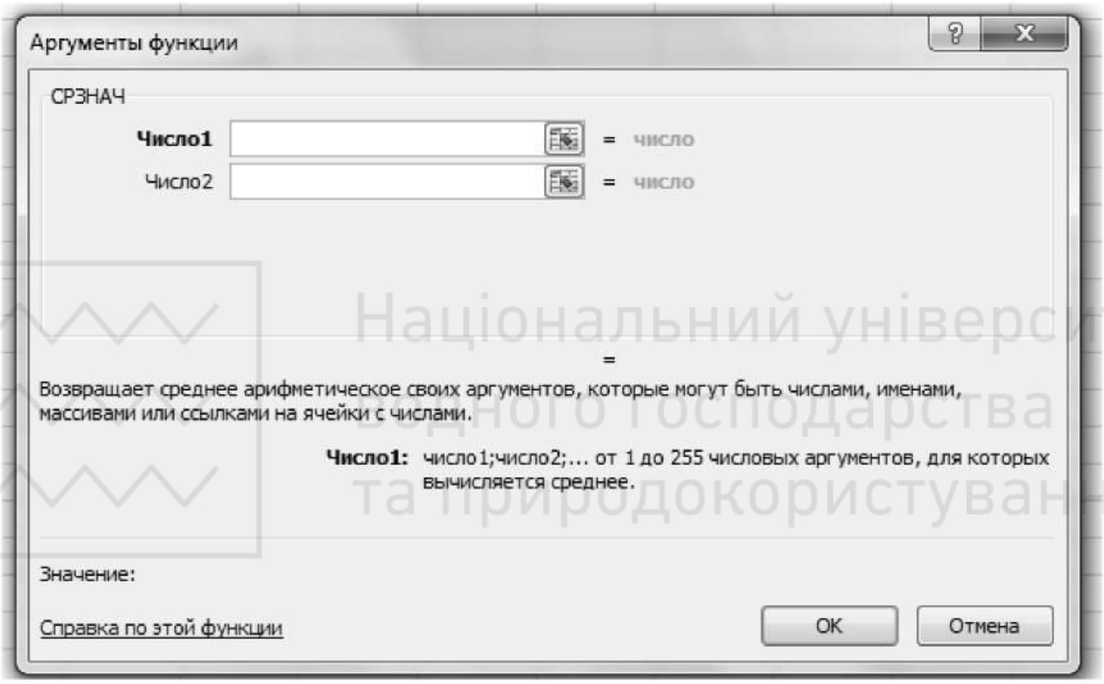


Рис. 1.29. Діалогове вікно функції **СРЗНАЧ**

- =СРЗНАЧ([адреса комірки 1]:[адреса комірки 2]), при якому в перше поле **Число 1** діалогового вікна функції **СРЗНАЧ** (рис. 1.29) вводиться посилання на діапазон комірок.

  Приклад № 6. Функція СРЗНАЧ(B2:B4) обчислює середнє значення усіх чисел, які містяться в комірках від B2 до B4, тобто виконує наступні обчислення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3} = \frac{3+8+6}{3} = 5{,}667 \text{ (рис. 1.31).}$$

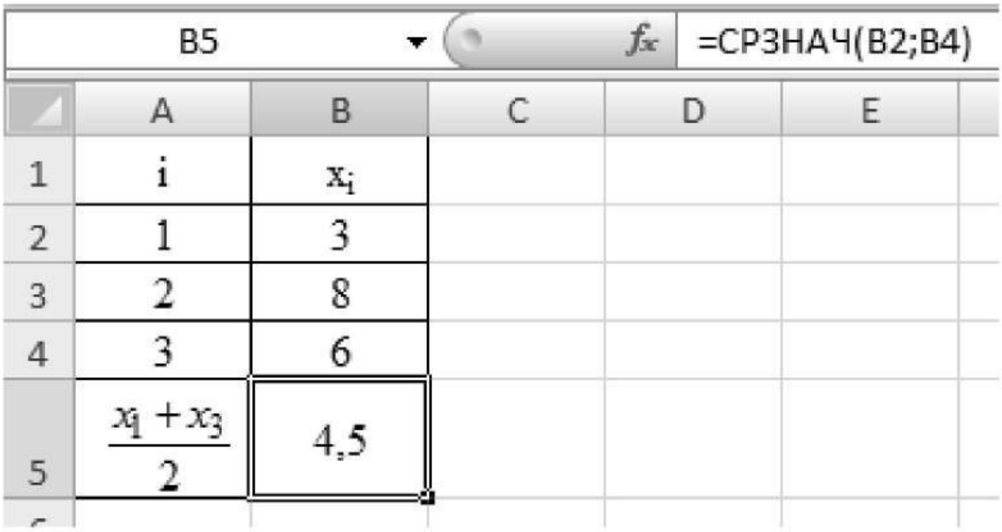


Рис. 1.30. Приклад № 5 для функції **СРЗНАЧ**

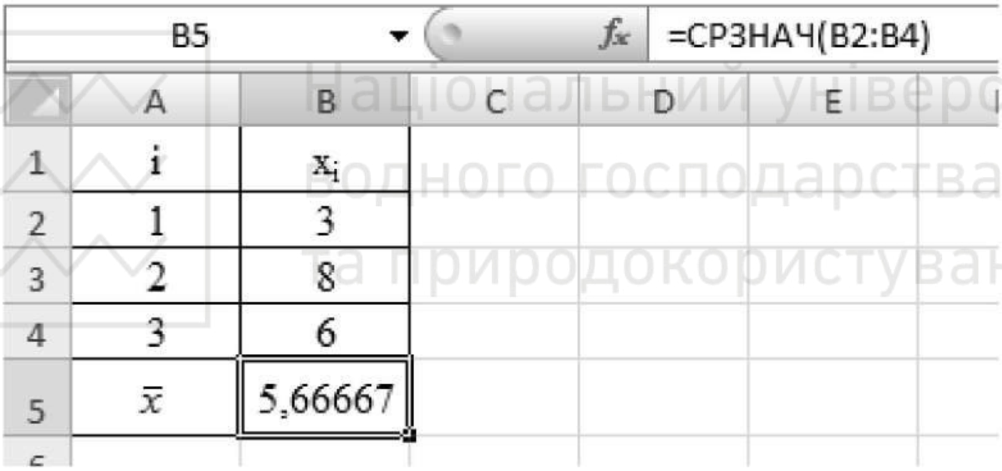


Рис. 1.31. Приклад № 6 для функції **СРЗНАЧ**

Функція **СТАНДОТКЛОНП** – розраховує стандартне відхилення по генеральній сукупності (рис. 1.32). Дана функція має поля для введення від 1 до 255 аргументів в які можуть бути введені константи, посилання на діапазони комірок, або масиви, результатом яких є усі значення генеральної сукупності. Стандартне відхилення – це міра того, наскільки широко розкидані точки даних відносно їх середнього значення. Ця функція використовується у випадку якщо потрібно обчислити вираз позначений як $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$. У випадку якщо даними є лише вибірка з генеральної сукупності, то стандартне відхилення слід визначати, використовуючи функцію **СТАНДОТКЛОН**.

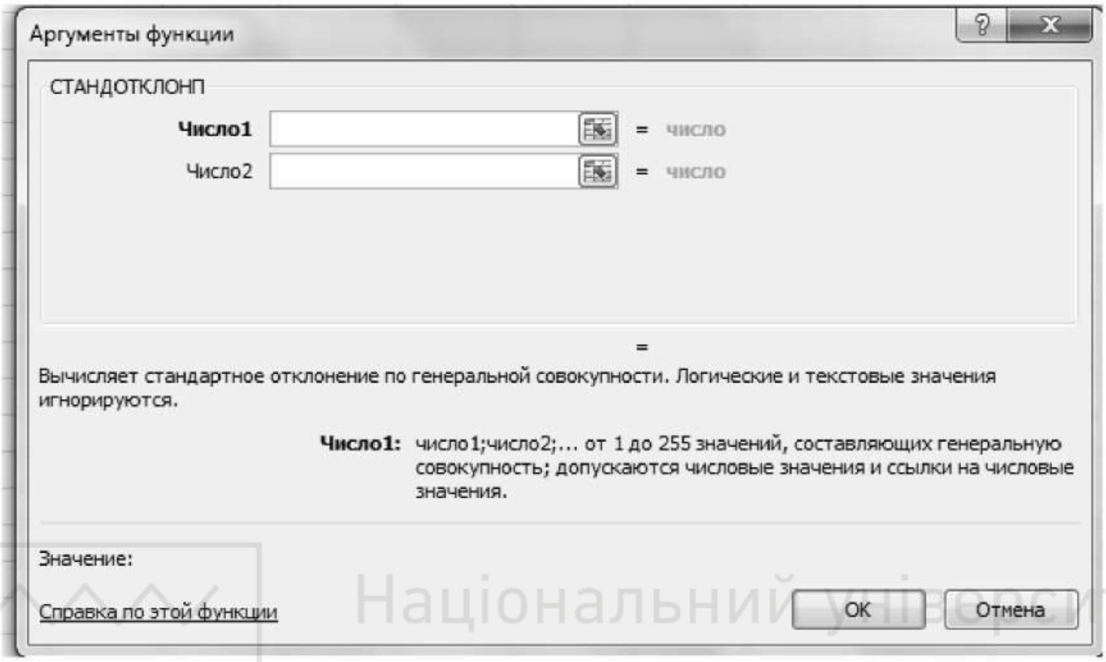


Рис. 1.32. Діалогове вікно функції **СТАНДОТКЛОНП**

Функція **КОРРЕЛ** – обчислює значення коефіцієнта парної кореляції (рис. 1.33). Даний коефіцієнт використовується для визначення взаємозв'язку між двома масивами даних. У випадку якщо **Массив 1** та **Массив 2** мають різну кількість точок даних, то функція **КОРРЕЛ** видає повідомлення про помилку #Н/Д

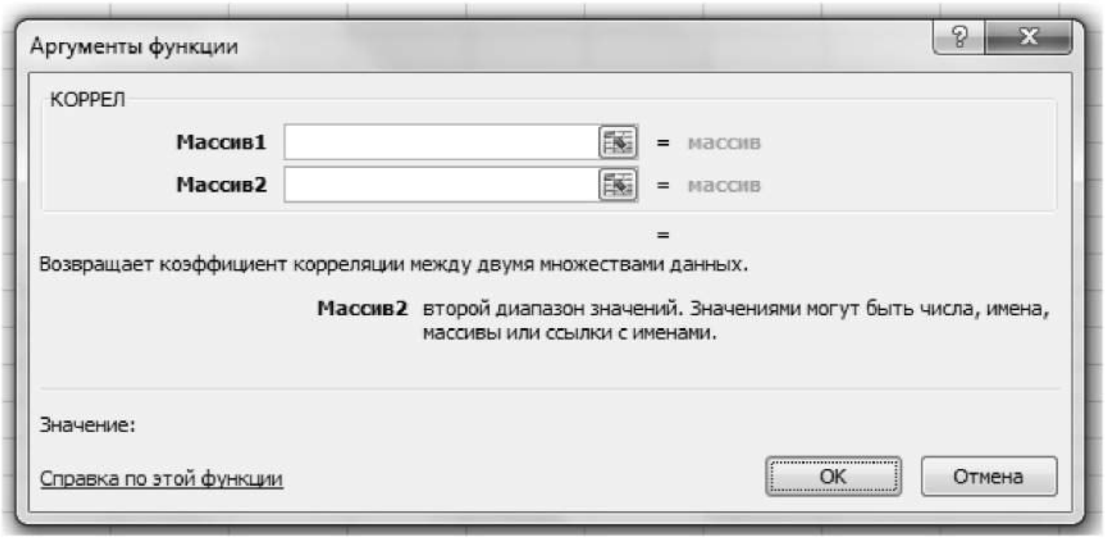


Рис. 1.33. Діалогове вікно функції **КОРРЕЛ**

Функція **ОТРЕЗОК** – використовується у випадку, коли у вибірковому рівнянні парної лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ потрібно визначити значення параметра b_0 (рис. 1.34).

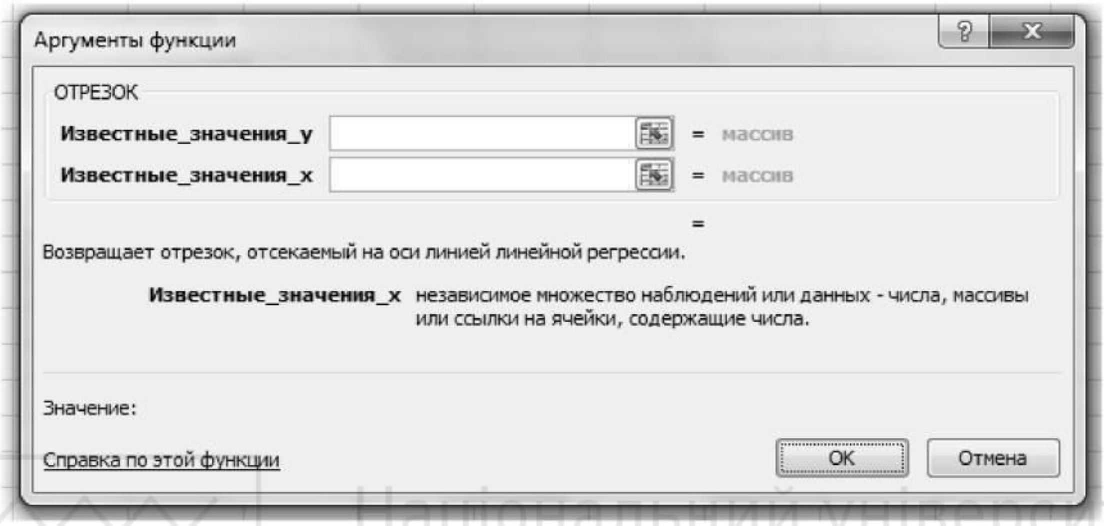


Рис. 1.34. Діалогове вікно функції **ОТРЕЗОК**

Функція **НАКЛОН** – використовується у випадку, коли у вибірковому рівнянні парної лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ потрібно визначити значення параметра b_1 (рис. 1.35).

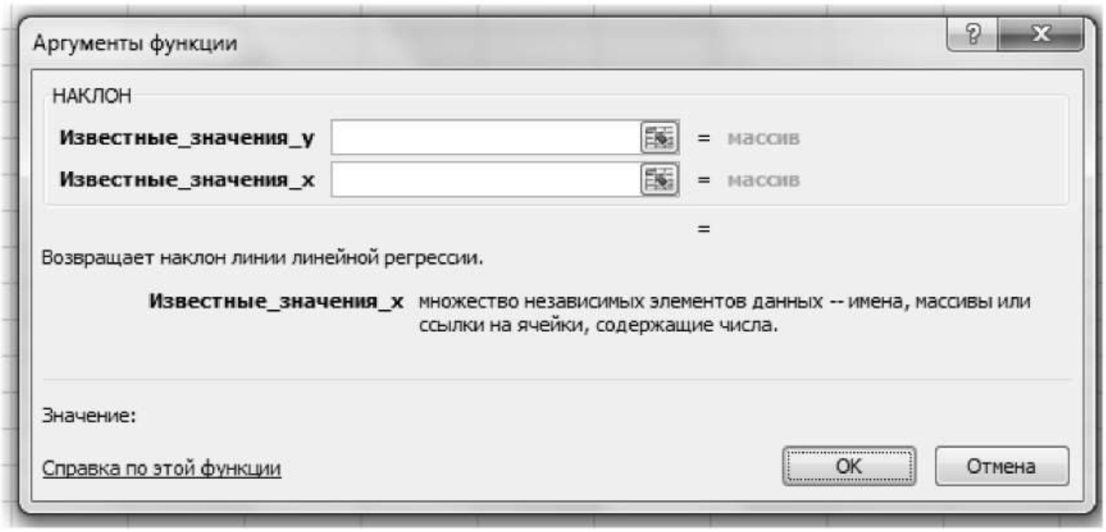


Рис. 1.35. Діалогове вікно функції **НАКЛОН**

Функція **FРАСПОБР** – дозволяє визначити критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$ (рис. 1.36).

Дана функція має три поля для введення аргументів:

- поле **Вероятность** призначене для введення рівня значимості α (як правило $\alpha = 0{,}05$ 5 або $\alpha = 0{,}01$);
- поле **Степени_свободы 1** призначене для введення значення ступеня вільності $\nu_1 = m$, де m – число незалежних змінних моделі;
- поле **Степени_свободы 1** призначене для введення значення ступеня вільності $\nu_2 = n - k$, де n – розмір статистичної вибірки, k – число параметрів моделі.

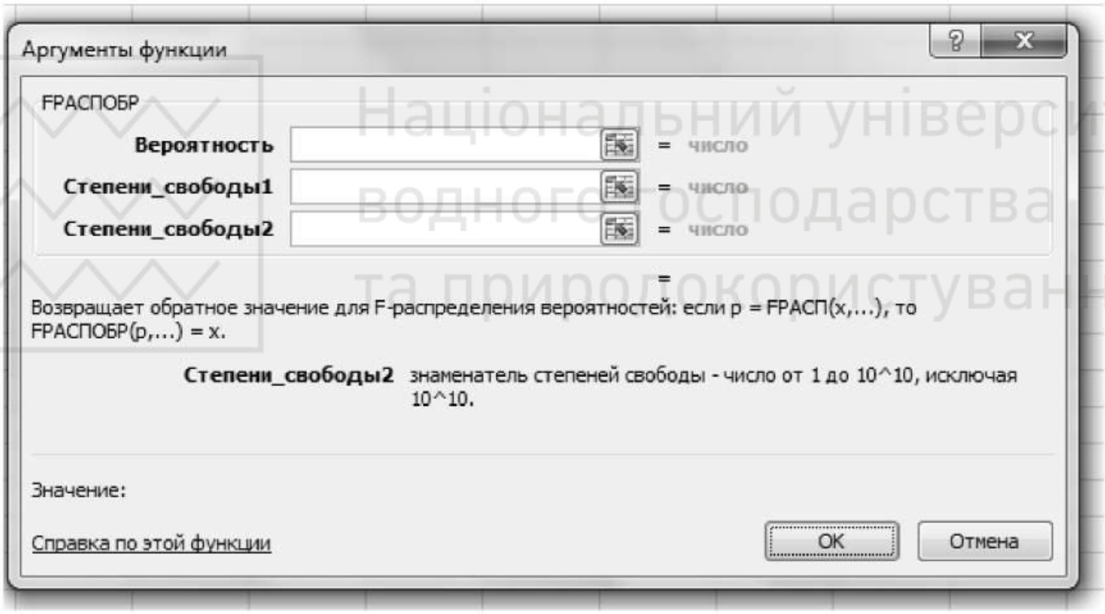


Рис. 1.36. Діалогове вікно функції **FРАСПОБР**

Функція **СТЬЮДРАСПОБР** – дозволяє визначити критичне значення критерію Ст'юдента $t_{кр} = t_{\alpha/2}$ (рис. 1.37).

Дана функція має два поля для введення аргументів:

- поле **Вероятность** призначене для введення рівня значимості α (як правило $\alpha = 0{,}05$ або $\alpha = 0{,}01$);
- поле **Степени_свободы** призначене для введення значення ступеня вільності $\nu = n - k$, де n – розмір статистичної вибірки, k – число параметрів моделі.

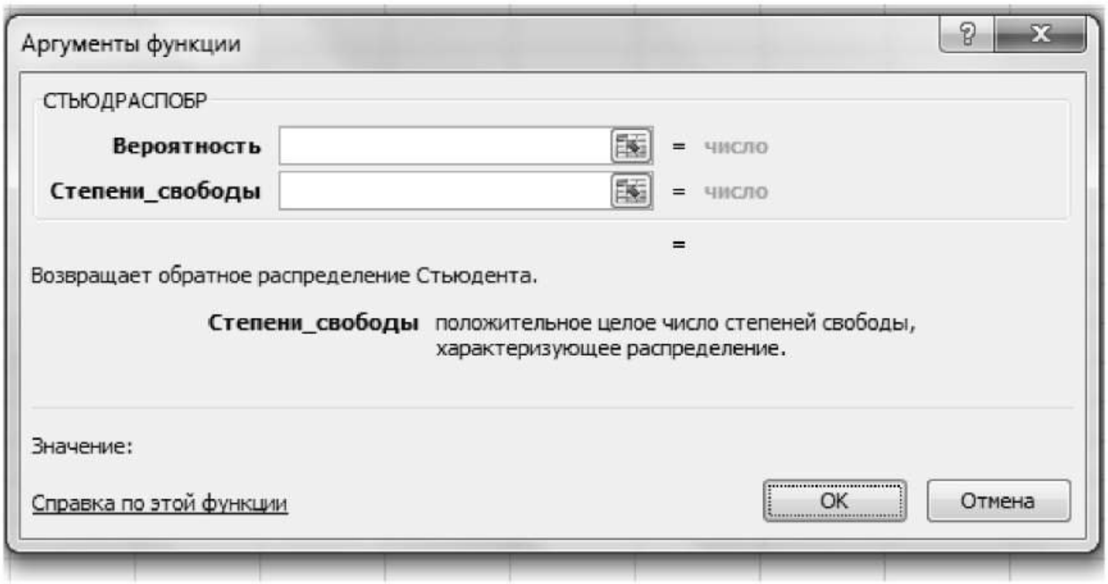


Рис. 1.37. Діалогове вікно функції **СТЬЮДРАСПОБР**

Функція **ХИ2ОБР** – дозволяє визначити критичне значення критерію χ^2.

Дана функція має два поля для введення аргументів:

- поле **Вероятность** призначене для введення рівня значимості α (як правило $\alpha = 0{,}05$ або $\alpha = 0{,}01$);
- поле **Степени_свободы** призначене для введення значення ступеня вільності $\nu = \dfrac{1}{2}\mathrm{m}(\mathrm{m}-1)$, де m – число незалежних змінних моделі.

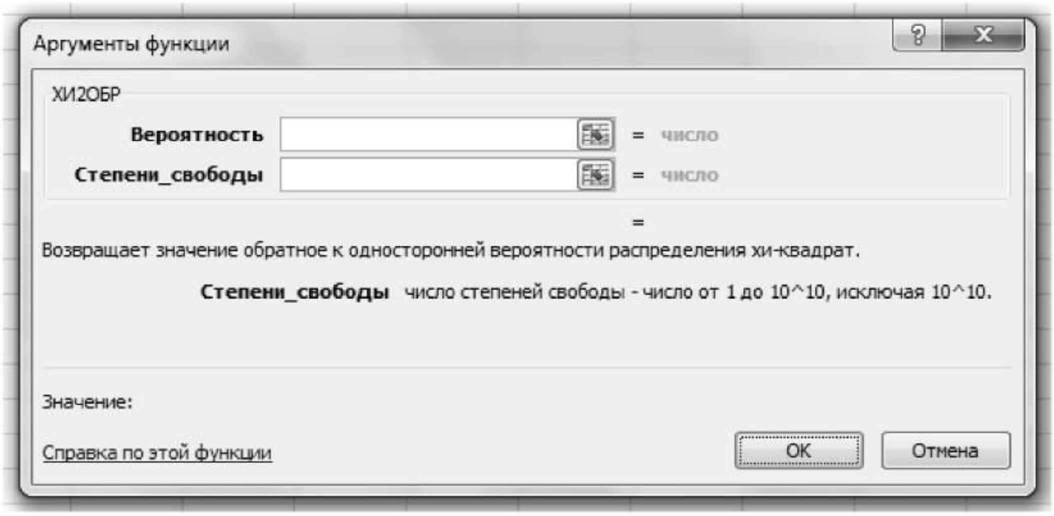


Рис. 1.38. Діалогове вікно функції **ХИ2ОБР**

1.3. ПАКЕТ АНАЛИЗ ДАННЫХ

1.3.1. Загальна характеристика пакету Анализ данных

До складу MS Excel входить набір засобів **Анализ данных** (рис. 1.39), який призначений для розв'язку складних статистичних та інженерно-економічних задач. З метою аналізу даних за допомогою інструментів **Пакета анализа** зазначаються вхідні дані та обираються параметри. В залежності від поставленої задачі, аналіз виконується за допомогою статистичної або інженерно-економічної макрофункції та виводиться результат розрахунків у вигляді таблиць. Інші засоби дозволяють представити результати аналізу у графічному вигляді. Засоби, які входять до пакету аналізу даних, описані нижче. Команда **Анализ данных** активізується з вкладки **Данные**. Якщо ця команда відсутня в меню, її потрібно завантажити шляхом активації ряду команд: кнопка **«Office» /** кнопка **«Параметры Excel»** / вкладка **Надстройки** / кнопка **Перейти… / Пакет анализа**.

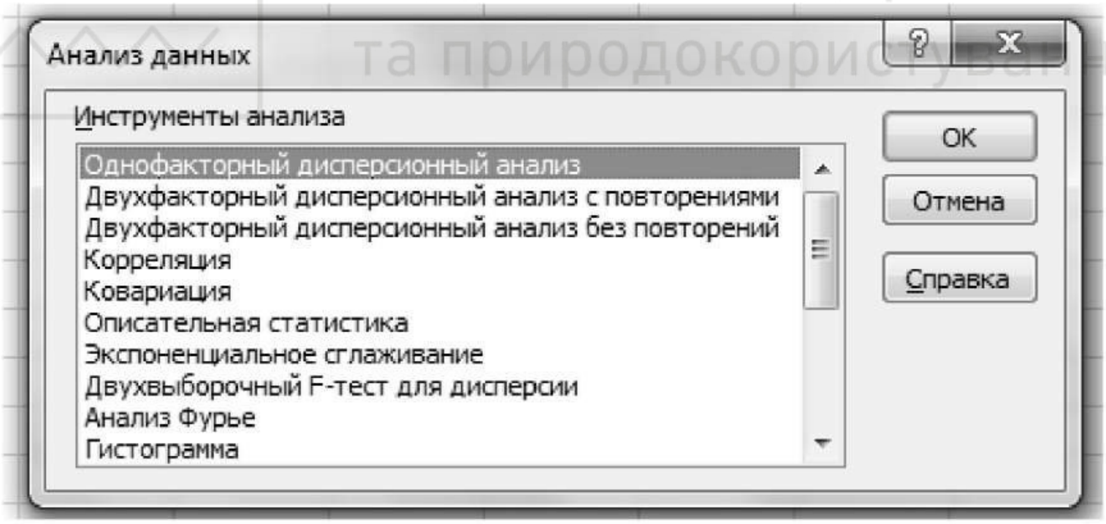


Рис. 1.39. Діалогове вікно інструменту **Анализ данных**

Засоби даного пакету дозволяють здійснювати:

- дисперсійний, кореляційний, коваріаційний та лінійний регресійний аналіз;
- аналіз Фур'є;
- описову статистику;

- створювати вибірку з генеральної сукупності;
- експоненціальне згладжування;
- «Z»– та «T» тести;
- визначення рангу та персентиля;
- генерацію випадкових чисел та інше.

1.3.2. Послідовність розв'язання задач економетричного аналізу із застосуванням пакету Анализ данных

Процес розв'язання будь-якої задачі економіко-математичного моделювання у середовищі пакету аналізу складається з наступних послідовних кроків:

1) вибір з вкладки **Данные** табличного процесора MS Excel команди **Анализ данных**;
2) вибір інструменту аналізу;
3) формування вихідних даних;
4) вибір параметрів виводу результатів розв'язання задачі;
5) безпосереднє розв'язання задачі;
6) вивід результатів розв'язання задачі на екран монітору і на принтер .

Розглянемо ці кроки більш детально:

Крок 1. Здійснюється запуск команди **Анализ данных** табличного процесора MS Excel з вкладки **Данные** (рис. 1.39).

Крок 2. У меню пакету **Анализ данных** вибирається один з дев'ятнадцяти інструментів аналізу, який дозволяє розв'язати сформульовану задачу в залежності від того, до якого класу ця задача належить:

- **Дисперсионный анализ** – в залежності від кількості факторів (одного або двох) обирається засіб аналізу дисперсії;
- **Корреляционный анализ** – дозволяє встановити чи є асоційованими між собою набори даних за величиною, тобто, збільшення значень змінних з одного набору даних пов'язані із збільшенням значень іншого набору (додатньокорельовані), або, навпаки, зменшення значень змінних з одного набору даних пов'язані із збільшенням значень іншого набору (від'ємнокорельовані), або дані обох діапазонів ніяк не пов'язані між собою (нульова кореляція);

- **Ковариационный анализ** – обчислює значення функції **КОВАР** для кожної пари змінних та формує матрицю коефіцієнтів коваріації;
- **Описательная статистика** – створює статистичний звіт, який містить інформацію про тенденції та мінливість вхідних даних;
- **Экспоненциальное сглаживание** – застосовується з метою передбачення значення на основі прогнозу для минулого періоду, скоректованого з врахуванням похибок у цьому прогнозі;
- **Двухвыборочный F–тест для дисперсии** – застосовується для порівняння дисперсії двох генеральних сукупностей;
- **Анализ Фурье** – призначений для розв'язку задач в лінійних системах та аналізу періодичних даних на основі методу швидкого перетворення Фур'є;
- **Гистограмма** – використовується для визначення вибіркових та інтегральних частот потрапляння даних у вказані межі значень;
- **Скользящее среднее** – використовується для розрахунку значень у прогнозному періоді на основі середнього значення змінної для вказаної кількості попередніх періодів;
- **Генерация случайных чисел** – використовується для заповнення діапазону випадковими числами, вибраними з одного або декількох розподілів;
- **Ранг и персентиль** – використовується з метою виводу таблиць, які містять порядковий та відсотковий ранг для кожного значення у наборі даних. Даний інструмент застосовується для аналізу відносного положення даних у наборі.
- **Регрессия** – лінійний регресійний аналіз полягає у підборі залежності для набору даних спостереження за допомогою методу найменших квадратів. Даний інструмент використовується для аналізу впливу на окрему залежну змінну значень однієї або декількох незалежних змінних.
- **Выборка** – створює вибірку з генеральної сукупності, розглядаючи вхідний діапазон як генеральну сукупність.
- **Т–тест** – перевіряє рівність середніх значень генеральної сукупності по кожній вибірці.
- **Z–тест** – використовується з метою перевірки гіпотези про розбіжність між середніми двох генеральних сукупностей.

Крок 3. Після вибору відповідного інструменту аналізу, відкривається вікно вводу вихідних даних задачі та параметрів виводу (рис. 1.40). Дане вікно поділяється на декілька зон.

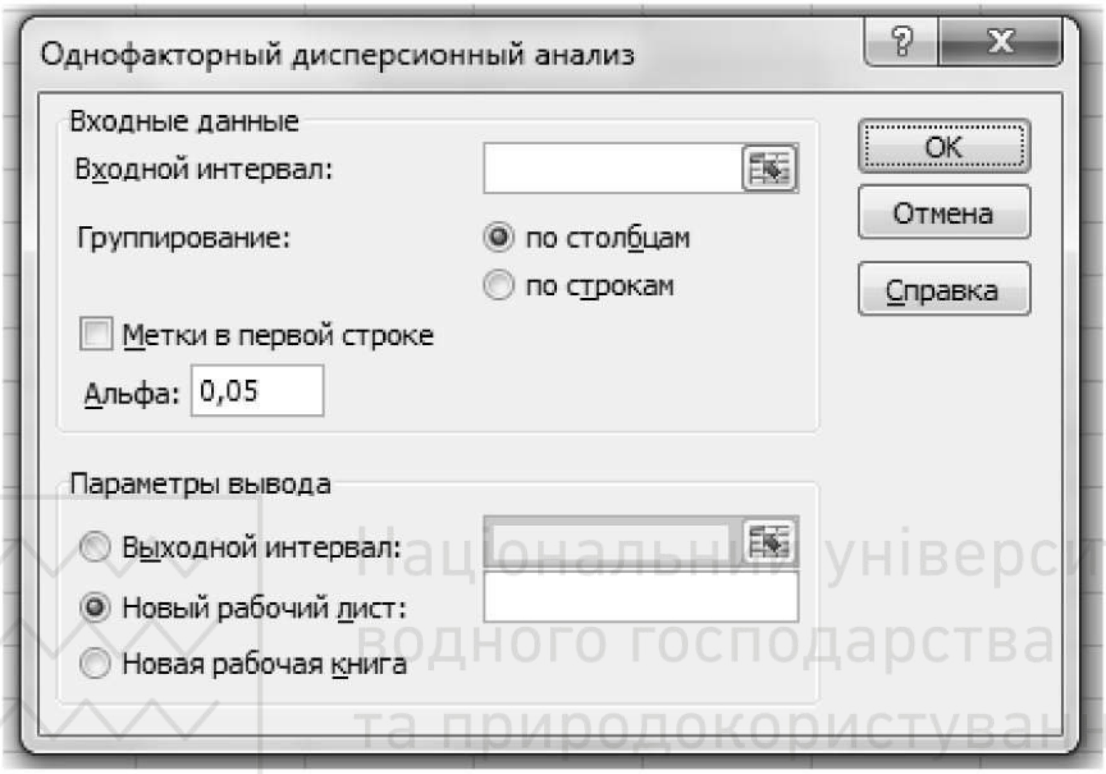


Рис. 1.40. Вікно вводу вихідних даних та параметрів виводу

❖ Зона **Входные данные**.

Входной интервал – містить одне або два поля для вводу діапазону посилань на аргументи, в яких містяться дані. Вхідні дані можуть розташовуватись як по стовпцях, так і в рядках. Для цього слід зазначити спосіб групування даних – **Группирование**, – **по столбцам** або **по строкам**. У випадку коли перший рядок або стовпець діапазону вхідних даних містить назву, слід встановити перемикач у відповідне положення – **Метки в первуй строке** або **Метки в первом столбце**. Для розрахунків також слід зазначити рівень значимості **Альфа** (α) або рівень надійності – **Уровень надежности** (p). В цій же зоні можуть також міститися поля для вводу додаткової інформації такі, як: кількість рядків для вибірки, фактор затухання, вид розподілу та інші.

❖ Зона **Параметры вывода**.

В цій зоні можна обрати один з трьох варіантів способу виводу результатів розрахунків: **Выходной интервал**, **Новый рабочий лист** або **Новая рабочая книга**. При виборі способу **Выходной интервал** слід вказати посилання на комірку, яка буде лівою верхньою коміркою вихідного діапазону обчислених результатів. Вихідний діапазон формується автоматично в залежності від задачі яка розв'язується, тому при виводі результатів даним способом слід враховувати те, щоб у вибране місце не потрапили інші розрахунки. Спосіб **Новый рабочий лист** передбачає вивід результатів розрахунку на новий лист, починаючи з комірки з адресою А1, того самого файлу. При цьому можна дати назву листу, ввівши її у відповідне поле. Якщо ж обрано спосіб **Новая рабочая книга**, то результати буде сформовано у новому файлі (книзі) на Листі 1 починаючи з комірки з адресою А1. Крім того в цій зоні можуть знаходитись й інші поля для виводу додаткової інформації такі, як: вивід графіків, підсумкова статистика, стандартні похибки та інші.

У випадку якщо виникнуть питання під час заповнення відповідних полів можна скористатися довідкою, натиснувши на відповідну кнопку **Справка**, яка розташовується в правій частині даного вікна.

Крок 4. Після завершення роботи з діалоговим вікном відповідного інструменту пакету **Анализ даннях**, шляхом натискання кнопки **ОК**, відбувається розрахунок та вивід результатів.

1.3.3. Інструмент аналізу Регрессия

Інструмент **Регрессия** служить для розрахунку параметрів рівняння лінійної регресії та перевірки його адекватності. Загальний вигляд і структуру діалогового вікна інструменту **Регрессия** наведено на рис. 1.41. Розглянемо більш докладно елементи управління цього вікна.

❖ Зона **Входные данные**:

- **Входной интервал Y** – вводяться посилання на діапазон, який містить дані залежної змінної, що аналізується. Діапазон повинен містити лише один стовпець.

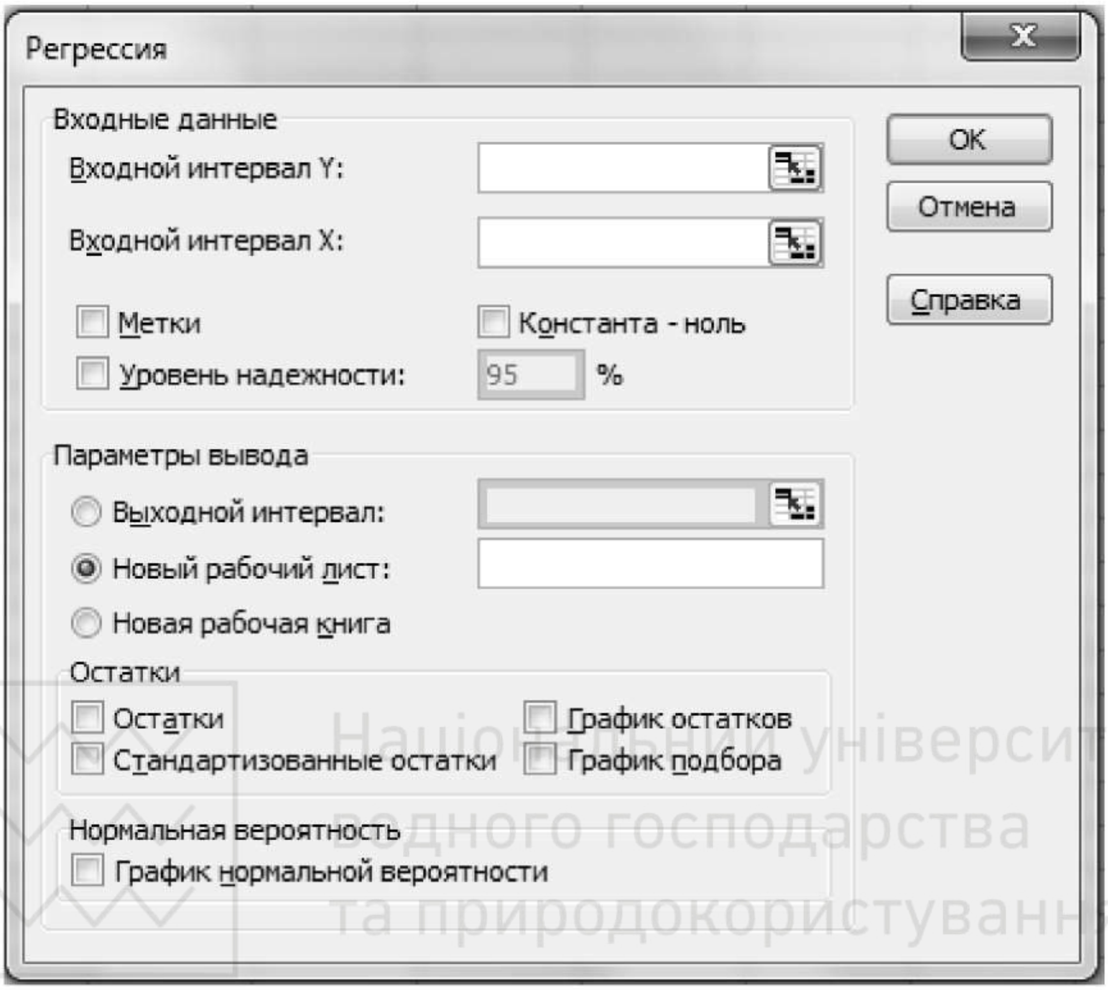


Рис. 1.41. Меню інструменту **Регрессия**

- **Входной интервал X** – вводяться посилання на діапазон незалежних (пояснюючих) даних, що аналізуються. Табличний редактор MS Excel розташовує незалежні змінні по стовпцях зліва направо у порядку зростання. Максимальна кількість вхідних діапазонів дорівнює 16.
- **Метки** – якщо перший рядок або перший стовпець вхідного інтервалу містить заголовки, то робиться відповідна позначка. У випадку якщо заголовки відсутні, відповідні назви для даних вхідного діапазону створюються автоматично.
- **Уровень надежности** – у відповідне поле вводиться рівень надійності, який буде використовуватися додатково до рівня 95 %.

- **Константа–ноль** – у випадку, коли потрібно щоб лінія регресії пройшла через початок координат, робиться відповідна позначка.

❖ Зона **Параметры вывода**. Дана зона містить варіанти способу виводу результатів, розглянуті вище. Крім того є можливість виводу додаткової інформації:

- **Остатки –** за потреби дозволяє включити залишки у вихідний діапазон; після підбору рівняння зазвичай здійснюється перевірка та аналіз залишків тому, що дуже великі відхилення суттєво спотворюють результати та призводять до помилкових висновків.
- **Стандартизованные остатки** – дозволяють виводити значення стандартизованих залишків, які обчислюються як різниця між фактичними та прогнозними значеннями, що ділиться на квадратний корінь з середньоквадратичного значення залишків.
- **График остатков** – виводить діаграму залишків для кожної незалежної змінної.
- **График подбора** – будує діаграму фактичних та прогнозних значень для кожної незалежної змінної.
- **Графикнормальной вероятности** – виводить діаграму нормальної ймовірності, яка будується наступним чином. Спочатку відбувається ранжування стандартизованих залишків. За цими рангами обчислюються стандартні значення нормального розподілу (z-значення) на основі припущення, що дані підпорядковуються нормальному розподілу. Ці z-значення і відкладаються на графіку.

Результати розрахунків виводяться у вигляді трьох таблиць (рис. 1.42).

❖ Перша таблиця **Регрессионная статистика** містить наступні поля:

- **Множественный R** – коефіцієнт множинної кореляції R;
- **R-квадрат** – коефіцієнт детермінації R^2;
- **Нормированный R-квадрат** – скоректований (адаптований (adjusted)) коефіцієнт детермінації

$$R_{adj}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1},$$

де n – кількість спостережень, m – число пояснюючих змінних моделі;

- **Стандартная ошибка** – похибка моделі σ_{ε};
- **Наблюдения** – кількість спостережень n.

Регрессионная статистика	
Множественный R	
R-квадрат	
Нормированный R-квадрат	
Стандартная ошибка	
Наблюдения	

Дисперсионный анализ					
	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия					
Остаток					
Итого					

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%
Y-пересечение						
Переменная X 1						
Переменная X 2						

Рис. 1.42. Результати розрахунків інструменту **Регрессия**

❖ Друга таблиця **Дисперсионный анализ** включає такі поля:
- **df** (degrees of freedom) – кількість ступенів свободи;
- **SS** – (Sum of Squares) – сума квадратів (відхилень);
- **MS** – (Mean of Squares) – середній квадрат;
- **F** – розрахункове значення критерію Фішера;
- **Значимость F** – теоретична ймовірність того, що при гіпотезі рівності нулю одночасно усіх коефіцієнтів моделі F – статистика є більшою емпіричного значення F. Якщо показник значущості F є меншим за $0{,}05$, то отриманий результат є значимим; якщо значимість F менше $0{,}01$, тоді отриманий результат є високо значимим.

❖ Третя таблиця містить наступні поля:
- **Коэффициенты** – параметри рівняння регресії: рядок **Y–пересечение** – відповідає оцінці параметру b_0, рядок

переменная X1 – відповідає оцінці параметру b_1, **переменная X2** – оцінці параметру b_2 і т.д.;

- **Стандартная ошибка** – стандартні похибки параметрів моделі: $\hat{\sigma}_{b_0}$, $\hat{\sigma}_{b_1}$, $\hat{\sigma}_{b_2}$ і т.д.;
- t**-статистика** – розрахункові значення критерію Ст'юдента для кожного параметра: $t^*_{b_0}$, $t^*_{b_1}$, $t^*_{b_2}$ і т.д.;
- **Р-значение** – ймовірність, яка дозволяє визначити значимість параметра регресії. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$, якщо Р-значення $\geq 0{,}05$, то параметр b_j ($j = \overline{0,k}$, де k – число параметрів моделі) є незначимим, відповідно, гіпотеза $H_0 : \beta_j = 0$ приймається; якщо Р-значення $< 0{,}05$, то параметр b_j ($j = \overline{0,k}$) є значимим, відповідно гіпотеза $H_0 : \beta_j = 0$ відхиляється;
- **Нижние 95 %** та **Верхние 95 %** – інтервали довіри для параметрів b_j ($j = \overline{0,k}$).

1.3.4. Інструмент аналізу Корреляция

Інструмент **Корреляция** служить для побудови кореляційної матриці. Загальний вигляд і структуру діалогового вікна цього інструменту наведено на рис. 1.43.

Розглянемо більш докладно елементи управління діалогового вікна **Корреляция**.

❖ Зона **Входные данные**:

- **Входной интервал** – вводяться посилання на діапазон, який містить дані що аналізуються. Посилання має складатися не менше ніж з двох суміжних діапазонів, дані в яких розташовані по рядках або стовпцях.
- **Группирование** – встановлюється перемикач в залежності від того яким способом розташовані вихідні дані: **по столбцам** або **по строкам**.

- **Метки** – якщо перший рядок або перший стовпець вхідного інтервалу містить заголовки, то робиться відповідна позначка. У випадку якщо заголовки відсутні, відповідні назви для даних вхідного діапазону створюються автоматично.

❖ Зона **Параметры вывода**. Дана зона містить варіанти способу виводу результатів, розглянуті вище.

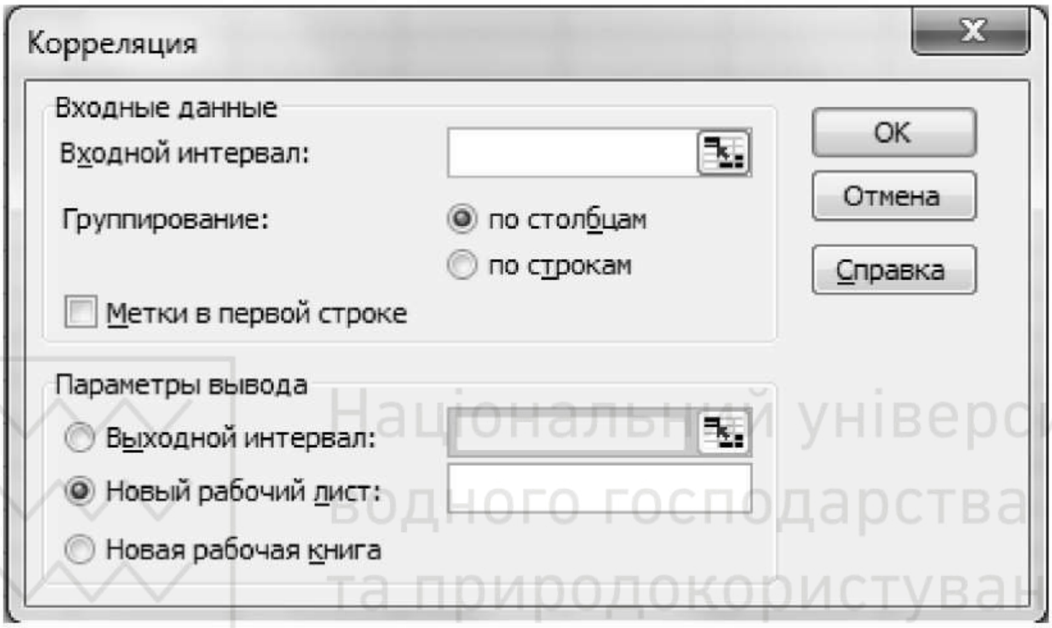


Рис. 1.43. Меню інструменту **Корреляция**

Результати розрахунків виводяться у вигляді квадратної матриці, заповненої лише наполовину, оскільки значення коефіцієнта кореляції між двома випадковими величинами не залежить від порядку їх обробки (рис. 1.44). Дана матриця є симетричною відносно головної діагоналі.

	Столбец 1	*Столбец 2*	*Столбец 3*	*Столбец 4*
Столбец 1	1			
Столбец 2	0,05	1		
Столбец 3	-0,39	0,54	1	
Столбец 4	0,70	0,67	0,86	1

Рис. 1.44. Результати розрахунків інструменту **Корреляция**

1.4. КОМПЛЕКСНІ ПРИКЛАДИ ЕКОНОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.4.1. Лінійні економетричні моделі

Приклад 1.1

Класична модель парної лінійної регресії

Для деякого регіону виконується дослідження залежності витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця (Q) від наявного щомісячного доходу (D). Дані вибіркових статистичних спостережень за зазначеними показниками по 10-ти домогосподарствах наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані до прикладу 1.1

i	Витрати домогосподарств на продукти харчування, гр. од.	Наявні доходи, гр. од.
1	5,4	12,2
2	5,8	13,3
3	5,6	14,2
4	5,9	15,1
5	6,2	16,9
6	6,7	17,6
7	6,8	18,2
8	7,2	19,8
9	7,6	20,6
10	7,5	21,2

Виконати специфікацію економетричної моделі, яка описує залежність щомісячних витрат домогосподарства на продукти харчування від наявного щомісячного доходу. Визначити оцінки параметрів моделі методом найменших квадратів. Оцінити якість, адекватність і статистичну значимість побудованої моделі для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$. Для прогнозного значення щомісячного доходу $D_{pr} = 22$ гр. од. розрахувати точковий, а також інтервальні прогнози щомісячних витрат на продукти харчування для рівня довіри $p = 0{,}95$ і дати їм економічну інтерпретацію. Виконати економіко–математичний аналіз споживання на основі побудованої моделі:

- оцінити граничний вплив доходів домогосподарств на їхні витрати на продукти харчування;
- оцінити відносний вплив доходів домогосподарств на їхні витрати на продукти харчування.

Розв'язання задачі.

1. Виконуємо специфікацію економетричної моделі (рис. 1.45):
   – визначаємо залежну і незалежну змінні моделі, вводимо умовні позначення для змінних моделі:
     - x – наявні щомісячні доходи, D (незалежна змінна моделі);
     - y – витрати домогосподарств на продукти харчування щомісяця, Q (залежна змінна моделі);

	A	B	C	D	E
1	i	*y*	*x*		
2	1	5,4	12,2		
3	2	5,8	13,3		
4	3	5,6	14,2		
5	4	5,9	15,1		
6	5	6,2	16,9		
7	6	6,7	17,6		
8	7	6,8	18,2		
9	8	7,2	19,8		
10	9	7,6	20,6		
11	10	7,5	21,2		
12					

Рис. 1.45. Вихідні дані до прикладу 1.1

   – будуємо діаграму розсіювання – точковий графік, який зображує залежність між змінними парної економетричної моделі (рис. 1.46);

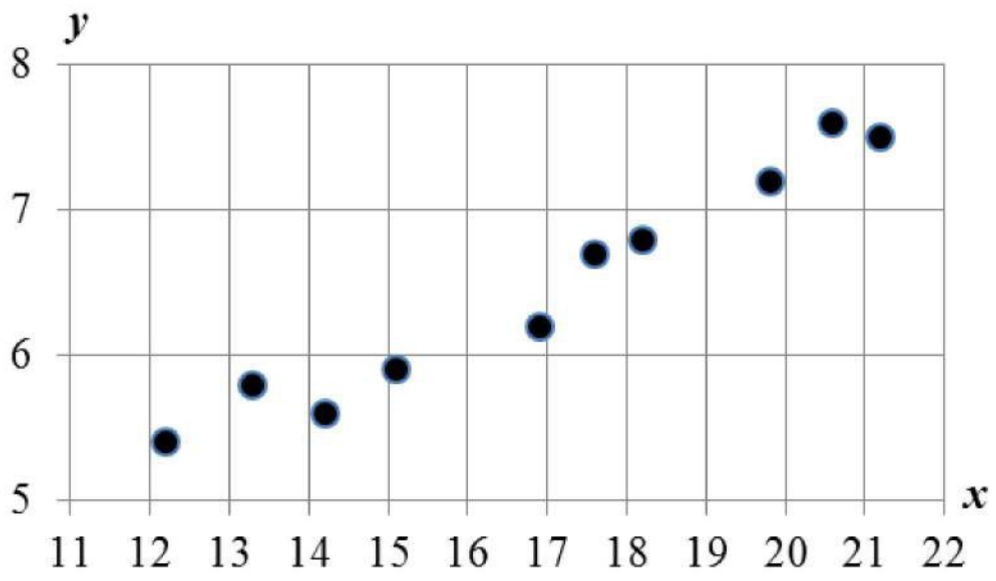


Рис. 1.46. Діаграма розсіювання до прикладу 1.1

– за результатами аналізу діаграми розсіювання, для подальших досліджень вибираємо аналітичну залежність для опису взаємозв'язку між витратами домогосподарств на продукти харчування щомісяця та наявними щомісячними доходами у вигляді парної лінійної регресії;
– записуємо у загальному вигляді теоретичну модель, а також вибіркове рівняння регресії і вибіркову економетричну модель:

▪ теоретична модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon ,$$

де y – витрати домогосподарств на продукти харчування щомісяця; x – наявні щомісячні доходи; β_0, β_1 – параметри моделі; ε – стохастична складова моделі;

▪ вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x ,$$

де $\hat{y}$ – оцінка математичного сподівання витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця; x – наявні щомісячні доходи; b_0, b_1 – параметри вибіркового рівняння регресії;

▪ вибіркова економетрична модель

$$y = b_0 + b_1 x + e ,$$

де y – витрати домогосподарств на продукти харчування щомісяця; x – наявні щомісячні доходи; b_0, b_1 – параметри вибіркової моделі; e – залишки моделі.

2. З метою оцінювання параметрів парної лінійної регресії, використовуємо інструмент **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесор MS Excel. У вікні даного інструменту вводимо вихідні дані та вказуємо спосіб виводу результатів (рис. 1.47).

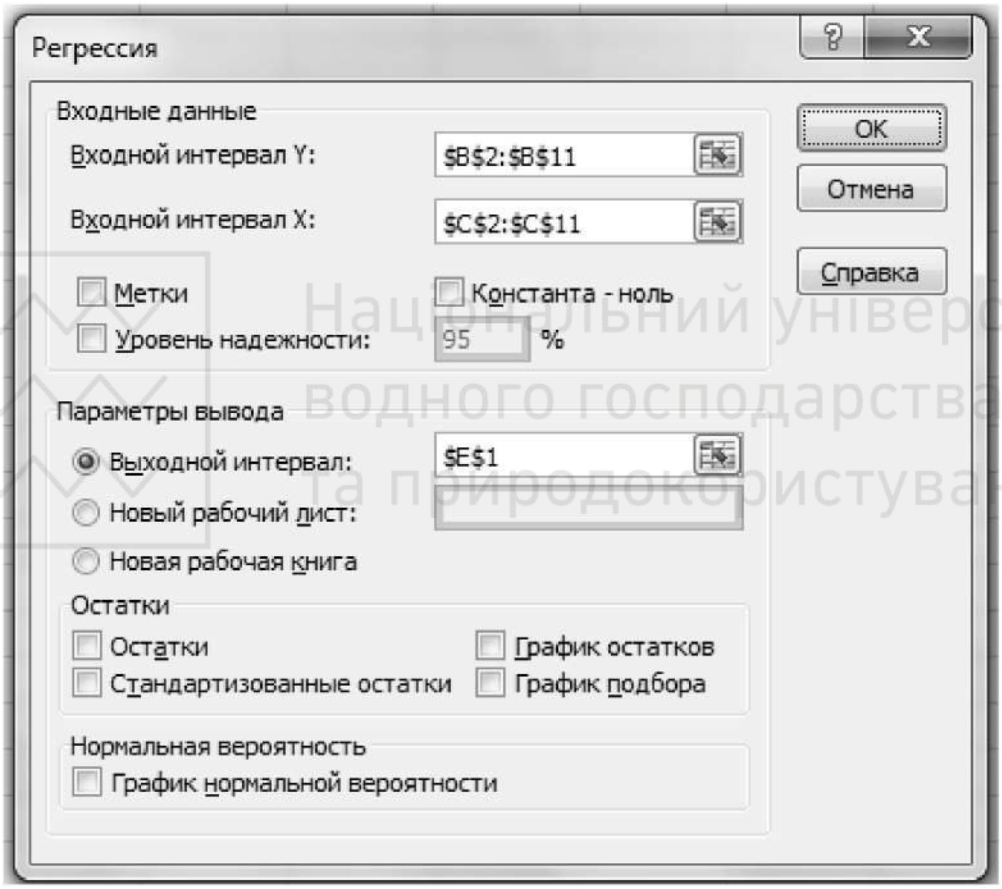


Рис. 1.47. Меню діалогового вікна інструменту **Регрессия** до прикладу 1.1

Значення оцінок параметрі парної лінійної регресії виписуємо з діапазону комірок з адресою F17:F18 (рис. 1.48): $b_0 = 2{,}234$ і $b_1 = 0{,}251$.

	E	F	G	H	I	J	K
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,979					
5	R-квадрат	0,959					
6	Нормированный R-квадрат	0,954					
7	Стандартная ошибка	0,172					
8	Наблюдения	10					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	1	5,545	5,545	187,727	7,75971E-07	
13	Остаток	8	0,236	0,030			
14	Итого	9	5,781				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	2,234	0,314	7,116	0,000100443	1,510	2,958
18	Переменная X 1	0,251	0,018	13,701	7,75971E-07	0,208	0,293

Рис. 1.48. Результати розрахунків інструменту **Регрессия** для парної лінійної регресії

3. Записуємо оцінене вибіркове рівняння регресії

$$\widehat{y} = 2{,}234 + 0{,}251x,$$

та вибіркову економетричну модель

$$y = 2{,}234 + 0{,}251x + e.$$

4. Визначаємо показники якості вибіркової моделі: з комірки з адресою F4 (рис. 1.48) виписуємо значення коефіцієнта парної кореляції $r_{yx} = 0{,}979$; з комірки з адресою F5 виписуємо значення коефіцієнта детермінації $R^2 = 0{,}959$; значення стандартної похибки моделі виписуємо з комірки з адресою F7 – $\widehat{\sigma}_{\varepsilon} = 0{,}172$.

В результаті аналізу отриманих показників можна зробити наступні висновки: оцінивши силу лінійного зв’язку між змінними за допомогою коефіцієнта парної кореляції можна сказати, що між витратами домогосподарств на продукти харчування щомісяця та наявними щомісячними доходами існує прямий та сильний кореляційний зв'язок; зміна значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця на 95,9 % пояснюється зміною значень наявних щомісячних доходів, а на 4,1 % – іншими випадковими факторами, що свідчить про високий рівень адекватності моделі в цілому.

5. Визначаємо показники статистичної значимості вибіркової моделі. Для цього з комірки з адресою I12 (рис. 1.48) виписуємо розрахункове значення F –критерію Фішера $F^* = 187{,}727$; розрахункові значення t –критерію Ст’юдента для параметрів моделі виписуємо з діапазону комірок з адресою H17:H18 і, таким чином, маємо: $t^*_{b_0} = 7{,}116$ і $t^*_{b_1} = 13{,}701$; з діапазону комірок з адресою J17:K18 виписуємо інтервали довіри для параметрів моделі:

$$1{,}510 < \beta_0 < 2{,}958,$$

$$0{,}208 < \beta_1 < 0{,}293.$$

6. За статистичними таблицями F –розподілу Фішера для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів вільності $\nu_1 = m = 1$ (де m – число незалежних (пояснюючих) змінних моделі) та $\nu_2 = n - k = 10 - 2 = 8$ (де n – кількість спостережень в статистичній вибірці; k – число параметрів моделі) визначаємо критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР** (рис. 1.49). В результаті проведених розрахунків отримуємо $F_{кр} = 5{,}32$.

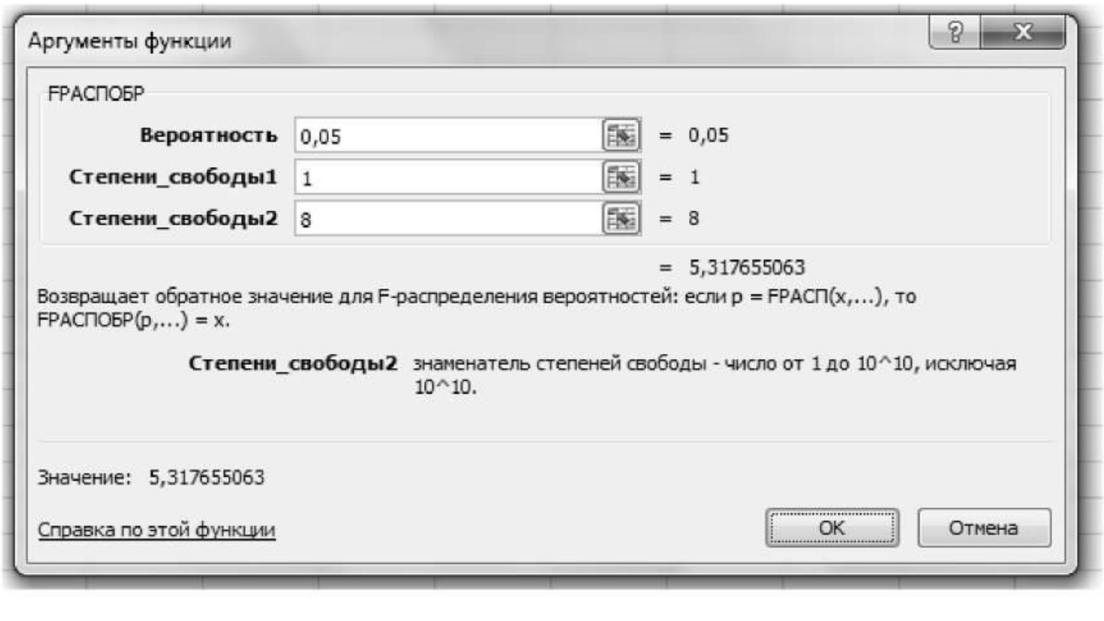


Рис. 1.49. Діалогове вікно функції **FРАСПОБР** до прикладу 1.1

Оскільки виконується умова $F^* > F_{кр}$ ($187{,}727 > 5{,}32$), робимо висновок про статистичну значимість побудованої економетричної моделі у цілому і її адекватність.

7. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступеня вільності $\nu = n - k = 10 - 2 = 8$ за статистичними таблицями t–розподілу Ст'юдента визначаємо критичне значення критерію Ст'юдента $t_{кр} = t_{\alpha/2}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **СТЬЮДРАСПОБР** (рис. 1.50). В результаті проведених розрахунків маємо $t_{кр} = t_{\alpha/2} = 2{,}31$.

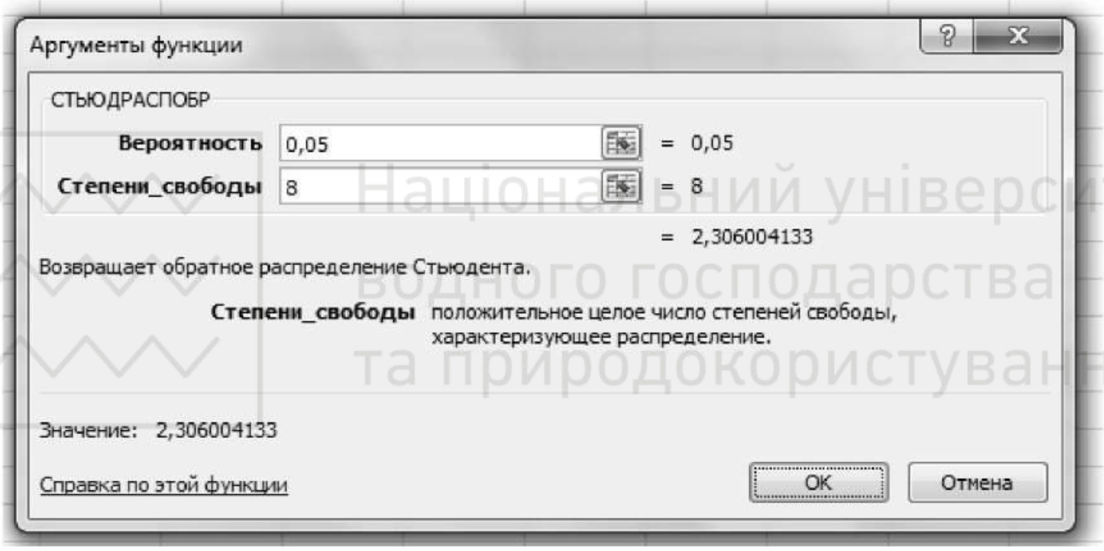


Рис. 1.50. Діалогове вікно функції **СТЬЮДРАСПОБР** до прикладу 1.1

Перевірку статистичної значимості кожного оціненого параметра здійснюємо шляхом перевірки виконання умови $\left|t^*_{b_j}\right| > t_{кр}$, $\left(j = \overline{0,1}\right)$. Оскільки умова перевірки виконується – $t^*_{b_0} > t_{кр}$ та $t^*_{b_1} > t_{кр}$, ($7{,}116 > 2{,}31$ та $13{,}701 > 2{,}31$), це свідчить про те, що всі параметри парної лінійної регресії є статистично значимі.

8. Виконуємо перевірку статистичної значимості коефіцієнта парної кореляції r_{yx}. Для цього розраховуємо значення t–статистики для коефіцієнта парної кореляції за наступною залежністю

$$t^*_{r_{yx}} = \frac{r_{yx}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-R^2}},$$

де n – розмір статистичної вибірки, k – число параметрів моделі.

В результаті проведених розрахунків отримаємо наступне значення цього показника

$$t^*_{r_{yx}} = \frac{r_{yx}\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0{,}979 \cdot \sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}959^2}} = 13{,}701.$$

Порівнявши розрахункове значення t–статистики для коефіцієнта парної кореляції з критичним значенням критерію Ст'юдента $\left|t^*_{r_{yx}}\right| > t_{кр}$ $(13{,}701 > 2{,}31)$ можна зробити висновок, що коефіцієнт парної кореляції r_{yx} є статистично значимий.

Таким чином, за результатами вище наведених досліджень можна зробити наступний висновок про те, що отримана оцінена парна лінійна регресія є якісною та статистично значимою і тому на її основі можна здійснювати адекватний економіко–математичний аналіз та прогнозування.

9. Для прогнозного значення щомісячного доходу $D_{pr} = 22$ гр. од. розраховуємо наступні показники:

- точковий прогноз витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} \cdot B;$$

- інтервальний прогноз для математичного сподівання витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \cdot \sqrt{X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}};$$

- інтервальний прогноз для індивідуального значення витрати домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_\varepsilon \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}},$$

де $X_{pr} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{pr} \end{pmatrix}$ – вектор прогнозних значень пояснюючих змінних;

X'_{pr} – транспонований вектор прогнозних значень пояснюючих змінних; $x_{pr} = D_{pr}$ – прогнозне (очікуване) значення пояснюючої змінної (щомісячного доходу); B – вектор оцінок параметрів моделі; $X'X$ – матриця, яка має наступний вигляд

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 \end{pmatrix};$$

$(X'X)^{-1}$ – обернена матриця до матриці $X'X$; $\hat{\sigma}_{\varepsilon}$ – стандартна похибка моделі; $t_{\alpha/2}$ – критичне значення критерію Ст'юдента.

При розрахунках прогнозів використовуються вбудовані функції MS Excel **ТРАНСП**, **МОБР**, **МУМНОЖ**, **КОРЕНЬ**.

Точковий прогноз витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця (рис. 1.51) визначаємо в наступній послідовності:

– в комірках з адресою N2:N3 розміщуємо компоненти вектора прогнозних значень пояснюючих змінних X_{pr}, при цьому в комірці з адресою N3 вводимо прогнозне (очікуване) значення щомісячного доходу $x_{pr} = 22$ гр. од.;

– з допомогою вбудованої функції ТРАНСП(N2:N3) в комірках з адресою N5:O5 розміщуємо компоненти транспонованого вектора прогнозних значень пояснюючих змінних X'_{pr};

– використовуючи вбудовану функцію МУМНОЖ(N5:O5;F17:F18) в комірці з адресою N7 обчислюємо значення точкового прогнозу витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця $\hat{y}_{pr}$.

За результатами проведених розрахунків можна зробити наступний висновок про те, що при заданому значенні щомісячного доходу $D_{pr} = 22$ гр. од., середнє прогнозне значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця буде на рівні 7,745 гр. од..

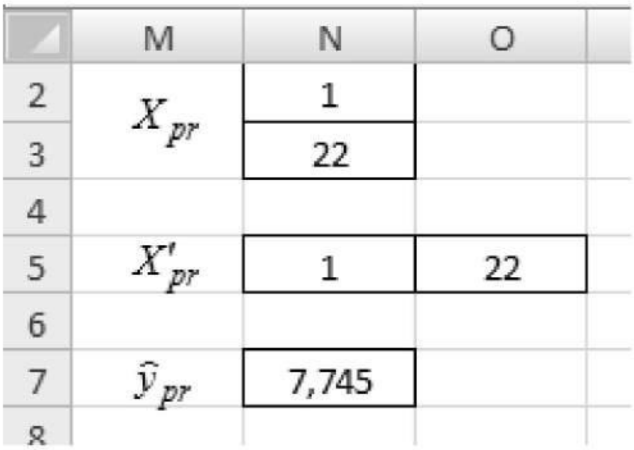


Рис. 1.51. Результати визначення точкового прогнозу витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

З метою визначення інтервального прогнозу для математичного сподівання витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця, проводимо розрахунки в наступній послідовності:

– в комірках з адресою N9:O10 розміщуємо компоненти матриці $X'X$ (рис. 1.52), для визначення яких використовуємо вбудовані функції MS Excel наведені у табл. 1.2;

Таблиця 1.2

Вбудовані функції MS Excel для обчислення матриці $X'X$

Адреса комірки	Функція
O9	=СУММ(C2:C11)
N10	
O10	=СУММКВ(C2:C11)

– з метою визначення компонентів матриці $(X'X)^{-1}$, в комірках з адресою N12:O13 (рис. 1.52), використовуємо вбудовану функцію МОБР(N9:O10);

– для розрахунку добутку матриць $X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}$ використовуємо вбудовану функцію МУМНОЖ(МУМНОЖ(N5:O5;N12:O13);N2:N3), в результаті чого отримаємо значення $X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr} = 0{,}393$;

	M	N	O
9	$X'X$	10	169,1
10		169,1	2947,83
11			
12	$(X'X)^{-1}$	3,337	-0,191
13		-0,191	0,011
14			

Рис. 1.52. Результати обчислення компонентів матриць для інтервального прогнозу до прикладу 1.1

– визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$M\left(y_{pr}\right)_{min} = \hat{y}_{pr} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{X'_{pr}\left(X'X\right)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 7{,}745 - 2{,}31 \cdot 0{,}172 \cdot \sqrt{0{,}393} = 7{,}497;$$

– визначаємо максимальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$M\left(y_{pr}\right)_{max} = \hat{y}_{pr} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{X'_{pr}\left(X'X\right)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 7{,}745 + 2{,}31 \cdot 0{,}172 \cdot \sqrt{0{,}393} = 7{,}994.$$

Тоді маємо

$$7{,}497 < M\left(y_{pr}\right) < 7{,}994 .$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95 %, можна зробити наступний висновок про те, що при заданому значенні щомісячного доходу 22 гр. од. середнє значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця у генеральній сукупності буде знаходитися в межах від 7,497 гр. од. до 7,994 гр. од..

Для визначення інтервального прогнозу для індивідуального значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця, виконуємо наступні розрахунки:

– визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$y_{pr_{min}} = \hat{y}_{pr} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}(X' X)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 7{,}745 - 2{,}31 \cdot 0{,}172 \cdot \sqrt{1 + 0{,}393} = 7{,}277;$$

– обчислюємо максимальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця

$$y_{pr_{max}} = \hat{y}_{pr} + t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}(X' X)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 7{,}745 + 2{,}31 \cdot 0{,}172 \cdot \sqrt{1 + 0{,}393} = 8{,}213.$$

Отже, маємо

$$7{,}277 < y_{pr} < 8{,}213.$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95 %, можна стверджувати, що при заданому значенні щомісячного доходу 22 гр. од. індивідуальне (окреме) значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця у генеральній сукупності буде знаходитися в межах від 7,277 гр. од. до 8,213 гр. од..

10. Виконуємо економіко–математичний аналіз споживання у наступній послідовності:

– використовуючи точкову оцінку b_1 параметра β_1 і його інтервал довіри, оцінюємо граничний вплив щомісячного доходу на щомісячні витрати домогосподарств на продукти харчування. Таким чином, можна зробити наступний висновок про те, що у випадку збільшення наявного щомісячного доходу на 1 гр. од., витрати домогосподарств на продукти харчування щомісяця в середньому збільшаться на 0,251 гр. од. Для інтервалу довіри для параметра моделі β_1, отриманого з допомогою інструменту **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесор MS Excel з ймовірністю 95 % можна стверджувати, що при збільшенні наявного щомісячного доходу на 1 гр. од. мінімальне збільшення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця буде 0,208 гр. од., а максимальне збільшення – 0,293 гр. од.;

– обчислюємо середній коефіцієнт еластичності за наступною розрахунковою залежністю

$$\overline{E} = b_1 \frac{\overline{x}}{\overline{y}},$$

де $\overline{x}$ – середнє значення наявного щомісячного доходу; $\overline{y}$ – середнє значення щомісячних витрат домогосподарств на продукти харчування.

Спочатку, за допомогою вбудованої статистичної функції **СРЗНАЧ** табличного процесор MS Excel, визначаємо середні арифметичні значення щомісячних витрат домогосподарств на продукти харчування і наявних щомісячних доходів (рис. 1.45). Використовуючи вбудовану функцію СРЗНАЧ(В2:В11), отримаємо наступне середнє значення витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця $\overline{y} = 6{,}5$ гр. од.; застосовуючи вбудовану функцію СРЗНАЧ(С2:С11), отримаємо середнє значення наявного щомісячного доходу $\overline{x} = 16{,}9$ гр. од..

В результаті проведених розрахунків, маємо наступне значення середнього коефіцієнта еластичності:

$$\overline{E} = b_1 \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = 0{,}251 \frac{16{,}9}{6{,}5} = 0{,}655.$$

На підставі визначеного показника відносного впливу можна зробити висновок, що при збільшенні наявного щомісячного доходу на 1 %, витрат домогосподарств на продукти харчування щомісяця в середньому збільшаться на 0,655 %.

Приклад 1.2 ***Класична модель багатофакторної (множинної) лінійної регресії***

Для деякого підприємства отримано наступні результати вибіркових статистичних спостережень за останні 24 місяця (2 роки), що містять дані по продуктивності праці та факторам, що впливають на цей показник (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Вихідні дані до прикладу 1.2

Місяць	Продуктивність праці, гр. од. / люд.-год.	Фондомісткість продукції, гр. од. / гр. од.	Коефіцієнт плинності робочої сили, %	Рівень втрат робочого часу, %
1	60	30	13,0	15,0
2	61	35	12,5	14,3
3	58	33	12,0	12,0
4	59	34	11,0	12,8
5	62	36	10,0	13,0
6	63	38	9,0	12,5
7	65	40	8,5	11,0
8	60	41	8,2	11,5
9	68	45	8,0	10,0
10	69	45	5,5	9,0
11	70	46	5,0	8,0
12	72	48	4,7	7,5
13	73	47	4,6	6,5
14	78	50	4,0	6,0
15	75	49	4,1	6,2
16	80	51	4,2	5,8
17	81	50	4,5	5,5
18	83	53	4,0	5,0
19	81	55	4,0	4,5
20	85	56	3,0	4,7
21	87	58	4,0	5,0
22	88	58	5,0	5,1
23	90	59	5,0	4,8
24	92	60	6,0	5,2

У припущенні щодо лінійної залежності між наведеними показниками побудувати економетричну модель продуктивності праці, що описує залежність між продуктивністю праці і наведеними вище факторами. Оцінити якість, адекватність і статистичну значимість побудованої моделі для рівня значимості

$\alpha = 0{,}05$. Розрахувати прогноз продуктивності праці на наступний місяць з рівнем надійності $p = 0{,}95$, якщо очікувані значення чинників, що впливають на неї дорівнюють:

- фондомісткість продукції – 60 гр. од. / гр. од.;
- коефіцієнт плинності робочої сили – 4 %;
- рівень втрат робочого часу – 5 %.

Оцінити граничний та відносний вплив кожної пояснюючої змінної моделі на продуктивність праці. Виконати ранжування пояснюючих змінних моделі за силою їх впливу на продуктивність праці і зробити відповідні висновки.

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. На етапі специфікації економетричної моделі виконуємо ідентифікацію змінних моделі та вводимо наступні умовні позначення для незалежних (пояснюючих) змінних моделі (рис. 1.53): x_1 – фондомісткість продукції, x_2 – коефіцієнт плинності робочої сили, x_3 – рівень втрат робочого часу; а також для залежної (пояснюваної) змінної моделі: y – продуктивність праці.

Записуємо у загальному вигляді теоретичну модель, а також вибіркове рівняння регресії і вибіркову економетричну модель:

- теоретична модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon,$$

де y – продуктивність праці; x_1 – фондомісткість продукції; x_2 – коефіцієнт плинності робочої сили; x_3 – рівень втрат робочого часу; β_0, β_1, β_2, β_3 – параметри теоретичної моделі, ε – стохастична складова моделі;

- вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3,$$

де $\hat{y}$ – оцінка математичного сподівання продуктивності праці; x_1 – фондомісткість продукції; x_2 – коефіцієнт плинності робочої сили; x_3 – рівень втрат робочого часу; b_0, b_1, b_2, b_3 – параметри вибіркової регресії;

- вибіркова економетрична модель

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + e,$$

де y – продуктивність праці; x_1 – фондомісткість продукції; x_2 – коефіцієнт плинності робочої сили; x_3 – рівень втрат робочого часу; b_0, b_1, b_2, b_3 – параметри вибіркової моделі; e – залишки моделі.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Місяць	y	x_1	x_2	x_3		
2	1	60	30	13,0	15,0		
3	2	61	35	12,5	14,3		
4	3	58	33	12,0	12,0		
5	4	59	34	11,0	12,8		
6	5	62	36	10,0	13,0		
7	6	63	38	9,0	12,5		
8	7	65	40	8,5	11,0		
9	8	60	41	8,2	11,5		
10	9	68	45	8,0	10,0		
11	10	69	45	5,5	9,0		
12	11	70	46	5,0	8,0		
13	12	72	48	4,7	7,5		
14	13	73	47	4,6	6,5		
15	14	78	50	4,0	6,0		
16	15	75	49	4,1	6,2		
17	16	80	51	4,2	5,8		
18	17	81	50	4,5	5,5		
19	18	83	53	4,0	5,0		
20	19	81	55	4,0	4,5		
21	20	85	56	3,0	4,7		
22	21	87	58	4,0	5,0		
23	22	88	58	5,0	5,1		
24	23	90	59	5,0	4,8		
25	24	92	60	6,0	5,2		

Рис. 1.53. Вихідні дані до прикладу 1.2

2. З метою оцінювання параметрів багатофакторної лінійної регресії використовуємо інструмент **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесор MS Excel. У вікні даного

інструменту вводимо вихідні дані та вказуємо спосіб виводу результатів (рис. 1.54).

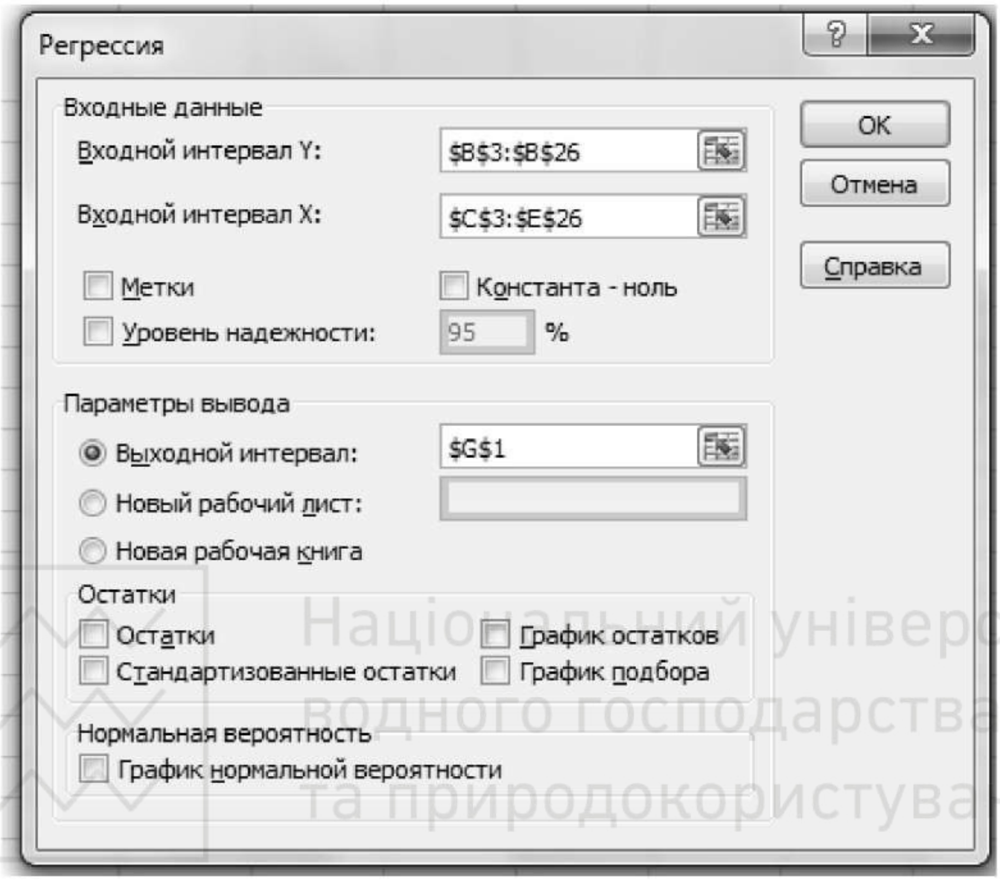


Рис. 1.54. Меню діалогового вікна інструменту **Регрессия** до прикладу 1.2

Значення оцінок параметрів багатофакторної лінійної регресії виписуємо з діапазону комірок з адресою H17:H20 (рис. 1.55): $b_0 = 27{,}710$, $b_1 = 1{,}049$, $b_2 = 1{,}514$ і $b_3 = -1{,}548$.

3. Записуємо оцінене вибіркове рівняння регресії

$$\hat{y} = 27{,}710 + 1{,}049x_1 + 1{,}514x_2 - 1{,}548x_3,$$

та вибіркову економетричну модель

$$y = 27{,}710 + 1{,}049x_1 + 1{,}514x_2 - 1{,}548x_3 + e.$$

4. Визначаємо показники якості вибіркової моделі: з комірки з адресою H4 (рис. 1.55) виписуємо значення коефіцієнта множинної кореляції $R = 0{,}980$; з комірки з адресою H5 виписуємо значення коефіцієнта детермінації $R^2 = 0{,}961$; значення стандартної похибки моделі виписуємо з комірки з адресою H7 – $\hat{\sigma}_{\varepsilon} = 2{,}332$.

	G	H	I	J	K	L	M
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,980					
5	R-квадрат	0,961					
6	Нормированный R-квадрат	0,955					
7	Стандартная ошибка	2,332					
8	Наблюдения	24					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	3	2648,605	882,868	162,400	3,302E-14	
13	Остаток	20	108,728	5,436			
14	Итого	23	2757,333				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	27,710	12,372	2,240	0,037	1,903	53,517
18	Переменная X 1	1,049	0,183	5,721	0,000	0,666	1,431
19	Переменная X 2	1,514	0,476	3,184	0,005	0,522	2,506
20	Переменная X 3	-1,584	0,672	-2,359	0,029	-2,985	-0,184

Рис. 1.55. Результати розрахунків інструменту **Регрессия** для багатофакторної лінійної регресії

В результаті аналізу отриманих показників можна зробити наступні висновки: оцінивши силу лінійного взаємозв'язку між змінними за допомогою коефіцієнта множинної кореляції можна сказати, що між продуктивністю праці та факторам, що впливають на цей показник існує прямий та сильний кореляційний зв'язок; зміна значення продуктивності праці на 96,1 % пояснюється зміною значень фондомісткості продукції, коефіцієнта плинності робочої сили та рівня втрат робочого часу, а на 3,9 % – іншими випадковими факторами.

5. Визначаємо показники статистичної значимості вибіркової моделі. Для цього з комірки з адресою K12 (рис. 1.55) виписуємо розрахункове значення F –критерію Фішера $F^* = 162{,}400$; розрахункові значення t –критерію Ст'юдента для параметрів моделі виписуємо з діапазону комірок з адресою J17:J20 і таким чином маємо: $t^*_{b_0} = 2{,}240$, $t^*_{b_1} = 5{,}721$, $t^*_{b_2} = 3{,}184$ і $t^*_{b_3} = -2{,}359$; з діапазону комірок з адресою L17:M20 виписуємо інтервали довіри для параметрів моделі:

$$1{,}903 < \beta_0 < 53{,}517,$$

$$0{,}666 < \beta_1 < 1{,}431,$$

$$0{,}522 < \beta_2 < 2{,}506,$$

$$-2{,}985 < \beta_3 < -0{,}184\,.$$

6. За статистичними таблицями F –розподілу Фішера для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів вільності $\nu_1 = m = 3$ (де m – число незалежних (пояснюючих) змінних моделі) та $\nu_2 = n - k = 24 - 4 = 20$ (де n – кількість спостережень в статистичній вибірці; k – число параметрів моделі) визначаємо критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР** (рис. 1.56). В результаті проведених розрахунків отримуємо $F_{кр} = 3{,}10$.

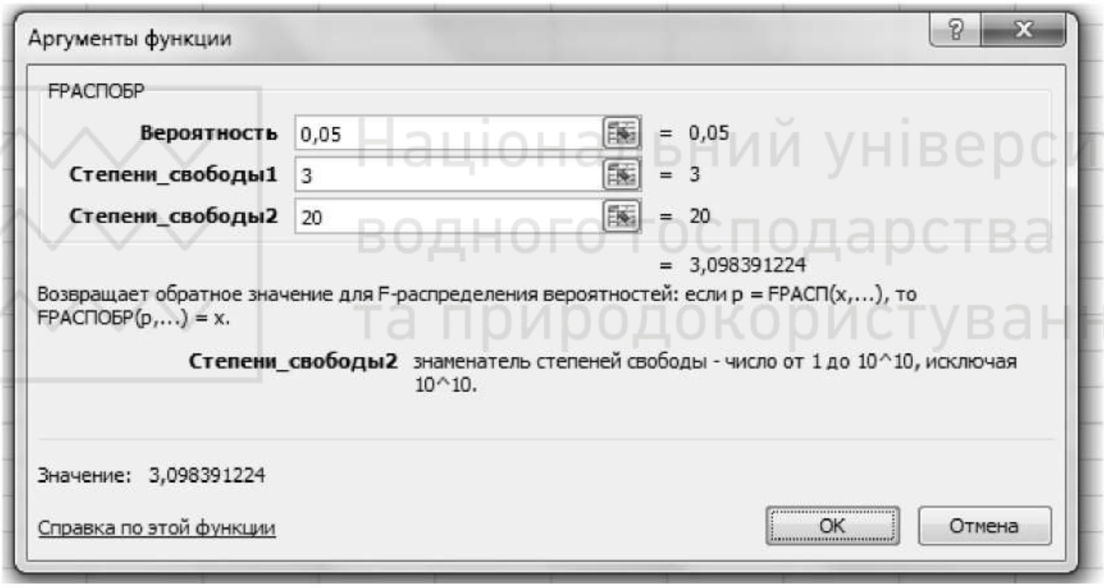


Рис. 1.56. Діалогове вікно функції **FРАСПОБР** до прикладу 1.2

Оскільки виконується умова $F^* > F_{кр}$ ($162{,}400 > 3{,}10$), робимо висновок про статистичну значимість побудованої економетричної моделі у цілому і її адекватність.

7. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступеня вільності $\nu = n - k = 24 - 4 = 20$ за статистичними таблицями t –розподілу Ст'юдента визначаємо критичне значення критерію Ст'юдента $t_{кр} = t_{\alpha/2}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **СТЬЮДРАСПОБР** (рис. 1.57). В результаті

проведених розрахунків маємо $t_{кр} = t_{\alpha/2} = 2{,}09$.

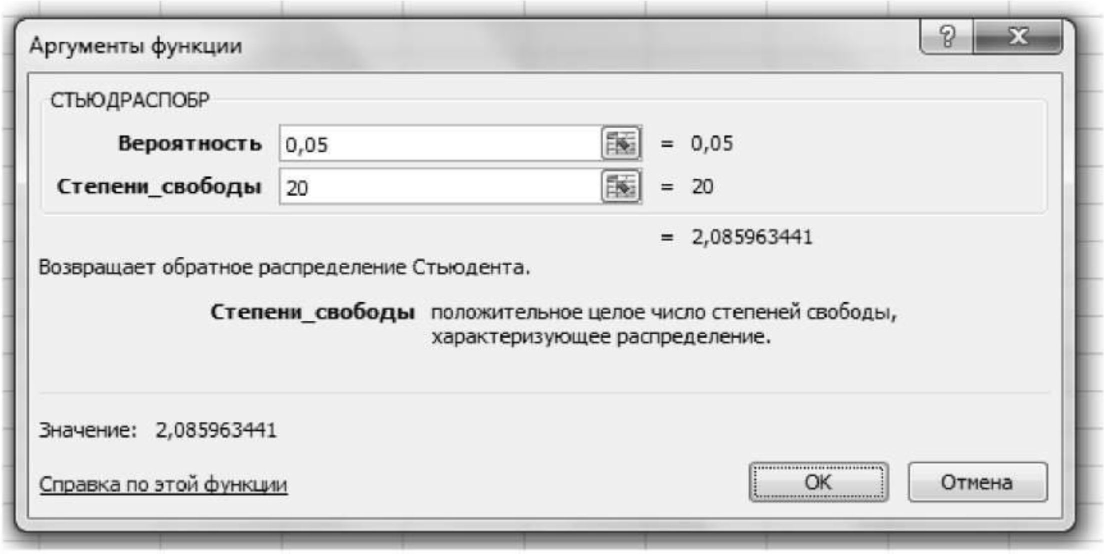


Рис. 1.57. Діалогове вікно функції **СТЬЮДРАСПОБР** до прикладу 1.2

Перевірку статистичної значимості кожного оціненого параметра здійснюємо шляхом перевірки виконання умови $\left|t^*_{b_j}\right| > t_{кр}$, $\left(j = \overline{0,3}\right)$. Оскільки умова перевірки виконується – $t^*_{b_0} > t_{кр}$, $t^*_{b_1} > t_{кр}$, $t^*_{b_2} > t_{кр}$ та $t^*_{b_3} > t_{кр}$ ($2{,}240 > 2{,}09$, $5{,}721 > 2{,}09$, $3{,}184 > 2{,}09$ та $\left|-2{,}359\right| > 2{,}09$), це свідчить про те, що всі параметри багатофакторної лінійної регресії є статистично значимі.

8. Виконуємо перевірку статистичної значимості коефіцієнта множинної кореляції R. Для цього розраховуємо значення t – статистики для коефіцієнта множинної кореляції за наступною залежністю

$$t^*_R = \frac{R\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-R^2}},$$

де n – розмір статистичної вибірки, k – число параметрів моделі.

В результаті проведених розрахунків отримаємо наступне значення даного показника

$$t_R^* = \frac{R\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-R^2}} = \frac{0{,}980 \cdot \sqrt{24-4}}{\sqrt{1-0{,}961^2}} = 22{,}073.$$

Порівнявши розрахункове значення t –статистики для коефіцієнта множинної кореляції з критичним значенням критерію Ст'юдента $\left|t_R^*\right| > t_{кр}$ $(22{,}073 > 2{,}09)$ можна зробити висновок, що коефіцієнт множинної кореляції R є статистично значимий.

Таким чином, за результатами вище наведених досліджень можна зробити наступний висновок про те, що отримана оцінена багатофакторна лінійна регресія є якісною та статистично значимою і тому на її основі можна здійснювати адекватний економіко–математичний аналіз та прогнозування.

9. Для прогнозних значень пояснюючих змінних розраховуємо наступні показники:

- точковий прогноз продуктивності праці

$$\hat{y}_{pr} = X'_{pr} \cdot B;$$

- інтервальний прогноз для математичного сподівання продуктивності праці

$$M(y_{pr}) = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}};$$

- інтервальний прогноз для індивідуального значення продуктивності праці

$$y_{pr} = \hat{y}_{pr} \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}},$$

де $X_{pr} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{1,pr} \\ x_{2,pr} \\ x_{3,pr} \end{pmatrix}$ – вектор прогнозних значень пояснюючих змінних; X'_{pr} – транспонований вектор прогнозних значень пояснюючих змінних; $x_{1,pr}$ – прогнозне (очікуване) значення фондомісткості продукції; $x_{2,pr}$ – прогнозне (очікуване) значення коефіцієнта плинності робочої сили; $x_{3,pr}$ – прогнозне (очікуване) значення рівня втрат робочого часу; $X'X$ – матриця, яка має наступний вигляд

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{3i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{3i} & \sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{3i}x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{3i}^2 \end{pmatrix};$$

$(X'X)^{-1}$ – обернена матриця до матриці $X'X$; $\hat{\sigma}_{\varepsilon}$ – стандартна похибка моделі; $t_{\alpha/2}$ – критичне значення критерію Ст'юдента.

При розрахунках прогнозів використовуються вбудовані функції MS Excel **ТРАНСП**, **МОБР**, **МУМНОЖ**, **КОРЕНЬ**.

Точковий прогноз продуктивності праці визначаємо в наступній послідовності (рис. 1.58):

– в комірках з адресою B29:B32 розміщуємо компоненти вектора прогнозних значень пояснюючих змінних X_{pr}, при цьому в комірках з адресою B30:B32 вводимо прогнозні (очікувані) значення фондомісткості продукції $x_{1,pr} = 60$ гр. од. / гр. од., коефіцієнта плинності робочої сили $x_{2,pr} = 4$ % та рівня втрат робочого часу $x_{3,pr} = 5$ %;

– з допомогою вбудованої функції ТРАНСП(B29:B32) в комірках з адресою B34:E34 розміщуємо компоненти транспонованого вектора прогнозних значень пояснюючих змінних X'_{pr};

– використовуючи вбудовану функцію МУМНОЖ(B34:E34;H17:H20) в клітинці з адресою B36 обчислюємо значення точкового прогнозу продуктивності праці $\hat{y}_{pr}$.

	A	B	C	D	E
29		1			
30	X_{pr}	60			
31		4			
32		5			
33					
34	X'_{pr}	1	60	4	5
35					
36	$\hat{y}_{pr}$	88,762			

Рис. 1.58. Результати визначення точкового прогнозу продуктивності праці

За результатами проведених розрахунків можна зробити наступний висновок про те, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 гр. од. / гр. од., коефіцієнта плинності робочої сили 4 % та рівня втрат робочого часу 5 %, середнє прогнозне значення продуктивності праці буде на рівні $88{,}762$ гр. од. / людино-год..

З метою визначення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці, проводимо розрахунки в наступній послідовності:

– в комірках з адресою B38:E41 розміщуємо компоненти матриці $X'X$ (рис. 1.59), для визначення яких використовуємо вбудовані функції MS Excel наведені у табл. 1.4;

	A	B	C	D	E
38		24	1117	159,8	200,9
39	$X'X$	1117	53851	6872,1	8656
40		159,8	6872,1	1286,94	1574,83
41		200,9	8656	1574,83	1966,09
42					
43		28,155	-0,415	0,239	-1,241
44	$(X'X)^{-1}$	-0,415	0,006	-0,003	0,018
45		0,239	-0,003	0,042	-0,043
46		-1,241	0,018	-0,043	0,083
47					

Рис. 1.59. Результати обчислення компонентів матриць для інтервального прогнозу до прикладу 1.2

Таблиця 1.4

Вбудовані функції MS Excel для обчислення матриці $X'X$

<table>
<tr><th>Адреса комірки</th><th>Функція</th></tr>
<tr><td>C38</td><td rowspan="2">=СУММ(C3:C26)</td></tr>
<tr><td>B39</td></tr>
<tr><td>D38</td><td rowspan="2">=СУММ(D3:D26)</td></tr>
<tr><td>B40</td></tr>
<tr><td>E38</td><td rowspan="2">=СУММ(E3:E26)</td></tr>
<tr><td>B41</td></tr>
<tr><td>C39</td><td>=СУММКВ(C3:C26)</td></tr>
<tr><td>D39</td><td rowspan="2">=СУММПРОИЗВ(C3:C26;D3:D26)</td></tr>
<tr><td>C40</td></tr>
<tr><td>E39</td><td rowspan="2">=СУММПРОИЗВ(C3:C26;E3:E26)</td></tr>
<tr><td>C41</td></tr>
<tr><td>D40</td><td>=СУММКВ(D3:D26)</td></tr>
<tr><td>E40</td><td rowspan="2">=СУММПРОИЗВ(D3:D26;E3:E26)</td></tr>
<tr><td>D41</td></tr>
<tr><td>E41</td><td>=СУММКВ(E3:E26)</td></tr>
</table>

- з метою визначення компонентів матриці $(X'X)^{-1}$ (рис. 1.59), в комірках з адресою B43:E46, використовуємо вбудовану функцію МОБР(B38:E41);
- для розрахунку добутку матриць $X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}$ використовуємо вбудовану функцію МУМНОЖ(МУМНОЖ(B34:E34;B43:E46);B29:B32), в результаті чого отримаємо значення $X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr} = 0{,}246$;
- визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці

$$M(y_{pr})_{min} = \hat{y}_{pr} - t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{X'_{pr}(X'X)^{-1}X_{pr}} =$$

$$= 88{,}762 - 2{,}09 \cdot 2{,}332 \cdot \sqrt{0{,}246} = 86{,}349;$$

- визначаємо максимальне значення інтервального прогнозу для математичного сподівання продуктивності праці

$$M\left(y_{pr}\right)_{max} = \widehat{y}_{pr} + t_{\alpha/2} \cdot \widehat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{X'_{pr}\left(X'X\right)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 88{,}762 + 2{,}09 \cdot 2{,}332 \cdot \sqrt{0{,}246} = 91{,}175.$$

Тоді маємо

$$86{,}349 < M\left(y_{pr}\right) < 91{,}175 .$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95 %, можна зробити наступний висновок про те, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 гр. од. / гр. од., коефіцієнта плинності робочої сили 4 % та рівня втрат робочого часу 5 % середнє значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитися в межах від 86,349 гр. од. /людино-год. до 91,175 гр. од. / людино-год.

Для визначення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці, виконуємо наступні розрахунки:

– визначаємо мінімальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці

$$y_{pr_{min}} = \widehat{y}_{pr} - t_{\alpha/2} \cdot \widehat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}\left(X'X\right)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 88{,}762 - 2{,}09 \cdot 2{,}332 \cdot \sqrt{1 + 0{,}246} = 83{,}332;$$

– обчислюємо максимальне значення інтервального прогнозу для індивідуального значення продуктивності праці

$$y_{pr_{max}} = \widehat{y}_{pr} + t_{\alpha/2} \cdot \widehat{\sigma}_{\varepsilon} \cdot \sqrt{1 + X'_{pr}\left(X'X\right)^{-1} X_{pr}} =$$

$$= 88{,}762 + 2{,}09 \cdot 2{,}332 \cdot \sqrt{1 + 0{,}246} = 94{,}191.$$

Отже, маємо

$$83{,}332 < y_{pr} < 94{,}191 .$$

За результатами проведених розрахунків, з ймовірністю 95 %, можна стверджувати, що при заданих значеннях фондомісткості продукції 60 гр. од. / гр. од., коефіцієнта плинності робочої сили 4 % та рівня втрат робочого часу 5 % індивідуальне (окреме) значення залежної змінної у генеральній сукупності буде знаходитися в межах від 83,332 гр. од. / людино-год. до 94,191 гр. од. / людино-год.

10. Виконуємо економіко–математичний аналіз моделі

продуктивності у наступній послідовності:

– на основі обчислених коефіцієнтів регресії b_1, b_2 і b_3 оцінюємо граничний вплив M_j $\left(i=\overline{1,3}\right)$ кожного фактора на продуктивність праці за наступною залежністю

$$M_j = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_j} = b_j, \left(j=\overline{1,3}\right).$$

Отже, маємо наступні значення оцінених показників граничного впливу відповідних факторів на продуктивність праці: граничний вплив фондомісткості продукції $M_1 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = b_1 = 1{,}049$; граничний вплив коефіцієнта плинності робочої сили $M_2 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_2} = b_2 = 1{,}514$; граничний вплив рівня втрат робочого часу $M_3 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_3} = b_3 = -1{,}548$.

На підставі отриманих значень можна зробити наступні висновки про те, що у випадку збільшення фондомісткості продукції на 1 гр. од. / гр. од. продуктивність праці в середньому збільшиться на 1,049 гр. од. / людино-год. за умови, що інші фактори такі, як коефіцієнт плинності робочої сили та рівень втрат робочого часу, будуть незмінними; при збільшенні коефіцієнта плинності робочої сили на 1 %, за умови, що фондомісткість продукції та рівень втрат робочого часу будуть незмінними, продуктивність праці в середньому збільшиться на 1,514 гр. од. / людино-год.; при збільшенні рівня втрат робочого часу на 1 %, при незмінних значеннях фондомісткості продукції та коефіцієнта плинності робочої сили, продуктивність праці в середньому зменшиться на 1,548 гр. од. / людино-год..

Крім того, за результатами отриманими з допомогою інструменту **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесор MS Excel з ймовірністю 95% можна стверджувати, що при збільшенні фондомісткості продукції на 1 гр. од. / гр. од., за умови, що інші фактори такі, як коефіцієнт плинності робочої сили та рівень втрат робочого часу будуть незмінними, мінімальне збільшення продуктивність праці становитиме 0,666 гр. од. / людино-год., а максимальне збільшення – 1,431 гр. од. / людино-год.; при збільшенні коефіцієнта плинності робочої сили на 1 % мінімальне збільшення продуктивність праці буде 0,522 гр. од. / людино-год., а максимальне збільшення – 2,506 гр. од. / людино-год. за умови, що фондомісткість продукції та рівень втрат робочого часу будуть незмінними; при збільшенні рівня втрат робочого часу на 1 % максимальне зменшення продуктивності праці буде 2,985 гр. од. / людино-год., а мінімальне зменшення значення цього показника – 0,184 гр. од. / людино-год. за умови, незмінних значень фондомісткості продукції та коефіцієнта плинності робочої сили;

– визначаємо відносний впливу кожного фактора на продуктивність праці, для чого обчислюємо значення середніх коефіцієнтів еластичності за наступною розрахунковою залежністю

$$\overline{E}_j = b_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{\overline{y}}}, \left(j = \overline{1,3}\right).$$

Для цього спочатку за допомогою вбудованої статистичної функції **СРЗНАЧ** табличного процесор MS Excel визначаємо середнє арифметичне значення продуктивності праці та середні арифметичні значення факторів, які на неї впливають (рис. 1.53). Таким чином, використовуючи вбудовану функцію СРЗНАЧ(B3:B26), отримаємо наступне середнє значення продуктивності праці $\overline{y} = \overline{\overline{y}} = 73{,}333$ гр. од. / людино-год.; використовуючи вбудовану функцію СРЗНАЧ(C3:C26), отримаємо середнє значення фондомісткості продукції $\overline{x}_1 = 46{,}542$ гр. од. / гр. од.; за допомогою вбудованої функції СРЗНАЧ(D3:D26) отримаємо середнє значення коефіцієнта плинності робочої сили $\overline{x}_2 = 6{,}658$ %; застосовуючи вбудовану функцію СРЗНАЧ(E3:E26), отримаємо середнє значення рівня втрат робочого часу $\overline{x}_3 = 8{,}371$ %.

В результаті проведених розрахунків, маємо наступні значення середніх коефіцієнтів еластичності:

- для фондомісткості продукції

$$\bar{E}_1 = b_1 \frac{\bar{x}_1}{\bar{\bar{y}}} = 1{,}049 \frac{46{,}542}{73{,}333} = 0{,}666\,;$$

- для коефіцієнта плинності робочої сили

$$\bar{E}_2 = b_2 \frac{\bar{x}_2}{\bar{\bar{y}}} = 1{,}514 \frac{6{,}658}{73{,}333} = 0{,}137\,;$$

- для рівня втрат робочого часу

$$\bar{E}_3 = b_3 \frac{\bar{x}_3}{\bar{\bar{y}}} = -1{,}584 \frac{8{,}371}{73{,}333} = -0{,}181\,.$$

За результатами отриманих значень середніх коефіцієнтів еластичності можна зробити наступні висновки про те, що при збільшенні фондоміскості продукції на 1 % продуктивність праці збільшиться на 0,666 % за умови, що інші фактори такі, як коефіцієнт плинності робочої сили та рівень втрат робочого часу, будуть незмінними; при збільшенні коефіцієнта плинності робочої сили на 1 % продуктивність праці збільшиться на 0,137 % за умови, що фондомісткість продукції та рівень втрат робочого часу будуть незмінними; при збільшенні рівня втрат робочого часу на 1 % продуктивність праці зменшиться на 0,181 % за умови, незмінних значень фондомісткості продукції та коефіцієнта плинності робочої сили;

– обчислюємо загальний коефіцієнт еластичності p за наступною залежністю

$$p = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3\,,$$

та оцінюємо загальний відносний вплив всіх факторів на продуктивність праці.

Враховуючи попередньо обчислені значення середніх коефіцієнтів еластичності, маємо наступне значення загального коефіцієнта еластичності

$$p = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 = 0{,}666 + 0{,}137 - 0{,}181 = 0{,}622\,.$$

На основі отриманого значення показника загального коефіцієнта еластичності можна зробити висновок про те, що при одночасному збільшенні усіх факторів на 1 %, продуктивність праці збільшиться на 0,622 %;

– обчислюємо стандартизовані коефіцієнти регресії, які визначаємо за наступною залежністю

$$b_j^* = b_j \frac{\hat{\sigma}_{x_j}}{\hat{\sigma}_y}, \left(j = \overline{1,3}\right).$$

де b_j – коефіцієнт регресії при пояснюючій змінній x_j, $\hat{\sigma}_{x_j}$ – стандартна похибка пояснюючої змінної x_j, $\hat{\sigma}_y$ – стандартна похибка залежної змінної моделі.

Для визначення стандартних похибок змінних моделі використовуємо вбудовану статистичну функція MS Excel **СТАНДОТКЛОНП**. Отже, використовуючи вбудовану функцію СТАНДОТКЛОНП(B3:B26), отримаємо значення стандартної похибки залежної змінної моделі $\hat{\sigma}_y = 10{,}719$; при використанні вбудованої функції СТАНДОТКЛОНП(C3:C26), отримаємо для пояснюючої змінної x_1 значення стандартної похибки $\hat{\sigma}_{x_1} = 8{,}813$; за допомогою вбудованої функції СТАНДОТКЛОНП(D3:D26), для пояснюючої змінної x_2, отримаємо стандартну похибку $\hat{\sigma}_{x_2} = 3{,}048$; для пояснюючої змінної x_3, застосовуючи вбудовану функцію СТАНДОТКЛОНП(E3:E26), отримаємо стандартну похибку $\hat{\sigma}_{x_3} = 3{,}442$.

Обчислюємо стандартизовані коефіцієнти регресії:

- для фондомісткості продукції

$$b_1^* = b_1 \frac{\hat{\sigma}_{x_1}}{\hat{\sigma}_y} = 1{,}049 \frac{8{,}813}{10{,}719} = 0{,}862;$$

- для коефіцієнта плинності робочої сили

$$b_2^* = b_2 \frac{\hat{\sigma}_{x_2}}{\hat{\sigma}_y} = 1{,}514 \frac{3{,}048}{10{,}719} = 0{,}431;$$

- для рівня втрат робочого часу

$$b_3^* = b_3 \frac{\hat{\sigma}_{x_3}}{\hat{\sigma}_y} = -1{,}584 \frac{3{,}442}{10{,}719} = -0{,}509.$$

За отриманими значеннями стандартизованих коефіцієнтів регресії, проводимо їх ранжування (впорядкування): 1-й ранг має стандартизований коефіцієнт регресії $b_1^* = 0{,}862$, 2-й ранг має $b_3^* = \left|-0{,}509\right|$ і 3-й ранг має $b_2^* = 0{,}431$.

Виконавши ранжування пояснюючих змінних (факторів) за силою їх впливу на продуктивність праці можна зробити наступний висновок, що на зміну продуктивності праці в першу чергу впливає зміна фондомісткості продукції, на другому місці за силою впливу знаходиться рівень втрат робочого часу, а на третьому – коефіцієнті плинності робочої сили.

1.4.2. Нелінійні економетричні моделі

Приклад 1.3 ***Неокласична виробнича функція Кобба–Дугласа***

На основі вибіркових статистичних спостережень протягом 12 років за деякою галуззю (табл. 1.5) отримано статистичні дані щодо річного випуску продукції галузі (Y), вартості основного капіталу (K) і чисельності зайнятих у галузі (L).

Таблиця 1.5

Вихідні дані до прикладу 1.3

Рік	Річний випуск продукції у галузі, млн. гр. од.	Вартість основного капіталу, млн. гр. од.	Чисельність зайнятих у галузі, тис. осіб
1	398,06	87,90	103,7
2	417,14	89,30	108,4
3	448,04	99,80	111,2
4	471,95	102,00	118,3
5	479,59	102,20	120,8
6	530,02	120,33	125,7
7	527,03	111,30	129,0
8	530,50	113,10	129,6
9	550,55	113,90	133,7
10	577,85	121,40	137,1
11	602,67	131,60	140,3
12	627,39	134,80	146,5

Побудувати неокласичну виробничу функцію Кобба–Дугласа

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta},$$

де Y – річний випуск продукції у галузі, K – вартість основного капіталу, L – чисельність зайнятих у галузі, a_0, α, β – параметри моделі.

Оцінити якість, адекватність і статистичну значимість побудованої виробничої функцію для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$. На основі побудованої виробничої функції:

- оцінити вплив виробничих ресурсів на річний випуск продукції;
- оцінити вплив зростання масштабів виробництва на темпи росту випуску продукції і ефективність виробництва;
- для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. обчислити необхідну чисельність зайнятих у галузі L^* (тис. осіб) у припущені, що вартість основного капіталу залишиться на рівні останнього року у вибірці;
- для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. обчислити необхідну вартість основного капіталу K^* (млн. гр. од.) у припущені, що чисельність зайнятих у галузі залишиться на рівні останнього року у вибірці;
- для прогнозних значень основного капіталу $K_{pr} = 135$ млн. гр. од. і кількості зайнятих у галузі $L_{pr} = 142$ тис. осіб обчислити середню і граничну продуктивність праці та основного капіталу;
- для прогнозних значень основного капіталу $K_{pr} = 135$ млн. гр. од. і кількості зайнятих у галузі $L_{pr} = 142$ тис. осіб розрахувати точковий прогноз випуску продукції.

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. Виконуємо лінеаризацію виробничої функції та зводимо її до лінійної форми. Лінеаризацію виконуємо у два кроки. Спочатку

виконуємо логарифмування обох частин виробничої функції Кобба–Дугласа

$$Y = a_0 K^{\alpha} L^{\beta},$$

$$\ln Y = \ln a_0 + \alpha \ln K + \beta \ln L.$$

Потім виконуємо заміну змінних

$$y = \ln Y; \quad x_1 = \ln K; \quad x_2 = \ln L.$$

В результаті цього зводимо нелінійну мультиплікативну виробничу функцію до наступної лінійної форми

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 ,$$

де параметри лінійної і нелінійної форм пов'язані наступними співвідношеннями

$$b_0 = \ln a_0 , \; b_1 = \alpha, \; b_2 = \beta .$$

Перетворення змінних виробничої функції для подальшого оцінювання параметрів лінійної форми наведено на рис. 1.60.

E2 =LN(B2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Рік	Y	K	L	y	x_1	x_2
2	1	398,06	87,90	103,7	5,987	4,476	4,642
3	2	417,14	89,30	108,4	6,033	4,492	4,686
4	3	448,04	99,80	111,2	6,105	4,603	4,711
5	4	471,95	102,00	118,3	6,157	4,625	4,773
6	5	479,59	102,20	120,8	6,173	4,627	4,794
7	6	530,02	120,33	125,7	6,273	4,790	4,834
8	7	527,03	111,30	129,0	6,267	4,712	4,860
9	8	530,50	113,10	129,6	6,274	4,728	4,864
10	9	550,55	113,90	133,7	6,311	4,735	4,896
11	10	577,85	121,40	137,1	6,359	4,799	4,921
12	11	602,67	131,60	140,3	6,401	4,880	4,944
13	12	627,39	134,80	146,5	6,442	4,904	4,987

Рис.1. 60. Перетворення змінних виробничої функції

2. Використовуючи інструмент **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесора MS Excel оцінюємо параметри b_0, b_1, b_2 лінійної форми виробничої функції. У вікні даного інструменту вводимо вихідні дані та вказуємо спосіб виводу результатів (рис. 1.61).

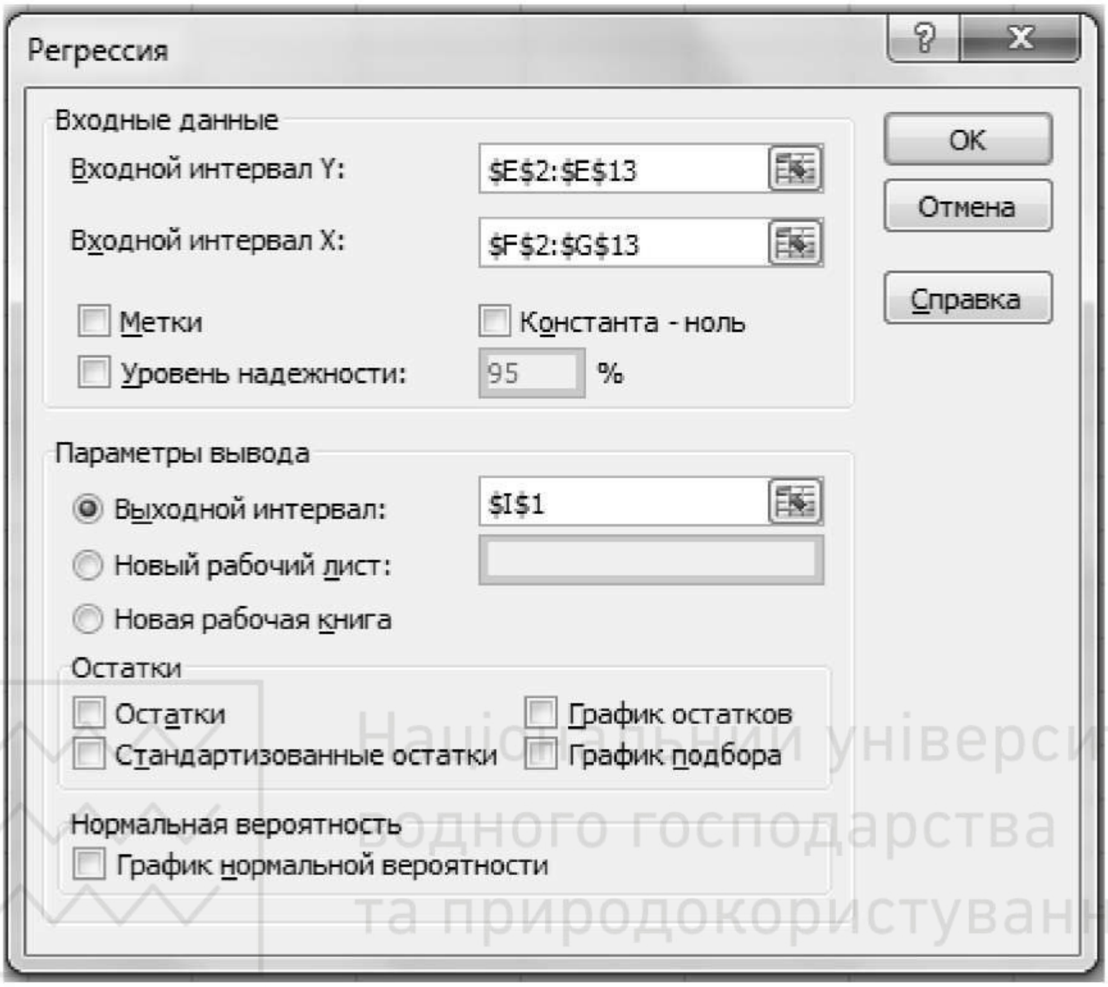


Рис.1.61. Меню вводу вихідних даних для неокласичної виробничої функції Кобба–Дугласа

Отримавши результати розрахунків, із комірок з адресами J17:J19 виписуємо оцінки параметрів лінійної форми виробничої функції: $b_0 = 0{,}315$, $b_1 = 0{,}380$ та $b_2 = 0{,}856$ (рис. 1.62).

Оцінена лінійна форма виробничої функції буде мати вигляд

$$\hat{y} = 0{,}315 + 0{,}380x_1 + 0{,}856x_2$$

Далі визначаємо вибірковий множинний коефіцієнт кореляції $R = 0{,}999$, значення якого виписуємо з комірки з адресою J4; коефіцієнт детермінації $R^2 = 0{,}999$, значення якого виписуємо з комірки з адресою J5; стандартну похибку лінійної форми моделі $\hat{\sigma}_{\varepsilon} = 0{,}005$, яку виписуємо з комірки з адресою J7; розрахункове значення критерію Фішера $F^* = 4459{,}474$ (комірка з адресою M12) і розрахункові значення критерію Ст'юдента для параметрів моделі (діапазон комірок з адресою L17:L19): $t^*_{b_0} = 3{,}778$, $t^*_{b_1} = 9{,}641$ та $t^*_{b_2} = 16{,}991$ (рис. 1.62).

	I	J	K	L	M	N	O
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,99950					
5	R-квадрат	0,99899					
6	Нормированный R-квадрат	0,99877					
7	Стандартная ошибка	0,00502					
8	Наблюдения	12					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	2	0,2244262	0,1122131	4459,474	3,279E-14	
13	Остаток	9	0,0002265	2,516E-05			
14	Итого	11	0,2246527				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	0,315	0,083	3,778	0,004	0,126	0,504
18	Переменная X 1	0,380	0,039	9,641	0,000	0,291	0,469
19	Переменная X 2	0,856	0,050	16,991	0,000	0,742	0,970

Рис.1.62. Результати розрахунків інструменту **Регрессия** для неокласичної виробничої функції Кобба–Дугласа

3. Розраховуємо значення t–статистики для вибіркового коефіцієнта множинної кореляції

$$t^*_R = \frac{R\sqrt{n-k}}{\sqrt{1-R^2}},$$

де n – розмір статистичної вибірки; k – число параметрів лінійної форми моделі.

В результаті отримаємо

$$t^*_R = \frac{0{,}999\sqrt{12-3}}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = 94{,}440.$$

4. За статистичними таблицями F–розподілу Фішера для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів вільності $\nu_1 = m = 2$ і $\nu_2 = n - k = 12 - 3 = 9$ визначаємо критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР**. В результаті проведених розрахунків отримаємо $F_{кр} = 4{,}26$.

5. За статистичними таблицями t –розподілу Ст'юдента для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступеня вільності $\nu = n - k = 12 - 3 = 9$ визначаємо критичне значення критерію Ст'юдента $t_{кр} = t_{\alpha/2}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **СТЬЮДРАСПОБР**. В результаті маємо $t_{кр} = t_{\alpha/2} = 2{,}26$.

6. В результаті аналізу отриманих показників можна зробити наступні висновки:
   - оцінивши силу лінійного зв'язку між змінними за допомогою коефіцієнта множинної кореляції можна сказати, що між річним випуском продукції у галузі (Y) та вартістю основного капіталу (K) і чисельністю зайнятих у галузі (L) існує прямий та сильний кореляційний зв'язок;
   - зміна річного випуску продукції у галузі на 99,9 % ($R^2 = 0{,}999$) пояснюється зміною значень вартості основного капіталу і чисельності зайнятих у галузі;
   - оскільки виконується умова $F^* > F_{кр}$ ($4459{,}474 > 4{,}26$), то побудована економетрична модель у цілому є адекватною;
   - перевірку статистичної значимості кожного оціненого параметра моделі здійснюємо шляхом перевірки виконання умови $\left|t^*_{b_j}\right| > t_{кр}$, $\left(j = \overline{0{,}3}\right)$. Оскільки умова перевірки виконується – $t^*_{b_0} > t_{кр}$, $t^*_{b_1} > t_{кр}$ та $t^*_{b_2} > t_{кр}$ ($3{,}778 > 2{,}26$, $9{,}641 > 2{,}26$ та $16{,}991 > 2{,}26$), це свідчить про те, що всі параметри лінійної форми виробничої функції є статистично значимі;
   - порівнявши розрахункове значення t –статистики для коефіцієнта множинної кореляції з критичним значенням критерію Ст'юдента $\left|t^*_R\right| > t_{кр}$ ($94{,}440 > 2{,}26$) отримаємо, що вибірковий коефіцієнт множинної кореляції R статистично значимий.

Таким чином, можна зробити загальний висновок про те, що на основі побудованої економетричної моделі можна здійснювати достовірний економіко–математичний аналіз та прогнозування.

7. Шляхом зворотних перетворень виробничу функцію представляємо для її подальшого використання у традиційній нелінійній формі. Для цього параметри неокласичної виробничої функції Кобба–Дугласа a_0, α, β визначаємо на основі оцінених параметрів лінійної форми за наступними залежностями

$$a_0 = e^{b_0}, \ \alpha = b_1, \ \beta = b_2.$$

Звідки

$$a_0 = e^{0,315} \cong 1,37, \quad \alpha = b_1 \cong 0,38, \quad \beta = b_2 \cong 0,86.$$

Тоді оцінена виробнича функцію Кобба–Дугласа має вигляд

$$Y = 1,37K^{0,38}L^{0,86}.$$

8. Визначаємо часткові коефіцієнти еластичності випуску продукції за виробничими ресурсами за наступними співвідношеннями

$$E_K = \alpha; \ E_L = \beta,$$

де E_K – коефіцієнт еластичності випуску продукції за основним капіталом, E_L – коефіцієнт еластичності випуску продукції за працею.

Отже маємо, $E_K = 0,38$ і $E_L = 0,86$.

На підставі отриманих результатів, можна зробити наступні висновки:

- при збільшенні вартості основного капіталу на 1 %, за умови що чисельність зайнятих у галузі буде незмінною, річний випуск продукції у галузі в середньому збільшиться на 0,38 %;
- при збільшенні чисельності зайнятих у галузі на 1 %, при незмінній вартості основного капіталу, річний випуск продукції у галузі збільшиться на 0,86 %.

9. Визначаємо загальний коефіцієнт еластичності

$$p = E_K + E_L = \alpha + \beta.$$

Провівши відповідні обчислення, маємо

$$p = E_K + E_L = \alpha + \beta = 0,38 + 0,86 = 1,24.$$

На основі отриманого значення загального коефіцієнта еластичності, оцінюємо вплив зростання виробничих ресурсів (зростання масштабів виробництва) на темпи росту випуску продукції і ефективність виробництва. Оскільки $p > 1$ $(1{,}24 > 1)$, це свідчить про те, що темпи росту випуску продукції вищі за темпи росту виробничих ресурсів, результатом чого є зростання ефективності виробництва при зростанні масштабів виробництва та економія виробничих ресурсів.

10. Для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. розраховуємо необхідну чисельність зайнятих у галузі

$$L^* = \left(\frac{Y^*}{a_0 K^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

За умови, що вартість основного капіталу залишиться на рівні останнього року у вибірці, отримаємо

$$L^* = \left(\frac{Y^*}{a_0 K^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{635}{1{,}37 \cdot 134{,}8^{0{,}38}} \right)^{\frac{1}{0{,}86}} = 147{,}46.$$

Отже, для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. необхідна чисельність зайнятих у галузі повинна бути на рівні $147{,}46$ тис. осіб.

11. Для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. також розраховуємо необхідну вартість основного капіталу

$$K^* = \left(\frac{Y^*}{a_0 L^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

У припущені, що чисельність зайнятих у галузі залишиться на рівні останнього року у вибірці, отримаємо

$$K^* = \left(\frac{Y^*}{a_0 L^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{635}{1{,}37 \cdot 146{,}5^{0{,}86}} \right)^{\frac{1}{0{,}38}} = 136{,}94.$$

Таким чином, для планового випуску продукції $Y = Y^* = 635$ млн. гр. од. необхідна вартість основного капіталу повинна бути на рівні $136{,}94$ млн. гр. од.

12. Для прогнозних значень основного капіталу

$K_{pr} = 135$ млн. гр. од. і чисельності зайнятих у галузі $L_{pr} = 142$ тис. осіб обчислюємо середню і граничну продуктивність праці за наступними залежностями

$$AP_L = \frac{Y}{L} = a_0 K^{\alpha} L^{\beta-1}, \qquad MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \cdot AP_L,$$

де AP_L – середня продуктивність праці; MP_L – гранична продуктивність праці.

В результаті проведених розрахунків, отримаємо наступні значення цих показників

$$AP_L = a_0 K^{\alpha} L^{\beta-1} = 1{,}37 \cdot 135^{0{,}38} \cdot 142^{(0{,}86-1)} = 4{,}33,$$

$$MP_L = \beta \cdot AP_L = 0{,}86 \cdot 4{,}33 = 3{,}71.$$

13. Для цих же прогнозних значень основного капіталу $K_{pr} = 135$ млн. гр. од. і чисельності зайнятих у галузі $L_{pr} = 142$ тис. осіб обчислюємо середню і граничну продуктивність основного капіталу (фондовіддачу) за наступними залежностями

$$AP_K = \frac{Y}{K} = a_0 K^{\alpha-1} L^{\beta}, \qquad MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \cdot AP_K,$$

де AP_K – середня продуктивність основного капіталу; MP_K – гранична продуктивність основного капіталу.

В результаті проведених розрахунків, отримаємо наступні значення цих показників

$$AP_K = a_0 K^{\alpha-1} L^{\beta} = 1{,}37 \cdot 135^{(0{,}38-1)} \cdot 142^{0{,}86} = 4{,}56,$$

$$MP_K = \alpha \cdot AP_K = 0{,}38 \cdot 4{,}56 = 1{,}73.$$

14. Для прогнозних значень $K_{pr} = 135$ млн. гр. од. і $L_{pr} = 142$ тис. осіб розраховуємо точковий прогноз обсягу випуску продукції у галузі

$$\widehat{Y}_{pr} = a_0\, K_{pr}^{\alpha}\, L_{pr}^{\beta}.$$

Для заданих прогнозних значень основного капіталу та чисельності зайнятих у галузі, отримаємо

$$\widehat{Y}_{pr} = a_0\, K_{pr}^{\alpha}\, L_{pr}^{\beta} = 1{,}37 \cdot 135^{0{,}38} 142^{0{,}86} = 615{,}17 \text{ (млн. гр. од.)}.$$

За результатами проведених обчислень, можна зробити наступний висновок, що при заданих значеннях основного капіталу 135 млн. гр. од. і чисельності зайнятих у галузі 142 тис. осіб наближене середнє прогнозне значення річного випуску продукції буде $615{,}17$ млн. гр. од..

1.4.3. Узагальнені моделі

Мультиколінеарність

Приклад 1.4

Для деякого регіону виконується економетричне дослідження, метою якого є аналіз реального споживання населення (y) в залежності від наступних трьох факторів: купівлі та оплати товарів і послуг (x_1), заощаджень (x_2) та заробітної плати (x_3). Вважається, що залежність між зазначеними економічними показниками може бути представлена економетричною моделлю багатофакторної лінійної регресії. Дані вибіркових статистичних спостережень наведено нижче у табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Вихідні дані до прикладу 1.4

i	Реальне споживання населення, млн. гр. од.	Купівля та оплата товарів і послуг, млн. гр. од.	Заощадження, в % від загального доходу	Заробітна плата, млн. гр. од.
1	14	9	7,90	16,78
2	16	10	9,04	19,68
3	15	11	9,95	21,56
4	14	13	9,22	22,46
5	20	13	11,12	22,50
6	19	15	13,47	27,20
7	22	14	13,46	28,52
8	27	16	12,57	30,00

Продовження табл. 1.6

9	29	18	12,40	29,56
10	29	16	13,20	24,23
11	30	14	13,50	25,00
12	30	20	14,52	30,00
13	31	21	14,00	32,15
14	28	23	15,00	32,00
15	31	20	14,50	33,00

За допомогою тесту Фаррара–Глобера перевірити наявність мультиколінеарності між пояснюючими змінними моделі. При наявності мультиколінеарності запропонувати шляхи її вилучення.

Розв'язання задачі.

Виходячи з постановки задачі, запишемо відповідну економетричну вибіркову модель між змінними моделі

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + e,$$

де y – реальне споживання населення, млн. гр. од.; x_1 – купівля та оплата товарів і послуг, млн. гр. од.; x_2 – заощадженя, % від загального доходу; x_3 – заробітна плата, млн. гр. од.; b_0, b_1, b_2, b_3 – параметри вибіркової моделі, e – залишки моделі.

На основі означення мультиколінеарності можна припустити, що мультиколінеарний зв'язок може виникнути між змінними x_1 та x_2, або в парі змінних x_1 та x_3, або між змінними x_2 та x_3.

Перевірку на наявність мультиколінеарності здійснюємо за допомогою тесту Фаррара–Глобера.

1. Виконуємо стандартизацію пояснюючих змінних x_1, x_2 і x_3 (рис. 1.63). Для цього спочатку визначаємо середні значення і стандартні відхилення всіх пояснюючих змінних моделі. Обчислення цих показників виконуємо з використанням вбудованих функцій MS Ecsel **СРЗНАЧ** та **СТАНДОТКЛОНП** (табл. 1.7).

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x_1	x_2	x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*
2	1	9	7,90	16,78	-1,621	-1,997	-1,980
3	2	10	9,04	19,68	-1,373	-1,475	-1,377
4	3	11	9,95	21,56	-1,125	-1,058	-0,987
5	4	13	9,22	22,46	-0,628	-1,392	-0,800
6	5	13	11,12	22,50	-0,628	-0,521	-0,792
7	6	15	13,47	27,20	-0,132	0,556	0,185
8	7	14	13,46	28,52	-0,380	0,552	0,459
9	8	16	12,57	30,00	0,116	0,144	0,767
10	9	18	12,40	29,56	0,612	0,066	0,675
11	10	16	13,20	24,23	0,116	0,433	-0,432
12	11	14	13,50	25,00	-0,380	0,570	-0,272
13	12	20	14,52	30,00	1,108	1,038	0,767
14	13	21	14,00	32,15	1,356	0,799	1,214
15	14	23	15,00	32,00	1,852	1,258	1,182
16	15	20	14,50	33,00	1,108	1,029	1,390
17	Середнє	15,533	12,257	26,309	-	-	-
18	Стандартне відхилення	4,031	2,181	4,813	-	-	-

Рис. 1.63. Стандартизація пояснюючих змінних

Таблиця 1.7

Визначення середніх значень та стандартних відхилень пояснюючих змінних моделі

Адреса комірки	Вбудована функція MS Excel	
	Середнє значення	Стандартне відхилення
B17	=СРЗНАЧ(B2:B16)	–
C17	=СРЗНАЧ(C2:C16)	–
D17	=СРЗНАЧ(D2:D16)	–
B18	–	=СТАНДОТКЛОНП(B2:B16)
C18	–	=СТАНДОТКЛОНП(C2:C16)
D18	–	=СТАНДОТКЛОНП(D2:D16)

2. Елементи стандартизованих векторів пояснюючих змінних визначаємо за наступною формулою

$$x^*_{ik} = \frac{x_{ik} - \bar{x}_k}{\sigma_{x_k}},\ \left(i = \overline{1,15}\right),\ \left(k = \overline{1,3}\right),$$

де n – число спостережень, $n = 15$; m – число факторів моделі (пояснюючих змінних), $m = 3$; $\bar{x}_k$ – середнє арифметичне k-ї пояснюючої змінної, ($k = \overline{1,3}$); σ_{x_k} – стандартне відхилення k-ї пояснюючої змінної, ($k = \overline{1,3}$).

Для обчислення стандартизованих векторів пояснюючих змінних також можна використовувати вбудовану функцію MS Excel **НОРМАЛИЗАЦИЯ**. Результатом даного обчислення є матриця стандартизованих пояснюючих змінних X^*, елементи якої наведено на рис. 1.64.

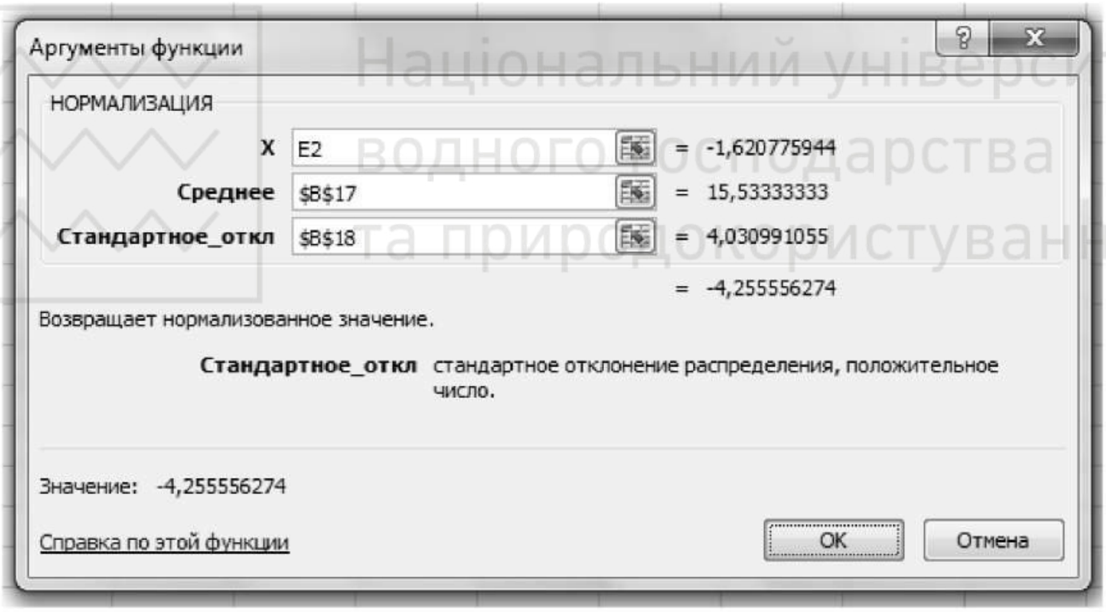


Рис. 1.64. Діалогове вікно функції **НОРМАЛИЗАЦИЯ** до прикладу 1.4

3. На основі виконаних розрахунків для сформованої матриці стандартизованих пояснюючих змінних X^* обчислюється транспонована до неї матриця $X^{*'}$ (рис. 1.65). Для цього використовується вбудована функція MS Excel **ТРАНСП**.
4. Використовуючи вбудовану функцію **МУМНОЖ** обчислюємо добуток матриць $X^{*'}X^*$ (рис. 1.65). Для цього, для діапазону комірок з адресою J6:L8 застосовуємо вбудовану функцію МУМНОЖ(J2:X4;E2:G16).

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1																
2		-1,621	-1,373	-1,125	-0,628	-0,628	-0,132	-0,380	0,116	0,612	0,116	-0,380	1,108	1,356	1,852	1,108
3	$X^{*'}=$	-1,997	-1,475	-1,058	-1,392	-0,521	0,556	0,552	0,144	0,066	0,433	0,570	1,038	0,799	1,258	1,029
4		-1,980	-1,377	-0,987	-0,800	-0,792	0,185	0,459	0,767	0,675	-0,432	-0,272	0,767	1,214	1,182	1,390
5																
6		15	12,964	13,793			1	0,864	0,920							
7	$X^{*'}X^{*}=$	12,964	15	13,408		r =	0,864	1	0,894							
8		13,793	13,408	15			0,920	0,894	1							

Рис. 1.65. Розрахунок кореляційної матриці

5. За допомогою вбудованої математичної функції **МОПРЕД** табличного процесора MS Excel обчислюємо визначник кореляційної матриці $|r|$. Застосувавши вбудовану функцію МОПРЕД(O6:Q8), отримаємо $|r| = 0{,}029$. Оскільки значення визначника кореляційної матриці $|r| \to 0$, робимо висновок про те, що між пояснюючими змінними моделі існує неповна мультиколінеарність.

6. Обчислюємо розрахункове значення критерію χ^2 за формулою

$$\chi^2 = -\left(n - 1 - \frac{1}{6}\cdot(2m+5)\right)\cdot \ln|r|.$$

Таким чином маємо

$$\chi^2 = -\left(15 - 1 - \frac{1}{6}\cdot(2\cdot 3+5)\right)\cdot \ln 0{,}029 = 42{,}967\,.$$

7. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступеня вільності $\nu = \frac{1}{2}m(m-1) = \frac{1}{2}3\cdot(3-1) = 3$, за статистичними таблицями χ^2- розподілу визначаємо табличне значення $\chi^2_{табл}$, або ж з цією метою можна використати вбудовану статистичну функцію **ХИ2ОБР** (рис. 1.66). В результаті маємо $\chi^2_{табл} = 7{,}81$. Оскільки виконується умова $\chi^2 > \chi^2_{табл}$ $(42{,}967 > 7{,}81)$, то робимо висновок про те, що в масиві незалежних змінних існує мультиколінеарність.

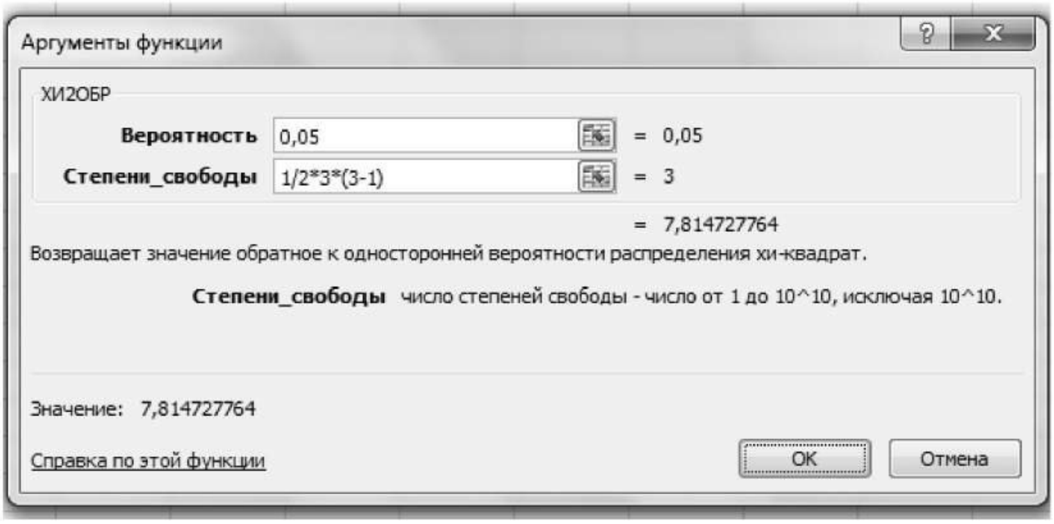


Рис. 1.66. Діалогове вікно функції **ХИ2ОБР** до прикладу 1.4

8. Використовуючи вбудовану математичну функцію **МОБР** табличного процесора MS Excel, обчислюємо матрицю похибок C

$$C = r^{-1}.$$

Після застосування вбудованої функції МОБР(O6:Q8), маємо наступні значення компонентів матриці похибок C

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}868 & -1{,}446 & -5{,}023 \\ -1{,}446 & 5{,}280 & -3{,}390 \\ -5{,}023 & -3{,}390 & 8{,}649 \end{pmatrix}.$$

9. Для кожної пояснюючої змінної моделі розраховуємо F – критерій Фішера за формулою

$$F_k = (c_{kk} - 1)\frac{n-m}{m-1}, \quad \left(k = \overline{1,3}\right).$$

де c_{kk} – елементи матриці C, які знаходяться на головній діагоналі.

Таким чином, маємо наступні розрахункові значення F – критерію Фішера:

$$F_1 = (6{,}868 - 1)\cdot\frac{15-3}{3-1} = 35{,}21,$$

$$F_2 = (5{,}280 - 1)\cdot\frac{15-3}{3-1} = 25{,}68,$$

$$F_3 = (8{,}649 - 1)\cdot\frac{15-3}{3-1} = 45{,}89\,.$$

10. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів вільності $\nu_1 = m - 1 = 3 - 1 = 2$ та $\nu_2 = n - m = 15 - 3 = 12$ за статистичними таблицями F –розподілу визначаємо критичного значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР**. В результаті маємо $F_{кр} = 3{,}89$.

11. Оскільки виконується умова $F_1 > F_{кр}$, то незалежна змінна x_1 мультиколінеарна з іншими змінними – x_2 та x_3, – тобто пояснюючі змінні моделі x_2 та x_3 впливають на цю змінну внаслідок суттєвої кореляції між ними. Аналогічно, у випадку $F_2 > F_{кр}$ маємо, що змінна x_2 мультиколінеарна із змінними x_1 та x_3, а також при $F_3 > F_{кр}$ змінна x_3 мультиколінеарна із змінними – x_1 та x_2.

12. Використовуючи матрицю C обчислюємо часткові коефіцієнти кореляції між пояснюючими змінними моделі за формулою

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk}c_{jj}}},\quad \left(k = \overline{1,3}\right), \left(j = \overline{1,3}\right),$$

де c_{kj} – елемент матриці C, що міститься у k –му рядку і j –му стовпці; c_{kk} і c_{jj} – діагональні елементи матриці C.

Виконавши відповідні розрахунки, отримаємо наступні значення часткових коефіцієнтів кореляції

$$r_{12} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}} = \frac{-(-1{,}446)}{\sqrt{6{,}868\cdot 5{,}280}} = 0{,}240\,,$$

$$r_{13} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11}c_{33}}} = \frac{-(-5{,}023)}{\sqrt{6{,}868\cdot 8{,}649}} = 0{,}652\,,$$

$$r_{23} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22}c_{33}}} = \frac{-(-3{,}390)}{\sqrt{5{,}280\cdot 8{,}649}} = 0{,}502\,.$$

13. На основі обчислених значень часткових коефіцієнтів кореляції, обчислюємо розрахункові значення t –критерію Ст'юдента за формулою

$$t_{kj} = \frac{r_{kj}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{kj}^2}}, \left(k=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}\right).$$

Таким чином, отримаємо наступні розрахункові значення t – критерію Ст'юдента

$$t_{12} = \frac{r_{12}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} = \frac{0{,}240\sqrt{15-3}}{\sqrt{1-0{,}240^2}} = 0{,}857,$$

$$t_{13} = \frac{r_{13}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{13}^2}} = \frac{0{,}652\sqrt{15-3}}{\sqrt{1-0{,}652^2}} = 2{,}976,$$

$$t_{23} = \frac{r_{23}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0{,}502\sqrt{15-3}}{\sqrt{1-0{,}502^2}} = 2{,}009.$$

14. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і для ступеня вільності $\nu = n - m = 15 - 3 = 12$ за статистичними таблицями t –розподілу Ст'юдента визначаємо критичне значення t –критерію Ст'юдента $t_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **СТЬЮДРАСПОБР**. В результаті маємо $t_{кр} = 2{,}18$.

15. Оскільки виконується умова $t_{13} > t_{кр}$, то можна зробити висновок, про те, що незалежні змінні x_1 та x_3 утворюють колінеарну пару, тобто між незалежними змінними x_1 та x_3 існує кореляційний зв'язок. Між іншими пояснюючими змінними моделі мультиколінеарний зв'язок відсутній, оскільки $t_{12} < t_{кр}$ та $t_{23} < t_{кр}$.

16. Наявність мультиколінеарності означає порушення припущення класичного лінійного регресійного аналізу про незалежність між пояснюючими змінними моделі. Тому з метою усунення цього явища пропонується вилучення з економетричної моделі однієї з змінних, що утворюють колінеарну пару.

Оскільки мірою кореляційного зв'язку між змінними є коефіцієнт парної кореляції, доцільним є визначення його значення між споживанням населення (y) та кожною пояснюючою змінною, які складають мультиколінеарну пару (x_1 і x_3). Використовуючи вбудовану статистичну функцію табличного процесора MS Excel **КОРРЕЛ** між змінними y та x_1, отримаємо $r_{yx_1} = 0{,}826$, а застосовуючи цю саму функцію між змінними y та x_3 – $r_{yx_3} = 0{,}805$.

Проаналізувавши отримані результати та за економічним змістом пояснюючих змінних, можна зробити висновок, що доцільним є вилучення з економетричної моделі змінної x_3.

Приклад 1.5

Гетероскедастичність

Для деякого регіону виконується економетричне дослідження залежності заощаджень населення (y) від доходу на душу населення (x). Вважається, що залежність між зазначеними економічними показниками може бути представлена економетричною моделлю парної лінійної регресії. Вибіркові статистичні дані за 18 років наведено нижче у табл. 1.8.

Таблиця 1.8

Вихідні дані до прикладу 1.5

Рік	Заощадження, млн. гр. од.	Доход на душу населення, млн. гр. од.	Рік	Заощадження, млн. гр. од.	Доход на душу населення, млн. гр. од.
1	2,30	15	10	2,50	22
2	2,50	68	11	3,10	64
3	2,08	16	12	2,20	15
4	2,20	17	13	2,82	72
5	2,10	17	14	3,04	80
6	2,70	85	15	2,32	18
7	3,99	100	16	2,20	20
8	2,50	20	17	3,10	95
9	3,94	90	18	2,45	19

Виходячи з ймовірності існування гетероскедастичності виконати параметричний тест Голдфелда–Квондта (для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$). Знайти оцінки параметрів моделі узагальненим методом найменших квадратів.

Розв'язання задачі.

1. Виконуємо ранжування (впорядкування) даних статистичних спостережень у порядку зростання значень величини доходу (незалежної змінної x). З цією метою використовуємо команду **Сортировка** з вкладки **Данные** (рис. 1.67).

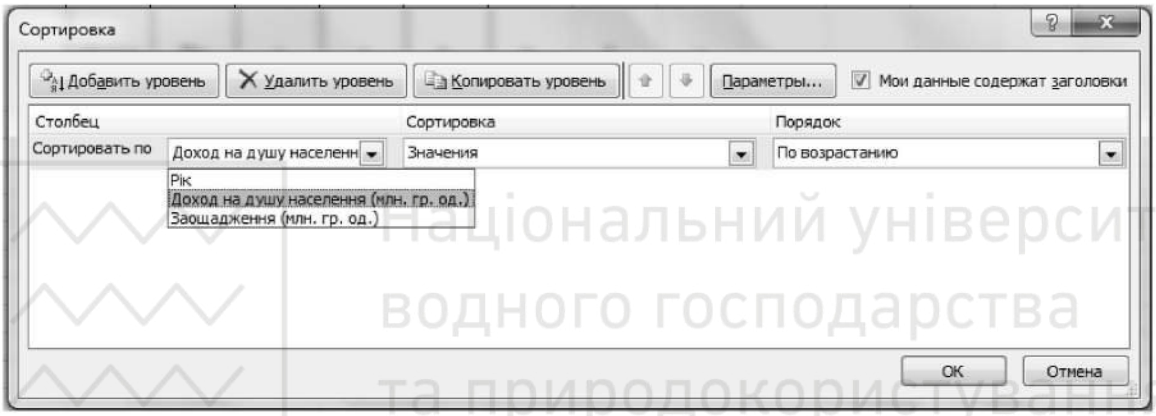


Рис. 1.67. Вікно команди **Сортировка** до прикладу 1.5

В результаті застосування команди **Сортировка** з вкладки **Данные** отримаємо нове представлення вихідних даних, наведене на рис. 1.68.

2. З середини впорядкованої вибірки вилучаємо c спостережень. Значення c визначаємо за наступною залежністю

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15}.$$

Після проведення відповідних розрахунків, приймаємо $c = 4$ спостереження. В результаті цього утворюються дві вибірки розміром $n_1 = n_2 = \frac{n - c}{2} = \frac{18 - 4}{2} = 7$ спостережень (рис. 1.69).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Рік	Заощадження (млн. гр. од.)	Доход на душу населення (млн. гр. од.)		Рік	*x*	*y*
2	1	2,30	15		1	15	2,30
3	2	2,50	68		12	15	2,20
4	3	2,08	16		3	16	2,08
5	4	2,20	17		4	17	2,20
6	5	2,10	17		5	17	2,10
7	6	2,70	85		15	18	2,32
8	7	3,99	100		18	19	2,45
9	8	2,50	20		8	20	2,50
10	9	3,94	90		16	20	2,20
11	10	2,50	22		10	22	2,50
12	11	3,10	64		11	64	3,10
13	12	2,20	15		2	68	2,50
14	13	2,82	72		13	72	2,82
15	14	3,04	80		14	80	3,04
16	15	2,32	18		6	85	2,70
17	16	2,20	20		9	90	3,94
18	17	3,10	95		17	95	3,10
19	18	2,45	19		7	100	3,99

Рис. 1.68. Ранжування даних спостережень до прикладу 1.5

3. Для обох вибірок будуємо моделі парної лінійної регресії, на основі яких обчислюємо залишки. Для цього спочатку розраховуємо оцінки параметрів обох моделей b_{s0} і b_{s1} (де s – порядковий номер моделі, $s = \overline{1,2}$) з використанням вбудованих статистичних функцій **ОТРЕЗОК** і **НАКЛОН**.

Для *моделі* 1, в результаті використання вбудованої функції ОТРЕЗОК(L2:L8;K2:K8), отримаємо значення оцінки параметра $b_{10} = 1{,}475$ та при використанні вбудованої функції НАКЛОН(L2:L8;K2:K8) – значення оцінки параметра $b_{11} = 0{,}046$.

Для *моделі* 2, при використанні вбудованої функції ОТРЕЗОК(L10:L16;K10:K16), отримаємо значення оцінки параметра $b_{20} = -0{,}093$, а при використанні вбудованої функції НАКЛОН(L10:L16;K10:K16) – значення оцінки параметра $b_{21} = 0{,}039$.

	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Модель	Рік	x	y	b_0	b_1	$\hat{y}_i$	e_i
2	1	1	15	2,30	1,475	0,046	2,158	0,142
3		12	15	2,20			2,158	0,042
4		3	16	2,08			2,203	-0,123
5		4	17	2,20			2,249	-0,049
6		5	17	2,10			2,249	-0,149
7		15	18	2,32			2,294	0,026
8		18	19	2,45			2,340	0,110
9		∑	-	-	-	-	-	0,000
10	2	2	68	2,50	-0,093	0,039	2,528	-0,028
11		13	72	2,82			2,682	0,138
12		14	80	3,04			2,991	0,049
13		6	85	2,70			3,183	-0,483
14		9	90	3,94			3,376	0,564
15		17	95	3,10			3,569	-0,469
16		7	100	3,99			3,761	0,229
17		∑	-	-	-	-	-	0,000

Рис. 1.69. Результати розрахунків показників моделей 1 та 2 парної лінійної регресії

Таким чином, за результатами проведених розрахунків маємо відповідні оцінені вибіркові рівняння регресії:

– для першої вибірки: $\hat{y}_{1,i} = 1{,}475 + 0{,}046 x_{1,i}$;

– для другої вибірки: $\hat{y}_{2,i} = -0{,}093 + 0{,}039 x_{2,i}$.

4. На основі отриманих оцінених рівнянь регресії для кожної з двох моделей обчислюємо розрахункові значення залежної змінної $\hat{y}_{s,i}$, $\left(i = \overline{1,7}\right)$, $\left(s = \overline{1,2}\right)$ (заощадження) і залишки $e_{s,i}$, $\left(i = \overline{1,7}\right)$, $\left(s = \overline{1,2}\right)$ за наступними залежностями

$$\hat{y}_{s,i} = b_{s0} + b_{s1} x_{s,i}, \quad \left(i = \overline{1,7}\right), \quad \left(s = \overline{1,2}\right),$$

$$e_{s,i} = y_{s,i} - \hat{y}_{s,i}, \quad \left(i = \overline{1,7}\right), \quad \left(s = \overline{1,2}\right),$$

результати обчислень яких наведено на рис. 1.69.

5. Використовуючи вбудовану функцію **СУММКВ** для кожної

побудованої моделі визначаємо суми квадратів залишків

$$SSE_1 = \sum_{i=1}^{7} e_{1,i}^2 , \qquad SSE_2 = \sum_{i=1}^{7} e_{2,i}^2 ,$$

де $e_{1,i}$ – залишки першої моделі, $e_{2,i}$ – залишки другої моделі.

В результаті використання вбудованої функції СУММКВ(P2:P8) було отримано значення $SSE_1 = 0{,}075$ та при використання вбудованої функції СУММКВ(P10:P16) – $SSE_2 = 0{,}846$.

6. Обчислюємо F–статистику за формулою

$$F^* = \frac{SSE_2}{SSE_1}.$$

Отже маємо

$$F^* = \frac{SSE_2}{SSE_1} = \frac{0{,}846}{0{,}075} = 11{,}348.$$

7. За статистичними таблицями F –розподілу Фішера, для ступенів вільності $\nu_1 = \nu_2 = \frac{n-c}{2} - k$ (де k – кількість оцінених у кожній регресії параметрів, $k = 2$) і рівня значимості $\alpha = 0{,}05$, знаходимо критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР**. Отже, маємо $F_{кр} = 5{,}05$. Оскільки виконується умова $F^* > F_{кр}$ $(11{,}348 > 5{,}05)$, то гетероскедастичність присутня.

8. Економетрична модель, якій притаманна гетероскедастичність є узагальненою моделлю, і для оцінювання її параметрів використовуємо узагальнений метод найменших квадратів (УМНК), або метод Ейткена. При цьому приймаємо гіпотезу про те, що дисперсія залишків пропорційна до зміни пояснюючої змінної (фактора) x, тобто для елементів матриці S маємо

$$\lambda_i = \frac{1}{x_i}, \ \left(i = \overline{1,18}\right).$$

9. Вектор оцінок параметрів узагальненої моделі обчислюємо за формулою

$$B = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1}\left(X'S^{-1}Y\right).$$

З цією метою виконуємо розрахунки в наступній послідовності:

- формуємо матрицю спостережень за незалежною змінною моделі X ($\dim X = 18\times 2$)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x_{18} \end{pmatrix},$$

і знаходимо транспоновану до неї матриця X' ($\dim X' = 2\times 18$)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{18} \end{pmatrix};$$

- формуємо матрицю S^{-1} ($\dim S^{-1} = 18\times 18$)

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{18} \end{pmatrix}.$$

Сформовані матриці X, X' і S^{-1} наведено на рис. 1.70;

- за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(F22:W23;F25:W42) знаходимо добуток матриць $X'S^{-1}$, а за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(F44:W45;B25:C42) – добуток матриць $X'S^{-1}X$. З використанням вбудованої функції МОБР(F47:G48) отримаємо обернену матрицю $\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}$;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
22					X'=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23						15	15	16	17	17	18	19	20	20	22	64	68	72	80	85	90	95	100
24																							
25		1	15			0,067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26		1	15			0	0,067	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27		1	16			0	0	0,063	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28		1	17			0	0	0	0,059	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29		1	17			0	0	0	0	0,059	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30		1	18			0	0	0	0	0	0,056	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31		1	19			0	0	0	0	0	0	0,053	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32		1	20			0	0	0	0	0	0	0	0,050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	X=	1	20		S^{-1}=	0	0	0	0	0	0	0	0	0,050	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34		1	22			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,045	0	0	0	0	0	0	0	0
35		1	64			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,016	0	0	0	0	0	0	0
36		1	68			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,015	0	0	0	0	0	0
37		1	72			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,014	0	0	0	0	0
38		1	80			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,013	0	0	0	0
39		1	85			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,012	0	0	0
40		1	90			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,011	0	0
41		1	95			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,011	0
42		1	100			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,010
43																							
44					$X'S^{-1}$=	0,067	0,067	0,063	0,059	0,059	0,056	0,053	0,050	0,050	0,045	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,011	0,011	0,010
45						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
46																							
47					$X'S^{-1}X$=	0,667	18			$(X'S^{-1}X)^{-1}$=	3,593	-0,078			$X'S^{-1}Y$=	1,600		B=	2,019				
48						18	833				-0,078	0,003				48,040			0,014				

Рис. 1.70. Результати розрахунків за узагальненим методом найменших квадратів до прикладу 1.5

- використовуючи вбудовану функцію МУМНОЖ(F44:W45;G2:G19) знаходимо матрицю $X'S^{-1}Y$;
- вектор оцінок параметрів узагальненої моделі отримуємо за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(J47:K48;N47:N48). Отже, маємо наступні значення оцінок параметрів узагальненої моделі: $b_0 = 2{,}019$ і $b_1 = 0{,}014$ (рис. 1.70).

10. Записуємо оцінене рівняння регресії

$$\hat{y} = 2{,}019 + 0{,}014x.$$

Таким чином можна зробити наступний висновок, що при збільшенні доходу на душу населення на 1 млн. гр. од., заощадження збільшаться в середньому на $0{,}014$ млн. гр. од.

Приклад 1.6

Автокореляція залишків

На основі вибіркових статистичних спостережень за 10 років (табл. 1.9) будується наступна економетрична модель

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t,$$

де y_t – роздрібний товарообіг у році t, x_t – доходи населення у році t.

Таблиця 1.9

Вихідні дані до прикладу 1.6

Рік	Роздрібний товарообіг, млрд. гр. од.	Доходи населення млрд. гр. од.
1	24,0	27,1
2	25,0	28,2
3	25,7	29,3
4	27,0	31,3
5	28,8	34,0
6	30,8	36,0
7	33,8	38,7
8	38,1	43,2
9	49,4	50,0
10	51,5	52,1

Перевірити наявність автокореляції залишків за допомогою тесту Дарбіна–Уотсона. Визначити оцінки параметрів моделі узагальненим методом найменших квадратів.

Розв'язання задачі.

1. За методом найменших квадратів визначаємо оцінки параметрів моделі b_0 і b_1. Розрахунки оцінок параметрів моделі виконуємо з використанням вбудованих статистичних функцій MS Excel **ОТРЕЗОК** і **НАКЛОН**. Відповідно до вихідних даних (рис. 1.71), за допомогою вбудованої функції ОТРЕЗОК(B3:B12;C3:C12), отримуємо оцінку параметра $b_0 = -7{,}442$, а за допомогою вбудованої функції НАКЛОН(B3:B12;C3:C12) – оцінку параметра $b_1 = 1{,}104$.

Таким чином, оцінене вибіркове рівняння регресії записуємо у наступному вигляді

$$\hat{y}_t = -7{,}442 + 1{,}104 x_t .$$

	A	B	C
1	Рік	Роздрібний товарообіг	Доходи населення
2		(млрд. гр. од.)	(млрд. гр. од.)
3	1	24,0	27,1
4	2	25,0	28,2
5	3	25,7	29,3
6	4	27,0	31,3
7	5	28,8	34,0
8	6	30,8	36,0
9	7	33,8	38,7
10	8	38,1	43,2
11	9	49,4	50,0
12	10	51,5	52,1
13			

Рис. 1.71. Вихідні дані до прикладу 1.6

2. На основі оціненого рівняння регресії обчислюємо розрахункові значення залежної змінної $\hat{y}_i$, $\left(i=\overline{1,12}\right)$ та залишки e_i, $\left(i=\overline{1,12}\right)$ і зводимо їх до таблиці (рис. 1.72).

3. Розраховуємо критерій Дарбіна–Уотсона за наступною залежністю

$$DW=\frac{\sum\limits_{i=2}^{n}\left(e_i-e_{i-1}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^2},$$

де e_i – залишок у поточному спостережені (поточному році), e_{i-1} – залишок у попередньому спостережені (попередньому році).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1–2	Рік	Роздрібний товарообіг (млрд. гр. од.)	Доходи населення (млрд. гр. од.)	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2	$e_i - e_{i-1}$	$(e_i - e_{i-1})^2$	$e_i \cdot e_{i-1}$
3	1	24,0	27,1	22,487	1,513	2,288	-	-	-
4	2	25,0	28,2	23,702	1,298	1,684	-0,215	0,046	1,963
5	3	25,7	29,3	24,917	0,783	0,613	-0,515	0,265	1,016
6	4	27,0	31,3	27,126	-0,126	0,016	-0,909	0,826	-0,099
7	5	28,8	34,0	30,108	-1,308	1,710	-1,182	1,397	0,165
8	6	30,8	36,0	32,317	-1,517	2,300	-0,209	0,044	1,983
9	7	33,8	38,7	35,299	-1,499	2,246	0,018	0,000	2,273
10	8	38,1	43,2	40,268	-2,168	4,702	-0,670	0,449	3,249
11	9	49,4	50,0	47,778	1,622	2,630	3,790	14,364	-3,516
12	10	51,5	52,1	50,098	1,402	1,967	-0,219	0,048	2,274
13	$\sum$				0,000	20,155		17,439	9,309

Рис. 1.72. Розрахункові значення залежної змінної та залишки для прикладу 1.6

Враховуючи значення $\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2$ та $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$, наведені на рис. 1.72, отримуємо наступне значення критерію Дарбіна–Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \frac{17{,}439}{20{,}155} = 0{,}865 .$$

4. За статистичними таблицями DW–розподілу Дарбіна–Уотсона для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$, числа спостережень $n = 10$ і числа факторів моделі $m = 1$ знаходимо критичні точки $d_L = 0{,}88$ і $d_U = 1{,}32$.

5. Будуємо зони автокореляціонного зв'язку, які схематично можна представити у наступному вигляді (рис. 1.73)

Оскільки розрахункове значення критерію Дарбіна–Уотсона потрапляє в межі $0 < DW < d_L$ $(0 < 0{,}865 < 0{,}88)$ – це свідчить про наявність позитивної автокореляції залишків.

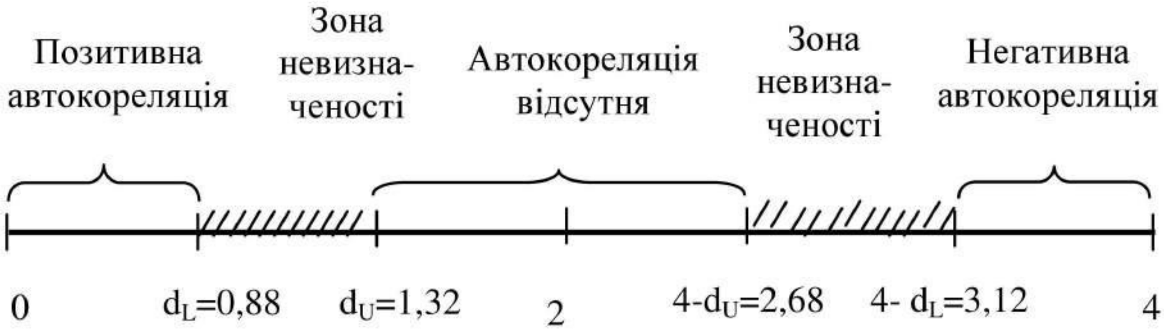


Рис. 1.73. Зони авторегресійного зв'язку

6. Для оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками будемо використовувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена). При цьому приймаємо гіпотезу про те, що залишки моделі відповідають авторегресійній схемі першого порядку

$$\varepsilon_i = \rho\varepsilon_{i-1} + u_i .$$

7. Обчислюємо оцінку коефіцієнта автокореляції ρ за наступною залежністю

$$\rho \approx \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} + \frac{m+1}{n} ,$$

де n – число спостережень, m – число факторів моделі.

Враховуючи значення $\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1}$ та $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$, наведені на рис. 1.72, а також число спостережень $n=10$ і число факторів моделі $m=1$, отримуємо наступне значення коефіцієнта автокореляції

$$\rho \approx \frac{n}{n-1}\frac{\sum_{i=2}^{n} e_i e_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} + \frac{m+1}{n} \approx \frac{10}{10-1}\cdot\frac{9{,}309}{20{,}155} + \frac{1+1}{10} \approx 0{,}713 .$$

Оскільки ρ додатне ($\rho > 0$), то автокореляція залишків є позитивною.

8. Вектор оцінок параметрів узагальненої моделі обчислюємо за формулою

$$B = \left(X'S^{-1}X\right)^{-1}\left(X'S^{-1}Y\right).$$

З цією метою виконуємо розрахунки в наступній послідовності:

- формуємо матрицю спостережень за незалежною змінною моделі X ($\dim X = 10 \times 2$)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & x_{10} \end{pmatrix},$$

і знаходимо транспоновану до неї матриця X' ($\dim X' = 2 \times 10$)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{pmatrix};$$

- формуємо матрицю S^{-1} ($\dim S^{-1} = 10 \times 10$)

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформовані матриці X, X' і S^{-1} наведено на рис. 1.74;

- за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(Q2:Z3;Q5:Z14) знаходимо добуток матриць $X'S^{-1}$, а за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(Q16:Z17;M5:N14) – добуток матриць $X'S^{-1}X$. З використанням вбудованої функції МОБР(Q19:R20) отримуємо обернену матрицю $\left(X'S^{-1}X\right)^{-1}$;
- використовуючи вбудовану функцію

МУМНОЖ(Q16:Z17;B3:B12) знаходимо матрицю $X'S^{-1}Y$;

- вектор оцінок параметрів узагальненої моделі отримуємо за допомогою вбудованої функції МУМНОЖ(U19:V20;Q22:Q23). Отже, отримуємо наступні значення оцінок параметрів узагальненої моделі: $b_0 = -9{,}361$ і $b_1 = 1{,}168$ (рис. 1.74).

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2					X'=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3						27,1	28,2	29,3	31,3	34	36	38,7	43,2	50	52,1
4															
5		1	27,1			2,035	-1,451	0	0	0	0	0	0	0	0
6		1	28,2			-1,451	3,070	-1,451	0	0	0	0	0	0	0
7		1	29,3			0	-1,451	3,070	-1,451	0	0	0	0	0	0
8		1	31,3		S^{-1}=	0	0	-1,451	3,070	-1,451	0	0	0	0	0
9	X=	1	34,0			0	0	0	-1,451	3,070	-1,451	0	0	0	0
10		1	36,0			0	0	0	0	-1,451	3,070	-1,451	0	0	0
11		1	38,7			0	0	0	0	0	-1,451	3,070	-1,451	0	0
12		1	43,2			0	0	0	0	0	0	-1,451	3,070	-1,451	0
13		1	50,0			0	0	0	0	0	0	0	-1,451	3,070	-1,451
14		1	52,1			0	0	0	0	0	0	0	0	-1,451	2,035
15															
16					$X'S^{-1}$=	0,584	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,584
17						14,222	4,722	3,600	4,225	6,709	5,012	3,868	3,895	15,193	33,459
18															
19					$X'S^{-1}X$=	2,507	94,904		$(X'S^{-1}X)^{-1}$=	4,047	-0,096				
20						94,904	3985,635			-0,096	0,003				
21															
22					$X'S^{-1}Y$=	87,370			B=	-9,361					
23						3766,354				1,168					

Рис. 1.74. Результати розрахунків за узагальненим методом найменших квадратів до прикладу 1.6

8. Записуємо оцінене рівняння регресії

$$\hat{y}_t = -9{,}361 + 1{,}168 x_t .$$

Таким чином можна зробити наступний висновок, що при збільшенні доходів населення на 1 млрд. гр. од. у деякий рік t, роздрібний товарообіг у той же рік збільшиться в середньому на $1{,}168$ млрд. гр. од.

Приклад 1.7

1.4.4. Економетричны моделі динаміки

На основі вибіркових статистичних спостережень за 10 років (табл. 1.10) побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування і доходами сім'ї. Відповідна економетрична модель специфікована наступним чином

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + \nu_t,$$

де y_t – витрати на харчування у поточному році t, y_{t-1} – витрати на харчування у попередньому році $t-1$; x_t – доходи сім’ї у поточному році t.

Таблиця 1.10

Вихідні дані до прикладу 1.7

Рік	Витрати на харчування, гр. од.	Доходи, гр. од
1	4	25
2	5	29
3	6	34
4	6	33
5	8	41
6	11	50
7	14	55
8	14	54
9	16	56
10	14	62

Параметри моделі не пов’язані зі схемою Койка, моделлю адаптивних очікувань або моделлю часткового корегування. Вважається, що у наведеній моделі можлива автокореляція залишків, яка відповідає авторегресійній схемі першого порядку $\nu_t = \rho \nu_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| \le 1$, $\varepsilon_t \in N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right)$.

Перевірити наявність автокореляції залишків моделі за допомогою тесту Дарбіна. На основі методу інструментальних змінних визначити оцінки параметрів моделі.

<u>Розв’язання задачі.</u>

1. На основі статистичної вибірки (табл. 1.10) формуємо допоміжну таблицю (рис. 1.75).

	A	B	C	D
14	Рік	y_t	x_t	y_{t-1}
15	2	5	29	4
16	3	6	34	5
17	4	6	33	6
18	5	8	41	6
19	6	11	50	8
20	7	14	55	11
21	8	14	54	14
22	9	16	56	14
23	10	14	62	16
24				

Рис. 1.75. Допоміжна таблиця для моделі динаміки

Методом найменших квадратів визначаємо оцінки параметрів моделі динаміки – b_0, b_1 і b_2. При цьому, економетричну модель розглядаємо як багатофакторну лінійну регресію, у якій змінні x_t і y_{t-1} виступають у якості першої і другої пояснюючої змінної відповідно. Оцінювання параметрів моделі виконується за допомогою інструменту **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного процесора MS Excel (рис. 1.76).

Значення оцінок параметрів моделі динаміки виписуємо з діапазону комірок з адресою G30:G32 (рис. 1.77): $b_0 = -3{,}587$, $b_1 = 0{,}255$ і $b_2 = 0{,}246$.

Тоді оцінене рівняння регресії буде мати вигляд

$$\hat{y}_t = -3{,}587 + 0{,}255 x_t + 0{,}246 y_{t-1} + \nu_t .$$

Для виведення значень залишків (рис. 1.78), під час роботи з інструментом **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные**, у діалоговому вікні цього інструменту обов'язково слід активізувати опцію **Остатки** (рис. 1.76).

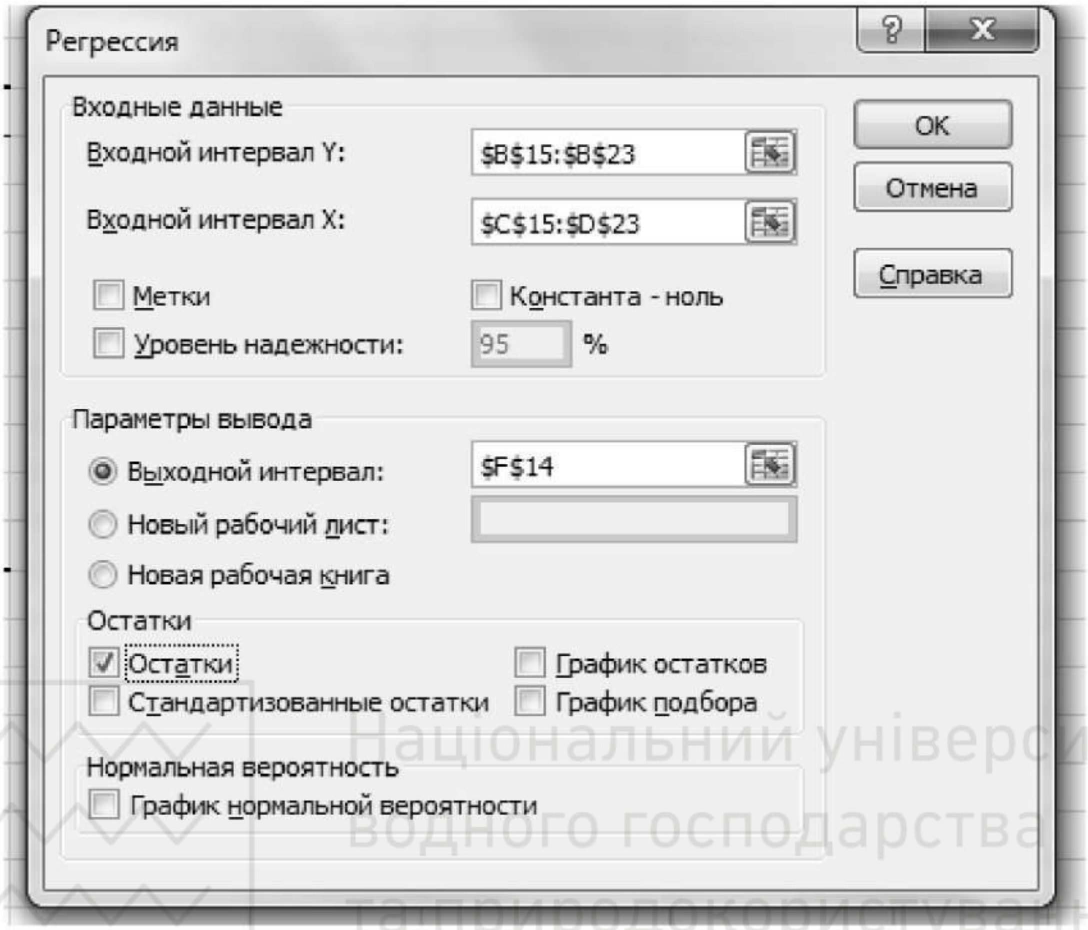


Рис. 1.76. Меню вводу інструменту **Регрессия** до прикладу 1.7

	F	G	H	I	J	K	L
14	ВЫВОД ИТОГОВ						
15							
16	*Регрессионная статистика*						
17	Множественный R	0,967					
18	R-квадрат	0,935					
19	Нормированный R-квадрат	0,913					
20	Стандартная ошибка	1,250					
21	Наблюдения	9					
22							
23	Дисперсионный анализ						
24		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
25	Регрессия	2	134,849	67,425	43,162	0,000	
26	Остаток	6	9,373	1,562			
27	Итого	8	144,222				
28							
29		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
30	Y-пересечение	-3,587	2,597	-1,381	0,216	-9,942	2,767
31	Переменная X 1	0,255	0,105	2,428	0,051	-0,002	0,512
32	Переменная X 2	0,246	0,279	0,881	0,412	-0,437	0,929

Рис. 1.77. Результати розрахунків за допомогою інструменту **Регрессия** до прикладу 1.7

	F	G	H	I	J	K
36	ВЫВОД ОСТАТКА					
37						
38	*Наблюдение*	*Предсказанное Y*	*Остатки*	e_t^2	$(e_t - e_{t-1})$	$(e_t - e_{t-1})^2$
39	1	4,795	0,205	0,042	-	-
40	2	6,317	-0,317	0,100	-0,522	0,272
41	3	6,308	-0,308	0,095	0,009	0,000
42	4	8,349	-0,349	0,122	-0,041	0,002
43	5	11,137	-0,137	0,019	0,212	0,045
44	6	13,151	0,849	0,722	0,986	0,973
45	7	13,633	0,367	0,134	-0,483	0,233
46	8	14,144	1,856	3,446	1,490	2,219
47	9	16,166	-2,166	4,693	-4,023	16,182
48	Сума			9,373		19,927

Рис. 1.78. Результати розрахунків залишків з використанням інструменту **Регрессия**

2. Використовуючи результати, отримані з допомогою інструменту **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** (рис. 1.78), на основі обчислених значень залишків e_t в діапазоні комірок I39:I47 визначаються їхні квадрати e_t^2, в діапазоні комірок J39:J47 – величини $(e_t - e_{t-1})$, а також величини $(e_t - e_{t-1})^2$ – діапазон комірок K39:K47.

3. На основі обчислених залишків обчислюємо DW–критерій Дарбіна–Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=3}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2},$$

де e_t – залишок у поточному році, e_{t-1} – залишок у попередньому році.

Отримуємо наступне значення DW–критерію

$$\mathrm{DW}=\frac{\sum_{t=3}^{n}\left(e_t-e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=2}^{n}e_t^2}=\frac{19{,}927}{9{,}373}=2{,}126\,.$$

4. Обчислюємо оцінку коефіцієнта автокореляції першого порядку за формулою

$$\hat{\rho}=1-\frac{1}{2}\mathrm{DW}\,.$$

Отримуємо наступне значення оцінки коефіцієнта автокореляції першого порядку

$$\hat{\rho}=1-\frac{1}{2}\mathrm{DW}=1-\frac{1}{2}\cdot 2{,}126=-0{,}063\,.$$

5. Обчислюємо розрахункове значення h –статистики Дарбіна

$$h=\hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\hat{\sigma}_{\beta_2}^2}}\,,$$

де n – розмір статистичної вибірки, $n=9$; $\hat{\sigma}_{\beta_2}^2$ – оцінка дисперсії параметра β_2 при лаговій змінній y_{t-1} у вибірковій регресії.

Значення $\hat{\sigma}_{\beta_2}^2$ виписуємо із комірки з адресою H32 (рис. 1.79).

Таким чином, маємо

$$h=\hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\hat{\sigma}_{\beta_2}^2}}=-0{,}063\cdot\sqrt{\frac{9}{1-9\cdot 0{,}279^2}}=-0{,}346\,.$$

6. Для рівня значимості $\alpha=0{,}05$ за статистичними таблицями стандартизованого нормального розподілу визначаємо критичну точку $u_{\alpha/2}$ з умови $\Phi\left(u_{\alpha/2}\right)=\left(1-\alpha\right)/2$, де Φ – функція Лапласа і порівнюємо із значенням критерію h. Таким чином, для $\Phi\left(u_{\alpha/2}\right)=\frac{1-\alpha}{2}=0{,}475$ значення критичної точки буде наступне: $u_{\alpha/2}=1{,}96$.

Оскільки виконується умова $|h|<u_{\alpha/2}$ – автокореляція залишків

відсутня.

7. Використовуючи метод інструментальних змінних оцінюємо параметри моделі у наступній послідовності:

- економетричну модель переписуємо у наступному вигляді
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_t + \nu_t \,;$$
- у якості інструментальної змінної для лагової змінної y_{t-1} приймаємо змінну x_{t-1};
- визначаємо оцінки параметрів нової економетричної моделі за наступною залежністю
$$B = \left(Z' X\right)^{-1} Z' Y ,$$

де матриці Z, X і вектор Y визначаємо наступним чином

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_3 & x_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_3 & x_4 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Матриці Z, X і вектор Y (рис. 1.79) будуємо на основі вибіркових статистичних спостережень (рис. 1.80).

З метою визначення оцінок параметрів нової економетричної моделі, за допомогою вбудованих функцій MS Excel, обчислюємо матриці Z', $Z' X$, $\left(Z' X\right)^{-1}$ і вектори $Z' Y$ та B (рис. 1.79), наступним чином:

- з допомогою вбудованої функцій ТРАНСП(P2:R10), отримуємо матрицю Z';
- в результаті використання вбудованої функції МУМНОЖ(P13:X15;U2:W10), отримуємо матрицю $Z' X$;
- за допомогою вбудованої функції МОБР(P17:R19), отримуємо матрицю $\left(Z' X\right)^{-1}$;
- вектор $Z' Y$ будуємо з використанням вбудованої функції МУМНОЖ(P13:X15;Z2:Z10);
- вектор оцінок параметрів B отримуємо на основі використання вбудованої функції МУМНОЖ(U17:W19;P21:P23);

	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
2		1	25	29			1	4	29			5
3		1	29	34			1	5	34			6
4		1	34	33			1	6	33			6
5		1	33	41			1	6	41			8
6	Z=	1	41	50		X=	1	8	50		Y=	11
7		1	50	55			1	11	55			14
8		1	55	54			1	14	54			14
9		1	54	56			1	14	56			16
10		1	56	62			1	16	62			14
11												
12												
13		1	1	1	1	1	1	1	1	1		
14	Z'=	25	29	34	33	41	50	55	54	56		
15		29	34	33	41	50	55	54	56	62		
16												
17		9	84	414			2,466	0,184	-0,219			
18	Z'X=	377	3947	18452		$(Z'X)^{-1}$=	0,074	0,027	-0,026			
19		414	4267	20188			-0,066	-0,009	0,010			
20												
21		94					-1,767					
22	Z'Y=	4336				B=	0,511					
23		4715					0,162					
24												

Рис. 1.79. Результати розрахунків за методом інструментальних змінних

	A	B	C
1–2	Рік	Витрати на харчування, гр. од.	Доходи, гр. од
3	1	4	25
4	2	5	29
5	3	6	34
6	4	6	33
7	5	8	41
8	6	11	50
9	7	14	55
10	8	14	54
11	9	16	56
12	10	14	62

Рис. 1.80. Вихідні дані до прикладу 1.7

- отримавши наступні оцінки параметрів моделі – $\beta_0 = -1{,}767$, $\beta_1 = 0{,}511$ і $\beta_2 = 0{,}162$, – записуємо оцінену функція регресії

$$y_t = -1{,}767 + 0{,}511 y_{t-1} + 0{,}162 x_t + v_t .$$

Таким чином можна зробити наступний висновок, що зростання доходу у деякий рік t призведе до зростання витрат на харчування у той же рік на $0{,}162$ гр. од..

Приклад 1.8

1.4.5. Симультативні моделі

На основі вибіркових статистичних даних за 8 років побудувати макромодель формування доходу Кейнса.

Макромодель Кейнса прийняти у наступному вигляді

$$\begin{cases} C_t = \beta_0 + \beta_1 y_t + \varepsilon_t, \\ y_t = C_t + I_t, \end{cases}$$

де y_t – національний доход, C_t – сукупне споживання, I_t – інвестиції, ε_t – стохастична складова моделі, β_0, β_1 – параметри моделі.

Вихідні дані вибіркових статистичних спостережень наведено у табл. 1.11.

Таблиця 1.11

Вихідні дані до прикладу 1.8

Рік	Національний доход, млрд. гр. од.	Сукупне споживання, млрд. гр. од.	Інвестиції, млрд. гр. од.
1	28,04	50,50	26,08
2	32,99	57,20	27,38
3	34,67	67,50	31,78
4	35,72	71,05	30,88
5	41,99	69,55	34,42
6	40,58	77,20	36,68
7	45,80	82,90	38,56
8	45,20	83,45	42,18

Визначити прогнозне значення сукупного споживання і національного доходу для прогнозного значення інвестицій $I_{pr} = 48$ млрд. гр. од.. Обчислити граничну схильність до споживання МРС.

При побудові рівнянь приведеної (прогнозної) форми економетричної моделі достатньо виконати тільки перевірку цих рівнянь на загальну статистичну значимість на основі F –критерію Фішера. Прогнозні значення споживання і національного доходу визначати як точкові.

Розв'язання задачі.

1. Виконуємо ідентифікацію тих рівнянь структурної форми макромоделі Кейнса, які містить невідомі параметри за формулою

$$k_s - 1 \le m - m_s, \ \left(s = \overline{1,2}\right),$$

де k_s – число ендогенних змінних у s-му рівнянні, m – число екзогенних змінних моделі, m_s – число екзогенних змінних у s-му рівнянні.

Для цього спочатку визначаємо число екзогенних змінних в цілому для макромоделі Кейнса: $m = 1 \ (I_t)$. Оскільки невідомі параметри містяться лише у першому рівнянні (функції споживання) структурної форми макромоделі Кейнса, то для нього маємо: $s = 1$, $k_1 = 2 \ (C_t, y_t)$ та $m_1 = 0$. Звідси $k_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ та $m - m_1 = 1 - 0 = 1$. Оскільки $k_1 - 1 = m - m_1$, перше рівняння макромоделі Кейнса точно ідентифіковане. Таким чином, з метою оцінювання параметрів симультативної моделі на основі макромоделі Кейнса необхідно застосувати непрямий метод найменших квадратів (НМНК).

2. Систему структурних рівнянь макромоделі Кейнса приводимо до прогнозної форми

$$\begin{cases} C_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{\beta_1}{1-\beta_1} \cdot I_t + \dfrac{1}{1-\beta_1}\varepsilon_{t1}, \\ y_t = \dfrac{\beta_0}{1-\beta_1} + \dfrac{1}{1-\beta_1} \cdot I_t + \dfrac{1}{1-\beta_1}\varepsilon_{t2}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_t = r_{10} + r_{11} \cdot I_t + u_1, \\ y_t = r_{20} + r_{21} \cdot I_t + u_2, \end{cases}$$

де

$$r_{10} = r_{20} = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}, \quad r_{11} = \frac{\beta_1}{1-\beta_1}, \quad r_{21} = \frac{1}{1-\beta_1},$$

$$u_1 = \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{t1}, \quad u_2 = \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{t2}.$$

3. Використовуючи дані статистичної вибірки (рис. 1.81) відносно показників C_t і I_t за методом найменших квадратів (1 МНК) оцінюємо параметри r_{10} і r_{11} першого рівняння приведеної форми. Для цього використовуємо інструмент **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного редактору MS Excel (рис. 1.82).

	A	B	C	D
1–2	Рік	Національний доход, млрд. гр. од.	Сукупне споживання, млрд. гр. од.	Інвестиції, млрд. гр. од.
3	1	28,04	50,50	26,08
4	2	32,99	57,20	27,38
5	3	34,67	67,50	31,78
6	4	35,72	71,05	30,88
7	5	41,99	69,55	34,42
8	6	40,58	77,20	36,68
9	7	45,80	82,90	38,56
10	8	45,20	83,45	42,18

Рис. 1.81. Вихідні дані до прикладу 1.8

Значення параметрів першого рівняння приведеної форми симультативної моделі r_{10} та r_{11} виписуємо, із комірок з наступними адресами – I19 та I20, відповідно (рис. 1.83). В результаті отримуємо наступні значення: $r_{10} = 2{,}835$ та $r_{11} = 2{,}003$.

4. Використовуючи дані статистичної вибірки (рис. 1.81) відносно показників y_t і I_t за методом найменших квадратів (1 МНК) оцінюємо параметри r_{20} і r_{21} другого рівняння приведеної форми. Для цього також використовуємо інструмент **Регрессия** пакету **Анализ данных** вкладки **Данные** табличного редактору MS Excel (рис. 1.84).

Значення параметрів другого рівняння приведеної форми симультативної моделі r_{20} та r_{21} виписуємо, відповідно, із комірок з адресами – R19 та R20 (рис. 1.85). В результаті отримуємо наступні значення: $r_{20} = 2{,}147$ та $r_{21} = 1{,}074$.

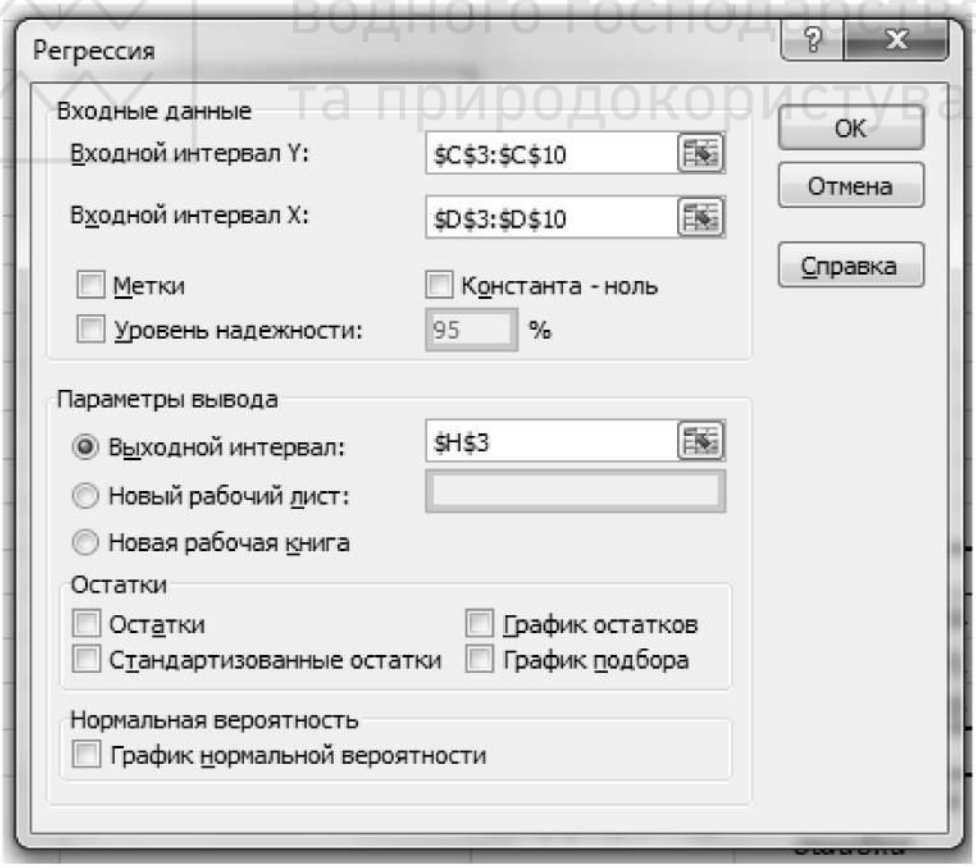


Рис. 1.82. Меню вводу інструменту **Регрессия** для першого рівняння приведеної форми макромоделі Кейнса

	H	I	J	K	L	M	N
3	ВЫВОД ИТОГОВ						
4							
5	*Регрессионная статистика*						
6	Множественный R	0,951					
7	R-квадрат	0,904					
8	Нормированный R-квадрат	0,888					
9	Стандартная ошибка	3,903					
10	Наблюдения	8					
11							
12	Дисперсионный анализ						
13		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
14	Регрессия	1	859,344	859,344	56,412	0,000	
15	Остаток	6	91,401	15,233			
16	Итого	7	950,745				
17							
18		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
19	Y-пересечение	2,835	9,038	0,314	0,764	-19,279	24,950
20	Переменная X 1	2,003	0,267	7,511	0,000	1,350	2,655

Рис. 1.83. Результати розрахунків, отриманих за допомогою інструменту **Регрессия** для першого рівняння приведеної форми макромоделі Кейнса

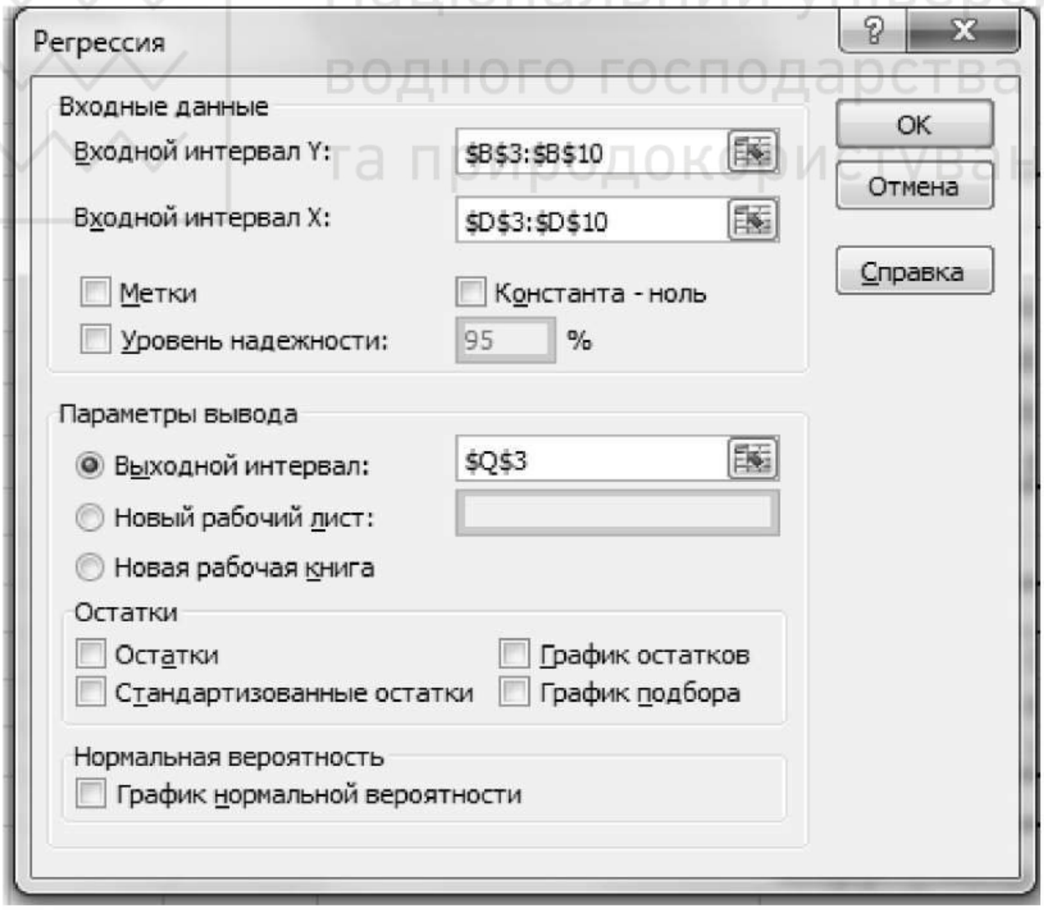


Рис. 1.84. Меню вводу інструменту **Регрессия** для другого рівняння приведеної форми макромоделі Кейнса

5. Записуємо систему оцінених рівнянь прогнозної форми

$$\begin{cases} C_t = 2{,}835 + 2{,}003 \cdot I_t + u_1, \\ y_t = 2{,}147 + 1{,}074 \cdot I_t + u_2. \end{cases}$$

6. Для кожного рівняння приведеної форми визначаємо коефіцієнт кореляції, детермінації і критерій Фішера.

Із комірки з адресою I6 (рис. 1.83) виписуємо значення коефіцієнта кореляції для першого рівняння приведеної форми симультативної моделі. Таким чином, маємо: $r_1 = 0{,}951$. Для другого рівняння приведеної форми симультативної моделі значення коефіцієнта кореляцію виписуємо з комірки з адресою R6 (рис. 1.85) – $r_2 = 0{,}947$.

Значення коефіцієнта детермінації для першого рівняння приведеної форми симультативної моделі виписуємо із комірки з адресою I7 (рис. 1.83) – $R_1^2 = 0{,}904$. Для другого рівняння приведеної форми симультативної моделі значення коефіцієнта детермінації виписуємо з комірки з адресою R7 (рис. 1.85) – $R_2 = 0{,}896$.

	Q	R	S	T	U	V	W
3	ВЫВОД ИТОГОВ						
4							
5	*Регрессионная статистика*						
6	Множественный R	0,947					
7	R-квадрат	0,896					
8	Нормированный R-квадрат	0,879					
9	Стандартная ошибка	2,182					
10	Наблюдения	8					
11							
12	Дисперсионный анализ						
13		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
14	Регрессия	1	247,157	247,157	51,913	0,000	
15	Остаток	6	28,566	4,761			
16	Итого	7	275,723				
17							
18		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
19	Y-пересечение	2,147	5,052	0,425	0,686	-10,216	14,510
20	Переменная X 1	1,074	0,149	7,205	0,000	0,709	1,439
21							

Рис. 1.85. Результати розрахунків, отриманих за допомогою інструменту **Регрессия** для другого рівняння приведеної форми макромоделі Кейнса

Розрахункові значення критерію Фішера для кожного рівняння приведеної форми симультативної моделі виписуємо із комірок з адресами L14 (рис. 1.83) та U14 (рис. 1.85). В результаті маємо наступні розрахункові значення критерію Фішера: для першрго рівняння приведеної форми сумультативної моделі – $F_1^* = 56{,}412$; для другого рівняння – $F_2^* = 51{,}913$.

7. За результатами отриманих значень коефіцієнтів кореляції та детермінації для кожного рівняння приведеної форми можна зробити наступні висновки:

- між сукупним споживанням (C_t) та інвестиціями (I_t) існує тісний прямий зв'язок; на 90,4 % ($R_1^2 = 0{,}904$) зміна сукупного споживання залежить від зміни інвестицій;
- між національним доходом (y_t) та інвестиціями (I_t) так само існує тісний прямий зв'язок; на 89,6 % зміна національного доходу залежить від зміни саме інвестицій.

8. Для рівня значимості $\alpha = 0{,}05$ і ступенів вільності $\nu_1 = 1$ і $\nu_2 = n - 2 = 8 - 2 = 6$ за статистичними таблицями F –розподілу визначаємо критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$, або ж з цією метою використовуємо вбудовану статистичну функцію **FРАСПОБР**. В результаті маємо $F_{кр} = 5{,}99$. Табличне значення $F_{кр}$ порівнюємо з розрахунковими значенням F_s^* $\left(s = \overline{1{,}2}\right)$ для кожного рівняння приведеної форми симультативної моделі і робимо відповідний висновок щодо статистичної значимості рівнянь приведеної форми. Оскільки $F_1^* > F_{кр}$ і $F_2^* > F_{кр}$ ($56{,}412 > 5{,}99$ і $51{,}913 > 5{,}99$), то обидва рівняння приведеної форми симультативної моделі є адекватними.

9. Використовуючи оцінені рівняння приведеної форми знаходимо точкову оцінку прогнозу сукупного споживання C_t і національного доходу y_t для прогнозного значення інвестицій I_{pr}. В результаті побудови точкового прогнозу для заданого прогнозного значення інвестицій $I_{pr} = 48$ млрд. гр. од. отримуємо такі результати:

- точкова оцінка прогнозу сукупного споживання

$$C_{t_{pr}} = 2{,}835 + 2{,}003 \cdot I_t = 2{,}835 + 2{,}003 \cdot 48 = 98{,}969 \text{ млрд. гр. од.;}$$

- точкова оцінка прогнозу національного доходу

$$y_{t_{pr}} = 2{,}147 + 1{,}074 \cdot I_t = 2{,}147 + 1{,}074 \cdot 48 = 53{,}703 \text{ млрд. гр. од..}$$

10. Використовуючи взаємозв'язок між коефіцієнтами приведеної і структурної форми моделі визначаємо оцінки параметрів структурної форми

$$\hat{\beta}_1 = \frac{r_{11}}{(1 + r_{11})} = \frac{2{,}003}{1 + 2{,}003} = 0{,}667,$$

$$\hat{\beta}_0 = r_{10} \cdot \left(1 - \hat{\beta}_1\right) = 2{,}835 \cdot (1 - 0{,}667) = 0{,}944,$$

і записуємо оцінену систему структурних рівнянь

$$\begin{cases} C_t = 0{,}944 + 0{,}667\, y_t + \varepsilon_t, \\ y_t = C_t + I_t. \end{cases}$$

11. Використовуючи параметри структурної форми моделі, визначаємо граничну схильність до споживання $MPC = \hat{\beta}_1 = 0{,}667$. Таким чином, можна зробити наступний висновок, що при збільшенні національного доходу на 1 % сукупного споживання збільшиться в середньому на 0,667 %.

РОЗДІЛ 2. ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL

2.1. МОЖЛИВОСТІ ТА ІНСТРУМЕНТИ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL ЩОДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Як і у випадку економетричного моделювання при розв'язуванні оптимізаційних задач можна застосувати різні підходи і можливості табличного процесора MS Excel в залежності від вміння і підготовки користувача.

Так, у найпростішому випадку, можна скористатися набором стандартних вбудованих функцій MS Excel і вмінням будувати відповідні формульні вирази для виконання розрахунків згідно алгоритму розв'язання тієї чи іншої задачі математичного програмування. Такий підхід можна використати, наприклад, для розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом, коли і сам процес її розв'язування і остаточний результат можна представити у вигляді послідовності електронних таблиць, які по суті представляють собою електронне зображення відомих з „ручних" розрахунків симплекс-таблиць. При цьому, перехід від однієї таблиці до наступної (перехід від поточного опорного плану до наступного) здійснюється шляхом нескладних обчислень за тим же „правилом трикутника". Зрозуміло, що такий підхід передбачає, фактично, використання комп'ютера як великого калькулятора і є анахронізмом, неефективним і затратним з точки зору витрат часу. Окрім цього, такий підхід містить достатньо великий ризик отримання помилок, особливо при великих обсягах обчислень, а також вимагає від користувача докладного і глибокого розуміння математичної сторони тієї задачі, яка їм розв'язується.

Другий підхід полягає у застосуванні таких засобів автоматизації розрахунків MS Excel як макроси та VBA (Visual Basic for Application). Цей підхід дає можливість суттєво зменшити витрати часу на розв'язання задач математичного програмування та побудувати на базі наведених засобів достатньо ефективні аплікації (програми) з простим і зручним інтерфейсом користувача (форми уводу вихідних даних, форми виводу результатів розрахунків і т.і.). Але у цьому випадку, як і у попередньому, по-перше, дослідник-користувач повинен повністю і з усіма нюансами володіти математичним апаратом, необхідним для розв'язання задач математичного програмування, і ,по-друге, його рівень підготовки повинен відповідати рівню просунутого користувача, а точніше навіть рівню програміста, що як правило не відповідає рівню комп'ютерної підготовки пересічного користувача-студента.

Найбільш оптимальним і прийнятним сучасним підходом до розв'язання задач математичного програмування у середовищі табличного процесора MS Excel є застосування інструменту **Поиск решения**. Інструмент **Поиск решения** представляє собою надбудову табличного процесора MS Excel і дає можливість розв'язувати оптимізаційні задачі, математичні моделі яких представляють собою задачі **лінійного**, **цілочислового** або **нелінійного програмування**. При цьому, цей інструмент є достатньо маловитратним за часом, не вимагає знання алгоритму та математичного апарату розв'язання відповідної задачі, має простий інтерфейс користувача і орієнтований в першу чергу на практичне застосування його фахівцями у сфері економіки, менеджменту, бізнесу і т.п. Окрім цього, інструмент **Поиск решения** не вимагає ніяких особливих додаткових знань, окрім базових, отриманих студентами економічних спеціальностей у рамках університетської програми з дисципліни „Інформатика та обчислювальна техніка".

2.2. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ІНСТРУМЕНТУ ПОИСК РЕШЕНИЯ

2.2.1. Елементи управління інструменту Поиск решения

Запуск інструменту **Поиск решения** здійснюється шляхом вибору команди **Поиск решения** з меню **Данные** (вкладка **Анализ**). Якщо у меню **Данные** такої команди немає, це означає, що надбудова **Поиск решения** не завантажена у табличний процесор і на даний момент є недоступною. Для завантаження і активізації інструменту **Поиск решения** потрібно вибрати у вікні MS Excel кнопку **Office** (лівий верхній кут), потім командну кнопку

Параметры Excel. У вікні **Параметры Excel**, що відкриється, потрібно у лівій половині вікна вибрати команду **Надстройки**, а потім командну кнопку **Перейти** і вибрати у вікні **Надстройки** надбудову **Поиск решения**. Після цього команда **Поиск решения** з'явиться у меню **Данные** і стане доступною для використання.

Загальний вигляд і структуру вікна інструменту **Поиск решения** наведено на рис. 2.1. Розглянемо більш докладніше елементи управління цього вікна.

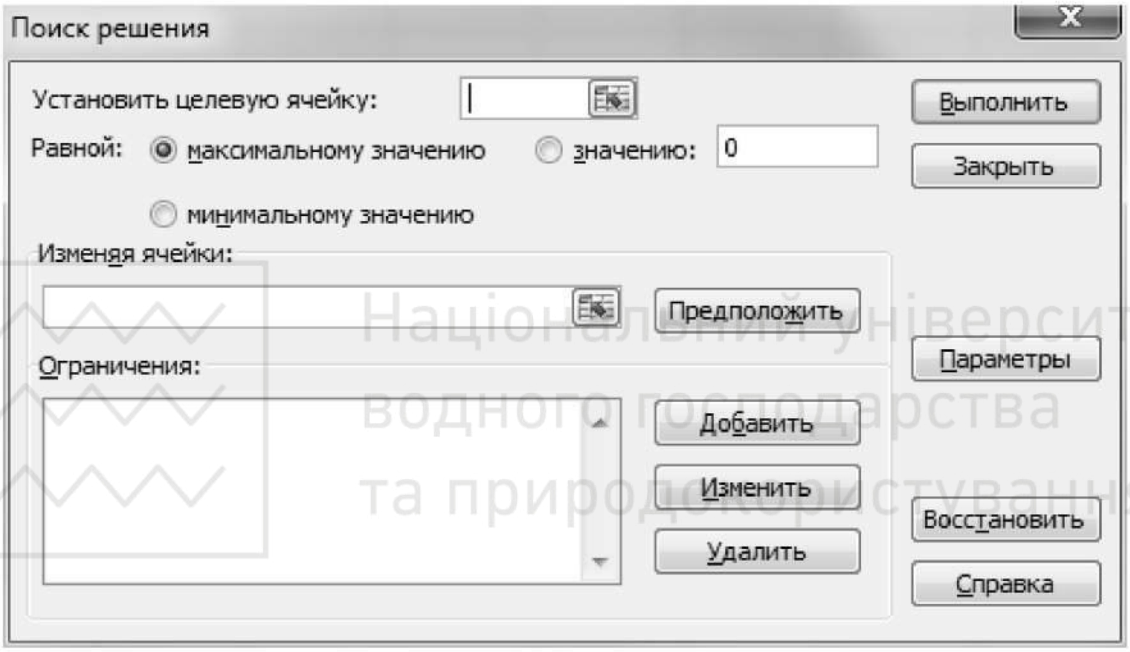


Рис. 2.1. Діалогове вікно інструменту **Поиск решения**

❖ Поле **Установить целевую ячейку** призначено для введення адреси клітинки електронної таблиці, у якій сформовано формулу для обчислення значення цільової функції.

❖ Група кнопок-перемикачів **Равной** використовується для вибору типу процедури оптимізації. Призначення елементів цієї групи наведено у табл. 2.1.

❖ У полі **Изменяя ячейки** задається адреса клітинок електронної таблиці (табличної моделі задачі), значення яких можуть змінюватися в процесі пошуку оптимального розв'язку задачі. Ці клітинки, як правило, (але не завжди) є порожніми і відводяться в електронній таблиці під шукані невідомі задачі. У деяких випадках можна скористатися можливістю автоматичного пошуку цих клітинок-параметрів. Для цього необхідно натиснути командну кнопку **Предположить**. При цьому в поле **Изменяя ячейки** попадуть посилання на ті клітинки, які самі не містять формули, але які впливають на формулу, посилання на яку задано у полі **Установить целевую ячейку.**

Таблиця 2.1

Кнопки-перемикачі групи **Равной**

Кнопка - перемикач	Дія
максимальному значению	Пошук оптимального плану задачі математичного програмування, який надає цільовій функції максимального значення
минимальному значению	Пошук оптимального плану задачі математичного програмування, який надає цільовій функції мінімального значення
значению	Пошук оптимального плану задачі математичного програмування, при якому цільова функція приймає деяке наперед задане значення

❖ Поле **Ограничения** використовується для формування і відтворення усіх обмежень задачі. Справа від цього поля розміщені три командні кнопки, які мають наступні призначення :

- **Добавить** – додати нове обмеження;
- **Изменить** – змінити (скоригувати) виділене обмеження;
- **Удалить** – вилучити виділене обмеження.

Таким чином ці кнопки дозволяють вводити(додавати), редагувати і вилучати обмеження задачі, тобто керувати процесом формування системи обмежень задачі.

Щоб почати вводити обмеження задачі потрібно клацнути мишкою у полі **Ограничения**, а потім вибрати командну кнопку **Добавить**. Після цього відкривається вікно **Добавление ограничения** (рис. 2.2). Таке ж саме вікно відкривається і тоді, якщо у полі **Ограничения** вибрати (виділити) вже існуюче обмеження і натиснути командну кнопку **Изменить**.

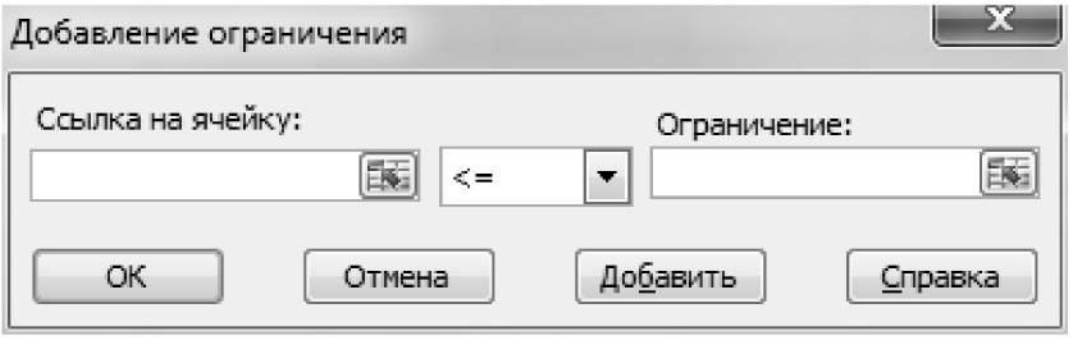


Рис. 2.2. Діалогове вікно **Добавление ограничения**

Як видно з рис. 2.2. вікно **Добавление ограничения** має три поля і чотири командних кнопки. У полі **Ссылка на ячейку** вводиться (за допомогою мишки) посилання (адреса) на клітинку електронної таблиці, у якій сформовано формулу для обчислення лівої частини того обмеження задачі, яке формується у вікні **Добавление ограничения**. У полі **Ограничение** вводиться або посилання (адреса) на клітинку електронної таблиці, у якій введено числове значення правої частини цього обмеження, або саме числове значення правої частини обмеження. Середнє поле типу список використовується для встановлення відношення лівої і правої частин поточного обмеження, а також для формулювання додаткових специфічних обмежень на значення шуканих невідомих задачі (цілочислові, бінарні і т.і.). Вміст цього поля показано нижче на рис. 2.3.

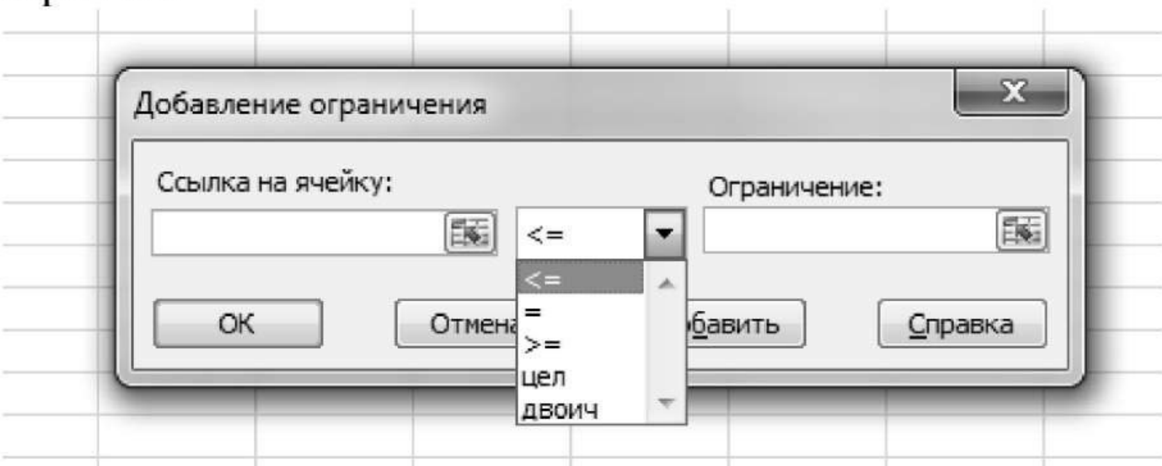


Рис. 2.3. Діалогове вікно **Добавление ограничения** з розкритим списком відношення між лівою і правою частинами обмеження

Формування кожного обмеження, крім останнього, завершується натисканням командної кнопки **Добавить**. Після уводу останнього обмеження потрібно натиснути кнопку **ОК,** після цього процес формування системи обмежень задачі завершується і на екрані відеомонітору знову з'являється вікно **Поиск решения** с заповненим полем **Ограничения**. Тепер можна переглянути усі введені обмеження задачі та, при необхідності, відредагувати чи вилучити їх.

Після заповнення усіх розглянутих вище полів вікна **Поиск решения** можна :

– задати додаткові параметри для пошуку оптимального розв'язку (командна кнопка **Параметры**);
– запустити команду на пошук оптимального розв'язку задачі (командна кнопка **Выполнить**);
– припинити роботу з інструментом **Поиск решения** і повернутися до електронної таблиці (командна кнопка **Закрыть**).

Слід зазначити, що в останньому випадку всі установки вікна **Поиск решения** будуть збережені і можуть бути використані при наступних запусках команди **Поиск решения**.

При виборі командної кнопки **Выполнить** запускається програма пошуку оптимального розв'язку задачі. Після завершення роботи цієї програми з'являється вікно **Результаты поиска решения**. У випадку коли інструмент **Поиск решения** <u>знаходить оптимальний розв'язок,</u> це вікно має вигляд, представлений на рис. 2.4.

Як видно з цього рисунку, у разі успішного завершення роботи у діалоговому вікні **Результаты поиска решения** виводиться повідомлення **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальності выполнены**. Кнопка-перемикач **Сохранить найденное решение** використовується для того, щоб зберегти обчислені значення шуканих змінних задачі і значення цільової функції, а кнопка **Восстановить исходные значения** – для того, щоб залишити усі значення змінних в електронній таблиці без змін – тобто такими, якими вони були перед запуском команди **Поиск решения**. Використовуючи поле **Тип отчета** можна також сформувати три види звітів (як це зробити, наведено нижче у 2.2.4).

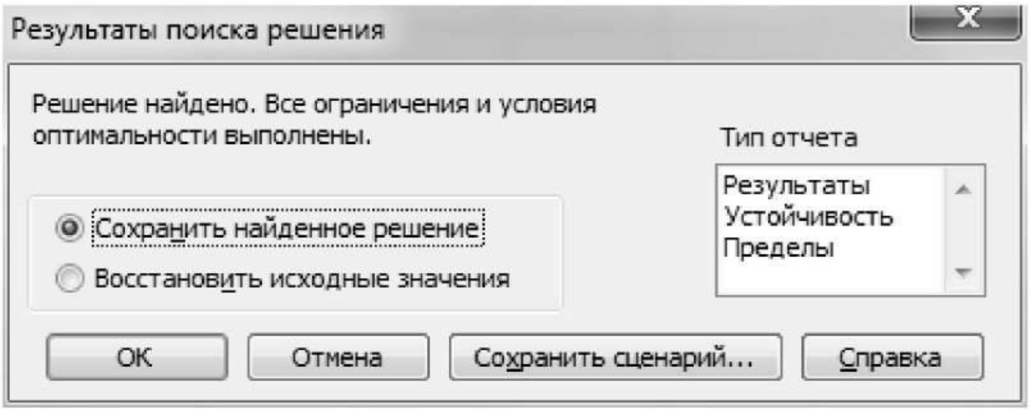


Рис. 2.4. Діалогове вікно **Результаты поиска решения** після успішного завершення роботи

У випадку, коли інструмент **Поиск решения** не може знайти розв'язок задачі, у вікні **Результаты поиска решения** з'являються інші повідомлення. Найбільш типові повідомлення про неуспішне завершення роботи інструменту **Поиск решения**, причини цих повідомлень і можливі дії користувача докладно наведені у 2.2.5.

2.2.2. Налаштування інструменту Поиск решения

Інструмент **Поиск решения** зазвичай використовує стандартний набір параметрів для пошуку оптимального розв'язку задачі оптимізації. Ці параметри можна змінювати і задавати їм необхідні значення у діалоговому вікні **Параметры поиска решения**, яке можна відкрити у вікні інструменту **Поиск решения** шляхом вибору командної кнопки **Параметры.**

Загальний вигляд діалогового вікна **Параметры поиска решения** після його активізації наведено на рис. 2.5. Як видно з цього рисунку це вікно має декілька полів текстового типу, а також декілька полів типу прапорець і кнопка-перемикач. Кожне з цих полів дозволяє встановлювати необхідне значення відповідного параметру інструменту **Поиск решения**. Перелік усіх параметрів інструменту **Поиск решения** і їх призначення наведені у табл. 2.2.

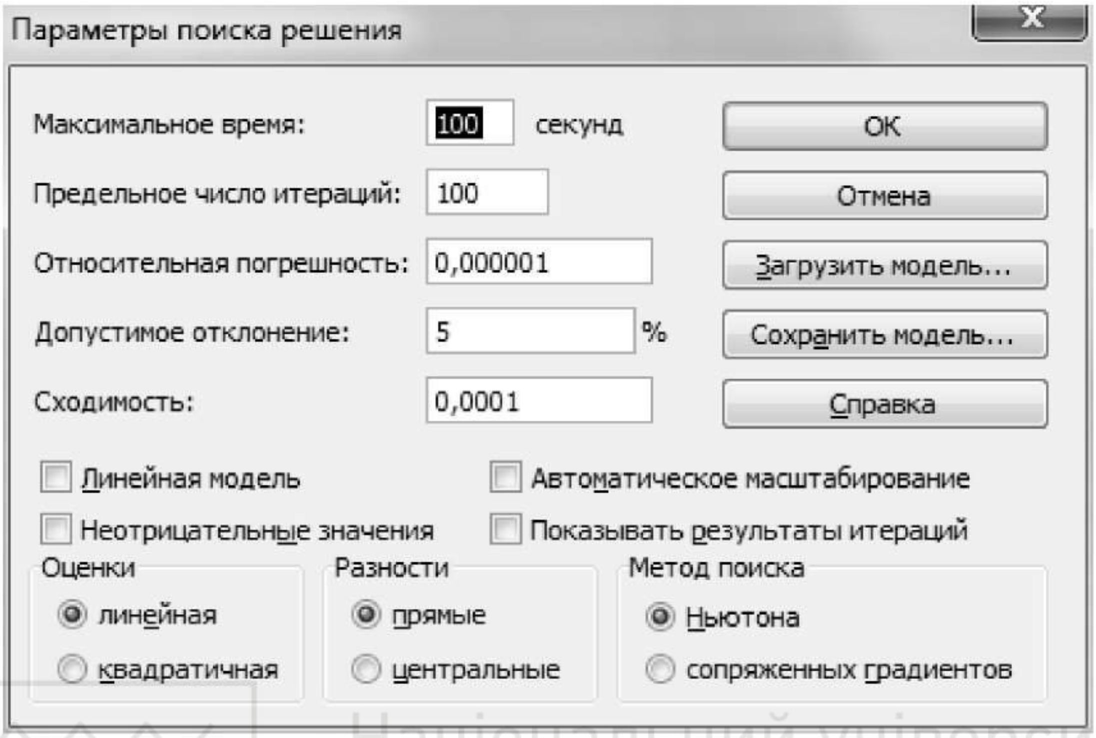


Рис. 2.5. Діалогове вікно **Параметры поиска решения**

Таблиця 2.2

Параметри інструменту **Поиск решения**

Параметр	Призначення	Особливості застосування
Максимальное время	Встановлення максимального часу (у секундах) для пошуку розв’язку	Параметр не повинен перебільшувати значення 32767 (стандартне значення – 100 с). При досягненні встановленого часу програма перериває роботу і пропонує два варіанти подальших дій: припинити роботу або продовжити.

продовження табл. 2.2

Предельное число итераций	Встановлення максимального числа ітерацій (наближень) для пошуку розв’язку	Стандартне значення – 100. При досягненні встановленого числа ітерацій програма перериває роботу і пропонує два варіанти подальших дій: припинити роботу або продовжити.
Относительная погрешность	Встановлення точності виконання обмежень задачі. Обмеження вважається виконаним у вигляді рівності, якщо модуль різниці між значенням правої та лівої частини не виходить за межі значення цього параметра.	Поле повинно містити значення від 0 до 1. Стандартне значення параметра – 0,000001. Рекомендовані значення параметра – від 0,0001 до 0,000001.
Допустимое отклонение	Встановлює, наскільки у відсотковому відношенні може відрізнятися обчислене значення цільової функції від можливого оптимального значення	Використовується тільки для задач цілочисельного програмування для прискорення обчислень

продовження табл. 2.2

Сходимость	Встановлює точність обчислення значення цільової функції у задачах нелінійного програмування	Використовується тільки коли скинуто прапорець **Линейная модель.** Якщо відносна зміна значення цільової функції за останні п'ять ітерацій стає меншим за число, наведене у цьому полі, пошук розв'язку задачі припиняється.
Линейная модель	Встановлюється для прискорення пошуку розв'язку для задач лінійного програмування	Використовується тільки для задач лінійного програмування
Неотрицательные значения	Встановлення умови невід'ємності для змінних моделі	Використовується, якщо умови невід'ємності не сформовані явно у діалогову вікні **Ограничения**
Показать результаты итераций	Виведення проміжного результату і пауза після кожної ітерації	Для продовження пошуку розв'язку задачі після кожної паузи необхідно кожний раз натискати кнопку **Продолжить**. Зупинити процес можна за допомогою командної кнопки **Стоп.**

продовження табл. 2.2

Автоматическое масштабирование	Включення автоматичної нормалізації вихідних і результуючих значень величин, які суттєво відрізняються за порядком	Використовується, якщо значення деяких змінних моделі можуть приймати значення, які відрізняються від значень інших змінних на п'ять або більше порядків.
Оценки	Вибір лінійного або квадратичного методу оцінювання в задачах нелінійного програмування	Квадратичний метод є більш точним і використовується, якщо залежності в моделі (цільова функція, обмеження тощо) є суттєво нелінійними, в протилежному випадку можна використати менш точну лінійну апроксимацію
Разности	Вибір методу числового диференціювання (**Прямые** або **Центральные**), який використовується для обчислення часткових похідних цільових функцій та функцій обмежень в задачах нелінійного програмування	Прямі похідні призначені для гладких безперервних функцій, а центральні – для функцій, які мають похідну, що має розриви

закінчення табл. 2.2

Метод поиска	Вибір алгоритму оптимізації для нелінійних моделей – **метод Ньютона** або **метод сопряженных градиентов**	Метод Ньютона використовує більше пам'яті комп'ютера але працює швидше і виконує менше ітерацій, метод спряжених градієнтів – навпаки.

Більш докладно специфіка налаштування інструменту **Поиск решения** і рекомендації щодо використання наведених вище у таблиці параметрів пошуку розв'язку буду наведено нижче <u>при розгляді окремих типів задач математичного програмування.</u>

2.2.3. Послідовність розв'язування задач математичного програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Перш за все слід зазначити, що процес розв'язування будь-якої задачі лінійного, нелінійного або цілочислового програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** умовно можна розбити на два етапи.

<u>**На першому етапі**</u>, який по суті є підготовчим, на робочому листі MS Excel спочатку створюється так звана **таблична модель** (**екранна форма**) задачі, яка є основою для подальшого застосування інструменту **Поиск решения**. Таблична модель представляє собою звичайну електронну таблицю, структура і вигляд якої залежать від типу задачі, що розв'язується, та особистих уподобань, знань і стилю користувача. Але незалежно від типу задачі таблична модель повинна, як правило, мати наступні складові :

- блок клітинок з вихідними даними задачі (коефіцієнти при змінних у цільовій функції і у лівих частинах обмежень задачі, значення правих частин обмежень);
- блок клітинок, відведений для шуканих змінних задачі;
- клітинка з формулою для обчислення значення цільової функції (так звана **цільова клітинка**);

– блок клітинок з формулами для обчислення лівих частин обмежень задачі.

На другому етапі безпосередньо використовується інструмент **Поиск решения.** Зрозуміло**,** що при цьому можливі різні варіанти і різна послідовність роботи з цією командою. Одним з можливих варіантів є наступна послідовність кроків :

1) у меню **Данные** вибирається команда **Поиск решения**, після чого відкривається діалогове вікно **Поиск решения**;
2) у полі **Установить целевую ячейку,** використовуючи мишку, задаємо адресу цільової клітинки;
3) серед групи кнопок **Равной** вибираємо ту, яка відповідає нашій задачі (**Равной максимальному значению** – для задачі на максимум і **Равной мінімальному значению** – для задачі на мінімум);
4) у полі **Изменяя ячейки** за допомогою мишки задаємо адресу клітинок електронної таблиці, які відведені для шуканих невідомих задачі;
5) клацаємо мишкою у полі **Ограничения,** потім по командній кнопці **Добавление ограничения**;
6) у діалогову вікні **Добавление ограничения** формуємо усі обмеження задачі, як це вказано вище у 2.2.1;
7) при необхідності редагуємо систему обмежень задачі, як це вказано у 2.2.1;
8) при необхідності встановлюємо параметри команди **Поиск решения**, як це вказано вище у 2.2.2;
9) клацаємо по командній кнопці **Выполнить;**
10) якщо розв'язок задачі знайдено, у діалоговому вікні **Результаты поиска решения** вибираємо **Сохранить найденное решение**, при необхідності також вибираємо тип звіту і клацаємо по командній кнопці **ОК**;
11) повертаємось до табличної моделі, в якій у відповідних клітинках з'являються знайдені значення змінних моделі і цільової функції.

У випадку, якщо розв'язок задачі не знайдено і у вікні **Результаты поиска решения** з'являється одне з повідомлень про неуспішне завершення роботи команди **Поиск решения** (див. 2.2.1)**,** слід проаналізувати можливі причини такого завершення роботи згідно рекомендацій, наведених нижче у 2.2.5.

2.2.4. Створення звітів

За результатами розв'язання задачі математичного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** у загальному випадку можна створювати звіти трьох типів :

- звіт **Результаты**;
- звіт **Устойчивость**;
- звіт **Пределы**.

Ці звіти є достатньо інформативними і можуть використовуватися на етапі післяоптимізаційного аналізу. Тип звіту обирається, як вже відзначалося вище у 2.2.1, після закінчення пошуку розв'язку задачі у діалогову вікні **Результаты поиска решения** у списку **Тип отчета** (рис. 2.4). Зрозуміло, що список **Тип отчета** є доступним тільки у разі успішного завершення роботи інструменту **Поиск решения**, коли знайдено оптимальний розв'язок задачі. За один раз можна вибрати один, два або усі три типи звіту за допомогою мишки при натиснутій клавіші <Ctrl>. Кожний звіт створюється на окремому новому робочому листі з відповідною назвою, який вставляється перед робочим листом з табличною моделі задачі. Так, звіт **Результаты** формується на робочому листі **Отчет по результатам,** звіт **Устойчивость -** на листі **Отчет по устойчивости**, а звіт **Пределы -** на листі **Отчет по пределам**. Стисла загальна характеристика кожного із звітів наведена у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Загальна характеристика звітів

Тип звіту	Характеристика звіту	Особливості
Результаты	Звіт складається із цільової клітинки та списку клітинок, які впливають на значення у цільовій клітинці, з вихідних і кінцевих значень цих клітинок, а також формул обмежень і додаткової інформації стосовно накладених обмежень	---

продовження табл. 2.3

Устойчивость	Звіт містить інформацію стосовно чутливості розв'язку до малих змін як коефіцієнтів цільової функції, так і правих частин обмежень моделі. Для задач нелінійного програмування звіт містить дані стосовно градієнтів і множників Лагранжа.	Звіт не створюється для задач цілочислового програмування
Пределы	Звіт складається із цільової клітинки та списку клітинок, які впливають на значення у цільовій клітинці, а також нижніх і верхніх меж цих клітинок. Нижньою межею є найменше значення, яке може вміщувати клітинка, що впливає на цільову, в той час, як значення усіх інших клітинок, що впливають на цільову, є фіксованими і задовольняють накладеними на них обмеженням. Відповідно верхньою межею є найбільше значення, яке може вміщувати, клітинка, що впливає на цільову, в той час, як значення усіх інших клітинок, що впливають на цільову, є фіксованими і задовольняють накладеними на них обмеженням.	Звіт не створюється для задач цілочислового програмування

Слід зазначити, що форма кожного з наведених вище звітів і їх наповнення залежить від типу задачі математичного програмування, яка розв'язується за допомогою інструменту **Поиск решения**. Тому специфіка формування кожного з наведених у таблиці 2.3 звітів, його конкретний вигляд і опис його параметрів буде наведено нижче окремо для кожного типу задачі математичного програмування, які розглянуто у посібнику.

☝ **Зауваження.** *Данні, отримані у наведених вище звітах, можна форматувати, як і будь-які данні звичайної електронної таблиці MS Excel. На клітинки звітів можна також посилатися в інших електронних таблицях (навіть на інших листах робочої книги); окрім цього данні, наведені у звітах, можна використовувати для побудови діаграм.*

2.2.5. Коли Поиск решения не може знайти розв'язку

Поиск решения є безумовно потужним засобом, та все ж таки це не чарівна паличка. Він може розв'язати не всі задачі, які ви йому запропонуєте. Якщо **Поиск решения** не може знайти оптимального розв'язку, він виводить, як вже відмічалося у 2.2.1, повідомлення про неуспішне завершення роботи. Найбільш типові повідомлення та причини їх виникнення наведені у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Найбільш типові повідомлення у разі неуспішного завершення роботи команди **Поиск решения**

№ з/п	Повідомлення	Причини
1	**Поиск остановлен (достигнуто максимальное число итераций)**	У процесі пошуку розв'язку задачі досягнуто (вичерпане) максимальне число ітерацій (наближень), встановлене у полі **Предельное число итераций** діалогового вікна **Параметры поиска решения**

продовження табл. 2.4

2	**Поиск остановлен (истекло заданное на поиск время)**	В процесі пошуку розв'язку задачі досягнуто (вичерпано) максимальний час, встановлений у полі **Максимальное время** діалогового вікна **Параметры поиска решения**
3	**Поиск не может найти подходящего решения**	Неможливо знайти розв'язок, який задовольняє усім обмеженням задачі
4	**Значения целевой ячейки не сходяться**	Неможливо знайти розв'язок, оскільки цільова функція необмежена зверху (або знизу)

Слід зазначити, що повідомлення, представлені у цій таблиці, не завжди свідчать про характер оптимального розв'язку задачі і принципову неможливість його отримання – дуже часто вони вказують на те, що при введені умов задачі в MS Excel були допущені помилки, які не дозволяють інструменту **Поиск решения** знайти оптимальний розв'язок, який в дійсності існує.

Якою мусить бути реакція користувача у разі виведення наведених вище повідомлень ?

❖ Що стосується <u>перших двох повідомлень</u>, то з огляду на причини їх виникнення реагувати на них достатньо просто. У першому випадку, коли є впевненість, що оптимальний розв'язок існує, слід або збільшити значення максимального числа ітерацій у діалоговому вікні **Параметры поиска решения**, або натиснути командну кнопку **Продолжить** і продовжити пошук оптимального розв'язку, поки не буде вичерпано максимальний час, заданий у полі **Максимальное время** діалогового вікна **Параметры поиска решения,** або **Поиск решения** не припинить роботу з інших причин. У другому випадку просто потрібно збільшити час для пошуку розв'язку задачі, збільшивши його значення у полі **Максимальное время** діалогового вікна **Параметры поиска решения**.

❖ Що ж стосується двох останніх повідомлень, наведених у табл. 2.4, то вони можуть бути наслідками достатньо серйозних помилок, які в основному можуть бути зведені до наступних груп:

1) помилки на етапі створення табличної моделі задачі;
2) помилки на етапі безпосереднього використання інструменту **Поиск решения**, пов'язані с заповненням полів діалогових вікон цього інструменту і встановленням параметрів пошуку**;**
3) некоректна формалізація вихідної оптимізаційної задачі;
4) некоректна постановка самої оптимізаційної задачі.

Перші дві групи помилок напряму пов'язані с застосуванням інструменту **Поиск решения**. Найбільш типові помилки такого типу наведені у табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Перелік можливих помилок при застосуванні інструменту **Поиск решения**

№ з/п	Помилка	Місце знаходження
Помилки на етапі створення табличної моделі		
1	Пропущені вихідні дані задачі	Таблична модель
2	Помилкові значення вихідних даних (невірні значення та знаки коефіцієнтів цільової функції і обмежень, помилкові значення правих частин обмежень)	
3	Пропущені формули для обчислення значення цільової функції та лівих частин обмежень	
4	Неправильно введені формули для обчислення значення цільової функції та лівих частин обмежень	

продовження табл. 2.5

Помилки на етапі безпосереднього застосування інструменту Поиск решения		
5	Невірно вказано адресу цільової клітинки	Вікно **Поиск решения**
6	Невірно вказано мету (напрям) оптимізації (максимізація, мінімізація чи інше)	Вікно **Поиск решения**
7	Невірно вказано адресу клітинок із змінними задачі	Вікно **Поиск решения** Поле **Изменяя ячейки**
8	Невірно введені співвідношення між лівою та правою частинами обмежень (<=, >=, =)	Вікно **Поиск решения** Поле **Ограничения**
9	Невірно задано адреси лівих і правих частин обмежень	Вікно **Поиск решения** Поле **Ограничения**
10	Не задано умову невід'ємності змінних задачі	Вікно **Поиск решения** або Поле **Ограничения**
11	Не задано умову цілочисельності змінних задачі	Вікно **Поиск решения** або Поле **Ограничения**
12	Не задано умову бінарності змінних задачі (0 або 1)	Вікно **Поиск решения** або Поле **Ограничения**
13	Задано параметр **Линейная модель** для задачі нелінійного програмування	вікно **Параметры поиска решения**
14	Не задано параметр **Неотрицательные значения**, якщо цей параметр не задано явно у вікні **Поиск решения** (поле **Ограничения)**	

Тому, у випадку завершення роботи інструменту **Поиск решения** з повідомленнями 3 і 4 (табл. 2.4), в першу чергу потрібно ретельно перевірити задачу стосовно наявності в ній наведених у табл. 2.5 помилок. Слід також зазначити, що інструмент **Поиск решения** інколи може знайти розв'язок задачі навіть при наявності помилок першої та другої групи. Зрозуміло, що цей розв'язок не буде оптимальним, тому користувачу потрібно бути дуже уважним при застосуванні інструменту **Поиск решения** на етапі підготовки табличної моделі та в процесі заповнення діалогового вікна цього інструменту.

Якщо ж цих помилок не виявлено і задача все одно не може бути розв'язаною, скоріш за все маємо справу з двома останніми наведеними вище причинами: або математична модель задачі побудована невірно або сама змістовна постановка оптимізаційної задачі містить внутрішні протиріччя і не є коректною.

У першому випадку некоректна побудова математичної моделі вихідної оптимізаційної задачі може бути наслідком наступних помилкових дій на етапі формалізації задачі:

- невірно обрані змінні моделі;
- некоректно сформульована система обмежень задачі;
- некоректно записана цільова функція;
- некоректно сформульовані додаткові умови для змінних моделі.

Якщо ж математична модель задачі коректно описує вихідну змістовну постановку задачі математичного програмування і це доведено, єдиною причиною, що унеможливлює розв'язання відповідної оптимізаційної задачі, є некоректна змістовна постановка самої задачі оптимізації, яка є зазвичай наслідком наступних помилок:

- невірно обрано мету оптимізації (критерій оптимальності);
- невірно обрано обмеження та умови оптимізації.

Ці помилки закладають в оптимізаційну задачу внутрішні протиріччя, що призводять або до неможливості задоволення системи обмежень задачі, або до необмеженості цільової функції та виродженості плану (розв'язку) задачі.

2.3. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.3.1. Особливості розв'язування задач лінійного програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Задачі лінійного програмування – це клас задач математичного програмування, які найбільш успішно та ефективно розв'язуються в середовищі табличного процесора MS Excel з використанням інструменту **Поиск решения** і, як правило, не вимагають якихось особливих дій ні на етапі побудови табличної моделі, ні на етапі безпосереднього застосування самого інструменту.

На етапі побудови табличної моделі задачі використовуються стандартні рекомендації, наведені вище у 2.2.3. Єдиний нюанс, який потрібно враховувати на етапі використання самого інструменту, це те, що при налаштуванні інструменту **Поиск решения** бажано задавати такий параметр роботи інструменту як **Линейная модель** (поле **Линейная модель**, діалогове вікно **Параметры поиска решения**). Це суттєво може прискорити пошук оптимального розв'язку, оскільки у цьому випадку інструмент **Поиск решения** буде використовувати більш ефективний і швидкий для даного випадку симплекс-метод.

Що ж стосується можливостей післяоптимізаційного аналізу, то у цьому випадку є можливість отримання всіх трьох звітів, наведених раніше у 2.2.4. Більш докладно розглянемо зміст цих звітів на деякому конкретному прикладі.

Перший звіт **Результаты** представлено на рис. 2.6. Звіт складається з трьох розділів, які мають вигляд таблиць : **Целевая ячейка (Максимум)**, **Изменяемые ячейки** і **Ограничения**.

Розділ **Целевая ячейка (Максимум)** характеризує вихідне (перед початком обчислень) і оптимальне значення цільової функції та включає наступні поля :

- **Ячейка** - адреса цільової клітинки;
- **Имя –** назва цільової клітинки (якщо вона їй присвоєна на етапі підготовки табличної моделі);
- **Исходное значение –** вихідне (перед запуском команди **Поиск решения**) значення цільової комірки (як правило, але не завжди, воно дорівнює 0);
- **Результат** – оптимальне значення цільової комірки (оптимальне значення цільової функції).

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Виробнича програма - Приклад 2.5.xls]Лист1
Отчет создан: 17.01.2008 17:20:08

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$E$14	F	0	867

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$14	x1	0	10
$C$14	x2	0	40
$D$14	x3	0	10

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$4	Деревина (м3) Фактичне використання	16,8	$F$4<=$E$4	не связан.	8,2
$F$5	Плита ДВП (м2) Фактичне використання	40,0	$F$5<=$E$5	связанное	0
$F$6	Скло (м2) Фактичне використання	20,0	$F$6<=$E$6	не связан.	20
$F$7	Робочий час (люд. год.) Фактичне використання	239,0	$F$7<=$E$7	не связан.	1
$F$8	Машинний час (маш. год.) Фактичне використання	68,0	$F$8<=$E$8	не связан.	2
$C$14	x2	40	$C$14=4*$B$14	не связан.	0
$D$14	x3	10	$D$14>=6	не связан.	4
$B$14	x1	10	$B$14=10	не связан.	0

Рис. 2.6 Звіт **Результаты**

Розділ **Изменяемые ячейки** має таку ж саму структуру, як і розділ **Целевая ячейка (Максимум)** і характеризує вихідні (перед початком обчислень) значення шуканих невідомих задачі та їхні значення в оптимальному плані після пошуку розв'язку відповідної задачі.

Розділ **Ограничения** містить інформацію стосовно реалізації (задоволення) обмежень задачі, які накладаються на шуканні змінні задачі. Кожний рядок таблиці цього розділу має наступні поля :

- **Ячейка** – адреса клітинки, у якій обчислюється ліва частина деякого обмеження задачі, або адреса клітинки, виділеної в табличній моделі для деякої шуканої невідомої задачі;
- **Имя –** ім'я шуканої змінної задачі або назва лівої частини кожного обмеження, яка переноситься у звіт з табличної моделі;
- **Значение –** фактичне значення лівої частини деякого обмеження або значення деякої шуканої змінної задачі після знаходження оптимального розв'язку задачі;
- **Формула –** математичний запис обмеження**;**
- **Статус** – інформація стосовно того, чи відповідне обмеження після знаходження оптимального розв'язку виконується як

чиста рівність(статус **связанное**) або як чиста нерівність (статус **не связан**) у випадку, якщо деяке обмеження є обмеженням типу $\leq$ або $\geq$;

- **Разница** – різниця між правою та лівою частиною відповідного обмеження після знаходження оптимального розв'язку задачі.

Звіт **Устойчивость** представлено на рис. 2.7. Цей звіт містить основну інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку задачі до зміни значення цільових коефіцієнтів і правих частин обмежень. Звіт складається з двох розділів-таблиць : **Изменяемые ячейки** і **Ограничения**.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Виробнича програма - Приклад 2.5.xls]Лист1
Отчет создан: 17.01.2008 17:20:08

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$14	x1	10	36,1	17,3	36,1	1E+30
\$C\$14	x2	40	0	4,7	9,025	1E+30
\$D\$14	x3	10	0	50,6	1E+30	50,6

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$4	Деревина (м3) Фактичне використання	16,8	0,0	25	1E+30	8,2
\$F\$5	Плита ДВП (м2) Фактичне використання	40,0	12,65	40	0,434782609	16
\$F\$6	Скло (м2) Фактичне використання	20,0	0,0	40	1E+30	20
\$F\$7	Робочий час (люд. год.) Фактичне використання	239,0	0,0	240	1E+30	1
\$F\$8	Машинний час (маш. год.) Фактичне використання	68,0	0,0	70	1E+30	2
\$C\$14	x2	40	4,7	0	0,434782609	40

Рис. 2.7. Звіт **Устойчивость**

Розділ **Изменяемые ячейки** містить інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку задачі до зміни значень коефіцієнтів цільової функції. Кожний рядок таблиці **Изменяемые ячейки** включає наступні поля :

- **Ячейка** - адреса клітинки табличної моделі (електронної таблиці), виділеної під змінну моделі і її позначення;
- **Имя** – ім'я змінної, якщо воно їй присвоєно;
- **Результ. значение** – значення змінної після пошуку оптимального розв'язку задачі;
- **Нормир. стоимость** – величина збільшення значення цільової функції при збільшенні значення змінної моделі на одну одиницю при незмінності значення усіх інших змінних;

- **Целевой Коэффициент** – коефіцієнт при змінній у цільовій функції;
- **Допустимое Увеличение** – величина, яка показує, на скільки одиниць можна збільшити значення коефіцієнта при змінній у цільовій функції, залишивши незмінними усі інші параметри задачі, щоб оптимальний план залишився без змін;
- **Допустимое Уменьшение** – величина, яка показує, на скільки можна зменшити значення коефіцієнта при змінній у цільовій функції, залишивши незмінними усі інші параметри задачі, щоб оптимальний план залишився без змін.

✔ Таким чином поля **Допустимое Увеличение** і **Допустимое Уменьшение** розділу **Изменяемые ячейки** дають можливість визначити межі допустимої зміни коефіцієнта цільової функції при будь-якій змінній моделі, які не змінять оптимальний план за умови, що інші цільові коефіцієнти і обмеження задачі залишаються без змін. При цьому, зрозуміло, значення самої цільової функції змінюється – зростає або зменшується відповідно до зростання або зменшення цільового коефіцієнта при змінній моделі.

Розділ **Ограничения** містить інформацію стосовно чутливості оптимального розв'язку задачі до зміни значення правих частин обмежень задачі. Кожний рядок таблиці **Ограничения** має наступні поля :

- **Ячейка** - адреса клітинки, у якій обчислюється ліва частина деякого обмеження задачі, або адреса комірки, виділеної в електронній таблиці для відповідної шуканої невідомої;
- **Имя** – ім'я шуканої змінної задачі або назва лівої частини кожного обмеження, яка переноситься у звіт з табличної моделі задачі;
- **Результ. значение** – значення правої частини обмеження або шуканої змінної моделі після пошуку оптимального розв'язку задачі;
- **Теневая Цена** – двоїста оцінка, характеризує збільшення значення цільової функції при збільшенні значення правої частини обмеження на одну одиницю за умови, що усі інші параметри задачі залишаються без змін;

- **Ограничение Правая часть** – числове значення правої частини обмеження, яке фігурує у моделі;
- **Допустимое Увеличение** - допустиме збільшення значення правої частини обмеження, при якому незмінним залишається значення тіньової ціни і структура оптимального плану (тобто набір змінних в оптимальному плані) за умови, що праві частини усіх інших обмежень і усі інші параметри задачі залишаються без змін;
- **Допустимое Уменьшение** – допустиме зменшення значення правої частини обмеження, при якому незмінним залишається значення тіньової ціни і структура оптимального плану (тобто набір змінних в оптимальному плані) за умови, що праві частини усіх інших обмежень і усі інші параметри задачі залишаються без змін.

✔ Таким чином поля **Допустимое Увеличение** і **Допустимое Уменьшение** розділу **Ограничения** дають можливість визначити межі допустимої зміни значення правої частини деякого обмеження задачі, які не змінюють структуру оптимального плану і значення відповідної двоїстої оцінки за умови, що усі інші параметри моделі (коефіцієнти цільової функції, праві частини інших обмежень тощо) залишаються без змін. При цьому, зрозуміло, зміна значення правої частини у будь-якому обмежені задачі лінійного програмування призводить до зміни самих значень змінних в оптимальному плані і до зміни значення цільової функції.

Звіт **Пределы** представлено на рис. 2.8. Звіт складається з двох розділів-таблиць. У верхній таблиці наведені адреса цільової комірки електронної таблиці (поле **Ячейка**) , її ім’я (поле **Имя**), якщо комірка має назву, та значення цільової функції(поле **Значение**) після знаходження оптимального розв’язку задачі.

Нижня таблиця має наступні поля :

- **Ячейка** - адреса клітинки, виділеної у табличній моделі (електронній таблиці) для відповідної змінної задачі і її позначення;
- **Имя** – ім’я змінної задачі (якщо воно присвоєно цій змінній);
- **Значение** – оптимальне значення змінної**;**

- **Нижний предел** – найменше можливе значення змінної моделі, при якому структура оптимального плану залишається без змін, якщо усі інші змінні моделі мають оптимальні значення, тобто залишаються без змін;
- **Целевой результат** – значення цільової функції при найменшому значенні змінної;
- **Верхний предел -** найбільше можливе значення змінної моделі, при якому структура оптимального плану залишається без змін, якщо усі інші змінні моделі мають оптимальні значення, тобто залишаються без змін;
- **Целевой результат –** значення цільової функції при найбільшому значенні змінної.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Виробнича програма - Приклад 2.5.xls]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 17.01.2008 17:20:09

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$E$14	F	867

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение		Нижний предел	Целевой результат		Верхний предел	Целевой результат
$B$14	x1	10		10	867		10	867
$C$14	x2	40		40	867		40	867
$D$14	x3	10		6	664,6		10	867

Рис. 2.8. Звіт **Пределы**

✔ Таким чином нижня таблиця звіту **Пределы** дає можливість визначити, у яких межах можуть бути збільшені або зменшені оптимальні значення змінних моделі без порушення обмежень задачі і без зміни структури оптимального плану.

2.3.2. Приклади розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Приклад 2.1

Задача визначення оптимального асортименту продукції (варіант без обмежень на випуск продукції)

Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі А, В і С використовує три види основної сировини: цукор-пісок, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини для виготовлення 1 тони карамелі кожного виду, місячні запаси сировини і ціна реалізації 1 тони карамелі кожного виду наведені у таблиці 2.6.

Таблиця 2.6.

Вихідні дані до задачі 2.1

Продукція / Сировина	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Запаси сировини (т)
	A	B	C	
Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	62
Патока	0,4	0,4	0,3	45
Фруктове пюре	0	0,1	0,1	22
Ціна реалізації 1 т карамелі (грошові одиниці)	508	527	548	

Необхідно **:**

1) визначити оптимальний місячний план виробництва карамелі, який забезпечує максимальну виручку від її реалізації, якщо попит на продукцію забезпечує її реалізацію у будь-якій кількості;
2) оцінити дефіцитність виробничих ресурсів;
3) оцінити можливість включення до місячного плану випуску продукції нового виду карамелі D, якщо ціна реалізації однієї тони цієї карамелі дорівнює 518 грошових одиниць, а технологічні норми витрат сировини на виготовлення однієї тони карамелі виду D дорівнюють:
   - цукор-пісок – 0,5 т ;
   - патока – 0,3 т ;

– фруктове пюре – 0,5 т;

4) виконати аналіз чутливості отриманого оптимального розв'язку.

Розв'язання задачі.

1. Будуємо математичну модель задачі. Вводимо наступні позначення:

x_1 – кількість випущеної карамелі виду А (т);

x_2 – кількість випущеної карамелі виду В (т);

x_3 – кількість випущеної карамелі виду С (т);

F – вартість усієї виготовленої і реалізованої продукції.

Тоді витрати цукру, необхідні для випуску карамелі виду А у кількості x_1, карамелі виду В – у кількості x_2 і карамелі виду С – у кількості x_3 будуть становити $0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3$ (т), патоки – $0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3$ (т) і фруктового пюре – $0{,}1x_2 + 0{,}1x_3$ (т). Ці витрати згідно умов задачі не повинні перевищувати існуючі запаси сировини у 62, 45 та 22 тони відповідно. Загальна вартість випущеної та реалізованої карамелі усіх трьох видів, при цьому, буде становити $508x_1 + 527x_2 + 548x_3$ грошових одиниць. З врахуванням того, що шукані невідомі задачі x_1, x_2 та x_3 можуть бути тільки додатними величинами, отримуємо наступну економіко-математичну модель нашої оптимізаційної задачі:

$$F = 508x_1 + 527x_2 + 548x_3 \to \max, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 62, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 45, \\ 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 22, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{2.3}$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.9).

	A	B	C	D	E	F
1		ВИХІДНІ ДАНІ				
4	Продукція	Норми витрат сировини (т) на виготовлення 1 т камелі			Місячні запаси сировини (т)	Фактично використано сировини (т)
5	Сировина	A	B	C		
6	Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	62	0,0
7	Патока	0,4	0,4	0,3	45	0,0
8	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	22	0,0
9	Ціна реалізації 1 т продукції (грошові одиниці)	508	527	548		
10						
11		РОЗВ'ЯЗОК				
12		x_1	x_2	x_3	F	
13					0,0	

Рис. 2.9. Таблична модель задачі 2.1 перед пошуком оптимального розв’язку

Блок клітинок B13:D13 відводимо під шукані невідомі задачі і залишаємо пустими. Блоки клітинок B6:D9 і E6:E8 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.6 , а блок F6:F8 і клітинку E13 – для формул. Так у клітини блоку F6:F8 вводимо формули для обчислення лівих частин обмежень (2.2), а у клітинку E13 - формулу для обчислення значення цільової функції (2.1). Усі формули, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені нижче у табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.2)	обмеження 1	F6	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;B13:D13)
	обмеження 2	F7	=СУММПРОИЗВ(B7:D7;B13:D13)
	обмеження 3	F8	=СУММПРОИЗВ(B8:D8;B13:D13)
(2.1)	цільова функція	E13	=СУММПРОИЗВ(B9:D9;B13:D13)

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у однойменному діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.10). Як видно з цього рисунку умова невід’ємності розв’язку (2.3) у цій задачі введена безпосередньо у полі **Ограничения**.

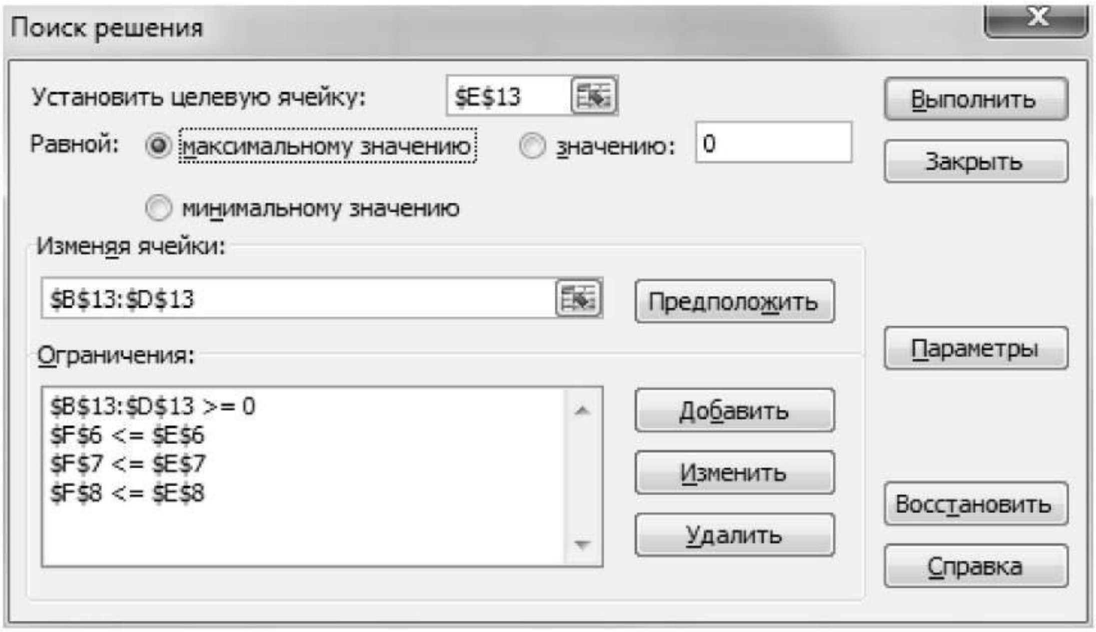


Рис. 2.10. Діалогове вікно команди **Поиск решения** с заданими параметрами моделі

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо параметр **Линейная модель**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить.** Після завершення пошуку оптимального розв'язку задачі у діалоговому вікні **Результаты поиска решения** вибираємо звіт **Устойчивость**, який буде використано на етапі після оптимізаційного аналізу. Розв'язок задачі наведено на рис. 2.11, а звіт **Устойчивость** – на рис. 2.12.

	A	B	C	D	E	F
1			**ВИХІДНІ ДАНІ**			
2						
4	Продукція	Норми витрат сировини (т) на виготовлення 1 т камелі			Місячні запаси сировини (т)	Фактично використано сировини (т)
5	Сировина	A	B	C		
6	Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	62	62,0
7	Патока	0,4	0,4	0,3	45	45,0
8	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	22	11,9
9	Ціна реалізації 1 т продукції (грошові одиниці)	508	527	548		
10						
11			**РОЗВ'ЯЗОК**			
12		x_1	x_2	x_3	F	
13		**0**	**93,3**	**25,6**	**63191,1**	

Рис. 2.11 Таблична модель після закінчення розрахунків

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Приклад 2.1.xls]Лист1							
3	Отчет создан: 15.03.2010 14:13:51							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7				Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
8		Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9		$B$13	x1	0	-222,6666667	508	222,6666667	1E+30
10		$C$13	x2	93,3	0,0	527	203,6666667	70,33333333
11		$D$13	x3	25,6	0,0	548	84,4	152,75
12								
13	Ограничения							
14				Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое
15		Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение
16		$F$7	Патока Фактично використано сировини (т)	45,0	468,9	45	4,6	14
17		$F$6	Цукор-пісок Фактично використано сировини (т)	62,0	678,9	62	28	5,75
18		$F$8	Фруктове пюре Фактично використано сировини (т)	11,9	0,0	22	1E+30	10,11111

Рис. 2.12 Звіт **Устойчивость**

Як видно, компоненти оптимального розв'язку задачі є наступними:

$$X^* = (0; 93{,}3; 25{,}6), \quad F = 63191{,}1$$

Економічна інтерпретація розв'язку. Таким чином, до оптимального місячного плану випуску продукції потрібно включити карамель виду B у кількості 93,3т і карамель виду C - у кількості 25,6т. Випуск карамелі виду A за даної технології та ціни реалізації є нерентабельним. Загальна виручка від реалізації випущеної продукції при такому плані буде становити 63191,1 грошових одиниць.

Післяоптимізаційний аналіз.

1. ***Аналіз дефіцитності виробничих ресурсів***

Аналізуючи значення двоїстих оцінок виробничих ресурсів, наведених у стовпці **Теневая цена** нижньої таблиці звіту **Устойчивость**, бачимо, що такі виробничі ресурси як патока і цукор-пісок мають не нульові значення двоїстих оцінок, а фруктовому пюре відповідає нульова двоїсті оцінка. Таким чином патока та цукор-пісок і є дефіцитними ресурсами, а фруктове пюре – недефіцитним. Саме запаси патоки та цукру-піску, як це видно з порівняльного аналізу стовпців **Ограничение Правая часть** і **Результ. значение**, повністю вичерпані в процесі виробництва двох видів карамелі, які увійшли до оптимального плану випуску, а запаси недефіцитного фруктового пюре є надлишковими і у процесі виробництва використовуються неповністю – тільки 11,9 т з доступних 22 т.

Таким чином, якщо передбачається подальше збільшення випуску продукції, кондитерській фабриці потрібно в першу чергу збільшити запаси патоки та цукру-піску, як лімітуючих і стримуючих подальше зростання виробництва ресурсів. При цьому, зростання запасів патоки на 1 тону (тобто залучення до виробництва додаткової тони патоки) призведе до зростання вартості продукції на 468,9 грошових одиниць, а запасів цукру-піску на 1 т – на 678,9 грошових одиниць, тобто залучення додаткової тони цукру є більш ефективним.

Що ж стосується фруктового пюре, то у разі збереження масштабів виробництва його запаси можна зменшити до 11,9т і зменшити за рахунок цього видатки, пов'язані із зберіганням надлишкових запасів сировини.

2. ***Аналіз можливості розширення асортименту продукції***

Оцінимо тепер можливість включення до асортименту продукції карамелі виду D. Для цього, використовуючи властивість стійкості двоїстих оцінок до зміни запасів ресурсів, підрахуємо умовну вартість ресурсів, необхідних для виготовлення 1т карамелі і порівняємо їх з ціною її реалізації. Так, вартість ресурсів, необхідних для виготовлення 1т нової карамелі дорівнює $468{,}9 \cdot 0{,}3 + 678{,}9 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 480{,}1$ грошових одиниць. Ціна реалізації 1т карамелі виду D згідно вихідних даних дорівнює 518 грошових одиниць. Таким чином вартість ресурсів для даного виробу є меншою за ціну реалізації, тому можна розглядати варіант виробничого плану, до якого буде включено новий вид карамелі, оскільки її виробництво буде рентабельним.

3. ***Аналіз чутливості оптимального розв'язку***

Спочатку проаналізуємо вплив зміни значення коефіцієнтів цільової функції на оптимальний план випуску продукції, тобто дослідимо, як зміна значення ціни реалізації кожного виду карамелі впливає на оптимальний плану випуску продукції. Для цього використовуємо верхню таблицю **Изменяемые ячейки** звіту **Устойчивость** - стовпці **Допустимое Увеличение** та **Допустимое Уменьшение**.

Аналізуючи дані, наведені у цих стовпцях, можна прийти до висновку, що реальна зміна ціни можлива тільки для карамелі виду B і C, оскільки саме ця продукція увійшла до оптимального плану випуску продукції. Так, підприємство може встановлювати ціну реалізації 1т карамелі виду В в межах від 456,7 (527-70,3) до 730,7 (527+203,7) грошових одиниць, тоді при незмінних значеннях усіх інших параметрів задачі (ціни реалізації карамелі виду А і С, запасів ресурсів та норм витрат ресурсів) оптимальний план випуску продукції залишиться незмінним. В свою чергу, підприємство може також змінювати ціну реалізації 1т карамелі виду С в межах від 395,2 (548-152,8) до 632,4 (548+84,4) грошових одиниць, тоді за умов, зазначених вище, оптимальний план випуску продукції також залишиться незмінним. Зрозуміло, що в обох випадках загальна вартість випущеної продукції може змінюватися як в більший, так і в менший бік.

Що ж стосується карамелі виду А, яка не увійшла до оптимального плану випуску продукції, проаналізуємо окремо можливе зменшення і зростання ціни її реалізації, а також виявимо причини не включення цієї продукції до плану випуску. Допустиме зменшення ціни реалізації 1т карамелі виду А теоретично дорівнює нескінченності; практично ж це означає, що будь –яке зменшення ціни реалізації цієї карамелі від встановленої ціни у 548 грошових одиниць до 0 не призведе до зміни як самого оптимального плану, так і оптимального розв'язку у цілому, оскільки карамель виду А все одно не буде включено до плану випуску. Допустиме збільшення ціни реалізації 1т карамелі виду А дорівнює 222,7 грошових одиниці і дорівнює за модулем нормованій вартості цієї продукції, значення якої наведене у стовпці **Нормир. стоимость** (-222,7). Величина нормованій вартості показує, як відомо, на скільки значення ціни виготовленої одиниці продукції є меншим за вартість ресурсів, витрачених на виготовлення цієї одиниці продукції. Таким чином, ціна 1т карамелі виду А у нашому випадку на 222,7 грошових одиниць є меншою за вартість виробничих ресурсів (цукру-піску, патоки, фруктового пюре), які було витрачено в процесі виробництва 1т цієї карамелі, що і робить випуск цієї карамелі економічно недоцільним. Якщо ж збільшити ціну реалізації 1т цієї карамелі, як мінімум, на 222,7 грошових одиниць і встановити її на рівні хоча б 730,7 грошових одиниць, то, за незмінності ціни реалізації інших видів карамелі та інших параметрів задачі, карамель виду А може увійти до оптимального плану випуску продукції, витіснивши, при цьому, якийсь інший вид продукції. Саме ціна у 730,7 грошових одиниць є тією мінімальною ціною, яка дозволяє зрівняти вартість виготовлення 1т карамелі виду А і витрати ресурсів на її виробництво. Будь яка інша ціна у межах від 508 до 730,7 грошових одиниць за незмінності ціни реалізації інших видів карамелі не призведе до зміни оптимального розв'язку в цілому.

Тепер проаналізуємо чутливість отриманого розв'язку задачі до зміни запасів виробничих ресурсів (правих частин обмежень моделі). Визначимо, у яких межах можуть змінюватися запаси виробничих ресурсів без зміни структури оптимального плану. Для цього також використовуємо нижню таблицю звіту **Ограничения**, а у ній - стовпці **Допустимое Увеличение** та **Допустимое Уменьшение**.

Аналізуючи дані, наведені у цих стовбцях бачимо, що запаси патоки допускають їх збільшення на 4,6 т і зменшення на 14т, а запаси другого дефіцитного ресурсу цукру-піску – відповідно на 28т та 5,8т. Таким чином фактичні запаси патоки можуть змінюватися у межах від 31т (45-14) до 49,6т (45+4,6) залишаючи незмінною структуру оптимального плану випуску продукції, якщо усі інші параметри задачі (запаси інших ресурсів, ціни реалізації та норми витрат ресурсів) залишаться незмінними. Аналогічно, запаси цукру-піску також можуть коливатися у межах від 56,2т (62-5,8) до 90т (62+28), залишаючи незмінною структуру оптимального плану випуску продукції, за умови, що запаси інших ресурсів, ціни реалізації та норми витрат ресурсів в процесі виробництва карамелі залишаться на тому ж рівні, який передбачено моделлю. Що ж стосується єдиного недефіцитного ресурсу – фруктового пюре, то його запаси можуть змінюватися від 11,9т (22-10,1) до нескінченності у теоретичному розумінні. Такий результат пояснюється дуже просто. Нижня межа у 11,9т визначає фактичне використання цього ресурсу у виробництві (тобто більше ніж 11,9т фруктового пюре виробництво не потребує), верхня – показує, що будь-яке (навіть дуже суттєве) зростання цього недефіцитного ресурсу при незмінних значеннях усіх інших параметрів задачі не вплине на зміну структури і навіть самого оптимального плану. Таким чином будь-яке накопичення запасів фруктового пюре більше за 11,9т не є ефективним.

☞ **<u>Коментар.</u>** *При розв'язанні задачі 2.1 була побудована таблична модель, яка за структурою і оформленням є достатньо близькою до змістовної (економічної) постановки задачі та табличної форми подання вихідних даних, що відповідає особистим уподобанням авторів. У літературі наводяться приклади і інших можливих варіантів табличної моделі. Достатньо розповсюдженим для задач наведеного вище типу є представлення табличної моделі (екранної форми) у більш формалізованому вигляді, тобто більш близькому до самої математичної моделі задачі. Одним з можливих варіантів побудови табличної моделі для розглянутої задачі лінійного програмування є варіант, наведений на рис. 2.13. Формульні вирази, які використовуються у цій моделі (клітинки E7:E9 і E17)за змістом повністю аналогічні тим, які використані у табличній моделі, представленій на рис.2.9, з врахуванням, зрозуміло, іншої адресації клітинок.*

	A	B	C	D	E	F	G
1			**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2							
4				Обмеження			
5	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина
6		x_1	x_2	x_3			
7	1	0,8	0,5	0,6	0	<=	62
8	2	0,4	0,4	0,3	0	<=	45
9	3	0	0,1	0,1	0	<=	22
10							
11		Коефіцієнти цільової функції					
12	Змінні	x_1	x_2	x_3			
13	Коефіцієнти	508	527	548			
14							
15			**РОЗВ'ЯЗОК**				
16		x_1	x_2	x_3	F		
17					**0,0**		
18							

Рис. 2.13. Альтернативний варіант табличної моделі задачі 2.1

Приклад 2.2

Задача визначення оптимального асортименту продукції (варіант з додатковими обмеженнями на випуск продукції)

Для вихідних даних попередньої задачі визначити оптимальний місячний план випуску продукції, якщо з метою підтримки асортименту продукції карамелі виду А щомісячно потрібно випускати не менше 3т, на карамель виду В є замовлення в обсязі 45т, а реальні місячні обсяги реалізації карамелі виду С, згідно дослідження попиту на продукцію кондитерської фабрики, не можуть перебільшувати 18т.

Розв'язання задачі.

Будуємо математичну модель поставленої задачі. Використовуючи введені у задачі 2.1 умовні позначення і логіку побудови, отримуємо наступну економіко математичну модель задачі:

$$F = 508x_1 + 527x_2 + 548x_3 \to \max, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 62, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 45, \\ 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 22, \\ x_1 \ge 3, \\ x_2 = 45, \\ x_3 \le 18, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{2.6}$$

Порівнюючи модель (2.4) – (2.6) з попередньою моделлю (2.1) – (2.3), бачимо, що модель (2.4) – (2.6) відрізняється від вихідної тільки наявністю трьох додаткових обмежень на шукані невідомі задачі, які формалізують додаткові умови на випуск продукції.

Таблична модель задачі, при цьому, повністю залишається без змін і має вигляд, наведений на рис. 2.9. Усі інші кроки та дії, пов'язані з розв'язанням задачі 2.2, аналогічні крокам і діям, які були використані при розв'язані задачі 2.1 за виключенням наступного:

- при заповнені поля **Ограничения** діалогового вікна **Поиск решения** необхідно додатково ввести три обмеження (рис. 2.14);
- у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** окрім параметра **Линейная модель** задаємо ще параметр **Неотрицательные значения**, оскільки умова невід'ємності розв'язку явно не задана у діалоговому вікні **Поиск решения** (хоча це можна було б і зробити);
- після завершення роботи інструменту **Поиск решения** не потрібно виводити звіт **Устойчивость**, оскільки в ньому не має потреби згідно умов задачі.

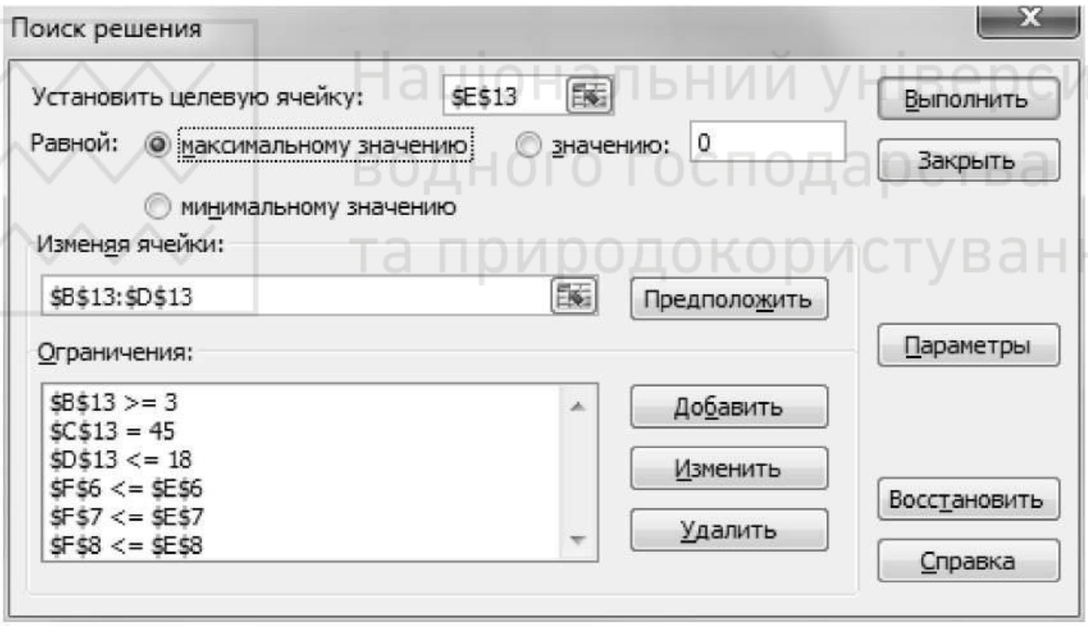


Рис. 2.14. Діалогове вікно команди **Поиск решения** с заданими параметрами моделі

Результати розв'язання задачі 2.2 наведено на рис.2.15. Як видно з цього рисунку компоненти оптимального розв'язку задачі є наступними: $X^* = (35{,}9;\ 45;18)$, $F = 51803{,}5$

	A	B	C	D	E	F
1			**ВИХІДНІ ДАНІ**			
2						
4	Продукція	Норми витрат сировини (т) на виготовлення 1 т камелі			Місячні запаси сировини (т)	Фактично використано сировини (т)
5	Сировина	A	B	C		
6	Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	62	62,0
7	Патока	0,4	0,4	0,3	45	37,8
8	Фруктове пюре	0	0,1	0,1	22	6,3
9	Ціна реалізації 1 т продукції (грошові одиниці)	508	527	548		
10						
11			**РОЗВ'ЯЗОК**			
12		x_1	x_2	x_3	F	
13		**35,9**	**45,0**	**18,0**	**51803,5**	

Рис. 2.15 Таблична модель після закінчення розрахунків

Економічна інтерпретація розв'язку. Таким чином, до оптимального місячного плану випуску продукції потрібно включити карамель виду А у кількості 35,9т, карамель виду В - у кількості 45 т і карамель виду С - у кількості 18 т. Загальна вартість випущеної та реалізованої продукції (сумарна виручка) при такому плані буде становити 51803,5 грошових одиниць.

* * *

Приклад 2.3

Задача складання суміші.

Сталеливарна компанія створює сплав для нової продукції і використовує для цього залізну руду, яку отримує з чотирьох шахт. Як показав аналіз, щоб отримати сплав з необхідними якостями, необхідно задовольнити мінімальним вимогам стосовно трьох основних елементів сплаву А, В і С – тобто кожна тонна сплаву повинна вміщувати не менше 2,5 кг елементу А, не менше 45 кг елементу В і не менше 13,5 кг елементу С. Руда з кожної шахти містить всі три основних елементи, але в різних кількостях. Склад руди з кожної шахти, а також вартість 1 т цієї руди наведено у табл. 2.8.

Знайти такий склад шихти для виготовлення сплаву, при якому 1 т сплаву буде мати найменшу вартість.

Таблиця 2.8

Вихідні дані до задачі 2.3

Елемент	Вміст елементу (кг) в 1 т руди				Мінімальний необхідний вміст елементу в 1т сплаву
	шахта 1	шахта 2	шахта 3	шахта 4	
A	4,5	1,4	3,6	0,9	2,5
B	40,5	67,5	33,8	78,8	45
C	20,2	11,2	9,0	16,7	13,5
Вартість 1 т сплаву (грошові одиниці)	4000	2000	3000	2500	

Розв'язання задачі.

1. Будуємо математичну модель задачі. Вводимо наступні змінні задачі :

x_1– кількість руди (т) з шахти 1 у сплаві;
x_2 – кількість руди (т) з шахти 2 у сплаві;
x_3 – кількість руди (т) з шахти 3 у сплаві;
x_4 – кількість руди (т) з шахти 4 у сплаві.

За своїм змістом усі змінні є невід'ємними. Тоді вміст елементу А (кг) у тоні сплаву дорівнює $4{,}5x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}6x_3 + 0{,}9x_4$ і він повинен бути не меншим за 2,5 кг. Вміст елементу В (кг) у тоні сплаву дорівнює $40{,}5x_1 + 67{,}5x_2 + 33{,}8x_3 + 78{,}8x_4$ і він повинен бути не меншим за 45 кг. Вміст елементу С (кг) у тоні сплаву дорівнює $20{,}2x_1 + 11{,}2x_2 + 9{,}0x_3 + 16{,}7x_4$ і він повинен бути не меншим за 13,5 кг. Сумарна вартість руди з усіх чотирьох шахт, що йде на виготовлення сплаву, становить ($4000x_1 + 2000x_2 + 3000x_3 + 2500x_4$) грошових одиниць. Таким чином математична модель нашої задачі має наступний вигляд :

$$F = 4000x_1 + 2000x_2 + 3000x_3 + 2500x_4 \to \min , \qquad (2.7)$$

$$\begin{cases} 4,5x_1 + 1,4x_2 + 3,6x_3 + 0,9x_4 \ge 2,5, \\ 40,5x_1 + 67,5x_2 + 33,8x_3 + 78,8x_4 \ge 45, \\ 20,2x_1 + 11,2x_2 + 9,0x_3 + 16,7x_4 \ge 13,5, \end{cases} \qquad (2.8)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \qquad (2.9)$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.16).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Вихідні дані**						
2							
3	Елемент	Вміст елементів (кг) в 1 т руди				Вміст елементів (кг) в 1 т сплаву	
4		шахта 1	шахта 2	шахта 3	шахта 4	необхідний	фактичний
5	A	4,5	1,4	3,6	0,9	2,5	0,0
6	B	40,5	67,5	33,8	78,8	45	0,0
7	C	20,2	11,2	9	16,7	13,5	0,0
8	Вартість 1 т руди (грошові одиниці)	4000	2000	3000	2500		
9							
10							
11		**Результати розрахунків**					
12		x_1	x_2	x_3	x_4	**F**	
13						**0,0**	
14							

Рис. 2.16. Таблична модель задачі 2.3 перед пошуком оптимального розв'язку

Блоки клітинок B5:E8 і F5:F7 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.8 , B13:E13 – для шуканих невідомих задачі, блок клітинок G5:G7 – для обчислення лівих частин системи обмежень задачі і клітинку F13 – для обчислення значення цільової функції (табл. 2.9).

Таблиця 2.9

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.8)	обмеження 1	G5	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;B13:E13)
	обмеження 2	G6	=СУММПРОИЗВ(B6:E6;B13:E13)
	обмеження 3	G7	=СУММПРОИЗВ(B7:E7;B13:E13)
(2.7)	цільова функція	F13	=СУММПРОИЗВ(B8:E8;B13:E13)

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.17). Як видно з цього рисунку умова невід'ємності розв'язку (2.9) у цій задачі введена безпосередньо у полі **Ограничения**.

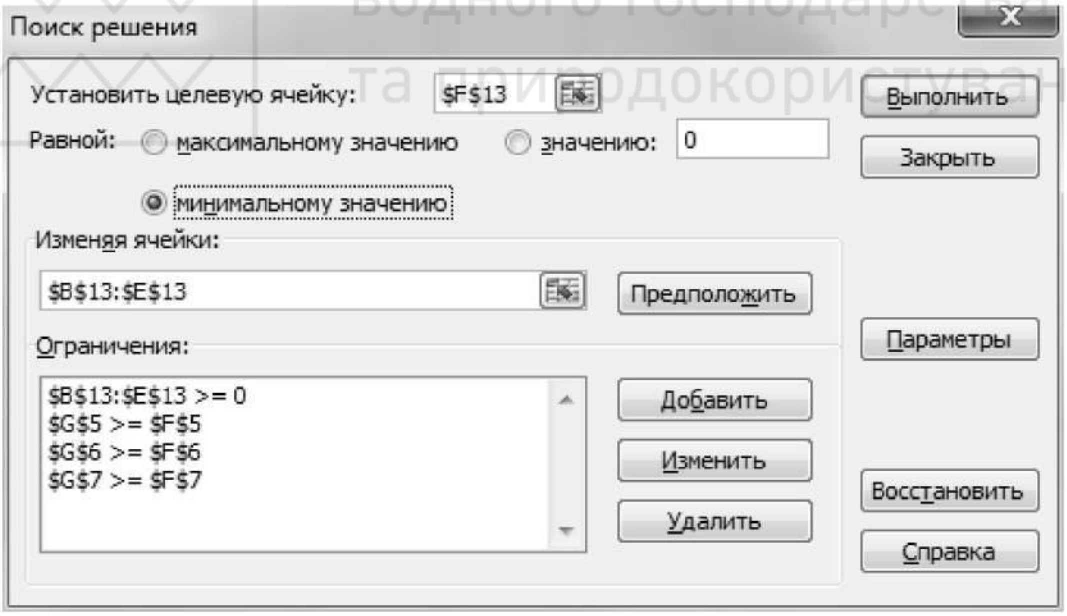


Рис. 2.17. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо параметр **Линейная модель**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения.**

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.18). Як видно компоненти оптимального розв'язку задачі є наступними:

$$X^* = (0{,}436;\ 0{,}356;\ 0;\ 0{,}042), \quad F = 2562{,}1.$$

<u>Економічна інтерпретація розв'язку</u>. До оптимального складу 1 тони суміші входить руда тільки з першої, другої і четвертої шахт, при цьому 1 тона шихти для виплавки сплаву повинна містити 436 кг руди з першої шахти, 356 кг – руди з другої шахти і 42 кг – з четвертої.

При такому складі вартість 1 тони шихти буде мінімальною серед усіх можливих варіантів і становить 2562,1 грошових одиниць.

	A	B	C	D	E	F	G
1				**Вихідні дані**			
2							
3	Елемент	Вміст елементів (кг) в 1 т руди				Вміст елементів (кг) в 1 т сплаву	
4		шахта 1	шахта 2	шахта 3	шахта 4	необхідний	фактичний
5	A	4,5	1,4	3,6	0,9	2,5	2,5
6	B	40,5	67,5	33,8	78,8	45	45,0
7	C	20,2	11,2	9	16,7	13,5	13,5
8	Вартість 1 т руди (грошові одиниці)	4000	2000	3000	2500		
9							
10							
11				**Результати розрахунків**			
12		**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**F**	
13		**0,436**	**0,356**	**0,000**	**0,042**	**2562,1**	

Рис. 2.18. Таблична модель задачі 2.3 після завершення розрахунків

Приклад 2.4 ***Задача визначення оптимального завантаження взаємозамінного обладнання (1-й варіант постановки задачі)***

Три механізми можуть виконувати три види земляних робіт - А, В і С. Ресурси робочого часу механізмів, їх продуктивність та вартість однієї години роботи кожного з них при виконанні різних робіт наведені у табл. 2.10.

Таблиця 2.10

Вихідні дані до задачі 2.4

Механізм	Продуктивність ($м^3$/год.)			Питома вартість (гр. од./год.)			Ресурси часу (години)
	A	B	C	A	B	C	
1	30	20	40	2	4	3	400
2	20	30	50	3	2	5	300
3	60	40	20	5	3	6	280

Визначити такий план завантаження механізмів, при якому буде забезпечена мінімальна вартість виконання усіх видів земляних робіт за умови дотримання заданого фонду часу за видами механізмів, якщо обсяг земляних робіт А повинен бути не меншим за 6000 $м^3$, робіт В - не меншим за 5000 $м^3$ і робіт С - не меншим за 8000 $м^3$.

Розв'язання задачі.

1. Будуємо економіко-математичну модель задачі. Позначимо через $x_{ij}, (i=\overline{1,3}), (j=\overline{1,3})$ час роботи (у годинах) i-го механізму при виконанні j–ї роботи, а через F – вартість усіх земляних робіт. Тоді загальна вартість усіх земляних робіт дорівнює

$$F = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + 6x_{33},$$

обмеження на фонд робочого часу для усіх трьох механізмів

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280, \end{cases}$$

а умови виконання усіх трьох видів земляних робіт

$$\begin{cases} 30x_{11} + 20x_{21} + 60x_{31} \ge 6000\,, \\ 20x_{12} + 30x_{22} + 40x_{32} \ge 5000\,, \\ 40x_{13} + 50x_{23} + 20x_{33} \ge 8000\,, \end{cases}$$

і економіко-математична модель задачі приймає наступний вигляд :

$$F = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 5x_{31} + 3x_{32} + \\ + 6x_{33} \to \min\,, \qquad 2.10)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400\,, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300\,, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280\,, \\ 30x_{11} + 20x_{21} + 60x_{31} \ge 6000\,, \\ 20x_{12} + 30x_{22} + 40x_{32} \ge 5000\,, \\ 40x_{13} + 50x_{23} + 20x_{33} \ge 8000\,, \end{cases} \qquad (2.11)$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \ge 0\,. \qquad (2.12)$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.19). Блоки клітинок B5:D10, G5:G10 і B15:D17 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.10, B23:D25 – для шуканих невідомих задачі, блок клітинок E5:E10 – для обчислення лівих частин обмежень задачі і клітинку G22 – для обчислення значення цільової функції (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі

Фор-мула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.11)	обмеження 1	E5	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;B23:D23)
	обмеження 2	E6	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;B24:D24)
	обмеження 3	E7	=СУММПРОИЗВ(B7:D7;B25:D25)
	обмеження 4	E8	=СУММПРОИЗВ(B8:B10;B23:B25)
	обмеження 5	E9	=СУММПРОИЗВ(C8:C10;C23:C25)
	обмеження 6	E10	=СУММПРОИЗВ(D8:D10;D23:D25)
(2.10)	цільова функція	G22	=СУММПРОИЗВ(B15:D17;B23:D25)

ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ

Обмеження

Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина
1	1	1	1	0,0	<=	400
2	1	1	1	0,0	<=	300
3	1	1	1	0,0	<=	280
4	30	20	40	0,0	>=	6000
5	20	30	50	0,0	>=	5000
6	60	40	20	0,0	>=	8000

Коефіцієнти цільової функції c_{ij}

i	j		
	1	2	3
1	2	4	3
2	3	2	5
3	5	3	6

РОЗВ'ЯЗОК

Невідомі задачі x_{ij}

i	j		
	1	2	3
1			
2			
3			

F = **0,0**

Рис. 2.19. Таблична модель задачі 2.4 перед пошуком оптимального розв’язку

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.20).

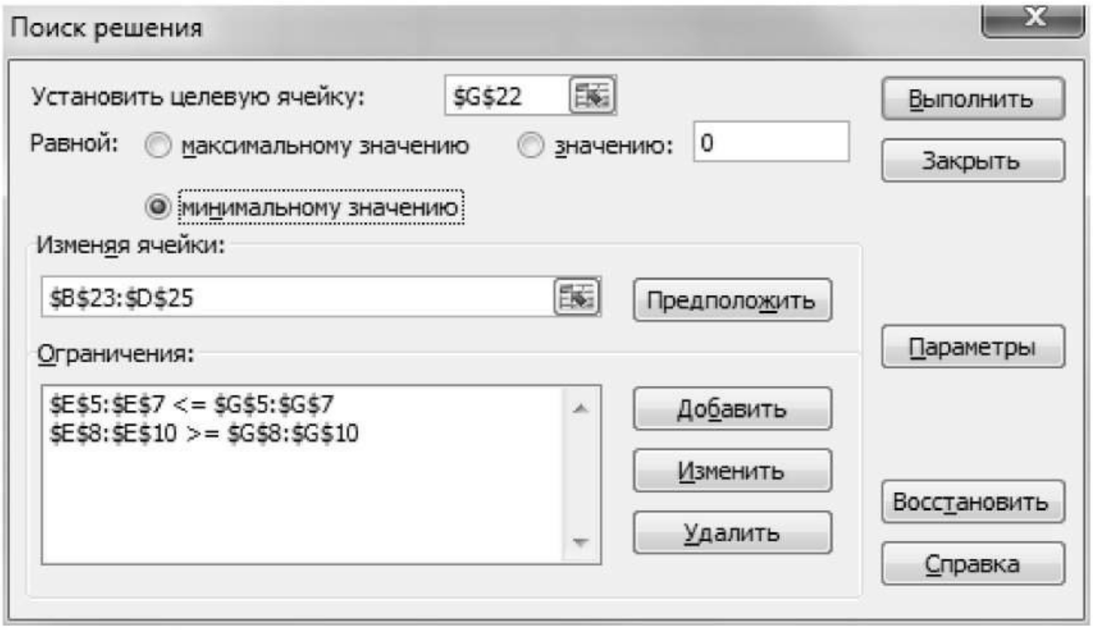


Рис. 2.20. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо параметр **Линейная модель** і **Неотрицательные значения**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.21). Як видно з рис. 2.21 елементи оптимального розв'язку мають наступні значення :

$$X^* = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 200 \\ 0 & 166,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = 1333,33.$$

<u>Економічна інтерпретація розв'язку.</u> Для виконання необхідних обсягів земляних робіт з найменшими вартісними витратами перший механізм повинен виконувати земляні роботи виду А протягом 200 годин і земляні роботи виду С протягом також протягом 200 годин. Для виконання земляних робіт виду В потрібно на протязі 166,7 годин задіяти другий механізм. Третій механізм на зазначених роботах використовувати економічно недоцільно. При цьому, доступні ресурси часу механізмів будуть повністю вичерпані тільки першим механізмом, а ресурс другого механізму буде використано тільки частково – 166,7 годин з 300, тобто цей ресурс є надлишковим з точки зору виконання мінімальних планових обсягів робіт. При такому завантаженні механізмів обсяг земляних робіт A складе 6000 м^3, земляних робіт B – 5000 м^3 і земляних робіт C – 8000 м^3 (останніх три значення стовпця **Ліва частина**). Загальна вартість усіх земляних робіт буде мінімальною і становить 1333,33 грошових одиниці.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ**				
2				Обмеження				
3								
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина	
5	1	1	1	1	400,0	<=	400	
6	2	1	1	1	166,7	<=	300	
7	3	1	1	1	0,0	<=	280	
8	4	30	20	40	6000,0	>=	6000	
9	5	20	30	50	5000,0	>=	5000	
10	6	60	40	20	8000,0	>=	8000	
11								
12		Коефіцієнти цільової функції c_{ij}						
13	i		j					
14		1	2	3				
15	1	2	4	3				
16	2	3	2	5				
17	3	5	3	6				
18								
19				**РОЗВ'ЯЗОК**				
20		Невідомі задачі x_{ij}						
21	i		j					
22		1	2	3		**F =**	**1333,3**	
23	1	**200,0**	**0,0**	**200,0**				
24	2	**0,0**	**166,7**	**0,0**				
25	3	**0,0**	**0,0**	**0,0**				
26								

Рис. 2.21. Таблична модель задачі 2.4 після пошуку оптимального розв’язку

Приклад 2.5 ***Задача визначення оптимального завантаження взаємозамінного обладнання (2-й варіант постановки задачі)***

Для вихідних даних задачі з попереднього прикладу 2.4 визначити оптимальне завантаження механізмів, при якому забезпечується максимальний сумарний обсяг земляних робіт і враховуються доступні ресурси часу кожного виду механізму.

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. Як бачимо, сформульована задача відрізняється від попередньої тільки критерієм оптимальності. Якщо у прикладі 2.4 таким критерієм була вартість виконання робіт, то у даній задачі у якості критерію ефективності виступає загальний обсяг земляних робіт

Використовуючи введені у попередній задачі невідомі шукані змінні, сумарний обсяг усіх видів земляних робіт, виконаних усіма трьома механізмами, можна визначити за залежністю $30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33}$ і економіко-математична модель задачі приймає наступний вигляд:

$$F = 30x_{11} + 20x_{12} + 40x_{13} + 20x_{21} + 30x_{22} + 50x_{23} + 60x_{31} + 40x_{32} + 20x_{33} \to \max\,, \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400\,, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 300\,, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 280\,, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \ge 0\,. \tag{2.15}$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.22). Блоки клітинок B5:D7, G5:G7 і B13:D15 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.10, B21:D23 – для шуканих невідомих задачі, блок клітинок E5:E7 – для обчислення лівих частин обмежень задачі і клітинку G20 – для обчислення значення цільової функції (табл. 2.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ							
2	Обмеження							
3								
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина	
5	1	1	1	1	0,0	<=	400	
6	2	1	1	1	0,0	<=	300	
7	3	1	1	1	0,0	<=	280	
8								
9	Коефіцієнти цільової функції c_{ij}							
10								
11	i	j						
12		1	2	3				
13	1	30	20	40				
14	2	20	30	50				
15	3	60	40	20				
16								
17	РОЗВ'ЯЗОК							
18	Невідомі задачі x_{ij}							
19	i	j						
20		1	2	3		F =	0,0	
21	1							
22	2							
23	3							
24								

Рис. 2.22. Таблична модель задачі 2.5 перед пошуком оптимального розв’язку

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Таблиця 2.12

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.14)	обмеження 1	E5	=СУММПРОИЗВ(B5:D5;B21:D21)
	обмеження 2	E6	=СУММПРОИЗВ(B6:D6;B22:D22)
	обмеження 3	E7	=СУММПРОИЗВ(B7:D7;B23:D23)
(2.13)	цільова функція	G20	=СУММПРОИЗВ(B13:D15;B21:D23)

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.23). Зазначимо, що на відміну від попереднього прикладу, умову невід'ємності шуканих невідомих задачі задано явно у полі **Ограничения** (як другий з двох можливих варіантів формування такої умови).

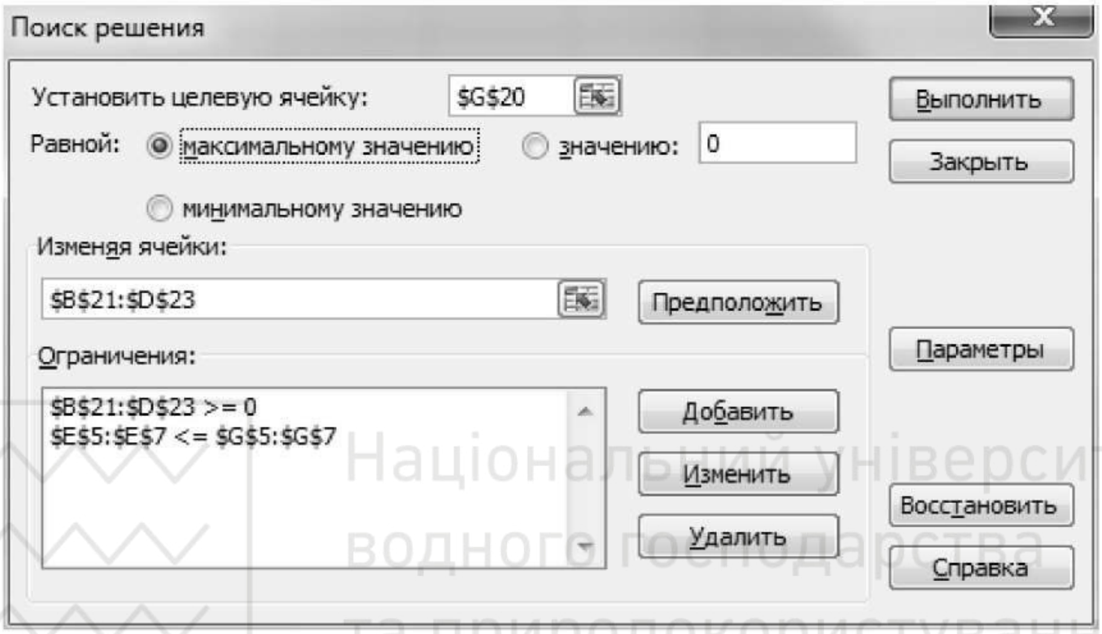


Рис. 2.23. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.24). Як видно з рис. 2.24 елементи оптимального розв'язку задачі мають наступні значення :

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 300 \\ 280 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = 47800.$$

ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ

Обмеження

Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина
1	1	1	1	400,0	<=	400
2	1	1	1	300,0	<=	300
3	1	1	1	280,0	<=	280

Коефіцієнти цільової функції c_{ij}

i	j		
	1	2	3
1	30	20	40
2	20	30	50
3	60	40	20

РОЗВ'ЯЗОК

Невідомі задачі x_{ij}

i	j				F =	47800,0
	1	2	3			
1	**0,0**	**0,0**	**400,0**			
2	**0,0**	**0,0**	**300,0**			
3	**280,0**	**0,0**	**0,0**			

Рис. 2.24. Таблична модель задачі 2.5 після пошуку оптимального розв’язку

<u>**Економічна інтерпретація розв’язку.**</u> Для виконання максимальних обсягів земляних робіт усіх видів перший механізм повинен виконувати земляні роботи виду С протягом 400 годин, другий механізм – роботи виду С протягом 300 годин і третій механізм – роботи виду А протягом 280 годин. При такому завантаженні механізмів їх фонди часу будуть вичерпані повністю (стовпець **Ліва частина**), а загальний обсяг усіх земляних робіт складе 47800 м^3, з яких на перший механізм припадає $40{\cdot}400 = 16000$ м^3 земляних робіт С, на другий - $50{\cdot}300 = 15000$ м^3 земляних робіт С і на третій механізм - $60{\cdot}280 = 168000$ м^3 земляних робіт А.

Приклад 2.6

Задача визначення оптимального завантаження взаємозамінного обладнання (3-й варіант постановки задачі)

Для умов задачі з прикладу 2.4 визначити оптимальний план завантаження механізмів, при якому для виконання необхідних обсягів земляних робіт завантаження механізмів буде мінімальним без обмежень фонду часу для кожного виду механізму.

Розв'язання задачі.

1. Як бачимо, і у цьому випадку сформульована задача відрізняється від задачі прикладу 2.4 тільки критерієм оптимальності. Якщо у прикладі 2.4 таким критерієм була вартість виконання робіт, то у даній задачі у якості критерію ефективності виступає загальний час роботи усіх трьох механізмів.

Використовуючи введені у задачі 2.4 невідомі шукані змінні визначаємо загальний час використання усіх трьох механізмів на трьох роботах. Цей час становить $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+$ $+x_{23}+x_{31}+x_{32}+x_{33}$ і економіко-математична модель задачі оптимізації у даному випадку приймає наступний вигляд:

$$F = x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{31}+ \\ +x_{32}+x_{33} \to \min, \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} 30x_{11}+20x_{21}+60x_{31} \ge 6000, \\ 20x_{12}+30x_{22}+40x_{32} \ge 5000, \\ 40x_{13}+50x_{23}+20x_{33} \ge 8000, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \ge 0. \tag{2.18}$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.25). Блоки клітинок B5:D7, G5:G7 і B12:D14 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.10, B20:D22 – для шуканих невідомих задачі, блок клітинок E5:E7 – для обчислення лівих частин обмежень задачі і клітинку G19 – для обчислення значення цільової функції (табл. 2.13).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ**							
2	Обмеження							
3								
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина	
5	1	30	20	40	0,0	>=	6000	
6	2	20	30	50	0,0	>=	5000	
7	3	60	40	20	0,0	>=	8000	
8								
9	Коефіцієнти цільової функції c_{ij}							
10	i	j						
11		1	2	3				
12	1	1	1	1				
13	2	1	1	1				
14	3	1	1	1				
15								
16	**РОЗВ'ЯЗОК**							
17	Невідомі задачі x_{ij}							
18	i	j						
19		1	2	3		F =	**0,0**	
20	1							
21	2							
22	3							
23								

Рис. 2.25. Таблична модель задачі 2.6 перед пошуком оптимального розв'язку

Таблиця 2.13

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.17)	обмеження 1	E5	=СУММПРОИЗВ(B5:B7;B20:B22)
	обмеження 2	E6	=СУММПРОИЗВ(C5:C7;C20:C22)
	обмеження 3	E7	=СУММПРОИЗВ(D5:D7;D20:D22)
(2.16)	цільова функція	G19	=СУММПРОИЗВ(B12:D14;B20:D22)

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.26).

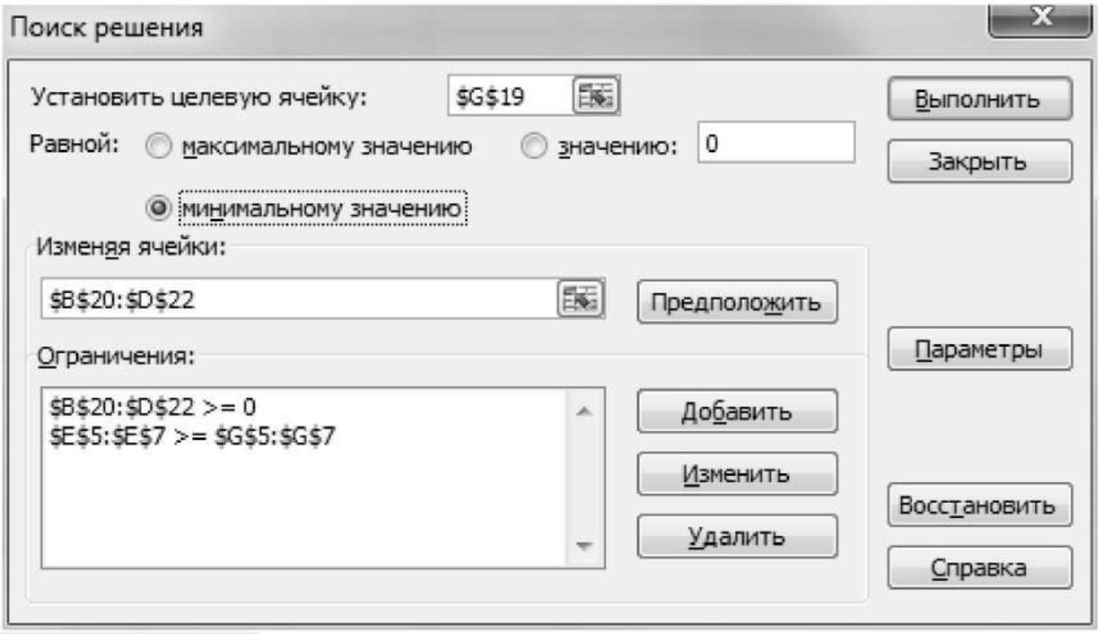


Рис. 2.26. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

Національний університет
водного господарства
та природокористування

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**). Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.27). Як видно з рис. 2.27 елементи оптимального розв'язку мають наступні значення :

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \\ 100 & 125 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = 385.$$

<u>**Економічна інтерпретація розв'язку.**</u> Для виконання необхідних обсягів земляних робіт з мінімально можливим завантаженням другий механізм повинен виконувати земляні роботи виду С протягом 160 годин, а третій механізм - земляні роботи виду А протягом 100 годин і земляні роботи виду В на протязі 125 годин.

Перший механізм на зазначених роботах використовувати економічно недоцільно. При такому завантаженні механізмів обсяг земляних робіт А складе 6000 м^3, земляних робіт В – 5000 м^3 і земляних робіт С – 8000 м^3 (стовпець **Ліва частина**). Загальний час використання усіх трьох механізмів, при цьому, буде мінімальним і становить 385 годин при загальному фонді у 980 годин (див. умову задачі 2.4).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ**						
2	Обмеження						
3							
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих			Ліва частина	Знак	Права частина
5	1	30	20	40	6000,0	>=	6000
6	2	20	30	50	5000,0	>=	5000
7	3	60	40	20	8000,0	>=	8000
8							
9	Коефіцієнти цільової функції c_{ij}						
10	i	j					
11		1	2	3			
12	1	1	1	1			
13	2	1	1	1			
14	3	1	1	1			
15							
16	**РОЗВ'ЯЗОК**						
17	Невідомі задачі x_{ij}						
18	i	j					
19		1	2	3		F =	**385,0**
20	1	**0,0**	**0,0**	**0,0**			
21	2	**0,0**	**0,0**	**160,0**			
22	3	**100,0**	**125,0**	**0,0**			

Рис. 2.27. Таблична модель задачі 2.6 після пошуку оптимального розв’язку

2.4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

2.4.1. Особливості розв'язування транспортної задачі за допомогою інструменту Поиск решения

Транспортна задача, як відомо, представляє собою частковий випадок задачі лінійного програмування. Тому розв'язання транспортної задачі з використанням інструменту **Поиск решения** в цілому практично нічим не відрізняється від розв'язання задачі лінійного програмування окрім того, що таблична модель транспортної задачі, зрозуміло, має свою специфічну форму. Всі інші рекомендації щодо застосування інструменту **Поиск решения** для розв'язання транспортної задачі залишаються такими ж, як і для задачі лінійного програмування (дивись 2.3.1). Це стосується також можливостей післяоптимізаційного аналізу, тобто у випадку успішного розв'язання транспортної задачі можна отримати усі три звіти, наведені вище у 2.2.4 і 2.3.1, хоча, як і у випадку задачі лінійного програмування, в основному практичне застосування, як правило, має тільки звіт **Устойчивость**.

Що стосується особливостей застосування інструменту **Поиск решения** для розв'язання транспортної задачі, то тут слід відмітити такий нюанс. Як відомо, при ручному розв'язанні транспортної задачі згідно загальноприйнятого алгоритму спочатку потрібно побудувати початковий опорний план – методом північно-західного кута, методом мінімального елемента і т.п. Комп'ютерне розв'язання транспортної задачі з використанням інструменту **Поиск решения** у загальному випадку не вимагає побудови такого плану, що значно спрощує процедуру знаходження оптимального розв'язку, хоча і не забороняє такої дії. Таким чином користувач сам вирішує, чи потрібно будувати початковий опорний план і вводити його у табличну модель задачі у якості вихідного для пошуку оптимального плану, чи залишати клітинки з шуканими невідомими пустими. Зрозуміло, що використання початкового опорного плану прискорює процедуру пошуку оптимального плану, особливо у випадку багатьох змінних моделі.

Нижче розглянуто декілька можливих варіантів постановки транспортної задачі, особливості побудови відповідних математичних моделей і їх розв'язання за допомогою інструменту **Поиск решения**.

2.4.2. Приклади розв'язання транспортної задачі за допомогою інструменту Поиск решения

Приклад 2.7

Закрита транспортна задача

Три цегляних заводи, що розташовані у різних місцях випускають однакову цеглу, яка постачається на три об'єкти будівництва, які також розташовані у різних пунктах. Тижневі запаси цегли на кожному з цегляних заводів, тижневі потреби кожного об'єкту будівництва у цеглі і транспортні тарифи на перевезення 1 тис. штук цегли з кожного заводу до кожного об'єкту будівництва наведено у табл. 2.14.

Визначити такий щотижневий план перевезення виробленої цегли до кожного об'єкту будівництва, при якому сумарні витрати на транспортування цегли будуть мінімальними. Виконати аналіз чутливості отриманого розв'язку.

Таблиця 2.14

Вихідні дані до прикладу 2.7

Завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли від заводу до об'єкту будівництва c_{ij}			Тижневі запаси цегли a_i (тис. шт.)
	1	2	3	
1	8	7	5	200
2	13	3	10	220
3	12	4	11	200
Тижнева потреба будівництва у цеглі b_j (тис. шт.)	230	220	170	

Розв'язання задачі.

1. Визначаємо тип транспортної задачі – перевіряємо задачу на збалансованість. Сумарні запаси цегли на усіх трьох заводах дорівнюють $\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 220 + 200 = 620$ тис. штук, сумарна

потреба у цеглі усіх трьох об'єктів будівництва становить $\sum_{j=1}^{3} b_j = 230 + 220 + 170 = 620$ тис. штук. Таким чином $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$ і ми маємо закриту модель транспортної задачі.

2. Будуємо математичну модель задачі. Вводимо наступні змінні :

x_{11} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 1–го цегляного заводу до 1–го об'єкту будівництва;

x_{12} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 1–го цегляного заводу до 2–го об'єкту будівництва;

x_{13} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 1–го цегляного заводу до 3–го об'єкту будівництва;

x_{21} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 2–го цегляного заводу до 1–го об'єкту будівництва;

x_{22} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 2–го цегляного заводу до 2–го об'єкту будівництва;

x_{23} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 2–го цегляного заводу до 3–го об'єкту будівництва;

x_{31} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 3–го цегляного заводу до 1–го об'єкту будівництва;

x_{32} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 3–го цегляного заводу до 2–го об'єкту будівництва;

x_{33} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 3–го цегляного заводу до 3–го об'єкту будівництва.

Тоді загальні транспортні витрати F будуть дорівнювати $8x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 13x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + 4x_{32} + 11x_{33}$, умова вивозу усієї виробленої цегли з цегляних заводів прийме вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200, \end{cases}$$

а умова задоволення потреб усіх об'єктів будівництва – відповідно

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \end{cases}$$

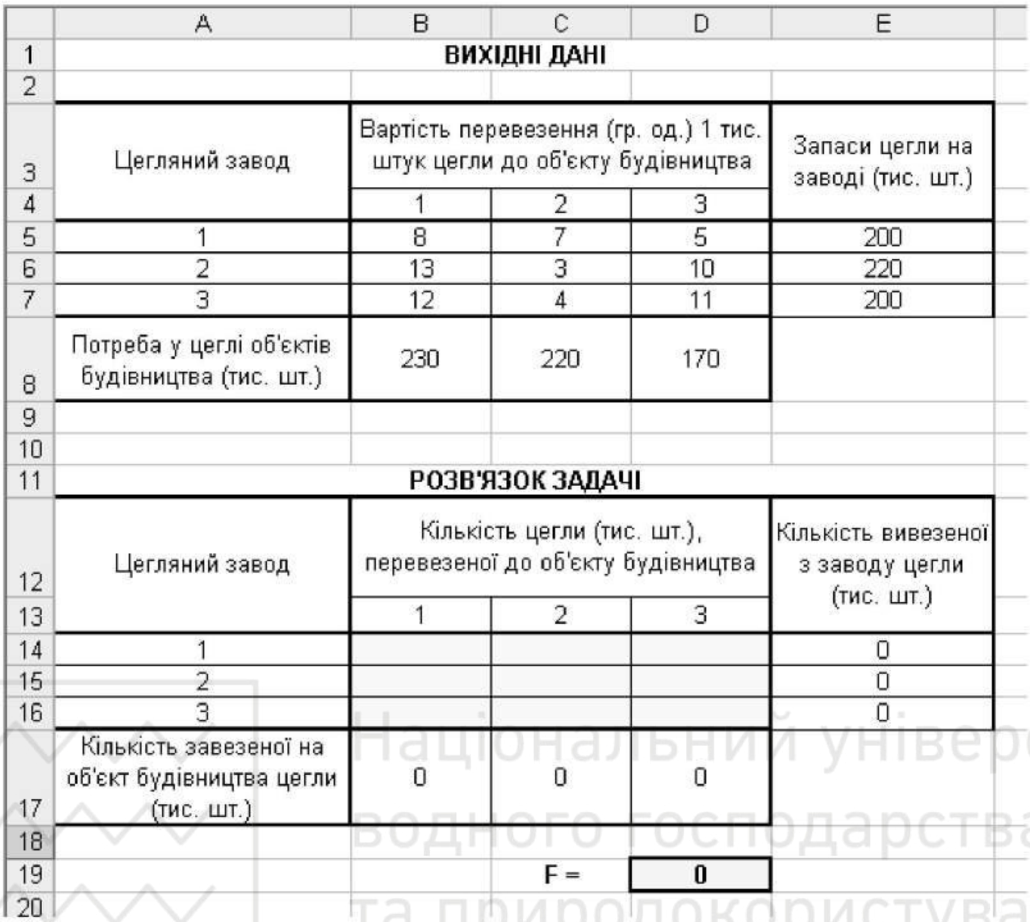
і економіко-математична модель сформульованої задачі буде мати наступний вигляд :

$$F = 8x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 13x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + \\ + 4x_{32} + 11x_{33} \to \min, \qquad (2.19)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \end{cases} \qquad (2.20)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \left(i = \overline{1,3}\right), \ \left(j = \overline{1,3}\right). \qquad (2.21)$$

3. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.28). Блоки клітинок B5:E7 і B8:D8 відводимо для вихідних даних задачі, а пустий блок клітинок B14:D16 - для елементів оптимального плану перевезень, тобто невідомих x_{ij}, $\left(i = \overline{1,3}\right)$, $\left(j = \overline{1,3}\right)$. Блок клітинок E14:E16 використовується для обчислення лівих частин перших трьох обмежень системи обмежень (2.20), блок клітинок B17:D17 - для обчислення лівих частин останніх трьох обмежень системи обмежень (2.20), а клітинка C19 призначена для обчислення значення цільової функції згідно виразу (2.19). Усі формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.15.



	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	8	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	
9					
10					
11	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	
14	1				0
15	2				0
16	3				0
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	0	0	0	
18					
19			F =	**0**	
20					

Рис. 2.28. Таблична модель задачі 2.7 перед пошуком оптимального розв'язку

Таблиця 2.15

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.20)	обмеження 1	E14	=СУММ(B14:D14)
	обмеження 2	E15	=СУММ(B15:D15)
	обмеження 3	E16	=СУММ(B16:D16)
	обмеження 4	B17	=СУММ(B14:B16)
	обмеження 5	C17	=СУММ(C14:C16)
	обмеження 6	D17	=СУММ(D14:D16)
(2.19)	цільова функція	C19	=СУММПРОИЗВ(B5:D7;B14:D16)

4. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.29).

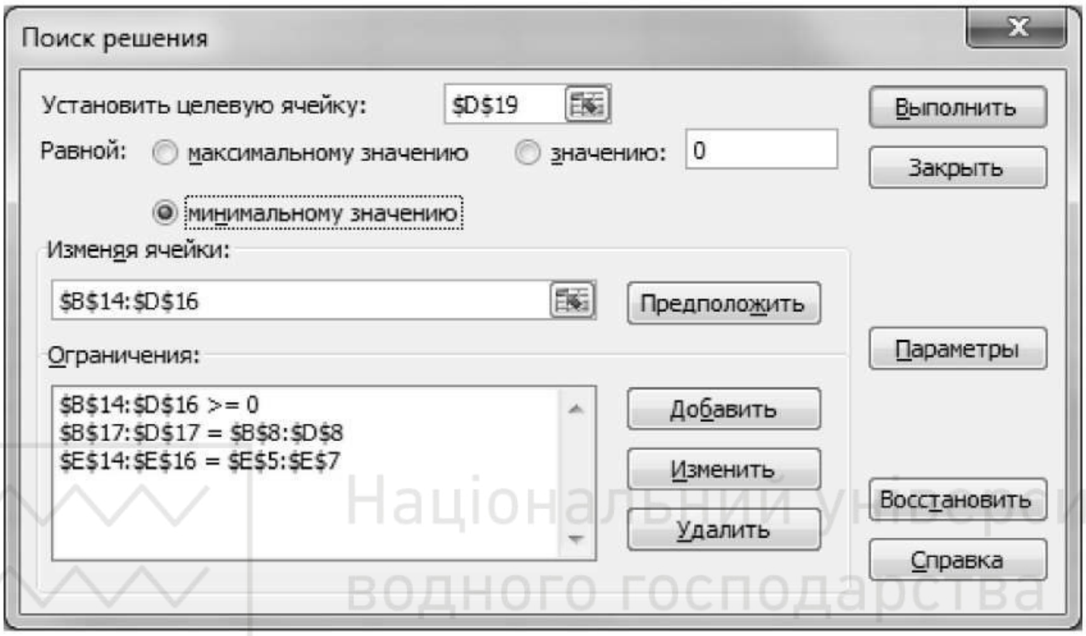


Рис. 2.29. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

5. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**). Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

6. Натискаємо командну кнопку **Выполнить**. Після знаходження оптимального розв'язку задачі у діалоговому вікні **Результаты поиска решения** вибираємо звіт **Устойчивость** і зберігаємо результати розв'язання задачі. Розв'язок задачі наведено нижче на рис. 2.30, а звіт **Устойчивость** – на рис. 2.31.

Як видно з рис. 2.30 оптимальний план перевезень має вигляд $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 170 \\ 0 & 220 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а значення цільової функції дорівнює F=4150.

	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	8	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	
9					
10					
11	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	
14	1	**30**	**0**	**170**	200
15	2	**0**	**220**	**0**	220
16	3	**200**	**0**	**0**	200
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	230	220	170	
18					
19			**F =**	**4150**	
20					

Рис. 2.30 Таблична модель задачі 2.7 після пошуку оптимального розв'язку

Економічна інтерпретація розв'язку. Для повного забезпечення будівництва цеглою необхідно кожного тижня завозити 30 тис. штук цегли з першого заводу на перший об'єкт будівництво і 170 тис. штук – на третій, з другого заводу на другий об'єкт будівництво – 220 тис. штук і з третього заводу на перший об'єкт будівництво – 200 тис. штук цегли. Сумарні транспортні витрати у цьому випадку будуть мінімальними і складати 4150 грошових одиниць.

Аналіз чутливості оптимального розв'язку. Спочатку оцінимо допустимі зміни тарифів на кожному з чотирьох оптимальних маршрутів перевезення цегли (верхня таблиця звіту **Устойчивость**).

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Приклад 2.7.xls]Постановка
Отчет создан: 07.04.2010 18:33:36

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$14	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва	30	0	8	7	2
$C$14		0	7	7	1E+30	7
$D$14		170	0	5	2	1E+30
$B$15	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва	0	2	13	1E+30	2
$C$15		220	0	3	2	1E+30
$D$15		0	2	10	1E+30	2
$B$16	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва	200	0	12	2	7
$C$16		0	0	4	7	2
$D$16		0	2	11	1E+30	2

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	230	11	230	0	200
$C$17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	220	3	220	0	220
$D$17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	170	8	170	0	170
$E$14	Кількість вивезеної с заводу цегли (тис. шт.)	200	-3	200	200	0
$E$15	Кількість вивезеної с заводу цегли (тис. шт.)	220	0	220	0	1E+30
$E$16	Кількість вивезеної с заводу цегли (тис. шт.)	200	1	200	220	0

Рис. 2.31 Звіт **Устойчивость** для задачі 2.7

Так, для першого маршруту перевезення „перший цегляний завод – перший об'єкт будівництва" тариф перевезень може бути збільшено максимально на 7 грошових одиниць і зменшено на 2 грошові одиниці. Тоді за незмінності інших вихідних даних задачі оптимальний план перевезень (матриця перевезень) залишається без змін, якщо тариф перевезень цегли за цим маршрутом буде коливатися в межах від 6 (8-2) до 15 (8+7) грошових одиниць за 1 тис. штук цегли. Зазначимо при цьому, якщо тариф перевезень на цьому маршруті буде становити точно 6 грошових одиниць або точно 15 грошових одиниць з'явиться альтернативний оптимальний план перевезень, який, зрозуміло, можна отримати розв'язавши ще раз цю задачу, але з новим значенням тарифу на розглянутому маршруті – 6 або 15 грошових одиниць. Аналогічні висновки можна зробити і стосовно інших оптимальних маршрутів перевезень.

Розглянемо тепер дані, наведені у нижній частині звіту – у таблиці **Ограничения** і дослідимо чутливість отриманого розв'язку до змін потреб у цеглі на об'єктах будівництва і змін її запасів на цегляних заводах. Так, потреби у цеглі першого об'єкту будівництва можуть коливатися у межах від 30 тис. штук (230-200) до 230 тис. штук (230+0) – таке коливання при незмінності інших вихідних даних задачі не змінять структуру оптимального плану перевезень, хоча величина самих поставок зміниться. Аналогічний висновок можна зробити стосовно і інших об'єктів будівництва, але зрозуміло з іншими числовими значеннями допустимих меж коливання. При цьому, зменшення потреби у цеглі на 1 тис. штук на першому об'єкті будівництва призведе до зменшення загальних транспортних витрат на 11 грошових одиниць при незмінності усіх інших вихідних даних задачі і навпаки, на другому - на 3 грошових одиниці і на третьому – на 8 грошових одиниць. Що ж стосується допустимих змін запасів цегли на цегляних заводах, то вони є наступними: для першого заводу – від 200 тис. штук (200-0) до 400 тис. штук (200+200), для третього заводу - від 200 тис. штук (200-0) до 420 тис. штук (200+220), для другого – зміна запасів цегли неприпустима. Зрозуміло, що наведені зміни можливі і не впливають на структуру оптимального плану перевезень у кожному конкретному випадку тільки за незмінності усіх інших умов задачі. При цьому слід зазначити, що збільшення запасів цегли на першому цегляному заводі на 1 тис. штук при незмінності усіх інших умов задачі, призведе до зменшення загальних транспортних витрат на 3 грошові одиниці. Зміна запасів на другому цегляному заводі взагалі не вплине на загальні транспортні витрати, а от збільшення запасів цегли на третьому цегляному заводі на 1 тис. штук при незмінності усіх інших вихідних даних задачі, призведе до зростання загальних транспортних витрат на 1 грошову одиницю.

Таким чином, якщо загальна потреба у цеглі на всіх об'єктах будівництва у плановому періоді залишиться незмінною або зросте, найбільш доцільними з економічної точки зору є нарощування, при можливості, виробництва цегли саме на першому цегляному заводі, оскільки при повному задоволені усіх потреб об'єктів будівництва транспортні витрати будуть зменшуватися за рахунок перерозподілу вантажу між оптимальними маршрутами перевезень. Такий висновок є особливо актуальним, якщо і заводи, що виробляють цеглу, і об'єкти будівництва є складовими єдиної виробничо-транспортної системи.

* * *

Приклад 2.8 ***Транспортна задача (відкрита модель - запаси є меншими за потреби)***

Для умов попередньої задачі визначити оптимальний щотижневий план перевезення виробленої цегли, який мінімізує сумарні транспортні витрати, якщо тижнева потреба у цеглі третього об'єкту будівництва зросте і буде дорівнювати 200 тис. штук, а не 170. Всі інші вихідні дані задачі залишаються незмінними.

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. Визначаємо тип транспортної задачі. Сумарні запаси цегли на усіх трьох заводах залишаються без змін і дорівнюють як і раніше $\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 220 + 200 = 620$ тис. штук, сумарна ж потреба у цеглі усіх трьох об'єктів будівництва становить тепер $\sum_{j=1}^{3} b_j = 230 + 220 + 200 = 650$ тис. штук. Таким чином $\sum_{i=1}^{3} a_i \neq \sum_{j=1}^{3} b_j$ і ми маємо відкриту модель транспортної задачі.

Оскільки запаси цегли є меншими за потребу в ній, тобто формально $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{3} b_j$, вводимо четвертого, за змістом фіктивного, постачальника цегли (четвертий цегляний завод) з фіктивними запасами цегли $a_4 = \sum_{j=1}^{3} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 650 - 620 = 30$ тис. штук цегли і з тарифами перевезення цегли від нього до усіх споживачів $c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0$ грошових одиниць. Тепер маємо закриту модель транспортної задачі.

2. Будуємо математичну модель задачі :

$$F = 8x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 13x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + \\ + 4x_{32} + 11x_{33} \rightarrow \min, \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 30, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 200, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \left(i = \overline{1,4}\right), \ \left(j = \overline{1,3}\right). \tag{2.24}$$

де: x_{41} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 4–го (фіктивного) цегляного заводу до 1–го об’єкту будівництва, x_{42} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 4–го (фіктивного) цегляного заводу до 2–го об’єкту будівництва, x_{43} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 4–го (фіктивного) цегляного заводу до 3–го об’єкту будівництва.

3. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.32).

	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	8	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	4	0	0	0	30
9	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	200	
10					
11					
12	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
13	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
14		1	2	3	
15	1				0
16	2				0
17	3				0
18	4				0
19	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	0	0	0	
20					
21					
22				**F =**	**0**

Рис. 2.32. Таблична модель задачі 2.8 перед пошуком оптимального розв'язку

Блоки клітинок B5:E8 і B9:D9 відводимо для вихідних даних задачі, а пустий блок клітинок B15:D18 - для шуканих невідомих задачі. Блок клітинок E15:E18 використовується для обчислення лівих частин перших чотирьох обмежень системи обмежень (2.23), блок клітинок B19:D19 - для обчислення лівих частин останніх трьох обмежень системи обмежень (2.23); клітинка E22 призначена для обчислення значення цільової функції згідно виразу (2.22). Усі формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.16.

Таблиця 2.16

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.23)	обмеження 1	E15	=СУММ(B15:D15)
	обмеження 2	E16	=СУММ(B16:D16)
	обмеження 3	E17	=СУММ(B17:D17)
	обмеження 4	E18	=СУММ(B18:D18)
	обмеження 5	B19	=СУММ(B15:B18)
	обмеження 6	C19	=СУММ(C15:C18)
	обмеження 7	D19	=СУММ(D15:D18)
(2.22)	цільова функція	E22	=СУММПРОИЗВ(B5:D8;B15:D18)

4. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.33).

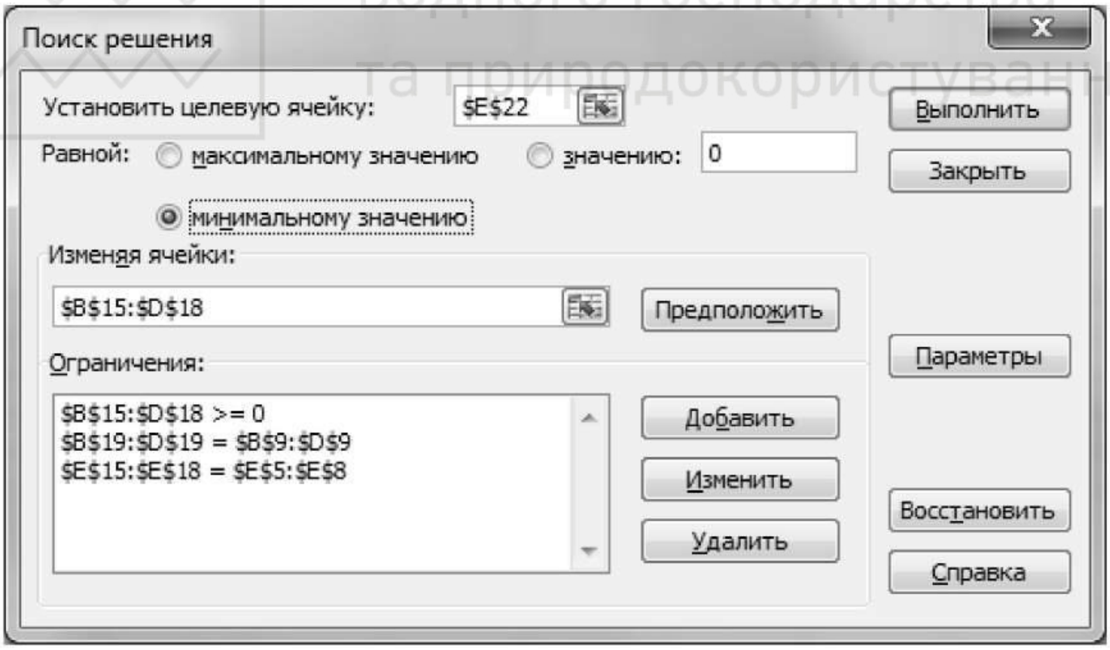


Рис. 2.33. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

5. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі

Ограничения вікна **Поиск решения**). Натискаємо кнопку ОК і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

6. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.34).

	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	8	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	4	0	0	0	30
9	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	200	
10					
11					
12	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
13	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
14		1	2	3	
15	1	**0**	**0**	**200**	200
16	2	**0**	**220**	**0**	220
17	3	**200**	**0**	**0**	200
18	4	**30**	**0**	**0**	30
19	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	230	220	200	
20					
21					
22				**F =**	**4060**

Рис. 2.34. Таблична модель задачі 2.8 після пошуку оптимального розв'язку

Як видно з рис. 2.34 оптимальний план перевезень має вигляд

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 200 \\ 0 & 220 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ а значення цільової функції дорівнює **F**=4060.

<u>Економічна інтерпретація розв'язку.</u> Для забезпечення будівництва цеглою необхідно кожного тижня завозити 200 тис. штук цегли з першого заводу на третій об'єкт будівництво, з другого заводу на другий об'єкт будівництво – 220 тис. штук і з третього заводу на перший об'єкт будівництво – 200 тис. штук цегли. Оскільки четвертий постачальник є фіктивним, то поставка цегли у кількості 30 тис. штук від цього постачальника до першого об'єкту будівництва є також фіктивною і фактично означає недопоставку цієї кількості цегли на даний об'єкт будівництва.

Таким чином оптимальним планом перевезень передбачається задоволення потреб у цеглі тільки другого та третього об'єктів будівництва, на третьому ж об'єкті дефіцит цегли становить 30 тис. штук. Сумарні транспортні витрати у цьому випадку будуть мінімальними і складати 4060 грошових одиниць.

☝ **<u>Зауваження.</u>** *При розв'язанні даної задачі можна застосувати більш простий підхід, не вводячи фіктивного постачальника. Для цього потрібно систему обмежень (2.23) потрібно переписати у вигляді*

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 220, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 200. \end{cases} \qquad (2.25\ )$$

Усі інші елементи математичної моделі задачі 2.8 залишаються такими ж, як і для задачі 2.7. Тоді незадоволений попит на вантаж (цеглу) в оптимальному розв'язку буде представлений резервом для кожного обмеження попиту – кожного об'єкту будівництва (три останніх нерівності системи (2.25)). Цей резерв, а точніше дефіцит вантажу, для кожного об'єкту будівництва дуже просто побачити, наприклад, за допомогою або звіту **Результаты** або звіту **Устойчивость**, чи у самій табличній моделі.

* * *

Приклад 2.9 ***Транспортна задача (відкрита модель – запаси перевищують потреби)***

Для умов задачі 2.7 визначити оптимальний щотижневий план перевезення виробленої цегли, який мінімізує сумарні транспортні витрати, якщо тижневі запаси цегли на другому цегляному заводі будуть дорівнювати 240 тис. штук, а не 220. Всі інші вихідні дані задачі залишаються незмінними.

Розв'язання задачі.

1. Визначаємо тип транспортної задачі. Сумарні запаси цегли на усіх трьох заводах дорівнюють $\sum_{i=1}^{3} a_i = 200 + 240 + 200 = 640$ тис. штук, сумарна ж потреба у цеглі усіх трьох об'єктів будівництва залишається без змін і становить, як і у задачі 2.7, 620 тис. штук. Таким чином $\sum_{i=1}^{3} a_i \neq \sum_{j=1}^{3} b_j$ і ми знову маємо відкриту модель транспортної задачі.

Оскільки запаси цегли є більшими за потреби в ній, тобто $\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_j$, вводимо четвертого, фіктивного, споживача цегли (четвертий об'єкт будівництва) з фіктивною потребою у цеглі $b_4 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 640 - 620 = 20$ тис. штук цегли і з тарифами перевезення цегли від усіх постачальників-заводів до цього фіктивного споживача $c_{14} = c_{24} = c_{34} = 0$ грошових одиниць. Тепер маємо закриту модель транспортної задачі.

2. Будуємо математичну модель задачі. До введених у задачі 2.7 змінних додаємо ще три наступні змінні :

x_{14} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 1–го цегляного заводу до 4–го (фіктивного) об'єкту будівництва;

x_{24} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 2–го цегляного заводу до 4–го (фіктивного) об'єкту будівництва;

x_{34} – кількість цегли (тис. шт.), перевезеної від 3–го цегляного заводу до 4–го (фіктивного) об'єкту будівництва.

Тоді економіко-математична модель нашої задачі буде мати наступний вигляд:

$$F = 8x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 13x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + 12x_{31} + \\ + 4x_{32} + 11x_{33} \to \min, \qquad (2.26)$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 240, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \end{cases} \qquad (2.27)$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \left(i = \overline{1,3}\right), \ \left(j = \overline{1,4}\right). \qquad (2.28)$$

3. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.35). Блоки клітинок B5:F7 і B8:E8 відводимо для вихідних даних задачі, а пустий блок клітинок B14:E16 – для шуканих невідомих задачі. Блок клітинок F14:F16 використовується для обчислення лівих частин перших трьох обмежень системи обмежень (2.27), блок клітинок B17:E17 – для обчислення лівих частин останніх чотирьох обмежень системи

обмежень (2.27); клітинка F20 призначена для обчислення значення цільової функції згідно виразу (2.26). Усі формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.17.

	A	B	C	D	E	F
1	ВИХІДНІ ДАНІ					
2						
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва				Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	4	
5	1	8	7	5	0	200
6	2	13	3	10	0	240
7	3	12	4	11	0	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	20	
9						
10						
11	РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ					
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва				Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	4	
14	1					0
15	2					0
16	3					0
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	0	0	0	0	
18						
19						
20				F =		0

Рис. 2.35. Таблична модель задачі 2.9 перед пошуком оптимального розв'язку

Таблиця 2.17

Формульні вирази для обчислення лівих частин обмежень задачі та значення цільової функції

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.27)	обмеження 1	F14	=СУММ(B14:E14)
	обмеження 2	F15	=СУММ(B15:E15)
	обмеження 3	F16	=СУММ(B16:E16)
	обмеження 4	B17	=СУММ(B14:B16)
	обмеження 5	C17	=СУММ(C14:C16)
	обмеження 6	D17	=СУММ(D14:D16)
	обмеження 7	E17	=СУММ(E14:E16)
(2.26)	цільова функція	F20	=СУММПРОИЗВ(B5:E7;B14:E16)

4. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.36).

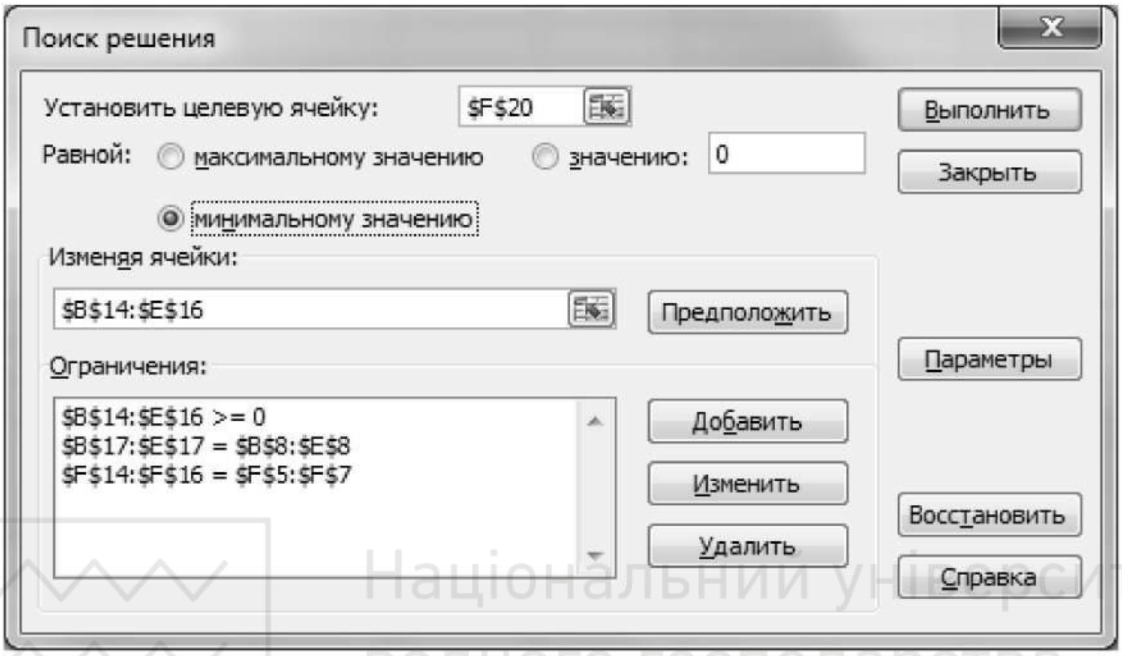


Рис. 2.36. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з заданими параметрами моделі

5. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**). Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

6. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.37).

Як видно з цього рисунку оптимальний план перевезень має вигляд $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 170 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 20 \\ 200 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

а значення цільової функції дорівнює $F=4150$.

	A	B	C	D	E	F
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**					
2						
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва				Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	4	
5	1	8	7	5	0	200
6	2	13	3	10	0	240
7	3	12	4	11	0	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	20	
9						
10						
11	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**					
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва				Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	4	
14	1	**30**	**0**	**170**	**0**	200
15	2	**0**	**220**	**0**	**20**	240
16	3	**200**	**0**	**0**	**0**	200
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	230	220	170	20	
18						
19						
20				**F =**		**4150**
21						

Рис. 2.37. Таблична модель задачі 2.9 після пошуку оптимального розв'язку

Економічна інтерпретація розв'язку. Для повного забезпечення будівництва цеглою необхідно кожного тижня завозити 30 тис. штук цегли з першого заводу на перший об'єкт будівництво і 170 тис. штук – на третій, з другого заводу на другий об'єкт будівництво – 220 тис. штук і з третього заводу на перший об'єкт будівництво – 200 тис. штук цегли. Оскільки четвертий споживач є фіктивним, то поставка йому цегли у кількості 20 тис. штук з другого цегляного заводу є також фіктивною і фактично означає надлишок тижневих запасів цегли у кількості 20 тис. штук на другому заводі.

Сумарні транспортні витрати у цьому випадку будуть мінімальними і складати 4150 грошових одиниць.

☝ **Зауваження.** *Як і у попередній задачі при розв'язанні даної задачі можна застосувати більш простий підхід, не вводячи фіктивного споживача. Для цього систему обмежень (2.27) потрібно подати у наступному вигляді*

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 200, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 240, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 230, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 170. \end{cases} \quad (2.29)$$

Усі інші елементи математичної моделі задачі 2.9 залишаються такими ж, як і для задачі 2.7. Тоді залишок цегли у кожного постачальника (невивезена цегла) в оптимальному розв'язку буде представлений резервом відповідного обмеження пропонування (три перших нерівності системи (2.29)). Цей резерв, а точніше надлишок вантажу, для кожного цегляного заводу дуже просто побачити, наприклад, за допомогою або звіту **Результаты** або звіту **Устойчивость**, чи у самій табличній моделі після отримання оптимального розв'язку, порівнюючи числові значення у стовпцях **Запаси** та **Кількість вивезеної з заводу цегли.**

*   *   *

Приклад 2.10 ***Транспортна задача (модель з неприпустимими маршрутами)***

За умов задачі 2.7 визначити оптимальний щотижневий план перевезення виробленої цегли, який мінімізує сумарні транспортні витрати, якщо в силу деяких обставин транспортування цегли за маршрутом „перший цегляний завод – перший об'єкт будівництва" неможливе.

Розв'язання задачі.

Для врахування зазначеного додаткового обмеження на план перевезень у математичній моделі задачі 2.7 замінимо заданий у вихідних даних тариф перевезень цегли за маршрутом „перший цегляний завод – перший об'єкт будівництва" у 8 грошових одиниць за 1 тис. штук цегли на інше достатньо велике значення, яке суттєво є більшим за усі інші тарифи, наприклад 1000000 грошових одиниць за 1 тис. штук цегли. Таке значення нового тарифу на означеному маршруті змусить інструмент **Поиск решения** зразу ж відхилити цей маршрут, як апріорі невигідний у порівнянні з іншими. Тоді вираз для цільової функції прийме вигляд

$$F = 1000000x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 13x_{21} + 3x_{22} + 10x_{23} + \\ + 12x_{31} + 4x_{32} + 11x_{33} \to \min, \qquad (2.30)$$

а усі інші елементи математичної моделі (обмеження і умова невід'ємності розв'язку) залишаться без змін – такими ж, як і для задачі 2.7.

Оскільки в усьому іншому ця задача практично нічим не відрізняється від задачі з прикладу 2.7, нижче наведено тільки табличну модель задачі до її розв'язання без докладного пояснення змісту клітинок цієї моделі (рис. 2.38), а також табличну модель після її розв'язання (рис. 2.39).

Як видно з рисунку 2.39 оптимальний план перевезень має вигляд $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 170 \\ 30 & 190 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а значення цільової функції дорівнює $F=4420$.

Таким чином, для повного забезпечення будівництва цеглою необхідно кожного тижня завозити 30 тис. штук цегли з першого заводу на другий об'єкт будівництво і 170 тис. штук – на третій, з другого заводу на перший об'єкт будівництва - 30 тис. штук цегли і 190 тис. штук – на другий об'єкт будівництво і з третього заводу на перший об'єкт будівництво – 200 тис. штук цегли. Сумарні транспортні витрати у цьому випадку будуть мінімальними і складати 4420 грошових одиниць.

	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	1000000	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	
9					
10					
11	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	
14	1				0
15	2				0
16	3				0
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	0	0	0	
18					
19					
20				**F =**	**0**

Рис. 2.38. Таблична модель задачі 2.10 перед пошуком оптимального розв'язку

Порівнюючи отриманий оптимальний розв'язок з розв'язком задачі з прикладу 2.7 можна зробити деякі висновки. Так, виключення з 9-ти можливих маршрутів перевезення вантажу маршруту „перший цегляний завод – перший об'єкт будівництва", який входив до оптимального плану перевезень вихідної задачі 2.7 призвело до перерозподілу вантажу на старих маршрутах, а також до включення до оптимального плану перевезень нових маршрутів з більшими значеннями тарифів. Внаслідок такої примусової зміни плану перевезень загальні мінімальні транспортні витрати збільшилися, як і очікувалося, на 270 грошових одиниць, або 6,5%.

	A	B	C	D	E
1	**ВИХІДНІ ДАНІ**				
2					
3	Цегляний завод	Вартість перевезення (гр. од.) 1 тис. штук цегли до об'єкту будівництва			Запаси цегли на заводі (тис. шт.)
4		1	2	3	
5	1	1000000	7	5	200
6	2	13	3	10	220
7	3	12	4	11	200
8	Потреба у цеглі об'єктів будівництва (тис. шт.)	230	220	170	
9					
10					
11	**РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ**				
12	Цегляний завод	Кількість цегли (тис. шт.), перевезеної до об'єкту будівництва			Кількість вивезеної з заводу цегли (тис. шт.)
13		1	2	3	
14	1	**0**	**30**	**170**	200
15	2	**30**	**190**	**0**	220
16	3	**200**	**0**	**0**	200
17	Кількість завезеної на об'єкт будівництва цегли (тис. шт.)	230	220	170	
18					
19					
20				F =	**4420**
21					

Рис. 2.39. Таблична модель задачі 2.10 після пошуку оптимального розв’язку

2.5. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.5.1. Особливості розв’язування задач цілочислового програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Як відомо, змінні задач цілочислового програмування можуть приймати тільки цілі значення. Окремим частковим випадком є випадок, коли ці змінні можуть приймати тільки одне з двох значень – 0 або 1, тобто випадок, коли шукані змінні моделі є бінарними числами. Цю особливість задач цілочислового програмування потрібно враховувати на етапі заповнення полів діалогового вікна **Поиск решения**. Так, формуючи систему обмежень задачі у полі **Ограничения**, для блоку клітинок, відведених для шуканих невідомих задачі потрібно **обов'язково** задати статус **цел** (цілочислові значення змінних моделі) або **двоич** (бінарні значення змінних моделі) (рис. 2.3). В усьому іншому розв'язання задач цілочислового програмування у середовищі табличного процесора MS Excel з використанням інструменту **Поиск решения** нічим не відрізняється від розв'язання задач лінійного програмування, розглянутих раніше.

Окремо слід зазначити також, що використання інструменту **Поиск решения** для пошуку оптимального розв'язку задач цілочислового програмування не дає можливість отримати такі звіти, як звіт **Устойчивость** і **Пределы**.

2.5.2. Приклади розв'язання задач цілочислового програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Приклад 2.11

Задача оптимального розкрою однорідного матеріалу

Друкарня отримує з паперової фабрики щомісячно стандартні рулони паперу шириною 2 м. За технологічними вимогами друкарня може використовувати рулони шириною 0,5, 0,7 і 0,9 м, тому виникає необхідність розрізати стандартні рулони паперу на заготовки цих трьох видів. Місячна потреба друкарні у рулонах-заготовках шириною 0,5 м становить 150 штук, у рулонах-заготовках шириною 0,7 м – 200 штук і у рулонах-заготовках шириною 0,9 м – 300 штук.

Розрізання стандартних рулонів на менші здійснюється спеціальними ножицями, при цьому існує 6 різних варіантів поділу одного стандартного рулону на заготовки. Кількість заготовок, які можна отримати для кожного варіанту розрізання та відходи, які при цьому утворюються наведені у табл. 2.18.

Визначити, скільки стандартних рулонів і за яким варіантом треба розрізати, щоб задовольнити місячну потребу друкарні у папері і отримати при цьому мінімально можливі відходи.

Таблиця 2.18

Вихідні дані до задачі 2.11

Ширина заготовки (м)	Кількість заготовок (шт) для варіанту розрізання						Необхідна кількість заготовок
	1	2	3	4	5	6	
0,5	0	2	2	4	1	0	150
0,7	1	1	0	0	2	0	200
0,9	1	0	1	0	0	2	300
Відходи (м)	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2	

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. Будуємо математичну модель задачі. Вводимо наступні позначення :

x_1 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за першим варіантом;

x_2 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за другим варіантом;

x_3 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за третім варіантом;

x_4 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за четвертим варіантом;

x_5 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за п'ятим варіантом;

x_6 – кількість рулонів стандартної ширини, що розрізається за шостим варіантом;

F – сумарні відходи.

За своїм економічними змістом змінні задачі $x_1, \ldots, x_6$ повинні бути <u>додатними</u> і <u>цілими.</u> Тоді з цих рулонів можна виготовити заготовок шириною 0,5 м у кількості $(2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5)$ штук, заготовок шириною 0,7 м - у кількості $(x_1 + x_2 + 2x_5)$ штук і заготовок шириною 0,9 м - у кількості $(x_1 + x_3 + 2x_6)$ штук. Загальна (сумарна) кількість відходів при цьому буде становити $(0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_5 + 0{,}2x_6)$ і вона повинна бути мінімальною. Таким чином математична модель задачі має вигляд:

$$F = 0{,}4x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}1x_5 + 0{,}2x_6 \to \min, \qquad (2.31)$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150, \\ x_1 + x_2 + 2x_5 = 200, \\ x_1 + x_3 + 2x_6 = 300, \end{cases} \qquad (2.32)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0, \text{ цілі}. \qquad (2.33)$$

Отже задача після її формалізації представляє собою задачу цілочислового програмування.

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.40).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Вихідні дані					
2									
3	Ширина	Кількість заготовок (шт) для варіантів розрізання						Необхідна кількість	Фактична кількість
4	заготовки (м)	1	2	3	4	5	6	рулонів-заготовок	рулонів-заготовок
5	0,5	0	2	2	4	1	0	150	0
6	0,7	1	1	0	0	2	0	200	0
7	0,9	1	0	1	0	0	2	300	0
8	Відходи (м)	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2		
9									
10				Розв'язок					
11	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Усього	
12	0							0	

Рис. 2.40. Таблична модель задачі 2.11 перед пошуком оптимального розв'язку

Блоки клітинок B5:G8 і H5:H7 відводимо для вихідних даних задачі, наведених вище у табл. 2.18 , а блок клітинок I5:I7, клітинки A12 і H12 – для формул. Так, у клітини блоку I5:I7 вводимо формули для обчислення лівих частин системи обмежень (2.32), у клітинку A12 вводимо формулу для обчислення значення цільової функції (2.31), а у клітинку H12 вводимо формулу для обчислення загальної кількості рулонів стандартної ширини, які потрібно розрізати на заготовки. Порожній блок клітинок B12:G12 відводимо під змінні задачі. Усі формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.19.

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.41).

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

Таблиця 2.19

Формульні вирази, застосовані при побудові табличної моделі задачі 2.11

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
	обмеження 1	I5	=СУММПРОИЗВ(B5:G5;B12:G12)
(2.32)	обмеження 2	I6	=СУММПРОИЗВ(B6:G6;B12:G12)
	обмеження 3	I7	=СУММПРОИЗВ(B7:G7;B12:G12)
(2.31)	цільова функція	A12	=СУММПРОИЗВ(B8:G8;B12:G12)
---	допоміжні обчислення	H12	=СУММ(B12:G12)

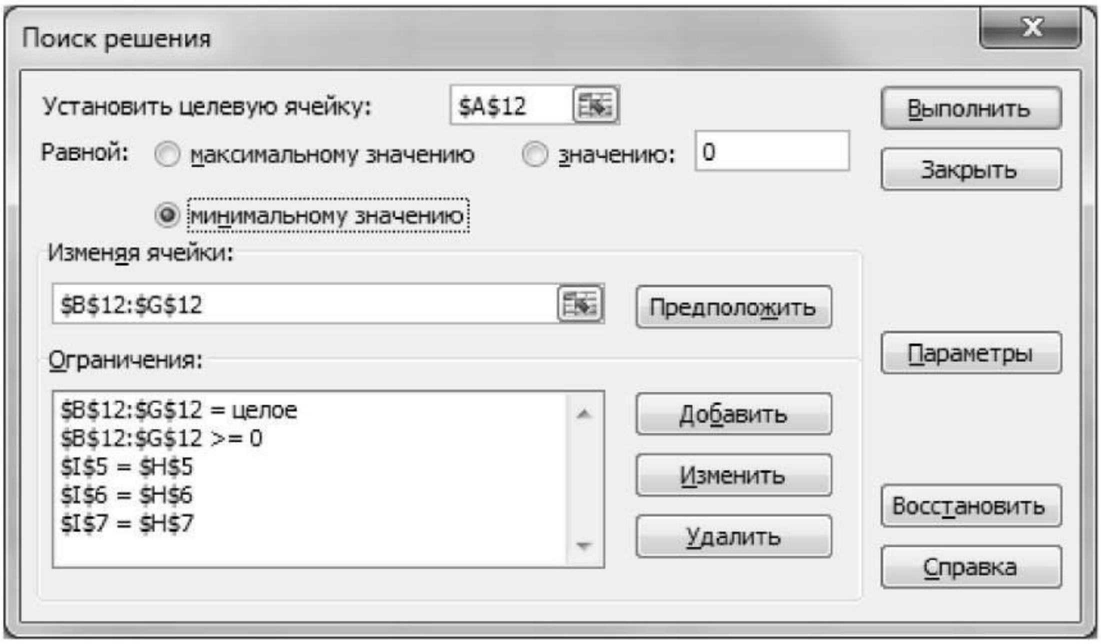


Рис. 2.41. Діалогове вікно команди **Поиск решения**

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.42). Як видно компоненти оптимального розв'язку задачі є наступними: $X^* = (2,\ 2,\ 24,\ 0,\ 98,\ 137),\ F = 41$.

<u>Економічна інтерпретація розв'язку.</u> Для забезпечення друкарні необхідною кількістю рулонів паперу необхідної ширини потрібно усього розрізати 263 рулони паперу стандартної ширини у 2 м, при цьому за першим варіантом необхідно розрізати 2 рулони, за другими – 2 рулони, за третім – 24 рулони, за п'ятим – 98 рулонів і за шостим варіантом – 137 рулонів. Відходи за такої комбінації варіантів розрізки будуть мінімальними і складають 41м або 7,8%

$$\left(\frac{41}{(2 \cdot 263)}100\%\right).$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Вихідні дані					
2									
3	Ширина	Кількість заготовок (шт) для варіантів розрізання						Необхідна кількість	Фактична кількість
4	заготовки (м)	1	2	3	4	5	6	рулонів-заготовок	рулонів-заготовок
5	0,5	0	2	2	4	1	0	150	150
6	0,7	1	1	0	0	2	0	200	200
7	0,9	1	0	1	0	0	2	300	300
8	Відходи (м)	0,4	0,3	0,1	0	0,1	0,2		
9									
10					Розв'язок				
11	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Усього	
12	**41**	**2**	**2**	**24**	**0**	**98**	**137**	**263**	

Рис. 2.42. Таблична модель задачі 2.11 після пошуку оптимального розв'язку

* * *

Приклад 2.12 ***Задача оптимального розкрою неоднорідного матеріалу.***

Цех отримує металеві прутки стандартної довжини L_1=150см і L_2=200см, які потрібно порізати на заготовки трьох видів: довжиною l_1=80см, l_2=60см і l_3=50см відповідно. Планова тижнева потреба в заготовках становить: першого виду – 120 штук, другого виду – 140 штук і третього виду – 235 штук. Тижневі запаси прутків стандартної довжини, які можна використовувати у виробництві заготовок, є обмеженими і становлять : 50 штук для прутка довжиною L_1=150см і 150 штук – для прутка довжиною L_2=200см.

Розрізання прутків стандартної довжини на заготовки може здійснюватися декількома технологічними способами. Кількість заготовок, які можна отримати з прутків стандартної довжини для кожного варіанту розрізання та відходи, які при цьому утворюються наведені у табл. 2.20 і табл. 2.21.

Визначити оптимальний план розкрою прутків обох видів на заготовки, при якому задовольняється тижнева потреба цеху у заготовках і отримані при цьому відходи будуть мінімальними.

Таблиця 2.20

Варіанти розкрою металевого прутка L_1=150см

Довжина заготовки, (см)	Кількість заготовок (шт) для варіанту розкрою				
	1	2	3	4	5
80	1	1	0	0	0
60	1	0	2	1	0
50	0	1	0	1	3
Відходи (см)	10	20	30	40	0

Таблиця 2.21

Варіанти розкрою металевого прутка L_2=200см

Довжина заготовки, (см)	Кількість заготовок (шт) для варіанту розкрою						
	1	2	3	4	5	6	7
80	2	1	1	0	0	0	0
60	0	2	1	3	2	1	0
50	0	0	1	0	1	2	4
Відходи (см)	40	0	10	20	30	40	0

Розв'язання задачі.

1. Будуємо математичну модель задачі. Вводимо наступні змінні :

   $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ – кількість прутків довжиною L_1=150см (першого виду), що розрізається на заготовки за 1-м, 2-м, 3-м, 4-м і 5-м варіантами відповідно;

   $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}$ – кількість прутків довжиною L_2=200см (другого виду), що розрізається на заготовки за 1-м, 2-м, 3-м, 4-м, 5-м, 6-м і 7-м варіантами відповідно .

За своїм економічними змістом ці змінні повинні бути додатними і цілими. Тоді з прутків обох видів можна виготовити заготовок довжиною 80 см у кількості $(x_{11}+x_{12}+2x_{21}+x_{22}+x_{23})$ штук, заготовок довжиною 60 см – у кількості $(x_{11}+2x_{13}+x_{14}+2x_{22}+$ $+x_{23}+3x_{24}+2x_{25}+x_{26})$ штук і заготовок довжиною 50 см – у кількості $(x_{12}+x_{14}+3x_{15}+x_{23}+x_{25}+2x_{26}+4x_{27})$ штук. Загальна (сумарна) кількість відходів при цьому буде дорівнювати $(10x_{11}+20x_{12}+30x_{13}+40x_{14}+40x_{21}+10x_{23}+20x_{24}+30x_{25}+$ $+40x_{26})$, загальна кількість прутків довжиною L_1=150см, яка піде на виготовлення заготовок буде дорівнювати $(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15})$ штук, а прутків довжиною L_2=200см – $(x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27})$ штук. Таким чином математична модель задачі з урахуванням усіх умов і обмежень має наступний вигляд :

$$F=10x_{11}+20x_{12}+30x_{13}+40x_{14}+40x_{21}+10x_{23}+ \\ +20x_{24}+30x_{25}+40x_{26}\to \min, \tag{2.34}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+2x_{21}+x_{22}+x_{23}=120, \\ x_{11}+2x_{13}+x_{14}+2x_{22}+x_{23}+3x_{24}+2x_{25}+x_{26}=140, \\ x_{12}+x_{14}+3x_{15}+x_{23}+x_{25}+2x_{26}+4x_{27}=235, \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}\le 50, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{26}+x_{27}\le 150, \end{cases} \tag{2.35}$$

$$x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{25},x_{26},x_{27}\ge 0,\ \textit{цілі}. \tag{2.36}$$

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.43).

Блоки клітинок B6:M10 та B14:M14 відводимо для коефіцієнтів при шуканих невідомих задачі в системі обмежень задачі (2.35) та у цільовій функції (2.34) відповідно, а блок клітинок P6:P10 – для значень правих частин обмежень. Блок клітинок N6:N10 і клітинку

N18 відведено для формульних виразів. Так до клітин блоку N6:N10 вводимо формули для обчислення лівих частин системи обмежень (2.35), а у клітинку N18 – формулу для обчислення значення цільової функції (2.34). Порожній блок клітинок B18:M18 відводимо під змінні задачі. Усі формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.22.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	**ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ**															
2	Обмеження															
3																
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих												Ліва частина	Знак	Права частина
5		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}			
6	1	1	1	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0,0	=	120
7	2	1	0	2	1	0	0	2	1	3	2	1	0	0,0	=	140
8	3	0	1	0	1	3	0	0	1	0	1	2	4	0,0	=	235
9	4	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0,0	<=	50
10	5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0,0	<=	150
11																
12	Коефіцієнти при невідомих у цільовій функції															
13	Невідомі	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}			
14	Коефіцієнти	10	20	30	40	0	40	0	10	20	30	40	0			
15																
16	**РОЗВ'ЯЗОК**															
17	Невідомі	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	**F**		
18	Значення	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0,0**		

Рис. 2.43. Таблична модель задачі 2.12. перед пошуком оптимального розв'язку

Таблиця 2.22

Формульні вирази, застосовані при побудові табличної моделі

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.35)	обмеження 1	N6	=СУММПРОИЗВ(B6:M6;B18:M18)
	обмеження 2	N7	=СУММПРОИЗВ(B7:M7;B18:M18)
	обмеження 3	N8	=СУММПРОИЗВ(B8:M8;B18:M18)
	обмеження 4	N9	=СУММПРОИЗВ(B9:M9;B18:M18)
	обмеження 5	N10	=СУММПРОИЗВ(B10:M10;B18:M18
(2.34)	цільова функція	N18	=СУММПРОИЗВ(B14:M14;B18:M18

3. Запускаємо команду **Поиск решения** і у діалоговому вікні заповнюємо відповідні поля (рис. 2.44).

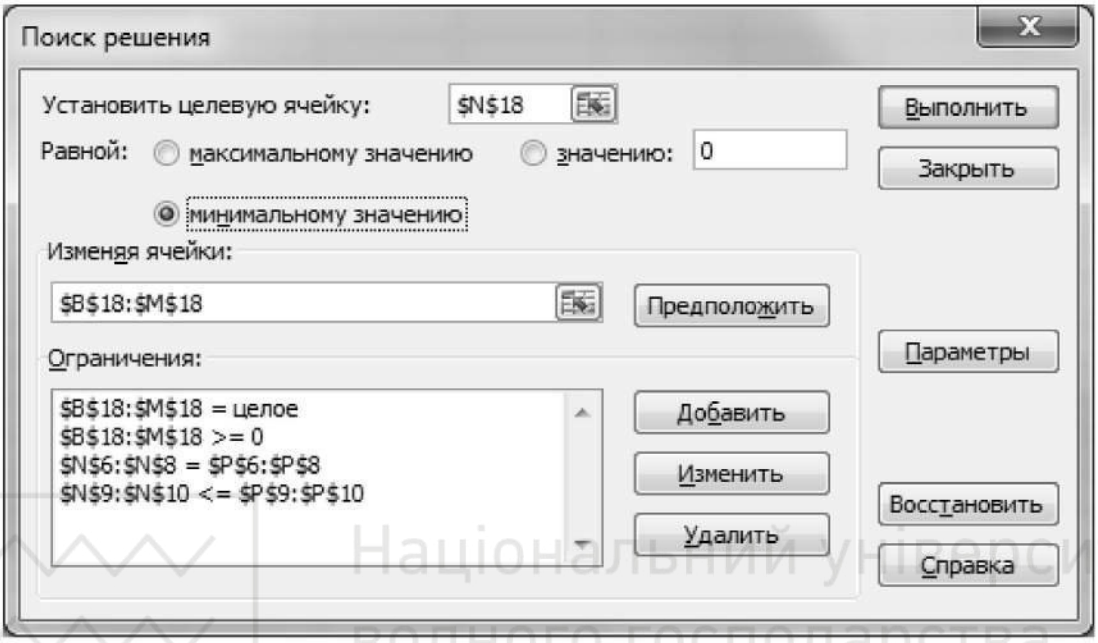


Рис. 2.44. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з параметрами пошуку

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо, як і раніше, тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения.**
5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.45).

Як видно з наведеного рисунку компоненти оптимального розв'язку мають наступні значення: $x_{11} = 0,\ x_{12} = 0,\ x_{13} = 0,$ $x_{14} = 0,\ x_{15} = 5,\ x_{21} = 25,\ x_{22} = 70,\ x_{23} = 0,\ x_{24} = 0,\ x_{25} = 0,$ $x_{26} = 0, x_{27} = 55,\ F = 1000$

<u>**Економічна інтерпретація розв'язку.**</u> Визначимо загальну кількість прутків обох видів, які потрібно розрізати на заготовки і їх загальну довжину. Загальна кількість прутків довжиною L_1=150см

становить 5 штук, а прутків довжиною L_2=200см – 150 штук (25+70+55). Загальна довжина прутків, які пішли на виготовлення заготовок, становить 5·1,5м + 150·2м =307,5м. Загальна довжина відходів (значення цільової функції) становить при цьому 1000 см = 10 м.

Таким чином, для забезпечення цеху необхідною кількістю заготовок потрібно розрізати 5 прутків стандартної довжини 150 см і 150 прутків – довжиною 200 см. При цьому усі 5 прутків довжиною 150см потрібно розрізати за п'ятим варіантом, 25 прутків довжиною 200см - за першим варіантом, 70 – за другим і 55 – за сьомим варіантами. Відходи за такої програми будуть мінімальними і складають 10м або 3,2% $\left(\dfrac{10}{307,5}100\%\right)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	**ВИХІДНІ ДАНІ ЗАДАЧІ**															
2	Обмеження															
3																
4	Обмеження	Коефіцієнти при невідомих												Ліва частина	Знак	Права частина
5		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}			
6	1	1	1	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	120,0	=	120
7	2	1	0	2	1	0	0	2	1	3	2	1	0	140,0	=	140
8	3	0	1	0	1	3	0	0	1	0	1	2	4	235,0	=	235
9	4	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5,0	<=	50
10	5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	150,0	<=	150
11																
12		Коефіцієнти при невідомих у цільовій функції														
13	Невідомі	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}			
14	Коефіцієнти	10	20	30	40	0	40	0	10	20	30	40	0			
15																
16	**РОЗВ'ЯЗОК**															
17	Невідомі	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	**F**		
18	Значення	**0**	**0**	**0**	**0**	**5**	**25**	**70**	**0**	**0**	**0**	**0**	**55**	**1000,0**		

Рис. 2.45. Таблична модель задачі 2.12 після пошуку оптимального розв'язку

Приклад 2.13 ***Задача про оптимальне призначення***

Керівнику підрозділу деякого підприємства потрібно призначити на чотири роботи чотирьох робітників. Кожний з робітників може виконувати кожну з чотирьох робіт, при цьому кожний робітник може бути призначений тільки на одну роботу, а кожна з чотирьох робіт повинна виконуватися тільки одним робітником. Вартість оплати праці кожного робітника при виконанні кожної з чотирьох робіт у грошових одиницях задана у вигляді наступної матриці C :

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 15 & 5 \\ 8 & 12 & 20 & 25 \\ 22 & 18 & 18 & 14 \\ 30 & 30 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Визначити такий план призначення робітників на роботи, при якому загальна вартість виконання усіх робіт буде мінімальною.

<u>**Розв'язання задачі.**</u>

1. Будуємо економіко-математичну модель задачі. Для цього вводимо наступні шукані змінні задачі $x_{ij}, \left(i=\overline{1,4}\right), \left(j=\overline{1,4}\right)$, такі, що :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо } i - \textit{й працівник призначається на } j - \textit{ту роботу}; \\ 0, \ \textit{якщо } i - \textit{й працівник не призначається на } j - \textit{ту роботу}. \end{cases}$$

Тоді загальна вартість виконання усіх робіт визначається як

$$20x_{11} + 30x_{12} + 15x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 12x_{22} + 20x_{23} + 25x_{24} + 22x_{31}$$
$$+ 18x_{32} + 18x_{33} + 14x_{34} + 30x_{41} + 30x_{42} + 8x_{43} + 12x_{44}$$

і економіко-математична модель сформульованої задачі приймає наступний вигляд :

$$F = 20x_{11} + 30x_{12} + 15x_{13} + 5x_{14} + 8x_{21} + 12x_{22} + 20x_{23} + \\ + 25x_{24} + 22x_{31} + 18x_{32} + 18x_{33} + 14x_{34} + 30x_{41} + 30x_{42} + \\ + 8x_{43} + 12x_{44} \to \min, \tag{2.37}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1, \end{cases} \tag{2.38}$$

$$x_{ij} = 0 \; \textit{або} \, 1, \; x_{ij} - \textit{цілі}, \left(i = \overline{1,4}\right), \left(j = \overline{1,4}\right). \tag{2.39}$$

2. В середовищі табличного процесора MS Excel будуємо табличну модель задачі (рис. 2.46).

Верхня таблиця табличної моделі **Вихідні дані** містить вихідні дані задачі. Нижня таблиця призначення для формування необхідних формульних виразів і представлення результатів пошуку оптимального розв’язку задачі.

Так, пустий блок клітинок B13:E16 призначено для виводу елементів оптимального плану призначень - матриці призначень x_{ij}, $\left(i = \overline{1,4}\right)$, $\left(j = \overline{1,4}\right)$. Блок клітинок F13:F16 використовується для обчислення кількості робіт, які виконуються кожними робітником - тобто для обчислення лівих частин перших чотирьох обмежень системи обмежень (2.38). Блок клітинок B17:E17 використовується для обчислення кількості робітників, призначених на кожну роботу – тобто для обчислення лівих частин останніх чотирьох обмежень системи обмежень (2.38). Клітинка B20 призначена для обчислення значення цільової функції згідно виразу (2.37).

Формульні вирази, використані при побудові табличної моделі задачі, наведені у табл. 2.23.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Вихідні дані					
3							
4	Робота	Вартість 1-ї години роботи робітників, грошові одиниці					
5	Робітник	1	2	3	4		
6	1	20	30	15	5		
7	2	8	12	20	25		
8	3	22	18	18	14		
9	4	30	30	8	12		
10							
11		Матриця призначень					
12							
13						0	
14						0	
15						0	
16						0	
17		0	0	0	0		
18							
19							
20	F =	**0**					
21							

Рис. 2.46. Таблична модель задачі 2.13 перед пошуком оптимального розв'язку

Таблиця 2.23

Формульні вирази, застосовані при побудові табличної моделі

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.38)	обмеження 1	F13	=СУММ(B13:E13)
	обмеження 2	F14	=СУММ(B14:E14)
	обмеження 3	F15	=СУММ(B15:E15)
	обмеження 4	F16	=СУММ(B16:E16)
	обмеження 5	B17	=СУММ(B13:B16)
	обмеження 6	C17	=СУММ(C13:C16)
	обмеження 7	D17	=СУММ(D13:D16)
	обмеження 8	E17	=СУММ(E13:E16)
(2.37)	цільова функція	B20	=СУММПРОИЗВ(B6:E9;B13:E16)

3. Тепер у меню **Сервис** вибираємо команду **Поиск решения** і у вікні **Поиск решения** задаємо параметри для пошуку оптимального розв'язку задачі (рис. 2.47). При формуванні обмежень задачі (поле **Ограничения**) обов'язково слід вказати, що шуканні змінні задачі є бінарними (**двоичное**).

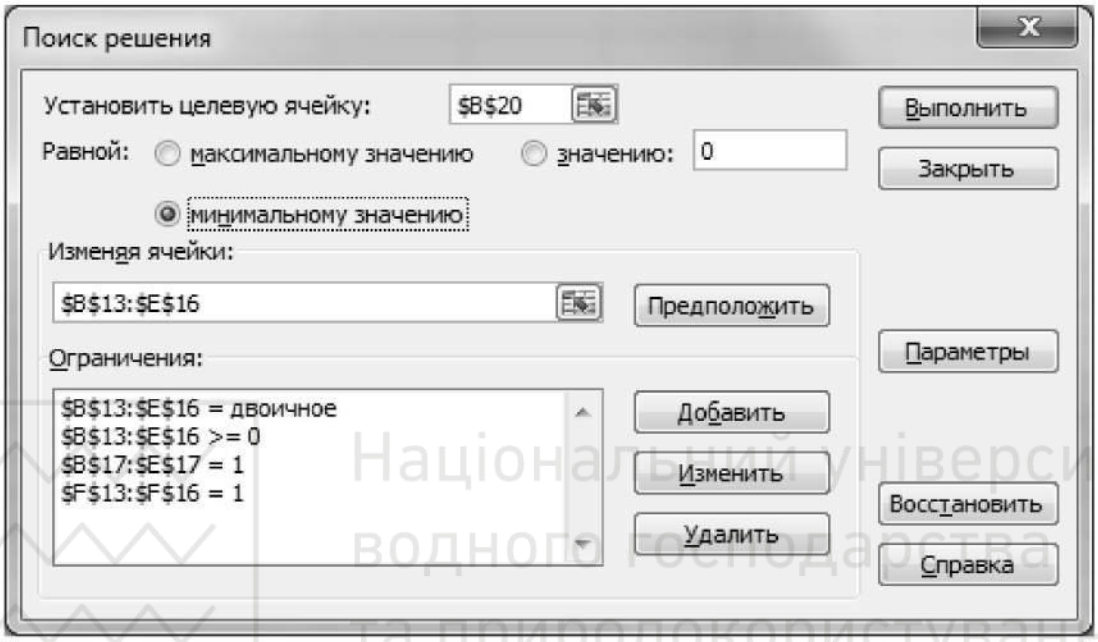


Рис. 2.47. Вікно **Поиск решения** з параметрами пошуку

4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** задаємо, як і раніше, тільки параметр **Линейная модель** (оскільки умови невід'ємності розв'язку задані явно у полі **Ограничения** вікна **Поиск решения**. Натискаємо кнопку **ОК** і повертаємося до вікна **Поиск решения**.

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить** і отримуємо розв'язок задачі (рис. 2.48). Як видно з цього рисунку оптимальний план призначень робітників на роботи має вигляд

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, а значення цільової функції дорівнює F = 39.

<u>Економічна інтерпретація розв'язку.</u> Оптимальним планом призначення робітників на роботи буде наступний план: перший робітник призначається на четверту роботу, другий – на першу, третій – на другу і четвертий – на третю роботу. Загальна оплата праці усім чотирьом робітникам за виконану роботу при цьому є мінімальною і складає 39 грошових одиниць, з них першому працівнику – 5 грошових одиниць, другому – 8, третьому – 18 і четвертому – 8 грошових одиниць.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Вихідні дані					
3							
4	Робота	Вартість 1-ї години роботи робітників, грошові одиниці					
5	Робітник	1	2	3	4		
6	1	20	30	15	5		
7	2	8	12	20	25		
8	3	22	18	18	14		
9	4	30	30	8	12		
10							
11		Матриця призначень					
12							
13		0	0	0	1	1	
14		1	0	0	0	1	
15		0	1	0	0	1	
16		0	0	1	0	1	
17		1	1	1	1		
18							
19							
20	F =	39					
21							

Рис. 2.48. Таблична модель задачі після пошуку оптимального розв'язку

2.6. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.6.1. Особливості розв'язування задач нелінійного програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Як відомо, на відміну від задач лінійного програмування, не існує універсального методу розв'язування задач нелінійного програмування. У науковій літературі можна знайти принаймні

10-15 методів нелінійної оптимізації, кожний з яких, як правило, ефективно „працює" тільки для деякого класу моделей нелінійного програмування і є неефективним для інших. Інструмент **Поиск решения** табличного процесора MS Excel для розв'язання задач нелінійного програмування використовує ***метод узагальненого приведеного градієнта***, реалізований у вигляді ***методу Ньютона*** та ***методу спряжених градієнтів***, які відносяться до градієнтних методів і дозволяють знайти розв'язок практично будь-якої задачі нелінійного програмування. Але у загальному випадку застосування цих методів дозволяє знайти <u>точку локального екстремуму</u>, тому з практичної точки зору важливо знати перспективи розв'язання та особливості застосування цього інструменту для різних класів моделей нелінійного програмування і відповідних задач нелінійного програмування.

Виходячи з цього, усі нелінійні оптимізаційні моделі можна поділити на два класи:

– моделі, які піддаються реалізації за допомогою інструменту **Поиск решения**;
– моделі, які можна спробувати реалізувати (розв'язати) за допомогою інструменту **Поиск решения**.

Моделі першого класу зустрічаються у таких задачах нелінійного програмування, як:

– задачі опуклого програмування;
– задачі квадратичного програмування.

Моделі другого класу, які ще прийнято називати ***суттєво нелінійними*** притаманні задачам нелінійного програмування загального виду, для яких властивості увігнутості або опуклості математичної моделі відсутні.

Як і для задач лінійного програмування розв'язання задачі нелінійного програмування за допомогою інструменту **Поиск решения** можна розбити на два етапи:

– побудова табличної моделі задачі;
– застосування безпосередньо інструменту **Поиск решения** і пошук оптимального розв'язку.

Структура табличної моделі при цьому містить усі стандартні елементи, зазначені у 2.2.3. Сама ж процедура пошуку оптимального розв'язку, враховуючи методи які використовуються інструментом **Поиск решения,** працює наступним чином:

1) використовуючи вихідні значення змінних моделі, які задані у відповідних клітинках табличної моделі і які вказані у полі **Изменяя ячейки**, знаходиться початкова точка всередині області допустимих розв'язків, яка відповідає деякому допустимому розв'язку;
2) з початкової точки визначається напрям, у якому найшвидше покращується значення цільової функції і у цьому напрямі змінюються значення змінних до тих пір, поки не буде досягнута лінія обмеження області допустимих розв'язків або не перестане покращуватися значення цільової функції;
3) з нової точки обчислюється новий напрям і процес повторюється, залишаючись у межах області допустимих розв'язків;
4) алгоритм завершується, коли знайдена точка, що задовольняє **необхідними умовам** оптимальності.

Таким чином наведений алгоритм визначає тільки стаціонарну точку, яка одночасно є точкою локального екстремуму для нелінійних задач загального вигляду і точкою глобального екстремуму для задач опуклого та квадратичного програмування. Внаслідок цього для знаходження розв'язку задач нелінійного програмування в залежності від класу задачі використовується різна стратегія.

Так, для задач опуклого і квадратичного програмування можна залишати порожніми клітинки, відведені під змінні моделі, тобто у цьому випадку стартовою точкою вважається точка з нульовими координатами. Навіть якщо вона і не належить до області допустимих розв'язків, **Поиск решения** виправить цю ситуацію і почне розв'язання задачі із стартової точки, що належить області допустимих розв'язків. Таким чином для цього класу задач не існує проблеми з вибором початкової точки і якою б вона не була інструмент **Поиск решения** знайде оптимальний розв'язок, якщо він існує.

Для суттєво нелінійних задач початкова точка має дуже велике значення і вибір у якості стартової точки „нульової" точки є досить невдалим вибором. Крім цього, оскільки для такого класу моделей **Поиск решения** визначає тільки точку локального екстремуму**,** для знаходження оптимального розв'язку потрібно декілька початкових точок, тобто процедуру **Поиск решения** потрібно запустити декілька раз і кожний раз з нової стартової точки. Тільки така стратегія може допомогти знайти локальний оптимум, можливо достатньо близький до глобального.

Що ж стосується параметрів пошуку оптимального розв'язку, які задаються у діалоговому вікні **Параметры поиска решения**, то для задач нелінійного програмування актуальними є наступні налаштування.

По-перше, треба скинути прапорець **Линейная модель**. Далі можна активізувати параметр **Автоматическое масштабирование**, якщо числа, з якими оперує інструмент **Поиск решения**, відрізняються на шість –сім порядків. Крім цього можна суттєво покращати процес оптимізації, якщо встановити в області **Оценки** параметр **квадратичная**, а в області **Разности** - **центральные** (Табл. 2.2)**,** хоча при цьому може збільшитися час розв'язування задачі. Також в області **Метод поиска** можна задати метод пошуку розв'язку – **метод Ньютона** або **метод сопряженных градиентов** (Табл. 2.2). Метод Ньютона використовує більше пам'яті комп'ютера але працює швидше і виконує менше ітерацій, метод спряжених градієнтів – навпаки, тому для невеликих задач можна орієнтуватися на Метод Ньютона, а для великих – на метод спряжених градієнтів. Окрім цього в задачах нелінійного програмування можна спробувати налаштувати такі параметри інструменту **Поиск решения**, як **Сходимость** і **Относительная погрешность**. Призначення цих параметрів і особливості їх застосування наведені у табл. 2.2.

Загалом, для суттєво нелінійних і неопуклих моделей одним з можливих варіантів параметрів пошуку розв'язку може бути наступний варіант: **Оценки** - **квадратичная**, **Разности** - **центральные**, **Метод поиска** – **метод Ньютона**, а **Сходимость** залишити на стандартному рівні 0,0001 або встановити не менше 0,000001, також слід встановити прапорець **Автоматическое масштабирование**.

Як і випадку лінійного програмування інструмент **Поиск решения** і для задач нелінійного програмування у випадку успішного пошуку оптимального розв'язку генерує звіти усіх трьох видів (Табл. 2.3). Структура звітів **Результаты** і **Пределы** та зміст їх полів повністю співпадає із структурою та змістом цих звітів для задач лінійного програмування (див. 2.3.1). Що ж стосується звіту

Устойчивость, то його структура та зміст для задач нелінійного програмування відрізняється від структури та змісту звіту для задач лінійного програмування (Рис. 2.7, Рис. 2.54). Основна відмінність у цих звітах полягає у заміні стовпців **Нормир. стоимость** та **Теневая цена** у звіті для задач лінійного програмування на стовпці **Нормир. градиент** та **Лагранжа Множитель** у звіті для задач нелінійного програмування.

Множники Лагранжа мають цікаву і важливу економічну інтерпретацію. Ці множники в моделях нелінійного програмування інтерпретуються практично як тіньові ціни в моделях лінійного програмування. Іншими словами, в точці оптимуму значення і–го множника Лагранжа є миттєвою швидкістю зміни оптимального значення цільової функції при зростанні значення правої частини і–го обмеження задачі за незмінності усіх інших даних задачі. Використовуючи економічну термінологію, можна сказати, що і–й множник Лагранжа відображує граничну вартість і–го ресурсу і вимірюється у тих одиницях, які визначаються як відношення одиниці вимірювання цільової функції до одиниці вимірювання правої частини і–го обмеження.

Як і тіньові ціни (двоїсті оцінки) у моделях лінійного програмування, додатне значення множника Лагранжа показує, що збільшення правої частини деякого обмеження-нерівності призведе до зростання оптимального значення цільової функції, а від'ємне значення множника Лагранжа показує, що збільшення правої частини деякого обмеження-нерівності – призведе до зменшення оптимального значення цільової функції. Але на відміну від задач лінійного програмування в задачах нелінійного програмування нічого не можна сказати щодо діапазону зростання або зменшення правої частини деякого обмеження, для якого дане значення множника Лагранжа є незмінним. Звичайною, як правило, є ситуація, коли множник Лагранжа сам змінюється разом із зміною правої частини. Але це не заважає використовувати його для оцінювання впливу зміни правої частини деякого обмеження на значення цільової функції.

Значення нормованого градієнта (стовпець **Нормир. градиент**) у звіті **Устойчивость** для моделей нелінійного програмування інтерпретується аналогічно значенню нормованої вартості для задач лінійного програмування (див. 2.3.1).

2.6.2. Приклади розв'язання задач нелінійного програмування за допомогою інструменту Поиск решения

Приклад 2.14

Задача квадратичного програмування

Підприємство виробляє два види продукції (А і В) і використовує при цьому три види ресурсів: I, II, III. Технологічні норми витрат ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції, а також доступні запаси цих ресурсів у плановому періоді наведені у табл. 2.24.

Таблиця 2.24

Вихідні дані до задачі 2.14

Вид ресурсу	Вид продукції		Загальний обсяг ресурсу
	A	B	
I	1	3	30
II	1	1	15
III	5	2	60

Ціна реалізації одиниці продукції виду А становить 20 грошових одиниць, проте прибуток залежить від витрат на виробництво, які пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції. Аналогічно визначається прибуток для продукції виду В, ціна реалізації якої дорівнює 18 грошових одиниць.

Визначити оптимальний план випуску продукції у плановому періоді, якщо випуск продукції обмежується тільки наявними ресурсами і її реалізація практично необмежена.

<u>Розв'язання задачі.</u>

1. Будуємо економіко-математичну модель задачі. Для цього вводимо наступні позначення :

x_1 – кількість продукції виду А;

x_2 – кількість продукції виду В;

F – загальний прибуток від реалізації виробленої продукції.

Оскільки дана задача дуже схожа на розглянуту вище задачу лінійного програмування 2.1 детально розглянемо тільки формування виразу цільової функції. Так, прибуток від реалізації продукції виду А у кількості x_1 становитиме у нашому випадку $20x_1 - x_1^2$ (виручка $20x_1$ мінус витрати x_1^2), а від реалізації продукції виду В у кількості x_2 – відповідно $18x_2 - x_2^2$. Тоді загальний прибуток від реалізації виробленої продукції буде становити $F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2$ і математична модель задачі має вигляд:

$$F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2 \to \max, \tag{2.40}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60, \end{cases} \tag{2.41}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.42}$$

Національний університет водного господарства та природокористування

2. На робочому листі табличного процесора MS Excel формуємо табличну модель задачі (рис. 2.49).

	A	B	C	D	E
1			**Вихідні дані**		
2					
3	Продукція	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання
4	Ресурси	A	B		
5	I	1	3	30	0
6	II	1	1	15	0
7	III	5	2	60	0
8	Ціна реалізації одиниці продукції (грошові одиниці)	20	18		
9					
10					
11			**Результати розрахунків**		
12		x_1	x_2	F	
13				**0**	

Рис. 2.49. Таблична модель задачі перед пошуком оптимального розв’язку

Блок клітинок B13:C13 відводимо під шукані невідомі задачі і залишаємо порожніми. Блоки клітинок B5:C8 і D5:D7 відводимо для вихідних даних задачі, наведених у табл. 2.24 , а блок E5:E7 і клітинку D13 – для формул. Так у клітинки блоку E5:E7 вводимо формули для обчислення лівих частин обмежень задачі (2.41), а до клітинки D13 уводимо формулу для обчислення значення цільової функції згідно виразу (2.40). Формульні вирази, застосовані при побудові табличної моделі, наведені у табл. 2.25.

Таблиця 2.25

Формульні вирази, застосовані при побудові табличної моделі

Формула	Елемент моделі	Адреса клітинки	Формула MS Excel
(2.41)	обмеження 1	E5	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;B13:C13)
	обмеження 2	E6	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;B13:C13)
	обмеження 3	E7	=СУММПРОИЗВ(B7:C7;B13:C13)
(2.40)	цільова функція	D13	=B8*B13-B13*B13+C8*C13-C13*C13, або =B8*B13-СТЕПЕНЬ(B13;2) + C8*C13- СТЕПЕНЬ(C13;2), або =B8*B13-B13^2+C8*C13-C13^2,

3. Тепер запускаємо команду **Поиск решения** і у однойменному діалоговому вікні вводимо необхідні параметри команди (рис. 2.50).
4. Натискаємо командну кнопку **Параметры** і задаємо наступні додаткові параметри команди **Поиск решения** (рис. 2.51):
   – активізуємо поле **Неотрицательные значения**, оскільки за економічним змістом шукані невідомі задачі не можуть бути від'ємними величинами;
   – з метою збільшення точності та коректності обчислень активізуємо поле **квадратична** групи кнопок **Оценки** та поле **центральные** групи кнопок **Разности;**
   – оскільки задача не є об'ємною і не вимагає великого обсягу пам'яті комп'ютера вибираємо більш швидкий та менш економний метод пошуку оптимального розв'язку – метод Ньютона.

– Усі інші параметри залишаємо без змін – стандартними. Натискаємо командну кнопку **ОК** .

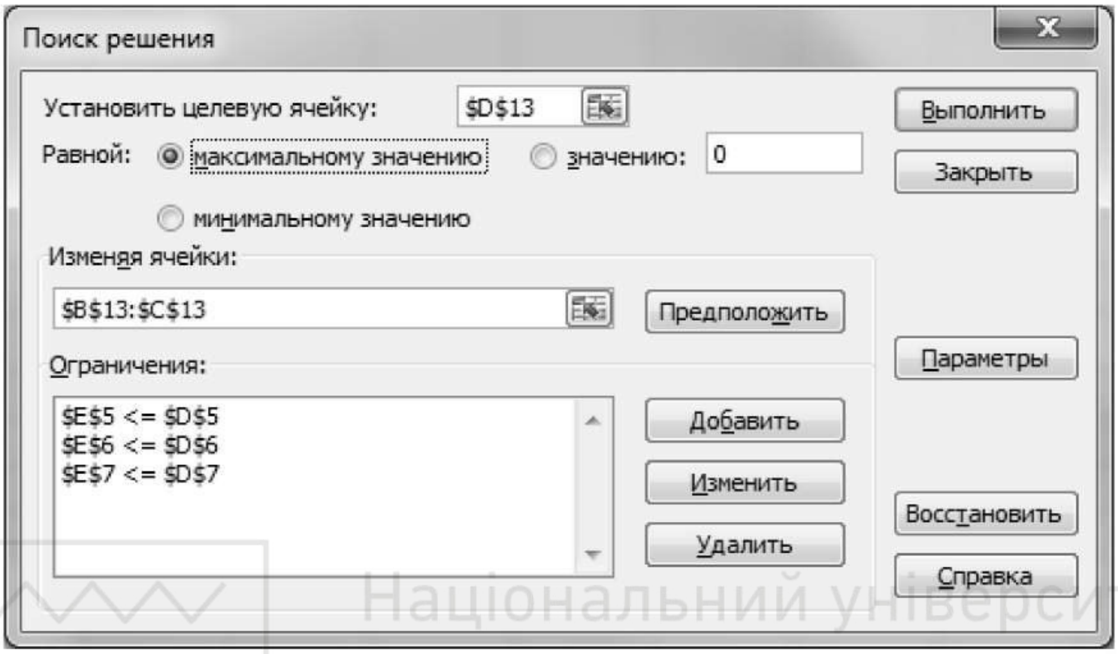


Рис. 2.50. Діалогове вікно команди **Поиск решения** з параметрами пошуку

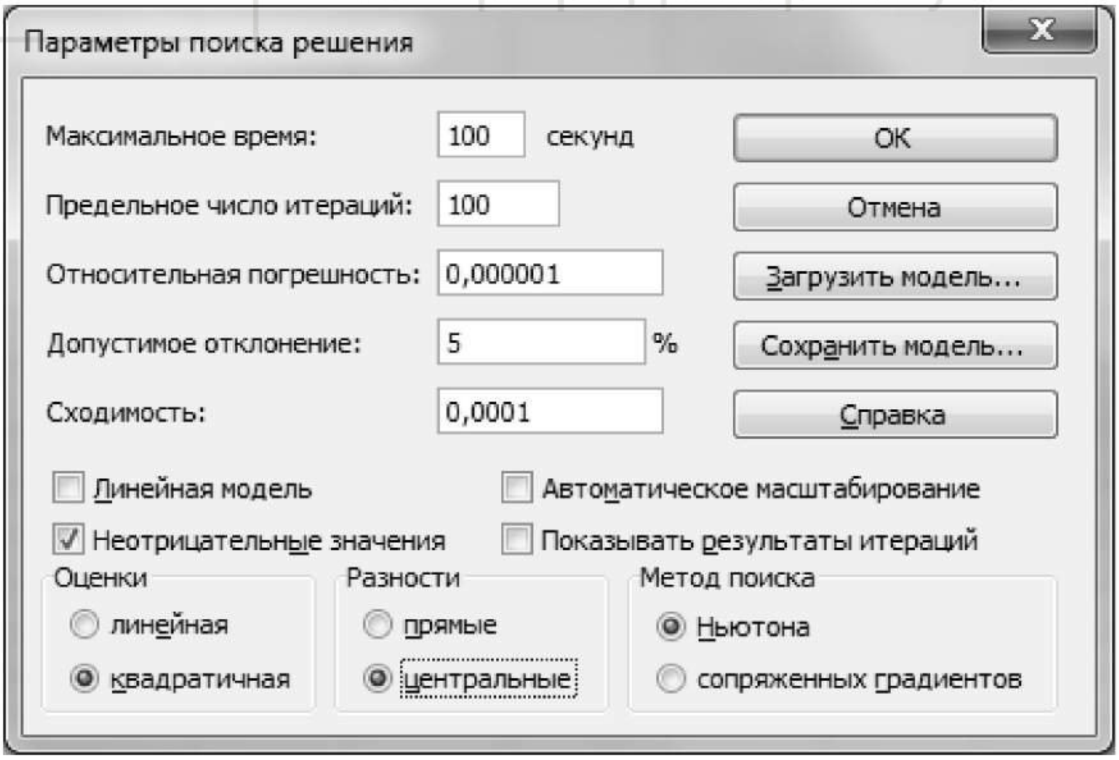


Рис. 2.51 Вікно **Параметры поиска решения**

5. Натискаємо командну кнопку **Выполнить**. Після завершення пошуку оптимального розв'язку задачі у діалоговому вікні **Результати поиска решения** вибираємо звіт **Результаты** та **Устойчивость,** які буде використано на етапі післяоптимізаційного аналізу. Розв'язок задачі наведено на рис. 2.52 а звіти - на рис. 2.53 та 2.54. Як видно компоненти оптимального розв'язку задачі є наступними: $X^{*}=(8,\ 7),\quad F=173$.

	A	B	C	D	E
1	**Вихідні дані**				
2					
3	Продукція	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Запаси ресурсів	Фактичне використання
4	Ресурси	A	B		
5	I	1	3	30	29
6	II	1	1	15	15
7	III	5	2	60	54
8	Ціна реалізації одиниці продукції (грошові одиниці)	20	18		
9					
10					
11		**Результати розрахунків**			
12		x_1	x_2	F	
13		**8**	**7**	**173**	

Рис. 2.52. Таблична модель задачі після пошуку оптимального розв'язку

<u>**Економічна інтерпретація розв'язку.**</u> Підприємству слід включити до плану випуску продукції 8 одиниць продукції виду А та 7 одиниць продукції виду В. Максимальний прибуток від реалізації продукції обох видів складе 173 грошові одиниці.

Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Нелінійне програмування.xls]Лист1
Отчет создан: 12.02.2010 18:41:59

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$D$13	F	0	173

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$13	x1	0	8
$C$13	x2	0	7

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$E$5	I Фактичне використання	29	$E$5<=$D$5	не связан.	0,999999999
$E$6	II Фактичне використання	15	$E$6<=$D$6	связанное	0
$E$7	III Фактичне використання	54	$E$7<=$D$7	не связан.	6,000000001

Рис. 2.53. Звіт **Результаты**

Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Нелінійне програмування.xls]Лист1
Отчет создан: 12.02.2010 18:42:00

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
$B$13	x1	8	0
$C$13	x2	7	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
$E$5	I Фактичне використання	29	0
$E$6	II Фактичне використання	15	3,999991894
$E$7	III Фактичне використання	54	0

Рис. 2.54. Звіт **Устойчивость**

Післяоптимізаційний аналіз.

Визначимо дефіцитність кожного виробничого ресурсу та його вплив на прибуток.

Спочатку проаналізуємо дані звіту **Результаты**, а точніше дані останньої таблиці **Ограничения**. Оскільки перше і третє обмеження задачі мають статус **не связанное**, ці обмеження виконуються як чиста нерівність виду <. Друге обмеження задачі виконується як чиста рівність оскільки має статус **связанное**. Таким чином в процесі виробництва другий ресурс використовується повністю і він є дефіцитним, а перший і третій – неповністю, тобто вони є надлишковими і недефіцитними. Фактичне значення використаних ресурсів дорівнює 29, 15 і 54 одиниці відповідно (стовпець **Значение**), при цьому надлишок першого ресурсу становить 1 одиницю, а третього – 6 одиниць (стовпець **Разница**). Отже, при подальшому розширенні виробництва підприємству слід у першу чергу забезпечити збільшення запасів другого ресурсу, як лімітуючого. При збереженні обсягів виробництва підприємство може зменшити запаси першого та третього ресурсів з метою зменшення витрат виробництва.

Тепер проаналізуємо результати, наведені у звіті **Устойчивость.** Оскільки множник Лагранжа для другого (дефіцитного) ресурсу дорівнює 4, то збільшення запасів цього ресурсу на одиницю при незмінних запасах інших, тобто фактично введення до процесу виробництва додаткової одиниці другого ресурсу, збільшить прибуток підприємства на 4 грошових одиниці. Збільшення ж запасів недефіцитних першого або третього ресурсів при збереженні на вихідному рівні інших (і в першу чергу другого ресурсу) не призведе до зростання прибутку, оскільки згідно технології в процесі виробництва їх фактичне використання є меншим за існуючі запаси у плановому періоді.

☝ **Зауваження.** Для визначення дефіцитних і недефіцитних ресурсів у наведеному прикладі було використано звіт **Результаты.** Але такий аналіз можна виконати також і на основі звіту **Устойчивость**. Так нульові значення множника Лагранжа для першого і третього обмежень задачі свідчать про не дефіцитність першого та третього ресурсів, в той же час ненульове значення множника Лагранжа для другого обмеження задачі свідчать про дефіцитність другого ресурсу.

Слід зазначити також, що до висновку стосовно дефіцитності другого виробничого ресурсу можна дійти і шляхом аналізу табличної моделі задачі після її розв'язання (рис. 2.52). Як видно з останнього стовпчика електронної таблиці **Фактичне використання** саме цей ресурс на відміну від інших у процесі виробництва вичерпано повністю, що свідчить про його дефіцитність.

РОЗДІЛ 3. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ІНСТРУМЕНТАРІЮ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL 2010/2013 ТА MS EXCEL 2007

3.1. ЗАГАЛЬНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Як вже відмічалося вище, у посібнику розглянуті практичні аспекти економіко-математичного моделювання з використанням інструментарію табличного процесора MS Excel 2007, який на думку авторів залишається найбільш розповсюдженою і зрозумілою, принаймні серед студентського середовища, версією популярного табличного процесора. Разом з тим широку популярність в останні роки набули більш сучасні версії табличного процесора MS Excel - MS Excel 2010 та MS Excel 2013, які мають деякі відмінності від попередньої версії, особливо у частині застосування інструменту **Поиск решения** в оптимізаційних задачах.

Нижче розглянуті основні відмінності та особливості використання інструментарію табличного процесора MS Excel 2010/2013 у порівнянні з версією MS Excel 2007 з точки зору застосування цього інструментарію при економіко-математичному моделюванні.

3.2. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ АНАЛИЗ ДАННЫХ У СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL 2010/2013

Запуск команди **Анализ данных** і доступ до відповідного пакету аналізу у середовищі табличного процесору MS Excel 2010/2013 здійснюється так само як і у версії MS Excel 2007. При цьому сам пакет **Анализ даннях** для версій MS Excel 2010/2013 має таке ж саме діалогове вікно і характеризується такою ж самою кількістю інструментів як і для MS Excel 2007 (рис. 3.1, рис. 3.2). Ці інструменти для усіх трьох версій мають абсолютно ідентичні назви, ідентичні діалогові вікна, ідентичні параметри та ідентичні алгоритми.

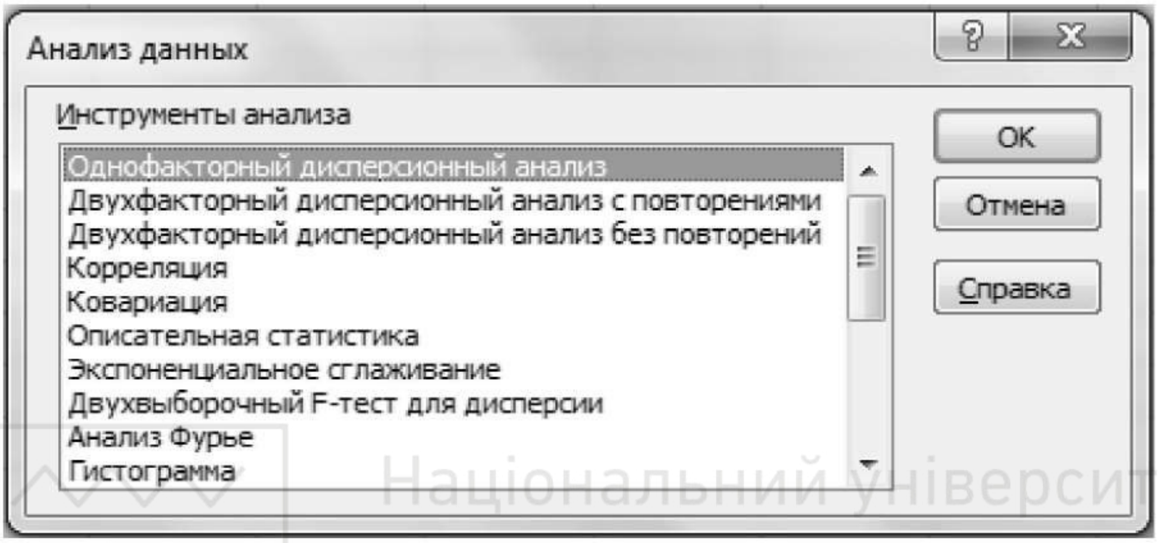


Рис. 3.1. Діалогове вікно команди **Анализ данных** для MS Excel 2007

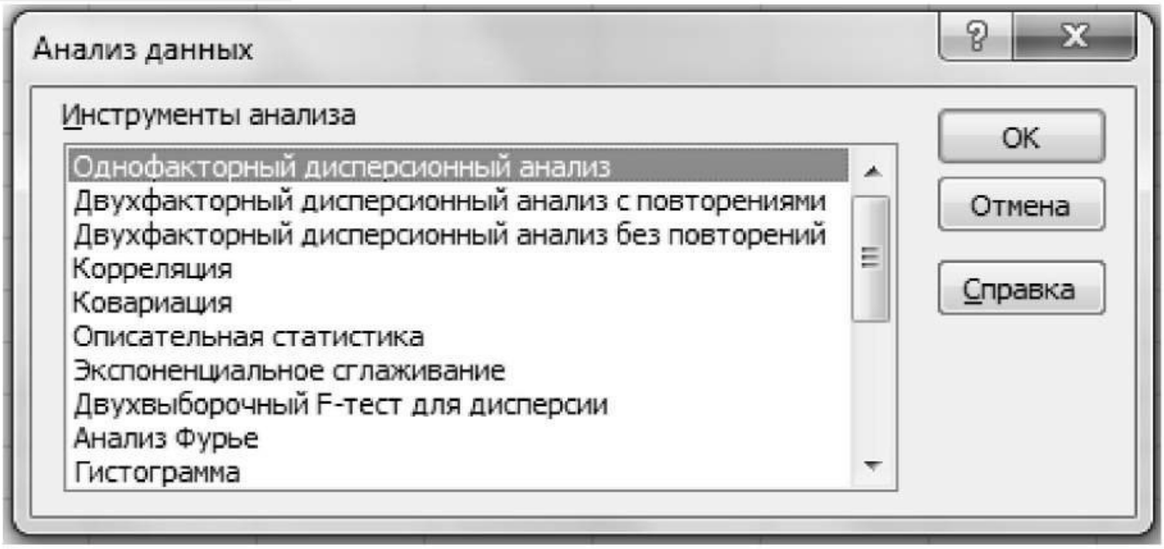


Рис. 3.2. Діалогове вікно команди **Анализ данных** для MS Excel 2010/2013

Оскільки в усіх трьох версіях табличного редактора відмінності у використанні пакету **Анализ данных** відсутні, то розглянуті у першому розділі навчального посібника рекомендації щодо застосування даного пакету під час економетричного моделювання не потребують будь-якого коригування.

3.3. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ІНСТРУМЕНТУ ПОИСК РЕШЕНИЯ У СЕРЕДОВИЩІ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА MS EXCEL 2010/2013

Запуск інструменту **Поиск решения** у середовищі MS Excel 2010/2013 здійснюється так само як і для попередньої версії. Основна відмінність версій MS Excel 2010/2013 від MS Excel 2007 полягає :

- у вигляді вікна інструменту **Поиск решения** та назві елементів управління цього вікна;
- у формі задавання параметрів інструменту;
- у використанні в версії 2010 та 2013-го року нового ефективного методу нелінійної оптимізації – методу еволюційного пошуку розв'язку.

Основні діалогові вікна інструменту **Поиск решения** для трьох версій табличного процесора наведені на рис. 3.3 та 3.4. Як бачимо, ці вікна відрізняються як самою назвою, так і складом і назвою полів та деяких елементів управління. Розглянемо порівняльний зміст полів і елементів управління основного діалогового вікна для цих версій.

Спочатку розглянемо елементи управління основного діалогового вікна інструменту **Поиск решения**, які мають однаковий зміст для обох версій.

❖ Поле **Оптимизировать целевую функцию:** для MS Excel 2010/2013 є аналогічним за змістом полю **Установить целевую ячейку:** MS Excel 2007 і призначено для введення адреси клітинки електронної таблиці, у якій сформовано формулу для обчислення значення цільової функції.

❖ Група кнопок-перемикачів **До:** для MS Excel 2010/2013 аналогічна за змістом групі кнопок **Равной:** для MS Excel 2007 і використовується для вибору типу процедури оптимізації.

❖ Поле **Изменяя ячейки переменных:** для MS Excel 2010/2013 є аналогічним за змістом полю **Изменяя ячейки:** для MS Excel 2007. У ньому задається адреса клітинок електронної таблиці (табличної моделі задачі), значення яких можуть змінюватися в процесі пошуку оптимального розв'язку задачі. У цих же клітинках виводяться елементи оптимального плану.

❖ Поле **В соответствии с ограничениями**: для MS Excel 2010/2013 є аналогічним за змістом полю **Ограничения:** для MS Excel 2007 і використовується для формування і відтворення усіх обмежень задачі.

❖ Командні кнопки **Добавить**, **Изменить**, **Удалить** в усіх трьох версіях мають однакову назву та однаковий зміст і призначені для додавання, коригування та вилучення обмежень задачі.

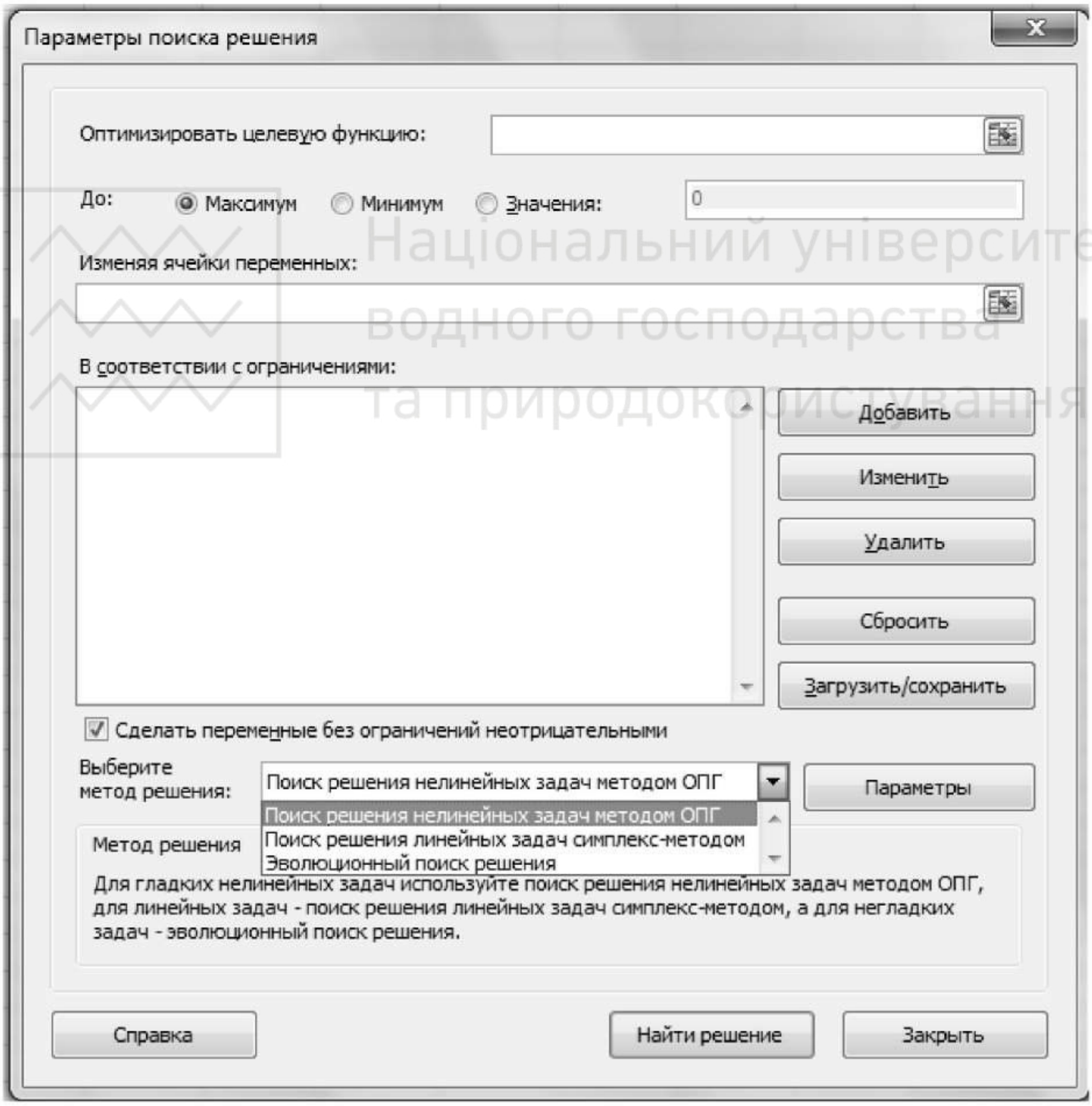


Рис. 3.3. Діалогове вікно інструменту **Поиск решения** для MS Excel 2010/2013

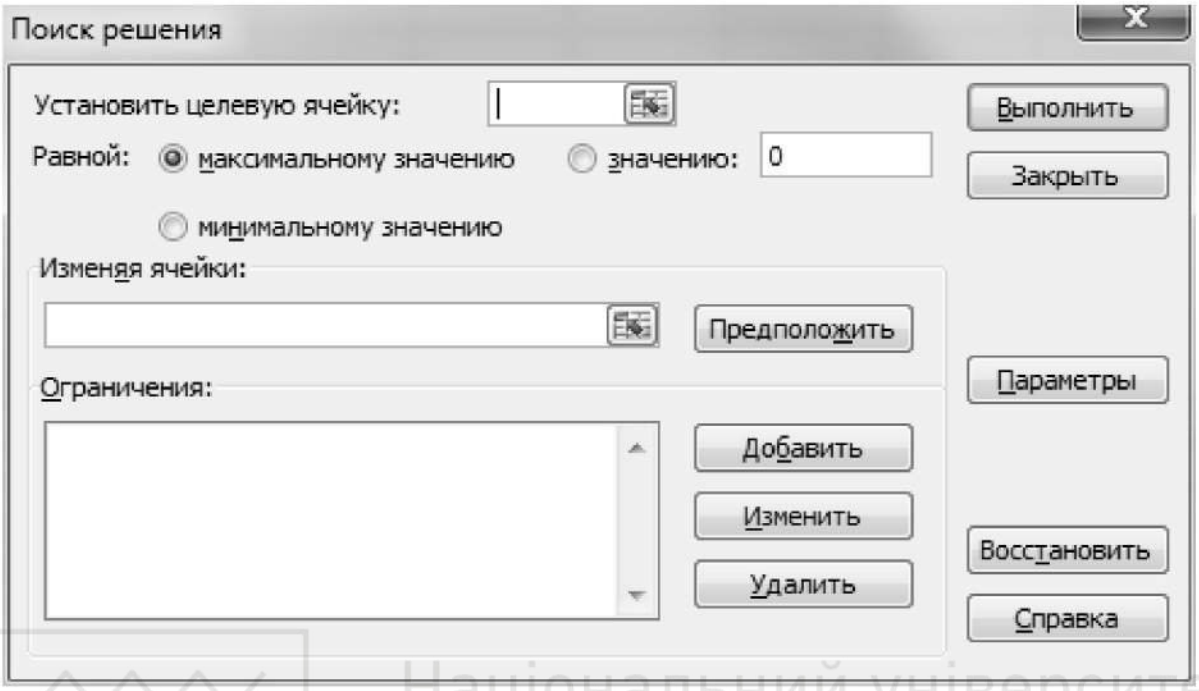


Рис. 3.4. Діалогове вікно інструменту **Поиск решения** для MS Excel 2007

❖ Командна кнопка **Сбросить** для MS Excel 2010/2013 є аналогічною за змістом кнопці **Восстановить** для MS Excel 2007 і використовується для скидання усіх заданих параметрів у вікні **Параметры поиска решения**. Фактично ця кнопка очищує усі поля діалогового вікна **Параметры поиска решения.**

❖ Командні кнопки **Параметри** в усіх версіях мають однакову назву та однаковий зміст і призначені для задавання додаткових параметрів інструменту **Поиск решения.**

❖ Командна кнопка **Найти решение** для MS Excel 2010/2013 є аналогічною за змістом кнопці **Выполнить** для MS Excel 2007 і активізує інструмент **Поиск решения.**

❖ Командні кнопки **Закрыть** і **Справка** в усіх трьох версіях мають однакову назву та однаковий зміст.

Тепер розглянемо відмінності основного діалогового вікна інструменту **Поиск решения** для трьх версій табличного процесора MS Excel.

❖ По-перше, у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** для MS Excel 2010/2013 з’явилася командна кнопка

Загрузить/сохранить, яка об'єднала в собі командні кнопки **Загрузить модель…** і **Сохранить модель…** з діалогового вікна **Параметры поиска решения** для MS Excel 2007 (рис. 3.10). Ця кнопка дозволяє зберегти і потім завантажити, при необхідності, усі параметри інструменту **Поиск решения** для поточної оптимізаційної задачі. Таким чином можна зберегти декілька варіантів однієї і тієї ж моделі, але з різними даними.

❖ По-друге, у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** для MS Excel 2010/2013 з'явився прапорець **Сделать переменные без ограничений неотрицательными,** який аналогічний за змістом прапорцю **Неотрицательные значения** з діалогового вікна **Параметры поиска решения** для MS Excel 2007 (рис. 3.10) і за допомогою якого задаються умови невід'ємності елементів оптимального плану.

❖ По-третє і головне, у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** для MS Excel 2010/2013 з'явилося поле **Выберите метод решения:,** яке дозволяє обрати відповідний метод розв'язування оптимізаційної задачі.

Так, *для лінійних задач*, як і у попередній версії, пропонується симплекс-метод. Вибір цього методу аналогічний встановленню прапорця **Линейная модель** у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** для MS Excel 2007 (рис. 3.10).

Для *гладких нелінійних задач* (задач опуклого та квадратичного програмування тощо), як і у попередній версії, пропонується метод узагальненого приведеного градієнта. Вибір цього методу аналогічний вибору методу пошуку оптимального розв'язку з групи полів **Метод поиска** у діалоговому вікні **Параметры поиска решения** для MS Excel 2007 (рис. 3.10).

І *для суттєво нелінійних, негладких задач* пропонується новий, більш ефективний метод – метод еволюційного пошуку, якого не було в MS Excel 2007. Цей метод базується на так званих еволюційних (або генетичних) алгоритмах і у порівнянні із градієнтними методами з більшою ймовірністю дозволяє визначати глобальний оптимум. Перевагою цього методу у порівнянні із градієнтними є також і те, що алгоритм методу самостійно і випадковим чином генерує початкові точки (початкові плани) з області допустимих розв'язків, що суттєво полегшує процедуру розв'язування оптимізаційної задачі. Разом з тим, в процесі пошуку оптимального розв'язку генерується велика кількість допустимих розв'язків, з яких і вибирається "найкращий", що призводить до великих обсягів обчислень.

Тепер для усіх трьох версій табличного процесора MS Excel порівняємо діалогові вікна **Добавление ограничения,** які використовується для формування обмежень моделі. Ці вікна наведені на рис. 3.5 … рис. 3.8. Як видно з рис. 3.5 і рис. 3.6, діалогове вікно **Добавление ограничения** для MS Excel 2010/2013 практично нічим не відрізняється від аналогічного діалогового вікна для MS Excel 2007. Якщо ж порівняти рис. 3.7 і рис. 3.8, на яких представлені ті ж самі діалогові вікна, але з розкритим списком відношення між лівою та правою частиною обмеження, то можна зробити наступні висновки:

- опція "двоич" для MS Excel 2007 отримала назву "бин" для MS Excel 2010/2013;
- у версіях MS Excel 2010/2013 з'явилася нова опція "раз" - "все разные", яка використовується у цілочислових задачах лінійного програмування для випадку, коли усі цілочислові змінні задачі повинні мати різні значення, наприклад як у відомій задачі комівояжера.

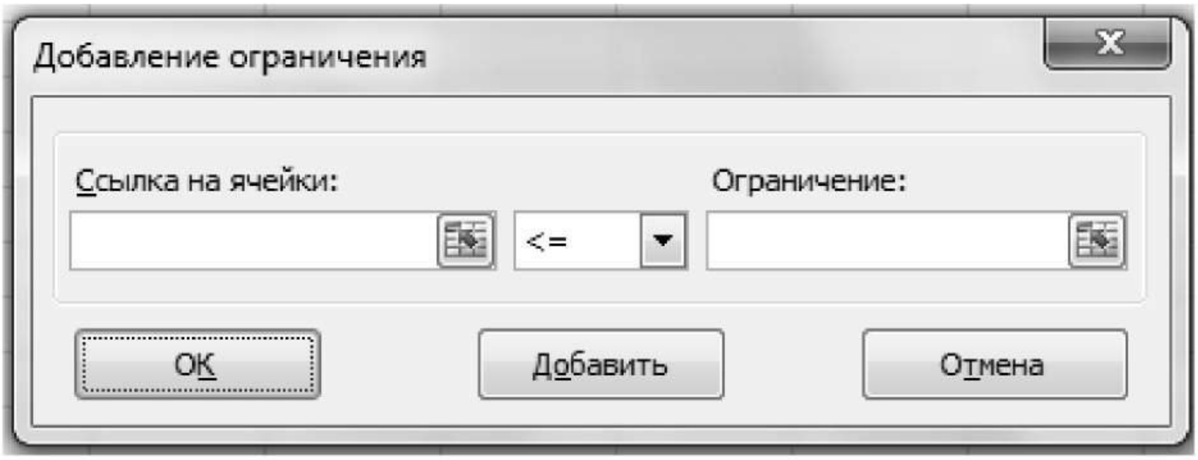


Рис. 3.5. Діалогове вікно **Добавление ограничения** для MS Excel 2010/2013

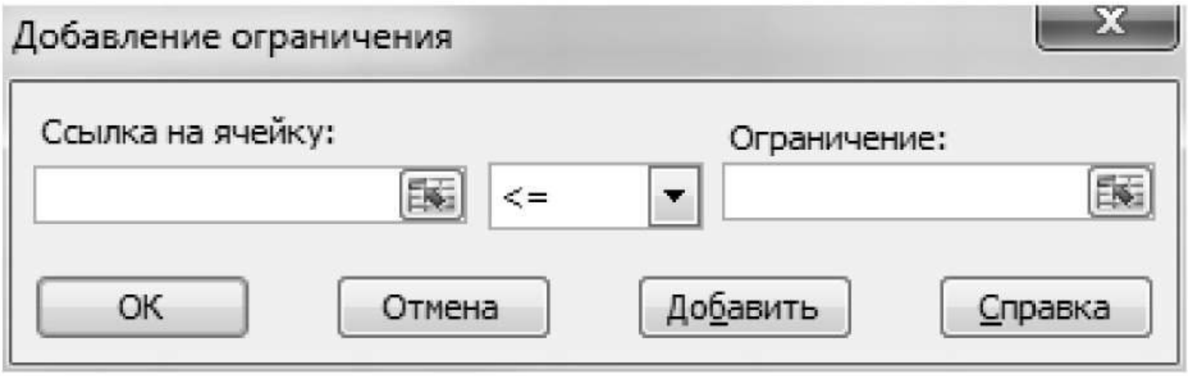


Рис. 3.6. Діалогове вікно **Добавление ограничения** для MS Excel 2007

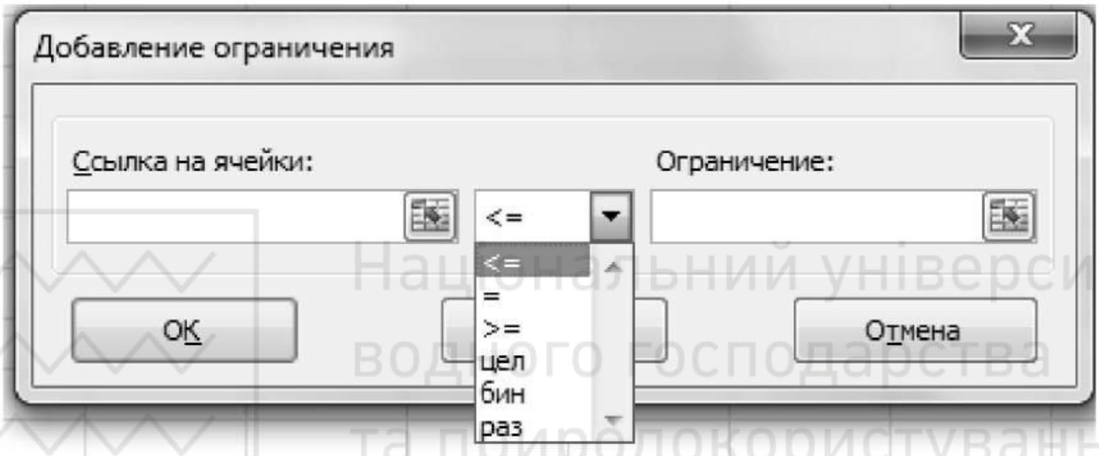


Рис. 3.7. Діалогове вікно **Добавление ограничения** з розкритим списком відношення між лівою і правою частинами обмеження для MS Excel 2010/2013

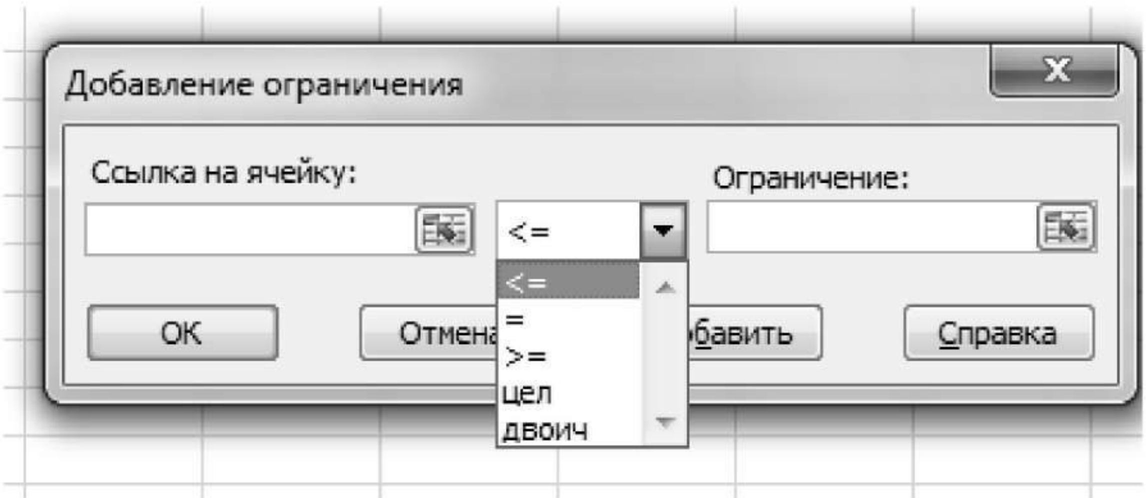


Рис. 3.8. Діалогове вікно **Добавление ограничения** з розкритим списком відношення між лівою і правою частинами обмеження для MS Excel 2007

І наостанок порівняємо для трьох версій табличного процесора MS Excel діалогові вікна інструменту **Поиск решения,** у яких можна задавати додаткові параметри пошуку і які представлені нижче на рис. 3.9 та рис. 3.10 для версій MS Excel 2010/2013 і MS Excel 2007 відповідно.

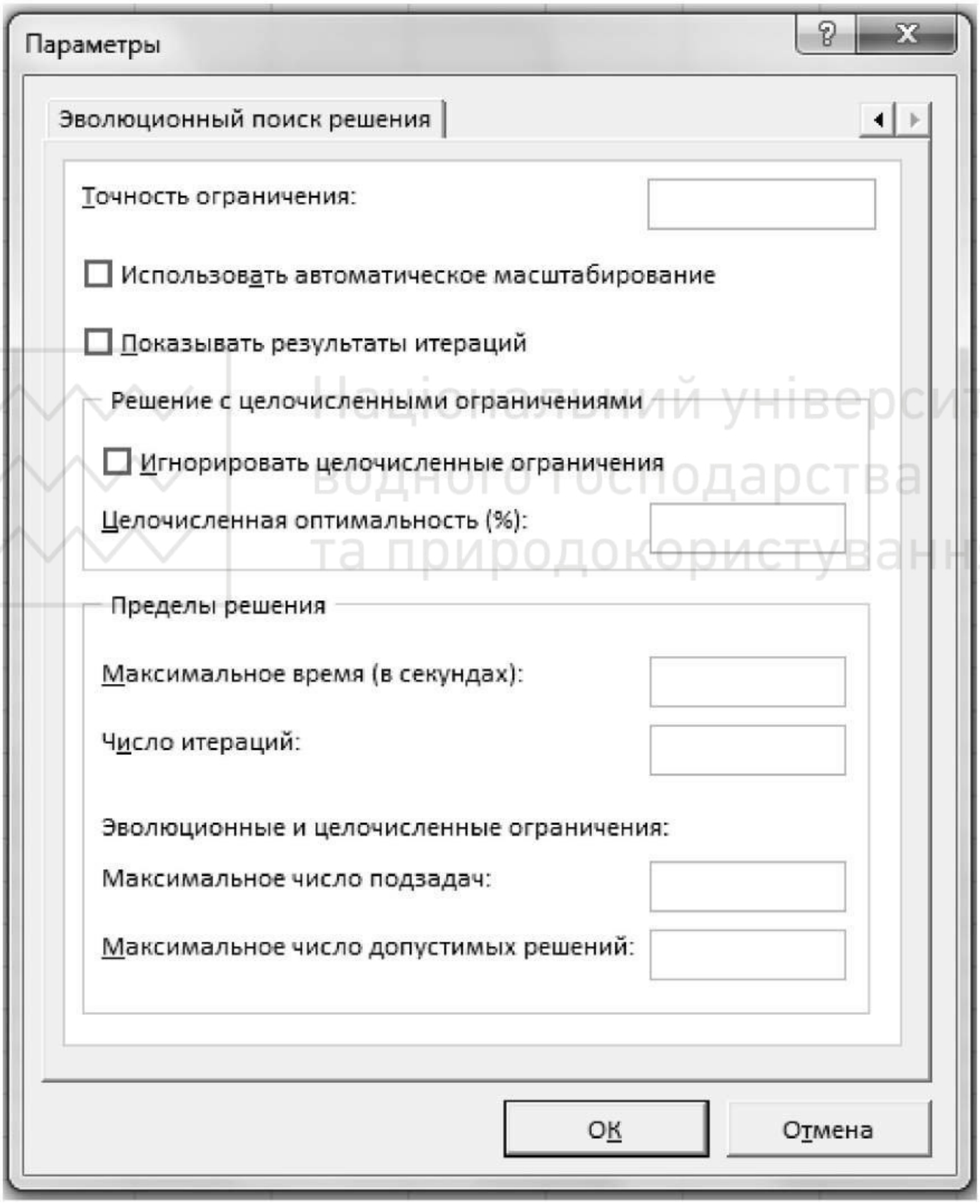


Рис. 3.9. Діалогове вікно **Параметры** для MS Excel 2010/2013

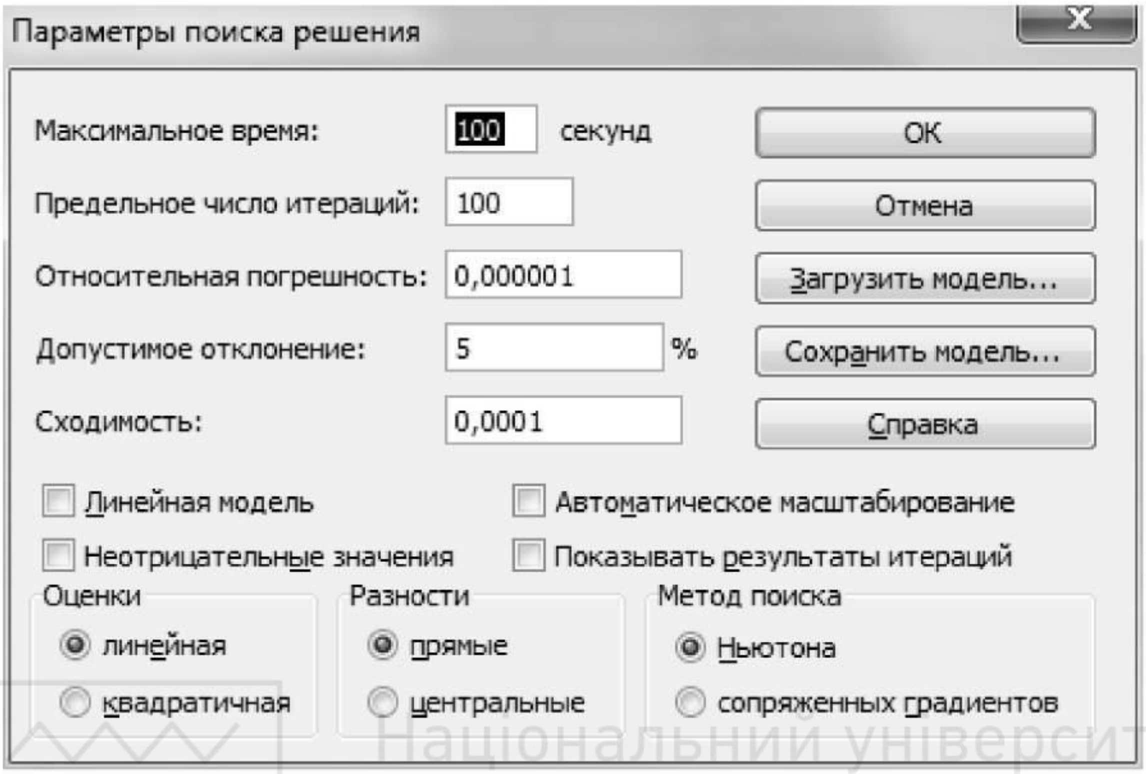


Рис. 3.10. Діалогове вікно **Параметры поиска решения** для MS Excel 2007

Знову ж спочатку розглянемо елементи управління цих двох діалогових вікон, які мають однаковий зміст для усіх трьох версій, хоча і різну назву.

❖ Поле **Точность ограничения:** для MS Excel 2010/2013 є аналогічним за змістом полю **Относительная погрешность:** для MS Excel 2007 (табл. 2.2).

❖ Прапорці **Использовать автоматическое масштабирование** та **Показать результаты итераций** для MS Excel 2010/2013 є аналогічними за змістом прапорцям **Автоматическое масштабирование** та **Показать результаты итераций** для MS Excel 2007 (табл. 2.2).

❖ Поле **Целочисленная оптимальность(%):** для MS Excel 2010/2013 є аналогічним за змістом полю **Допустимое отклонение:** для MS Excel 2007 (табл. 2.2).

❖ Поля **Максимальное время (в секундах):** та **Число итераций:** для MS Excel 2010/2013 є аналогічними за змістом полям **Максимальное время:** та **Предельное число итераций:** для MS Excel 2007 (табл. 2.2).

Що ж стосується відмінностей, то вони є наступними.

❖ По-перше, у діалоговому вікні **Параметры** для MS Excel 2010/2013 з'явився такий елемент як прапорець **Игнорировать целочисленные ограничения,** який дозволяє ігнорувати умови цілочисельності розв'язку.

❖ По-друге, у діалоговому вікні **Параметры** для MS Excel 2010/2013 з'явилося нове поле і відповідно новий параметр **Максимальное число подзадач:**. Цей параметр використовується тільки в задачах цілочислового програмування і дозволяє обмежити кількість підзадач, а власне і сам процес гілкування, у методі гілок і меж, який як раз і реалізовано в інструменті **Поиск решения** для цілочислових задач.

❖ По-третє, у діалоговому вікні **Параметры** для MS Excel 2010/2013 також з'явилося ще одне нове поле **Максимальное число допустимых решений:**. Це поле використовується тільки в суттєво нелінійних задачах, для розв'язання яких використовується еволюційний пошук розв'язку. Як вже зазначалося вище, в процесі пошуку оптимального розв'язку цей метод генерує десятки і сотні допустимих розв'язків. Параметр **Максимальное число допустимых решений:** дозволяє обмежити кількість допустимих розв'язків і відповідно зменшити обсяги обчислень та й сам час для пошуку оптимального розв'язку.

Слід також зазначити, що у діалоговому вікні **Параметры** для MS Excel 2010/2013 також відсутні такі елементи діалогового вікна **Параметры поиска решения** MS Excel 2007 як поле **Сходимость:**, групи кнопок-перемикачів **Оценки**, **Разности**, **Метод поиска** та командні кнопки **Загрузить модель…** і **Сохранить модель…**. Що стосується останніх, то вони, як вже відмічалося вище, перенесені на основне діалогове вікно інструменту **Поиск решения** (рис. 3.3), а групи кнопок-перемикачів **Оценки**, **Разности**, **Метод поиска** безпосередньо інтегровані в методи пошуку, наведені також в основному діалоговому вікні інструменту **Поиск решения** (рис. 3.3).

Додаток 1

Таблиця F-розподілу для α=0,05

ν_2	ν_1								
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	1,94	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,82	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39

ν_1 **= m** , ν_2 **= n-k** , **m**- кількість факторів (пояснюючих змінних), **n** – кількість спостережень, **k** – кількість параметрів моделі.

Додаток 2

Таблиця t-розподілу Ст'юдента

ν	**Рівень значимості α** (для двостороннього тесту)						
	0,50	**0,20**	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,3
2	0,861	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,210
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,93
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552

ν = n-k, n – кількість спостережень, **k –** кількість параметрів моделі.

Додаток 3

Критичні точки розподілу x^2

Ступінь вільності df	**Довірча імовірність p**					
	0,99	**0,975**	**0,95**	**0,05**	**0,025**	**0,01**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,001	0,0002
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,62I
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872

$df = \frac{1}{2} m(m-1)$**,** де **m** - кількість факторів (пояснюючих змінних).

Додаток 4

DW-статистика Дарбіна-Уотсона.
Критичні точки d_L і d_U при рівні значимості $\alpha = 0,05$

Число спостережень **n**	**Число факторів**							
	m=1		**m=2**		**m=3**		**m=4**	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	---	---	---	---	---	---
7	0,70	1,36	0,47	1,90	---	---	---	---
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29	---	---
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13	0,30	2,59
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02	0,38	2,41

Додаток 5

Таблиця стандартизованого нормального розподілу
(функція Лапласа)

u	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0239	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0478	,0517	,0557	,0596	,0636	,0675	,0714	,0753
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1331	,1368	,1406	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1844	,1879
0,5	,1915	,1950	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157	,2190	,2224
0,6	,2257	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2517	,2549
0,7	,2580	,2611	,2642	,2673	,2704	,2734	,2764	,2794	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2939	,2967	,2995	,3023	,3051	,3078	,3106	,3133
0,9	,3150	,3186	,3212	,3238	,3264	,3289	,3315	,3340	,3365	,3389
1,0	,3413	,3438	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3577	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3708	,3729	,3749	,3770	,3790	,3810	,3830
1,2	,3849	,3869	,3888	,3907	,3925	,3944	,3962	,3980	,3997	,4015
1,3	,4032	,4049	,4066	,4082	,4099	,4115	,4131	,4147	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4251	,4265	,4279	,4292	,4306	,4319
1,5	,4332	,4345	,4357	,4370	,4382	,4394	,4406	,4418	,4429	,4441
1,6	,4452	,4463	,4474	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4545
1,7	,4554	,4564	,4573	,4582	,4591	,4599	,4608	,4616	,4625	,4633
1,8	,4611	,4649	,4656	,4664	,4671	,4678	,4686	,4693	,4699	,4706
1,9	,4713	,4719	,4726	,4732	,4738	,4744	,4750	,4756	,4761	,4767
2,0	,4772	,4778	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4808	,4812	,4817

ЛІТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое програмирование в примерах и задачах : учеб. пособ. / И.Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1986.– 319 с.
2. Бородич С.А. Эконометрика : учеб. пособ. / С.А. Бородич. –Мн.: Новое знание, 2001.– 408 с.
3. Бредюк В.І. Дослідження операцій. Приклади і задач : навч. посіб. / В.І. Бредюк. – Рівне : НУВГП, 2009. – 270 с.
4. Бредюк В.І. Економетрія : інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни. / В.І. Бредюк. – Рівне : НУВГП, 2006. – 140 с.
5. Гришин А.Ф. Статистические модели в економике : учеб. пособ. / А.Ф. Гришин, С.Ф. Котов–Дарти, В.Н. Ягунов. – Ростов н/Д : „Фенікс”, 2005. – 344 с.
6. Доугерти К. Введение в економетрику : учеб. пособ. / К. Доугерти. – М.: ИНФРА, 2001. – 402 с.
7. Excel для экономистов и менеджеров : учеб. пособ. / [А.Г. Дубина, С.С. Орлова, И.Ю. Шубина и др.]. - СПб.: Питер, 2004. – 295 с.
8. Замков О.О. Математические методы в економике : учебник. / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство „ДИС”, 1998. – 368 с.
9. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию : учеб. пособ. / И.Л. Калихман. – М.: „Высш. школа”, 1975. – 270 с.
10. Кучма М.І. Математичне програмування: приклади і задачі : навч. посіб. / М.І. Кучма. – Львів: „Новий світ–2000”, 2007. – 344с.
11. Лук’яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика : підручник. / І.Г. Лук’яненко, Л.І. Краснікова. – Київ: товариство „Знання”, КОО, 1998. – 494 с.
12. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel : учеб. пособ. / А.А. Минько. – М.: Издательский дом „Вильямс”, 2004. – 448 с.
13. Мур Д., Уэдерфорд Л. Экономическое моделирование в Microsoft Excel : учеб. пособ. / Д. Мур, Л. Уэдерфорд. – 6-е изд. – М. : Издательский дом „Вильямс”, 2004. – 1024 с.
14. Наконечний С.І. Економетрія : підручник. / С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – Київ : КНЕУ, 2000. – 296 с.
15. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. / С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2003. – 452 с.

16. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL : учеб. пособ. / И.В. Орлова. – М.: ЗАО „Финстатистика”, 2000. – 136 с.
17. Сигел Э. Практическая бизнес-статистика : учеб. пособ. / Э. Сигел. – М.: Издательский дом „ Вильямс”, 2002.– 1056 с.
18. Таха Х. А. Введение в исследование операцій : учеб. пособ. / Х.А. Таха. – 7-е изд. – М.: Издательский дом „Вильямс”, 2005. – 912 с.
19. Gujarati D.N. Basic Econometrics. New York: McGraw-Hill, 1995, 838 p.
20. Веб-сайт компанії Frontline System www.solver.com.