Проф. С. П. ТИМОШЕНКО

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІЯЛІВ

ДЕРЖТЕХВИДАВ УКРАЇНИ

2400

Проф. С. П. ТИМОШЕНКО

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ОПОРУ МАТЕРІЯЛІВ

ПЕРЕКЛАД З ЧЕТВЕРТОГО РОСІЙСЬКОГО ВИДАННЯ
ЗА РЕДАКЦІЄЮ МИК. ЧЕЧЕЛЯ

ДРУГЕ ВИДАННЯ

Методсектор НКО УСРР дозволив до вжитку
як посібник для індустрійних ВИШ'ів

ДЕРЖТЕХВИДАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВ 1931 ОДЕСА

Бібліографічний опис цього видання вміщено
в „Літопису Українського Друку“, „Картковому
репертуарі“ та інших покажчиках Української
Книжкової Палати

„УКРПОЛІГРАФОБ'ЄДНАННЯ“

ЧЕТВЕРТА ДЕРЖДРУКАРНЯ
ім. К. Маркса
Одеса, Стурдзівський зав., 3а

Травень 1931

Одеський Міськліт № 618 Зам. № 2753 10000 прим.

$16^1/_2$ арк. (ОСТ 364А5)

ПЕРЕДМОВА ДО ЧЕТВЕРТОГО ВИДАННЯ

Збірник задач з опору матеріялів виходить у цьому виданні у виправленому вигляді, але без ніяких змін у суті, порівняно до попереднього третього видання.

ПЕРЕДМОВА ДО ТРЕТЬОГО ВИДАННЯ

Третє видання збірника задач з опору матеріялів виходить із значними змінами й додатками. У цьому виданні сполучено дві частини збірника, що в попередніх виданнях виходили окремими випусками. При тому порядок розділів і позначення змінено відповідно до друкованого видання нашого курсу опору матеріялів.

Досвід показав, що перші практичні зайняття з опору матеріялів доводиться присвячувати питанням статики, а через це ми вважали за доцільне дати кілька задач із цієї галузі й вмістили їх у першому розділі збірника. При тому ми обмежились найпростішими прикладами визначення опорних реакцій і обчислення зусиль у стрижневих системах. Складання повнішого збірника вправ із статики не входило в наше завдання.

Надаючи великої ваги розв'язанню числових прикладів до кінця, до одержання числового результату з завданою точністю, ми, щоб полегшити досягнення цього, вмістили наприкінці збірника кілька математичних таблиць, таблиці найголовніших профілів російського нормального сортаменту, а також ті таблиці, що полегшують добирати поперечча двотетових трямів. Крім цих найголовніших додатків, є ще деякі додатки в інших розділах збірника. Збільшено число задач третього розділу, присвяченого головно розрахункові гнучких ниток. У шостому розділі, присвяченому згинові трямів, додано низку задач щодо дослідження впливу дотичних напруг на прогин трямів, розглянуто кілька нових задач на розрахунок трямів із зайвими закріпленнями, на розрахунок штивних рам і трямів, що лежать на суцільній пружній основі.

При підготові цього видання мені багато допомогли викладачі інституту інженерів шляхів сполучення К. А. Чалишев, що перевірив розв'язання задач VII—IX розділів збірника, і Р. Б. Куровський, що прочитав коректу й виправив при тому чимало помилок. Цим особам я висловлюю тут глибоку подяку за сприяння й допомогу при підготуванні видання.

Петроград,
29. січня 1915. р.

С. П. Тимошенко

приємний обов'язок висловити тут цим особам глибоку подяку за допомогу при організації зайнять і при складанні цього збірника.

Більшість задач, уміщених у збірнику, має розв'язання або короткі вказівки на хід розв'язання. Гадаю, що це дасть змогу студентам набути звичку розв'язувати задачі й таким чином поповнити недостачу в кількості тих годин, що їх дається для авдиторних зайнять. Бажання випустити задачника до весняних іспитів примушує поквапитись трохи з виданням, і це не дало мені змоги старанно перевірити розв'язання й відповіді вміщених у збірнику задач. Усякі вказівки на помилки, пропуски й бажані додатки я прийму з вдячністю й подбаю використати їх у дальших виданнях.

Нарешті, вважаю за свій приємний обов'язок висловити подяку інженерові Колобову й студентові інженерного відділу К. А. Чалишеву за складання й перевірку розв'язань задач, студентам — С. Г. Єстріну за вонання рисунків для цього видання й читання коректи, П. Є. Добровольському й П. Є. Зайончковському за переписування.

15. березня 1910. р.
Київ

С. П. Тимошенко

ПРО НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ

У технічних задачах нас цікавить, звичайно, не процес обчислень, а їх результати; через це треба намагатись одержати цей результат з якнайменшою витратою часу й праці. Шукані величини технічних обчислень звичайно визначають для того, щоб потім за ними щось зробити, а всяке технічне виконання зв'язане з неточністю. Для різних виробів практика встановила ту граничну величину помилок, що при них вироби вважають ще за придатні. А що технічне виконання не точне, а лише наближене, то, очевидно, не треба намагатись одержати при обчисленнях абсолютно точний результат; можна зробити скорочення, обчислювати свідомо не точно, а лише наближено, лише треба точність обчислень погодити з потрібною для прикладань точністю результату. Розгляньмо тепер, чим визначається точність і як впливають на точність результату різні аритметичні дії, що їх роблять з запевно неточними числами.

Якщо якунебудь величину знають не точно, то різницю між її наближеною вартістю і справжньою величиною звуть „абсолютною помилкою", а відношення абсолютної помилки до самої величини звуть „відносною помилкою". Очевидно, що вартість відносної помилки цілком характеризує точність, з якою ми знаємо ту або ту величину. У більшості технічних завдань точности в $^1/_{1000}$ цілком вистачає. Часом точність визначають відсотками. Коли знати величину з точністю до $^1/_2$%, то це означає, що відносна помилка $\lesssim {}^1/_{200}$. Ті числа, що відомі не точно, а лише наближено, пишуть так, щоб з самого напису було видно точність, а саме: пишуть лише певні цифри й першу непевну, при тому непевна цифра може відрізнятись від певної на одиницю в той або той бік. Коли, напр., число 2725605 ми знаємо з точністю до $^1/_2$%, то будемо писати його так: $273 \,.\, 10^4$; коли число 27 ми визначили з точністю до $\frac{1}{10000}$, то його треба написати так: 27,000.

Додавання. Коли ми маємо низку чисел N_1, N_2, N_3,..., їхні абсолютні помилки $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, а відносні

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{N_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{N_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{N_3}, \tag{I}$$

то не важко показати, що відносна помилка ε їхньої суми буде міститись між найбільшою й найменшою вартостями [I]. Справді бо: відносна помилка суми буде:

$$\frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots}{N_1 + N_2 + N_3 + \ldots}. \tag{II}$$

Її показано відношенням суми числівників дробів до суми їхніх знаменників. На величину це відношення, очевидно, міститься між найбільшим і найменшим з дробів [I]. З цього робимо висновок, що, коли всі додатники мають певне число правдивих знаків, то стільки саме правдивих знаків буде мати й їхня сума. Зауважмо, що однакову кількість знаків треба мати в усіх додатниках лише тоді, коли вони приблизно однакові на величину. Коли ж ми маємо, припустімо, такі числа: 2173,1; 13,582; 1,0042, то не треба робити так:

$$\begin{array}{r} 2173{,}1 \\ 13{,}582 \\ 1{,}0042 \\ \hline 2187{,}6862 \end{array}$$

Останні три цифри суми, очевидно, не можуть бути правдиві, і їх не треба писати; тоді дія додавання буде така:

$$\begin{array}{r} 2173{,}1 \\ 13{,}6 \\ 1{,}0 \\ \hline 2187{,}7 \end{array}$$

Отже, для додавання чисел різної величини пишемо найбільший додатник, під ним підписуємо решту, залишивши лише стільки десяткових знаків, скільки їх є в найбільшому додатнику.

Множення. При множенні відносна помилка добутку дорівнює сумі відносних помилок чинників. Справді бо: нехай N_1 і N_2 є два чинники, ε_1 і ε_2 — їхні відносні помилки. Отже, правдиві вартості чинників будуть такі:

$$N'_1 = N_1 (1 + \varepsilon_1) \quad \text{i} \quad N'_2 = N_2 (1 + \varepsilon_2),$$

правдива вартість добутку буде така:

$$N'_1 N'_2 = N_1 N_2 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2);$$

а що доводиться мати діло з малими похибками, то величину $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ можна знехтувати, і тоді матимемо:

$$N'_1 N'_2 = N_1 N_2 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

отже,

$$\frac{N'_1 N'_2 - N_1 N_2}{N_1 N_2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Це потверджує згадане вище твердження. Коли один чинник ми знаємо з точністю до 1%, а другий — до 2%, то добуток знайдемо з точністю до 3%.

Ділення. Припустім, що нам треба поділити $N_1 : N_2$. Правдиві вартості діленика й ділителя нехай будуть $N'_1 = N_1 (1 + \varepsilon)$, $N'_2 = N_2 (1 + \varepsilon_2)$; тоді правдива вартість частки буде (коли відкинути малі вищих порядків) така:

$$\frac{N'_1}{N'} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} (1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

отже, при діленні відносні помилки діленика й ділителя віднімають. З цього не можна зробити висновку, що точність частки вища, ніж точність діленика, бо помилки ε_1 і ε_2 можуть бути протилежного знаку, отже, при відніманні доведеться додати їхні абсолютні вартості. Коли діленик і ділитель відомі з точністю до $^1/_2$%, то частку матимемо з точністю до 1%.

Степенювання й корінювання. Припустім, що треба знайти $(N_1)^p$, де показчик може бути ціле й дробове число. Доведім, що при степенюванні відносна помилка множиться на показчика степеня. Нехай ε_1 буде відносна помилка числа N_1; тоді правдива вартість шуканої величини буде:

$$(N_1')^p=[N_1(1+\varepsilon_1)]^p=N_1^p(1+\varepsilon_1)^p=N_1^p\left[1+p\varepsilon_1+\frac{p(p-1)}{1.2}\varepsilon_1^2+\cdots\right],$$

або, нехтуючи вищими степенями малих величин, знайдемо:

$$(N_1')^p=N_1^p(1+p\varepsilon_1).$$

Відносна помилка результату буде:

$$\frac{(N_1')^p-(N_1)^p}{(N_1)^p}=p\varepsilon_1.$$

Це доводить висловлене вище твердження. Коли те число, що відоме нам з точністю до 1%, підведемо до квадрату, то точність результату буде 2%. Коли з того ж таки числа добудемо корінь кубічний, то точність результату буде $^1/_3$%.

Зробім тут одне важливе зауваження. У порадниках звичайно дають квадрати й куби чисел від 1 до 1000. Користуючись цими таблицями, не треба виписувати зайвих цифер. Припустім, що треба обчислити $(372)^3$; через те, що, за нашою умовою щодо писання запевно неточних чисел, за одиницю останнього знаку ручитись не можна, то правдива вартість шуканої величини лежить у границях $(371)^3=51064811$ і $(373)^3=51895117$. Ми бачимо, що різниця є вже в третьому знаку, отже, для величини $(372)^3$ не треба виписувати восьмизначного числа з таблиць, а треба взяти лише три значні цифри й решту додати нулями; отже, $(372)^3=515.10^5$.

Для прикладу розв'яжім такі завдання:

1) З якою точністю визначено площу круга діяметра 2 *см*, коли при вимірювані діяметра можлива помилка, що не перевищує $^1/_{10}$ *мм*, а величину π взято рівну 3,14?

Відносна помилка визначення діяметра буде:

$$\varepsilon_1=\frac{0,1}{20}=\frac{1}{200}.$$

При підведенні до квадрату відносна помилка результату подвоїться, отже, дорівнюватиме $^1/_{100}$. Величину π взято з трьома знаками, а відносна помилка менша від $^1/_{100}$. Помилка при обчисленні площі круга за формулою $S=\frac{\pi d^2}{4}$, буде менша від

$$\frac{1}{300}+\frac{1}{100}=\frac{4}{300}, \quad \text{тобто} < 1^1/_3\%.$$

2) Резервуар кубічної форми повинен мати довжину рубів рівну 1 *м.* При виготовленні можлива помилка в довжині рубів на 1 *мм*. Яка може бути помилка в обсягу?

Відносна помилка в довжині рубів буде $^1/_{1000}$, при підведенні до куба помилка потроїться, отже, відносна помилка обсягу буде $^3/_{1000}$; абсолютна помилка дорівнює

$$1\ м^3\cdot\frac{3}{1000}=3\ дм^3, \text{ або 3 літрам.}$$

Віднімання. Надто невигідна дія при наближених обчисленнях є віднімання в тому випадку, коли дію доводиться робити з такими числами, що близькі на величину. Нехай дано числа 21,37 і 21,12. Кожне число має чотири знаки, і помилка не перевищує одиниці останнього знаку, отже, для кожного числа відносна помилка буде $< ^1/_{2000}$. У різниці цих чисел 0,25 можлива помилка на дві одиниці останнього знаку, отже, відносна помилка результату буде $^2/_{25}$ — в 160 разів більша, ніж відносні помилки зменшеника й від'ємника. Це примушує по змоз уникати при обчисленні таких формул, куди входить різниця близьких на вели чину чисел. Звичайно, можна визначити різницю двох величин безпосередньо перетворенням формул, не обчисляючи самих величин.

Для прикладу обчислім площу S вузького персня, що міститься між двома концентричними кругами радіюсів R і $R+\delta$. Коли б ми обчисляли S за формулою

$$S=\pi(R+\delta)^2-\pi R^2,$$

то відносна помилка результату була б у багато разів більша за відносну помилку зменшеника й від'ємника. Краще шукану площу S обчислити не як різницю площ двох кругів, а безпосередньо за формулою: $S=2\pi R\delta$.

Логаритми. Відносно користування логаритмами зауважмо, що, визначаючи числа за логаритмами, можна в числі мати стільки правдивих знаків, скільки їх є в мантисі логаритма. З цього виходить правило: при обчисленнях користуватись логаритмами з такою кількістю знаків, яка кількість правдивих цифер є для обчислення числа. Для більшости технічних обчислень досить чотиризначних таблиць, часто можна обмежуватись трьома знаками й заміняти таблиці логаритмічною лінійкою.

РОЗДІЛ I

ЗАДАЧІ З СТАТИКИ

1. Циліндрична колона важить 1 *т* й тримає обтяження $P=2$ *т*. 1) Знайдіть тиск колони на фундамент. 2) Знайдіть стискове зусилля, що чинить на попереччя *mn* (рис. 1).

Рис. 1

Рис. 2

2. Залютовану на кінцях трубку середового діяметра $d=5$ *см* стиснуто двома протилежними силами $P=1000$ *кг*. Яке подовжне стискне зусилля в стінках трубки, коли її наповнено повітрям, стиснутим до 50 *атм*.?

Відповідь. Стискне зусилля дорівнює $\left(P-49\frac{\pi d^2}{4}\right)$ *кг*.

3. Заправлену в мур штабу можна витягти, подолавши силу тертя. Потрібна для цього сила *P* дорівнює 1 *т*. Опір тертя маліє в напрямі від *B* до *A* за лінійним законом і в *A* обертається в нуль. Знайдіть розтяжне зусилля в поперечці *mn*.

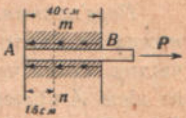


Рис. 3

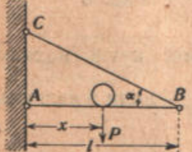


Рис. 4

4. Горизонтального тряма підойми (ґранта) закріплено суставами в точці *A* й підтримується в точці *B* за допомогою стрижня *BC* (рис. 4). Як міниться зусилля в стрижні *BC* від пересування тягара *P* по тряму? При якому положенні тягара це зусилля maximum?

Відповідь. $T=\frac{Px}{l\sin\alpha}$.

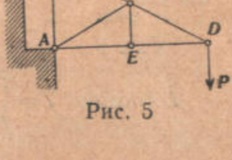


Рис. 5

5. Стрижнева система *ABD* (рис. 5), що прикріплена до стіни за допомогою сустава *A* й горизонтального стрижня *BC*, тримає тягара

$P = 1$ *т*. Доведіть, що при цьому зусилля в стрижнях *AF* і *FE* дорівнюють нулеві. Знайдіть графічно зусилля в стрижні *AE*.

6. Знайдіть зусилля в стрижнях *1* і *2* для випадків, змальованих на рис. 6*a*, 6*b* й 6*c*.

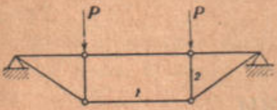


Рис. 6*a*

Рис. 6*b*

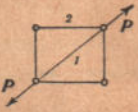


Рис. 6*c*

7. Знайдіть ті стрижні, в яких при зазначеному на рис. 7 тягарі зусилля дорівнюють нулеві.

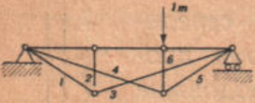


Рис. 7

Відповідь. Ненапружені стрижні будуть *1, 2, 3.*

Визначаючи нульові зусилля в тих випадках, коли сили прикладено у вузлах, зручно користуватись такими зауваженнями:

а) Коли в необтяженому вузлі сходяться три стрижні, з яких два лежать на одній простій, то й у третьому зусилля повинно дорівнювати нулеві. b) Коли в необтяженому вузлі сходяться лише два стрижні, що не лежать на одній простій, то в обох стрижнях зусилля дорівнюватимуть нулеві.

8. Визначте зусилля в стрижні *3* (рис. 8).

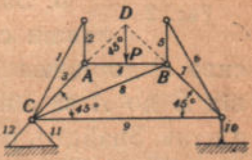


Рис. 8

Розв'язання. Стрижні *1, 2, 5* і *6* не напружені, і їх можна відкинути, не порушивши умов рівноваги решти частин. Таким чином ми дійдемо до стрижня *AB*, якого на кінці *A* підперто стрижнем *3* і в точці *B* стрижнями *7* і *8*. Реакція *A*, що її викликає сила *P*, очевидно спрямована по *AC* й перетинає *P* в точці *D*; в цю точку повинна йти й реакція *B*. При взятій на рисунку величині кутів нахилу стрижнів *3* і *7* реакції *A* й *B* дорівнюють $\frac{P}{\sqrt{2}}$ — вони й являють собою шукані зусилля в стрижнях *3* й *7*.

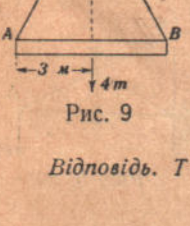


Рис. 9

9. Призматичного стрижня *AB*, що важить 4 *т* й має довжину 6 *м*, почеплено до точки *O* на двох шнурах *AO* й *OB* завдовжки 5 *м*. Знайдіть натяг шнурів *T*.

Відповідь. $T = \frac{5}{2}$ *т*.

10. Кривого бруса AB закріплено в поперечці mn. Від чину сили P в площі закріплення виникають реакції, що стримують бруса AB в рівновазі.

Знайдіть величину, напрям і точку прикладання вислідної цих реакцій.

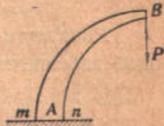


Рис. 10

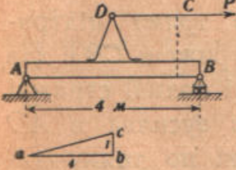


Рис. 11

11. Катеринку закріплено на трямі AB (рис. 11), що закріплений суставом у точці A й підпертий котком у точці B. Визначте опорні реакції від натягу шнура силою P, рівною 4 m.

Відповідь. Реакція A дорівнює $\sqrt{17m}$, $B = 1$ m.

12. Зáставку AB зазначених на рис. 12 розмірів закріплено суставом у точці A й підперто стрижнем BC, що зазнає тиску води завглибшки $h = 3$ *м*. Знайдіть графічно реакцію A й зусилля в BC.

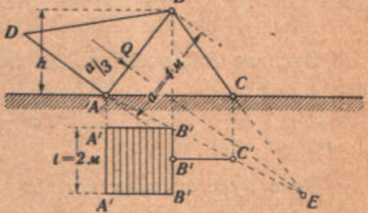


Рис. 12

Розв'язання. На основі гідростатичного закону, тиск змалюється вагою Q триграначастої призми з основою $\triangle ABD = 6$ $м^2$ і височиною $l = 2$ *м*. Сила $Q = 12$ m буде $\perp AB$ й переходить на віддалі $\frac{1}{3}a$ від точки A. З умов рівноваги робимо висновок, що напрями BC, Q й реакція A повинні перетинатися в точці E.

13. Споруду $ABCD$ прикріплено до землі трьома стрижнями AE, AF і FD. Знайдіть графічно зусилля T в стрижні AE, коли на споруду чинить горизонтальна сила P.

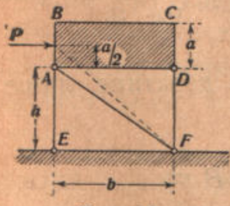


Рис. 13

Відповідь З тої умови, що напрями AE, P й реакція F повинні перетинатись в одній точці, робимо висновок:

$$T : P = \left(h + \frac{a}{2}\right) : b.$$

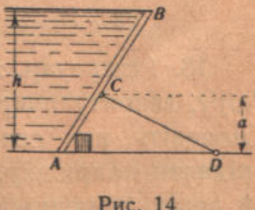


Рис. 14

14. Зáставка AB, що вільно спирається в точці A й закріплена суставом в C, зазнає тиску води завглибшки h. Покажіть ту граничну вартість h, що при ній за́ставка ще не повертається. (Власною вагою за́ставки нехтуємо).

Розв'язання. Із зазначеного в задачі 12-ій робимо висновок, що для того, щоб забезпечити рівновагу заставки, треба зберегти нерівність $h < 3a$.

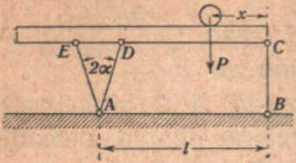


Рис. 15

15. Горизонтального тряма підтримують вертикальний стрижень CB й два симетрично розташовані похилі стрижні AE й AD. Як міняться зусилля в AD й BC при переміщенні по тряму тягара P?

Розв'язання. Реакція A дорівнює $\frac{P.x}{l}$. Розклавши її на напрями AE й DA, знайдемо стискне зусилля

$$AD = AE = \frac{Px}{2l\cos\alpha}.$$

Зусилля BC, очевидно, дорівнює:

$$P - \frac{Px}{l} = \frac{P(l-x)}{l}.$$

Воно буде стискне, коли $x < l$, і розтяжне в противному випадку.

16. Покажіть, що від чину на трям AB вертикальних тягарів в нахилому стрижні CE зусилля дорівнює нулеві.

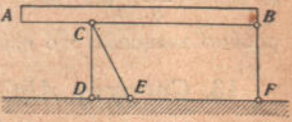


Рис. 16

17. До кінця B тряму AB прикладено пару сил $M = 1$ *тм*. Знайдіть опорні реакції в A й C, коли опору C влаштовано так, що вона даватиме лише вертикальні реакції.

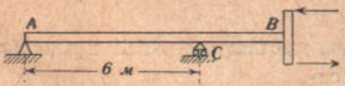


Рис. 17

Відповідь. $A = -C = 250$ *кг*.

18. Резервуар, наллятий до рівня 3 *м* водою, має в дні круглу діру, закриту покришкою AB, закріпленою суставом в A (рис. 18). Доведіть, що сила P, з якою треба тягти шнурка BC, щоб підняти покришку, буде між 17,9 *кг* і 21,1 *кг*. Тертям у суставі й вагою покришки нехтуємо.

Розв'язання. Різниця тисків на обидва боки покришки AB може хитатися в межах:

$$\text{від } \frac{\pi.12^2}{4}\cdot 0{,}3\,\kappa\varepsilon = 33{,}9\,\kappa\varepsilon \text{ до } \frac{\pi.13^2}{4}\cdot 0{,}3\,\kappa\varepsilon = 39{,}8\,\kappa\varepsilon.$$

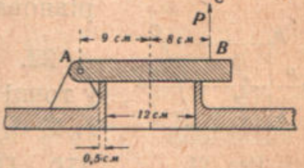


Рис. 18

Ця невизначність є результат невизначности тисків по опорній перстеневій поверхні дотикання покришки до країв діри.

Сила P хитається в межах від $\frac{33{,}9.9}{17} = 17{,}9\,\kappa\varepsilon$ до

$$\frac{39{,}8.9}{17} = 21{,}1\,\kappa\varepsilon.$$

19. Зв'язня BDE в точці E підперто котком, а в B й D підтримується нахилими стрижнями AB й DC. Знайдіть реакцію E від дії вертикальної сили $P = 7{,}5\ m$.

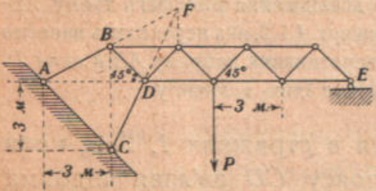


Рис. 19

Розв'язання. Через те, що реакція E вертикальна, вислідна зусиль AB й CD, що переходить через точку їх перетинання F, також повинна бути вертикальна. Її лінія чину при завданих розмірах буде на віддалі $3 + 3 + 1{,}7 = 7{,}5$ *м* від тої вертикалі, що переходить через E; отже, величина цієї сили дорівнюють $\frac{P.6}{7{,}5} = 6\ m$. Реакція E дорівнює $1{,}5\ m$.

20. На гонок AB корбового механізму чинить вертикальна сила $Q = 1\ m$. Яку горизонтальну силу P треба прикласти до поплазня B, щоб утримати механізм у рівновазі? Тертям нехтуємо.

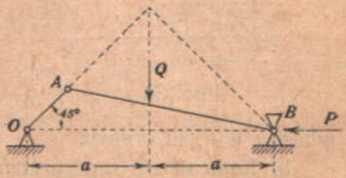


Рис. 20

Розв'язання. Для рівноваги треба, щоб напрям OA, сила Q й реакція в B перетинались в одній точці. При обраному на рис. 20 розташування зусилля в OA й реакція B дорівнюють $\frac{Q}{\sqrt{2}}$. Отже, $P = \frac{Q}{2}$.

21. На суставний механізм $ABCD$ з горизонтальним стрижнем BC чинять дві просто протилежні горизонтальні сили P й Q.

При якому співвідношенні між цими силами механізм матиме рівновагу?

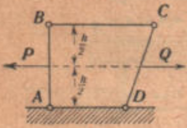


Рис. 21

22. Два трями *AB* й *AC*, злучені суставом у точці *A*, прикріплено до землі чотирма стрижнями *1*, *2*, *3*, *4*. Визначте графічно ті зусилля, що їх викликає в цих стрижнях тягар *P*.

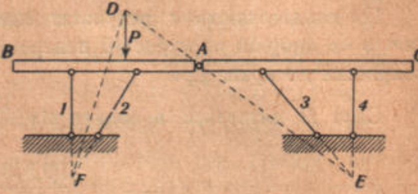


Рис. 22

Розв'язання. На трям *AC* чинить тиск, що передається від тряму *AB* через сустав *A*, й зусилля стрижнів *3* й *4*. Для рівноваги тряму *AC* треба, щоб ці зусилля перетинались в одній точці *E*. Визначивши таким чином напрям *AE* того зусилля, що передається через сустав *A*, переходимо до дослідження рівноваги тряму *AB*. Для рівноваги треба, щоб вислідна зусиль у стрижнях *1* і *2*, яка переходить напевно через точку *F*, перейшла також і через *D*, точку перетинання напряму *AE* й сили *P*. З'ясувавши напрями зусиль, легко знайти графічно їхню величину.

23. Дослідіть, як міняться зусилля в стрижнях *1*, *2*, *3*, коли тягар *P* посувається по горішньому поясу *CD* зв'язня підойми *ABCD*. Як міниться зусилля *2*, коли тягар *P*, що котиться, крім вертикального тиску, буде давати ще й горизонтальне зусилля *Q*?

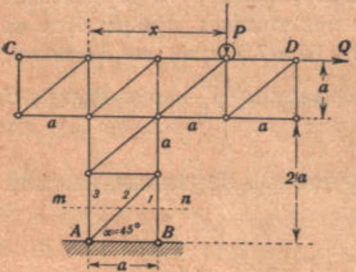


Рис. 23

Розв'язання. a) Перекраявши систему в *mn* і склавши моменти сил, прикладених до верхньої відрізаної частини, відносно *A* й *B*, знайдемо: зусилля *1* дорівнює $-\frac{P.x}{a}$; зусилля *3* дорівнює $+\frac{P(x-a)}{a}$. Ми беремо знак + для розтягу й − для стиску.

b) Коли маємо горизонтальне зусилля *Q*, то, спроєктувавши всі сили, прикладені до верхньої відрізаної частини зв'язня, на горизонтальну вісь, знайдемо, що зусилля в стрижні 2 дорівнює $\frac{Q}{\cos\alpha}=Q.\sqrt{2}$; при зазначеному на рисунку розташуванні це зусилля, очевидно, буде розтяжне.

24. Визначте зусилля в стрижні *1*, коли чинить сила 1 *m* по середині прогону зв'язня (рис. 24).

Розв'язання. Зробім перекрій *mn*, що перетинає 4 стрижні, й розгляньмо рівновагу лівої частини зв'язня. Крім зусиль в чотирьох перекраяних стрижнях, до цієї частини прикладено вертикальну реакцію, що дорівнює $\frac{1}{2}m$. Складім момент усіх цих сил відносно *A* й прирівняймо його до нуля. Позначивши літерою *X* розтяжне зусилля, в стрижні *1*, знайдемо:

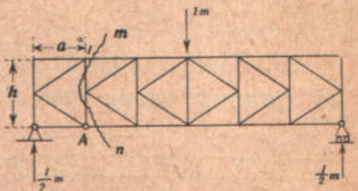


Рис. 24

$$\frac{1}{2}\cdot a + X.h = 0; \quad X = -\frac{a}{2h}\cdot$$

Отже, стрижень *1* стиснутий.

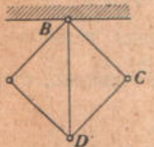


Рис. 25

25. Суставний квадрат *ABCD*, завішений у точці *B*, зберігає свою форму завдяки тому, що є нитка *BD*. Знайдіть натяг цієї нитки, коли вага кожного стрижня, що створюють боки квадрата, дорівнює *q*.

Відповідь. Натяг *BD* дорівнює 2*q*.

26. На нахилих гранях *AB* й *BC* триграначастої призми з основою *ABC* й горизонтальною гранню *AC* покладено два цілком однакові тіла *M* і *N*, зв'язані ниткою, перекинутою через бльок *B*. Коли почати підіймати край призми *C* в той бік, що його показано на рис. 26 стрілкою, то можна досягти такого положення, коли тягар *M* почне спускатись по грані *AB*. Покажіть, що тягар почне рухатись при тому положенні, коли $\angle CAC'$ дорівнюватиме кутові тертя між тілами й нахилими площами.

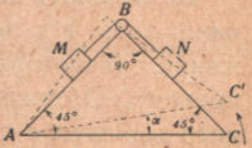


Рис. 26

Розв'язання. Нехай α буде той кут, що його творить грань *AC* з горизонтом у той момент, коли настає змога тягареві *M* ковзатись донизу. Позначмо літерою *f* коефіцієнт тертя й *Q* вагу тягарів. Тоді відповідний натяг нитки на дільниці *MB* буде:

$$Q\sin(45^\circ+\alpha) + fQ\cos(45^\circ+\alpha).$$

Для дільниці *BN* напишемо:

$$Q\cos(45^\circ+\alpha) + fQ\sin(45^\circ+\alpha).$$

А що обидва натяги однакові, то, щоб визначити α, маємо рівняння:

$$\sin(45^\circ+\alpha) - f\cos(45^\circ+\alpha) = \cos(45^\circ+\alpha) + f\sin(45^\circ+\alpha),$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha) - f = 1 + f\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha).$$

Звідси

$$\operatorname{tg} \alpha = f.$$

27. Важка гнучка нитка, почеплена в точках A й B, що лежать на одному рівні, має невеличку стрілку обвисання f. Знайдіть натяг нитки T в поперечці mn, коли подовжинний метр нитки важить q *кг*.

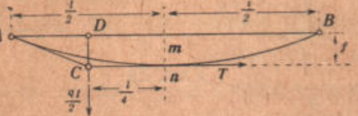


Рис. 27

Розв'язання. Перекраюємо нитку перекроєм mn і розглядаємо умови рівноваги лівої відрізаної частини. При малих обвисаннях можна допустити, що центр тяжіння цієї частини лежить на вертикалі CD на віддалі $\frac{l}{4}$ від поперечця mn. Натяг T, сила ваги $\frac{ql}{2}$ і невідома покищо реакція A повинні перетинатись в одній точці C. Відповідний трикутник сил, очевидно, буде подібний до трикутника ADC. Отже:

$$T : \frac{ql}{2} = \frac{l}{4} : f;$$

звідки

$$T = \frac{ql^2}{8f}.$$

28. Знайдіть для трисуставного лука ABC підпорні реакції, що виникають від чину суцільного обтяження, рівномірно розподіленого по прогону. Обтяження на подовжинний метр дорівнює q *кг*. Як міняться реакції, коли обтяження буде вкривати лише ліву половину прогону?

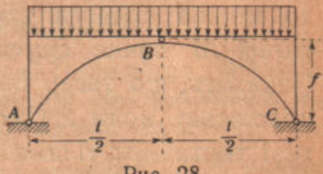


Рис. 28

29. Будуванням шнурового многокутника знайдіть опорні реакції для випадків, що їх змальовано на рисунках 29—37.

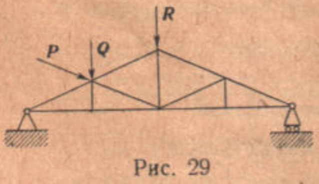


Рис. 29

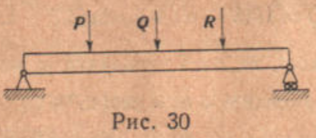


Рис. 30

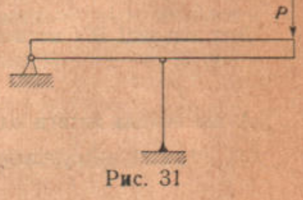


Рис. 31

Рис. 32

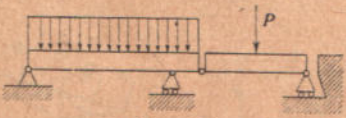


Рис. 33

Рис. 34

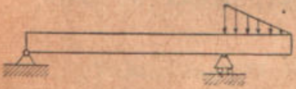


Рис. 35

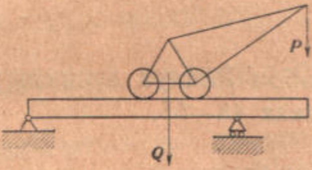


Рис. 36

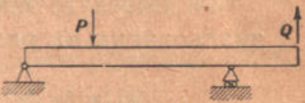


Рис. 37

30. Знайдіть графічно опорні реакції й зусилля в стрижнях *1* і *2* (рис. 38). При яких умовах рівновага системи стає неможлива?

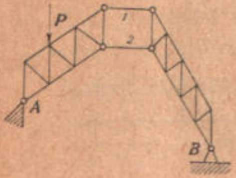


Рис. 38

31. Знайдіть графічно опорні реакції й зусилля в стрижнях для тої системи, що її змальовано на рис. 39.

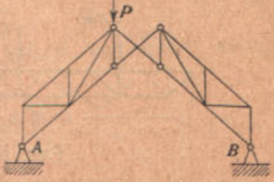


Рис. 39

32. Збудуйте діяграми Кремони для зв'язнів, що їх змальовано на рисунках 40—47.

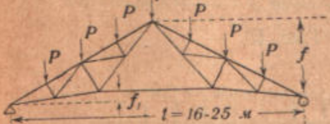


Рис. 40

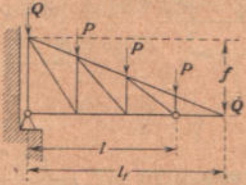


Рис. 41

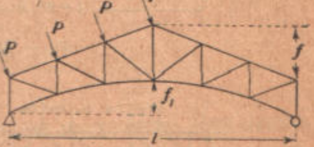


Рис. 42

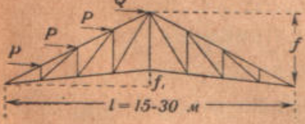


Рис. 43

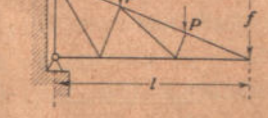


Рис. 44

Рис. 45

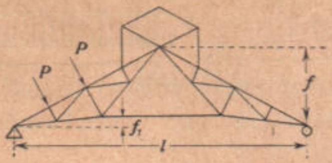


Рис. 46

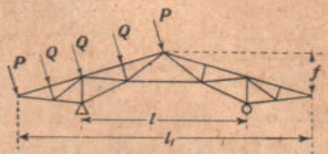


Рис. 47

33. Визначте способом Ріттера зусилля в стрижнях зв'язнів, змальованих на рисунках 48—55.

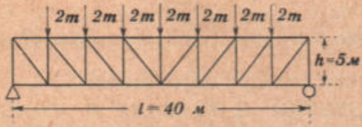


Рис. 48

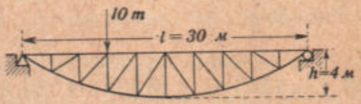


Рис. 49

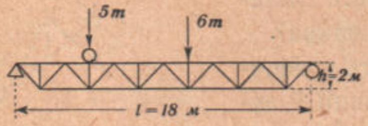


Рис. 50

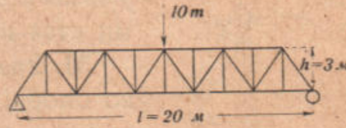


Рис. 51

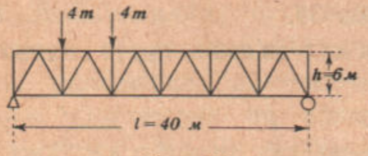


Рис. 52

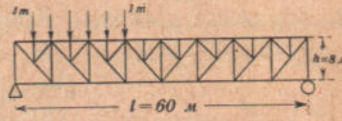


Рис. 53

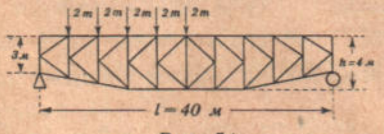


Рис. 54

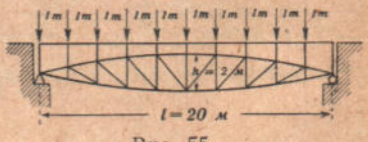


Рис. 55

РОЗДІЛ II

ЗАДАЧІ НА РОЗТЯГ І СТИСК

У всіх задачах припускається, що матеріял підлягає Гуковому законові. Видовження бруса визначає формула:

$$\lambda = \frac{Pl}{EF},$$

де P є розтяжна сила, l — довжина бруса, E — модуль пружности при розтягові й стискові, F — площа попереччя.

У тих задачах, де немає особливих указівок щодо величини модуля пружности, прийнято такі вартості для E:

$$\text{для заліза } E = 2 . 10^6\ кг/см^2;$$

$$\text{для міді } E = 1 . 10^6\ кг/см^2;$$

$$\text{для дерева } E = 1 . 10^5\ кг/см^2.$$

Розраховуючи довгі бруси, треба брати до уваги їхню власну вагу. Площу попереччя визначить формула:

$$F = \frac{P}{R - l\gamma},$$

де R є допускна напруга, а γ — вага одиниці об'єму матеріялу. Для заліза взято $\gamma = 7,6\ г/см^3$. У визначенні температурних напруг коефіцієнт лінійного поширення α для заліза взято 0,0000125, для міді $\alpha = 0,0000165$.

---

34. Гідравлічний гніт системи Амслера, силою 60 *т*, служить для випробовування матеріялів на стиск. 1) Визначте запас міцности двох колон A (рис. 56), зроблених з бесемерівської сталі (тимчасовий опір $R_1 = 4200\ кг/см^2$) і встановної шруби B з ніклевої сталі (тимчасовий опір $R_2 = 8400$ *кг/см*^{2}), коли діяметр колон і шруби $d = 8$ *см*.

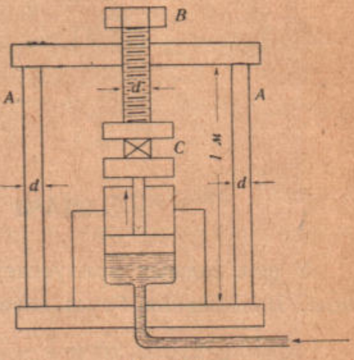


Рис. 56

Розв'язання. Коефіцієнт безпечности

$$n = \frac{2R_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{60000} = \frac{R_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{60000} \cong 7.$$

2) Обчисліть видовження колони *A*, коли кам'яного кубика *C* стиснуто силою 40 *т*.

35. До кронштейна *ABC*, що складається з дерев'яного косяка *BC* й залізного стягля *AB*, почеплено тягара $Q = 4$ *т*. (рис. 57).

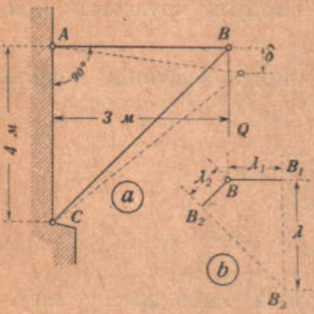


Рис. 57

a) Які повинні бути площі F_1 і F_2 попереччів косяка й стягля, коли допускну напругу для заліза взято 500 *кг/см*^{2}, а для дерева 20 *кг/см*^{2}?

b) Наскільки спуститься від чину тягара *Q* точка *B*?

Розв'язання. a) Вертикальну силу $Q = 4$ *т* розкладаємо на напрями *AB* й *BC*. Розтяжне зусилля в *AB* буде $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ *т*. Стискне зусилля в косяку *BC* дорівнює $\frac{4.5}{4} = 5$ *т*; отже,

$$F_1 = \frac{5000}{20} = 250 \text{ см}^2, \quad F_2 = \frac{3000}{500} = 6 \text{ см}^2.$$

b) Визначаючи переміщення точки *B*, беремо до уваги, що деформації стрижнів дуже малі, відкладаємо в горизонтальному напрямі (рис. 57*b*) відтинок $BB_1 = \lambda_1 = \frac{500.300}{2.10^6}$ *см*, що являє собою видовження стягля *AB*. У напрямі косяка *BC* відкладім його вкорочення $BB_2 = \lambda_2 = \frac{20.500}{10^5}$ *см*. Поставивши в B_1 і B_2 перпендикуляри до напрямів *AB* й *BC*, одержимо в перетині B_3 положення *B* після деформації. Вертикальне переміщення $\lambda = B_1B_3$ знайдемо з рис. 57 *b*:

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \frac{3}{4} + \lambda_2 \cdot \frac{5}{4} = 0{,}181 \text{ см}.$$

36. Прилад Френкеля визначати напруги в мостах показує з побільшенням у 150 разів зміну довжини між двома точками, що містяться на віддалі 1 *м* одна від одної. Визначте, наскільки побільшала напруга в стрижні мостового зв'язня, коли переходив поїзд, якщо прилад, влаштований на цій частині, показав переміщення 5 *см*?

Розв'язання. Відносне видовження $e=\frac{5}{150.100}$, напруга

$$p=eE=\frac{5.2.10^6}{150.100}=667\ кг/см^2.$$

37. Визначте величину тягара Q, якого безпечно можна почепити на двох залізних стрижнях однакового поперечча 5 $см^2$ нахилених до горизонту під кутом 30° (рис. 58). Допускна напруга матеріялу 500 $кг/см^2$.

Визначте модуль пружности матеріялу, коли від чину тягара Q точка B спускається на 2,5 *мм*.

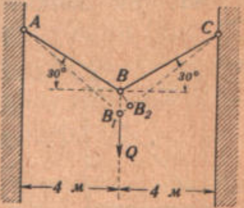


Рис. 58

Розв'язання. Розклавши силу Q на напрями AB й BC, знайдемо, що розтяжне зусилля в стрижнях дорівнює $\frac{Q}{2\sin 30^\circ}=Q$. Гранична вартість тягара Q буде $Q=500.5=2500\ кг$. Коли спускання BB_1 тягара Q ми знаємо, то зараз же знайдемо видовження кожного стрижня. Знехтувавши зміну нахилу стрижнів, знаходимо: видовження $B_1B_2=BB_1\sin 30^\circ=0{,}25\cdot\frac{1}{2}\ см$, відносне видовження $e=\frac{B_1B_2}{BC}=$ $=\frac{0{,}125}{462}$; модуль $E=\frac{p}{e}=\frac{500.462}{0{,}125}=1{,}85.10^6\ кг/см^2$.

38. Який повинен бути в попередньому завданні кут нахилу стрижнів до горизонту, щоб при завданій допускній напрузі об'єм, отже й вага стрижнів, були найменші?

Розв'язання. Коли α є кут нахилу стрижнів до горизонту, то $\frac{Q}{2\sin\alpha}$ буде розтяжне зусилля в стрижнях. Потрібна площа поперечча буде $F=\frac{Q}{2\sin\alpha.R}$. Довжина стрижня дорівнює $\frac{400}{\cos\alpha}$ *см*, отже, об'єм стрижня

$$V=\frac{400Q}{R.2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Найменшу вартість V має тоді, коли $\alpha=45^\circ$.

39. Наскільки побільшає спочатку прямий кут *м* (рис. 59) від чину зазначеної системи сил, коли площі попереччів вертикальних стрижнів однакові (рівні 1 *см*^{2})? Стрижні виготовлено з заліза.

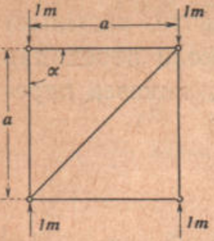


Рис. 59

Відповідь. Приросток $\alpha = 0{,}0005$.

40. Яку площу поперечча повинен мати залізний стягель *AB*, що підтримує кінець тряму *BC* (рис. 60), коли на трям чинить вертикальна сила $P=2$ *т*, а допускну напругу для залізного стягля взято 1000 *кг/см*^{2}?

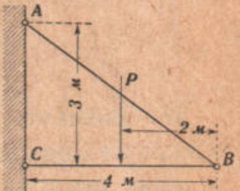


Рис. 60

41. Як зміняться кути квадрата *ABCD* (рис. 61) від чину по косині *BD* двох взаємно протилежних сил, рівних 1 *т*? Всі стрижні залізні з однаковим попереччям $F=1$ *см*^{2}.

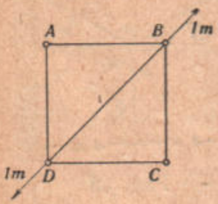


Рис. 61

42. Якої площі треба взяти поперечча для косяка *AB* (рис. 62), коли чинна сила $P=1$ *т*, а допускна напруга 30 *кг/см*^{2}.

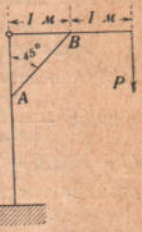


Рис. 62

43. Визначте площу поперечча толокового стебла *AB* й гонка *BC* для змальованої на схемі (рис. 63) парової машини, коли в найневигіднішому випадку різниця тисків у *M* і *N* дорівнює 5 *атм.*, а кут між *BC* й *AB* дорівнює 15°. Допускну напругу взято 200 *кг/см*^{2}.

44. Залізний стрижень завдовжки 30 *см* зазнає чину стискної сили $P=2$ *т* і двох рівних і просто протилежних сил $Q=2$ *т*, прикладених у попереччях *mn* і *pq* (рис. 64). Знайдіть зміну довжини стрижня й напругу в нижньому кінці, коли площа поперечча має 10 *см*^{2}.

Рис. 63

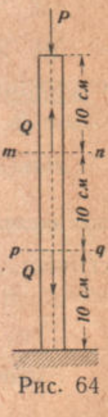


Рис. 64

45. Закладену в мур штабу AB можна витягти, коли подолати силу тертя. Припустім, що потрібне для цього зусилля дорівнює $P=1$ *т* і тертя розподілено рівномірно вздовж штаби (рис. 65). Треба знайти видовження штаби й напругу в різних її поперечнях, коли площа поперечня має 1 *см*^{2}. Як зміниться видовження штаби, коли ті зусилля, шо перемагають тертя, прикладено так, як показано на рис. 65*b*?

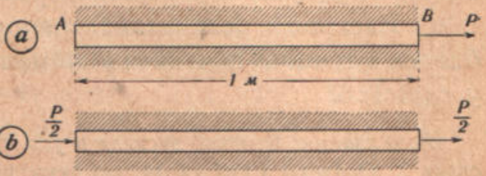


Рис. 65

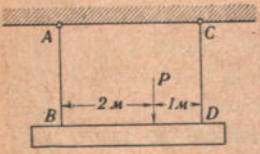


Рис. 66

46. Штабу BD горизонтально почеплено на двох дротах, однакових завгрубшки (рис. 66). Яке співвідношення між модулями пружности матеріялу дротів, коли від чину тягара P точки B й D лишаються на одній горизонтальній простій?

47. Штанґа шахтового смоку (рис. 67) урухомлюється за допомогою колінчастого вала. Довжина штанґи 100 *м*, поступ толока 20 *см*. Опір рухові толока донизу 100 *кг*, опір рухові догори 1000 *кг*. Визначте поперечня штанґи, припустивши, що напруга дорівнює 500 *кг*/*см*^{2}, і обчисліть, який повинен бути радіюс коліна r. Питома вага заліза $\gamma=7{,}6$.

Відповідь. $F=2{,}36$ *см*^{2}; $r=11{,}16$ *см*.

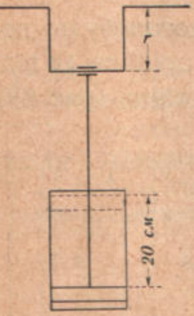


Рис. 67

48. Щоб підійняти тягара 6 *т*, збудовано триногу з брусів AO, BO й CO завдовжки 5 *м*. Точка O міститься над поверхнею землі на височині $h=4$ *м* (рис. 68).

а) Який повинен бути діяметр d брусів, коли в даному випадку допускна напруга для дерева 10 *кг*/*см*^{2}?

b) Знайдіть спускання точки O.

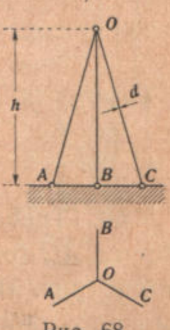


Рис. 68

Обчисляючи треба припускати, що підіймальний шнур перекинуто через нерухомий бльок, прикріплений до точки O. Кінці брусів A, B, C лежать у вершках рівнобічного трикутника.

c) Наскільки поменшають напруги, коли замість звичайного бльока в точці O почепити підіймальний механізм, що дає виграш у силі 1 : 6?

Розв'язання: Стискні зусилля в усіх трьох брусах однакові. Величину зусилля X знайдемо з тієї умови, що сума проєкцій цих зусиль на вертикальну вісь повинна дорівнювати, коли бльок нерухомий, силі $6 \times 2 = 12\ m$. Одержуємо рівнання:

$$3X \cdot \frac{4}{5} = 12\ m, \quad X = 5\ m, \text{ отже:}$$

$$d = \sqrt{\frac{5000.4}{10\pi}} = 25{,}2\ см.$$

Вкорочення кожного бруса буде $\frac{500.10}{10^5} = \frac{1}{20}\ см.$ Відповідне до цього вкорочення спускання буде:

$$\delta = \frac{1}{20} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{16}\ см.$$

49. Кінець A призматичної штаби AB нерухомо закріплено, а до кінця B прикладено розтяжну силу P.

Треба показати, що спускання якогонебудь поперечча mn штаби при розтягові пропорційне до віддалі x поперечча mn від закріпленого кінця (рис. 69).

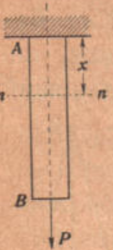


Рис. 69

Розв'язання. Переміщення поперечча mn, очевидно, дорівнює видовженню дільниці x розтягуваного бруса, і його можна, на основі Гукового закону, визначити формулою:

$$\lambda_x = \frac{Px}{EF}.$$

50. Треба показати, що при розтягуванні бруса AC (рис. 70) силою P, прикладеною на кінці (рис. $70b$), переміщення якогонебудь проміжного поперечча B дорівнює переміщенню кінця C при чині розтяжної сили P в поперечці B (рис. $70a$).

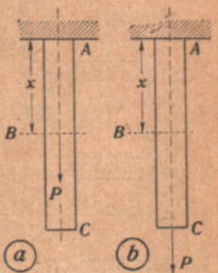


Рис. 70

Розв'язання. В обох випадках переміщення поперечча B однакове й визначається тою самою формулою, що й у попередній задачі.

51. Залізобетонна колона квадратового попереччя підтримує обтяження $P = 30\,т$ (рис. 71). Визначте:

a) яка частина цього обтяження припадає на залізо й яка на бетон, коли площа заліза становить 10% площі бетону і відношення модулів пружности заліза й бетону дорівнює $E_з : E_б = 10 : 1$;

b) напругу в залізі й бетоні;

c) відносний стиск колони.

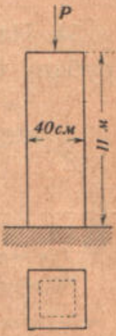


Рис. 71

Розв'язання. Припускаємо, що при стискові поперечча колони залишаються плоскі. У такому разі відносні вкорочення заліза й бетону однакові, отже, напруги відносяться, як модулі, тобто 1 : 10. Взявши до уваги відношення площ заліза й бетону, знайдемо, що обтяження розподілиться на залізо й бетон нарівно. Після цього легко знайти напруги для заліза 103 $кг/см^2$ й бетону 10,3 $кг/см^2$. Відносне вкорочення буде $e = 0{,}0000516$.

Рис. 72

52. Залізного стрижня *AB*, спочатку стиснутого силами *P*, оточено бетоновою масою (рис. 72). Коли бетон стверде, сили *P* приймається.

Знайдіть напруги, що при цьому виникають у бетоні й залізі, коли відношення модулів пружности цих матеріялів завдано.

Розв'язання. Припускаємо, що поперечча залізобетонної колони, які досить віддалені від кінців, лишаються плоскі після того, як прийнято сили *P*. Вільно поширюватись знетяженому залізному стрижневі не дасть зціплений бетон. Нехай *Q* буде стискне зусилля, що залишається в стрижні після знетяження; тоді матимемо рівнання:

$$\frac{(P-Q)\,4}{\pi d_1^2 \cdot E_з} = \frac{Q}{\pi \left(d_2^2 - d_1^2\right)\, E_б};$$

звідси знайдемо *Q*.

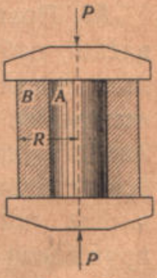


Рис. 73

53. Стального циліндра *A* (рис. 73) оточено мідним утулком *B* й затиснуто між двома абсолютно твердими плитами. Яке зусилля передається на стальний циліндер, коли стискна сила $P = 40\,т$, радіюс циліндра $r = 5\,см$, зовнішній радіюс утулка $R = 10\,см$, відношення модулів пружности дорівнює: $E_з : E_м = 2 : 1$?

Розв'язання. Припустивши те саме, що й у попередній задачі, знайдемо, що напруги матеріялів пропорційні до модулів.

54. На чавунний перстень, що має зовнішній діяметр 40 *см* і грубину стінки 2 *см*, натягнуто в гарячому стані стального персня завгрубшки 1 *см* (рис. 74). Коли стальний перстень охолоне до нормальної температури, то в ньому з'являються розтяжні напруги 100 $кг/см^2$. Знайдіть, які стискні напруги будуть в чавунному персні й який тиск n на 1 $см^2$ передає йому стальний перстень.

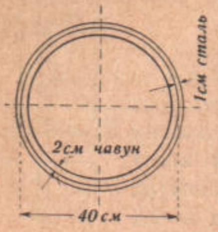


Рис. 74

Відповідь. $p = 50\ кг/см^2$; $n = 5\ кг/см^2$.

Розв'язання. Перекраявши перстень горизонтальним діяметром, ми з рівноваги верхньої частини (рис. 75) робимо висновок, що те зусилля, яке стискає чавунний перстень, дорівнює розтяжному зусиллю в стальному персні, а що грубина його вдвоє більша, то напруга вдвоє менша, ніж у стальному персні, тобто дорівнює 50 $кг/см^2$. Тиск n по дотичних поверхнях перснів знайдемо, розглянувши рівновагу половини одного якогось персня. Спроєктувавши на вертикальний напрям ті зусилля, що припадають на половину стального персня, знайдемо:

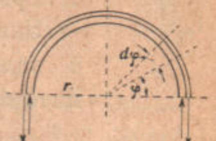


Рис. 75

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} n d\varphi . \sin\varphi . r = 100, \quad \text{або} \quad n = \frac{100}{r} = \frac{100}{20} = 5\ кг/см^2.$$

55. Поверхневий шар дроту, завдяки витяганню при виготовленні, набуває більшої штивности, ніж середове ядро. Через це при розтягуванні дроту напруги розподіляються по площі поперечча нерівномірно й напруженіший буде зверхній шар. Знайдіть допускну розтяжну силу P, коли допускна напруга на розтяг буде R, площа поперечча штивного зверхнього шару — F_1, площа поперечча середового шару F_2, відповідні модулі пружности — E_1 і E_2.

Розв'язання. Зробивши ті самі припущення, що й у задачі 51, знайдемо, що напруги пропорційні до модулів. Допускну силу P знайдемо з рівняння:

$$P = \frac{R}{E_1}(E_1F_1 + E_2F_2).$$

56. Штабу *AB*, закріплену в точці *A*, розтягає власна вага (рис. 76).

1) Знайдіть залежність між переміщенням λ_x якогонебудь поперечча *mn* призматичної штаби *AB* й віддалю *x* від закріпленого кінця.

2) Доведіть, що викликане власною вагою видовження штаби вдвоє менше від того, яке було б, якби до кінця штаби прикласти розтяжну силу, рівну її вазі.

Рис. 76

Розв'язання. Переміщення поперечча *mn* дорівнює видовженню тої частини, що лежить вище. Видовження елемента завдовжки $d\xi$ на віддалі ξ від заправленого кінця визначить формула:

$$\frac{(l-\xi)\,\gamma\,.\,d\xi}{E},$$

де γ є вага одиниці об'єму.

Отже, переміщення поперечча *mn* буде:

$$\lambda_x=\int\limits_0^x\frac{(l-\xi)\,\gamma\,.\,d\xi}{E}=\frac{\gamma x(2l-x)}{2E}.$$

Видовження всієї штаби одержимо, поклавши $x=l$.

57. Конічного стрижня розтягає власна вага (рис. 77). Знайдіть залежність між переміщенням якогонебудь поперечча *mn* і його віддалю *x* від закріпленого кінця.

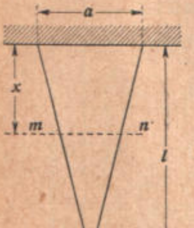


Рис. 77

Відповідь. Уживши того самого способу, що й у попередній задачі, знайдемо:

$$\lambda_x=\frac{\gamma x\,(2l-x)}{6E}.$$

58. Треба знайти міцні поперечні розміри шахтової штанґи призматичної, призначеної до підіймання тягарів 35 *т*. Довжина штанґи 250 *м*, допускна напруга $R=750$ *кг/см²*.

Обчисліть видовження тої ж таки штанґи від чину власної ваги і найбільшого допускного обтяження.

Розв'язання. Площу поперечча знайдемо з рівняння:

$$FR=35.10^3+F.25.7{,}6.$$

Підстановивши замість *R* його вартість, одержимо $F=62{,}5$ *см²*.

Обчисливши видовження окремо від власної ваги й окремо від тягара та додавши одне до одного, одержимо повне видовження $\lambda = 8{,}19$ *см*.

59. Шахтова штанґа завдовжки 150 *м* має ступчасту форму (рис. 78) і складається з п'яти рівних завдовжки дільниць. Найбільша величина розтяжної сили, що чинить на кінці штанґи, дорівнює $P = 20$ *т*, одиниця об'єму заліза важить $\gamma = 7{,}6$ *г/см*^{3}, допускна напруга $R = 400$ *кг/см*^{2}.

a) Порівняйте вагу g_1 цієї штанґи до ваги g_2 штанґи сталого поперечча й до ваги g_3 такої штанґи, що має форму бруса рівноопірного (припускаємо, що всі три штанґи роблять при однакових умовах).

b) Порівняйте видовження $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ всіх трьох штанґ.

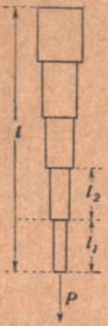


Рис. 78

Розв'язання. Обчисляючи ступчасту штанґу, починаємо з визначення площі поперечча F_1 для нижньої дільниці. Для цього скористуємося рівнанням

$$F_1 R = P + F_1 l_1 \gamma,$$

звідси

$$F_1 = \frac{P}{R - l_1 \gamma}.$$

Площу поперечча F_2 для другої дільниці знайдемо з рівнання:

$$F_2 R = F_1 R + F_2 l_2 \gamma,$$

звідси

$$F_2 = \frac{F_1 R}{R - l_2 \gamma} = \frac{RP}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma)}.$$

У загальному випадку одержуємо вираз:

$$F_n = \frac{PR^{n-1}}{(R - l_1 \gamma)(R - l_2 \gamma)\ldots(R - l_n \gamma)}.$$

Коли довжина всіх дільниць однакова, тобто $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = \frac{l}{n}$, то

$$F_n = \frac{P}{R\left(1 - \frac{l\gamma}{Rn}\right)^n}.$$

Щоб визначити власну вагу ступчастої штанґи або такої, що має рівноопірну форму, треба площу верхньої основи помножити на R_1 і від одержаного результату відняти силу 20 *т*.

Відповідь. *a*) $g_1 : g_2 : g_3 = 342 : 400 : 330$;

b) $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 2{,}91 : 2{,}57 : 3{,}00$.

60. Знайдіть площі верхньої й спідньої основи кам'яного мостового стояна, що має форму рівноопірного бруса, коли той найбільший тиск, що на нього припадає, дорівнює $Q=300\ m$, допускна напруга $R=10\ кг/см^2$. Одиниця об'єму муру важить $\gamma=2{,}5\ г/см^3$, височина стоянів $h=40\ м$ (рис. 79). Знайдіть:

a) тиск на $1\ см^2$ спіднього поперечча;

b) вагу опори;

c) поменшання об'єму муру від чину стискної сили Q й власної ваги.

Рис. 79

Розв'язання. Щоб визначити площу якогонебудь поперечча на віддалі x від верхнього поперечча, вживаємо формули[1]):

$F_x=\frac{Q}{R}\cdot e^{\frac{\gamma}{R}}$; поклавши $x=h=4.10^3\ см$, одержимо площу спідньої основи:

$$F=\frac{300000}{10}e^{\frac{0{,}0025\ .\ 4\ .\ 10^3}{10}}=3.2{,}72=8{,}16\ м^2.$$

Вага муру дорівнює $10.8{,}16.10^4-300.10^3=516\ m$.

При визначенні зміни об'єму беремо Пуассонове відношення $\sigma=0{,}25$ $E=2.10^5\ кг/см^2$.

61. На штабу з закріпленими кінцями чинить спрямована по осі сила P, прикладена в поперечці mn (рис. 80). Яка частина сили передається верхньому й яка нижньому кінцеві штаби?

Рис. 80

Відповідь. $T_{\text{верхн.}}=P\frac{b}{a+b}$; $T_{\text{нижн.}}=P\frac{a}{a+b}$.

Цей результат одержуємо з тої умови, що відовження верхньої дільниці дорівнює вкороченню нижньої. Отже, відносні видовження оберненопропорційні до довжин дільниць.

62. На стояна, що має довжину $120\ см$, площу поперечча $100\ см^2$ і закріплені обидва кінці, передається тиск у напрямі осі в двох точках: на віддалі $40\ см$ від верхнього кінця $P_1=21\ m$ й на віддалі $30\ см$ від нижнього кінця $P_2=24\ m$ (рис. 81). Визначте напругу в частинах стояна.

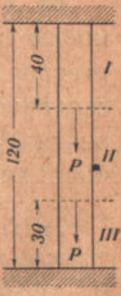


Рис. 81

---

[1] Тут *e* є основа натуральних логаритмів.

Розв'язання. Коли x і y будуть переміщення точок прикладання сил P_1 і P_2 то зусилля в дільницях *I*, *II* і *III* визначаться формулами:

$$\frac{xEF}{l_1}; \quad \frac{(y-x)EF}{l_2}; \quad \frac{yEF}{l_3}.$$

Взявши до уваги, що різниця зусиль у дільницях *I* і *II* дорівнює P_1, а різниця зусиль у *II* і *III* дорівнює P_2, одержимо рівнання:

$$\left[\frac{x}{l_1}-\frac{(y-x)}{l_2}\right]EF=P_1; \quad \left[\frac{y-x}{l_2}+\frac{y}{l_3}\right]EF=P_2.$$

При завданих розмірах напруги для дільниць будуть такі:
I — 200 *кг/см²* (розтяг); *II* — 10 *кг/см²* (стиск); *III* — 250 *кг/см²* (стиск).

63. Призматичного бруса AB, що важить P, почеплено на трьох дротах, що симетрично розташовані відносно середини бруса (рис. 82). Знайдіть натяг дротів, коли їхня довжина й площі попереччів однакові, а матеріяли різні: середній дріт — залізний, а скрайні — мідні.

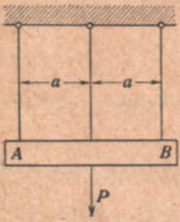


Рис. 82

Відповідь. Натяг середнього дроту $p=\frac{P}{2}$; скрайніх $s=t=\frac{P}{2}$. Цей результат одержуємо з тієї умови, що видовження всіх дротів однакові, а модуль пружности міді вдвоє менший від модуля пружности заліза.

64. Тягара $P=1$ *т* почеплено на трьох залізних стрижнях з однаковим попереччям. Які будуть натяги стрижнів і наскільки спуститься точка чіпляння O, коли довжина середнього стрижня $l=1$ *м*, його площа попереччя 1 *см²* й кут $\alpha=30°$? Розгляньте граничні випадки, коли $\alpha=0°$ і $\alpha=90°$ (рис. 83).

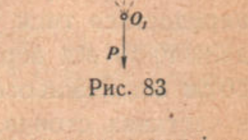


Рис. 83

Розв'язання. Коли OO_1 є видовження середнього стрижня, то видовження кожного нахилого стрижня буде $O_1C=OO_1\cos\alpha$. Відносне видовження нахилих стрижнів буде $\frac{OO_1\cos^2\alpha}{l}$; відносне видовження середнього стрижня буде $\frac{OO_1}{l}$. При однакових попереччях зусилля в стрижнях пропорційні до відносних видовжень. Коли X є зусилля в середньому стрижні, то в кожному нахилому стрижні зусилля буде $X\cos^2\alpha$. Отже, сума проєкцій буде

$X+2X\cos^2\alpha=P$; звідси

$$X=\frac{P}{1+2\cos^2\alpha}.$$

При взятих розмірах спускання $\lambda=0{,}0217$ *см.*

65. Знайдіть зусилля в стрижнях *1*, *2* і *3* від вертикальної сили *P* (рис. 84).

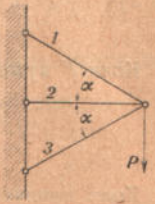


Рис. 84

66. Як розподілиться тиск тягара *P* між чотирма ніжками квадратового стола, коли тягар лежить так, як змальовано на рис. 85?

(Припускаємо, що дошки стола абсолютно тверді).

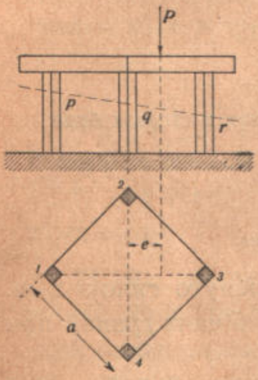


Рис. 85

Розв'язання. Через те, що поперечча всіх ніжок однакове, зусилля пропорційні до стисків. З рисунка видно, що тиск ніжок *2* й *4* дорівнює півсумі стисків ніжок *1* і *3*; отже, зусилля *q* в ніжках *2* і *4* дорівнює $\frac{P}{2}$. Щождо зусиль *p* й *r* у ніжках *1* і *3*, то ми їх знайдемо, коли складемо момент відносно осі, рівнобіжної з діягоналею (*2*, *4*), що переходить через напрям *P*; одержуємо рівняння: $p\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}+e\right)+\frac{P}{2}e=r\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-e\right)$, крім того, $p+r=\frac{P}{2}$; звідси знаходимо: $p=\frac{P}{4}-\frac{Pe}{a\sqrt{2}}$, $r=\frac{P}{4}+\frac{Pe}{a\sqrt{2}}$. Коли $e>\frac{a\sqrt{2}}{4}$, то в ніжці *1* виникає розтяг.

(Припускаємо, що ніжки прикріплено до підлоги).

67. Прямокутник *ABCD* з діягоналями *AC* й *BD* (рис. 86) зазнає чину сил *P*, спрямованих по осях стояків *AB* й *CD*. Знайдіть зусилля: 1) в стояках *AB* й *CD*, 2) розпинках *BC* й *AD* й 3) в діягоналях *AC* й *BD*. Всі стрижні виготовлено з однакового матеріялу. Площа поперечча стояків *F*, а поперечча розпинок і діягональ *f*.

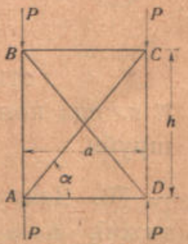


Рис. 86

Розв'язання. Позначмо літерою *X* зусилля в стояку; тоді з умов рівноваги якогонебудь вузла рами знаходимо, що стискне зусилля в діягоналі буде $Y=\frac{P-X}{\sin\alpha}$. Розтяжне зусилля в розпинці дорівнює $Z=Y\cos\alpha=\frac{P-X}{\sin\alpha}\cos\alpha$. А що через симетрію рама після деформації лишається прямокутньою, то одержуємо рівнання:

$$(a^2+h^2)\left(1-\frac{Y}{EF}\right)^2=h\left(1-\frac{X}{EF}\right)^2+a^2\left(1+\frac{Z}{Ef}\right)^2.$$

Визначивши X і Z через Y, знайдемо зусилля в діягоналях:

$$Y=\frac{P}{\frac{(h^2+a^2)F}{h^2f}+\frac{a^2}{h^2}\cos\alpha\frac{F}{f}+\sin\alpha}.$$

Коли F дуже велике, а $\alpha=45^\circ$, то

$$Y=\frac{P\frac{f}{F}}{2{,}7}.$$

Коли припустити, що розпинки безмежно штивні, то зусилля в стояках буде:

$$X=\frac{P}{1+n\sin^2\alpha},$$

де n є відношення поперечча діягоналі до поперечча стояка.

68. Залізного куба, що має об'єм 1 $см^3$, стиснуто силою 2 $т$. Знайдіть Пуассонове відношення, коли площа бічних граней при стиску поменшала на 0,07%.

Відповідь. $\sigma=0{,}03$

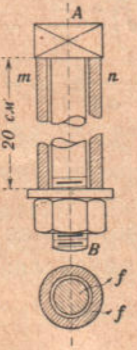


Рис. 87

69. Закручуючи мутру шруби AB, можна викликати стискні напруги в трубці mn, що охоплює шрубу (рис. 87). Наскільки поменшають ці стискні напруги при повороті мутри на 90°, коли при повному повороті мутри її переміщення по осі шруби дорівнює 1 $мм$? Шрубу й трубку зроблено з заліза, і їхні площі попереччів однакові.

Відповідь. $p_n=-1250$ $кг/см^2$.

Розв'яжіть попереднє завдання, припустивши, що трубку mn зроблено з міді, й її площа поперечча буде вдвоє більша, ніж поперечча шруби.

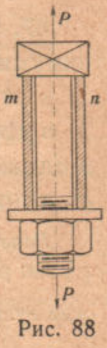


Рис. 88

70. Закручуванням мутри викликано в шрурі розтяжні, а в трубці mn (рис. 88) стискні напруги (трубка й шруба з одного матеріялу й з однаковим попереччям).

Нехай розтяжне зусилля в шрубі буде 1 m. Наскільки воно побільшає, коли до кінців шруби прикласти сили $P = 1\ m$? При якій вартості розтяжних сил P стискні напруги в трубці mn обернуться в нуль?

Розв'язання. Нехай λ буде приріст довжини шруби від чину двох прикладених сил $P = 1\ m$; тоді побільшання розтяжного зусилля в шрубі буде $\frac{\lambda}{l} \cdot E_1F_1$, де E_1 є модуль пружности для матеріялу шруби, а F_1 — попереччя шруби; поменшання стискної сили в трубці mn буде $\frac{\lambda}{l} \cdot E_2F_2$. Щоб визначити λ, маємо рівнання:

$$\frac{\lambda}{l}(E_1F_1 + E_2F_2) = P = 1\ m.$$

Коли $E_1 = E_2 = E$ й $F_1 = F_2 = F$, то $\frac{\lambda}{l} EF = \frac{P}{2} = 0{,}5\ m$. Коли F_2 велике, порівняно до F_1, то з формули $\frac{\lambda}{l} \cdot E = \frac{P}{F_1 + F_2}$ видно, що прикладання сил P мало зміняє натяг шруби.

71. Як треба зміняти діяметр у спижовій (бронзовій) мутрі ґвинта (рис. 89), щоб розподілити чинну силу P рівномірно по крутнях навороти? $E = 2{,}2 \, . \, 10^6\ кг/см^2$ для стального ґвинта й $E_1 = 1{,}1 \, . \, 10^6\ кг/см^2$ для спижу.

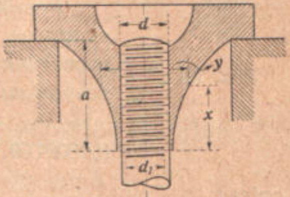


Рис. 89

Розв'язання. Площу попереччя спижової мутрі треба зміняти так, щоб при рівномірному розподілі тиску на крутні видовження ґвинта й мутрі в довільному попереччі були однакові.

На віддалі x від спіднього краю мутрі матимемо в ґвинті зусилля $X = P - \frac{Px}{a} = P\frac{a - x}{a}$. Відносне видовження $e = \frac{X}{FE} = \frac{1}{FE} P \frac{a - x}{a}$. У мутрі зусилля буде $X' = \frac{Px}{a}$, відносне видовження $e' = \frac{Px}{aF_1E_1}$; одержимо рівнання:

$$\frac{P}{FE}\,\frac{(a - x)}{a} = \frac{P}{F_1E_1}\,\frac{x}{a}.$$

Звідси закон для зміни площі F_1:

$$F_1 = F\frac{E}{E_1} \cdot \frac{x}{a - x}.$$

72. Обидва кінці залізної штаби закріплено при температурі 0°. Які будуть напруги в штабі, коли температура підвищиться до 40°C?

Розв'язання. Відносне видовження від підвищення температури буде: $e = at = 0{,}0000125 . 40 = 0{,}0005$.

Напруга, якої досить, щоб утримати штабу в попередній довжині, буде: $p = Ee = 2 . 10^6 . 0{,}0005 = 1000$ *кг/см*².

73. На деяких американських залізницях зварюють рейки в одну безперервну лінію; які великі будуть напруги в рейках, коли температура змінятиметься в межах від $-25°$ до $+55°$C, якщо зварювання зроблено при 15°C?

Відповідь. ± 1000 *кг/см*².

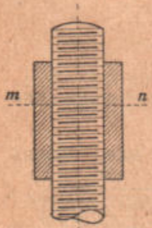


Рис. 90

74. У мідний циліндер з площею поперечча 3 *см*² вкручено стального ґвинта з попереччям 1 *см*² при 15°C (рис. 90). Яка буде напруга матеріялів у поперечці *mn*, коли температура підвищиться до 415°C?

Розв'язання. Можна вважати, що в поперечці *mn*, яке досить віддалене від кінців мідного циліндра, стискні напруги p по попереччю циліндра й розтяжні напруги p_1 по попереччю ґвинта розподіляються рівномірно. Щоб визначити p й p_1, маємо рівняння:

$$0{,}0000160 . 400 - \frac{p}{E_м} = 0{,}000125 . 400 + \frac{p_1}{E_з}; \quad 3p' = p_1,$$

звідси:

$$p = -560 \text{ кг/см}^2; \quad p_1 = +1680 \text{ кг/см}^2.$$

75. Три штаби з однаковим попереччям скріплено одну з одною поперечними брусами *mn* і *pq* при температурі 0°C (рис. 91). Які будуть напруги в штабах при температурі 100°C, коли середня мідна, а скрайні залізні? Модулі пружности

$$E_з = 2{,}2 . 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad E_м = 1{,}1 . 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

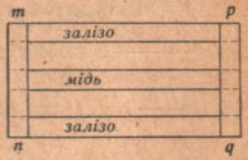


Рис. 91

Розв'язання. Припустивши, що поперечні бруси *mn* і *pq* абсолютно штивні, знаходимо, що видовження всіх штаб при підвищенні температури повинні бути однакові. Через нерівність коефіцієнтів лінійного поширення в залізних штабах з'являться розтяжні напруги p, а в мідній штабі — стискні напруги p_1. Щоб визначити p й p_1, складаємо рівняння:

$$p_1 = 2p; \quad 0{,}0000125 \ . \ 100 + \frac{p}{E_з} = 0{,}0000165 . 100 - \frac{p_1}{E_м};$$

звідси

$$p_1 = 352\ кг/см^2.$$

76. У мідну трубку з *середовим діяметром* 4 *см* й грубиною стінок 3 *мм* влютовано при 365°С залізну трубку, яка має грубину стінок 2 *мм* (рис. 92). Знайдіть напругу матеріялів при вистиганні злютованих трубок до 15°С.

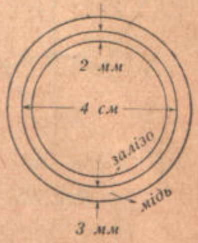


Рис. 92

Розв'язання. Відносні вкорочення при вистиганні перснів повинні бути однакові. Через нерівність коефіцієнтів лінійного поширення зовнішня мідна трубка при вистиганні буде натискати на залізну трубку. Нехай x буде величина тиску на 1 $см^2$ поверхні; тоді, користуючись даними завдання 54, складаємо рівняння:

$$0{,}0000165 . 350 - \frac{xr}{0{,}3E_м} = 0{,}0000125 . 350 + \frac{xr}{0{,}2E_з},$$

звідси

$$x = 120\ кг/см^2.$$

Отже, стискна напруга в залізі $\frac{xr}{0{,}2} = 1200\ кг/см^2$, а розтяжна напруга в міді 800 $кг/см^2$.

77. Визначте подовжні розтяжні напруги, що з'являються в нюті при вистиганні, коли нютування скінчено при 100° (рис. 93). Температура злучуваних аркушів 0°. (Припускається, що аркуші не стискаються).

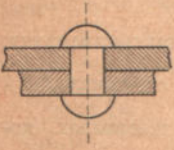


Рис. 93

Як зміниться натяг нюти, коли взяти до уваги стиск аркушів? При тому треба допустити, що стискні зусилля рівномірно розподіляються по площі аркушів, яка дорівнює почвірній площі поперечня нюти.

78. За допомогою залізної шруби між брусами *DC* й *EF* затиснуто мідну трубку (рис. 94). При температурі 0° натяг шруби дорівнює 3 *т*. Як зміниться цей натяг при зміні температури до +20° або −20°? Які будуть напруги в трубці при тих самих температурах?

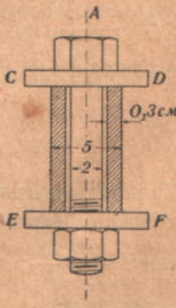


Рис. 94

79. Знайдіть напруги в залізних стрижнях *1*, *2* і *3*, коли температура їх підвищиться на 100°, якщо поперечча всіх стрижнів однакові (рис. 95).

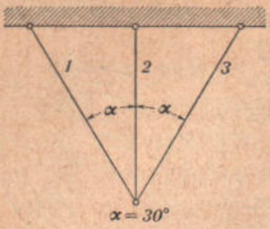


Рис. 95

Розв'язання. Складаючи рівняння, щоб знайти зусилля в стрижнях, треба скористуватися знайденим у задачі 64 співвідношенням між видовженнями стрижнів. У цьому випадку величини видовжень зумовлено не тільки напругами, а й зміною температури стрижнів.

80. Квадратову раму з перехресними діягоналями (рис. 96) склепано при $t = +25°$; які будуть напруги в стрижнях при $t = -25°$, коли діягоналі зроблено з міді, а боки з заліза? Поперечча всіх стрижнів однакові. Величини модулів пружности взято із зад. 75.

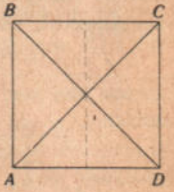


Рис. 96

Розв'язання. Нехай x буде напруга в діягоналях (діягоналі будуть витягнені); тоді:

$$0{,}0002 - \frac{x}{E_м} = \frac{x}{\sqrt{2}\,E_з}; \quad x = 163\ кг/см^2.$$

81. Квадратову раму $ABCD$ ($AB = a$) з перехресними діягоналями зложено з залізних стрижнів однакового поперечча (рис. 96). Які будуть напруги в стрижнях, коли температура стрижня BC підвищиться на 20°?

Розв'язання. Стрижень BC буде стиснутий. Позначмо літерою p стискну напругу; тоді відносне видовження стрижня BC буде: $0{,}0000125 . 20 - \frac{p}{E}$. У стрижнях AB й CD стискні напруги дорівнюють p, а розтяжві напруги в діягоналях дорівнюють $p\sqrt{2}$. Відсування C від осі, показаної пунктиром:

$$\left(0{,}00025 - \frac{p}{E}\right)\frac{a}{2}.$$

Складім вираз для того ж таки переміщення точки C залежно від деформації решти стрижнів. Через стиск стрижня AC точка C відсунеться від зазначеної осі на величину: $\frac{p}{E} \cdot \frac{a}{2}$; від видовження діягональ горизонтальне переміщення тої ж таки точки буде:

$$\frac{p\sqrt{2}}{E} \cdot d\sqrt{2};$$

переміщення від стиску стояка CD дорівнює $\frac{p}{E} \cdot a$. Одержуємо рівняння:

$$\left(0{,}00025 - \frac{p}{E}\right)\frac{a}{1} = \frac{p}{E} \cdot \frac{a}{2} + \frac{p\sqrt{2}}{E} \cdot d\sqrt{2} + \frac{pa}{E},$$

$$0{,}00025\,E - p = p + 4\sqrt{2}\,p + 2p; \quad (3 + 4\sqrt{2})\,p = 500.$$

Отже, напруга в стрижні BC

$$p = \frac{500}{8{,}66} = 57{,}7 \text{ кг/см}^2.$$

82. Два стрижні AB й BC однакових розмірів, що лежать на одній простій, зв'язані між собою й з нерухомими точками A й C за допомогою суставів (рис. 97). Від чину сили P сустав B займе положення B_1; треба довести, що переміщення BB_1 пропорційне до $P^1/_3$. (При розв'язанні припускаємо, що $\angle \alpha$ малий).

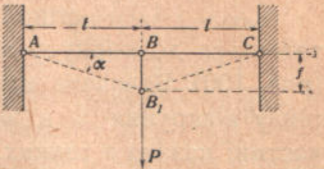


Рис. 97

Розв'язання. Натяг стрижнів дорівнює $\frac{P}{2\alpha}$; відносне видовження:

$$\frac{P}{2\alpha EF} = \frac{\frac{l}{\cos\alpha} - l}{l} = \frac{\alpha^2}{2},$$

звідси

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{P}{EF}}; \quad f = l\alpha = l\sqrt[3]{\frac{P}{EF}},$$

натяг

$$T = \frac{P}{2\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{P^2EF}.$$

Знайдіть переміщення точки B при підвищенні температури стрижнів на t°.

Рис. 98

83. Бруса розтягають сили, шо рівномірно розподілені по кінцевих попереччях mn і pq (рис. 98). По площі st, нахиленій під кутом α до осі бруса, чинитимуть нормальні p_n і танґенційні p_t напруги. Знайдіть ту вартість α, що при ній танґенційні напруги становлять $1/m$ частину нормальних. Обчисліть танґенційну й нормальну напруги по площі st, нахиленій під кутом $\alpha = 30^\circ$, коли площа попереччя бруса $F = 5$ *см*^{2}, а та сила, що розтягає бруса, $P = 4$ *т*.

Відповідь. 1) $\operatorname{ctg} \alpha = 1/m$; 2) $p_t = 346$ *кг/см²*; 3) $p_n = 200$ *кг/см²*.

84. Куба $ABCD$ стиснуто зусиллями, рівномірно розподіленими по чотирьох гранях. Тиск здійснюється за допомогою особливого суставного механізму $MNPQ$ (рис. 99). Знайдіть відносне поменшання об'єму куба $7 \times 7 \times 7$ *см*, коли $E = 4 . 10^5$ *кг/см²*. Пуассонове відношення $\sigma = 0{,}3$ і $R = 5$ *т*.

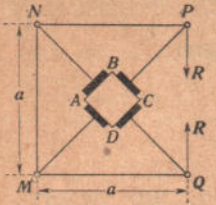


Рис. 99

85. Циліндричний залізний казан для насочування шпал, що має діяметр 2 *м* й грубину стінок 2 *см*, закривається покришкою, яку притягається до корпусу циліндра 30-ма шрубами, діяметром 3,2 *см* (рис. 100). Визначте напруги матеріялу в шрубах і в циліндричній частині казана в точках, віддалених від днищ, маючи на увазі, що тиск у циліндрі при насочуванні перевищує зовнішній тиск на 6 *атм*.

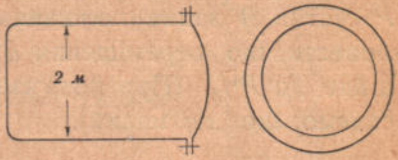


Рис. 100

Відповідь. Напруга шруб 781 *кг/см²*. Розтяжна напруга на стінці: по площі, що переходить через вісь циліндра, дорівнює 30 *кг/см²*, а по площі, перпендикулярній до твірної, дорівнює 50 *кг/см²*.

Знайдіть відносне побільшання об'єму казана від розтягання стінок, поклавши Пуассонове відношення $\sigma = 0{,}3$ (деформаціями днищ знехтуйте).

86. Який середовий тиск можна допустити в посуді, що складається з порожнявого мідного циліндра (зовнішній діяметр 50 *см*, грубина стінок 0,4 *см*) і з стального циліндра, що щільно його охоплює на всю довжину, з грубиною стінок 0,2 *см* (рис. 101), коли найбільша допускна напруга для міді 400 *кг/см²*, для сталі 2000 *кг/см²*, $E_м = 1{,}1 . 10^6$ *кг/см²*, $E_c = 2{,}2 . 10^6$ *кг/см²*.

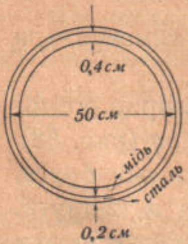


Рис. 101

Розв'язання. Відносні видовження для міді й сталі будуть однакові, отже, напруги відносяться, як модулі $E_м : E_c = 1 : 2$. Коли напруги в міді досягнуть допускної межі, то напруги в сталі будуть 800 *кг/см²*. Величину допускного середового тиску знайдемо, коли складемо рівняння рівноваги тим способом, що його зазначено в зад. 54.

Відповідь. 12,8 *атм.*

87. Якщо із стінки циліндричного казана вирізати елемент *abcd* (рис. 102), так, щоб одна пара його боків спадалася з твірними циліндра (*OO* є вісь циліндра), то по бічних гранях такого елемента чинитимуть лише розтяжні напруги; їхню величину позначмо літерою p_1 і p_2. Коли напрям p_2 спадається з напрямом твірних циліндра, то $p_2 = \frac{p_1}{2}$.

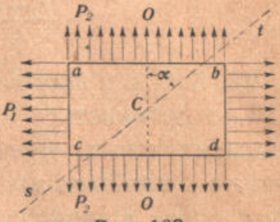


Рис. 102

1) Під яким кутом α до напряму твірної *OO* треба повести січну площинку *st*, щоб танґенційні напруги були максимальні?

2) Яку справу ми одержимо, коли від точки *C* по величині й напряму будемо відкладати напруги, що відповідають різним нахилам площинки *st*?

Відповідь. 1) $\alpha = 45°$; 2) еліпса з полувісками p_1 і p_2.

88. Яка повинна бути грубина кулястого посуду, що має діяметр $d = 1$ *м* і зазнає середового тиску $p = 10$ *атм.*, коли допускна напруга на розтяг $R = 500$ *кг/см²*?

Розв'язання. $\pi d \delta R = \frac{\pi d^2 p}{4}$; $\delta = \frac{dp}{4R} = \frac{100.10}{4.500} = 0{,}5$ *см.*

89. Кубик, що зазнає чину всебічного тиску 20 *атм.*, одержав відносний об'ємний тиск *e*, рівний 0,00001. Знайдіть Пуассонове відношення матеріялу, коли $E = 2{,}10^6$ *кг/см²*.

Розв'язання. $e = \frac{3.20}{E}(1 - 2\sigma)$, отже, $\sigma = \frac{1}{3}$.

90. Залізний прямокутній паралелепіпед зазнає в напрямі одного руба розтяжної напруги $p_1 = 1000$ *кг/см²*. У напрямі другого руба зазнає стискної напруги $p_2 = -600$ *кг/см²*. Знайдіть третю головну напругу, коли об'єм паралелепіпеда при деформації не міниться.

Розв'язання. $e_x + e_y + e_z = \frac{(1 - 2\sigma)}{E}(p_x + p_y + p_z) = 0$;

отже:

$$p_z = -(p_x + p_y) = -400 \text{ кг/см}^2.$$

91. Циліндричний круглий стрижень при двох різних вартостях P_1 і P_2 подовжної стискної сили має радіюси попереччя, відповідно рівні r_1 і r_2. Знайдіть Пуассонове відношення.

Розв'язання. Коли r_0 є початкова вартість радіюса попереччя, то для визначення σ одержуємо такі рівнання:

$$\frac{r_1 - r_0}{r_0} = \sigma \frac{P_1}{\pi r_0^2 E}; \qquad \frac{r_2 - r_0}{r_0} = \sigma \frac{P_2}{\pi r_0^2 x}.$$

92. Куб з м'якого матеріялу (з малим модулем пружности E) щільно дотикається протилежними боками до абсолютно неподатливих площ. Визначте тиск на ці площі, коли в напрямі, з ними рівнобіжному, куб зазнає стискного зусилля 300 *кг/см*². Пуассонове відношення $\sigma = 0{,}25$.

Відповідь. 75 *кг/см*².

93. Циліндер із м'якого матеріялу (з малим модулем пружности E), обхоплений твердою, неподатливою циліндричною трубкою, зазнає стиску від сил, рівномірно розподілених по кінцевих попереччях mn і pq (рис. 103). 1) Знайдіть тиск x на стінки трубки, коли подовжна стискна напруга в циліндрі дорівнює $p = 200$ *кг/см*² і Пуассонове відношення $\sigma = 0{,}25$. 2) Яке повинно бути Пуассонове відношення, коли тиск на стінки трубки дорівнює 80 *кг/см*²?

Рис. 103

Відповідь. 1) $x = 66^2/_3$ *кг/см*²; 2) $\sigma = {}^1/_{3,5}$.

94. Бетонну круглу колону щільно обхоплено залізною оболонкою (рис. 104). Знайдіть розтяжну напругу в оболонці, коли колону стискатиме сила 12 *т*. На скільки відсотків міцнішає колона через наявність залізної оболонки, коли розрахунок провадиться за величиною найбільших дотичних напруг

$$(\sigma = 0{,}3; \quad E_{бет} = 2\,.\,10^5 \text{ кг/см}^2)?$$

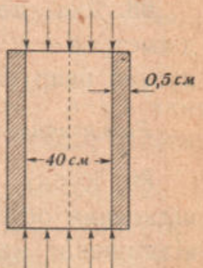


Рис. 104

Як зміняться напруги в оболонці, коли її грубину збільшити вдвоє?

Які будуть напруги в оболонці, коли вважати її за зовсім нерозтяжну?

РОЗДІЛ III

ГИНКІ НИТКИ Й ТОНКОСТІННИЙ ПОСУД

95. Мідний електричний дріт натягнуто між стовпами, віддаленими один від одного на l *м* (рис. 105). Доведіть, що при малих стрілках обвису f розтяжні напруги в дроті можна вважати за однакові вздовж дроту, просто пропорційні до l^2 і обернено пропорційні до f. Знайдіть натяг у дроті при $l=40$ *м*; $f=0,4$ *м*; q, вага подовжинного метра дроту, дорівнює 0,6 *кг*.

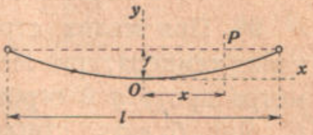


Рис. 105

Розв'язання. Найнижчу точку O дроту візьмім за початок координат, вісь X-ів спрямуймо горизонтально, а вісь Y-ів—вертикально догори. Вилучім частину дроту між початком координат і точкою P з абсцисою x. Нехай H буде натяг у точці O; він буде горизонтальний. Літерою T позначмо натяг у точці P. А що ми вважаємо дріт за гнучкий, то, очевидно, натяги T й H мають напрями дотичних до тої кривої, що по ній дріт обвисає. Напишім рівнання рівноваги вилученої частини дроту. Крім натягів T й H, на неї чинить власна вага G. Коли q є вага подовжного метра дроту, то при малому обвисанні досить точно можна покласти: $G=xq$. Умови рівноваги будуть:

$$1)\ H=T\frac{dx}{ds};\quad 2)\ qx=T\frac{dy}{ds};$$

звідси

$$\frac{H}{qx}=\frac{dx}{dy};$$

Інтеґруючи одержимо: $Hy=q\frac{x^2}{2}+C$. Умови на кінцях такі: коли $x=0$, то й $y=0$; отже, $C=0$; коли $X=\frac{l}{2}$, то $y=f$, отже,

$$Hf=\frac{ql^2}{8}.$$

Натяг у найнижчій точці

$$H=\frac{ql^2}{8f}=\frac{0,6}{2}\cdot\frac{20^2}{0,4}=300\ кг.$$

Натяг дроту в довільній точці визначиться формулою:

$$T = H\frac{ds}{dx} = H\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Найбільший натяг буде на кінцях дроту, де

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{l}{2}} = \frac{4f}{l}.$$

При малих вартостях відношення $\frac{f}{l}$ можна покласти

$$(T)_{max} = H\sqrt{1+\left(\frac{4f}{l}\right)^2} \cong H\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{4f}{l}\right)^2\right] = H\left[1+\frac{8f^2}{l^2}\right].$$

96. При малих стрілах обвису багато впливає на натяг хитання температури. Нехай ми знаємо прогін l, вагу подовжинного метра дроту q й стрілу обвису f_0 при якійнебудь температурі t_0. Які будуть стріла обвису й натяг дроту при температурі t?

Розв'язання. Обчислім довжину дроту за завданим прогоном l і стрілою обвисання. Рівнання кривої обвису напишемо таке:

$$y = \frac{qx^2}{2H} = \frac{4x^2.f}{l^2}.$$

Довжина дроту

$$s = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\left\{1+\left[\frac{8fx}{l^2}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}dx.$$

Розклавши підінтегральну величину в ряд і відкинувши малі вищих порядків, знайдемо:

$$s = 2\int_0^{\frac{l}{2}}\left(1+\frac{32.f^2.x^2}{l^4}\right)dx = \left(l+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l}\right) = l\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right). \qquad [1]$$

Нехай $s_0 = l\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{f_0}{l}\right)^2\right]$ буде початкова довжина дроту при температурі t_0. Коли температура підвищується до t, то дріт видовжується. Його нова довжина матиме вигляд:

$$s = s_0 + l\alpha(t-t_0) + \frac{H-H_0}{F.E}\cdot l. \qquad [2]$$

(Другий член дає видовження від температури, а третій—видовження від зміни натягу). Визначивши s_0 і H_0 через l_1 і f_0, а величини s і H через l і f, знайдемо рівняння для визначення f, тобто для обчислення нової стріли обвису. Знаючи її, не важко вже обчислити й натяг дроту при температурі t. З [2] маємо:

$$l\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)=l\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f_0^2}{l^2}\right)+l.\alpha\,(t-t_0)+\frac{q.l^2}{8.F.E}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_0}\right)\cdot l,$$

або

$$f^3-\frac{3}{8}\cdot l^2\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{f_0^2}{l^2}+\alpha\,(t-t_0)-\frac{q.l^2}{8.F.E}\cdot\frac{1}{f_0}\right)f-\frac{3}{64}\cdot\frac{q.l^4}{F.E}=0. \qquad [3]$$

Для стріли f маємо, таким чином, кубічне рівняння. Величину f_0 можна визначити як функцію від початкового натягу; тоді буде:

$$f^3-\frac{3}{8}\cdot l^2\left[\frac{1}{24}\cdot\frac{q^2.l^2}{H_0^2}+\alpha\,(t-t_0)-\frac{H_0}{E.F}\right]f-\frac{3.q.l^4}{64.F.E}=0. \qquad [4]$$

Щоб одержати вираз через початкову напругу, покладім:

$$p_0=\frac{H_0}{F};\qquad \lambda=\frac{q}{F},$$

$$f^3-\frac{3}{8}\cdot l^2\left[\frac{1}{24}\cdot\frac{\gamma^2.l^2}{p_0^2}+\alpha\,(t-t_0)-\frac{p_0}{E}\right]\cdot f-\frac{3.\gamma.l^4}{64.E}=0. \qquad [5]$$

97. Телеграфний дріт чіпляють при температурі +18°C. Яку треба взяти стрілу обвису, щоб узимку при температурі −25°C напруга не перевищувала 1600 *кг/см²*? Прогін $l=50$ *м*, $E=2\,.\,10^6$ *кг/см²*; $\alpha=0{,}0000125$; $\gamma=0{,}0076$ *кг/см³*.

Розв'язання. З результату попереднього завдання

$$f^3-\frac{3}{8}\,l^2\left[\frac{1}{24}\cdot\frac{\gamma^2.l^2}{p_0^2}+\alpha\,(t-t_0)-\frac{p_0}{E}\right]\cdot f-\frac{3}{64}\cdot\frac{\gamma.l^4}{E}=0.$$

Поклавши $t_0=-25°\,\mathrm{C}$, $t=+18°\,\mathrm{C}$, $p_0=1600$ *кг/см²*, знайдемо шукану стрілу f і рівняння:

$$f^3-2241f-148600=0;\qquad f=66{,}8\ \text{см}.$$

Рис. 106

98. Який буде натяг і стріла обвису мідного дроту, почепленого між двома точками *A* й *B* (рис. 106), коли його довжина в ненапруженому стані дорівнює $s=l=40$ *м*; $E=1\,.\,10^6$ *кг/см²*; $\gamma=0{,}008$ *кг/см³*.

Розв'язання. Видовження й обвисання мідного дроту відбувається від розтяжного зусилля $H=\frac{ql^2}{8f}$. Величина видовження

$$\lambda=\frac{lH}{EF}=\frac{ql^3}{EF.8f}. \qquad [1]$$

З другого боку, λ можна визначити через стрілу обвисання f:

$$\lambda=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)-l=l\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}. \qquad [2]$$

Прирівнявши [1] до [2], знаходимо рівнання для визначення f:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}=\frac{ql^2}{EF.8f}; \quad \frac{4}{3}f^3=\frac{ql^4}{16EF}. \qquad [3]$$

$$f=\frac{l}{2}\sqrt[3]{\frac{l\gamma.3}{8E}}=2000\sqrt[3]{\frac{2000.0,008.3}{4.1.10^6}}=20\sqrt[3]{12}=45,8\ см.$$

$$p=\frac{H}{F}=\frac{ql^2}{8fF}=\frac{\gamma l^2}{8f}=\frac{0,008.(2000)^2}{2.45,8}=349\ кг/см^2.$$

99. Дослідіть, як впливає на натяг дроту додаткове обтяження, наприклад, тиск вітру, снігу, льоду.

Розв'язання. Від впливу додаткового обтяження дріт видовжується, і стріла обвисання більшає. Нехай f_0 буде первісна стріла обвисання, а f—стріла обвисання після додаткового обтяження; тоді:

$$\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{f_0^2}{l^2}=\frac{H-H_0}{FE}=\frac{1}{FE}\left[\frac{(q+q_0)\,l^2}{8f}-\frac{q_0l^2}{8f_0}\right]. \qquad [1]$$

Тут q_0 є вага подовжинної одиниці дроту, а q — додаткове обтяження. З [1] знаходимо:

$$f^3+\frac{3}{8}l^2\left[-\frac{8}{3}\cdot\frac{f_0^2}{l^2}+\frac{q_0l^2}{8FEf_0}\right]f-\frac{3l^2}{64}\cdot\frac{l^2}{FE}(q+q_0)=0;$$

коли

$$q=0, \text{ то } H=H_0.$$

100. Мідним дротом подається енерґію в 10 кіловатів при напрузі в 250 вольтів. Віддаль між стовпами $l=50$ *м*, їхня височина $h=7$ *м*. З якою силою треба натягти дріт, щоб його височина над землею в найнижчій точці дорівнювала 6 *м*? Щільність струму 2 амп. на 1 *мм*^{2}. Зробіть те саме обчислення для алюмінійного дроту (питома вага міді 8,8, алюмінію 2,5).

Відповідь. 55,0 *кг*; 15,6 *кг*.

101. Знайдіть ту стрілу обвисання, яку треба дати дротові, коли допускну напругу на розтяг взяти $p = 2000$ *кг/см*², віддаль між стовпами $l = 40$ *м*, діяметр дроту $d = 5$ *мм*, обмерзання 20% власної ваги, хитання температури ± 40° R. Провідню роблять при 0°. Вага подовжинної одиниці дроту $q = 0{,}0015$ *кг/см*; $E = 2 . 10^6$ *кг/см*².

Розв'язання. Найбільший натяг H_0 буде відповідати найнижчій температурі $t = -40°$; нехай цьому максимальному натягові відповідає напруга 2000 *кг/см*². Відповідну стрілу обвисання f_0 знайдемо з формули:

$$H_0 = \frac{(q + 0{,}20q)\, l^2}{8f_0}.$$

Стрілу обвисання f, відповідну до $t_0 = 0°$ й відсутности обмерзання, визначить рівняння:

$$l\left(1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l^2}\right) = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\right) + l . \alpha\,(t_0 - t) + \frac{ql^2}{8FE}\left(\frac{1}{f} - \frac{1 + 0{,}20}{f_0}\right) l.$$

102. Перевіряючи міцність електричних дротів, треба зробити обчислення з такими двома припущеннями: 1) При температурі — 5°С на дріт чинить вага льоду, що вкриває дріт шаром завгрубшки 1 *см*, і тиск вітру, рівний 28 *кг* на *м*² діяметрального перекрою дроту. 2) При температурі — 40°С й коли немає ожеледі й вітру. Визначаючи височину завішування дроту, треба також розглянути випадок високої температури + 40°С.

Виходячи з цих вимог, треба обчислити мідний дріт, що має площу поперечня 35 *мм*² і вагу подовжинного метра 0,315 *кг*, коли прогін $l = 200$ *м* і допускна напруга 1800 *кг/см*². При обчисленні візьміть питому вагу льоду 0,9; $E = 1 . 10^6$ *кг/см*² і $\alpha = 165 . 10^{-7}$. Віддаль найнижчої точки дроту від землі дорівнює 7 *м*.

Розв'язання. Встановляємо залежність між стрілами обвисання й змінами так обтяження дроту, як і його температури. Коли f_0, q_0 і t_0 є величини, що визначають один стан дроту, а f, q й t — другий стан, то з розгляду довжини дроту можна написати:

$$l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\right) + l\alpha\,(t - t_0) + \frac{l^3}{8FE}\left(\frac{q}{f} - \frac{q_0}{f_0}\right).$$

Спростивши матимемо рівняння:

$$f^3 - f\left[f_0^2 + \frac{3}{8}\, l^2 \alpha\,(t - t_0) - \frac{3}{64}\,\frac{q_0 l^4}{F . E f_0}\right] - \frac{3}{64}\,\frac{ql^4}{FE} = 0. \qquad [1]$$

За початковий стан візьмім той, коли на дріт чинить вага льоду й тиск вітру. Припустім, що при цих несприятливих умовах напруги якраз рівні допускній напрузі R. Тоді початкова стріла визначиться з рівняння:

$$\frac{q_0 l^2}{8 f_0} = H = R.F. \qquad [2]$$

Величину q_0 визначить величина q' власної ваги дроту, величина q'' ваги льоду й величина тиску вітру. При наших розмірах маємо:

$$q' = 0{,}315 \ кг/м;$$

$$q'' = \frac{\pi}{4}(2{,}67^2 - 0{,}67^2) . 100 . 0{,}9 = 0{,}473 \ кг/м.$$

Тиск вітру, що припадає на подовжинний метр дроту й спрямований горизонтально, буде:

$$q''' = 28 . 0{,}0267 = 0{,}745 \ кг/м.$$

Отже,

$$q_0 l = l \sqrt{(q' + q'')^2 + q'''^2} = 217 \ кг.$$

Рівняння друге дає нам

$$f_0 = 8{,}61 \ м.$$

Знайдім тепер стрілу обвисання при температурі + 40° С. Для цього звертаємось до рівняння [1] і підстановлюємо до нього знайдені вище величини. Замість q доведеться підстановити величину 0,315 *кг/м*. Поробивши потрібні обчислення одержимо:

$$f^3 - 58{,}2 f - 67{,}5 = 0,$$

звідси

$$f = 8{,}15 \ м.$$

Щоб визначити напруги при низькій температурі, скористуємось тим самим рівнянням [1]. Підстановивши в нього замість t величину − 40° С і зберігши для інших величин ті самі вартості, що й у попередньому випадку, одержимо:

$$f^3 - 38{,}4 f - 67{,}5 = 0.$$

звідси

$$f = 6{,}94 \ м; \quad H = \frac{63 . 280}{8 . 6{,}94} = 227 \ кг; \quad p = \frac{227}{0{,}35} = 649 \ кг/см^2.$$

Таким чином, найбільше обвисання й найбільша напруга відповідають першому розглянутому випадкові; а що для цього випадку ми взяли допускну напругу, то міцність дроту буде цілком забезпечена. Скориставшись величиною найбільшого обвисання, знайдемо для височини завішування дротів величину

$$h = 8{,}61 + 7 = 15{,}61 \ м.$$

103. Як зміниться натяг гинкої нитки, коли наблизити точки завішування на величину λ?

Розв'язання. Нехай f_0 і H_0 відповідають початковій формі рівноваги, а f і H будуть стріла обвисання й натяг дроту після зближення точок завішення. З розгляду довжини дроту одержуємо:

$$l+\frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l}=l-\lambda+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l}+\frac{(H_0-H)\,l}{EF},$$

звідси

$$\lambda=\frac{(H_0-H)\,l}{EF}+\frac{q^2l^3}{24}\left(\frac{1}{H^2}-\frac{1}{H_0^2}\right). \qquad [1]$$

Для визначення H маємо таке кубічне рівняння:

$$H^3+H^2\left(\frac{q^2l^2EF}{24H_0^2}+\frac{\lambda}{l}EF-H_0\right)-\frac{q^2l^2}{24}EF=0. \qquad [2]$$

104. Необмежена кількість гнучких стовпів (рис. 107*a*) підтримує дріт, якого натяг для всіх прогонів дорівнює H_0. Знайдіть натяги H_1, $H_2, \ldots$, які виникнуть у різних прогонах після розриву дроту, змальованого на рис. 107*b*. Штивність стовпів така, що прикладена до вершини в напрямі лінії стовпів горизонтальна сила 1 *кг* викликає вгин α *м*.

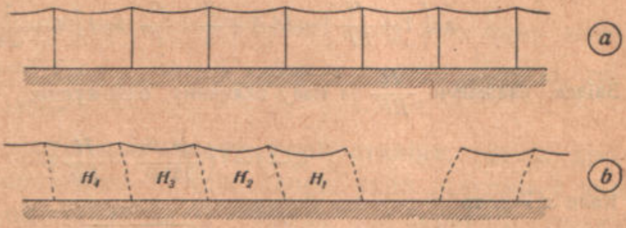


Рис. 107

Розв'язання. Коли H_1, $H_2, \ldots$ є натяги в послідовних прогонах, то відповідні зближення точок завішення зобразяться так:

$\lambda_1=\alpha\,[H_1-(H_2-H_1)]$; $\lambda_2=\alpha\,[(H_2-H_1)-(H_3-H_2)]$; $\lambda_3=\alpha\,[(H_3-H_2)-(H_4-H_3)]$.

На основі рівняння [1] попереднього завдання, ми можемо скласти таку систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\,(2H_1-H_2)&=\frac{(H_0-H_1)\,l}{EF}+\frac{q^2l^3}{24}\left(\frac{1}{H_1^2}-\frac{1}{H_0^2}\right)\\ \alpha\,(2H_2-H_1-H_3)&=\frac{(H_0-H_2)\,l}{EF}+\frac{q^2l^3}{24}\left(\frac{1}{H_2^2}-\frac{1}{H_0^2}\right)\\ \alpha\,(2H_3-H_2-H_4)&=\frac{(H_0-H_3)\,l}{EF}+\frac{q^2l^3}{24}\left(\frac{1}{H_3^2}-\frac{1}{H_0^2}\right)\end{aligned}\right\}. \qquad [1]$$

. . . .

Розв'язуючи цю систему рівнань, скористуймось тим, що вплив розриву на натяг дроту швидко маліє з віддаленням від місця розриву, отже, H_n в міру більшання n наближається до H_0. Розв'язання рівнань [1] одержуємо шляхом послідовних спроб. Завдаймо довільно вартість для H_1 меншу, ніж H_0, і підстановім її в перше рівнання [1]. Тоді з цього рівнання можна буде знайти H_2. Підставивши одержану вартість H_2 до другого рівнання системи [1], знайдемо H_3 і т. д. Коли ми вдало добрали вартість для H_1, то, повторюючи зазначені вище операції, ми будемо одержувати вартості H_n, що необмежено наближаються до H_0 зі зростанням n. Виконати зазначені спроби дуже легко й після декількох спроб можна забезпечити достатню для практичної мети точність визначення H_1.

105. Як залежить натяг дроту від його первісної довжини s_0, коли віддаль l між точками чіпляння завдано?

Розв'язання. Нехай H буде натяг дроту. Дріт від впливу цього натягу видовжиться на $\frac{Hs_0}{EF}$. Для визначення натягу одержуємо формулу:

$$s_0\left(1+\frac{H}{EF}\right)=l\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)=l\left(1+\frac{1}{24}\cdot\frac{q^2l^2}{H^2}\right).$$

Звідси, вважаючи $\frac{H}{EF}$ за малу величину, одержуємо:

$$s_0-l=l\left(\frac{q^2.l^2}{24H^2}-\frac{H}{EF}\right).$$

Коли $s_0=l$, то

$$H=\sqrt{\frac{q^2.l^2.E.F}{24}}.$$

106. Стрілку переводиться з центрального посту за допомогою 5 *мм* дроту, що підтримується через кожні 10 *м* коточками (рис. 108). Початковий натяг дроту при температурі + 10° дорівнює 100 *кг*. Знайдіть граничну віддаль стрілки від посту, коли допускний мертвий хід тяжа 10 *см*. Зусилля для переводу стрілки 100 *кг* (понад сталий натяг), максимальна температура + 50°C.

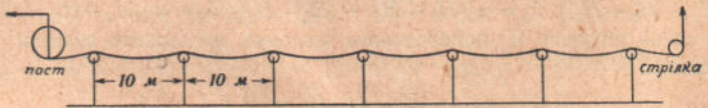


Рис. 108

Коефіцієнт теплового поширення $\alpha=0{,}0000125$, $E=2{,}15\,.\,10^6$ *кг/см²*. 1 *м* дроту важить 0,15 *кг*.

Розв'язання. При 50°C стрілу обвисання знайдемо з формули:

$$f^3-f\left(\frac{1}{24}\cdot\frac{q^2.l^2}{H_0^2}+\alpha\,(t-t_0)-\frac{H_0}{FE}\right)\frac{3}{8}\,l^2-\frac{3}{64}\cdot\frac{ql^4}{FE}=0.$$

Тут $H_0=100$ *кг*, $l=1000$ *см*, $F=0{,}196$ *см*, $q=0{,}0015$ *кг/см²*, $t=50°$, $t_0=10°$; підстановивши це до рівняння, знайдемо:

$$f^3-102f-167=0; \quad f=11 \text{ см}.$$

Відповідний натяг $H=\frac{q\,.\,l^2}{8f}=17$ *кг*. При переводі стрілки натяг буде 117 *кг*. Мертвий хід складається: 1) з видовження від додаткового натягу 100 *кг*:

$$\lambda_1=\frac{100.3}{F.E}=0{,}238 \text{ см};$$

2) з різниці довжини дроту при натягах 117 *кг* і 17 *кг*:

$$\lambda_2=\frac{8}{3l}(f^2-f_1^2)=0{,}316 \text{ см}.$$

Отже, мертвий хід, відповідний до одної дільниці дроту між двома коточками, буде: $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=0{,}554$ *см*. Допускна кількість прогонів $\frac{10}{0{,}554}\cong 18$, гранична віддаль $18\times 10=180$ *м*.

107. Розв'яжіть попередню задачу, припустивши, що в дротяний ланцюг впроваджено компенсатора, який підтримує при всякій температурі постійний натяг $=190$ *кг*, при переводі стрілки натаг дорівнює $100+100=200$ *кг*.

Розв'язання. Стріли обвисання: коли $H=100$ *кг*, то $f=\frac{15}{8}$ *см*; коли $H=200$ *кг*, то $f_1=\frac{15}{16}$ *см*; $\lambda_1=\frac{H.s}{F.E}=0{,}238$ *см*, $\lambda_2=\frac{8}{3.1000}\left[\left(\frac{15}{8}\right)^2-\left(\frac{15}{16}\right)^2\right]=0{,}007$ *см*.

Отже, мертвий хід для одного прогону $=0{,}245$ *см*.

Гранична кількість прогонів $\frac{10}{0{,}245}=41$; віддаль 410 *м*.

108. Визначте залежність між натягом і стрілою обвисання нитки, без припущення, що крива обвисання є параболя.

Розв'язання. Нехай T_0 буде натяг дроту в найнижчій точці й T — натяг у довільному поперечні x (рис. 109). З умов рівноваги маємо:

$$T\frac{dx}{ds}=T_0, \qquad [1]$$

$$T\frac{dy}{ds}=qs. \qquad [2]$$

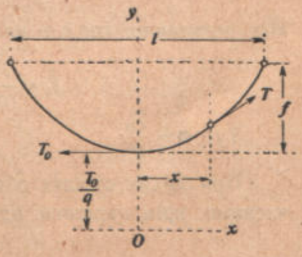


Рис. 109

Звідси:

$$T_0\frac{dy}{dx}=qs,$$

або

$$T_0\frac{d^2y}{dx^2}=q\frac{ds}{dx}=q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Інтеґруючи знайдемо:

$$\ln\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]=\frac{q}{T_0}x+C.$$

Через те, що $\frac{dy}{dx}=0$, коли $x=0$, то $C=0$

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=e^{\frac{q}{T_0}x}. \qquad [3]$$

Помноживши й поділивши ліву частину на

$$\frac{dy}{dx}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

знайдемо:

$$\frac{dy}{dx}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=-e^{-\frac{q}{T_0}x}. \qquad [4]$$

З [3] і [4]:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{q}{T_0}x}-e^{-\frac{q}{T_0}x}\right).$$

$$y=\frac{T_0}{2q}\left(e^{\frac{q}{T_0}x}+e^{-\frac{q}{T_0}x}\right)+C.$$

Коли обрати початок координат так, як показано на рис. 109, то $C=0$,

$$y=\frac{T_0}{2q}\left(e^{\frac{q}{T_0}x}+e^{-\frac{q}{T_0}x}\right)=\frac{T_0}{q}\cos h\frac{qx}{T_0}.$$

Звідси стріла обвисання буде:

$$f_1=\frac{T_0}{q}\left(\cos h\frac{lq}{2T_0}-1\right), \qquad [5]$$

або, розклавши $\cos h$ в ряд, знайдемо:

$$f_1=\frac{T_0}{q}\left(\frac{l^2}{2.4a^2}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{l^4}{16a^4}+\cdots\right).$$

Тут $a=\frac{T_0}{q}$.

При малих стрілах обвисання, тобто, коли T_0 велике, можна знехтувати всіма членами, крім першого: одержимо відому формулу:

$$f=\frac{ql^2}{8T_0}. \qquad [6]$$

Різниця між результатами формул [5] і [6] навіть і при великих стрілах мала. Для порівняння наводимо таблицю для $l = 100$ *м*.

T_0 f	1000 *кг/см²*	500 *кг/см²*	300 *кг/см²*	200 *кг/см²*	100 *кг/см²*	50 *кг/см²*
З формули [6] $\frac{f}{l}$	0,0094	0,0188	0,0313	0,0469	0,0938	0,1875
З формули [5] f_1	$1{,}0001f$	$1{,}0005f$	$1{,}0013f$	$1{,}0068f$	$1{,}0377f$	$1{,}0475f$

На основі рівняння [1], натяг у довільній точці буде:

$$T = T_0\frac{ds}{dx} = T_0\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = T_0\sqrt{1+\sin h^2\frac{qx}{T_0}} = T_0\cos h\frac{qx}{T_0} = qy, \qquad [7]$$

тобто натяг пропорціональний до ординати.

Прикладім це до розв'язання такої задачі.

Стальну линву натягнуто між точками *A* й *B* (рис. 110). Яка буде розтяжна напруга у верхньому кінці *B*, коли в точці *A* напруга 1000 *кг/см²*, питома вага 7,5?

Відповідь. 1075 *кг/см²*.

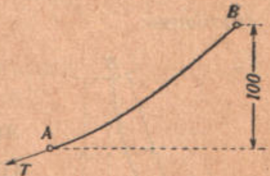


Рис. 110

109. Дріт завдовжки $s = 103$ *м* натягнуто між двома точками, що містяться на одній височині на віддалі $l = 100$ *м* одна від одної. Обчисліть стрілу обвисання, нехтуючи розтягом дроту: 1) вважаючи вісь дроту за ланцюгову лінію, 2) вважаючи вісь дроту за параболю.

Розв'язання. Довжина ланцюгової лінії

$$s = 2\left[\frac{T_0}{q}\frac{dy}{dx}\right]_{x=\frac{l}{2}} = 2a\sinh\frac{l}{2a}\cdot \quad a = \frac{T_0}{q}.$$

Стріла обвисання

$$f = a\left(\cos h\frac{l}{2a} - 1\right),$$

звідси

$$\cos h\frac{l}{2a} = \frac{f}{a} + 1; \quad \sin h\frac{l}{2a} = \frac{s}{2a}.$$

Підвівши по квадрату й віднявши, знаходимо:

$$-\frac{s^2}{4a^2}+\frac{f^2}{a^2}+2\frac{f}{a}=0,$$

звідси

$$a=\frac{\frac{s^2}{4}-f^2}{2f}=\frac{T_0}{q}, \quad s=\frac{\frac{s^2}{4}-f^2}{f}\sin h\frac{l.f}{\frac{s^2}{4}-f^2}.$$

Поклавши

$$\frac{l.f}{\frac{s^2}{4}-f^2}=\varphi, \qquad [a]$$

одержимо:

$$\frac{s}{l}\varphi-\sin h\varphi, \quad \text{або} \quad 1{,}03\varphi=\sin h\varphi.$$

Розв'язавши це рівняння за допомогою таблиць, знайдемо:

$$\varphi=0{,}42.$$

З рівняння [a] знаходимо:

$$f=1070 \text{ см}.$$

Визначаючи f із формули

$$s=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right),$$

знаходимо:

$$f=1060 \text{ см}.$$

110. Встановіть залежність між довжиною линви s і натягом T в її нижньому кінці (рис. 111).

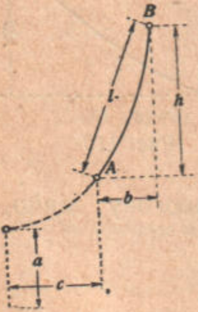


Рис. 111

Розв'язання. З [7] задачі 108

$$\frac{ds}{dx}=\frac{q}{T_0}\cdot y$$

$$ds=\cos h\frac{qx}{T_0}\cdot dx.$$

Впровадивши позначення: $\frac{T_0}{q}=a$, знайдемо для довжини линви s такий вираз:

$$s=a\left(\sin h\frac{b+c}{a}-\sin h\frac{c}{a}\right)=2a.\cos h\frac{2c+b}{2a}\cdot\sin h\frac{2a}{b}. \qquad [1]$$

З другого боку,

$$h=y_{b+c}-y_c=a\left(\cos h\frac{b+c}{a}-\cos h\frac{c}{a}\right)=2a\sin h\frac{b+2c}{2a}\sin h\frac{b}{2a}. \qquad [2]$$

Взявши до уваги формулу

$$\cos h^2 \alpha - \sin h^2 \alpha = 1,$$

одержимо з [1] і [2]:

$$s^2 - h^2 = 4a^2 \sin h^2 \frac{b}{2a} \cdot \qquad [3]$$

Коли s, h і b завдано, то з рівняння [3] можна знайти a, отже й величину T_0. Величина $2a$ звичайно буває велика проти b, а через це [3] можна переписати так:

$$s^2 - h^2 = 4a^2 \left[\frac{b}{2a} + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{b}{2a}\right)^3\right]^2 = b^2 \left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]^2,$$

або

$$s^2 - l^2 = b^2 \frac{1}{3}\left(\frac{b}{2a}\right)^2. \qquad [4]$$

Припустім, що різниця між s і l мала:

$$\frac{s-l}{l} = i;$$

тоді

$$\frac{(s+l)(s-l)}{2l^2} = \frac{s-l}{l} = i.$$

Вираз [4] перепишімо так:

$$i = \frac{\cos^2 \alpha}{2} \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{4a^2}, \qquad a = \frac{T_0}{q} = \frac{b \cos \alpha}{2\sqrt{6i}}. \qquad [5]$$

де α є кут між хордою AB й горизонтальною віссю.

Натяг линви в точці A буде:

$$T = T_0 \cos h \frac{c}{a} = a.q. \cos h \frac{c}{a};$$

$\cos h \frac{c}{a}$ знайдемо з рівняння [2]. Взявши до уваги, що

$$\sin h \frac{b+2c}{2a} = \sin h \frac{b}{2a} \cdot \cos h \frac{c}{a} + \cos h \frac{b}{2a} \cdot \sin h \frac{c}{a},$$

вставивши це в рівняння [2] й замінивши

$$\sin h \frac{c}{a} = \sqrt{\cos h^2 \frac{c}{a} - 1},$$

одержимо для $\cos h \frac{c}{a}$ таке рівняння:

$$\cos h^2 \frac{c}{a} \cdot \sin h^2 \frac{b}{2a} + 2 \cos h \frac{c}{a} \cdot \frac{h}{2a} . \sin h^2 \frac{b}{2a} - \sin h^2 \frac{b}{2a} \cdot \cos h^2 \frac{b}{2a} - \frac{h^2}{4a^2} = 0,$$

звідси

$$\cos h\frac{c}{a}=\frac{h}{2a}\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{\sin h^2\frac{b}{2a}}+\frac{4a^2}{h^2}\cos h^2\frac{b}{2a}}\right).$$

Числовий приклад. Покладім

$$i=\frac{s-l}{l}=0{,}01;\ \alpha=45^\circ;$$

тоді

$$a=\frac{b\cos\alpha}{2\sqrt{6i}}=\frac{b.0{,}707.10}{2.2{,}45}$$

$$2a=2{,}88b$$

$$\sin h\frac{b}{2a}=0{,}353 \qquad \frac{b}{2a}=0{,}347$$

$$\sin h^2\frac{b}{2a}=0{,}125 \qquad \cos h\frac{b}{2a}=1{,}0605$$

$$\frac{h^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}=0{,}347^2=0{,}0120 \qquad \cos h^2\frac{b}{2a}=1{,}125$$

$$\cos h\frac{c}{a}=0{,}347\left(-1+\sqrt{1+8+1{,}125.8{,}33}\right)=0{,}347.3{,}29=1{,}142.$$

$$T=T_0\cos h\frac{c}{a}=q\cdot\frac{2{,}88.b}{2}\cdot 1{,}142=1{,}64b.q.$$

Натяг у верхньому кінці:

$$T_1=(1{,}64b+h)\,q.$$

111. Обчисліть натяг H залежно від обвисання f по середині прогону, коли h мале проти a.

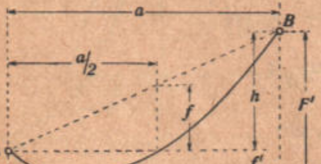


Рис. 112

Розв'язання. Натяг у найнижчій точці O (рис. 112) буде:

$$H=\frac{qm^2}{2f'}=\frac{qn^2}{2F'},$$

отже:

$$\frac{n}{m}=\sqrt{\frac{F'}{f'}}=\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}. \qquad [1]$$

Крім того, маємо умову $m+n=a$; підстановивши сюди n з [1], одержимо:

$$m+m\sqrt{\frac{f+h}{f'}}=a, \qquad m=\frac{a}{1+\sqrt{\frac{f+h}{f'}}},$$

$$H=\frac{qa^2}{2f'\left(1+\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}\right)^2}=\frac{qa^2}{8f};$$

бо

$$f=\frac{h}{2}+f'-\frac{f'}{m^2}\left(\frac{n-m}{2}\right)^2=\frac{h}{2}+f'-f'\cdot\frac{1}{4}\left(2+\frac{h}{f'}-2\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}\right)=$$

$$=\frac{h}{4}+\frac{f'}{2}+\frac{f'}{2}\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}=f'\left[\frac{1}{4}\,\frac{h}{f'}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}\right]=\frac{f'}{4}\left(1+\sqrt{\frac{f'+h}{f'}}\right)^2.$$

112. До дроту AB в середній точці почеплено тягара P. Знайдіть натяг, коли вага тягара велика проти ваги дроту (рис. 113).

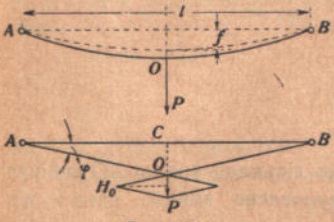


Рис. 113

Розв'язання. Нехай f буде первісне обвисання; йому відповідає натяг

$$H_0=\frac{ql^2}{8f}.$$

Від чину P середина дроту перейшла в точку O. Криві AO й OB при великому P можна вважати за прості. Коли натяг дроту після почеплення тягара позначити H_1, то довжина

$$AO=\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)\left(1+\frac{H_1-H_0}{EF}\right)=\frac{l}{2}\left(1+\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}+\frac{H_1-H_0}{EF}\right).$$

З рис. 113:

$$\frac{2H_1}{P}=\frac{AO}{OC}=\frac{AO}{\sqrt{AO^2-AC^2}},$$

або

$$H_1=\frac{P}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{AC^2}{AO^2}}}=\frac{P}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}=\frac{P}{2\sin\varphi};$$

$$1-\cos^2\varphi=1-\left(1-\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}-\frac{H_1-H_0}{EF}\right)^2=\frac{P^2}{4H_1^2};$$

$$\frac{8}{3}\,\frac{f^2}{l^2}+\frac{H_1-H_0}{EF}=\frac{P^2}{4H_1^2},$$

$$H_1^3=\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\cdot E.F-H_0\right)H_1^2-\frac{E.F.P^2}{8}=0.$$

Числовий приклад. $F=1$ *см*².

$H_0=200$ *кг/см*², $P=200$ *кг*, $ql=20$ *кг*;

$$\frac{l}{f}=\frac{200.8}{20}=80;\quad \frac{f}{l}=\frac{1}{80}.\ E=2.10^6\ кг/см^2.$$

$$H_1^3+\left[\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{80}\right)^2.2.10^6-200\right]H_1^2\frac{2.10^6}{8}\cdot 200^2=0.$$

$$H_1^3+633.H_1^2-10.1000^3=0.$$

З рис. 114:

$$H_1=1960\ кг.$$

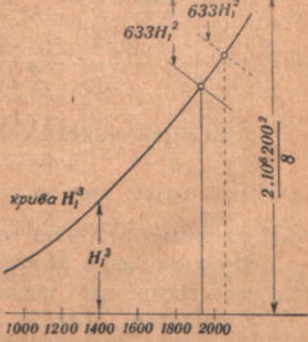


Рис. 114

113. Розв'яжіть попередню задачу, не роблячи припущень щодо простолінійности відтинків AO й OB (рис. 115).

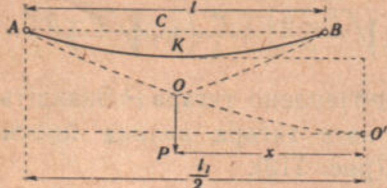


Рис. 115.

Розв'язання. При спускуватих кривих їхні обвисання можна вважати за параболі; AO буде відтинок параболі, якого вершина лежить денебудь в O'. Абсцису x знайдемо з умови:

$$qx = \frac{P}{2}\cdot$$

отже:

$$x = \frac{P}{2q} \quad \text{і} \quad \frac{l_1}{2} = \frac{l}{2} + \frac{P}{2q}.$$

Щоб визначити натяг H, скористуймось тим, що дільниця кривої AO вийшла з первісної дільниці AK й ріжницю $AO - AK$ зумовлено зміною натягу від H_0 до H_1; отже,

$$AK\left(1 + \frac{H_1 - H_0}{E.F}\right) = AO.$$

або, через те що $\frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H_1}$,

$$\frac{l}{2}\left(1 + \frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right)\left(1 + \frac{H_1 - H_0}{E.F} = \int_x^{\frac{l_1}{2}} dx\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2.x^2}{H_1^2}\right).\right.$$

Взявши до уваги, що віддаль O' до сили P дорівнює $\frac{P}{2q}$ (силу можна замінити вагою уявної частини дроту), одержимо:

$$\frac{l}{2} + \frac{l}{2}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2} + \frac{H_1 - H_0}{E.F}\right) = \frac{l}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{q^2}{H_1^2}\left[\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{2q}\right)^2 + \frac{l_1}{2}\cdot\frac{P}{2q}\right]\frac{l}{2};$$

$$\frac{8.f^2}{3l^2} + \frac{H_1 - H_0}{E.F} = \frac{1}{6}\cdot\frac{q^2}{H_1^2}\left[3\left(\frac{P}{2q}\right)^2 + 3\,\frac{P}{2q}\cdot\frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\cdot \qquad [2]$$

Коли тягар великий проти ваги дроту, то $\frac{P}{2q}$ велике порівняно з $\frac{l}{2}$; тоді в дужках правої частини рівняння [2] залишаємо лише член $3\left(\frac{P}{2q}\right)^2$. У такому разі одержимо результат попередньої задачі.

Зауважмо, що в рівнанні [2] той член, що не має H_1, більший, ніж відповідний член попередньої задачі, і через це напруги будуть більші.

У числовому прикладі попередньої задачі вільний член побільшає на 10%, і напруга буде 2030 *кг/см*², тобто на $1^1/_2$% більша, ніж ми знайшли раніш. На рис. 114 точне визначення H_0 показано пунктиром.

114. Знайдіть рівняння рівноваги для тяжкої рівноопірної, нитки, тобто такої, що її площа попереччя в кожній точці пропорціональна до того натягу, який там чинить (рис. 116).

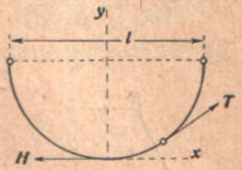


Рис. 116

Розв'язання.

$$T \cos (Tx) = H; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H} \cdot \frac{ds}{dx}, \qquad [1]$$

де q є вага подовжинної одиниці нитки в розглядуваній точці.

З умови завдання

$$q = \frac{\gamma . T}{R} = \frac{\gamma . H}{R} \cdot \frac{ds}{dx},$$

де R є допускна напруга.

Рівняння [1] напишімо так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\gamma}{R}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Інтеграля цього рівняння буде:

$$y = -\frac{R}{\gamma} \ln \cos \left(\frac{\gamma . x}{R}\right). \qquad [2]$$

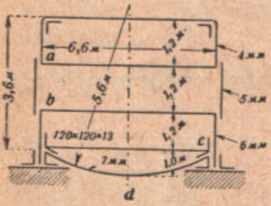


Рис. 117

115. Знайдіть напругу матеріялу в стінках, днищі й кріпильному персні резервуара типу Півд.-Зах. залізниць (рис. 117), що має місткість 14,5 саж.^{3} (140,8 $м^3$).

Відповідь. Напруга в *кг* на 1 $см^2$ в точках:

$$a \begin{cases} 100\ кг/см^2, \\ 0 \end{cases} \qquad b \begin{cases} 160\ кг/см^2, \\ 0 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} 200\ кг/см^2, \\ 0 \end{cases} \qquad d \begin{cases} 185\ кг/см^2, \\ 185\ кг/см^2. \end{cases}$$

116. Обчисліть стінки й кріпильні персні газґольдера (рис. 118) для зберігання стиснутого до 5 *атм* газу, припустивши, що найбільша напруга матеріялу 500 *кг/см²*.

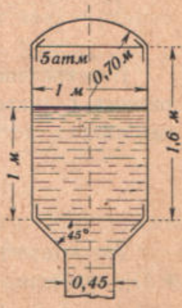


Рис. 118

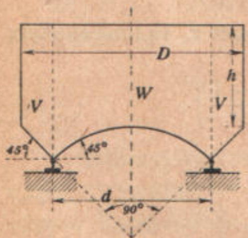


Рис. 119

117. Яка повинна бути залежність між діяметром резервуара D, діяметром опорного персня d й височиною h, щоб опорний перстень не зазнавав горизонтальних зусиль (рис. 119).

Розв'язання. Візьмім осібний випадок, коли кут в $O=90°$; тоді об'єм $W=V$, звідси одержуємо $D=d\sqrt{2}$.

118. Конічну посудину ABC (рис. 120) наллято водою доверху. Знайдіть зумовлені тиском води напруги в стінках посудини (γ є вага одиниці об'єму, а $\delta=$грубина стінки).

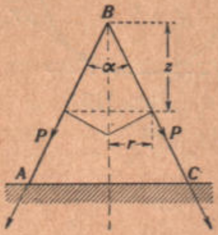


Рис. 120

Розв'язання.

$$\delta . 2\pi r . p_1 \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}\pi r^2 z\gamma;$$

отже,

$$p_1=\frac{z_2}{3\delta}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\gamma.$$

Напругу p_2 знайдемо з рівняння:

$$\frac{p_1}{\varrho_1}+\frac{p_2}{\varrho_2}=\frac{p}{\delta};\quad p_2=\frac{z_2}{\delta}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\gamma.$$

119. Знайдіть напруги в стінках резервуара, створеного півкулею радіюса ϱ й циліндром (рис. 121).

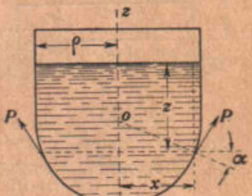


Рис. 121

Розв'язання. Одне рівняння

$$\frac{p_1+p_2}{\varrho}=\frac{\gamma z}{\gamma}. \qquad [1]$$

Перекраявши резервуар циліндричною поверхнею радіюса x, знаходимо з умови рівноваги напругу p_1, що має напрям, дотичний до меридіяльного перекрою:

$$p_1=\frac{\gamma\varrho}{\delta}\left(\frac{z_0-\varrho}{2}+\frac{\varrho}{3}\frac{1-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right). \qquad [2]$$

Тут літерою z_0 позначено глибину води, відповідно до осі z. Підстановивши в [1], знайдемо:

$$p_2=\frac{\gamma\varrho}{\delta}\left(\frac{z_0-\varrho}{2}+\frac{\varrho}{3}\frac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha.\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}\right).$$

РОЗДІЛ IV

ЗАДАЧІ НА ЗСУВ І СКРУЧУВАННЯ

Позначивши літерою G модуль пружности при зсуві й літерою p_t — дотичні напруги, одержимо для відносного зсуву формулу:

$$\gamma = \frac{p_t}{G}.$$

У тих задачах, де немає окремих указівок щодо величини G, покладено для заліза $G = 8 . 10^5$ *кг/см*^{2}.

Для кута закручування круглого стрижня користуємось формулою:

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_p};$$

тут l є довжина стрижня, а J_p — полярний момент інерції поперечча.

У випадку довільної форми суцільного поперечча кут закручування досить точно можна обчислити за приблизною формулою S.-Venant-a

$$\varphi = \frac{4\pi^2 MlJ_p}{GF^4},$$

де F є площа поперечча.

Величина найбільших дотичних напруг при скручуванні круглих стрижнів визначається формулою:

$$(p_t)_{max} = \frac{16M}{\pi d^3}.$$

У випадку круглого вала машини, що передає вправність N механічних коней і робить n обертів за хвилину, величину найбільших дотичних напруг визначає формула:

$$(p_t)_{max} = \frac{N}{n} \cdot \frac{37 . 10^5}{\pi^2 . d^3} \text{ кг/см}^2.$$

120. Із залізного бруса вирізано призму з квадратовою основою *abcd* (рис. 122). Наскільки поменшає кут *bad*, коли бруса стиснуто $p=800$ *кг/см²*? $\alpha=60°$.

Рис. 122

Розв'язання. За формулою $p_t=\frac{p\sin 2\alpha}{2}$ визначаємо величину дотичних напруг по гранях *ab* й *bc*. Зміну первісного прямого кута визначить формула:

$$\beta=\frac{p_t}{G}=0{,}000433.$$

121. Розрахуйте прогоничне злучення (рис. 123) за такими даними: розтяжна сила $P=10000$ *кг*, допускна напруга $R=1000$ *кг/см²*, на зріз $R_t=800$ *кг/см²*, на зминання стінок $R_\delta=2000$ *ке/см²* діяметрального перекрою.

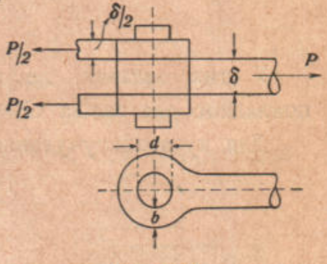


Рис. 123

Розв'язання. Почнімо з визначення діяметра прогонича. Щоб прогонич був міцний з погляду опору зрізові, треба виконати таку умову:

$$2\cdot\frac{\pi d^2}{4}R_t \geqq P;$$

звідси

$$d \geqq \sqrt{\frac{2.10^4}{800\,\pi}} \geqq 28{,}2 \text{ мм.}$$

Розмір δ треба добрати так, щоб задоволити умову міцности з погляду опору зминанню:

$$\delta l R_\delta \geqq P;$$

звідси

$$\delta \geqq \frac{P}{dR_\delta} \geqq 17{,}7 \text{ мм.}$$

Ширину вушка *b* визначимо з умови:

$$2b\delta R \geqq P; \quad b \geqq 28{,}2 \text{ мм.}$$

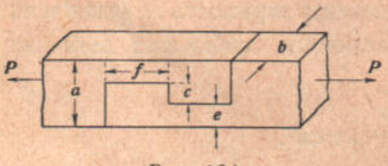


Рис. 124

122. Перевірте на сколювання, розрив і зминання змальоване на рис. 124 злучення двох брусів прямим зубом. $P=9$ *т*.

Для дуба прийнято такі допускні напруги:

1) на розтяг уздовж волокон	100 *кг/см*^{2}
2) на сколювання вздовж волокон	15 *кг/см*^{2}
3) на стиск уздовж волокон	90 *кг/см*^{2}
4) на стиск упоперек волокон	40 *кг/см*^{2}

Яке повинно бути співвідношення між f і c, щоб при прийнятих допускних напругах опір кая сколюванню й зминанню був однаковий?

123. Обчисліть змальоване на рис. 125 злучення двох брусів за допомогою залізних накладок.

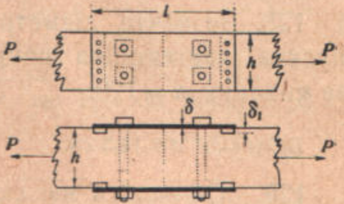


Рис. 125

Розв'язання. Глибину кая δ_1 беруть таку, щоб опір кая зминанню дорівнював опорові сколювання; звідси

$$R_\delta h\delta_1 = R_t hl;\ \delta_1 = l\cdot\frac{R_t}{R_\delta}\cdot$$

Довжину l беруть так, щоб опір кая сколюванню дорівнював половині опору на розрив; отже:

$$Rh\left(\frac{b}{2}-\delta_1\right)=R_t hl.$$

Грубину накладки визначають з умови її опору розривові.

124. Визначте діяметр нюти в злученні, змальованому на рис. 126, припустивши, що аркушам зсуватись заваджає сила тертя, зумовлена стиском аркушів нютами. На основі спроб можна припустити, що сила тертя, віднесена до 1 *см*^{2} поперечча нюти, дорівнює 1200 *кг*. (При обчисленні візьміть подвійний запас міцности й покладіть $Q=2\,m$; кількість нют дорівнює двом).

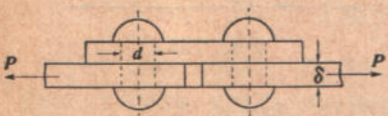


Рис. 126

125. Зробіть розрахунок того самого злучення (зад. 124), припустивши, що сили тертя немає, і нюти роблять на зріз. Допускну напругу візьміть $R_t=600$ *кг/см*^{2}. Перевірте на зминання стінки діри.

126. Визначте діяметр нют для злучення, змальованого на рис. 127, з тим самим припущенням, що й у задачах 124 і 125. Сила $P_1 = 4$ *т*.

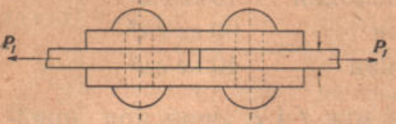


Рис. 127

127. Дві залізні смуги завгрубшки 1 *см*, зазнають подовжного розтяжного зусилля $P = 12$ *т*, злучено двома накладками. Визначте ширину смуг, кількість і діяметр нют, коли допускна напруга на розтяг $R = 750$ *кг/см*^{2}, на зріз $R_t = 600$ *кг/см*^{2}.

128. Визначте діяметр d вала машини в 200 сил, коли допускна танґенційна напруга $R_t = 200$ *кг/см*^{2}, а кількість обертів за хвилину $n = 120$.

Відповідь. $d = 14{,}5$ *см*.

129. Обчисліть на скручування два круглі вали, що з них один передає 10 механічних коней при 1000 обертах, а другий 1 механічного коня при 10 обертах за хвилину; $p_t = 120$ *кг/см*^{2}.

130. До вала однакового поперечча з діяметром 15 *см* прикладено закрутні моменти: $M_1 = 100$ *кгм*, $M_2 = 60$ *кгм*, $M_3 = 20$ *кгм* і $M_4 = 20$ *кгм* (рис. 128). Знайдіть найбільші дотичні напруги в кожній дільниці вала й повний кут закручування. Як треба було б зміняти діяметр вала по дільницях, щоб мати скрізь однакову вартість $(p_t)_{max}$?

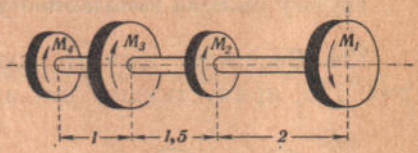


Рис. 128

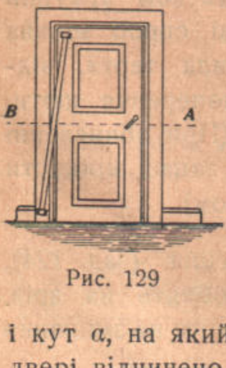


Рис. 129

131. Пружина до дверей складається із стального прута круглого поперечча, прикріпленого одним кінцем до дверей, а другим—до одвірка (рис. 129). Знайдіть силу P, з якою треба буде тягти за ручку дверей, коли їх відчиняти, і кут α, на який треба буде спочатку закрутити прута, щоб, коли двері відчинено на 90°, напруга матеріялу була $R_t = 5000$ *кг/см*^{2}.

Діяметр прута $d = 0,6$ *см*, довжина $l = 200$ *см*, ширина дверей 1 *м*, $G = 8,5 . 10^5$ *кг/см²*.

132. З якого діяметра треба починати розраховувати вал на закручування, коли допускна напруга $R_t = 200$ *кг/см²*, допускний кут закручування ${}^1/_4{}^\circ$ на подовжинний метр?

Розв'язання. Умова міцности вимагає, щоб

$$\frac{2M}{\pi r^3} < R_t. \qquad [1]$$

Перевіряючи на закручування, маємо:

$$\frac{100\,M}{G \cdot \frac{\pi r^4}{2}} = 0,00435; \qquad [2]$$

тепер залишається визначити ту вартість $d = 2r$, що при ній формули [1] і [2] дають для r однакову вартість; знайдемо:

$$2r = 11,5 \text{ см}.$$

133. Щоб визначити потужність корабельної машини, що робить $n = 120$ обертів за хвилину, виміряють кут закручування валу. Яка буде потужність, коли при діяметрі вала $d = 15$ *см* два його попереччя, що містяться на віддалі $l = 8$ *м* одне від одного, повертаються одне відносно одного на кут $\varphi = {}^1/_{15}$?

Розв'язання. Скориставшись формулою для кута закручування, легко знайти закрутний момент, а за моментом можна визначити й потужність N:

$$N = \frac{\varphi . GJ_p . 2\pi . n}{l . 60 . 100 . 75} = 556 \text{ механічних коней}$$

134. Вал діяметром 8,4 *см* робить 45 обертів за хвилину. Яка буде робота, що її він передає, коли максимальні танґенційні напруги $p_t = 300$ *кг/см²*?

Відповідь. $N = 22,2$ механічних коней

135. Знайдіть рівноопорну форму для скручуваного валу AB коли, крім моменту M_0, прикладеного на кінці вала B, є ще закрутні моменти, рівномірно розподілені вздовж його. Величина закрутного моменту, що припадає на одиницю довжини, дорівнює m.

Відповідь. Діяметр міниться за таким законом:

$$d_x^3 = \frac{16\,(M_0 + mx)}{\pi R_t} = d_0^3 + Ax;$$

x відлічується від кінця B.

136. Визначте зовнішній діяметр D й середовий d корабельного трубчастого вала для машини з потужністю 8000 мех. коней що робить 100 обертів за хвилину. Допускна напруга R_t=300 *кг/см²*. Відношення $\frac{D}{d} = 2$.

Порівняйте вагу Q трубчастого вала до ваги Q_0 суцільного вала тої самої міцности.

Роз'вязання. Закрутний момент:

$$M = \frac{8000.75.100.60}{2\pi.100}\ \textit{кгсм}; \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi D^4}{32};$$

D визначимо з рівнання:

$$R_t = \frac{MD}{2J_p}.$$

137. Призматична штаба AB з абсолютно заправленими кінцями зазнає чину двох рівних і однаково спрямованих закрутних моментів, прикладених у попереччях mn, що однаково віддалені від кінців (рис. 130). Знайдіть закрутний момент в кожній дільниці вала.

Рис. 130

138. Закрутний момент $M = 1200$ *кгм* прикладено в проміжному попереччі вала. Кінці вала заправлено нерухомо (рис. 131). Знайдіть реактивні моменти M_1 і M_2 в площах заправлення й ту величину діяметра d, що при ній $R_t = 200$ *кг/см²*.

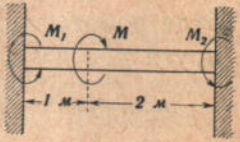


Рис. 131

Розв'язання. Кути закручування для обох дільниць вала будуть однакові, коли кінці нерухомі. У такому разі закрутні моменти оберненопропорційні до довжин дільниць; маємо:

$$M_1 = 800\ \textit{кгм}, \quad M_2 = 400\ \textit{кгм}, \quad d = 12{,}7\ \textit{см}.$$

139. Які будуть кінцеві моменти для випадку попередньої задачі, коли від чину закрутного моменту M правий кінець вала повернеться на кут $\varphi = 5' = 0{,}00145$?

Роз'вязання. Різниця кутів закручування для лівої й правої дільниць у цьому випадку дорівнює $\varphi = 5'$. Щоб визначити M_1 і M_2, маємо рівняння:

$$\frac{M_1 l_1}{GJ_p} = \frac{M_2 l_2}{GJ_p} + \varphi; \qquad M_1 + M_2 = M.$$

140. Скориставшись приблизною формулою, знайдіть модуль пружности G для бруса прямокутнього поперечча, розміром 1×5 *см*, коли при скручуванні його моментом $M = 10$ *кгм* два поперечча, що віддалені на 50 *см* одне від одного, повертаються одне відносно одного на кут $L = 0{,}000428$.

Відповідь. $G = 8.10^5$ *кг/см*^{2}.

141. Скориставшись наближеною формумою S.-Venant-a доведіть, що у випадку таких стрижнів, що їх поперечча являють собою дуже витягнутий прямокутник з боками b (довжина) й δ (ширина), закрутний момент можна обчислити за такою формулою:

$$M = 0{,}3\ \frac{b\delta^3 G\varphi}{l}.$$

Точне розв'язання для цього випадку дає

$$M = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\delta^3 G\varphi}{l}.$$

142. Формула, зазначена в попередній задачі, придатна до обчислення кута закручування у випадку поперечч, змальованих на рис. 132. Тут δ позначає ширину поперечча, а b — ту довжину, яку одержимо, коли це поперечча виправити в прямокутник. Скориставшись цим, треба прирівняти штивність C_1 при скручуванні цілої циліндричної трубки до штивности C_2 трубки однакових розмірів, але розрізаної вздовж по твірній.

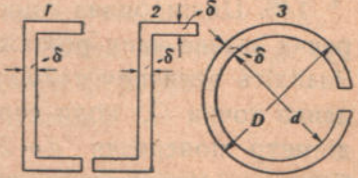


Рис. 132

Роз'вязання. З формул:

$$C_2 = \frac{\pi (D + d) \delta^3 G}{2.3}, \qquad C_1 = \frac{\pi (D^4 - d^4)\ G}{32}$$

одержимо:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{8}{3}\cdot\frac{\delta^2}{D^2+d^2}\cong\frac{4}{3}\left(\frac{\delta}{D}\right)^2.$$

143. Скориставшись наближеною формулою S.-Venant-a, знайдіть кут закручування двотетового тряму № 20, коли довжина тряму 2 *м*, а закрутний момент дорівнює 10 *кгм*.

144. Стальний вал ($G=8{,}5.10^5$ *кг*/*см*²) має такі розміри, що при закручуванні його на 90° найбільші напруги $(p_t)_{max}$, які виникають, дорівнюють 900 *кг*/*см*². Знайдіть співвідношення між довжиною й діяметром вала.

Розв'язання.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{M.l}{G.J_p};\quad (p_t)_{max}=\frac{Md}{2J_p}.$$

Отже,

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{G}{l}=\frac{2(p_t)_{max}}{d}.$$

145. Вала *AB* змінного попереччя (рис. 133) скручує пара сил, прикладена на кінцях. Треба добрати довжину *l* валу *CD* однакового попереччя так, щоб при однакових закрутних моментах його кути закручування були такі самі, як і у валі *AB*.

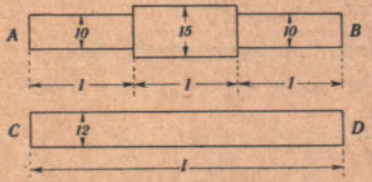


Рис. 133

146. Циліндрична ґвинтова ресора круглого попереччя зазнає чину розтяжної сили $P=100$ *кг* (рис. 134). Знайдіть величину найбільших напруг $(p_t)_{max}$ і h — осідання точки O, коли середній радіюс звоїв $r=10$ *см*, діяметр попереччя $d=2$ *см*, кількість звоїв $n=20$. Яку кількість звоїв треба взяти, щоб осідання було 5 *см*.

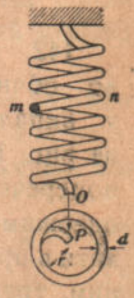


Рис. 134

Розв'язання. Перекравши ресору в *mn* і розглянувши нижню частину ресори, знайдемо, що напруги в *m* зведуться до перерізної сили *P* й до пари сил $M=Pr$. Знехтувавши напруги від перерізної сили й розглянувши лише закрутну пару, одержимо:

$$(p_t)_{max}=\frac{16Pr}{\pi d^3}\cong 636\,кг/см^2.$$

Осідання ресори знайдемо, коли прирівняємо потенційну енергію деформації до роботи зовнішньої сили P. А що ми знехтували перерізною силою, то потенційна енергія V ресори буде така сама, що й у круглому стрижні діяметра d й довжини $2\pi rn$, скрученому моментом $M = Pr$; отже:

$$V = \frac{M}{2} \cdot \frac{M.2\pi rn}{GJ_p} = \frac{M^2.2\pi rn}{2G \cdot \frac{\pi d^4}{32}}.$$

Підстановивши замість M його вартість і прирівнявши V до роботи $\frac{Ph}{2}$, знайдемо:

$$h = \frac{P2\pi r^3 n}{G \cdot \frac{\pi d^4}{3}} = 10 \text{ см}.$$

З цієї формули видно, що розтяг ресори пропорційний до n. Щоб зменшити розтяг у два рази, треба в два рази зменшити кількість звоїв.

147. Які зусилля передасть сила P точкам A й B, коли над площею mn, в якій лежить точка прикладання сили P, розташовано 10 звоїв, а під mn — 15 звоїв (рис. 135)? Знайдіть величину найбільших дотичних напруг і переміщення точки прикладання сили P, коли розміри ресори такі самі, як і в попередній задачі, а $P = 300$ *кг*.

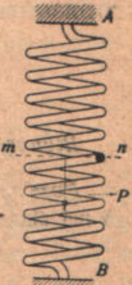


Рис. 135

148. Циліндрична ґвинтова ресора квадратового поперечча $a \times a$ зазнає чину розтяжної сили $P = 100$ *кг*. Знайдіть величну найбільших напруг і осідання ресори, коли кількість радіюс звоїв і площа поперечча залишаються ті самі, що й у задачі 146. (Обчисляючи осідання, треба скористуватись приблизною формулою S.-Venant-а для штивности при скручуванні).

Розв'язання. Щоб знайти *max* напруг при скручуванні стрижня квадратового поперечча, можна скористуватись формулою:

$$(p_t)_{max} + \frac{M}{0{,}21a^3};$$

тоді одержимо:

$$(p_t)_{max} \cong 847 \text{ кг/см}^2; \quad h = 10{,}47 \text{ см}.$$

Як зміниться результат, коли для кута закручування прикласти точнішу формулу?

149. Запобіжний хлипак притискується до паровика ґвинтовою пружиною за допомогою підойми з відношенням рамен 5 : 1 (рис. 136). Визначте, наскільки треба попереду підтягнути пружину й яка при тому буде в ній напруга, коли робочий тиск пари 10 *атм.*, діяметр хлипака 5 *см*, довжина пружини у вільному стані 70 *см*, кількість звоїв 30, середній радіюс звою 5 *см*, радіюс поперечча пружини 0,4 *см*; $G = 9 . 10^5$ *кг/см²*.

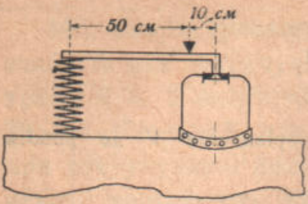


Рис. 136

Відповідь. 1) 25 *см*. 2) 2000 *кг/см²*.

150. Конічну ресору круглого поперечча розтягають сили P (рис. 137). Знайдіть граничну вартість P, коли допускна напруга $(R_t)_{max} = 3000$ *кг/см²*, $r_2 = 19$ *см*, $r_1 = 4$ *см*, d — діяметр поперечча $= 2{,}5$ *см*. Визначте розтяг ресори, коли проєкція ресори на горизонтальну площу є Архімедова спіраля:

$$\varrho = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\,\varphi}{2\pi n}.$$

Відповідь $P = 485$ *кг*, $h = 6{,}46$ *см*.

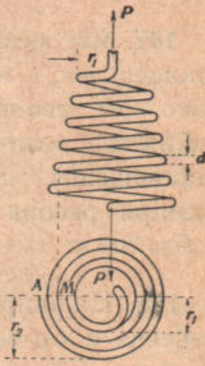


Рис. 137

Розв'язання. Візьмім точку M на осі ресори; відповідна до неї віддаль від вертикальної осі буде:

$$r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\,\varphi}{2\pi n},$$

де кут φ міниться від 0 до $2\ \pi n$ (n є кількість звоїв). Закрутний момент у точці M буде:

$$M = P\left[r_1 + \frac{(r_2 - r_1\,\varphi}{2\pi n}\right].$$

Вилучім біля точки M елемент ресори завдовжки

$$ds = \left[r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\,\varphi}{2\pi n}\right] d\varphi.$$

Від скручування цього елемента пружина розтягнеться на величину:

$$\Delta h = \frac{P}{GJ_p}\left[r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2\pi n}\,\varphi\right]^3 d\varphi.$$

Повний розтяг буде;

$$h=\frac{P}{GJ_p}\int_0^{2\pi n}\left[r_1+\frac{r_2-r_1}{2\pi n}\varphi\right]^3 d\varphi=\frac{P}{4GJ_p}\cdot\frac{2\pi n}{(r_2-r_1)}\left(r_2^4-r_1^4\right)=\frac{Pl\left(r_2^2+r_1^2\right)}{2GJ_p},$$

де l є довжина ресори у випростаному стані, що визначається формулою:

$$l=\frac{2\pi n\,(r_2+r_1)}{2}.$$

При $r_1=0$ одержимо звичайну формулу:

$$h=\frac{Plr^2}{2GJ_p}.$$

151. Знайдіть осідання конічної ресори квадратового попереччя, коли r_1, r_2, n і G залишаються ті самі, що й у попередній задачі; зберігається також і площа попереччя, отже, $a^2=\frac{\pi d^2}{4}$.

Відповідь. $h=\frac{6{,}46\pi}{3}=6{,}76$ *см*. Для штивности при скручуванні взято приблизний вираз S.-Venant-a.

152. Розв'яжіть задачу 149, припустивши, що в середині пружини міститься друга пружина з таким са́мим попереччям, з того самого матеріялу і з середовим радіюсом звою 3 *см* (рис. 138). Як відносяться між собою обтяження й напруги цих пружин?

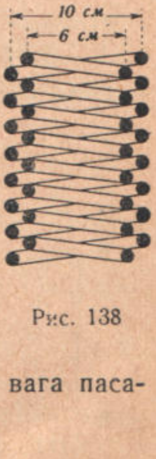


Рис. 138

Відповідь. 1) 4,4 *см*; 2) оберненопропорційно до куба радіюсів; 3) оберненопропорційно до квадрата радіюсів.

153. Ящик трамвайного вагона, що важить 3,2 *т*, лежить на 8 циліндричних ресорах із квадратовим попереччям 1,9×1,9 *см*, кількість звоїв 7½, радіюс звою 4,5 *см*, модуль пружности $G=9.10^5$ *кг/см²*. Визначте, скільки пасажирів можна пустити у вагон, коли напруга не повинна перевищувати 2000 *кг/см²*, вага пасажира 64 *кг*. Яке при тому буде осідання?

Відповідь. 35 чоловіка; 1,5 *см*.

Розв'язання. Напруга

$$(p_t)_{max}=\frac{M}{0{,}21a^3},$$

де

$$M = \frac{(3200 + 64\,n)\,4{,}5}{8},$$

a є бік квадратового поперечча.

Осідання:

$$h = \frac{M.J.4\pi^2.J.R}{F^4 G},$$

де

$$F^4 = a^8.$$

154. Розв'яжить попередню задачу, припустивши, що ящик вагона лежить на 8-мох конічних ресорах. Кількість звоїв $n = 6{,}5$. найбільший радіюс звою $r_2 = 6{,}4$ *см*; найменший $r_1 = 5{,}1$ *см*; поперечча звою є круг із діяметром 2,3 *см*.

Відповідь. 1) 44 чоловіка; 2) 2,4 *см*.

РОЗДІЛ V

СТАТИЧНІ МОМЕНТИ Й МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ПЛОСКИХ ФІГУР

155. Знайдіть статичний момент відносно осі *aa* й положення центра тяжіння тетового поперечча зазначених на рис. 139 розмірів. Як буде мінитись віддаль y_c центра тяжіння поперечча від осі *aa*, коли поширювати полицю поперечча *b*, не зміняючи височини *h* і грубини δ?

Розв'язання. Щоб визначити статичні моменти, розбиймо фігуру на прямокутники й складім суму добутків площ прямокутників на віддаль їхніх центрів тяжіння від осі *aa*; одержимо:

$$S = 12.6 + 10.0{,}5 = 77\ см^3;\ \ y_c = \frac{h^2 + \delta\,(b-\delta)}{2\,(h+b-\delta)}.$$

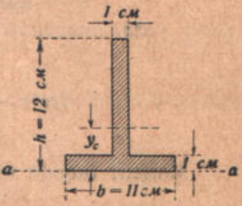


Рис. 139

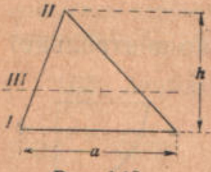


Рис. 140

156. Прирівняйте один до одного моменти інерції трикутника (рис. 140) відносно осей I, II, III (остання вісь переходить через центр тяжіння).

Відповідь.

$$J_1 = \frac{ah^3}{12},\quad J_2 = \frac{ah^3}{4},\quad J_3 = \frac{ah^3}{36}.$$

157. Знайдіть момент інерції квадрата (рис. 141) відносно осей його діягоналі,

Відповідь.

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

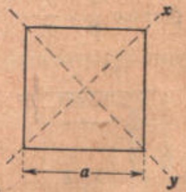


Рис. 141

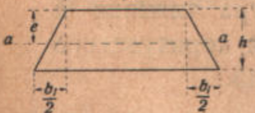


Рис. 142

158. Дано рівнобічний трапез (рис. 142). Визначте положення центра тяжіння й знайдіть момент інерції відносно горизонтальної осі *aa*, що переходить через центр тяжіння.

Відповідь.

$$e=\frac{h}{3}\cdot\frac{3b+2b_1}{2b+b_1};$$

$$J=\frac{6b^2+6bb_1+b_1^2}{36\,(2b+b_1)}\,h^3.$$

159. Визначте положення центра тяжіння й знайдіть момент інерції відносно горизонтальної осі *aa*, що переходить через центр тяжіння поперечча, яке має форму півкруга (рис. 143).

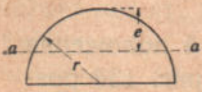


Рис. 143

Роз'вязання. Коли півкруга будемо обертати відносно діяметра, то одержимо кулю. За відомою теоремою, об'єм цієї кулі повинен дорівнювати площі півкруга, помноженій на довжину кола, описаного центром тяжіння півкруга; отже:

$$2\pi(r-e)\frac{\pi r^2}{2}=\frac{4}{3}\pi r^2,\quad r-e=\frac{4}{3\pi}r,\quad e=0{,}576\,r.$$

Момент інерції відносно осі *aa* визначимо за відомою формулою:

$$J_{aa}=\frac{\pi r^4}{8}-\frac{\pi r^2}{2}\cdot\frac{16r^2}{9\pi^2}=0{,}110r^4.$$

160. Знайдіть момент інерції чверти круга відносно центральної ної осі *xx* (рис. 144).

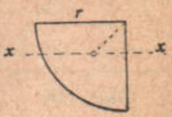


Рис. 144

Розв'язання. Момент інерції фігури відносно радіюса дорівнює $\frac{\pi r^4}{16}$. Віддаль центра тяжіння фігури від радіюса r дорівнює $\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}$. Отже, $J_x=\frac{\pi r^4}{16}-\frac{\pi r^2}{4}\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2=0.0549r^4$.

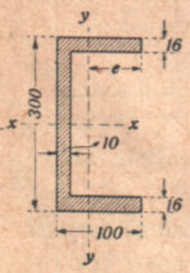


Рис. 145

161. Збудуйте центральну еліпсу інерції для рівнобічної кутівки 70×70×10 *см*.

Відповідь. Радіюси інерції $r_x=1{,}31$ *см*, $r_y=2{,}70$ *см*

162. Визначте положення центра тяжіння й знайдіть головні моменти інерції для коритуватого поперечча, змальованого на рис. 145.

Відповідь. $e=7{,}05$ *см*, $J_x=8030$ *см*^{4}, $J_y=564$ *см*^{4}.

163. Знайдіть головні моменти інерції поперечча чавунної колони (рис. 146), $a = 200$ *мм*, $\delta = 20$ *мм*.

Відповідь. $J = 7870$ *см*^{4}.

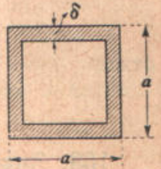


Рис 146

164. Знайдіть головні моменти інерції стояка, складеного з чотирьох рівнобічних кутівок (рис. 147). Розміри кутівки такі: $100 \times 100 \times 10$ *мм*; $\delta \perp 1$ *мм*.

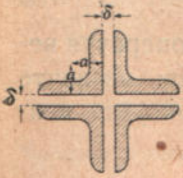


Рис. 147

Розв'язання. Головні осі є осі симетрії. Момент інерції одної кутівки відносно тої осі, що переходить через її центр тяжіння й рівнобіжна з полицею, дорівнює $J_{\xi} = 176{,}3$ *см*^{4}. Площа кутівки 19,17 *см*^{2}, віддаль центра тяжіння кутівки від осі симетрії поперечча $(2{,}82 + 0{,}5)$ *см*. Шуканий момент інерції буде:

$$J = 4\,[176{,}3 + 19{,}77\,(2{,}82 + 0{,}5)^2] = 1548 \text{ см}^4.$$

165. Знайдіть головний момент інерції поперечча стояка, складеного з двох рівнобічних кутівок $100 \times 100 \times 10$ *мм*; $\delta = 100$ *мм* (рис. 148).

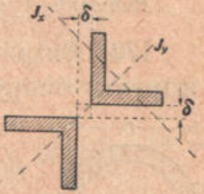


Рис. 148

Розв'язання. З таблиць виписуємо моменти інерції для одної кутівки: $J_y + 280$ *см*^{4}; $J_x = 73{,}3$ *см*^{4}. Скориставшись формулою переходу до рівнобіжних осей, знайдемо для цілого поперечча: $J_{max} = 994$ *см*^{4}; $J_{min} = 560$ *см*^{4}.

166. Знайдіть головні моменти інерції поперечча стояка, складеного з чотирьох рівнобічних кутівок: $70 \times 70 \times 10$ *мм*; $a = 270$ *мм* (рис. 149).

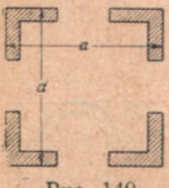


Рис. 149

Відповідь. $J = 7040$ *см*^{4}.

167. Знайдіть відцентрові моменти прямокутника $ABCD$ й прямокутнього трикутника ACD відносно осей A_x і A_y (рис. 150).

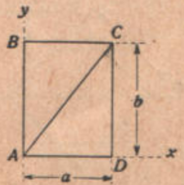


Рис. 150

Розв'язання. Відцентровий момент інерції прямокутника, за відомою теоремою, матиме вигляд такої формули:

$$J_{xy} = ab \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

Позначивши літерою X відцентровий момент кожного трикутника ABC й ACD відносно осей, рівнобіжних з Ax і Ay, що переходять через центр тяжіння трикутників, знайдемо:

$$\left(X+\frac{ab}{2}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{2}{3}a\right)+\left(X+\frac{ab}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{2}{3}b\right)=\frac{a^2b^2}{4},$$

отже,

$$X=\frac{a^2b^2}{72}.$$

168. Знайдіть координати центра тяжіння (ξ, η) поперечча нерівнобокої кутівки зазначених на рис. 151 розмірів; визначте положення головних осей інерції й нарисуйте центральну еліпсу інерції (розміри в *мм*).

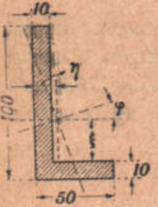


Рис. 151

Відповідь. $\xi=27$ *мм*; $\eta=12$ *мм*; $\operatorname{tg}\varphi=0{,}26$; $J_{max}=150$ *см*^{4}, $J_{min}=14{,}6$ *см*^{4}.

169. Збудуйте центральну еліпсу інерції Z-уватого поперечча зазначених на рис. 152 розмірів.

Відповідь. $\operatorname{tg}\varphi=0{,}39$; $\varphi=21^\circ20'$; $J_x=1190$ *см*^{4}; $J_y=58{,}8$ *см*^{4}.

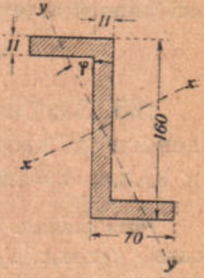
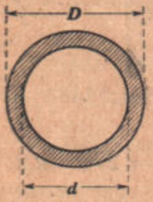


Рис. 152

170. Визначте величину моменту інерції й моменту опору кільцюватого поперечча через величину зовнішнього діяметра D й відношення $\frac{D}{d}$.



ис . 153

Відповідь.

$$J=\frac{\pi D^4}{64}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right);\quad W=\frac{\pi D^3}{32}\left(1-\frac{d^4}{D^4}\right).$$

171. Знайдіть момент опору поперечча аркуша хвилястого заліза (рис. 154) коли ширина заліза 1 *м*, висота хвилі $h=100$ *мм*, грубина заліза $\delta=1$ *мм*, $l=100$ *мм*. (Для обчислення розділіть поперечча на прямокутники й півкільця).

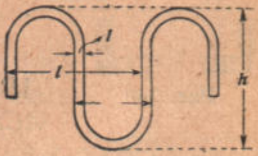


Рис. 154

Рис. 155

Відповідь: $W=56$ *см*^{3}.

172. На яку величину h треба зрізати кути з початку квадратового поперечча (рис. 155), щоб мати поперечча з найбільшим моментом опору? Яке побільшання моменту опору можна одержати?

Відповідь. Треба моментові опору поперечча надати вигляд функції від h, скласти першу похідну від цього виразу за h і прирівняти її до нуля: з одержаного таким чином рівняння знайдемо:

$$h = \frac{a\sqrt{2}}{18} = 0{,}0785\,a.$$

Можливе побільшання моменту опору становить 5%.

173. Прилучивши до прямокутника *ABCD* прямокутник *GEFH*, ми одержимо тетове поперечча. При якій ширині x того прямокутника, що його додається, не буває зміни моменту опору поперечча? (рис. 156).

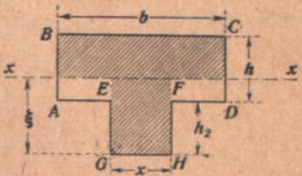


Рис. 156

Розв'язання. Момент опору прямокутника *ABCD* дорівнює $\frac{bh^2}{6}$. Момент опору тетового поперечча одержимо, поділивши головний центральний момент J_x на віддаль ξ. Прирівнявши цей результат до величини $\frac{bh^2}{6}$, одержимо для визначення x рівняння:

$$x^2 + bx\frac{h}{h_2}\left(4 + 5\frac{h}{h_2} + 5\frac{h^2}{h_2^2}\right) = 2b^2\frac{h^3}{h_2^3}.$$

174. За яким законом зростає момент опору тетового поперечча (рис. 157), коли більшає грубина полиці α? Ширина полиці b й височина стінки a лишаються сталі. (Змалюйте цю залежність графічно).

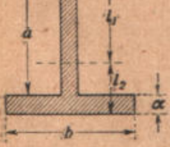


Рис. 157

Відповідь.

$$l_2 = \frac{\frac{b\alpha^2}{2} + \frac{a\delta(a + 2\alpha)}{2}}{\alpha b + \delta a},\quad l_1 = a + \alpha - l_2.$$

$$J = \frac{1}{3}\left[bl_2^3 - (b - \delta)(l_2 - \alpha)^3 + \delta l_1\right];\quad W_1 = \frac{J}{l_2};\ W_2 = \frac{J}{l_1}.$$

175. Яка може бути відносна помилка при визначенні моменту інерції прямокутника 10×5 *см* відносно головної осі, рівнобіжної з довгим боком, коли довжину боків прямокутника виміряно з точністю до 0,1 *мм*?

Відповідь. $\varepsilon = 0{,}7\%$.

РОЗДІЛ VI

ЗГИН ТРЯМІВ

У цьому розділі прийнято такі позначення:

M є згинний момент, *l* — прогин тряму, *EI* — штивність тряму при згині, *W* — момент опору поперечча тряму, *q* — суцільне обтяження, що припадає на одиницю довжини тряму, *f* — стріла вгину тряму.

Нормальні напруги на віддалі *z* від невтрального шару визначає формула:

$$(p_n)_z = \frac{Mz}{J}.$$

Дотичні напруги обчисляється за формулою:

$$(p_t)_z = \frac{QS_z}{Jb_z};$$

тут *Q* є перерізна сила в розглядуваному попереччі; S_z—статичний момент відносно невтральної лінії тої частини поперечча, що лежить вище розглядуваної точки; b_z—ширина поперечча, відповідна до розглядуваної точки.

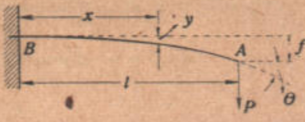
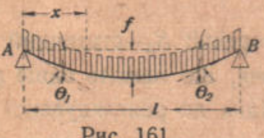
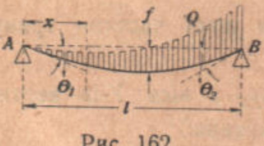
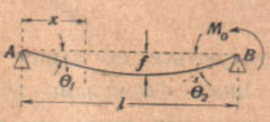
Момент *M* уважаємо за додатний, коли він повертає ліву частину тряму за стрілкою годинника.

Силу *Q* вважаємо за додатну, коли для лівої частини тряму вона має напрям знизу догори.

Спрямувавши вісь *X*-ів уздовж осі тряму, а вісь *Y*-ів вертикально донизу, одержимо для зігнутої осі тряму рівняння:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M.$$

Нарешті, подаємо декілька формул, що стосуються до згину трямів у деяких звичайних випадках. Користуючись цими формулами й принципом додавання чину, можна в багатьох випадках спростити розв'язання задач, де треба знайти вгини або кути повороту кінців тряму.

Випадки згину	Опорні реакції	Згинні моменти
 Рис. 158	$B = P$	$M = -P\,(l - x)$ $[M]_{max} = Pl$
 Рис. 159	$B = ql$	$M = -\frac{q\,(l-x)^2}{2}$ $[M]_{max} = \frac{ql^2}{2}$
 Рис. 160	$A = \frac{Pc}{l}$ $B = \frac{Pc_1}{l}$	для AC: $M = \frac{Pc}{l} \cdot x$ $M_{max} = \frac{Pcc_1}{l}$
 Рис. 161	$A = B = \frac{ql}{2}$	$M = \frac{qlx}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$
 Рис. 162	$A = \frac{1}{3}\,Q$ $B = \frac{2}{3}\,Q$	$M = \frac{Qx}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ $M_{max} = 0{,}128Ql$
 Рис. 163	$A - B = \frac{M_0}{l}$	$M = \frac{M_0x}{l}$

Рівняння зігнутої осі	**Найбільший угин f**	**Кути θ**
$y=\frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right)$	$f=\frac{Pl^3}{3EJ}$	$\theta=\frac{Pl^3}{2EJ}$
$y=\frac{ql^4}{4EJ}\left(\frac{x^2}{l^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x^4}{l^4}\right)$	$f=\frac{ql^4}{8EJ}$	$\theta=\frac{ql^3}{6EJ}$
для AC: $y=-\frac{Pcx}{6lEJ}(x^2+c^2-l^2)$	$f=\frac{Pc}{9lEJ}(l^2-c^2)\cdot\sqrt{\frac{1}{3}(l^2-c^2)}$ при $x=\sqrt{\frac{1}{3}(l^2-c^2)}$	$\theta_1=\frac{Pc\,(l^2-c^2)}{6lEJ}$ $\theta_2=\frac{Pc_1\,(l^2-c_1^2)}{6lEJ}$
$y=\frac{ql^4}{24EJ}\left(\frac{x}{l}-\frac{2x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$	$f=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EJ}$	$\theta_1=\theta_2=\frac{ql^3}{24EJ}$
$y=\frac{Ql^3}{180EJ}\left(\frac{7x}{l}-\frac{10x^3}{l^3}+\frac{3x^5}{l^5}\right)$	$f=0{,}01304\,\frac{Ql^3}{EJ}$ при $x=0{,}5193l$	$\theta_1=\frac{7}{180}\cdot\frac{Ql^2}{EJ}$ $\theta_2=\frac{8}{180}\cdot\frac{Ql^2}{EJ}$
$y=\frac{M_0x}{6lEJ}(l^2-x^2)$	$f=0{,}0641\,\frac{M_0l^2}{EJ}$ при $x=\frac{l}{\sqrt{3}}$	$\theta_1=\frac{M_0l}{6EJ}$ $\theta_2=\frac{M_0l}{3EJ}$

ЗАВДАННЯ СТАТИЧНО ВИЗНАЧНІ

176. Дослідіть закон зміни згинних моментів (збудуйте епюру згинних моментів) і перерізних сил (збудуйте лінію суми сил) уздовж тряму при таких розташуваннях обтяжень і опор (рис. 164—187):

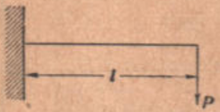


Рис. 164

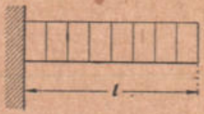


Рис. 165

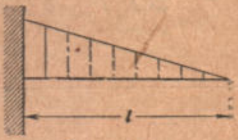


Рис. 166

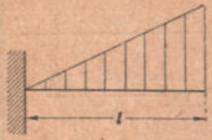


Рис 167

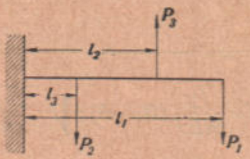


Рис. 168

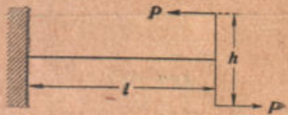


Рис. 169

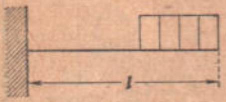


Рис. 170

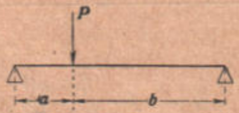


Рис. 171

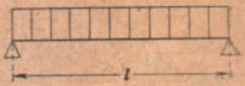


Рис. 172

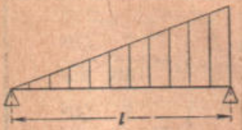


Рис. 173

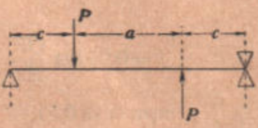


Рис. 174

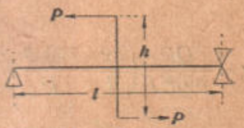


Рис. 175

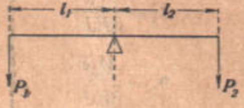


Рис. 176

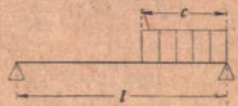


Рис. 177

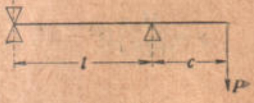


Рис. 178

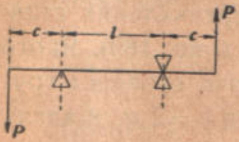


Рис. 179

Рис. 180

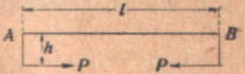


Рис. 181

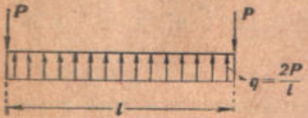


Рис. 182

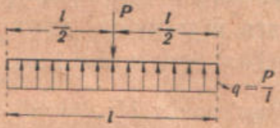


Рис. 183

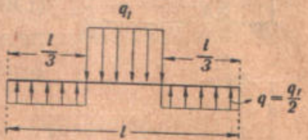


Рис. 184

Рис. 185

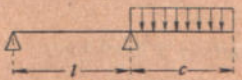


Рис. 186

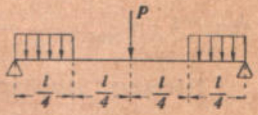


Рис. 187

177. Залізний двотетовий трям, що підтримує балькон (рис. 188), зазнає чину рівномірно розподіленого вздовж тряму обтяження $q = 200$ *кг* на подовжинний метр. На кінець тряму передається тиск від колони $P = 200$ *кг*. Який нумер двотетового тряму треба взяти, коли прогін тряму $l = 1{,}5$ *м*, а допускна напруга $R = 100$ *кг/см*^{2}.

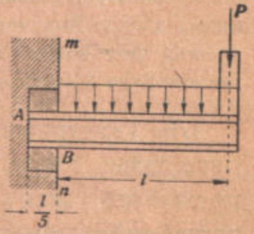


Рис. 188

Розв'язання. Найбільший згинний момент буде в площі заправи *mn*:

$$[M]_{max} = \frac{ql^2}{2} + Pl = \frac{200.(1{,}5)^2}{2} + 200.1{,}5 = 525.10^2 \text{ кгсм}.$$

Потрібний момент опору

$$W = \frac{M}{R} = \frac{525.10^2}{10^3} = 52{,}5 \text{ см}^3.$$

За сортаментом треба взяти трям № 12.

Які будуть реакції *A* й *B*, коли припустити, що вони зосереджуються в цих точках?

178. Дерев'яна гребля складається з ряда вертикальних стовпів квадратового попереччя, обшитих дошками (рис. 189). Якого розміру повинно бути попереччя стовпів і грубина дощок, коли глибина води $h=2$ *м*, віддаль між осями стовпів $d=1$ *м*, допускну напругу для дерева взято в цьому випадку $R=40$ *кг/см*²? (Обчисляючи дошки, треба вважати, що вони лежать вільно на двох опорах, і віддаль між опорами брати $d=1$ *м*).

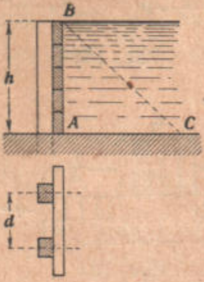


Рис 189

Розв'язання. На кожний стовп передається тиск води, рівний вазі Q тригранчастої призми ABC. З рисунка маємо $Q=\frac{dh^2}{2}=2$ *т*. Найбільший згинний момент відповідає точці $A: M_{max}=\frac{Qh}{3}=\frac{4}{3}$ *тм*.

Поперечні розміри визначаються з формули:

$$R=\frac{M}{W};\ a=\sqrt[3]{\frac{4}{3}\cdot\frac{10^5.6}{40}}=27{,}1\,\textit{см}.$$

Кожна дошка обшивки буде в умовах тряму, підпертого на кінцях і обтяженого рівномірно розподіленим обтяженням. У найневигідніших умовах буде найнижча дошка. Вилучивши знизу дошку завширшки 1 *см*, знайдемо, що на подовжинний метр дошки передається тиск 20 *кг*. Відповідний найбільший згинний момент буде 250 *кг/см*.

179. Телеграфний дерев'яний стовп заввишки 7 *м* зазнає бічного тиску вітру, рівномірно розподіленого по височині, й зосередженого тиску в 50 *кг*, прикладеного в вершку. Знайдіть потрібний діяметр стовпа, коли допускна напруга дорівнює 40 *кг/см*², а тиск вітру взято 100 *кг* на 1 *м*² діяметрального перекрою стовпа.

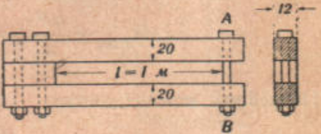


Рис. 190

180. Два дерев'яні бруси, що міцно скріплені лівими кінцями (рис. 190), на правому кінці стягнуто прогоничем AB. При якому діяметрі прогонича стягувані бруси й прогонич будуть мати однаковий запас міцности, коли $R_д=100$ *кг/см*², а $R_з=1000$ *кг/см*²? Наскільки можна стягнути кінці A й B, не викликавши небезпечних напруг?

Розв'язання. Діяметр прогонича d визначимо з рівняння:

$$\frac{bh^2}{6}\,\frac{R_\partial}{l}=R_з\,\frac{\pi d^2}{4},\quad d=\sim 1\ см.$$

Граничне зусилля прогонича 800 *кг*. Знайшовши відповідні вгини брусів, ми визначимо зближення кінців *A* й *B*.

181. Розрахуйте дерев'яного сволока, що перекриває приміщення завширшки $l=6$ *м* і підтримує рівномірно розподілене обтяження $q=400$ *кг/м*. Поперечча сволока прямокутнє з відношенням $b:h=4:5$; $R=60$ *кг/см*².

Розв'язання. Найбільший згинний момент буде по середині прогону:

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{400.36.10^2}{8}=18.10^4\ кгсм.$$

Момент опору W визначимо з рівняння:

$$W=\frac{18.10^4}{60}=3.10^3\ см^3.$$

Щоб визначити височину поперечча, маємо:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{h^3}{6}=3.10^3;$$

звідси

$$h=\sqrt[3]{\frac{3.5.6.10^3}{4}}=28{,}2\ см.$$

Який треба взяти профіль двотетового тряму в цьому випадку, коли допускну напругу взято 1200 *кг/см*²?

182. Водостримна гребля складається з послідовного ряду дерев'яних брусів квадратового поперечча, спертих верхнім і нижнім кінцями на прогони *M* і *N* (рис. 191). Які будуть найбільші нормальні напруги в цих брусах від тиску води, коли височина брусів $h=6$ *м*, $a=30$ *см*?

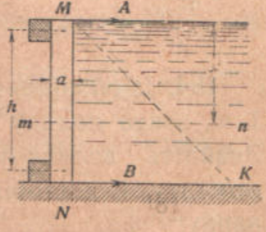


Рис. 191

Розв'язання. Опорні реакції будуть: $A=\frac{Q}{3}$ і $B=\frac{2Q}{3}$, де Q є вага води тригранчастої призми MNK; очевидно, $Q=\frac{h^2a}{2}=18.0{,}3=54$ *т*. Згинний момент у якомунебудь поперечці mn буде:

$$M_x = Ax - \frac{Qx^2}{h^2} \cdot \frac{x}{3}.$$

Склавши похідну за x і прирівнявши її до нуля, знайдемо:

$$A - \frac{Qx^2}{h^2} = 0,$$

звідси

$$x = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,h.$$

Отже, визначивши місце небезпечного поперечця, можна за відомою формулою обчислити найбільші напруги. Одержимо:

$$(p_n)_{max} = 9{,}1 \text{ кг/см}^2.$$

183. Розрахуйте двотетовий трям (рис. 192), що підтримує цегляну стіну завгрубшки 25 *см*. Який нумер тряма требу взяти, коли 1 $м^3$ муру важить 2 *т*? $R = 1000$ *кг/см*².

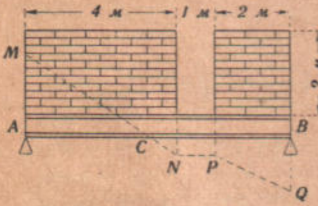


Рис. 192

Розв'язання. Визначаємо опорні реакції *A* й *B*. Відклавши від лінії *AB* по ординатах величини перерізної сили, знайдемо лінію суми сил *MNPQ*. Точка її перетинання *C* з лінією *AB* визначає небезпечне поперечця; $AC = \frac{22}{7}$ *м*. Склавши згинний момент для цього поперечця, знайдемо, за відомою формулою, потрібний момент опору $W = \frac{M_{max}}{R} = 494{,}5$ *см*³. Треба взяти трям № 27.

184. Щоб підняти тягар *Q*, який важить 1 *т*, взято колоду діяметра 20 *см* (рис. 193). Знайдіть величину найбільшого згинного моменту й відповідну до нього найбільшу напругу.

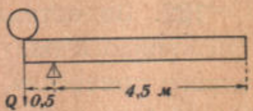


Рис. 193

Розв'язання. Найбільший згинний момент у поперечці над опорою $M_{max} = 1 . 0{,}5$ *тм*, момент опору

$$W = \frac{\pi r^3}{4} = 785 \text{ см}^3; \quad (p_n)_{max} = \frac{M_{max}}{W} = 63{,}7 \text{ кг/см}^2.$$

185. Знайдіть нормальні й дотичні напруги в мостовій дерев'яній поперечці (рис. 194) прямокутнього поперечча $b \times h = 20 \times 25$ *см*, коли той тиск, що його передає колесо на поперечку $Q = 4{,}5\ т$, віддаль між колесами $c = 1{,}5$ *м*, віддаль між опорами поперечки $l = 2{,}5$ *м*.

Розв'язання. Епюра згинних моментів має форму трапезу;

$$M_{max} = 4{,}5 . 0{,}5\ тм;\ (p_n)_{max} = \frac{M_{max}}{W} =$$

$$= \frac{4{,}5 . 0{,}5 . 10^5 . 6}{20 . 25^2} = 108\ кг/см^2;$$

$$(p_t)_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} = 13{,}5\ кг/см^2.$$

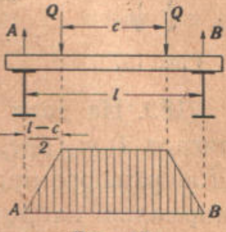


Рис. 194

186. Консольний трям AB зазнає чину рівномірно розподіленого обтяження. На яку віддаль d (рис. 195) треба розсунути опори, щоб найбільший згинний момент, отже, й найбільші нормальні напруги мали найменшу вартість?

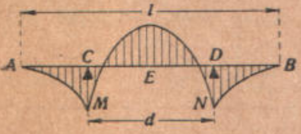


Рис. 195

Розв'язання. Епюру згинних моментів складеться з відтинків параболь AM, MN і NB. Найбільший додатний момент відповідає поперечцю E. Від'ємні моменти мають найбільшу вартість в C й D. Найвигідніше буде те розташування, що при цьому моменти в попереччях C й D рівні моментові в E. Порівнявши моменти, знайдемо $d = 0{,}568\ l$.

187. Ряд рівних прогонів перекрито системою консольних трямів AB з проміжними, почепленими на суставах трямками BC (рис. 196). Яка повинна бути довжина c проміжного трямка, щоб при рівномірно розподіленому обтяженні величина максимального згинного моменту мала найменшу величину?

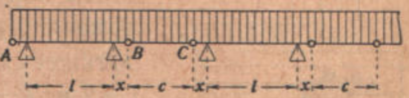


Рис. 196

Розв'язання. Найвигідніше розташування ми матимемо тоді, коли згинний момент по середині прогону проміжного трямка дорівнює згинному моментові на опорах. Прирівнявши моменти, знайдемо, що довжина консолі $x = 0{,}146\ l$, отже, довжина проміжного тряму $c = l - 2x = 0{,}708\ l$.

188. На трямі AB мостового зводу міститься візок під'ємного механізму (рис. 197). Як треба поставити візка, щоб був *max* згинного моменту?

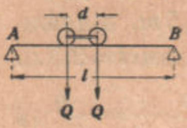


Рис. 197

Відповідь. Візка треба подати на $^1/_4\, d$ від середини. Віддаль колеса, що під ним M_{max}, від найближчої опори буде:

$$\frac{l}{2} - \frac{d}{4}.$$

189. На двох двотетових трямах покладено колію зводу для тягара 1 m (рис. 198). Вага зводу $Q = 5\,m$. Доберіть розміри трямів так, щоб найбільші нормальні напруги при згині не перевищували 600 $кг/см^2$; $l = 10\,м$, $a = 4\,м$, $d = 2\,м$. Припускаємо, що власна вага зводу нарівно розподіляється на колеса.

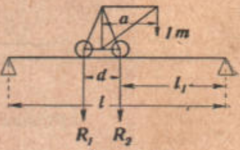


Рис. 198

Відповідь. Тиск осей на трям буде: $R_1 = 1m$, $R_2 = 5m$; M_{max} під правою віссю при $l_1 = \frac{l - \frac{d}{6}}{2}$;

$$M_{max} = 1402.10^3\ кг\ см;$$

$$W_{max} = \frac{1402.10^3}{2.600} \approxeq 1170\ см^3.$$

Треба взяти трями № 38.

190. Риштування для ремонту будинку збудовано на горизонтальних колодах AB, перетягнутих через віконні діри; у поперечці C колода AB передає тиск на підлокітник (рис. 199). Якого діяметра d треба взяти колоди AB, коли на дільниці BC може лежати суцільне рівномірно розподілене обтяження $q = 400\,кг$ на подовжинний метр? $l = 2\,м$, $l_1 = 1\,м$; допускна напруга на розтяг і стиск при згині $R = 100\,кг/см^2$.

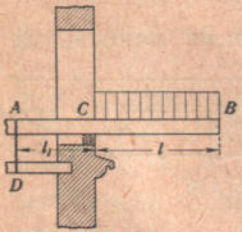


Рис. 199

Розв'язання. Найбільший згинний момент буде в поперечці C;

$$M_{max} = 800.100\ кгсм;$$

отже,

$$W = \frac{M_{max}}{R} = 800\ см^3;\ d = 20{,}1\ см.$$

191. Яке співвідношення треба взяти між основою b й височиною h прямокутнього попереччя бруса, витесаного з круглої колоди завданого діяметра d, коли хочемо мати трям найбільшої міцности?

Розв'язання. Треба знайти *max* виразу для моменту опору W, взявши до уваги, що $b^2 + h^2 = d^2$.

Відповідь. $h = b\sqrt{2}$.

192. Трям склепано з двох рейок з перекладкою між ними аркуша завгрубшки d (рис. 200). Яка повинна бути грубина d, коли хочемо, щоб було таке поперечча, що має момент опору $W = 687\ см^3$? Площа поперечча рейки $F = 60\ см^2$, височина рейки $h = 24\ см$, момент інерції рейки відносно осі aa, що переходить через центр тяжіння рейки $J_{aa} = 1500\ см^4$.

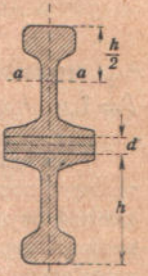


Рис. 200

Розв'язання. Для моменту опору зложеного поперечча можемо написати такий вираз:

$$W = \frac{2\left[J_{aa} + F\left(\frac{h+d}{2}\right)^2\right]}{h + \frac{d}{2}} = 687\ см^3.$$

(Моментом інерції поперечча перекладки нехтуємо). З написаного рівняння можна визначити d.

193. Трям коритуватого поперечча (рис. 201, розміри в *см*) згинається в площі OO. Яке співвідношення n між найбільшими стискними й розтяжними напругами?

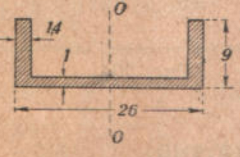


Рис. 201

Відповідь. $n = \frac{6,64}{2,36} = 2,81.$

(Напруги відносяться, як віддалі від невтральної лінії, що переходить через центр тяжіння до найвіддаленіших волокон).

194. Трям тетового поперечча (рис. 202, розміри в *см*) згинається в площі OO. Яка повинна бути височина поперечча h, коли треба, щоб найбільші стискні напруги в два рази перевищували найбільші розтяжні напруги?

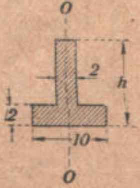


Рис. 202

Розв'язання. Треба h добрати так, щоб центр тяжіння поперечча був на віддалі $\frac{h}{3}$ від підошви.

Відповідь. $h = (8 \pm 4)$ *см.*

195. Залізну смугу, міцно скріплену з дерев'яним брусом, згинає рівномірно розподілене обтяження (рис. 203). Знайдіть співвідношення між найбільшими напругами в залізі й у дереві, коли грубина залізної смуги h становить 0,1 від h_1 і модуль пружности $E_д$ для дерева дорівнює $^1/_{20}$ модуля пружности $E_з$ для заліза. Знайдіть угин смуги, коли $l = 1$ *м*, $h = 1$ *см*.

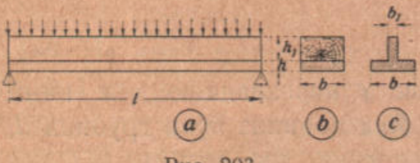


Рис. 203

Розв'язання. Зложений трям буде при згині еквівалентний залізному трямові тетового поперечча, змальованого на рис. 203*c*. Горизонтальна полиця відповідає залізній смузі зложеного тряму. Вертикальна стіна має височину h, що дорівнює височині дерев'яного бруса. Ширина стінки b_1 в стільки разів менша від ширини дерев'яного бруса b, у скільки разів $E_д$ менше від $E_з$. Звівши завдання до згину цілого залізного тряму, ми можемо легко розв'язати зазначені в умові питання.

196. Трям, зложений з двох брусів прямокутнього поперечча, злучених один з одним шпугами, лежить на двох опорах і обтяжений посередині тягарем $P = 2400$ *кг* (рис. 204), Знайдіть дотичні напруги по площі *аа*, дотичні напруги в шпузі й стискні напруги по бічних гранях шпуги, що намагаються зімняти стінку кая. (Розміри в *см.* Величиною прозору між брусами нехтуємо).

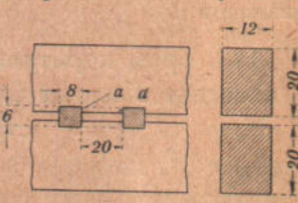


Рис. 204

Відповідь. Дотичні напруги по *аа* дорівнюють 5,25 *кг/см²*, в шпузі — 13,1 *кг/см²*, стискні напруги 35 *кг/см²*.

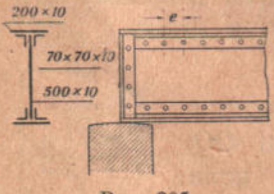


Рис. 205

197. Двотетовий нютований трям зазначених на рис. 205 розмірів (в *мм*) лежить на двох опорах і обтяжений посередині силою $P = 12\,т$. Знайдіть величину зусилля, що передається на кожну поясову нюту від кутівок (тертям між кутівками й стінкою нехтуємо; $e = 100$ *мм*).

Відповідь. 1300 *кг.*

198. Доберіть поперечча для залізного нютованого тряму завдовжки $l = 8{,}9$ *м*, обтяженого чотирма однаковими тягарами (рис. 206) по 7,5 *т*. Поперечча треба скласти з вертикального аркуша завгрубшки $\delta = 1$ *см* і заввишки $h = 1$ *м*, з чотирьох кутівок $100 \times 100 \times 10$ *мм* і з горизонтальних аркушів. Головні нормальні напруги $(p_n)_{max}$ не повинні перевищувати 750 *кг/см*² і дотичні $(p_t)_{max}$ — 600 *кг/см*².

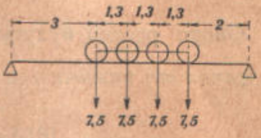


Рис. 206

(На власну вагу не зважаємо).

199. Доберіть поперечча мостового поперечного тряму прогону 6 *м* (віддаль між осями зв'язнів), який зазнає чину власної ваги $q = 300$ *кг/м* і двох тягарів $Q = 30$ *т* (рис. 207). Допускні напруги ті самі, що й у задачі 198.

Рис. 207

200. З однакового матеріялу зроблено два бруси: одного круглого, а другого квадратового поперечча; обидва мають однакову довжину, однакову площу поперечча й однаково обтяжені. Знайдіть співвідношення між найбільшими нормальними напругами.

Як зміниться це співвідношення, коли бруси зроблено з різних матеріялів?

Розв'язання. Ці напруги будуть оберненопропорційні до моментів опору; маємо: $a^2 = \frac{\pi d^2}{4}$. Шукане співвідношення дорівнює: $\frac{a^3}{6} : \frac{\pi d^3}{32} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$.

201. Трям, що вільно лежить на двох опорах, тримає суцільне обтяження, розподілене за законом трикутника (рис. 208). Знайдіть поперечча *mn*, що йому відповідає *max* згинного моменту, й обчисліть M_{max}, коли все обтяження $P = 3600$ *кг*, $l = 20$ *м*, $l_1 = 12$ *м*.

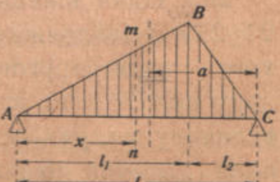


Рис. 208

Розв'язання. Віддаль a, що визначає центр тяжіння обтяжної площі, знайдемо з рівняння: $3600a = \frac{3600}{3}(l + l_2)$;

звідси

$$a = \frac{l + l_2}{3} = \frac{28}{3} \text{ м}.$$

Опорні реакції будуть: $A = \frac{3600.28}{3.20} = 1680$ *кг*; $C = 1920$ *кг*. Положення поперечча mn визначиться з рівняння:

$$1680 = \frac{2160x^2}{12^2}; \quad x = 10{,}6 \text{ м}; \quad M_{max} = 11{,}9 \text{ тм}.$$

202. Стальну лінійку AB прямокутнього поперечча згинають дві рівні й прямопротилежні пари сил M (рис. 209). a) По якій кривій зігнеться лінійка, b) який буде найбільший вгин і c) які будуть найбільші нормальні напруги, коли $M = 1$ *кгм*, $l = 1$ *м*, $b = 6$ *см*, $\delta = 0{,}5$ *см*, $E = 2{,}2.10^6$ *кг/см*²?

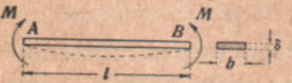


Рис. 209

Розв'язання. Згинний момент сталий уздовж лінійки, отже, кривина стала. Радіус кривини ϱ знайдемо з рівняння:

$$\frac{EJ}{\varrho} = M; \quad \varrho = \frac{EJ}{M} = \frac{2{,}2.10^6.6.(0.5)^3}{12.10^2} = 13{,}75 \text{ м}.$$

Стрілу вгину, в випадку вгину за колом, знайдемо з рівняння (рівняння легко скласти, коли взяти до уваги, що довжина тряму l являє собою хорду кола з радіюсом ϱ, вгин тряму являє собою стрілу, відповідну до цієї хорди):

$$2\varrho f = \frac{l^2}{4}; \quad f = \frac{10^4}{8\ 1375} = 0{,}909 \text{ см}.$$

Найбільшу напругу визначимо з формули:

$$(p_n)_{max} = \frac{M}{W} = \frac{100}{(0{,}5)^2} = 400 \text{ кг/см}^2.$$

203. Один кінець залізного бруса з квадратовим попереччям 2×2 *см* і завдовжки 1 *м* заправлено нерухомо, а до другого прикладено згинну пару сил $M = 10$ *кгм* (рис. 210). Знайдіть величину модуля пружности E матеріялу, коли дотична до зігнутої осі на вільному кінці творить з віссю X кут $\theta = 0{,}0375$.

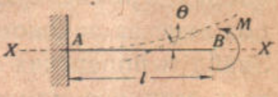


Рис. 210

Розв'язання. Брус зігнеться за дугою кола з радіюсом $\varrho = \frac{EJ}{M}$. Кут нахилу дотичної в точці B буде: $\theta = \frac{J}{\varrho} = \frac{Ml}{EJ}$, отже:

$$E = \frac{Ml}{\theta J} = \frac{10^3 . 10^2 . 12}{0{,}0375 . 2^4} = 2 . 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

204. Тряма, однокінцево закріпленого, згинає суцільне обтяження P, розподілене за законом трикутника (рис. 211). 1) Знайдіть угини f_1 і f_2 на кінці тряму й посередині, коли момент інерції поперечча J і модуля пружности E ми знаємо. 2) У скільки разів побільшає вгин f_1, коли те саме обтяження P лежатиме так, як показано пунктиром ($\triangle ABD$)?

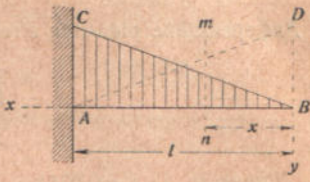


Рис. 211

Розв'язання. Інтеґруючи диференційне рівняння зігнутої осі тряму: $EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}$, одержимо:

$$EJy = \frac{Px^5}{60l^2} + Cx + D.$$

Довільні сталі знайдемо з умов: *a*) коли $x = l$, то $\frac{dy}{dx} = 0$; *b*) коли $x = l$, то $y = 0$; тоді

$$C = -\frac{Pl^2}{12}; \qquad D = \frac{Pl^3}{15};$$

$$EJy = \frac{Px^5}{60l^2} - \frac{Pl^2x}{12} + \frac{Pl^3}{15}. \qquad [1]$$

Вгин на кінці дорівнює:

$$(y)_{x=0} = \frac{Pl^3}{15EJ}. \qquad [2]$$

Щоб знайти вгин від обтяження за $\triangle ABD$, зауважмо, що при одночасному обтяженні за $\triangle ACB$ й $\triangle DAB$ вгин буде:

$$\frac{2Pl^3}{8EJ}. \qquad [3]$$

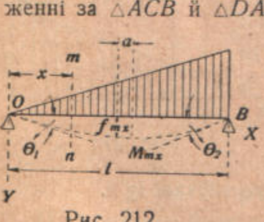


Рис. 212

(За формулою для рівномірно розподіленого обтяження $2P$).

Віднявши від угину [3] вгин [2], знайдемо шуканий угин від $\triangle ADB$.

205. Трям вільно лежить на двох опорах і тримає суцільне обтяження P, розподілене за законом трикутника (рис. 212). 1) Знайдіть віддаль a між попереччями, відповідними до найбільшого згинного моменту M_{max} і найбільшого вгину f_{max}. 2) Знайдіть tg-и кутів нахилу дотичних, поведених до кінців пружної лінії.

Розв'язання. Згинний момент у попереччі mn:

$$M_x = \frac{P}{3}x - \frac{Px^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}; \quad M_{max} \text{ буде, коли } x = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Диференційне рівнання зігнутої осі:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{3}x + \frac{Px^3}{3l^2}.$$

Відповідь. 1) $a = 0{,}058l$; 2) $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{7}{180} \cdot \frac{Pl^2}{EJ}$; $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{8}{180} \cdot \frac{Pl^2}{EJ}$.

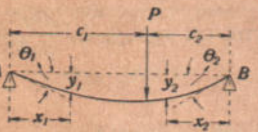


Рис. 213

206. Тряма, що вільно лежить на опорах A й B, згинає зосереджена сила P (рис. 213). 1) Знайдіть місце найбільшого вгину тряму, 2) величину цього вгину й 3) tg-и кутів нахилу дотичних θ_1 і θ_2. (Припускаємо, що $c_1 = c_2$).

Відповідь. 1) f_{max} при $x = c_1\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{c_2}{c_1}}$; 2) $f_{max} = \frac{P}{3EJ} \cdot \frac{c_1^2 c_2^2}{l}$; 3) $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{P}{6EJ} \cdot \frac{c_1 c_2 (c_2 + l)}{l}$; $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{P}{6EJ} \cdot \frac{c_1 c_2 (c_1 + l)}{l}$.

207. Тряма AB, що вільно лежить на двох опорах, згинає пара сил M (рис. 214), що чинить на кінці B. Знайдіть tg-и кутів θ_1 і θ_2.

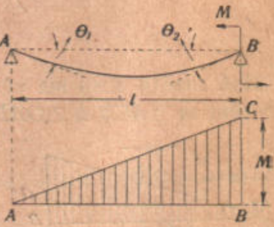


Рис. 214

Розв'язання. Цю задачу найзручніше розв'язати графоаналітично. Моментна площа буде $\triangle ABC$. Обтяживши тряма AB фіктивним обтяженням ABC, одержимо:

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{Ml}{2} \quad \text{i} \quad B = \frac{2}{3} \cdot \frac{Ml}{2}.$$

Поділивши ці реакції на штивність тряму EJ, одержимо шукані tg'и.

Відповідь. $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{Ml}{6EJ}$; $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{Ml}{3EJ}$. Угин тряму по середині $f = \frac{Ml^2}{16EJ}$

208. Консольного тряма симетрично обтяжено двома однаковими силами P по кінцях (рис. 215). На скільки треба розсунути підпори, 1) щоб угин біля кінців тряма дорівнював угинові посередині, 2) щоб угин посередині мав найбільшу вартість?

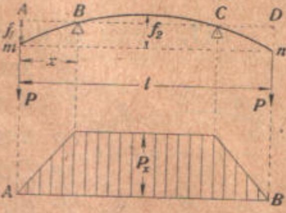


Рис. 215

Розв'язання. Прикладім графоаналітичний спосіб, при тому, щоб спростити міркування, будемо припускати, що опори поставлено в A й D і що тряма згинається рівними силами P, прикладеними в B й C. Це все одно, що ми вгини будемо відлічувати не від осі тряму, а від рівнобіжної з нею осі mn, поведеної на віддалі f_1, рівній угинові кінців. Епюра моментів—трапез. Обтяживши тряма AB фіктивним обтяженням, одержимо опорні реакції

$$A=B=\frac{Px\,(l-x)}{2}.$$

Поділивши ці реакції на EJ, одержимо кути нахилу дотичних до зігнутої осі в A й D. Вгин, відповідний до опорних точок, дорівнює:

$$f_1=\frac{1}{EJ}\left(Ax-\frac{Px^2}{2}\cdot\frac{x}{3}\right).$$

Вгин посередині

$$f_2=\frac{1}{EJ}\left[A\cdot\frac{l}{2}-\frac{Pxl}{2}\cdot\frac{l}{4}+\frac{Px^2}{2}\left(\frac{l}{2}-\frac{x}{3}\right)\right].$$

Поклавши $f_1=f_2-f_1$, одержимо рівняння, щоб визначити ту вартість x, що при ній угин посередині дорівнює вгинові на кінцях.

Відповідь. 1) $x=0{,}152\,l$; 2) $x=\frac{l}{6}$.

209. Напишіть рівняння для зігнутої осі тряму AB (рис. 216) що тримає рівномірне обтяження інтенсивности q, коли кінець тряму B підперто колоною BD, що зазнає від обтяження 1 m відносного стиску, рівного a; опора A абсолютно нерохома.

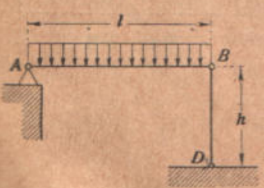


Рис. 216

210. Розрахуйте дерев'яного тряма AB (рис. 217), що тримає тягара $P=10$ m, визначте діяметри підтримних залізних прогоничів і

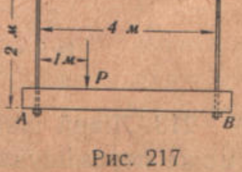


Рис. 217

знайдіть угини тряму, взявши до уваги видовження прогоничів, коли допускні напруги такі: $R_з=700$ *кг/см²*; $R_д=70$ *кг/см²*.

211. Трям із консоллю вільно лежить на опорах A й B, і його згинає в одному випадку сила P, прикладена в точці D, а в другому випадку та сама сила, але прикладена посередині, в точці C (рис. 218). Доведіть, що вгин у точці C при першому обтяженні дорівнює вгинові точки D при другому обтяженні (осібний випадок теореми Максвела).

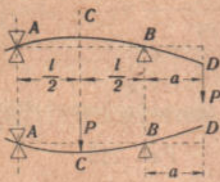


Рис. 218

Розв'язання. Коли чинить сила P в точці C, то кути нахилу дотичних в A й B будуть $\frac{Pl^2}{16EJ}$ (цього легко переконатись графоаналітичним способом). При цьому точка D підіймається на величину $\frac{Pl^2}{16EJ}a$.

Коли чинить сила P в точці D, то частину тряму AB згинає пара сил aP, прикладена в поперечні B. На основі розв'язання задачі 207, угин у C буде $\frac{Pal^2}{16EJ}$.

212. Тряма AB, що вільно лежить на опорах A й B, згинає пара сил M, прикладена в поперечні mn на віддалі a від опори A (рис. 219). Знайдіть угин тряму в цьому поперечні й кути нахилу дотичних до пружної лінії в точках A й B.

Розв'язання. Цю задачу найпростіше можна розв'язати графоаналітичним способом. Обтяжуємо трям фіктивним обтяженням і складаємо згинний момент від цього обтяження в поперечні mn.

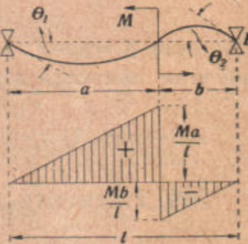


Рис. 219

Відповідь.

$$f=\frac{aM(l-a)(2a-l)}{3EJl};$$

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{Ma}{EJ}\left(1-\frac{a}{2l}-\frac{l}{3a}\right). \qquad \operatorname{tg}\theta_2=\frac{Mb}{EJ}\left(1-\frac{b}{2l}-\frac{l}{3b}\right).$$

213. Лівий кінець тряму AB закріплено нерухомо, а правий може переміщуватись у вертикальному напрямі, але обертатись йому заваджає особливий поплазень mn (рис. 220). Від чину вертикальної сили Q точка B спуститься, але дотична до пружної лінії в точці B залишиться горизонтальна. Знайдіть згин f у точці B й те попереччя ab, якому відповідає точка перегину.

Рис. 220

Розв'язання. У випадку гнуття тряму з одним заправленим кінцем силою Q, прикладеною до другого кінця, обтяжений кінець повертається на кут $\frac{Ql^2}{2EJ}$. Момент, потрібний для того, щоб не було цього повороту, визначиться з рівняння (див. зад. 203):

$$\frac{Ml}{EJ}=\frac{Ql^2}{2EJ}; \quad M=\frac{Ql}{2}.$$

Отже, точка перегину буде по середині прогону.

Відповідь.

$$f=\frac{Ql^3}{12EJ}; \quad x=\frac{l}{2}.$$

214. Розв'яжіть задачу 213, припустивши, що поплазень mn повинен переміщуватись по колу з радіюсом, рівним l, і дотична до пружної лінії в точці B нормальна до цього кола. (У таких, приблизно, умовах перебуває шпиця маховика, коли на неї чинять сили інерції ободу).

Розв'язання. Позначивши, як і раніше, літерою M той момент, що чинить на поплазень mn, знайдемо, що вгин кінця має вираз формули:

$$f=\frac{Ql^2}{3EJ}-\frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Кут нахилу дотичної визначається формулою:

$$\theta=\frac{Ql^2}{2EJ}-\frac{Ml}{EJ}.$$

За умовою, $\frac{}{l}=\theta$; звідси знаходимо:

$$f=\frac{Ql^3}{6EJ}; \quad x=\frac{2}{3}l.$$

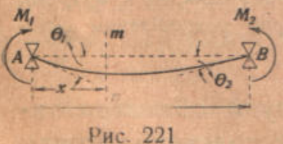


Рис. 221

215. Тряма, що вільно лежить над опорах A й B, зігнуто парами сил M_1 і M_2, прикладеними до кінців (рис. 221). Знайдіть величини M_1 і M_2 і те поперечча mn, що йому відповідає найбільший вгин, коли завдано кути θ_1 і θ_2.

Збудуйте епюру моментів і лінію суми сил.

Відповідь.

$$M_1 = \frac{2EJ}{l}(2\theta_1 - \theta_2); \quad M_2 = \frac{2EJ}{l}(2\theta_2 - \theta_1),$$

$$x = l \cdot \frac{-M_1 + \sqrt{\frac{1}{3}\left(M_1^2 + M_2^2 + M_1 M_2\right)}}{M_2 - M_1}.$$

216. Дві дошки, що лежать одна на одній, підперто в точках A й B й обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням q *кг/м* (рис. 222). Доведіть, що найбільші нормальні напруги від згину будуть неоднакові в обох дошках, а пропорційні до їх грубин (тертям між дошками нехтуємо).

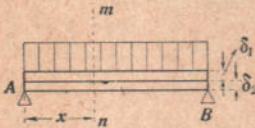


Рис. 222

Розв'язання. Позначмо через M_x' й M_x'' згинні моменти для дошок у поперечі mn. Через те, що кривина дошок однакова,

$$\frac{M_x'}{EJ_1} = \frac{M_x''}{EJ_2}, \text{ або: } \frac{M_x'}{M_x''} = \frac{J_1}{J_2} = \frac{\delta_1^3}{\delta_2^3}.$$

Взявши до уваги, що моменти опору пропорційні до квадратів грубини, ми легко доведемо вищезгадане твердження.

217. Якщо скривлену платівку AB однакової грубини згинати силами P, то, при певних умовах, буде щільне дотикання платівки до площі MN (рис. 223). По якій кривій треба спочатку скривити платівку, коли хочеться, щоб при випростуванні її силами P тиск розподілився по площі MN рівномірно?

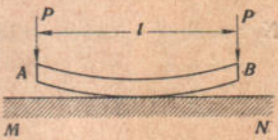


Рис. 223

Відповідь. Первісна скривлена форма повинна бути така сама, як і в трямі, що вільно лежить на двох опорах і обтяжений рівномірно розподіленим обтяженням.

218. Тряма AB закріплено кінцем A в стіну й обтяжено тягарем P, що рівномірно розподілений на лівій половині прогону (рис. 224). 1) Знайдіть вгин тряму в точці B. 2) У скільки разів побільшає вгин, коли суцільне обтяження займе не ліву, а праву половину прогону?

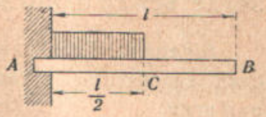


Рис. 224

Розв'язання. Скориставшись формулами для згину тряму з одним закріпленим кінцем, знайдемо для випадку рівномірно розподіленого обтяження вгин у точці C:

$$f = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{8EJ}.$$

Кут нахилу до зігнутої осі в точці C буде:

$$\theta = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6EJ}.$$

Отже, вгин у точці B буде:

$$f_1 = f + \frac{l}{2}\cdot\theta = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{8EJ} + \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6EJ} = \frac{7}{24}\cdot\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{EJ} = \frac{7}{192}\cdot\frac{Pl^3}{EJ}.$$

Щоб мати вгин f_2 в точці B, коли обтяжено праву половину тряму, треба з угину $\frac{(2P)l^3}{8EJ}$, що відповідає обтяженню всього прогону, відняти знайдений вище вгин f_1 від обтяження лівої половини тряму; тоді знайдемо:

$$f_2 = \frac{2Pl^3}{8EJ} - \frac{7}{192}\cdot\frac{Pl^3}{EJ} = \frac{41}{192}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}.$$

219. За якою кривою треба попереду зігнути бруса AB (рис. 225), коли треба, щоб тягар P при переміщенні по брусу залишався ввесь час на постійній височині? (Скривлення вважаємо за мале).

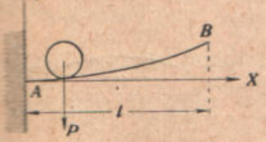


Рис. 225

Відповідь.

$$y = \frac{Px^3}{3EJ}.$$

220. Тряма AC з прямокутнім попереччям кінцем A закріплено в стіну й на протязі $AB = l_1$ підтримується підтрямом такого самого попереччя (рис. 226).

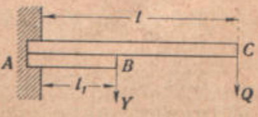


Рис. 226

Як розподілиться тиск між трямом і підтрямом, коли тряма згинати силою Q

на кінці? (Чи тиск безперевно розподілиться вздовж тряму, чи зведеться до одної зосередженої сили, прикладеної до його кінця?).

Відповідь. Тиск зведеться до зосередженої сили в точці B. Величина Y цієї сили визначається з тієї умови, що в поперечці B трям і підтрям мають спільний вгин:

$$Y = \frac{3}{4} \cdot Q\left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3}\right).$$

221. Залізного тряма з простолінійною віссю спочатку зігнуто, а потім закріплено кінцями так, що дотичні творять кути $\theta_1 = 0{,}002$ й $\theta_2 = 0{,}001$ (рис. 227). Знайдіть величину найбільших напруг, коли поперечча симетричне відносно невтральної лінії й його височина $h = 0{,}05l$.

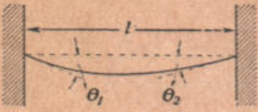


Рис. 227

Розв'язання. Через те, що $\frac{\theta_1}{\theta_2} = 2$, то трям перебуває під чином моменту, прикладеного до лівого кінця. Величину моменту визначимо з формули:

$$\frac{Ml}{3EJ} = \theta_1.$$

Найбільші нормальні напруги знайдемо за формулою:

$$(P_n)_{max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{J}.$$

При завданих розмірах $(p_n)_{max} = 300$ кг/см².

222. Тряма, що вільно лежить на двох опорах, згинають пари сил, прикладені до кінців (рис. 228). Яке співвідношення між величинами цих пар, коли точка перегину лежить на віддалі $\frac{l}{3}$ від лівої опори?

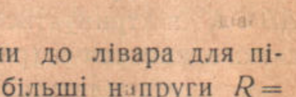


Рис. 228

Відповідь. $M_2 = 2M_1$.

223. Доберіть два двотетові залізні трями до лівара для підіймання паровозів, припустивши, що найбільші напруги $R = 900$ кг/см². Вага паровозу без води, вугілля й колісних скатів

32 *т*. Віддаль між швелерами паровозу 1,2 *м*, між ліварами 3,5 *м* (рис. 229).

Відповідь. Двотети № 36.

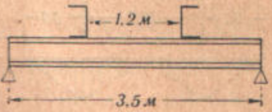


Рис. 229

224. Чавунна квадратова плита 1×1 *м* лежить на мурі; зверху, за допомогою циліндричного котка, що міститься по середині плити, передається тиск 300 *т*, який розподіляється рівномірно вздовж циліндра. Допустивши найбільшу напругу для чавуну 500 *кг/см*^{2}, визначте грубину плити при умові, що вона, маючи зігнуту форму, повинна випроставшись передати на мур рівномірно розподілений тиск. Визначте стрілу *f* попереднього вгину (рис. 230). (Деформацією муру нехтуємо).

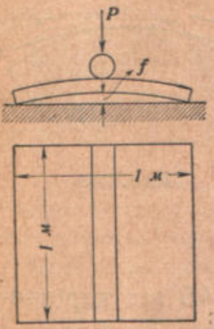


Рис. 230

Відповідь. Грубина плити 21,2 *см*; стріла вгину $f = \frac{1}{26}$ *см*.

225. Залізний брус, через нагрівання знизу, кривиться, як показано на рис. 231. Визначте стрілу вгину *f*, припустивши, що по височині поперечча бруса температура міниться за лінійним законом. Різниця температур спідньої й верхньої грані бруса дорівнює 50°C, $l = 1$ *м*, $\delta = 1$ *см*.

Рис. 231

Розв'язання. При завданому розподілі температур скривлення бруса буде таке саме, як і у випадку чистого згину. Найбільший розтяг і стиск для подовжних волокон дорівнюють $\frac{\delta}{2\varrho}$. Прирівнявши це до деформацій від нерівномірного нагрівання (температуру відлічуємо від температури серединного шару), знайдемо:

$$\frac{\delta}{2\varrho} = 0{,}0000125 . 25 .$$

Звідси знаходимо ϱ, і легко можна обчислити *f*.

226. Трява півкруглого поперечча, покладеного спідньою гранню на суцільну основу, згинають дві симетрично розташовані сили $P = 5$ *т*. Знайдіть величину найбільших розтяжних і стискних напруг, що виникають при згині тряму, коли реакції основи розподіляються так, як показано на рис. 232.

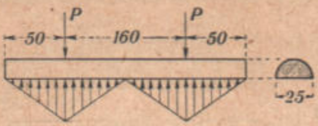


Рис. 232

227. До диска радіюса ϱ магнетні сили притягають тонку стальну лінійку. На якому протязі a (рис. 233) лінійка не буде приставати до диска, коли магнетні сили рівномірно розподіляються по поверхні лінійки; інтенсивність цих сил q, грубину лінійки δ й радіюс диска ϱ завдано.

Рис. 233

Розв'язання. Коли довжина a мала, то дільниці AM і NB, що не пристають до диска, вважаємо за трями, що несуть рівномірне обтяження q. Довжину a визначимо з тієї умови, що в M і N кривина лінійки повинна дорівнювати $\frac{1}{\varrho}$. Отже, $\frac{E\delta^3}{12\varrho} = \frac{qa^2}{2}$.

228. Які будуть найбільші напруги в брусі AB від нерівномірного нагрівання (див. зад. 225), коли особливі закріплення не дають кінцям бруса повертатись?

Розв'язання. Користуючись формулою $\frac{EJ}{\varrho} = M$, легко знайти ті моменти, що потрібні для того, щоб усунути кривину, викликану нерівномірним нагріванням.

229. Брус, що плаває, має квадратове попереччя 30 × 30 *см* і тримає по середині зосередженого тягара 100 *кг*. Знайдіть напруги від згину, коли довжина бруса 6 *м*. Як зміняться напруги, коли, замість тягара 100 *кг* по середині, матимемо на кінцях бруса 2 тягарі по 50 *кг*?

Розв'язання. Нехтуючи вгинами бруса, робимо висновок, що від чину тягара 100 *кг* по середині брус буде згинатись від тиску води, рівномірно розподіленого вздовж його. Кожна половина бруса опиниться в умовах тряму з одним закріпленим кінцем. Коли тягарі чинять на кінцях, то завдання зводиться до згину тряму з опертими кінцями й рівномірно обтяженого вздовж.

230. Баржу однакового поперечча завдовжки 60 *м* обтяжено так, що в середній третині на подовжинний метр припадає по 10 *т*, а в бічних частинах по 5 *т*. (Ця вага складається з власної ваги корабля й ваги тагарів). Збудуйте епюру згинних моментів і нарисуйте лінію їхньої суми. Як зміниться величина найбільшого моменту й найбільшої перерізної сили, коли з кожного подовжинного метра середньої частини здійняти по 9 m вантажу?

231. Затоплену дерев'яну баржу однакового поперечча завдовжки 50 *м* підіймають за допомогою шнурів, закріплених до кінців. Який буде при цьому найбільший згинний момент, коли власна вага баржі 100 m, вага вантажу, рівномірно розподіленого вздовж баржі, 100 m. Питома вага дерева 0,7, питома вага вантажу 1,7.

232. З'ясуйте, як впливають дотичні напруги на вгин тряму AB, коли чинить зосереджена сила P (рис. 234).

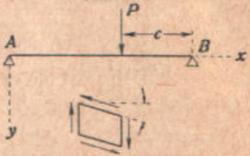


Рис. 234

Розв'язання. Повний вгин y складається з двох частин: вгину y_1 від нормальних напруг і вгину y_2 від дотичних напруг. Нас цікавить згин осі тряму, і через це ми будемо брати дотичні напруги, відповідні до невтрального шару; вони дорівнюють $\frac{Qk}{F}$, а відповідний зсув буде $\frac{Qk}{FG}$. Тут F є площа поперечча, а k — коефіцієнт, що залежить від форми поперечча.

Щоб визначити y_2, маємо рівняння:

$$\frac{\partial y_2}{\partial x} = \frac{Qk}{FG} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{k}{FG};$$

звідси

$$y_2 = \frac{Mk}{FG} + C.$$

Повний вгин y повинен обертатись на опорах у нуль, і коли ми добрали y так, що він на кінцях дорівнює нулеві, то й y_2 повинен задовольняти ту саму умову. Отже:

$$y_2 = \frac{Pc}{l} x \cdot \frac{k}{FG} \text{ для лівої дільниці тряму;}$$

$$y_2 = \frac{P(l-c)(l+x)}{l} \cdot \frac{k}{FG} \text{ для правої дільниці тряму.}$$

Вгин під тягарем буде:

$$(y_2)_{x=l-c} = \frac{Pc(l-c)}{l} \cdot \frac{k}{FG}.$$

Прирівнявши це до вгину від нормальних напруг

$$(y_1)_{x=l-c} = \frac{Pc_2(l-c)^2}{3lEJ},$$

одержимо:

$$(y_2)_{x=l-c}=\frac{Pc^2(l-c)^2}{3lEJ}\cdot\frac{3kE}{G}\cdot\frac{r^2}{c\,(l-c)}.$$

Отже,

$$(y)_{x=l-c}=\frac{Pc^2(l-c)^2}{3lEJ}\left[1+\frac{3kE}{G}\cdot\frac{r^2}{c\,(l-c)}\right],$$

де r є відповідний радіюс інерції поперечча.

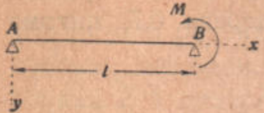


Рис. 235

233. Дослідіть, як впливають дотичні напруги на вгин тряму AB, якого згинає пара сил M (рис. 235).

Розв'язання. Коли y_1 і y_2 є вгини від нормальних і дотичних напруг, а y — спільний вгин, то матимемо:

$$EJ\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}=-\frac{Mx}{l};\qquad EJy=-\frac{Mx^3}{6l}+Dx+D_1;$$

$$y_2=\frac{Mx}{l}\cdot\frac{k}{FG}+C;\quad EJy=-\frac{Mx^3}{6l}+\left(D+\frac{Mk.EJ}{lFG}\right)x+C+D_1.$$

Щоб задовольнити умови на кінцях, треба покласти $C+D_1=0$:

$$-\frac{Ml^2}{6}+Dl+\frac{MkEJ}{FG}=0,$$

звідси

$$D=+\frac{Ml}{6}-\frac{MkEJ}{FGl}.$$

Отже,

$$EJy=\frac{Mx}{6l}(l^2-x^2).$$

У цьому випадку дотичні напруги не впливають на вгин тряму.

234. Дослідіть, як впливають дотичні напруги на вгин тряму в випадку згину парою, прикладеною в проміжному поперечч і (рис. 236).

Рис. 236

Розв'язання. Уявім собі згинну пару, створену двома вертикальними дуже великими силами P й $-P$, прикладеними на дуже близькій віддалі δ одна від одної. Тоді $P\delta$ являтиме собою величину згинної пари. Вгини y_2 від дотичних напруг одержимо, коли пододаємо вгини від сили P й сили $-P$.

Для лівої частини тряму матимемо:

$$(y_2)_I=\left[\frac{Pc}{l}x-\frac{P(c-\delta)}{l}x\right]\frac{k}{FG}=\frac{Mkx}{t}\cdot\frac{1}{FG}.$$

Для правої половини одержимо:

$$(y_2)_{II} = \left[\frac{P(l-c)(l-x)}{l} - \frac{P(l-c+\delta)(l-x)}{l}\right]\frac{k}{FG} = -\frac{Mk(l-x)}{l} \cdot \frac{1}{FG}.$$

У місці прикладання сил вгини y_2 зазнають розриву. Додатковий вгин від зсуву зображено на рисунку пунктиром.

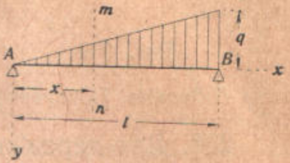


Рис. 237

235. Вільнолежного тряма згинає суцільне обтяження, що міниться за законом трикутника. Знайдіть, як впливають дотичні напруги на кути повороту кінців (рис. 237).

Розв'язання.

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{Qk}{FG} = \left(\frac{ql}{6} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2}\right)\frac{k}{FG}.$$

Підставляючи замість x значення 0 і l, маємо:

$$\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{ql}{6} \cdot \frac{k}{FG}; \quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{ql}{3} \cdot \frac{k}{FG}.$$

Для порівняння наводимо повороти кінців, що їх зумовлюють нормальні напруги

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{7}{360} \cdot \frac{ql^3}{EJ}, \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{8}{360} \cdot \frac{ql^3}{EJ}.$$

Отже,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{7}{360} \cdot \frac{ql^3}{EJ}\left(1 + \frac{60k}{7} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{r^2}{l^2}\right); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{8}{360} \cdot \frac{ql^3}{EJ}\left(1 + \right.$$

$$\left. + 15k\frac{E}{G} \cdot \frac{r^2}{l^2}\right).$$

ЗАВДАННЯ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧНІ

236. Знайдіть опорні моменти й точки вгину тряму *AB*, двокінцево закріпленого в стіну (рис. 238) і обтяженого зосередженою силою *P*. (Треба скористуватись результатами зад. 206 і виразом для кутів повороту опорних попереччів при чині на кінцях тряму згинних пар).

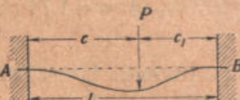


Рис. 238

Відповідь.

$$M_1 = \frac{Pcc_1^2}{l^2}; \qquad M_2 = \frac{Pc_1c^2}{l^2}.$$

237. Дві залізні смуги завдовжки по 2 *м* з попереччям $a=4$ *см*, $h=0{,}5$ *см* знютовано на кінцях. Між ними посередині закладено ґумового циліндрика заввишки $h=5$ *см* і з попереччям $F=2$ *см*² (рис. 239). Знайдіть поперечне поширення циліндрика від стиску між смугами. Для ґуми: $E=10$ *кг*/*см*², $G=3^1/_3$ *кг*/*см*².

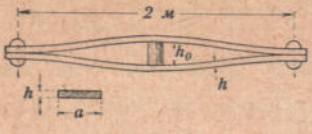


Рис. 239

Відповідь. Поперечне поширення діяметра дорівнює 0,1 *d*.

238. Два дерев'яні трями з попереччям 25×25 *см*, що лежать навхрест, перекривають приміщення розмірами 6×4 *м* (рис. 240). У місці перехрестя трямів лежить тягар $Q=3500$ *кг*. Визначте: 1) як розподілиться тягар Q між обома трямами, коли при згині вони ввесь час щільно дотикаються один до одного; 2) який первісний прозір u треба взяти, щоб найбільші нормальні напруги при згині були однакові для обох трямів.

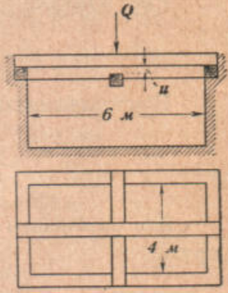


Рис. 240

Розв'язання. Коли P_1 і P_2 є тиски, що передаються на кожний трям, а l_1 і l_2 — прогони трямів, то для визначення P_1 і P_2 маємо:

$$P_1+P_2=Q;\quad \frac{P_1 l_1^3}{48EJ}=\frac{P_2 l_2^3}{48EJ}.$$

У другому випадку тиски P_1 і P_2 визначаються з умов:

$$P_1+P_2=Q;\quad \frac{P_1 l_1}{4}=\frac{P_2 l_2}{4}.$$

Коли маємо P_1 і P_2, то легко знайти потрібний прозір u.

Відповідь. 1) $P_1=2700$ *кг*; $P_2=800$ *кг*, 2) $u=1{,}74$ *см*.

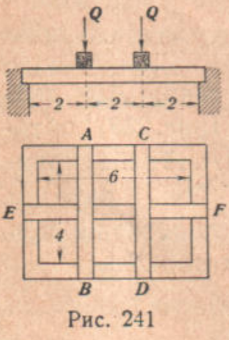


Рис. 241

239. Приміщення перекрито трьома трямами однакових поперечних розмірів (рис. 241, розміри в *м*). Короткі трями AB й CD тримають рівномірно розподілене вздовж їх обтяження Q. При згині трями AB й CD будуть тиснути на трям EF; знайдіть величини цих тисків P.

Відповідь.

$$P=\frac{5}{48}Q.$$

240. Двокінцево закріпленого тряма обтяжено тягарем P, розподіленим уздовж тряму за законом трикутника (рис. 242). Знайдіть опорні моменти й точки перегину зігнутої осі тряму.

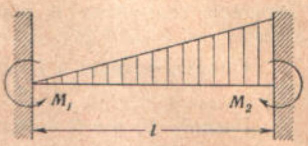


Рис. 242

(Скористуйтесь даними зад. 205).

Відповідь.

$$M_1=\frac{1}{15}Pl;\qquad M_2=\frac{1}{10}Pl.$$

241. Тряма AB, закріпленого кінцем A в стіну й опертого в точці B, згинає зосереджена сила P (рис. 243). Знайдіть величину опорного моменту M і опорну реакцію на кінці B; збудуйте лінію впливу для опорного моменту й реакції B.

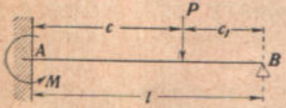


Рис. 243

(Скористуйтесь даними зад. 206).

Відповідь.

$$M=\frac{Pcc_1(c_1+l)}{2l^2};\qquad B=\frac{P[2l^2c-cc_1(c_1+l)]}{2l^3}.$$

242. Кінець A консольного тряму ABC закріплено в стіні, а на кінці C чинить сила P (рис. 244). Знайдіть величину R опорної реакції в B.

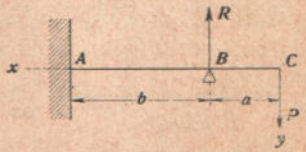


Рис. 244

Розв'язання. Відкинувши опору B, одержимо тряма, закріпленого кінцем A й зігнутого силою P. Рівняння зігнутої осі буде:

$$y=\frac{Pl^3}{3EJ}-\frac{Pl^3}{2EJ}\left(\frac{x}{l}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{l^3}\right),$$

де $l=a+b$. Поклавши $x=a$, знайдемо вгин f у точці B.

Опорну реакцію R знайдемо з тієї умови, що викликаний нею в точці B вгин $\frac{Rb^3}{3EJ}$ повинен дорівнювати величиною вгинові f_1; одержимо:

$$R=\frac{P}{b}\left(b+\frac{3a}{2}\right).$$

Такий самий результат можна одержати й інакше. Відкидаємо те закріплення, що не дає повертатись лівому кінцеві; тоді сила P поверне кінець A на кут $\frac{aPb}{6EJ}$.

Щоб уникнути цього повороту, треба прикласти в A момент, спрямований за стрілкою годинника й рівний $\frac{Pa}{2}$.

Опорна реакція в B від цього моменту дорівнює $\frac{Pa}{2b}$.

Реакція B, що її викликає сила P, дорівнює $\frac{P(a+b)}{b}$.

Додавши одну до одної ці реакції, дійдемо до вище одержаного результату.

243. Тряма AB, закріпленого кінцем A в стіну, обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням Q й обтяженням P, розподіленим за законом трикутника (рис. 245). Знайдіть величину опорного моменту M і збудуйте лінію суми сил.

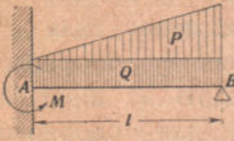


Рис. 245

Розв'язання. Відкинувши те закріплення, що не дає повертатись кінцеві A, й перейшовши до тряму з опертими кінцями, знайдемо, що поворот попереччя A від обтяження Q дорівнює $\frac{Ql^3}{24EJ}$, від обтяження P дорівнює $\frac{7}{180}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}$ (див. зад. 201). Повний кут повороту буде:

$$\theta_1=\frac{Ql^2}{24EJ}+\frac{7}{180}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}.$$

Опорний момент M визначимо з тієї умови, що викликаний ним поворот попереччя A дорівнює величиною й протилежний напрямом θ_1; отже:

$$\frac{Ml}{3EJ}=\frac{Ql^2}{24EJ}+\frac{7}{180}\ \frac{Pl^2}{EJ}.$$

Відповідь.

$$M=\frac{7}{60}Pl+\frac{Ql}{8}.$$

Опорні реакції $R_A=\frac{5}{8}\ Q+\frac{9}{20}P$; $R_B=\frac{3}{8}\ Q+\frac{11}{20}P$.

244. Скористуйтесь результатами зад. 243 й знайдіть опорні реакції для нерозрізного двопрогінного тряму (рис. 246), обтяженого рівномірно розподіленим обтяженням.

Рис. 246

Розв'язання. Через те, що прогони однакові й однаково обтяжені, то, через симетрію, поперечча B не повертається. Кожну половину тряму AB можна вважати за трям з одним заправленим і другим опертим кінцями.

Відповідь. $R_A=R_C=\frac{3}{16}Q$; $R_B=\frac{5}{8}Q$, де Q є все обтяження.

245. Двокінцево закріпленого тряма згинає пара сил M, прикладена в поперечці mn (рис. 247). Знайдіть опорні моменти M_1 і M_2 і збудуйте епюру моментів і перерізних сил. (Скористайтесь результатами зад. 212).

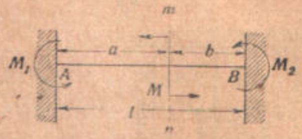


Рис. 247

Відповідь.

$$M_1=\frac{2M}{l}\left[2a\left(1-\frac{l}{3a}-\frac{a}{2l}\right)+b\left(1-\frac{l}{3b}-\frac{b}{2l}\right)\right].$$

$$M_2=\frac{2M}{l}\left[2b\left(1-\frac{l}{3b}-\frac{b}{2l}\right)+a\left(1-\frac{l}{3q}-\frac{a}{2l}\right)\right].$$

246. Водонепроникливу переділку заввишки $h=6$ *м* зложено з низки вертикальних стояків двотетового поперечча, обшитих аркушевим залізом. Кожного стояка оперто на три нерухомі опори, віддалені на 3 *м* одна від одної (рис. 248). Доберіть за сортаментом нумер двотетового тряму, коли допускна напруга дорівнює 1000 *кг/см*² і віддаль між стояками $d=1$ *м*.

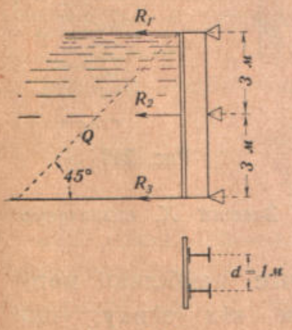


Рис. 248

Розв'язання. Середню опорну реакцію R_2 знаходимо з тієї умови, що викликаний нею по середині прогону вгин $\frac{R_2h^3}{48EJ}$ повинен дорівнювати вгинові $\frac{5}{384}\cdot\frac{Qh^3}{EJ}$ від гідростатичного тиску Q, що припадає на кожний стояк.

Відповідь. Опорні реакції: $R_1=0.375\,\text{т}$, $R_2=11{,}25\,\text{т}$; $R_3=6{,}375\,\text{т}$.

Найбільший $M_{max}=3{,}61$ *тм*.

Потрібний момент опору $W=361$ *см*³. Треба взяти двотет № 25 ($W=396$ *см*³).

Наскільки поменшає тиск на середню опору, коли вона при згині тряму переміщується на 1 *мм*?

Штивність EJ двотета № 25 дорівнює $2.10^6.4950$ $кг/см^2$. Поменшання тиску P визначимо з рівнання:

$$\frac{Ph^3}{48EJ}=0{,}1; \quad P=\frac{0{,}1.48.2.10^6.4950}{6^3.10^6}=220 \text{ кг}.$$

247. На трьох стрижнях однакових завдовжки $l'=80$ *м* і з однаковим попереччям $F=3\,см^2$, з яких середній мідний, а скрайні залізні, почеплено тряма прямокутнього поперечча завдовжки $l=8$ *м*, що важить $P=800$ *кг* (рис. 249). Знайдіть напругу в трямі, прийнявши $E_{міді}=\frac{1}{2}E_{зал.}$. (Щоб відрізнити цю задачу від задачі 63, тут треба взяти до уваги деформацію тряму).

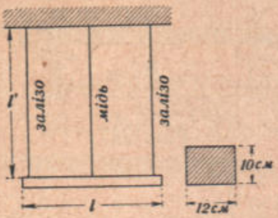


Рис. 249

Збудуйте епюру моментів і суми сил.

248. Один кінець дерев'яного тряма прямокутнього поперечча закріплено, а другий оперто на циліндричну кручену стальну ресору й обтяжено силою P посередині (рис. 250).

Знайдіть найбільші напруги в дереві й сталі, коли розміри тряму й ресори, а також модулі пружности матеріялів ми знаємо.

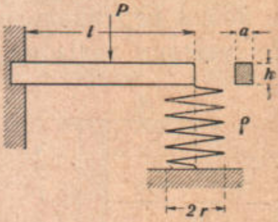


Рис. 250

Розв'язання. Відкинувши пружину, заміняємо її силою X. Прирівнюємо вгин тряму від чину сил P й X до осідання пружини від сили X; звідси знаходимо X. Знавши X, визначаємо напруги.

249. Визначте найбільші нормальні напруги від згину, що виникають у нюті від чину сили P (рис. 251). При обчисленні знехтувати тертя між аркушами й припустити, що тиски вздовж нюти розподіляються за законом, зображеним на рис. 251*b* або на рис. 251*c*.

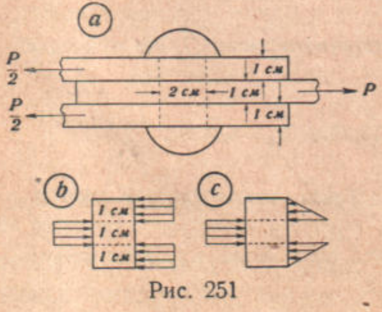


Рис. 251

250. Визначте опорні реакції й нарисуйте епюру згинних моментів для двопрогінного тряму *AB*. Розташування чинних сил показано на рис. 252.

$$P_1 = 680\ кг, \quad P_2 = 900\ кг.$$

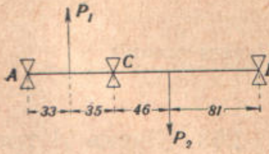


Рис. 252

Відповідь. Опорні реакції: $A = -515\ кг$, $C = +$ $+497\ кг$ і $B = +238\ кг$.

251. Трям *AD* лежить на чотирьох рівновіддалених опорах і обтяжений зосередженим обтяженням *P* посередині (рис. 253). Знайдіть опорні реакції й збудуйте епюру згинних моментів.

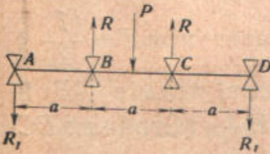


Рис. 253

Розв'язання. Відкинувши опори *A* й *D*, матимемо тряма, що лежить на двох опорах *B* й *C*. Від чину сили *P* попереччя *B* й *C* повернуться на кут $\frac{Pa^2}{16EJ}$. Цьому відповідає підіймання точок *A* й *D* на величину

$$\frac{Pa^3}{16EJ}. \qquad [1]$$

Опорні реакції R_1 спричиняються в *A* й *D* до вгинів протилежного напряму:

$$\frac{R_1 a^3}{3EJ} + \frac{R_1 a^3}{2EJ}. \qquad [2]$$

Прирівнявши [1] до [2], одержимо $R_1 = \frac{3}{40} P$. Знаючи R_1, знайдемо *R*.

252. Двопрогінного тряма обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням (рис. 254). Визначте реакцію середньої опори, коли прогони однакові, але середня опора нижча від скрайніх на $0{,}001l$. Повне обтяження $2lq = 800\ кг$, $l = 1\ м$, штивність балки $EJ = 10^8\ кгсм^2$.

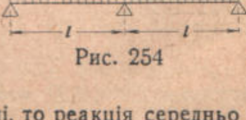


Рис. 254

Розв'язання. Коли всі опори лежать на одній височині, то реакція середньо опори $R_1 = \frac{5}{8} \cdot 800 = 500\ кг$. Пониження середньої опори зменшує середню реакцію на силу *P*, що може по середині прогону викликати вгин, рівний пониженню середньої опори; отже:

$$\frac{P(2l)^3}{48EJ}=0{,}001l; \quad P=60 \text{ кг.}$$

Шукана реакція

$$R=R_1-P=440 \text{ кг.}$$

253. Кінець A тряму AB закріплено в стіні, а кінець B стяглем CB прикріплено до сволока DE, що вільно лежить на двох опорах (рис. 255).

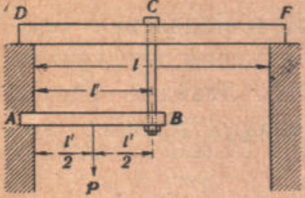


Рис. 255

1) Знайдіть натяг стрижня BC від чину сили P.

2) Визначте цей натяг при $l'=\frac{l}{2}$ і при однаковій штивності трямів AB й DF, тобто, коли $EJ=E_1J_1$. (Стрижня BC вважайте за нерозтяжного).

Відповідь. 1) Натяг Y визначимо з рівняння:

$$\frac{5}{48}\cdot\frac{Pl_1^3}{E_1J_1}-\frac{Yl_1^3}{3E_1J_1}=\frac{Yl_1^2(l-l_1)^2}{3EJl},$$

яке матимемо, коли вгин точки B тряма AB прирівняємо до вгину точки C тряму DF.

2) Коли $l_1=\frac{l}{2}$, то $EJ=E_1J_1$

$$Y=\frac{5}{24}.$$

254. У місці злучення двох трямів AB й CD прикладено силу P. Знайдіть вгин у точці прикладання сили, коли штивність трямів і їхні прогони ми знаємо (рис. 256).

Рис. 256

Розв'язання. Зусилля P_1 і P_2, що передаються на трями AB й CD, визначимо з рівнянь:

$$P_1+P_2=P; \quad \frac{P_1l_1^3}{3EJ_2}=\frac{P_2l_2^3}{3EJ_2}.$$

255. Один кінець рівномірно обтяженого тряму *AB* закріплено в стіну, а другий кінець оперто на стояка, *BC* (рис. 257). Від тиску на стояк кінець *B* спускається. (Кожній тонні тиску відповідає спускання на 1 *см*). Обчисліть той тиск, що припадає на стояк, коли $l=6$ *м*, $q=500$ *кг/м*, штивність тряму $FJ=37\,.\,10^9$ *кгсм*².

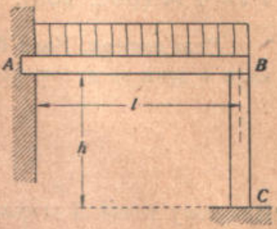


Рис. 257

Відповідь. Невідомий тиск Y визначимо з рівнання:

$$\frac{ql^4}{8EJ}-\frac{Yl^3}{3EJ}=Y.10^{-3};$$

звідси

$$Y=750 \text{ кг}.$$

256. Дерев'яний трям, якого обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням q *кг/м*, кінцями *A* й *B* вільно лежить на опорах, а посередині підпертий косяками (рис. 258). Знайдіть ту силу, що стискає косяка, коли трям і косяки мають однакове поперечча 25×25 *см*. Довжина тряму $l=6$ *м*; $q=800$ *кг/м*. (Нижні кінці *D* й *E* косяків вважайте за абсолютно нерухомі). Кут нахилу косяків 45°. Їхню довжину візьміть $\frac{l}{\sqrt{2}}$.

Рис. 258

Розв'язання. Коли знехтувати стиском косяків, то той тиск, що на них припадає, буде: $\frac{5}{8}ql:\sqrt{2}=2121$ *кг* (див. зад. 244). Через стиск косяків середня опора знизиться. Сила X, що стискає косяки, буде менша, ніж обчислена вище, й її ми визначимо з рівнання:

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EJ}-\frac{X\sqrt{2l^2}}{48EJ}=\frac{Xl\sqrt{2}}{EF\sqrt{2}};\quad X=2111 \text{ кг}.$$

257. Залізний трям *AB* з одним закріпленим, а другим опертим кінцем, кривиться від нерівномірного нагрівання. Припустім, що температура тряму маліє в напрямі зверху донизу за лінійним законом, і різниця температур на верхній і спідній гранях дорівнює 10°C. Знайдіть тиск

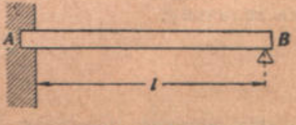


Рис. 259

на опору B й M_{max}, коли поперечча тряму двотетове № 20 і $l=4$ *м* (рис. 259).

Розв'язання. Коли б опори B не було, то нерівномірне нагрівання викликало б згин за дугою кола, якого радіюс ϱ можна визначити з рівняння:

$$e_{\frac{h}{2}}=0{,}0000125.5=\frac{h}{2\varrho}=\frac{20}{2\varrho}.$$

При тому точка B вгнулася б на величину:

$$f=\frac{l^2}{2\varrho}=\frac{0{,}0000125.5.400^2}{20}=0{,}5 \text{ см}.$$

Реакція B повинна знищити цей вгин; отже:

$$\frac{B.400^3}{3EJ}=0{,}5,$$

$$B=\frac{3EJ.0{,}5}{400^3}=94{,}4 \text{ кг}.$$

$$M_{max}=4.94{,}4 \text{ кгм}.$$

258. Нарисуйте епюру згинних моментів і лінію суми сил для залізного двотетового тряму № 20, що лежить на трьох опорах A, B й C, коли скривлення є результат такого самого нерівномірного нагрівання, як і в попередній задачі (рис. 260).

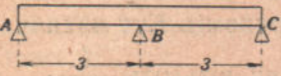


Рис. 260

259. Тряма з закріпленими кінцями згинає сила P (рис. 261). Опора B при цьому залишається зовсім нерухома. Опора A трохи спускається донизу (опорне поперечча тряму при цьому не повертається). Яке буде це спускання, коли опорний момент M_A обертається в нуль?

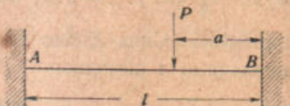


Рис. 261

Розв'язання. Відкиньмо опору A; тоді кінець тряму A від чину сили P вгнеться на величину:

$$\frac{Pa^3}{3EJ}+\frac{Pa^2}{2EJ}(l-a),.$$

і ліве кінцеве поперечча повернеться на кут $\frac{Pa^2}{2EJ}$.

Прикладім тепер у точці A спрямовану знизу догори силу Q таку завбільшки, щоб вона нищила поворіт кінця A. У такому разі

$$\frac{Ql^2}{2EJ}=\frac{Pa^2}{2EJ} \text{ і } Q=\frac{Pa^2}{l^2}.$$

Викликаний цією силою вгин дорівнює:

$$\frac{Ql^3}{3EJ}=\frac{Pa^2l}{3EJ}.$$

Шукане спускання лівої опори дорівнює:

$$\frac{Pa^3}{3EJ}+\frac{Pa^2(l-a)}{2EJ}-\frac{Pa^2l}{3EJ}=\frac{Pa^2(l-a)}{6EJ}.$$

260. Кінець тряму AB пружно закріплено на опорі, що не осідає, а кінець B оперто на опору, що пружно осідає (рис. 262). Знайдіть всі обставини згину для того випадку, коли трям тримає рівномірно розподілене обтяження.

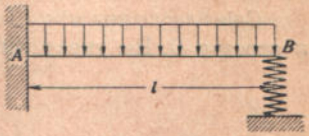


Рис. 262

Розв'язання. Нехай B буде права опорна реакція. Тоді осідання правої підпори буде αB, де α є коефіцієнт штивности опори.

Це осідання дорівнює вгинові тряму, якому можна дати такий вираз:

$$\frac{ql^4}{8EJ}-\frac{Bl^3}{3EJ}+l\varphi.$$

Тут φ є кут повороту пружно заправленого правого кінця тряму. Позначивши літерою β коефіцієнт штивности закріплення, матимемо:

$$\varphi=\beta M_A=\beta\left(\frac{ql^3}{2}-Bl\right).$$

Прирівнявши осідання опори B до вгину тряму в цьому місці, одержимо таке рівняння для визначення B:

$$\frac{ql^4}{8EJ}-\frac{Bl^3}{3EJ}+\beta l\left(\frac{ql^2}{2}-Bl\right)=\alpha B.$$

261. Трям однакового попереччя, що на протязі AC лежить на абсолютно штивній основі, згинається від власної ваги (рис. 263). З'ясуйте, при якому співвідношенні між a й b трям буде дотикатись до штивної основи лише в точках A й C. Коли трям буде дотикатись безперервно до основи на якомусь протязі m?

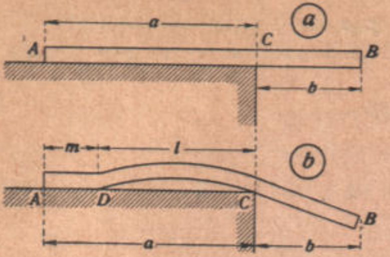


Рис. 263

Розв'язання. Припустім, що згин стався так, як показано на рис. 263 b. На дільниці AD буде повне дотикання, а далі трям вигинаючись відстає від основи. У точці D попереччя тряму не повертається, а в точці C немає вгину. На дільниці DC форма згину буде така сама, як і в трямі з одним закріпленим, а другим опертим кінцем. До опертого кінця в поперечч C буде прикладено згинний момент, що рівний $\frac{qb^2}{2}$. Тут q є вага одиниці довжини тряму. У поперечч D згинний момент повинен обертатися в нуль, бо на дільниці AD трям не згинається.

Співвідношення між l і b знайдемо з умови рівностн нулеві кута повороту поперечча D. Цю умову напишемо так:

$$\frac{ql^3}{24EJ}-\frac{qb^2}{2}\cdot\frac{l}{6EJ}=0,$$

звідси

$$l=b\sqrt{2}.$$

Коли AC (рис. 263 a) менше, ніж $b\sqrt{2}$, то матимемо дотикання в двох точках; у противному разі дотикання на дільниці $m=a-b\sqrt{2}$.

262. Трям понтонного мосту покладено на три опори (понтони) ABC (рис. 264). Дослідіть згин тряму при різних положеннях тягара P m, коли штивність тряму EJ і площу $F\text{м}_2$ поперечча понтону на рівні води завдано.

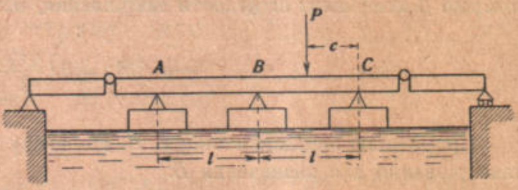


Рис. 264

Розв'язання. Відкиньмо середню опору й знайдім вгин точки B. Він залежатиме від скривлення осі й від занурення понтонів. Перша частина вгину дорівнює

$$f_1=\frac{Pc}{48EJ}[3(2l)^2-4c^2].$$

Занурення понтонів буде:

$$f_A = \frac{Pc}{2l.F}\, м; \quad f_B = \frac{P(2l-c)}{2l.F}\, м.$$

Друга частина шуканого вгину буде:

$$f_2 = \frac{f_A + f_B}{2} = \frac{P}{2F}.$$

Повний вгин в B, коли немає середньої опори, буде:

$$f = \frac{Pc}{48EJ}[3(2l)^2 - 4c^2] + \frac{P}{2F}.$$

Коли є середня опора, то в точці B чинитиме знизу догори опорна реакція X. Вона зменшує обчислений вище вгин f на величину

$$\frac{X}{2F} + \frac{X.(2l)^3}{48EJ}.$$

Таким чином, остаточна вартість вгину, що його ми одержали, очевидно дорівнюватиме осіданню середнього понтону, що рівне $\frac{X}{F}$.

Щоб визначити X, маємо рівнання

$$\frac{Pc}{48EJ}[3(3l)^2 - 4c^2] + \frac{P}{2F} - \frac{X}{2F} - \frac{X(2l)^3}{48EJ} = \frac{X}{F}.$$

263. Трям ABC (рис. 265), що лежить на трьох пружних опорах, обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням інтенсивности q. Знайдіть всі елементи, що визначають вгин, узявши до уваги вплив дотичних напруг на вгин тряму. Коефіцієнт штивности опор A, B й C, на які доводиться помножати реакції, щоб одержати осідання, відповідно рівні a_1, a_2, a_3.

Рис. 265

Розв'язання. Відкиньмо середню опору; тоді вгин посередині буде:

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EJ} + \frac{ql^2}{8}\cdot\frac{k}{FG} + \frac{ql(a_1 + a_3)}{4}. \qquad [1]$$

Другий член у цьому виразі являє собою стрілку від зсуву й обчисляється за формулою: $y_2 = \frac{Mk}{FG}$. Третій член дає нам вгин від осідання опор.

Прикладім тепер у точці B силу X, що чинить знизу догори й являє собою середню опорну реакцію. Той вгин, що вона викликає, дорівнюватиме:

$$\frac{Xl^3}{48EJ}+\frac{Xlk}{4.FG}+\frac{X(\alpha_1+\alpha_3)}{4}. \qquad [2]$$

Прирівнявши різницю вгинів [1] і [2] до осідання середньої опори, що дорівнює, очевидно, $X\alpha_2$, одержимо рівняння для визначення X. З нього знайдемо

$$X=\frac{5}{8}\,ql\,\frac{1+9{,}6\,\beta+19{,}2B\,(\alpha_1+\alpha_3)}{1+12\,\beta+12\,B\,(\alpha_1+\alpha_3+4\alpha_2)},$$

де для скорочення писання впроваджено такі позначення:

$$\frac{EJk}{GFl^2}=\beta;\quad \frac{EJ}{l^2}=B.$$

264. Трипрогінного тряма $ABCD$ (рис. 266), опертого в точках A й D й штивно злученого з стояками B й C, згинає суцільне обтяження, рівномірно розподілене на середньому прогоні. Знайдіть величину найбільшого згинного моменту для цього тряму.

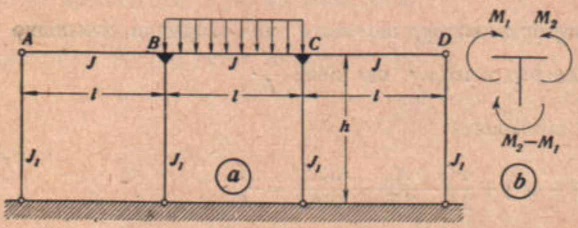


Рис. 266

Розв'язання. У цьому випадку ми матимемо діло з двома зайвими невідомими; за ці невідомі візьмім згинний момент M_1 на прогоні AB безпосередньо ліворуч від точки B й згинний момент M_2 на прогоні BC безпосередньо праворуч від точки B (рис. 266*b*). Щоб визначити M_1 і M_2, скористуймось умовами штивного злучення в точці B. Кінці всіх трьох стрижнів, що сходяться в B, повертаються на однаковий кут φ, що є кут повороту штивного вузла B; цей кут будемо відлічувати за стрілкою годинника. З розгляду прогону AB знайдемо для цього кута такий вираз:

$$\varphi=-\frac{M_1l}{3EJ}.$$

З розгляду прогону BC одержимо для того ж таки кута вираз:

$$\varphi=\frac{ql^3}{24EJ}+\frac{M_2l}{2EJ}.$$

Нарешті, з розгляду згину стояка одержуємо:

$$\varphi=-\frac{(M_2-M_1)h}{3EJ_1}.$$

Для визначення M_1 і M_2 маємо рівняння:

$$\frac{ql^3}{24EJ}+\frac{M_2 l}{2EJ}+\frac{M_1 l}{3EJ}=0:$$

$$\frac{(M_2-M_1)\,h}{3EJ_1}-\frac{M_1 l}{3EJ}=0;$$

звідси:

$$M_1=-\frac{ql^2}{4\,(5+3k)};$$

$$M_2=-\frac{ql^2}{4}\cdot\frac{(1+k)}{(5+3k)},$$

де

$$k=\frac{J_1 l}{Jh}.$$

Поклавши

$$J_1=0,$$

одержимо

$$M_1=M_2=-\frac{ql^2}{20};$$

коли

$$J_1=\infty,$$

то одержимо:

$$M_2=-\frac{ql^2}{12};\quad M_1=0,$$

тобто такий самий результат, як для тряму з закріпленими кінцями.

265. Збудуйте інфлюєнтну лінію для опорного моменту M_1 у випадку двопрогінного тряму (рис. 267) однакового поперечча (прогони візьміть рівні).

Знайдіть те положення тягара, що йому відповідає *max* моменту під тягарем і визначте цей *max*.

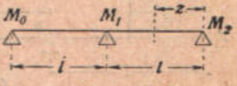


Рис. 267

Розв'язання. Поставивши тягара, рівного одиниці, на віддалі z від правої опори, й приклавши теорему про три моменти, одержимо:

$$4M_1=-\frac{1.(l-z)\,z\,(l+z)}{l^2}.$$

Зміняючи z від нуля до l, ми можемо по точках збудувати лінію впливу для M_1. Момент під тягарем визначимо з формули:

$$M=\frac{1.z\,(l-z)}{l}-\frac{z^2\,(l-z^2)}{4l^3}.$$

Найбільшу вартість M має, коли $r=0{,}44\ l$.

266. Де треба поставити тягара 5 m на двопрогінному трямі (рис. 267), щоб мати під тягарем найбільший момент, коли, крім рухомого тягара, є ще рівномірно розподілене обтяження $q = 1000$ *кг/м*? Обчисліть величину цього моменту й відповідні найбільші напруги, коли трям двотетового поперечча № 30; $W = 652$ *см*^{3}; $l = 5$ *м*.

Відповідь. Віддаль тягара від скрайньої опори треба взяти

$$z = 2{,}05\ м\,.\,M_{max} = 691\,.\,10^3\ кгсм.$$

267. Трям однакового поперечча лежить на п'ятьох опорах. Довжину прогонів, положення й величину обтяжень показано на рис. 268. Знайдіть величини опорних моментів і опорних реакцій.

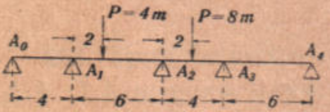


Рис. 268

Відповідь. $M_1 = -1{,}54$ *тм*; $M_2 = -3{,}74$ *тм*; $M_3 = -1{,}65$ *тм*.

Опорні реакції $A_0 = -0{,}386$ m; $A_1 = 2{,}69$ m; $A_2 = 6{,}22$ m; $A_3 = 3{,}75$ m; $A_4 = -0{,}275$ m. Епюру згинних моментів і лінію суми сил показано на рис. 269.

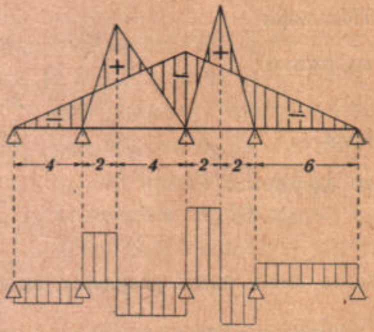


Рис. 269

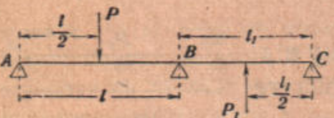


Рис. 270

268. Двопрогінного нерозрізного тряма ABC згинає дві сили P й P_1 (рис. 270). Збудуйте епюру згинних моментів і знайдіть опорні реакції. Як зміниться епюра згинних моментів у тому випадку, коли $P = P_1$ і $l = l_1$?

269. Збудуйте лінію впливу для опорної реакції A нерозрізного тряму $ABCD$, підпертого в точках A, B й C (рис. 271).

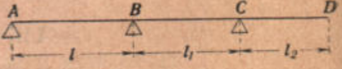


Рис. 271

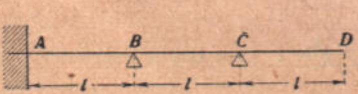


Рис. 272

270. Консольного нерозрізного тряма $ABCD$ з закріпленим кінцем A згинає рівномірно розподілене обтяження q *т/м* (рис. 272).

Збудуйте епюру згинних моментів і визначте опорні реакції.

271. Збудуйте епюру згинних моментів, що їх викликає сила P, прикладена до консолі нерозрізного тряму $ABCD$ (рис. 273).

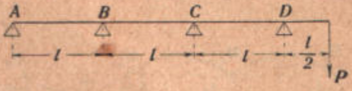


Рис. 273

272. Трям однакового попереччя лежить на п'ятьох опорах (рис. 274, розміри в *м*); постійне обтяження, рівномірно розподілене на всій довжині, дорівнює 1,5 $m/м$; рухоме рівномірно розподілене обтяження має інтенсивність 3 $m/м$. Куди треба поставити рухоме обтяження, щоб одержати найбільшу вартість згинного моменту в A_1? Обчисліть відповідну вартість M_1.

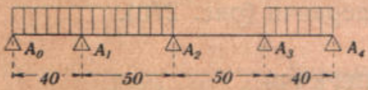


Рис. 274

Розв'язання. Розташування рухомого обтяження показано на рисунку.

273. Дано багатопрогінного тряма (рис. 275). На яких дільницях розташувати суцільне рівномірно розподілене обтяження,

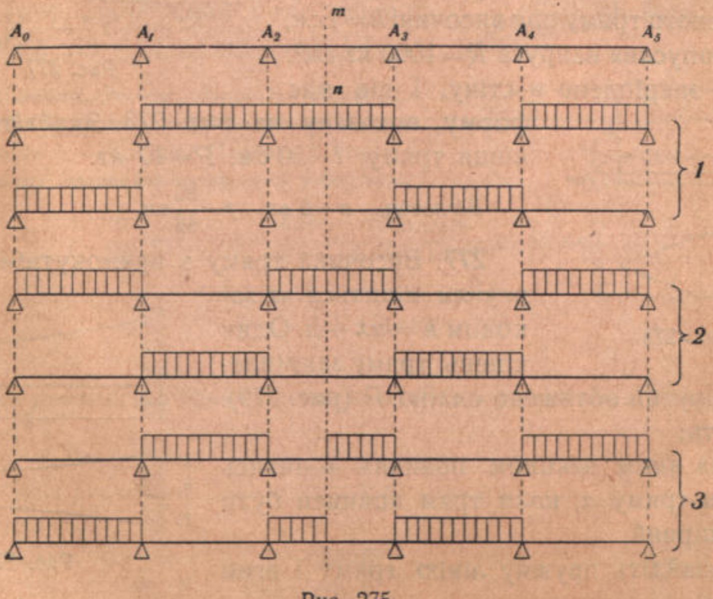


Рис. 275

щоб: 1) одержати *max* і *min* згинного моменту M_2 над опорою A_2, 2) щоб одержати *max* і *min* згинного моменту M по середині прогону $A_2 = A$, 3) щоб одержати *max* і *min* перерізної сили в поперечці *mn*? (За відповідь правлять наведені на рис. 275 епюри).

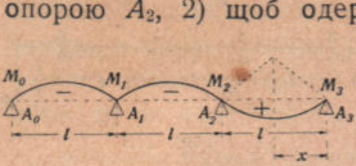


Рис. 276

274. Збудуйте інфлюентну лінію для опорного моменту M_1 в трипрогінному трямі однакового поперечча (рис. 276).

ТРЯМИ ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧЧЯ

275. За яким законом треба міняти височину y поперечча бруса AB, закріпленого одним кінцем (рис. 277), щоб від чину сили P вісь зігнулась за дугою кола?

Відповідь. $y^3 = \frac{h^3 x}{l}$.

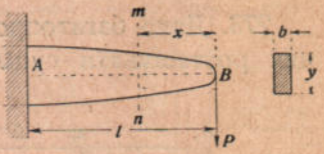


Рис. 277

276. Визначте потрібну ширину a залізного тряму при височині $h = 1$ *см*, коли допускна напруга $R = 1000$ *кг/см*^{2}. Тряма закріплено в стіну, і він має форму, показану на рис. 278. Знайдіть угин кінця тряму; $l = 50$ *см*, $P = 40$ *кг*.

Відповідь. $a = 6$ *см*, $f = \frac{85}{48}$ *см*.

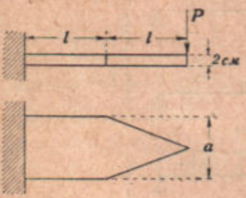


Рис. 278

277. Височина тряму з прямокутнім попереччям міниться за законом $h = mx + n$. Один кінець тряму закріплено, а другий обтяжено силою P (рис. 279). Знайдіть:

1) за яким законом повинна мінитись ширина тряму a, коли трям повинен бути рівноопірний;

2) знайдіть пружну лінію тряму і вгин на кінці;

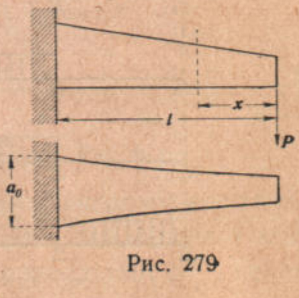


Рис. 279

3) обчисліть величину вгину й знайдіть величину найбільших напруг для випадку:

$$m=0{,}02;\quad n=1;\quad l=100\ см;$$

$$a_0=10\ см;\quad P=150\ кг.$$

Відповідь. Ширина тряму $a=\frac{6P}{R}\cdot\frac{x}{(mx+n)^2}$. Пружна лінія

$$y=\frac{2R}{Em}\left[\frac{(mx+n)\,[\ln(mx+n)-1]}{m}+l\ln(ml+n)\right].$$

Вгин $f=\frac{12Pl}{Em^2a_0(ml+n)^2}\cdot[ml+n\ln n-n\ln(ml+n)]$: $p_{max}=100\ кг/см^2$;

$$f=\frac{12.150.100}{2.10^6(0{,}02)^2.10.3^2}(2-\ln 3)=2{,}26\ см.$$

278. Якої ширини d треба взяти ресору, зложену з 10-ти аркушів завгрубшки кожний $h=12{,}5\ мм$, коли допускна напруга в цьому випадку $R=5000\ кг/см^2$, а чинна сила $P=5\ т$ (рис. 280)? Який буде вгин f ресори від чину завданої сили P?

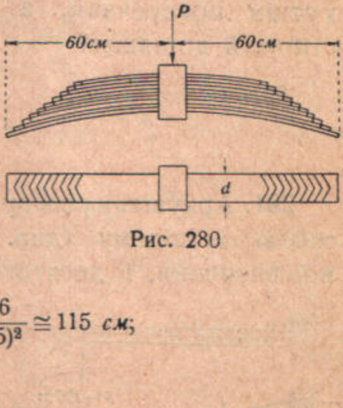


Рис. 280

Розв'язання. Ресора відповідає рівноопірному брусові з прямокутнім попереччям постійної височини $h=12{,}5\ мм$. Ширину b бруса в небезпечному поперечці визначаємо з формули:

$$\frac{M}{W}=R;\qquad b=\frac{6M}{Rh^2}=\frac{2500.60.6}{5.10^3.(1{,}25)^2}\cong 115\ см;$$

отже:

$$d=\frac{b}{10}=11{,}5\ см.$$

Згинається рівноопірний брус за дугою кола. Радіюс ϱ знайдемо з рівнання:

$$\frac{E\frac{h}{2}}{\varrho}=R;$$

вгин

$$f=\frac{l^2}{2\varrho}=\frac{60^2.R}{2E\cdot\frac{h}{2}}=7{,}2\ см.$$

279. Колесо, що важить 1500 *кг*, настромлено по середині вала (рис. 281). а) Який повинен бути діяметр d вала по середині, коли допускна напруга при згині $R = 600$ *кг/см²*?

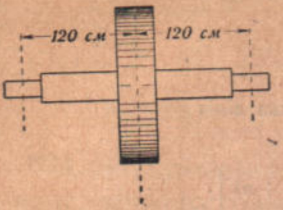


Рис. 281

b) Знайдіть угин вала, припустивши, що 1) вал має циліндричну форму, 2) вал має форму рівноопірного бруса.

Відповідь. a) $d = 11{,}4$ *см*. b) $f_1 = 0{,}250$ *см*. $f_2 = 0{,}447$ *см*. (Вал, що має форму рівноопірного бруса, трохи легший, але зате його вгин на 80% більший, ніж у випадку циліндричного вала).

280. Трямa, що вільно лежить на двох опорах, обтяжено суцільним обтяженням, що міниться за законом трикутника (рис. 282). За яким законом треба міняти височину в тряму, коли він повинен бути рівноопірний з прямокутнім попереччям, а ширина його постійна й дорівнює?

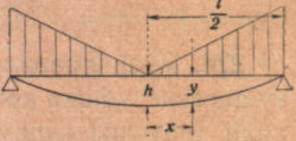


Рис. 282

Відповідь.

$$y_2 = h^2 - \frac{8h^2}{l^2} \cdot \frac{x^3}{l}.$$

281. Аркушеву ресору зложено з дев'ятьох аркушів, що являють собою в цілому (див. зад. 278) рівноопірний брус постійної височини, і десятого призматичного аркуша. Ширина аркушів $b_2 = 6$ *см*, грубина кожного з перших дев'ятьох аркушів $h_1 = 0{,}83$ *см*, грубина десятого аркуша $h = 1$ *см*. Прогін $2l = 69$ *см* (рис. 283). Знайдіть угин ресори від тягара $2P = 360$ *кг*. (Розміри стосуються до ресори, встановленої для спроб в мех. ляб. Київ. політ. інст.).

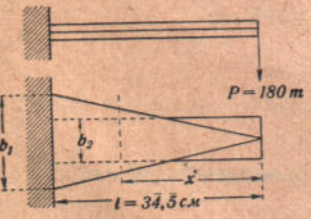


Рис. 283

Розв'язання. Коли літерою M_2 позначити згинний момент у якомунебудь поперечці спіднього призматичного аркуша, а літерою M_1 — момент, що належить до сукупности решти дев'ятьох аркушів, то матимемо: $M_1 + M_2 = M = Px$. Припустивши, що кривина однакова в точках дотикання аркушів,

одержимо:

$$\frac{M_1}{EJ^2}=\frac{M_2}{EJ_2} \quad \text{або} \quad \frac{M_1 l}{b_1 x h_1^3}=\frac{M_2}{b_2 h_2^3}, \quad \frac{M_2 b_1 h_1^3}{b_2 h_2^3 l}\cdot x = Px - M_2.$$

$$M_2=\frac{Px}{\frac{b_1 h_1^3}{b_2 h_2^3}\cdot\frac{x}{l}+1}=\frac{Px}{1+\alpha x}, \quad EJ_2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=M_2=\frac{Px}{1+\alpha x},$$

$$\frac{EJ_2}{P}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1+\alpha x}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\ln(1+\alpha x)+C_1;$$

коли $x=l$, то $y'=0$; отже, $C_1=-\frac{1+\alpha l}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}\cdot\ln(1+\alpha l)$,

$$\frac{EJ_2}{P}y=\frac{(1+\alpha x)^2}{2\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}(1+\alpha x)\left[\ln(1+\alpha x)-1\right]+C_1 x+C_2;$$

коли $x=0$, то й $y=0$; отже, $C_2=-\frac{1}{2\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^2}(\ln 1+1)$,

$$y_{x=l}=f=\left[\frac{(1+\alpha l)^2}{2\alpha^3}-\frac{1+\alpha l}{\alpha^2}\left[\ln(1+\alpha l)-1\right]-\frac{(1+\alpha l)}{\alpha^2}l+\frac{l}{\alpha^2}\ln(1+\alpha l)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}\right]\frac{P}{EJ_2}=\frac{P}{2\alpha^3 EJ_2}\left[2\alpha l-\alpha^2 l^2-2\ln(1+\alpha l)\right],$$

$$f=\frac{Pl^3 J_2^2}{EJ_1^3}\left[\frac{J_1}{J_2}\left(1-\frac{J_1}{2J_2}\right)-\ln\left(1+\frac{J_1}{J_2}\right)\right]; \quad \alpha l=\frac{b_1 h_1^3}{b_2 h_2^3}=\frac{J_1}{J_2};$$

$$J_1=\frac{54.(0{,}83)^3}{12}=2{,}56\ см^4; \quad J_2=\frac{b.1}{12}=0{,}5\ см^4; \quad \frac{J_1}{J_2}=5{,}12;$$

$$f=\frac{180.(34{,}5)^3.0{,}5^2}{2{,}2.10^6.(2{,}56)^3}\left[5{,}12(l-2{,}56)-\ln(5{,}12+1)\right]=0{,}491\ см.$$

282. Зосереджене обтяження P за допомогою бруса A (рис. 284) рівномірно розподіляється вздовж бруса B; знайдіть: 1) той закон, що за ним повинна мінитись височина y бруса A, коли цей брус має рівноопірну форму й його прямокутне поперечча має постійну ширину b;

2) з якої умови визначиться закон зміни височини поперечча бруса B.

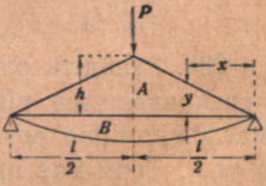


Рис. 284

Відповідь. 1) $y=\frac{2hx}{l}$; 2) височину бруса B треба зміняти так, щоб угини брусів A й B в кожному поперечці були однакові.

283. Вирахуйте вгин залізної смуги завгрубшки 1 *см* (рис. 285) від чину сили $P=10$ *кг*, прикладеної по середині, і знайдіть найбільшу напругу.

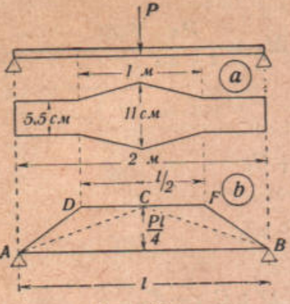


Рис. 285

Розв'язання. Позначивши літерою J_0 момент інерції по середині прогону, одержимо:

$$f=\frac{11}{8}\,\frac{Pl^3}{48EJ_0}+\frac{5}{4}\ см.$$

Цей результат легко можна було б одержати графоаналітичним способом. Взявши до уваги зміну поперечча тряму, доведеться моментну площу ($\triangle ABC$ на рис. 285*b*) перетворити на трапез *ADFB*. Момент від цього фіктивного обтяження, поділений на штивність EJ_0, дасть нам шуканий вгин.

284. Рівноопірного тряма покладено на дві опори. На цьому трямі покладено три опори, на які, своєю чергою, покладено призматичного тряма, що тримає рівномірно розподілене обтяження *P* (рис. 286). Знайдіть небезпечне місце у верхньому трямі й визначте вгин системи.

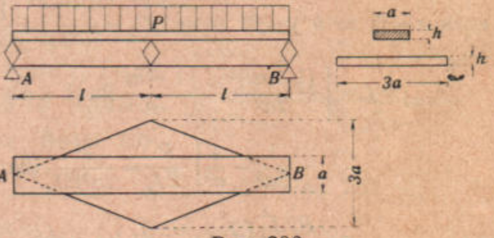


Рис. 286

285. Залізний трям зазначених на рис. 287 форми й розмірів ($l=1$ *м*, $a_0=12$ *см*, $h=1$ *см*) лежить на трьох опорах. Знайдіть реакцію середньої опори від чину власної ваги тряму. Питома вага тряму 7,8.

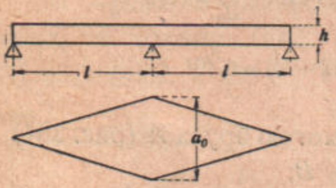


Рис. 287.

286. Знайдіть опорні реакції для нерозрізного тряму *ABC*, що перекриває два рівні прогони й тримає рівномірно розподілене обтяження *q кг/м*. Трям має прямокутне поперечча постійної височини *h*. Ширина міниться за лінійним законом: на скрайніх опорах дорівнює нулеві, а по середині — *b* (рис. 288).

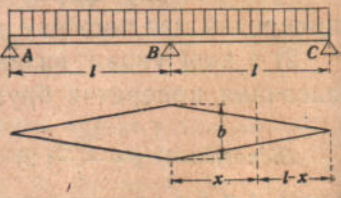


Рис. 288

287. Тряма з опертими кінцями згинають сили P (рис. 289). Знайдіть графоаналітичним способом угин тряму, коли попереччя є прямокутник постійної ширини. Височина попереччя протягом середньої третини тряму дорівнює $\frac{5}{4}$ від височини попереччя на кінцях тряму. Як зміниться результат, коли на трям чинитиме рівномірно розподілене обтяження $Q=2P$?

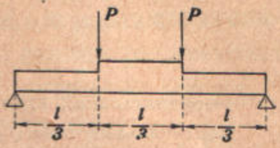


Рис. 289

288. Трям змінного попереччя (рис. 290) з закріпленими кінцями тримає по середині прогону тягара P. Знайдіть величину опорних моментів і визначте вгин тряму.

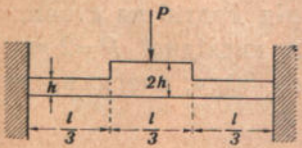


Рис. 290

Рис. 291

289. Знайдіть теоретичну рівноопірну форму для тряму ABC круглого попереччя, що тримає рівномірно розподілене обтяження (рис. 291).

Розв'язання. На дільниці $AB: M=\frac{q}{2l}(l^2-a^2)\,x-\frac{qx^2}{2}$; для зміни діяметра попереччя по довжині одержуємо формулу: $d^3=\frac{16q}{\pi lR}\,x\,(l^2-a^2-lx)$.

На дільниці BC закон зміни d буде такий самий, як і для тряму з одним закріпленим кінцем.

СКЛАДНИЙ ОПІР, СКІСНИЙ ЗГИН

290. Зетуватий трям зазначених на рис. 292 *мм* розмірів закріплено в стіну так, що полиці тряму горизонтальні. Знайдіть угин кінця тряму O в горизонтальній і вертикальній площах від чину сили $P=200$ *кг*; $l=2$ *м*; ξ й η — головні осі.

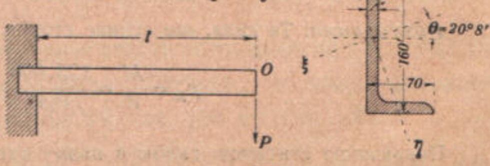


Рис. 292

$$E=2.10^6\ кг/см^2,$$
$$J_\xi=1170\ см^4,\ J_\eta=79\ см^4.$$

Розв'язання. Розкладаємо силу P на напрями ξ й η; тоді вгини в цих напрямах будуть:

$$f_\eta = \frac{P \cos \theta l^3}{3EJ_\xi}; \quad f_\xi = \frac{P \sin \theta l^3}{3EJ_\eta}.$$

Горизонтальний вгин $f_1 = f_\xi \cos \theta - f_\eta \sin \theta = 1{,}16$ *см*;
вертикальний вгин $f_2 = f_\eta \cos \theta + f_\xi \sin \theta = 0{,}591$ *см*.

291. Стовп, що підтримує електричні дроти, складається чотирьох рівнобоких кутівок $50 \times 50 \times 5$ *мм*, зв'язаних одна з одною решіткою. Знайдіть величину найбільших напруг у нижньому попереччі стовпа (рис. 293), коли зусилля, що передаються від дротів на стовп, зводяться до одної вертикальної вислідної $P = 2$ *т*, прикладеної з екцентриситетом $e = 50$ *см*; власна вага стовпа $Q = 100$ *кг*.

Рис. 293

Розв'язання. Max напруги визначмо з формули:

$$(p_n)_{max} = \frac{P+Q}{F} + \frac{Pe}{W}.$$

Підстановивши завдані вартості обтяження й враховані W ($W = 296$ *см*^{3}), знайдемо:

$$(p_n)_{max} = 447 \text{ кг/см}^2.$$

292. Вирахуйте величину найбільших нормальних напруг в дерев'яних округлих стовпах діяметра $d = 25$ *см* і заввишки 6 *м*, що підтримують за допомогою дроту ABC (вагою дроту нехтуємо) тягар $P = 25$ *кг*; $\operatorname{tg} \alpha = {}^1/_{10}$ (рис. 294).

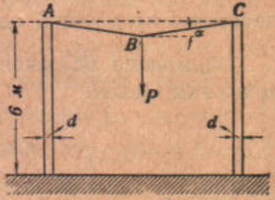


Рис. 294

Розв'язання. Та сила, що згинає стовпа, дорівнює $\frac{25}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 125$ *кг*.

$$p_n = \frac{M}{W} = \frac{125.600}{1534} = 49 \text{ кг/см}^2.$$

Подовжною стискною силою в цьому випадку можна нехтувати.

293. На рівнобоку кутівку AB ($50 \times 50 \times 5$ *мм*) передається розтяжне зусилля $P = 1$ *т* через смуги mn і pq, принютовані до гори зонтальної полиці кутівки (рис. 295). Знайдіть величину найбільших напруг у кутівці *AB*. (При обчисленні візміть до уваги, що розтяжні зусилля прикладено з ексцентриситетом, і через це вони викликають не тільки розтяг, а й згин).

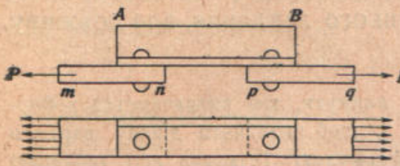


Рис. 295

294. Вирахуйте величину найбільших напруг у колоні *AB* двотетового попереччя (№ 18), що підтримує за допомогою особливого кронштейна тягар $P = 5$ *т* (рис. 296). Перевірте колону на подовжний згин, припустивши, що кінці вільно повертаються, й що тягар *P* прикладено в центрі тяжіння попереччя *mn*.

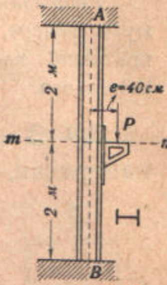


Рис. 296

295. За допомогою поставленої на трямі *AB* катеринки підіймають тягар $P = 1$ *т* (рис. 297). Знайдіть величину найбільших напруг від згину й подовжного стиску (кутом нахилу *CB*, тертям у бльоці *B* й діяметром бльока нехтуємо). Поперечча тряму *AB* прямокутнє 25×25 *см*. Опора *A* рухома.

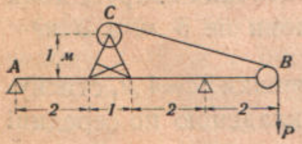


Рис. 297

296. Яку стискну силу можна допустити з п'ятикратним запасом міцности для стояка завдовжки 2 *м*, зложеного з двох рівнобоких кутівок 60×60×10 *мм*, розташованих згідно з рис. 298? Віддаль між кутівками $\delta = 10$ *мм*. (Кінця стокна оперто).

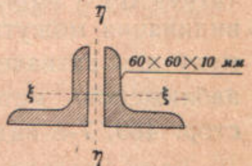


Рис. 298

Відповідь. Найменший момент інерції $J_\xi = 34,9.2 = 69,8$ *см*^{4}. Ойлерове обтяження $P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} 34,4$ *т*.

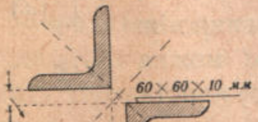


Рис. 299

297. Як зміниться величина допускної стискної сили, коли кутівки, з яких зложено стояка, покласти так, як на рис. 299?

Відповідь. $P_{кр}$ побільшає у відношенні 55,1 : 34,9.

Якщо одержані критичні напруги перевищують межу пружности матеріялу, то замість Ойлерової формули треба скористуватись таблицею, складеною за спробами Тетмаєра.

298. Знайдіть критичне обтяження для стрижня, що має попереччя таке саме, як і стояк попереднього завдання, але довжину меншу в два рази.

Розв'язання. У цьому випадку критичні напруги, що визначаються з формули Ойлера, перевищують межу пружности, і, щоб визначити дійсну вартість критичної напруги, треба скористуватись формулою Тетмаєра або таблицею Ясінського.

299. З яким запасом міцности спроєктовано колони, що мають попереччя, змальоване на рис. 300, коли довжина колони дорівнює 5 *м*. Швелери взято заввишки 24 *см* й поставлено так, що $J_y > J_x$. Зробіть розрахунок, припустивши, що 1) кінці вільно повертаються і 2) кінці закріплено.

Як зміниться вплив закріплення кінців на величину критичних напруг, коли взяти довжину колони не 5 *м*, а 3 *м*?

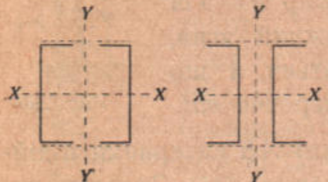


Рис. 300

300. Доберіть попереччя для стрижня заввишки $2a = 4$ *м*, стиснутого силою $P = 10$ *т* і силою $Q = 10$ *т*, прикладеною по середині довжини стрижня (рис. 301). Попереччя стрижня візьміть тетове (рис. 301*b*) й припустіть, що кінці стрижня при випинання можуть вільно повертатись. Складаючи формулу для визначення критичних напруг, скористуйтесь наближеною методою. Див. Курс опору матеріялів, стор. 489, 7-е вид.

301. Круглого циліндричного залізного стрижня з вільними кінцями стискають дві рівні й протилежні сили P, прикладені до кінців. При якому співвідношенні між довжиною стрижня l і діяметром попереччя d можна прикласти Ойлерову формулу, коли межу пружности для заліза взяти 2000 *кг/см*² і $E = 2 . 10^6$ *кг/см*²?

Відповідь

$$\frac{}{d} \geqq 25.$$

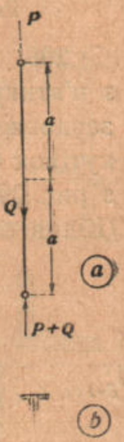


Рис. 301

302. Циліндричного залізного круглого стрижня з вільними кінцями завдовжки 2 *м* стискають сили $P = 10$ *т*, прикладені до кінців.

Який повинен бути діяметр d поперечча, коли треба мати п'ятикратний запас міцности?

Як зміниться діяметр, коли довжину стрижня взяти 1 *м*?

Відповідь. 1) $d = 6{,}72$ *см*, 2) $d = 5{,}3$ *см*.

(Для довжини 2 *м* діяметр добираємо за Ойлеровою формулою; для довжини 1 *м* стискні напруги взято за таблицями Ясінського для литого заліза).

303. Обчисліть діяметр ґвинта лівара (рис. 302) для підіймання паровозів. Довжина ґвинта 1,7 *м*, вага паровозу 32 *т* (без води, вугілля й скатів). Ліварів 4, запас стійкости 5. Вважайте, що кінці вільно повертаються.

Відповідь. Треба взяти діяметр близько 6 *см*.

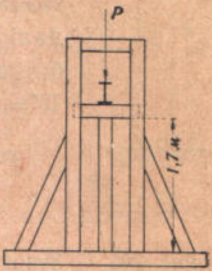


Рис. 302

304. Один кінець двотетового залізного тряма закріплено, а другий оперто на круглу залізну колону $d=8$ *см* і обтяжено посередині силою $P=16$ *т* (рис. 303). Доберіть поперечча тряму з тим самим п'ятикратним запасом міцности, з яким робитиме колона. Тимчасовий опір заліза дорівнює 4000 *кг/см²*. Вагою тряму й вкороченням колони знехтувати.

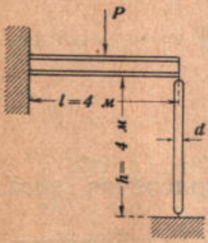


Рис. 303

Відповідь. Момент опору тряму $W = 1500$ *см³*. Поперечча двотетового № 40.

Як зміниться напруга в колоні, коли її нагріти до 20°С?

305. Циліндричного стрижня AB в точці B прикріплено до основи суставом, а в A оперто на гладку (без тертя) стіну; стрижень перебуває лише під чином власної ваги q *кг/см* (рис. 304). Визначте положення того поперечча mn, де стискні напруги max. (Площа поперечча $=F$).

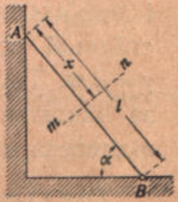


Рис. 304

Розв'язання. У поперечці mn max напруги від згину буде:

$$\frac{1}{W}\left(q\,\frac{l}{2}\cos\alpha . x - q\,\frac{x^2}{2}\cos\alpha\right);$$

напруги від стиску:

$$\frac{1}{F}\left(\frac{ql}{2}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+q\sin\alpha\,.\,x\right).$$

Додавши ці напруги й прирівнявши до нуля похідну від цієї суми за x, знайдемо:

$$x=\frac{l}{2}+\frac{W}{F}\operatorname{tg}\alpha=\frac{l}{2}+\frac{d}{8}\operatorname{tg}\alpha.$$

Рис. 305

306. Вертикальний стовп AB трубчастого попереччя зазнає чину горизонтальної сили P, прикладеної на віддалі 1 *м* від осі стовпа (рис. 305). Знайдіть величину найбільших головних напруг, коли $P=100$ *кг*, $J=1380$ *см*^{4}, $W=145$ *см*^{3}.

Розв'язання. Крутний момент

$$M_{кр}=100.100\ кг/см.$$

Згинний момент для основи буде:

$$M_{зг}=100.800\ кг/см,\quad p_n=\frac{M_{зг}}{W}=\frac{100.800}{145}=551\ кг/см^2.$$

$$p_t=\frac{M_{кр}}{2W}=\frac{100.100}{290}=34\ кг/см^2;$$

$$(p_n)_{max}=\frac{p_n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_n^2+4p_t^2}\cong 553\ кг/см^2.$$

307. Кам'яний підпорний мур прямокутнього попереччя $abcd$ підтримує піскуватий висип (рис. 306).

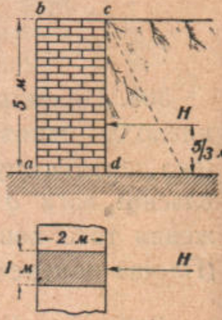


Рис. 306

Знайдіть величину найбільших стискних і найбільших розтяжних напруг по площі спідньої основи муру, коли вага 1 *м*^{3} муру $\gamma=2\,т$. Тиск висипу на мур розподіляється за законом трикутника, і величина тиску, віднесена до 1 *м* довжини муру, $H=5\,т$.

Розв'язання.

$$(p_n)_{\frac{max}{min}}=-\frac{2.10^3.5}{10^4}\pm\frac{5.10^3.500}{3.100.\frac{200^2}{6}}=(-1\pm 1{,}25)\ кг/см^2;$$

щоб не було розтягів, треба взяти мур завширшки 2,24 *м*.

308. На вал, що урухомлюється мотором C, настромлено посередині колесо, що важить 1 *т* й дає діяметр 2 *м* (рис. 307). Натяги перекинутого на колесо паса відповідно дорівнюють $p_1 = 750$ *кг*, $p_2 = 250$ *кг*. Визначте діяметр вала так:

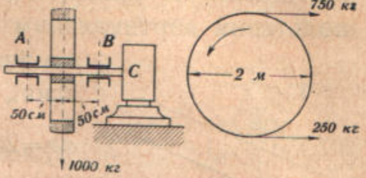


Рис. 307

1) щоб обчислена за формулою S.-Venant-а напруга не перевищувала 300 $кг/см^2$,

2) щоб різниця між найбільшою й найменшою напругою не перевищувала 300 $кг/см^2$.

Розв'язання. За S.-Venant-ом.

$$\frac{1}{W}\left(\frac{3}{8}M_{зг}+\frac{5}{8}\sqrt{M_{зг}^2+M_{кр}^2}\right)=300\,кг/см^2.$$

За різницею напруг:

$$\frac{1}{W}\left(\sqrt{M_{зг}^2+M_{кр}^2}\right)=300\,кг/см^2.$$

Підстановивши числові вартості, знайдемо:

1) $d = 12{,}1$ *см*; 2) $d = 12{,}8$ *см*.

309. Один кінець двотетового тряму завдовжки l закріплено в стіну, а до другого кінця прикладено силу P, що чинить у площі поперечча й нахилена під кутом α до вертикальної стінки тряму (рис. 308). Яку криву описуватиме точка O прикладання сили P, коли зміняти α від 0° до 360°?

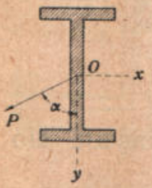


Рис. 308

Розв'язання. При довільному нахилі сили P вгинии будуть визначатись такими формулами:

$$f_x=\frac{P\sin\alpha . l^3}{3EJ_y};\quad f_y=\frac{P\cos\alpha . l^3}{3EJ_x};$$

отже, точка C нарисує еліпсу з полувісками:

$$\frac{Pl^3}{3EJ_y}\quad \text{і}\quad \frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

310. Дерев'яного тряма *abcd* з прямокутнім попереччям кінцями покладено на дві поперечки *mn* і обтяжено рівномірно розподіленим вертикальним обтяженням q *кг/м* (рис. 309).

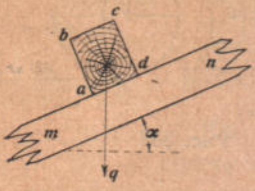


Рис. 309

Знайдіть величину найбільшої напруги при згині, коли довжина тряму $l = 3$ *м*, $q = 200$ *кгм*, $ab = 20$ *см*, $bc = 15$ *см*, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$.

Відповідь. Найбільші напруги будуть у точках *a* й *c*

$$(p_n)_{max} = 30{,}9 \text{ кг/см}^2.$$

311. Рівнобока кутівка завдовжки $l = 5$ *м* вільно лежить на двох опорах і згинається від чину власної ваги (рис. 310). Знайдіть величину найбільшого вгину в горизонтальній і вертикальній площах, коли вага кутівки $q = 15$ *кг/м*; $J_\xi = 280$ *см*^{4}; $J_\eta = 73{,}3$ *см*^{4} і $E = 2 . 10^6$ *кг/см*^{2}.

Відповідь. Вертикальний вгин $f_1 = 0{,}538$ *см*; горизонтальний вгин $f_2 = 0{,}321$ *см*.

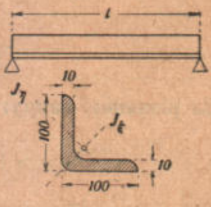


Рис. 310

312. Брус квадратового попереччя $a \times a$ з каєм у півдерева розтягається силою P, що чинить по осі бруса (рис. 311). Знайдіть величини $(p_n)^{max}_{min}$ найбільшої й найменшої напруги по попереччю *mn* (власну вагу знехтуйте).

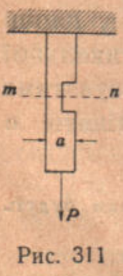


Рис. 311

Розв'язання.

$$(p_n)_{\substack{max\\min}} = \frac{2P}{a^2} \pm \frac{P.a.6}{4 \cdot \frac{a^3}{4}} = \frac{P}{a^2}(2 \pm 6).$$

Розв'яжіть те саме завдання, припустивши, що поперечча кругле.

313. Визначте напруги в частині *AB* катеринки до підіймання тягара (рис. 312). Тиск на ручку $P = 30$ *кг* прикладено на віддалі 30 *см* від точки *A*. Довжина $AB = 50$ *см*, поперечча *AB* є квадрат 2×2 *см*.

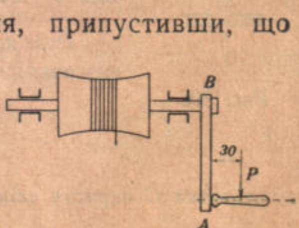


Рис. 312

314. Стрижень квадратового поперечча $a \times a$ *см* зігнуто під прямим кутом і один кінець закріплено. До другого кінця прикладено силу $P=1$ *кг* (рис. 313). Знайдіть вгин f, що його вона викличе, й найбільшу напругу в небезпечному місці; $l=1$ *м*, $a=1$ *см*.

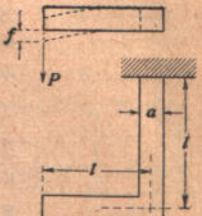


Рис. 313

315. Стального прута квадратового поперечча закріплено в точках A й B (рис. 314). До нього прикріплено посередині штабу CD, обтяжену силою P на кінці. Знайдіть переміщення точки D від чину цієї сили.

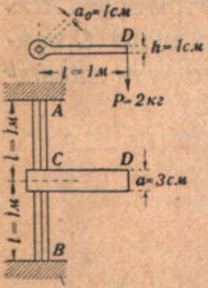


Рис. 314

Розв'язання. Штабу CD буде згинати сила P. AB згинає сила P, прикладена в C, і скручує пара сил Pl. Угин точки D складається з трьох частин:

1) із угину кінця штаби CD, вирахованого з припущенням, що цю штабу закріплено в C, 2) з переміщення точки D, відповідного до повороту поперечча C прута AB, й 3) з угину точки C, що залежить від гнуття прута AB.

316. Штабу квадратового поперечча ($l=20$ *см*, $a=1$ *см*) зігнуто на взір літери Z і закріплено одним кінцем у стіну, а до другого прикладено силу $P=2$ *кг* (рис. 315). Знайдіть угин f кінця штаби; знайдіть найбільшу напругу матеріялу.

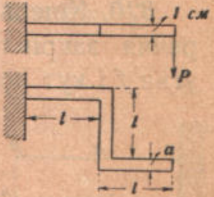


Рис. 315

317. Два зігнуті під прямим кутом бруси прямокутнього поперечча $a \times h$ закріплено в стіни один проти одного. Між відігнутими кінцями заложено кусок ґуми, що має поперечча F і височину h_0 (рис. 316). Знайдіть, на скільки вгнуться донизу труми від чину сил P, коли ми знаємо: модуль G й Пуассонове відношення σ для ґуми й E для матеріялу трямів.

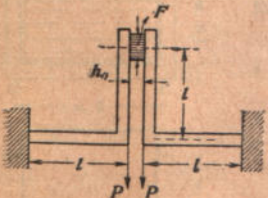


Рис. 316

318. Раму прямокутньої форми закріплено одним боком у стіну, а вільну частину обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням q

на одиницю довжини й зосереджено силою P, прикладеною в точці E по середині бока AB (рис. 317). Визначте напруги.

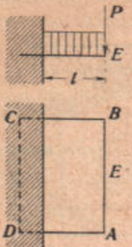


Рис. 317

Розв'язання. Бік AB буде зігнутий силою P, рівномірно розподіленим обтяженням і моментами на кінцях $M_{кр}$; AD й BC зігнуто й крім того скручено моментами $M_{кр}$. Кути повороту кінців A й B штаби AB треба прирівняти до кутів закручування дільниць AD й BC; звідси знайдемо $M_{кр}$.

319. Кінець A зігнутого під прямим кутом бруса ABC постійного попереччя закріплено, а до кінця C прикладено силу k (рис. 318). Яке повинно бути співвідношення між складовими k_x і k_y чинної сили, щоб згинні моменти в A й B були однакові? Знайдіть при цій умові кут повороту φ поперечча C.

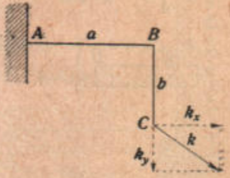


Рис. 318

Розв'язання. Згинний момент у поперечці B: $M_B = bk_x$; у поперечці $A : M_A = bk_x - ak_y$.

Щоб моменти мали однакову абсолютну вартість, треба покласти:

$$k_x = \frac{a}{2b} k_y .$$

Кут повороту поперечча C буде

$$\varphi = \frac{b^2k_x}{2EJ} + \frac{abk_x}{EJ} - \frac{a^2k_y}{2EJ} = \frac{b^2k_x}{2EJ} .$$

320. Кінець A колінчастого важеля $ABCD$ постійного поперечча закріплено в стіну (рис. 319). Знайдіть угин f і кут повороту φ поперечча D. (Розтягом дільниці BC нехтуємо).

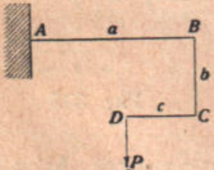


Рис. 319

Відповідь.

1) $$f = \frac{P}{EJ}\left(\frac{a^3}{3} - ca^2 + \frac{c^3}{3} + ac^2 + bc^2\right);$$

2) $$\varphi = \frac{P}{2EJ}(a^2 - 2ac - 2bc - c^2).$$

321. Акведук прямокутнього поперечча, заввишки 1,5 *м* й завширшки 2 *м*, склепано з хвилястого заліза, завгрубшки 1 *мм*, і штивних рубів тетового поперечча, що опираються кінцями на дві опори. Віддаль між рубами 1,2 *м* (рис. 320). Припустивши, що найбільша напруга

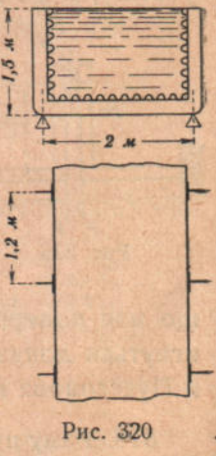


Рис. 320

$R=1000$ *кг/см²*, доберіть поперечні розміри рубів і хвилясте залізо, розрахувавши останнє, як трям на двох опорах з закріпленими кінцями.

Відповідь. 1) Тет $14\times14\times1{,}5$ *см* (Hütte 1921. р., I т., стор. 718); 2) хвилясте залізо з височиною хвилі 5 *см* і довжиною хвилі 10 *см*.

322. Рис. 321 являє собою поперечча залізного жолоба, яким проводиться воду. Глибину h і ширину b жолоба завдано. Яка повинна бути віддаль між тими опорами, що підтримують жолоба, коли треба, щоб в попереччях mn і $m'n'$ рубів, що підтримують стінки й дно жолоба, величини згинних моментів були однакові.

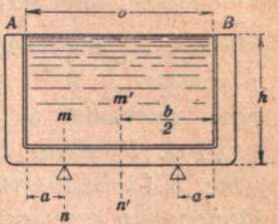


Рис. 321

Розв'язання. Згинний момент у попереччі mn буде пропорційний до величини

$$\frac{h^2}{2}\cdot\frac{h}{3}+\frac{ah.a}{2}. \qquad [1]$$

Момент у попереччі $m'n'$ пропорційний до

$$\frac{h^2}{2}\cdot\frac{h}{3}+\frac{b}{2}\cdot h\cdot\frac{b}{4}-\frac{bh}{2}\left(\frac{b}{2}-a\right). \qquad [2]$$

Змінивши знак біля виразу [2] й прирівнявши його до виразу [1], знайдемо:

$$a=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{2}-\frac{2}{3}h^2}.$$

Розв'язок має сенс, коли $\frac{2}{3}h^2<\frac{b^2}{2}$.

323. Як зміниться величина моменту в попереччі mn (див. зад. 322), коли кінці A й B рубів злучити нерозтяжним стяглем? (Штивність і поперечні розміри рубів вважати за завдані).

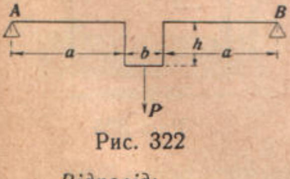


Рис. 322

324. Знайдіть угин колінчастого вала AB посередині від чину сили P (діяметр вважайте за сталий) (рис. 322).

Відповідь.

$$f=\frac{P\,(2a+b)^3}{48EJ}+\frac{Pa^2h}{2EJ}.$$

325. Вал сталого поперечча лежить на трьох опорах A, B й C (рис. 323). Визначте опорний момент у поперечці C від чину сили P, прикладеної до корби по середині дільниці b й спрямованої вертикально донизу.

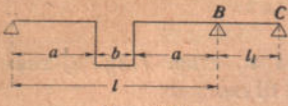


Рис. 323

(Визначаючи вгини колінчастого вала, зручно користуватись графоаналітичним способом. Див. Курс опору матеріялів, 7-е вид., стор. 268).

326. Стрижні AB й BC, що підтримують вертикальну силу P, в точках A й C злучено за допомогою суставів з опорами. Опора C рухома. У точці B сполучення штивне (рис. 324). Знайдіть осідання f точки B. Поперечча стрижнів однакові. (Переміщення від стиску стрижнів знехтуйте).

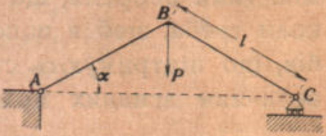


Рис. 324

Розв'язання. Вважаючи кожен стрижень за трям з одним закріпленим кінцем, знайдемо осідання:

$$f = \frac{Pl^3 \cos^2 \alpha}{6EJ}.$$

ШТИВНІ РАМИ

327. Нижні кінці двох стояків AB й CD однакового поперечча закріплено, а верхні кінці штивно злучено з абсолютно штивною розпинкою BD (рис. 325). 1) Знайдіть найбільший вгин f для стояка від чину горизонтальної сили H; 2) збудуйте епюру згинних моментів для стояка.

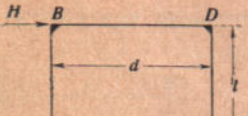


Рис. 325

Розв'язання. Кожний стояк буде в таких самих умовах, як і трям у зад. 213.

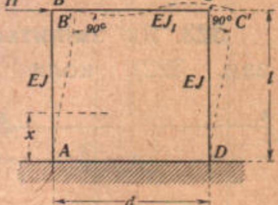


Рис. 326

328. Як зміняться результати попередньої задачі, коли розпинка BC пружна (рис. 326). Знайдіть віддаль x точок перегину стояків площі закріплення, коли штивність і довжини розпинок і стояків однакові.

Розв'язання. Позначмо літерою M моменти, що виникають у вузлах B й C від чину сили H. Кожний стояк зігнутий силою $\frac{H}{2}$ й парою M, прикладеними на кінці. Поворіт кінця буде:

$$\frac{\frac{H}{2}\cdot l^2}{2EJ}-\frac{Ml}{E}. \tag{1}$$

Розпинку BC згинають прикладені на кінцях пари сил M. Кут повороту її кінців дорівнює:

$$\frac{Md}{3EJ_1}-\frac{Md}{6EJ_4}=\frac{Md}{6EJ_1}. \tag{2}$$

Прирівнявши [1] до [2], знайдемо:

$$\frac{M}{E}\left(\frac{l}{}+\frac{d}{6J}\right)=\frac{Hl^2}{4EJ}.$$

Коли $d=l$, то $J_1=J$:

$$M=\frac{3}{2}\cdot\frac{Hl}{7};\quad x=\frac{4}{7}l.$$

329. Стояки AB й CD вгорі штивно злучено розпинкою BC, а нижні їхні кінці A й D зв'язано з основою за допомогою суставів (рис. 327). Знайдіть угин f стояків від чину горизонтальної сили H і збудуйте епюру згинних моментів для стояків і розпинки.

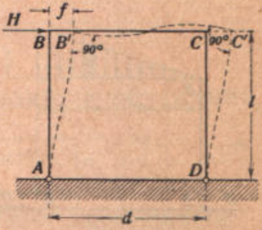


Рис. 327

Відповідь.

$$f=\frac{H}{2}\cdot\frac{l^3}{3EJ}+\frac{H}{2}\cdot\frac{l^2d}{6E_1J_1},$$

де EJ буде штивність стояка, а E_1J_1—штивність розпинки коли

$$d=l \quad \text{і} \quad EJ=E_1J_1,$$

то

$$f=\frac{H}{2}\cdot\frac{l^3}{2EJ},$$

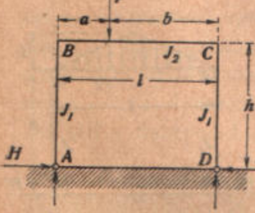


Рис. 328

330. Знайдіть всі елементи, що визначають згин рами $ABCD$ від чину зосередженої сили P (рис. 228).

Розв'язання. Відкиньмо ті закріплення, що не дають більшати віддалі між кінцями A й D стояків. Тоді від чину P сустави A й D розсунуться. Побільшання віддалі AD знайдемо, помноживши кути повороту попереччів B й C на довжину стояків h. (Стояки при вільному розсуванні A й D. очевидно, не згинаються). Одержимо:

$$\delta = \left[\frac{Pb\,(l^2-b^2)}{6lEJ_2} + \frac{Pab\,(l+a)}{6lEJ_2}\right] h.$$

Сили H повинні мати таку величину, щоб вони нищили розсування δ. Легко бачити, що зближення A й D, зумовлене силами H, буде:

$$\frac{2Hh^3}{2EJ_1} + \frac{Hh^2l}{EJ_2}.$$

Прирівнявши це до вищезазначеного виразу для δ, одержимо:

$$H = \frac{3Pab}{2hl\,(3+2k)},$$

де

$$k = \frac{hJ_2}{lJ_1}.$$

Знайшовши H, легко знайти згинний момент у довільному поперечці рами.

331. Дослідіть згин рами $ABCD$ від чину суцільного обтяження, розподіленого за законом трикутника (рис. 329).

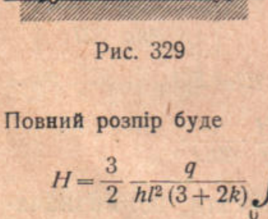


Рис. 329

Розв'язання. Щоб визначити розпір H, скористуймось розв'язанням попередньої задачі. Коли q є інтенсивність обтяження в точці C, то на віддалі a від точки B інтенсивність дорівнює $\frac{qa}{l}$. Елемент обтяження $\frac{qada}{l}$, що припадає на довжину da, причиниться до розпору, рівного

$$dH = \frac{3}{2}\,\frac{qa^2da\,(l-a)}{hl^2\,(3+2k)}.$$

Повний розпір буде

$$H = \frac{3}{2}\,\frac{q}{hl^2\,(3+2k)} \int_0 a^2\,(l-a)\,da = \frac{1}{8}\,\frac{ql^2}{h\,(3+2k)}.$$

Рис. 330

Подібно до цього можна знайти розпір при довільному розподілі суцільного обтяження по тряму BC. Наприклад, для того випадку, що його змальовано на рис 330, матимемо:

$$H = \frac{5ql^2}{32h\,(2k+3)}.$$

332. Дослідіть згин рами *ABCD* від чину сил, зазначених на рис. 331.

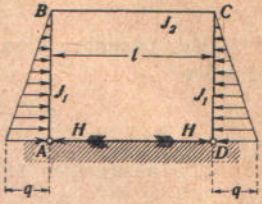


Рис. 331

Відповідь.

$$H=\frac{qh}{20}\,\frac{11k+20}{2k+3},$$

де

$$k=\frac{J_2}{J_1}\cdot\frac{h}{l};$$

$$M_B=M_C=-\frac{qh^2}{60}\,\frac{7k}{2k+3}.$$

333. Дослідіть згин рами *ABCD* у випадку закріплених кінців в *A* й *D* (рис. 332).

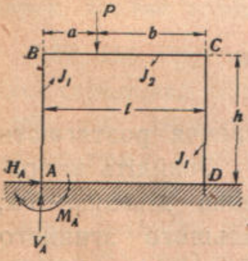


Рис. 332

Розв'язання. Обібравши за зайві невідомі H_A, V_A, M_A — горизонтальну й вертикальну складові опорної реакції й опорний момент у поперечці *A* й добравши їх так, щоб горизонтальне й вертикальне переміщення точки *A* й поворот поперечча *A* були нулі, одержимо:

$$H_A=\frac{3Pab}{2hl(2+k)};\quad V_A=\frac{Pb}{l}\cdot\frac{1+\gamma-2\gamma^2+6k}{1+6k};$$

$$M_A=\frac{Pab}{2l}\,\frac{5k-1+2\gamma(2+k)}{(2+k)\,(1+6k)};$$

тут

$$k=\frac{J_2}{J_1}\cdot\frac{h}{l};\quad \gamma=\frac{a}{l}.$$

334. Двоосадну штивну раму згинає рівномірне обтяження, розподілене по *AB*. Дослідіть згин стояків *BC* й *BD* (рис. 333).

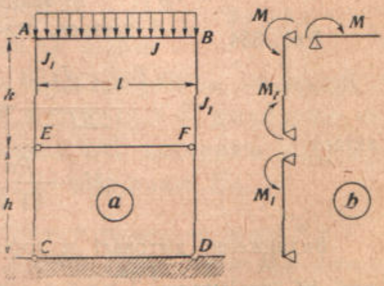


Рис. 333

Розв'язання. Кожний стояк буде в умовах двопрогінного тряму, що згинається парою сил, прикладеною до одного кінця. Коли літерою φ *позначити кут повороту штивного вузла A, з буквою M — згинний момент для AB в поперечці A, то матимемо:*

$$\varphi=\frac{ql^3}{24EJ}+\frac{Ml}{2EJ}.$$

Розглядаючи згин стояка *AEC* й позначивши літерою M_1 згинний момент у поперечці *E*, одержимо таке рівнання:

$$\frac{M_1h}{3EJ_1}=-\frac{Mh}{6EJ_1}-\frac{M_1h}{3EJ_1};$$

звідси

$$M_1 = -\frac{M}{4}.$$

Кут повороту верхнього кінця стояка AC в напрямі стрілки годинника дорівнює:

$$\varphi = -\frac{Mh}{3EJ_1} - \frac{M_1 h}{6EJ_1} = -\frac{Mh}{3EJ_1} + \frac{Mh}{24EJ_1} = -\frac{7}{24}\frac{Mh}{EJ_1}.$$

Для визначення M маємо таке рівняння:

$$\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Ml}{2EJ} = -\frac{7}{24}\frac{Mh}{EJ_1};$$

звідси

$$M = -\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{1}{1+\frac{7}{12}k},$$

де

$$k = \frac{Jh}{J_1 l}.$$

335. Квадратову раму $abcd$ сталого поперечча розтягають сили P, що чинять по діягоналі ac (рис. 334). Знайдіть видовження діягоналі й укорочення діягоналі bd; 2) визначте величину найбільшого згинного моменту в рамі.

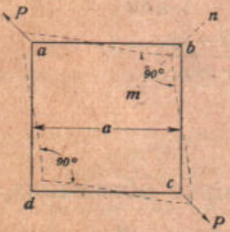


Рис. 334

Розв'язання. Згин стрижня ab такий самий, як тряму закріпленого одним кінцем a й обтяженого на кінці b силою $\frac{P}{2}$ й невідомим моментом M.

M знайдемо з тієї умови, що поперечча mn не повертається; отже:

$$\frac{\frac{P}{2}\cos 45^\circ . a^2}{2EJ} = \frac{Ma}{EJ};$$

звідси

$$M = \frac{Pa}{4\sqrt{2}}.$$

Видовження діягоналі ac дорівнює вкороченню діягоналі bd, дорівнює $\frac{Pa^3}{24EJ}$.

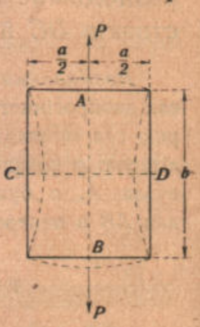


Рис. 335

336. Прямокутню раму сталого поперечча розтягають дві рівні й просто протилежні сили P (рис. 335). Через згин розмір AB більшає, а розмір CD меншає. Знайдіть приріст δ_1 довжини AB й поменшання δ_2 довжини CD.

Відповідь.

$$\delta_1 = \frac{Pa^3}{24EJ} - \frac{Pa^4}{32EJ(a+b)};$$

$$\delta_2 = \frac{Pa^2b^2}{32PJ(a+b)}.$$

В осібному випадку, коли $a = b$ (квадратова рама)

$$\delta_1 = \frac{5}{192} \cdot \frac{Pa^3}{EJ}; \quad \delta_2 = \frac{1}{64} \cdot \frac{Pa^3}{EJ}.$$

При розв'язанні треба взяти до уваги, що вертикальні бруси рами згинають моменти, що виникають у вершинах рами завдяки штивності вузлів. Величину цих моментів знайдемо з тієї умови, що кінці горизонтальних і вертикальних брусів, завдяки штивному злученню в вузлах, повертаються на однакові кути.

337. На круглий вал діяметра $d = 15$ *см* настромлено раму, якої середовий розмір при виготовленні зроблено на 1 *мм* менший, ніж діяметр вала d (рис. 336). Через це, коли настромляти раму, то її боки трохи викривляться й будуть тиснути з силою R на вал у точках дотикання. Знайдіть ці тиски, коли модуль пружности $E = 2 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, а попереччя рами є прямокутник з боками 0,5×1 *см*. (Скористуйтесь результатами попереднього завдання).

Відповідь. $R = 60,5$ *кг.*

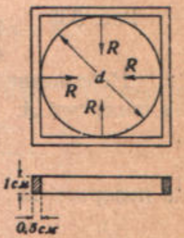


Рис. 336

338. Штивна рама $ABCD$, що має кінці A й D, закріплені в підмурок, тримає обтяження Q, рівномірно розподілене по боку BC (рис. 337). Знайдіть величину згинних моментів у кутах B й C, коли штивність рами на дільниці BC дорівнює EJ_1, а на дільницях AB й CD дорівнює EJ_2.

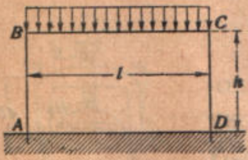


Рис. 337

Розв'язання. Знехтувавши зближення точок B й C при згині стрижня BC й позначивши літерою M момент у вузлах B й C, знайдемо, що згин стрижня AB й CD буде такий самий, як і тряму з одним закріпленим, а другим опертим кінцем при чині на нього згинної пари сил в опертому кінці. Прирівнявши поворот кінця B стрижня AB до повороту того самого поперечча для стрижня BC, знайдемо:

$$M\left(1 + \frac{h}{l} \cdot \frac{J_1}{2J_2}\right) = \frac{Ql}{12}.$$

Коли $h=l$ Jі $_1=J_1$, то

$$M=\frac{Ql}{18}.$$

Коли $J_2=\infty$, то

$$M=\frac{Ql}{18};$$

це той самий результат, що й для тряму з закріпленими кінцями.

339. Штаби AB й BC однакового поперечча штивно сполучено в вузлі B й закріплено в поперечах A й C (рис. 338). Знайдіть небезпечне поперечча, коли чинить зосереджене обтяження P, й величину згинного моменту в цьому поперечі.

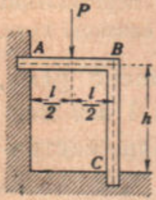


Рис. 338

Розв'язання. Позначивши літерою M_B згинний момент у B, вважаємо кожну штабу AB й BC за трям з одним закріпленим, а другим опертим кінцем.

Прирівнявши поворот кінця B горизонтальної штаби до повороту того самого кінця для вертикальної штаби BC, знайдемо величину M_B.

Небезпечне поперечча в A. Згинні моменти будуть:
в поперечі A:

$$M_A=\frac{Pl}{16}\left(3-\frac{l}{l+h}\right),$$

в поперечі B:

$$M_B=\frac{Pl}{16}\cdot\frac{2l}{l+h}.$$

Коли h міниться від 0 до ∞, то M_A міниться від $\frac{Pl}{8}$ до $\frac{3Pl}{16}$, M_B від $\frac{Pl}{8}$ до 0.

Момент під тягарем P міниться від $\frac{Pl}{8}$ до $\frac{5Pl}{32}$.

340. За допомогою шруби A натискають на покришку B з силою 150 *кг*. Визначте величину найбільшого згинного моменту в клямрі $MPQN$ однакового поперечча, закріпленій суставами в точках M і N (рис. 339). (Спосіб розв'язання такий самий, як і в задачі 336).

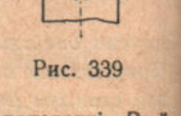


Рис. 339

Відповідь. Момент у поперечі $A:M_A=150.10^2$ *кгсм*, у поперечі P й $Q:M_P$ й $M_Q=75.10^2$ *кгсм*.

341. Як зміниться віддаль між точками A й B від чину сил P (рис. 340)? Впливом подовжних сил на вгин знехтуйте.

Розв'язання. Побільшання δ віддалі AB від чину сил P визначимо формулою:

$$\delta = 2\frac{Pch^2}{2EJ_1} + 2h\frac{Pca}{2EJ_2} = \frac{Pch}{EJ_1}\left(h + \frac{J_1}{J_2}\cdot a\right).$$

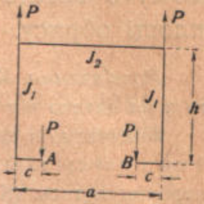


Рис. 340

342. Збудуйте епюру згинних моментів для стояків рами, змальованої на рис. 341, і визначте побільшання віддалі між точками A й B від чину сил P. (Розтягом розпинок знехтуйте).

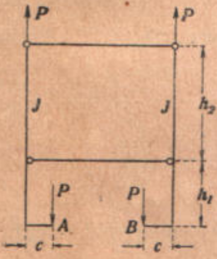


Рис. 341

Розв'язання. Кожний стояк уважаємо за консольний трям, що лежить на двох опорах і згинається парою Pc, прикладеною до кінця консолі. Розсування точок A й B визначиться формулою:

$$\delta = 2\frac{Pch_2h_1}{3EJ} + 2\frac{Pch_1^2}{2EJ} = \frac{Pch_1}{EJ}\left(\frac{2}{3}h_2 - h_1\right).$$

343. Збудуйте епюру згинних моментів штаби CD й визначте побільшання віддалі між точками A й B від чину сил P (рис. 342).

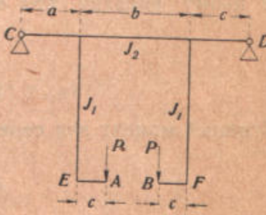


Рис. 342

Розв'язання. У місцях злучення вертикальних брусів із брусом CD будуть передаватись згинні сили P й згинні пари сил Pc.

344. Визначте вгин у точці O й збудуйте епюру згинних моментів для кожного стрижня рами, змальованої на рис. 343.

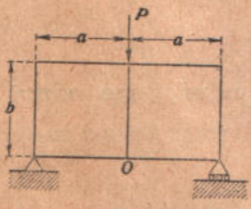


Рис. 343

Розв'язання. Середній стояк не згинається. Кожна половина завданої конструкції буде в тих самих умовах, як і рама в зад. 328.

ТРЯМИ, ЩО НА НИХ ВОДНОРАЗ ЧИНЯТЬ ПОДОВЖНІ Й ПОПЕРЕЧНІ СИЛИ

345. Вирахуйте напруги в аркушевому залізному помості завгрубшки $h=1$ *см*, що перекриває прогін 70 *см* і має рівномірно розподілене обтяження $q=0,3$ *кг/см²*. Краї аркуша при згині можуть вільно повертатись, але не можуть переміщуватися в площі обрису.

Розв'язання. Коли обрис платівки є довгий прямокутник завширшки 70 *см*, то згин далеко від поперечних боків відбувається по циліндричній поверхні.

Вилучаємо з аркуша в поперечному напрямі елементарну смужку завширшки 1 *см* і вважаємо її за трям із кінцями, що вільно повертаються, але не можуть переміщуватись. (Курс опору матер. 7-е вид., стор. 395):

$$\alpha^2=\frac{p}{E}\frac{l^2}{h^2}\frac{12\,(1-\sigma^2)}{\pi^2},$$

де p є розтяжна напруга в серединній поверхні платівки,

$$l=70\ \text{см},\quad h=1\ \text{см}.$$

Величину α^2 знайдемо з рівняння:

$$\alpha^2\,(1+\alpha^2)^2=\frac{3f_0^2}{h^2},$$

де

$$f_0=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4.12\,(1-\sigma^2)}{Eh^3}.$$

У цьому випадку при $\sigma=0,3$, $E=2.10^6$ *кг/см²*:

$$f_0=0,512\ \text{см},$$
$$\alpha^2\,(1+\alpha^2)^2=0,786;\quad \alpha^2=0,401.$$

Згинний момент для середини прогону дорівнює:

$$M=\frac{ql^2}{8}\left(1-\frac{1,028\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)=0,706\,\frac{ql^2}{8}.$$

Тепер уже легко можна вирахувати напруги.

346. Розрахуйте той самий поміст при тій умові, що кінці зовсім закріплено.

Розв'язання. У цьому випадку

$$f_0=\frac{1}{384}\,\frac{ql^4.12\,(1-\sigma^2)}{Eh^3}=0,102\ \text{см};$$

α^2 знайдемо з рівняння:

$$\alpha^2\left(1+\frac{\alpha^2}{4}\right)^2=\frac{3f_0^2}{h^2}=0,0312;\quad \alpha^2=0,0308.$$

Знавши α^2, знаходимо подовжну розтяжну силу S. Опорний момент визначиться приблизною формулою:

$$M_0 = \frac{ql^2}{12} - \frac{Sf}{2}.$$

347. На закріплений нижнім кінцем дерев'яний стовп квадратового поперечча 30×30 *см* чинить стискна сила $P = 40$ *м* і згинна сила Q. Знайдіть згинний момент в основі стовпа (рис. 344).

Рис. 344

Розв'язання. Вважаючи стовп за половину прогону тряму, опертого на кінцях і зігнутого силою $2Q$, знайдемо для шуканого моменту вираз:

$$M = Qh + \frac{Pf_0}{1-\alpha^2} = Qh\left(1 + \frac{\pi^2}{12}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

де

$$\alpha^2 - \frac{4Ph^2}{EJ\pi^2} = 0{,}60;$$

отже,

$$M = Qh.2{,}23.$$

348. Коритуватого тряма № 12 покладено плазом на дві опори з прогоном 6 *м*. Знайдіть величину найбільших напруг від власної ваги й від подовжної стискної сили $S = 300$ *кг*.

Розв'язання.

$$J_x = 44\ см^4,\quad F = 17{,}3\ см,\quad q = 13{,}6\ кг/м,\quad W_x = 11{,}7\ см^3.$$

При цих розмірах маємо:

$$\alpha^2 = \frac{S.l^2}{EJ\pi^2} = 0{,}122;$$

$$M = \frac{ql^2}{2}\left(1 + \frac{1{,}028\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) = \frac{0{,}136.36.10^4}{8}\cdot 1{,}14;$$

найбільші стискні напруги дорівнюють:

$$p = \frac{M}{W} + \frac{S}{F} = 596 + 17{,}3 = 613\ кг/см^2.$$

349. Стального стрижня круглого поперечча з діяметром 2 *см* й завдовжки 200 *см* згинає прикладена посередині поперечна сила $Q = 5$ *кг*. Як буде зростати вгин, коли до цього прилучити подовжну стискну силу S і даваги їй вартості: 10 *кг*, 50 *кг*, 100 *кг*?

Розв'язання.

$$f=\frac{f_0}{1-\alpha^2},$$

де

$$f_0=\frac{Ql^3}{48EJ},\quad \alpha^2=\frac{Sl^2}{EJ\pi^2}.$$

350. Знайдіть напруги в дерев'яному трямі прямокутнього попереччя 10×20 *см* і завдовжки $l=5$ *м* при згині його в площі найменшої активности ексцентрично прикладеними стискними силами $S=2\,m$. Ексцентриситет дорівнює $e=10$ *см.* (рис. 345).

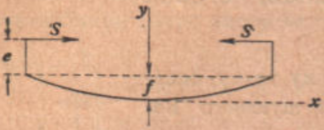


Рис. 345

Розв'язання. Диференційне рівнання зігнутої осі буде:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=S\,(e+f-y);$$

звідси

$$f=\frac{e\,(1-\cos\theta)}{\cos\theta};\quad \theta^2=\frac{Sl^2}{3EJ}.$$

Знаючи f, легко знаходимо згинний момент посередині й відповідну напругу.

351. Дві діягоналі AC й BD горизонтального мостов'язання роблять одна на розтяг, а друга на стиск. Крім того, на них чинить власна вага. Знайдіть ті зусилля, що виникають у злучній нюті E (рис. 346).

Розв'язання. Коли $\pm S$ будуть подовжні зусилля в діягоналях, які ми знаємо з попереднього розрахунку мостових зв'язнів, q буде інтенсивність обтяження власною вагою й X — сила взаємочину між діягоналями в точці перетину E, то зовнішні сили, прикладені до кожної діягоналі, матимуть вигляд рис. 346b. Силу X знайдемо з умови рівности вгинів обох діягональ у місці перетину. Рівнання буде таке:

$$\left(\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}-\frac{Xl^3}{48EJ}\right)\frac{1}{1-\alpha^2}=\left(\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}+\frac{Xl^3}{48EJ}\right)\frac{1}{1+\alpha^2},$$

де

$$\alpha^2=\frac{Sl}{EJ\pi^2}.$$

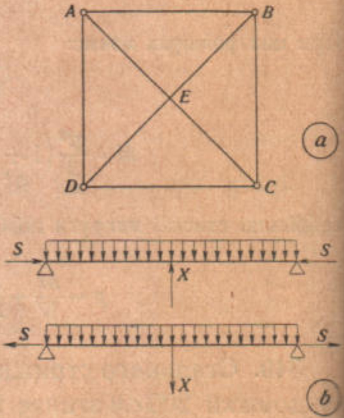


Рис. 346

ЗГИН ТРЯМІВ, ЩО ЛЕЖАТЬ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

352. Стальна подушка *ABCD* (рис. 347) розподіляє по кам'яним мурованні тиск від сил *P*, рівномірно розподілених по серединній лінії. Яке буде осідання подушки по цій лінії й по краях *AB* й *CD*, коли $a=b=50$ *см*, грубина $\delta=5$ *см*? Мурування осідає на 0,0025 *см* при тиску 1 *кг/см²*. Сила $P=25$ *т*.

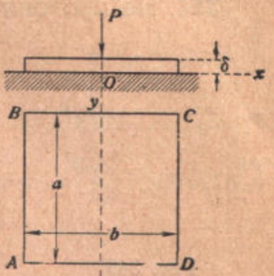


Рис. 347

Розв'язання. Вирізуємо смужку завширшки 1 *см* і вважаємо її за трям на пружній основі:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+$$
$$+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x.$$

Умови для визначення довільних сталих будуть: коли $x=0$, то $y'=0$, $y'''=\frac{P}{2EJ.a}$; коли $x=\frac{b}{2}$, то $y''=y'''=0$.

353. Знайдіть розподіл тиску на ґрунт від бетонного шару, що має на собі стіни *AB* й *CD* (рис. 348). Вага подовжинного метра стіни 20 *т*, грубина шару 1 *м*, ширина підмурку 14 *м*, модуль пружности бетону 2.10^5 *кг/см²*, ґрунт осідає на 0,025 *см* від тиску 1 *кг/см²*.

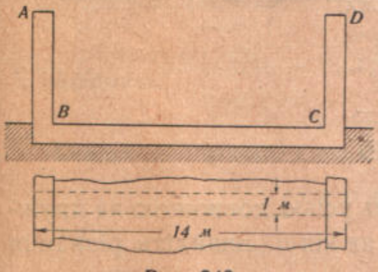


Рис. 348

Розв'язання. Вилучаємо з підмурку смужку завширшки 1 *м* і обчисляємо її, як трям, що лежить на пружній основі й має на кінцях два однакові тягарі *P* по 20 *т*.

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+$$
$$+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x.$$

Для визначення довільних сталих маємо такі умови: по середині прогону $y'=y'''=0$; на кінцях $y''=0$, $y'''=\pm\frac{P}{EJ}$;

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}};\quad k=\frac{100}{0{,}025}=4000\ кг/см^2;$$

$$C_1=-0{,}0013;\quad C_2=-0{,}0005;$$
$$C_3=-0{,}0013;\quad C_4=0{,}0005.$$

Тиск на 1 $см^2$ ґрунту біля країв підмурку дорівнює 2 *кг*, а посередині 0,12 *кг*. Прилучивши до цього тиск від власної ваги підмурку 0,25 *кг*, знайдемо:

$$p_{max}=2{,}25\ кг/см^2;\quad p_{min}=0{,}37\ кг/см^2.$$

354. На прогонича *AB* (рис. 349), перепущеного через дерев'яний трям, чинять прикладені на кінцях сили *P*, рівнобіжні з віссю тряму. Збудуйте епюру згинних моментів і лінію суми сил для прогонича, коли діяметр його $d=2\,см$, довжина $l=40\,см$, $P=0{,}2\,т$. Прогонич втискається в дерево на 1 *мм* від рівномірного тиску 20 *кг* на 1 *см* довжини прогонича. (Хід розрахунку такий самий, як і в попередній задачі).

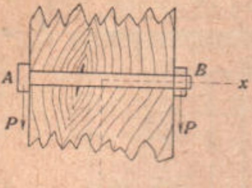


Рис. 349

Розв'язання. Втискання прогонича в дерево визначимо рівнянням:

$$y=\frac{1}{2}\,[(Ae^{\alpha x}+Be^{\alpha x})\cos\alpha x+2C\cos h\alpha x\,.\sin\alpha x],$$

де

$$A=\frac{2P\alpha}{k}\,\frac{(e^{-\lambda}+\cos\lambda)}{(\sin h\lambda+\sin\lambda)};$$

$$B=\frac{2P\alpha}{k}\,\frac{(e^{\lambda}+\cos\lambda)}{(\sin h\lambda+\sin\lambda)};$$

$$C=\frac{2P\alpha\sin\lambda}{k\,(\sin h\lambda+\sin\lambda)};$$

$$\lambda=l\alpha;\quad \alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

355. Дуже довгого тряма, що лежить усією довжиною на пружній основі, згинає сила *P*, прикладена на кінці. Знайдіть рівняння зігнутої осі (рис. 350).

Розв'язання. У загальній інтеґралі

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+$$
$$+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x$$

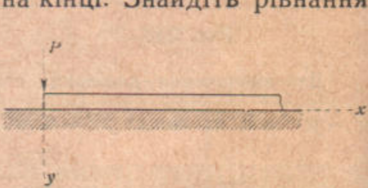


Рис. 350

треба в цьому випадку покласти

$$C_1=C_2=0;$$

тоді

$$y=e^{-\alpha x}(C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x).$$

Умови на обтяженому кінці тряму такі:

$$(y'')_{x=0}=0; \quad (v''')_{x=0}=\frac{P}{EJ}.$$

Отже,

$$C_4=0; \quad C_3=\frac{P}{2a^3EJ},$$

$$y=\frac{P}{2a^3EJ}e^{-ax}\cos ax.$$

Вгин обтяженого кінця дорівнює:

$$\frac{P}{2a^2EJ}.$$

Кут поверту цього кінця буде:

$$(y')_{x=0}=-\frac{P}{2a^2EJ}.$$

356. Дуже довгого тряма, що лежить на пружній основі, згинає момент M, прикладений на лівому кінці; знайдіть угин тряму (рис. 351).

Рис. 351

Розв'язання. У загальній інтеґралі (див. попередню задачу) треба покласти:

$$C_1=C_2=0.$$

Взявши до уваги умови на лівому кінці

$$(y''')_{x=0}=0; \quad (y'')_{x=0}=-\frac{M}{EJ},$$

одержимо:

$$C_3=-C_4; \quad C_3=-\frac{M}{2a^2EJ}.$$

Отже,

$$y=-\frac{M}{2a^2EJ}e^{-ax}(-\sin ax+\cos ax).$$

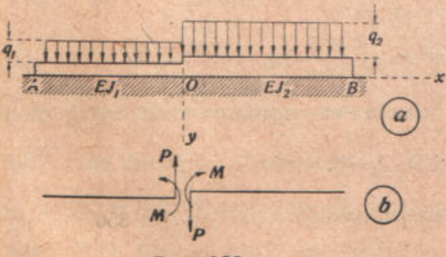


Рис. 352

Для вгину й кута поверту лівого кінця одержимо:

$$(y)_{x=0}=-\frac{M}{2a^2EJ}; \quad (y')_{x=0}=\frac{M}{aEJ}.$$

357. Дуже довгий трям, що лежить на пружній основі й має на протязі AO штивність EJ_1, а на протязі OB штивність EJ_2, тримає в лівій частині рівномірне обтяження інтенсивности q_1 і в правій частині обтяження інтенсивности q_2. Дослідіть згин тряму в попереччі O, що відповідає зміні штивности тряму.

Розв'язання. Уявім собі трям, розрізаний по попереччю O; тоді ліва частина підо впливом обтяження q_1 осяде на величину $\frac{q_1}{k}$, а права частина підо впливом обтяження q_2 осяде на величину $\frac{q_2}{k}$. Щоб зміщені поперечча зійшлись, треба прикласти сили P й пари M, зазначені на рис. 352*b*. Величину P й M визначимо з рівнання:

$$\frac{q_1}{k}=\frac{q_2}{k}+\frac{P}{2a_1^3EJ_1}+\frac{P}{2a_2^3EJ_2}+\frac{M}{2a_1^2EJ_1}-\frac{M}{2a_2^2EJ_2},$$

$$\frac{P}{2a_1^2EJ_1}+\frac{M}{a_1EJ_1}=\frac{P}{2a_2^2EJ_2}-\frac{M}{a_2EJ_2};$$

ці рівнання можна легко написати на основі розв'язань попередньої задачі.

358. Тряма AB завдовжки $2l$, що лежить на пружній основі, згинає суцільне обтяження, якого інтенсивність завдано формулою (рис. 353):

$$q=q_0+q_1\frac{(l^2-x^2)}{l^2}.$$

Знайдіть скривлення тряму.

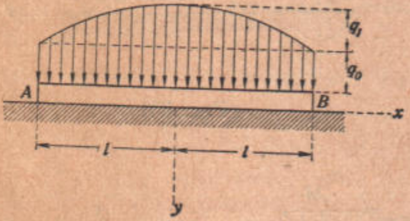


Рис. 353

Розв'язання. Диференційне рівнання для зігнутої осі тряму напишемо так:

$$EJy^{\mathrm{IV}}=-ky+q_0+q_1\frac{(l^2-x^2)}{l^2}.$$

Загальну інтеґралю цього рівнання, взявши до уваги умови симетрії, напишемо так:

$$y=C_1\cos h\,ax\cos ax+C_2\sin h\,ax\sin ax+\frac{1}{k}\left[q_0+q_1\frac{(l^2-x^2)}{l^2}\right. . \qquad [1]$$

Для визначення довільних сталих маємо на правому кінці тряму такі умови:

$$(y'')_{x=l}=(y''')_{x=l}=0.$$

Вставивши в них вартість [1] для y, одержимо:

$$-C_1\sin hal\sin al+C_2\cos hal\cos al=\frac{q_1}{ka^2l^2}.$$

$$(C_1+C_2)\cos hal\sin al+(C_1-C_2)\sin hal\cos al=0.$$

Звідси

$$C_2=\frac{q_1}{ka^2l^2}\frac{1}{\cos hal\cos al}+C_1\operatorname{tg}hal\operatorname{tg}al;$$

$$C_1=\frac{q_1}{ka^2l^2}\frac{\operatorname{tg}h\,al-\operatorname{tg}al}{(1+\operatorname{tg}hal\operatorname{tg}al)\cos hal\sin al+(1-\operatorname{tg}hal\operatorname{tg}al)\sin hal\cos al}.$$

359. Нарисуйте епюру згинного моменту й лінію суми сил для закріпленого кінця тряму (рис. 354). (Заправлений кінець уважайте за трям у пружному середовищі).

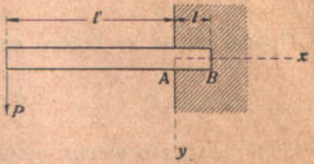


Рис. 354

Розв'язання. До дільниці AB прикладаємо загальне розв'язання для тряму на пружній основі. Щоб визначити довільні сталі, маємо рівняння:

коли $x=0$, то

$$y''=\frac{Pl'}{EJ},\quad y'''=\frac{P}{EJ};$$

коли $x=l$, то

$$y''=0,\quad y'''=0.$$

Цей розв'язок легко можна одержати на основі результатів задач 354 й 355.

360. Визначте зміну форми циліндричного резервуара, наллятого водою. Стінки резервуара вважайте за абсолютно заправлені нижнім краєм (рис. 355).

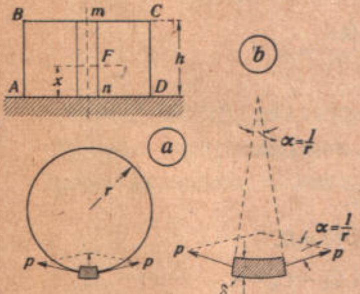


Рис. 355

Розв'язання. Вилучімо із стінки резервуара смужку mn завширшки 1 *см*. На цю смужку чинить гідростатичний тиск (обтяження за трикутником). Смужку mn вважатиме за трям із нижнім закріпленим і верхнім вільним кінцем. По довжині цього тряма будуть підтримувати сили, пропорційні до вгину тряму. Справді бо, нехай на віддалі x від заправленого краю циліндра вгин вилученої смужки дорівнює y, відповідний радіус циліндра видовжиться у відношенні $\frac{y}{r}$; у такому разі в розглядуваній точці ті напруги, що намагаються розірвати резервуар по твірній, будуть $E\frac{y}{r}$. Та радіяльна складова відповідних зусиль p (рис. 355b), що припадає на одиницю довжини, буде: $E\frac{y}{r}\frac{1}{r}\delta$. Таким чином, вилучену смужку mn можна вважати за трям, що лежить на пружній основі, закріплений однокінцево й обтяжений за законом трикутника.

Основне рівнання буде:

$$EJ\ \frac{d^4y}{dx^4} = -ky + \gamma(h-x),$$

де γ є вага одиниці об'єму течива, що наповнює посуд, і

$$k = \frac{\delta E}{r^2}.$$

Прикладім це до такого числового прикладу:

$$h = 2\ м; \quad \delta = 0{,}1\ см; \quad r = 25\ см.$$

Посуд наллято живим сріблом. Впровадивши позначення:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\delta}{4r^2J}} = 0{,}832,$$

загальну інтеґралю одержаного вище рівнання напишемо так:

$$y = C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x + C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x + C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x + C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x + \frac{\gamma(h-x)}{EJ.4\alpha^4}.$$

Для визначення довільних сталих маємо умови:

коли $x=0$, то

$$a)\ y=0; \quad b)\ y'=0,$$

коли $x=h$, то

$$c)\ y''=0; \quad y'''=0.$$

Склавши ці рівнання й підстановивши числа, знайдемо:

$$C_1 + C_3 + 0{,}0085 = 0,$$
$$C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - 0{,}0000512 = 0,$$
$$1{,}124\,C_1\,e^{332,8} + C_2\,e^{332,8} - 1{,}124\,C_3 - C_4 = 0,$$
$$0{,}124\,C_1\,e^{332,8} + 2{,}124\,C_2\,e^{332,8} + 2{,}124\,C_3 - C_4 = 0;$$

звідси:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -0{,}0085; \quad C_4 = -0{,}00845.$$

Підстановивши це в загальну інтеґралю, можемо збудувати зігнуту вісь вилученої смужки по точках. Крива має значну кривину лише в границях від $x=0$ до $x=10\ см$, а далі її можна вважати за пряму. Наводимо вартості деяких ординат:

$$y_{x=2\ см} = 0{,}00698; \quad y_{x=5\ см} = 0{,}00848; \quad y_{x=10\ см} = 0{,}00808;$$
$$y_{x=15\ см} = 0{,}00787.$$

361. Вертикальна водонепроникліва переділка (рис. 356), заввишки $l=4{,}5\,м$ і завширшки $l_1=5\,м$, зазнає гідростатичного тиску, розподіленого за законом трапезу: вгорі 0,1 *атм*, а внизу 0,6 *атм*. Стінку підтримують п'ять рівновіддалених трямків коритуватого поперечча № 18 ($W=159$ $см^3$), що стоять кінцями на нерухомих опорах і в середині прогону оперті на горизонтальний трям двотетового поперечча № 36 ($W=975\,см^3$). Знайдіть величину найбільших напруг у вертикальному й горизонтальному трямах.

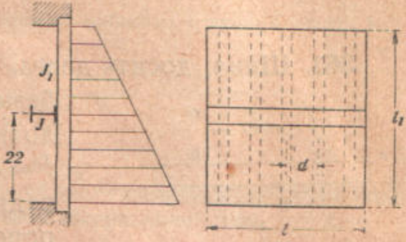


Рис. 356

Розв'язання. У найневигідніших умовах буде середній вертикальний трямок. Для нього середню опорну реакцію можна визначити за приблизною формулою (див. Курс опору матер., 7-е вид., стор. 345).

$$R=\frac{5}{8}Q\left(1-\frac{4}{\pi}\,\frac{\beta}{1+\beta}\right),$$

де Q є обтяження, що припадає на один стояк,

$$\beta=\frac{48}{\pi^4}\,\frac{J_1}{J}\,\frac{l}{d}\left(\frac{l}{l_1}\right)^3=0{,}233;\; R=\frac{5}{8}\,Q.0{,}77.$$

362. Штаба завдовжки $2a$ лежить щільно на землі й посередині тримає тягара P (рис. 357). Поперечча штаби прямокутнє: ширина незмінча, а височина змінна, зростаючи до середини штаби. Височина зростає за таким законом, що момент інерції лишається скрізь пропорційний до згинного моменту. Знайдіть закон розподілу тиску на ґрунт.

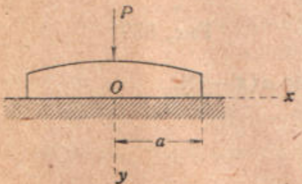


Рис. 357

Розв'язання.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EJ}=\text{const}=-C;\; y=-\frac{Cx^2}{2}+C_1x+C_2;$$

коли $x=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=0;$$

отже:

$$C_1=0,\quad y=-C\,\frac{x^2}{2}+C_2.$$

Закон розподілу напруг визначимо з умови:

$$p = -ky = -k\left(-C\frac{x^2}{2}+C_2\right);\quad 2\int_0^a p\,dx = -2k\left(-\frac{Ca^3}{3}+C_2a\right) = -P.$$

363. Шина, досить довга, щоб її можна було вважати за трям безмежної довжини, лежить усією своєю довжиною на землі й тримає три тягарі $P=5\,m$ (рис. 358). Знайдіть угин під середнім тягарем, коли момент інерції поперечя шини $J=1500\ см^4$, підошва завширшки 12,5 *см*. Ґрунт осідає на 0,025 *см* від тиску 1 *кг/см*².

Рис. 358

Розв'язання. Коли в загальній формулі для вгину

$$y = Ce^{-\alpha x}(\cos\alpha x+\sin\alpha x) = \frac{P}{8EJ}\,\frac{1}{\alpha^3}\,e^{-\alpha x}(\cos\alpha x+\sin\alpha x) \qquad [1]$$

підстановити замість x нуля, то одержимо вгин точки O від того тягара, що лежить безпосередньо над O. Щоб визначити вплив на вгин у точці O тих тягарів, що лежать в A й B, треба у формулу [1] підстановити $x=1$ *м*.

364. Дуже довгий трям (довжину вважаємо $=\infty$) лежить на пружній основі й тримає на дільниці AB рівномірно розподілене обтяження (рис. 359). Знайдіть угин у точці C з абсцисою x.

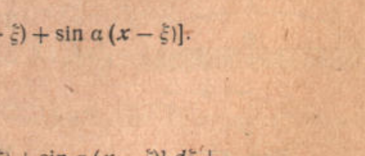


Рис. 359

Розв'язання. Угин у C від елемента обтяження $q.d\xi$ буде:

$$dy = \frac{qd\xi}{8EJ}\,\frac{1}{\alpha^3}\,e^{-\alpha(x-\xi)}\left[\cos\alpha(x-\xi)+\sin\alpha(x-\xi)\right].$$

Повний угин буде:

$$y = \frac{q}{8EJ\alpha^3}\left\{\int_{-s}^{x} e^{-\alpha(x-\xi)}\left[\cos\alpha(x-\xi)+\sin\alpha(x-\xi)\right]d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{s} e^{-\alpha(\xi-x)}\left[\cos\alpha(\xi-x)+\sin\alpha(\xi-x)\right]d\xi\right\}.$$

У точці O при $x=0$ угин буде:

$$(y)_{x=0}=\frac{q}{8EJ}\,\frac{1}{a^3}\left[\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\cos.s.e^{-as}\right].$$

У тих випадках, коли $as=\frac{\pi s}{L}$ (де L є довжина півхвилі) є велике число, ми можемо для вгину в точці O написати:

$$(y)_{x=0}=\frac{q}{4EJa^4}=\frac{q}{k}.$$

Коли довжина обтяженої дільниці мала проти довжини L, то вирази для вгину будуть, приблизно, такі самі, як і у випадку чину зосередженої сили.

РОЗДІЛ VII

ПОТЕНЦІЙНА ЕНЕРҐІЯ ДЕФОРМОВАНИХ СТРИЖНІВ

(ПРИКЛАДАННЯ ТЕОРЕМ КАСТІЛІЯНО Й МАКСВЕЛА)

365. Потенційна енерґія бруса, розтягнутого силою P, дорівнює V. У скільки разів побільшає потенційна енерґія, коли розтяжна сила побільшає в два рази?

Відповідь. У чотири рази.

366. Порівняйте величини потенційної енерґії двох брусів (рис. 360), коли величина найбільшої розтяжної напруги в обох брусах однакова; $p = 2000\ кг/см^2$. (На власну вагу не зважайте).

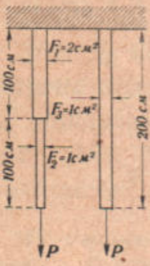


Рис. 360

Розв'язання. Щоб розтягнути до зазначеної напруги перший і другий бруси, очевидно, треба прикласти однакові сили $P = 2000\ кг$. Енерґія верхньої частини першого бруса буде:

$$V_1 = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{2000^2 . 100}{2 . 2 . 10^6 . 2} = 50\ кгсм.$$

Енерґія нижньої частини першого бруса

$$V = \frac{2000^2 . 100}{2 . 2 . 10^6 . 1} = 100\ кгсм.$$

$$V_1 + V_2 = 50 + 100\ кгсм.$$

Енерґія другого бруса

$$V_3 = \frac{2000^2 . 200}{2 . 2 . 10^6 . 1} = 200\ кгсм.$$

367. Порівняйте кількості потенційної енерґії в трьох стрижнях однакової довжини ($l = 60\ см$) з однакового матеріялу, що зазнають розтягу до межі пружности $p_p=2000$ *кг/см²*. Два стрижні мають по всій довжині однакове поперечня, перший: 1,5 *см²*, а другий 1 *см²*; третій стрижень таких самих розмірів, як і перший, але має вузького кая, що зменшує площу поперечня до 1 *см²*; $F_1=F_3=1{,}5$ *см²*; $F_2=1$ *см²* (рис. 361).

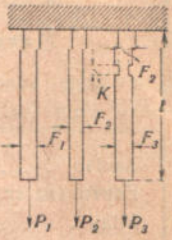


Рис. 361

Відповідь. I—90 *кгсм*, II—60 *кгсм*, III—40 *кгсм*.

Розв'язання. Позначивши довжину послабленої каєм дільниці літерою k, маємо для енергії розтягу *III*-го стрижня

$$V_3=\frac{(p_p)^2}{2E}F_2\left[k+\left(\frac{F_2}{F_1}\right)(l-k)\right],$$

де p_p буде межа пружности. Поклавши $k=0$:

$$V_3=\frac{(p_p)^2}{2E}F_2 l\frac{F_2}{F_1}.$$

368. Як відносяться кількості потенційної енергії V_1 і V_2 двох брусів, однакових завдовжки, але з різними попереччями F_1 і F_2, коли: 1) розтяжні сили для обох брусів однакові, 2) розтяжні напруги однакові?

Відповідь. 1) $V_1:V_2=F_2:F_1$; 2) $V_1:V_2=F_1:F_2$.

369. Вирахуйте потенційну енергію розтягнутого залізного бруса, що має рівноопірну форму, коли допускна напруга $p=10$ *кг/см²*. Важить брус 760 *кг*, питома вага заліза 7,6.

Розв'язання. Енергія, що відповідає одному *см³* матеріялу, буде:

$$\frac{p^2}{2E}=\frac{1}{4}\text{ кгсм.}$$

Вся енергія буде:

$$V=\frac{1}{4}\,\frac{760}{0{,}0076}\text{ кгсм}$$

370. Вирахуйте кількість потенційної енерґії, що припадає на одиницю об'єму й одиницю ваги, для таких матеріялів, що зазнають розтягу до межі пружности:

Матеріял	Питома вага	E кг/см²	Межа пружности кг/см²	*Відповідь* $V = \frac{p^2}{2E}$	
				на 1-цю об'єму	на 1-цю ваги
Залізо	7,8	2000000	2000	1	0,128
Гартована сталь	7,85	2200000	10000	22,5	2,86
Мідь	8,5	1000000	300	0,045	0,0053
Дельта металь	8,5	1000000	2000	2	0,235
Дуб	1	100000	300	0,45	0,45
Кавчук	0,93	10	20	20	21,5

371. Вирахуйте потенційну енерґію круглого стрижня діяметра 2 *см*, завдовжки 1 *м*, скрученого моментом $M = 1000$ *кгсм*.

Відповідь. 39,8 *кгсм*.

Як зміниться величина потенційної енерґії, коли діяметр стрижня зменшити на 20%?

Розв'язання. Кількість енерґії побільшає в такому самому відношенні, як і кут закручування, тобто у відношенні

$$\left(\frac{1}{0,8}\right)^4 : 1 = 2,44 : 1.$$

372. Два круглі стрижні, однакові завдовжки, але з різними попереччями F_1 і F_2, скручується однаковими парами сил. Як відносяться кількості потенційної енерґії стрижнів?

Відповідь. Оберненопропорційно до четвертих ступнів діяметрів.

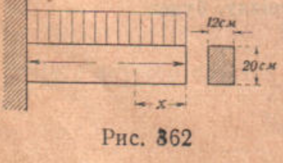


Рис. 362

373. Прямокутнього дерев'яного тряма зазначених на рис. 362 розмірів закріплено одним кінцем і згинається рівномірно розподіленим обтяженням $q = 300$ *кг/м*. Вирахуйте потенційну енерґію тряму; $E = 1 . 10^5$ *кг/см²*.

Розв'язання.

$$V=\int_0^l \frac{M^2dx}{2EJ}, \quad M=\frac{qx^2}{2}, \quad J=\frac{12.20^3}{12}=8000 \text{ см}^4.$$

$$V=\frac{q^2}{8EJ}\int_0^l x^4dx=\frac{q^2l^5}{40EJ}=\frac{3^2.200^5}{40.1.10^5.8000}=90 \text{ кг/см}.$$

a) Як зміниться потенційна енерґія, коли умови закріплення тряму й його обтяження залишити ті самі, але поперечча повернути так, щоб його височина була 12 *см*, а ширина 20 *см*?

Відповідь.

$$V_1=\frac{V20^2}{12^2}=250 \text{ кг/см}.$$

b) Як зміниться кількість потенційної енерґії, коли замість суцільного обтяження взяти зосереджену силу $P=ql=600$ *кг* і прикласти її по середині прогону?

374. Трям прямокутнього поперечча ($h=2a$, що вільно лежить на двох опорах, згинає сила P, прикладена посередині (рис. 363). Як зміниться енерґія тряму, коли, не зміняючи величини й положення сили P, покласти тряма плазом?

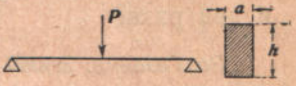


Рис. 363

Розв'язання. Енерґія тряму в першому положенні:

$$V_1=\frac{1}{2EJ_1}\int_0^l M^2dx;$$

у другому положенні:

$$V_2=\frac{1}{2EJ_2}\int_0^l M^2dx;$$

отже:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{J_2}{J_1}=\frac{\frac{ha^3}{12}}{\frac{ah^3}{12}}=\frac{a^2}{h^2}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4};$$

для другого випадку енерґія побільшає в 4 рази. Кількості потенційної енерґії в розглядуваних випадках відносяться, як відповідні вгини.

375. Та сама сила P згинає два зовсім однакові бруси: одного з вільними кінцями, а другого з закріпленими (рис. 364). У якому брусі нагромаджується енергії більше й у скільки разів?

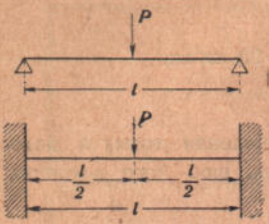


Рис. 364

Відповідь. У другому випадку кількість енергії буде в 4 рази менша. Цього легко переконатись, прирівнявши вгин бруса в обох випадках.

Розв'яжіть попередню задачу, припустивши, що прикладено рівномірно розподілене обтяження.

376. Трям прямокутнього попереччя з опертими кінцями згинає зосереджений тягар P (рис. 365). У скільки разів поменшає енергія тряму,

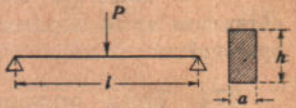


Рис. 365

1) коли ширину попереччя збільшити в два рази?

2) коли височину попереччя збільшити в два рази?

Розв'язання. Згинні моменти в усіх трьох випадках однакові, лише зміняються величини моментів інерції, отже:

$$V_0 : V_1 : V_2 = \frac{1}{J_0} : \frac{1}{J_1} : \frac{1}{J_2}, \quad J_0 = \frac{ah^3}{12}, \quad J_1 = 2\frac{ah^3}{12},$$

$$J_2 = \frac{a\,(2h)^3}{12} = 8\,\frac{ah^3}{12},$$

отже:

$$V_0 : V_1 : V_2 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{8}.$$

377. Порівняйте кількості потенційної енергії в двох брусах прямокутнього попереччя однакових завширшки, покладених на двох опорах і зігнутих однаковими силами P до межі пружности. Перший брус по всій довжині має однакове попереччя, а другий посередині має вузький надріз, що зменшує його височину на $\frac{1}{5}$ (рис. 366).

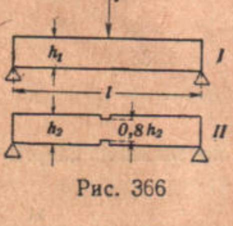


Рис. 366

Розв'язання. Через те, що до межі пружности обидва бруси доходять при однаковій силі P, то послаблене поперечча II бруса має такий самий момент опору, як і поперечча першого бруса:

$$0{,}8h_2 = h_1;\ h_2 = \frac{h_1}{0{,}8};\ J_2 = \frac{J_1}{0{,}8^3},\ V_2 = V_1\frac{J_1}{J_2} = V_1 0{,}8^3 = 0{,}512\,V_1.$$

378. Однокінцево закріпленого тряма згинає сила, прикладена до другого кінця. Визначте кількість потенційної енерґії, що нагромаджується в трямі при згині, коли він має форму рівноопірного бруса з прямокутнім попереччям і однаковою шириною.

Розв'язання. Вилучім двома попереччями елемент тряму завдовжки dx. Відповідна до цього елемента кількість потенційної енерґії буде:

$$dV = \frac{M^2dx}{2EJ} = \frac{M^2dx}{2E\,\frac{bh^2}{12}} = \frac{M^2}{\left(\frac{dh^2}{6}\right)^2}\,\frac{dx\,.bh}{2E\,.3} = \frac{p^2.bh.dx}{6E}.$$

Тут p є допускна напруга, а $bh.dx$—об'єм елемента; отже:

$$V = \frac{p^2}{6E}v,$$

де v є об'єм тряму.

379. З'ясуйте, яку вигоду має вживання в ресорах рівноопірних брусів (при згині з прямокутнім попереччям однакової височини), проти брусів однакового поперечча (рис. 367).

Відповідь. При завданій кількості потенційної енергії й завданій допускній напрузі вищезазначений рівноопірний брус потребує в три рази менше матеріялу, ніж брус призматичний.

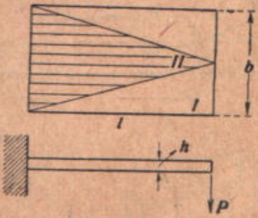


Рис. 367

380. Залізний двотетовий трям № 12 ($J = 331\ см^4$), з прогоном $l = 1{,}5\ м$, закріплений одним кінцем, зазнає чину рівномірно розподіленого обтяження $q = 400\ кг/м$. Вирахуйте, скориставшись Кастіліяновою теоремою, вгин кінця тряму f і кут поверту кінцевого поперечча φ.

Розв'язання. Щоб визначити вгин f, прикладім до кінця тряму фіктивну силу P, тоді:

$$\left(\frac{dV}{dP}\right)_{P=0}=f;$$

$$V=\frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2dx=\frac{1}{2EJ}\int_0^l\left(\frac{qx^2}{2}+Px\right)^2dx.$$

$$\frac{dV}{dP}=\frac{1}{EJ}\int_0^l\left(\frac{qx^2}{2}+Px\right)xdx=\frac{1}{EJ}\left[\frac{qx^4}{8}+\frac{Px^3}{3}\right]_0^l.$$

Поклавши $P=0$, одержимо:

$$f=\frac{dV}{dP}=\frac{1}{EJ}\frac{ql^4}{8}=\frac{\frac{400}{100}\cdot 150^4}{8.2.10^6.331}=\sim 0{,}38 \text{ см}.$$

Щоб визначити кут поверту кінцевого попереччя, впровадьмо фіктивний момент M_0; тоді:

$$\left(\frac{dV}{dM_0}\right)_{M_0=0}=\varphi;\ V=\frac{1}{2EJ}\int_0^l M^2dx=\frac{1}{2EJ}\int_0^l\left(\frac{qx^2}{2}+M_0\right)^2dx.$$

$$\frac{dV}{dM_0}=\frac{1}{EJ}\int_0^l\left(\frac{qx^2}{2}+M_0\right)dx=\frac{1}{EJ}\left[\frac{qx^3}{6}+M_0x\right]_0^l.$$

Поклавши $M_0=0$, одержимо:

$$\varphi=\frac{dV}{dM_0}=\frac{ql^3}{6EJ}=\frac{\frac{400}{100}\cdot 150^3}{6.2.10^6.331}=0{,}0034.$$

381. Дерев'яного тряма зазначених на рис. 368 розмірів ($a=c=1$ *м*, $b=2$ *м*, $l=3$ *м*), що вільно лежить на двох опорах, згинає зосереджений тягар $P=1000$ *кг*. Рахуйте, скориставшись Кастіліяновою теоремою, вертикальне переміщення точки C й кут поверту осі тряму над опорою A.

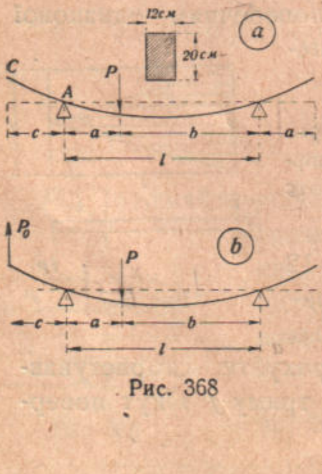


Рис. 368

$$J=\frac{12.20^3}{12}=8000 \text{ см}^4.$$

Розв'язання. Щоб визначити вертикальне переміщення f точки C, прикладім у цій точці фіктивну силу P_0, спрямовану догори; тоді:

$$\left(\frac{dV}{dP_0}\right)_{P_0=0}=f.$$

Реакція опори

$$A=\frac{Pb-P_0\,(c+l)}{l};\quad B=\frac{Pa+P_0c}{l}.$$

$$V=\frac{1}{2EJ}\left[\int_0^c (P_0x)^2dx+\int_0^a [P_0\,(c+x)+Ax]^2dx+\int_0^b (Bx)^2\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2EJ}\left\{\int_0^c P_0^2x^2+\int_0^a \left[P_0c+P_0x+\frac{Pb}{l}x-\frac{P_0c}{l}x-P_0x\right]^2dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^b \left[\frac{Pa}{l}x+\frac{P_0c}{l}x\right]^2dx\right\}.$$

$$\frac{dV}{dP_0}+\frac{1}{EJ}\left[\int_0^c P_0x^2dx+\int_0^a \left(P_0c+\frac{Pb}{l}x-\frac{P_0c}{l}x\right)\left(c-\frac{c}{l}x\right)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^b \left(\frac{Pa}{l}x+\frac{P_0c}{l}x\right)\frac{c}{l}x\,dx\right].$$

Поклавши $P_0=0$, одержимо:

$$f=\frac{dV}{dP_0}=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pbca^2}{2l}-\frac{Pbca^2}{3l^2}-\frac{Pcab^2}{3l^2}\right]=\frac{Pabc}{EJl}\left[\frac{a}{2}-\frac{a^2}{3l}+\frac{b^2}{3l}\right]=$$

$$=\frac{1000.100.200.100}{2.10^6.8000.300}\cdot\left[\frac{100}{2}-\frac{100^2}{3.300}+\frac{200^2}{3.300}\right]=\sim 0{,}035\ см.$$

Щоб визначити кут поверту осі тряму над опорою A, прикладім у цьому попереччі фіктивний момент M_0; тоді:

$$\left(\frac{dV}{dM_0}\right)_{M_0=0}=\varphi.$$

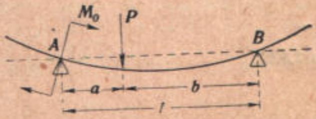


Рис. 369

Реакція опори:

$$A=\frac{Pb-M_0}{l},\quad B=\frac{Pa+M_0}{l}.$$

$$V=\frac{1}{2EJ}\left[\int_0^a (M_0+Ax)^2\,dx+\int_0^b (Bx)^2\,dx\right].$$

$$\frac{dV}{dM_0}=\frac{1}{EJ}\left[\int_0^a \left(M_0+\frac{Pb}{l}x-\frac{M_0}{l}x\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)dx+\int_0^b \left(\frac{Pa}{l}x+\frac{M_0x}{l}\right)\frac{x}{l}\,dx\right].$$

$$\varphi=\frac{dV}{dM_0}=\frac{1}{EJ}\left[\frac{Pba^2}{2l}-\frac{Pba^2}{3l^2}-\frac{Pab^3}{3l^2}\right]=\frac{Pab}{EJl}\left[\frac{a}{2}-\frac{a^2}{3l}+\frac{b^2}{3l}\right]=$$

$$=\frac{1000.100.200}{2.10^6.8000.300}\left[\frac{100}{2}-\frac{100^2}{3.300}+\frac{200^2}{3.300}\right]=\sim 0{,}00035.$$

382. Яка кількість потенційної енерґії нагромадиться при розтягові стального стрижня подовжною силою P до межі пружности, коли $l=1\ м$, площа поперечччя $F=6\ см^2$, межа пружности $p=2000\ кг/см^2$?

Знайдіть потенційну енерґію, відповідну до розтягу тою самою силою P, коли стрижня попереду було піддано рівномірному бічному тискові $q=1000\ кг/см^2$.

Відповідь.

$$V=\frac{1}{2E}[p^2+2q^2+2\sigma(2pq-q^2)].$$

383. Тягара P підтримують три стрижні, однакові завдовжки l. Яке повинно бути співвідношення між площами поперечччів, коли треба, щоб стискні зусилля в стрижнях AB й BC дорівнювали розтяжному зусиллю в стрижні BD (рис. 370)?

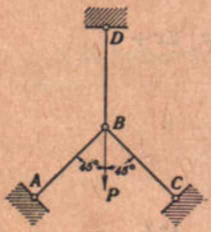


Рис. 370

Розв'язання. Коли літерою X позначити розтяжне зусилля в стрижні BD, літерою F—його площу поперечччя кожного стрижня AB й BC, то потенційна енерґія системи буде:

$$V=\frac{X^2 l}{2EF}+\frac{(P-X)^2 l}{2EF_1}.$$

X визначмо з рівнання

$$\frac{dV}{dX}=\frac{Xl}{E.F}-\frac{(P-X)\,l}{EF_1}=0.$$

За умовою

$$X=\frac{P-X}{\sqrt{2}},$$

отже:

$$\frac{1}{F\sqrt{2}}=\frac{1}{F_1};\quad F_1=F\sqrt{2}.$$

384. Кінці A й C горизонтального й вертикального стрижнів, однакових завдовжки $l=1\ м$ і з однаковим поперечччям $10\ см \times 10\ см$, абсолютно закріплено. У точці B стрижні злучено суставом. Знайдіть напруги в стрижнях від чину горизонтальної сили $P=10\ m$ (рис. 371).

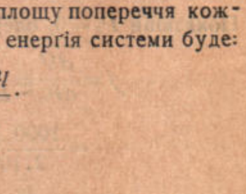


Рис. 371

Розв'язання. Нехай X буде розтяжне зусилля в стрижні AB; тоді потенційна енерґія системи буде:

$$V=\frac{X^2 l}{2EF}+\int_0^l\frac{(P-X)^2x^2dx}{2EJ}.$$

З рівняння

$$\frac{dV}{dX}=0$$

знаходимо:

$$X=\frac{Pl^2}{\frac{3J}{F}+l^2}=\frac{P}{1+3\frac{r^3}{l^3}},$$

де r є радіюс інерції.

385. Скориставшись Кастіляновою теоремою, знайдіть спускання кінця C дерев'яного кронштейна, складеного з дерев'яних брусів однакового попереччя $20\,см\times20\,см$, коли $E=1.10^5\,кг/см^2$, $a=1{,}5\,м$, сила $P=500\,кг$ (рис. 372).

Розв'язання. Знехтувавши енерґією, відповідною до розтягу й стиску, і взявши до уваги лише згин, знайдемо:

$$V=\frac{P^2a^3}{6EJ}+\frac{P^2a^3}{6EJ}+\frac{4P^2a^3}{6EJ}+\frac{AP^2a^3}{3EJ}=3\frac{P^2a^3}{EJ};$$

$$\frac{dV}{dP}=f=\frac{6Pa^3}{EJ}.$$

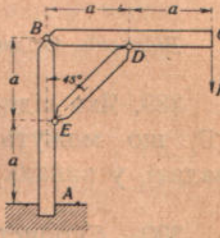


Рис. 372

386. Циліндрична ґвинтова ресора круглого попереччя зазнає чину розтяжної сили $P=100\,кг$. Скориставшись Кастіляновою теоремою, знайдіть спускання λ точки чіпляння, коли середній радіюс звоїв $R=10\,см$, діяметр $d=2\,см$, кількість звоїв $n=20$, $G=8.10^5\,кг/см^2$.

Відповідь. Енергія $V=\frac{M^2l}{2GJ_p}=\frac{P^2R^2.\pi Rn}{2Gn\frac{d^4}{32}}$; $\lambda=\frac{dV}{dP}=10\,см.$

387. Крутний момент $M=кгм$ прикладено в проміжному поперечці вала ($a=1\,м$, $b=2\,м$) й кінці вала закріплено нерухомо. Скориставшись виразами для потенційної енергії, знайдіть моменти M_1 і M_2 реакцій у площі закріплення (рис. 373).

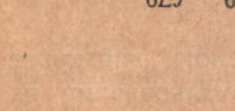


Рис. 373

Розв'язання. Енергія $V=\frac{M_1^2a}{2GJ_p}+\frac{(M_1-M)^2b}{2GJ_p}$;

$$\frac{dV}{dM_1}=\frac{M_1a}{GJ_p}+\frac{(M_1-M)b}{GJ_p}=0;$$

звідси

$$M_1 = \frac{b}{a+b} M = \frac{2}{3} 1200 = 800 \text{ кгм}.$$

388. Яке відношення між величинами осідання й напруг трьох циліндричних ґвинтових пружин з однакового матеріялу й однаковою кількістю звоїв, такого самого радіюса звою, що мають різні попереччя, а саме: 1) круг радіюса r, 2) квадрат з площею πr^2 і 3) квадрат з площею $4r^2$. Обтяження для всіх ресор однакове.

Відповідь. Осідання: 0,637 : 0,718 : 0,443. Напруга: 0,637 : 0,86 : 0,60.

389. Яке відношення між тими кількостями потенційної енерґії, що можуть бути в пружинах, зазначених у попередній задачі, у випадку обтяження їх до межі пружности?

390. Скориставшись Кастіліяновою теоремою, вирахуйте вертикальне переміщення точки B у зводі, змальованому на на рис. 374, від чину тягара $Q = 4\,m$. Площа попереччя дерев'яного косяка $F = 250\,см^2$, $E_1 = 1 . 10^5\,кг/см^2$, площа попереччя залізного тяжа $F_2 = 6\,см^2$, $E_2 = 2 . 10^6\,кг/см^2$.

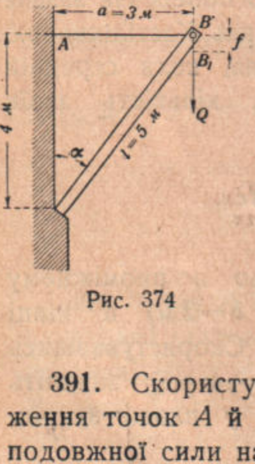


Рис. 374

Розв'язання. Енерґія системи буде:

$$V = \frac{(Q\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2 a}{2E_2F_2} + \frac{\left(\frac{Q}{\cos\alpha}\right)^2 l}{2E_1F_1}; \quad f = \frac{dV}{dQ} = \frac{Q\,\mathrm{tg}^2\alpha a}{E_2F_2} +$$

$$+ \frac{Ql}{E_1F_1\cos^2\alpha} = \sim 0{,}18\ см.$$

391. Скориставшись теоремою Кастіляно, знайдіть зближення точок A й B від чину сил P і пар M (рис. 375). Впливом подовжної сили на вгин нехтуємо).

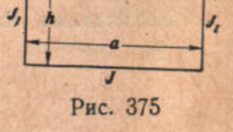


Рис. 375

Розв'язання. Вираз для потенційної енерґії системи буде такий:

$$V = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h (M + Px)^2 dx + \frac{(Ph + M)^2 a}{2EJ}.$$

Шукане зближення

$$\delta=\frac{dV}{dP}=\frac{2}{EJ_1}\int\limits_0^h (M+Px)\,x\,dx+\frac{(Ph+M)a.h}{EJ}=$$

$$=\frac{2}{EJ_1}\left(\frac{Mh^2}{2}+\frac{Ph^3}{3}\right)+\frac{ah}{EJ}(Ph+M).$$

Коли $M=0$, то $\delta=\frac{2}{EJ_1}\frac{Ph^3}{3}+\frac{Pah^2}{EJ}$; коли $P=0$, то $\delta=\frac{Mh^2}{EJ_1}+\frac{Mah}{EJ}$.

Щоб знайти кути поверту попереччів A й B, треба скласти похідну $\frac{dV}{dM}$. Ця похідна дає суму кутів поверту попереччів A й B. Із симетрії робимо висновок, що поверт кожного поперечча дорівнює $\frac{1}{2}\frac{dV}{dM}$.

392. Знайдіть, наскільки побільшає (δ) віддаль AB (рис. 376) між кінцями залізних рубів $ACDB$, які підтримують дно й стінки корита, коли руби оперто в точках C й D й корито наллято доверху водою. Віддаль між рубами вздовж корита дорівнює d.

Як зміниться d, коли кінці A й B зв'язати залізним стяглем з попереччям F?

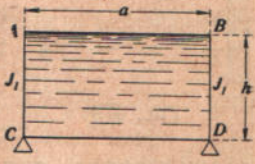


Рис. 376

393. Тягар P за допомогою подовжного тряму AB передається на три поперечки mn з опертими кінцями. Знайдіть тиск на середню поперечку, коли розміри поперечок однакові (рис. 377).

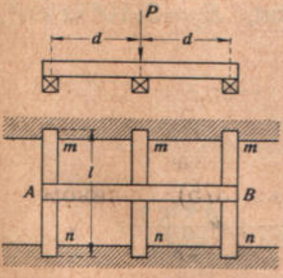


Рис. 377

Розв'яжіть цю саму задачу, припустивши, що трям AB розподіляє тиск від тягара P на п'ять рівновіддалених поперечок. Вжийте способу найменшої роботи.

394. Визначте опорну реакцію R у точці A від чину вертикальної сили P в точці D (рис. 378).

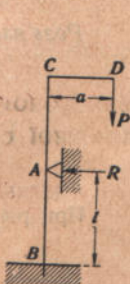


Рис. 378

395. Скориставшись теоремою Максвела, збудуйте лінію впливу для опорного моменту й опорної реакції тряму з одним закріпленим, а другим опертим кінцем.

396. Скориставшись теоремою Максвела, визначте найбільший угин опертого на кінцях тряму від рівномірно розподіленого обтяження q, коли ми знаємо криву згину від сили P, прикладеної по середині прогону.

397. Скориставшись теоремою Максвела, збудуйте лінію впливу для вгину по середині тряму з опертими кінцями.

398. Збудуйте лінію впливу для згинного моменту в тому поперечі, що відповідає середній опорі двопрогінного тряму. (Скористуйтесь теоремою Максвела).

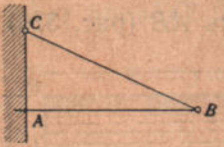


Рис. 379

399. Знехтувавши розтягом стягля CB, збудуйте лінію впливу для зусилля в ньому при переміщенні тягара по тряму AB (рис. 379).

400. Визначте зусилля X у стояку підсилкового тряму, змальованого на рис. 380. Рівномірно розподілене обтяження $q = 400$ *кг/м*, трям дерев'яний, $F = 20\,см \times 30\,см$, $E = 1 . 10^5\,кг/см^2$, $J = \frac{20 . 30^3}{12} = 45000\,см^4$, стяглі й стояк залізні, $E_1 = 2 . 10^6\,кг/см^2$, $F_1 = 2\,см^2$, $F_2 = 10\,см^2$.

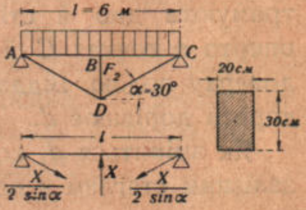


Рис. 380

Розв'язання. Потенційна енергія всієї системи буде:

$$V = \frac{2}{EJ}\int_0^{\frac{l}{2}} M^2 dx + \frac{X^2 l}{8EF\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} + \frac{X^2 l}{8\sin^2\alpha . \cos\alpha . E_1F_1} + \frac{X^2 l\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4E_1F_2}.$$

При рівномірному обтяженні

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - \frac{Xx}{2};\quad \frac{dM}{dX} = -\frac{x}{2};$$

отже:

$$\frac{dV}{dX}=-\frac{1}{EJ}\int\limits_{0}^{\frac{l}{2}}\left[\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}-\frac{Xx}{2}\right]x\,dx+\frac{Xl}{4EF\operatorname{tg}^2\alpha}+$$

$$+\frac{Xl}{4\sin^2\alpha.\cos\alpha.E_1F_1}+\frac{Xl\operatorname{tg}^2\alpha}{2E_1F_2}=0;$$

звідси:

$$X\left[\frac{l^3}{48EJ}+\frac{l}{4EF\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{l}{4\sin^2\alpha.\cos\alpha.E_1F_1}+\frac{l\operatorname{tg}\alpha}{2E_1F_2}\right]=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}. \qquad [1]$$

Коли знехтувати розтягом стяглів, стиском стояк й тряму AC, то в дужках доведеться залишити лише перший член; одержимо: $X=\frac{5}{8}qt$—те саме, що й для нерозрізного тряму на трьох непружних опорах. Коли у формулу [1] вставити числа, то знайдемо, що $X=1260$ *кг*. Коли б ми обчислили X, як для нерозрізного тряму, то мали б:

$$X=\frac{5}{8}\cdot400.6=1500\ кг.$$

401. Нехтуючи стиском стояка й розтягом стяглів підсилкового тряму попередньої задачі, збудуйте лінію впливу для стискного зусилля стояка й розтяжного зусилля стяглів.

402. Визначте зусилля (X і Y) у вервечках тряму, змальованого на рис. 381. Трям дерев'яний 12 *см* $\times$ 20 *см*.

$$F=240\ см^2,\ J=\frac{12.20^3}{12}=8000\ см^4.$$

$$E=1.10^5\ кг/см^2.$$

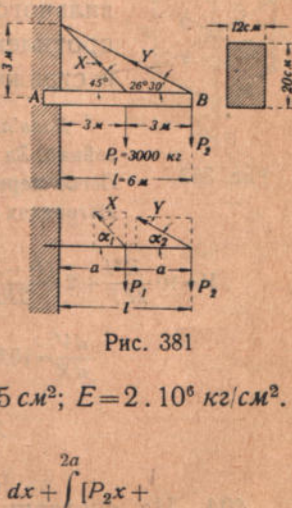


Рис. 381

Вервечки залізні однакового поперечча: $F_1=5\ см^2$; $E=2.10^6\ кг/см^2$.

Розв'язання.

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{1}{2EJ}\left\{\int\limits_0^a(P_2x-Y\sin\alpha_2x)^2\,dx+\int\limits_a^{2a}[P_2x+\right.$$

$$\left.+P_1(x-a)-Y\sin a_2x-X\sin\alpha_1(x-a)]^2dx\right\}+\frac{1}{2EF}[(Y\cos\alpha_2)^2a+$$

$$+(Y\cos\alpha_2+X\cos\alpha_1)^2a]+\frac{1}{2E_1F_1}\left[X^2\frac{a}{\cos\alpha_1}+Y^2\frac{2a}{\cos\alpha_2}\right].$$

Склавши похідні: $\frac{dV}{dY}$ і $\frac{dV}{dX}$ і прирівнявши їх до нуля, знайдемо:

$$Y\left[\frac{8\sin a_2}{3}+\frac{2J\cos a_2}{Fa^2\,\mathrm{tg}\,a_2}+\frac{2EJ}{E_1F_1a^2\sin a_1.\cos a_2}\right]+X\left[\frac{5\sin a_1}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{J\cos a_2}{Fa^2\,\mathrm{tg}\,a_2}\right]=\frac{8}{3}P_2+\frac{5}{6}P_1;$$

$$Y\left[\frac{5}{6}\sin a_2+\frac{J\cos a_2}{Fa^2\,\mathrm{tg}\,a_1}\right]+X\left[\frac{\sin a_1}{3}+\frac{J\cos a_1}{Fa^2\,\mathrm{tg}\,a_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{EJ}{E_1F_1a^2\sin a_1\cos a_1}\right]=\frac{5}{6}P_2+\frac{1}{3}P_1.$$

Підстановивши числові величини: $\sin a_2=0{,}447$; $\cos a_2=0{,}894$; $\mathrm{tg}\,a_2=0{,}5$; $\sin a_1=0{,}707=\cos a_1$; $\mathrm{tg}\,a_1=1$, одержимо:

$$Y=4750\ \text{кг};\quad X=3700\ \text{кг}.$$

403. На суставну систему, що має форму правильного шестикутника, чинять дві рівні й прямо протилежні сили P (рис. 382). Знайдіть зусилля в стрижнях.

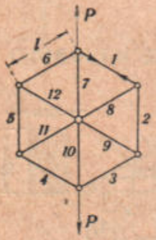


Рис. 382

Розв'язання. Система має 7 вузлів і 12 стрижнів; один стрижень зайвий. За зайву невідому візьмімо зусилля X у першому стрижні. Легко переконатися, що зусилля в решті стрижнів кола буде X, а в діягоналях 8, 9, 11 і 12 $(-X)$, в 7 і 10 $(P-X)$. Енергія системи буде:

$$V=10\frac{X^2l}{2EF}+2\frac{(P-X)^2l}{2FE}=[5X^2+(P-X)^2]\frac{l}{EF};$$

$$\frac{dV}{dX}=10X-2P+2X=0;$$

$$X=\frac{P}{6}.$$

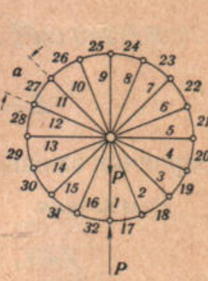


Рис. 383

404. На суставну систему, змальовану на рис. 383, чинять дві однакові сили P й $-P$. Знайдіть зусилля в стрижнях.

Розв'язання. У цій конструкції є один зайвий стрижень; візьмім за зайвий 17-тий. Нехай стискне зусилля в ньому буде X; у решті стрижнів ободу будуть такі самі зусилля; у шпиці 1-й буде зусилля: $P-2X\sin\frac{\pi}{n}$, у решті

$$2X\sin\frac{\pi}{n}\left(\angle\alpha=\frac{2\pi}{n}\right);$$

$$V=\frac{16X^2a}{2EF}+15\frac{4X^2\sin^2\frac{\pi}{n}l}{2EF_1}=\frac{\left(P-2X\sin\frac{\pi}{n}\right)^2l}{2EF_1};$$

$$\frac{dV}{dX}=\frac{16Xa}{EF}+\frac{60X\sin^2\frac{\pi}{n}l}{EF_1}=\frac{2\left(P-2X\sin\frac{\pi}{n}\right)l\sin\frac{\pi}{n}}{EF_1}=0; \qquad [1]$$

звідси:

$$X=\frac{2Pl}{16a\frac{F_1}{F}+60\sin^2\frac{\pi}{n}l+4\sin^2\frac{\pi}{n}l}=$$

$$=\frac{Pl}{8a\frac{F}{F_1}+32\sin^2\frac{\pi}{n}l}.$$

405. На кінці рамен колінчастого коромисла, зв'язаного стягачем, чинять сили P. Знайдіть зусилля в стягачі (рис. 384).

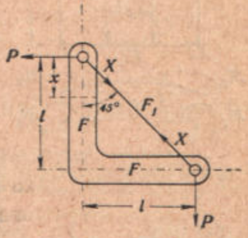


Рис. 384

Розв'язання. Зусилля в стягачі візьмім за зайву невідому X. Згинний момент для плеч коромисла буде:

$$M_x=\left(P-\frac{X\sqrt{2}}{2}\right)x.$$

Енергія

$$V=2\int_0^l\frac{M^2}{2EJ}dx+\frac{X^2l\sqrt{2}}{2EF_1}+2\frac{X^2l}{4EF};$$

$$\frac{dV}{dX}=-2\int_0^l\frac{P-\frac{X\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}}{2EJ}x^2dx+\frac{Xl\sqrt{2}}{EF_1}+\frac{Xl}{EF}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{EJ}\left(\frac{Pl^3}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}X\frac{l^3}{3}\right)+\frac{Xl\sqrt{2}}{EF_1}+\frac{Xl}{EF}=0,$$

$$\frac{Xl}{3}\frac{l^2}{r^2}+\frac{Xl\sqrt{2}}{\frac{E_1}{F}}+Xl=\frac{Pl\sqrt{2}}{3}\frac{l^2}{r^2},$$

де

$$r^2=\frac{J}{E}.$$

Візьмім

$$\frac{l}{r}=20; \qquad \frac{F_1}{F}=\frac{1}{10};$$

тоді

$$\frac{X}{3}\cdot 400+10\sqrt{2}\,X+X=\frac{P\sqrt{2}}{3}\cdot 400; \quad X=0{,}9P\sqrt{2}.$$

Якби ми визначили величину X, уважаючи коромисло за суставну систему, то одержали б: $X=P\sqrt{2}$, що не дуже різниться від вище знайденого при $\frac{l}{r}=20$ і $\frac{F_1}{F}=\frac{1}{10}$.

406. Прямокутню штивну раму заввишки h і завширшки b обтяжено двома симетрично розташованими силами P (рис. 385). Треба визначити реактивні моменти в кутах рами.

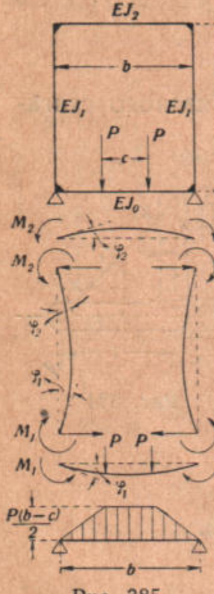


Рис. 385

Розв'язання. FJ_0, EJ_1 і EJ є штивності частин рами. Вважаючи нижню розпинку за вільний трям, обтяжений тягарами P, й уживши графоаналітичного способу, знайдемо, що опорні реакції від фіктивного обтяження будуть:

$$\frac{P(b-c)^2}{8}+\frac{P(b-c)c}{4}=\frac{P(b^2-c^2)}{8}.$$

Кути нахилу дотичної на опорах для нижньої розпинки:

$$\varphi_1=\frac{P(b^2-c^2)}{8EJ_0}-\frac{M_1 b}{2EJ_0}. \qquad [1]$$

З другого боку, розгорнувши поворіт нижніх кінців стояків від чину моментів M_1 і M_2, знайдемо:

$$\varphi_1=\frac{h}{6EJ_1}(2M_1-M_2). \qquad [2]$$

З [1] і [2] маємо:

$$\left(\frac{h}{3EJ_1}+\frac{b}{2EJ_0}\right)M_1-\frac{h}{6EJ_1}M_2=\frac{P(b^2-c^2)}{8EJ_0}. \qquad [3]$$

Розглянувши поворіт верхніх кінців стояків і верхньої розпинки, одержимо:

$$\varphi_2=\frac{h}{6EJ_1}(M_1-2M_2)=\frac{bM_2}{2EJ_2};$$

звідси:

$$M_2 = \frac{hJ_2}{2hJ_2 + 3bJ_1} M_1 = \frac{1}{2 + 3\frac{b}{h}\frac{J_1}{J_2}} M_1. \qquad [4]$$

Підстановивши в рівнання [3] вартість M_2 з [4], знайдемо:

$$\left[\frac{h}{3EJ_1} + \frac{b}{2J_0} - \frac{h}{6J_1}\left(\frac{hP_2}{2hJ_2 + 3bJ_1}\right)\right] M_1 = \frac{P(b^2 - c^2)}{4}, \qquad [5]$$

$$\left[b + \frac{J_0}{J_1}\left(\frac{1 + 2\frac{b}{h}\frac{J_1}{J_2}}{2 + 3\frac{b}{h}\frac{J_1}{J_2}}\right)h\right] M_1 = \frac{P(b^2 - c^2)}{4}. \qquad [6]$$

З [4] і [6] визначимо M_1 і M_2. Той самий результат ми одержимо, приклавши принцип найменшої роботи.

407. Визначте реактивні моменти для тої ж таки рами, припустивши, що верхню розпинку злучено з стояками не штивно, а за допомогою суставів.

Розв'язання. Поклавши у формулі [3] попередньої задачі $M_2 = 0$, знайдемо:

$$\left(b + \frac{2}{3} h \frac{J_0}{J_1}\right) M_1 = \frac{P(b^2 - c^2)}{4}.$$

408. Визначте реактивні моменти для штивної рами, змальованої на рис. 386. Верхню розпинку можна вважати за абсолютно штивну.

Розв'язання. Поклавши у формулі [6] задачі 406 $J_2 = \infty$, знайдемо:

$$\left(b + \frac{1}{2} h \frac{J_0}{J_1}\right) M_1 = \frac{P(b^2 - c^2)}{4}.$$

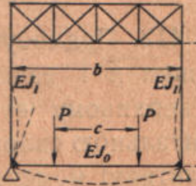


Рис. 386

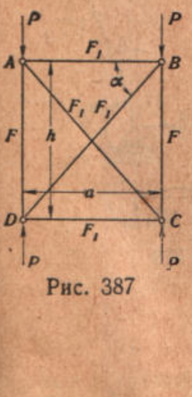


Рис. 387

409. Прямокутню суставну раму $ABCD$ з діягоналями AC й BD стискають сили P. Знайдіть зусилля в стрижнях, коли поперечча стояків AD й BC дорівнюють F, а решта стрижнів мають поперечча F_1 (рис. 387). Прикладіть принцип найменшої роботи.

Відповідь. Зусилля в діягоналі

$$X = \frac{P}{\frac{h^2 + a^2}{h^2}\frac{F}{F_1} + \frac{a^2}{h^2}\cos\alpha\frac{F}{F_1} + \sin\alpha}.$$

410. Прямокутня суставна рама з діягоналями зазнає чину горизонтальної сили H. Знайдіть зусилля в стрижнях. Поперечча діягональ F_1, решти стрижнів F (рис. 388).

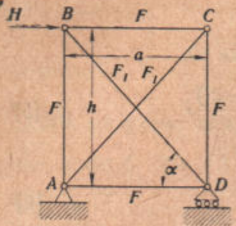


Рис. 388

Розв'язання. Позначмо літерою X зусилля в стрижні BC. Склавши рівнання

$$\frac{dV}{dX}=0,$$

знайдемо:

$$X=H\frac{\frac{\sin^3\alpha}{F}+\frac{\cos^3\alpha}{F}+\frac{1}{F_1}}{\sin^3\alpha\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{F}\right)+\cos^3\alpha\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{F}\right)+\frac{2}{F_1}}=\frac{H}{2}.$$

411. Скористувавшись Кастіліяновою теоремою, знайдіть для рами попередньої задачі зусилля в стрижнях при підвищенні на 20° температури розпинки BC (рис. 388). Модуль пружности $E=2.10^6$ *кг/см²*, коефіцієнт лінійного поширення $\alpha=125.10^{-7}$.

Розв'язання. Позначмо літерою X зусилля в розпинці BC. Складімо вираз для потенційної енергії системи. Величину X знайдемо з рівнання:

$$\frac{dV}{dX}=\alpha ta.$$

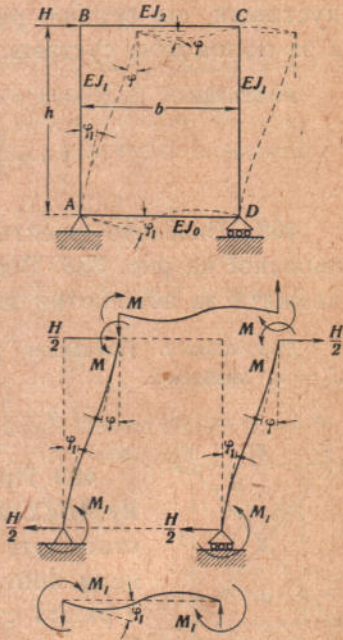


Рис. 389

412. Прямокутню штивну раму заввишки h і завширшки b обтяжено у верхньому вузлі (рис. 389) горизонтальною силою H. Треба визначити реактивні моменти в кутах рами.

Розв'язання. З розгляду згину розпинок BC й AD маємо:

$$\varphi=\frac{b}{6EJ_2}(2M-M)=)\frac{Mb}{6EJ_2};\qquad [1]$$

$$\varphi_1=\frac{b}{6EJ_0}(2M_1-M_1)=\frac{M_1b}{6EJ_0}.\qquad [2]$$

З розгляду згину стояка AB маємо:

$$\varphi=\varphi_1+\frac{Hh^2}{4EJ_1}-\frac{Mh}{EJ_1},$$

або

$$\frac{Mb}{6EJ_2}=\frac{M_1b}{6EJ_0}+\frac{Hh^2}{4EJ_1}-\frac{Mh}{EJ_1}, \qquad [3]$$

крім того,

$$M+M_1=\frac{H.h}{2},$$

або

$$M_1=\frac{H.h}{2}-M; \qquad [4]$$

з [3] і [4]:

$$\frac{Mb}{6EJ_2}=\frac{Hhb}{2.6EJ_0}-\frac{Mb}{6EJ_0}+\frac{Hh^2}{4EJ_1}-\frac{Mh}{EJ_1};$$

звідси:

$$M=\frac{H\left(\frac{hb}{6EJ_0}+\frac{h^2}{2EJ_1}\right)}{\left(\frac{b}{3EJ_2}+\frac{b}{3EJ_0}+\frac{2h}{EJ_1}\right)}. \qquad [5]$$

Ту саму задачу легко розв'язати за допомогою принципу найменшої роботи. Знехтуймо енерґією стиску й розтягу; тоді енерґія всієї системи буде:

$$V=V_0+2V_1+V_2=\frac{1}{2EJ_0}\int_0^b\left(M_1-\frac{2M_1}{b}x\right)^2dx+\frac{2}{2EJ_1}\int_0^h\left(\frac{H}{2}x-M\right)^2dx+$$

$$+\frac{1}{2EJ_2}\int_0^b\left(M-\frac{2M}{b}x\right)^2dx,$$

але що

$$M_1=\frac{Hh}{2}-M,$$

то

$$V=\frac{1}{2EJ_0}\int_0^b\left(\frac{Hh}{2}-M\right)^2\left(1-\frac{2x}{b}\right)^2dx-\frac{2}{2EJ_1}\int_0^h\left(\frac{H}{2}x-M\right)^2dx+$$

$$+\frac{1}{2EJ_2}\int_0^b\left(M-\frac{2M}{b}x\right)^2dx;$$

$$\frac{dV}{dM}=-\frac{1}{EJ_0}\int_0^b\left(\frac{Hh}{2}-M\right)\left(1-\frac{2x}{b}\right)^2dx-\frac{2}{EJ_1}\int_0^h\left(\frac{H}{2}x-M\right)dx+$$

$$+\frac{1}{EJ_2}\int_0^b\left(1-\frac{2x}{b}\right)^2M\,dx-0;$$

$$-\left(\frac{\frac{Hh}{2}-M}{EJ_0}\right)\frac{b}{3}-\frac{Hh^2}{2EJ_1}+\frac{2Mh}{EJ_1}+\frac{Mb}{3EJ_2}=0;$$

звідси знаходимо для M попередню вартість [5].

413. Визначте реактивні моменти для рами, змальованої на рис. 390. Верхню розпинку можна вважати за абсолютно штивну.

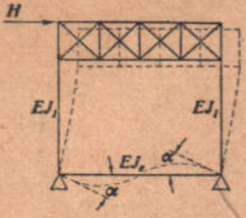


Рис. 390

Розв'язання. Підстановивши в результат попередньої задачі $J_2=\infty$, знаходимо:

$$M=\frac{H\left(\frac{hb}{6EJ_0}+\frac{h^2}{2EJ_1}\right)}{\left(\frac{b}{3EJ_0}+\frac{2h}{FJ_1}\right)};\quad M_1=\frac{Hh}{2}-M.$$

414. Суставну раму *ABCD*, зложену з восьмох стрижнів однакового попереччя, обтяжено силою *P*. Знайдіть зусилля в стрижнях (рис. 391).

Розв'язання. Приклавши принцип найменшої роботи, знайдемо для зусилля *X* у стрижні *BC* такий вираз:

$$X=-\frac{(1+2\sqrt{2})\,P}{8(1+\sqrt{2})}.$$

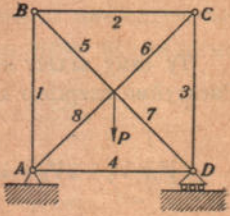


Рис. 391

415. Три стрижні однакового попереччя злучено одного з одним у точках *A* й *C* суставами, а в *B* — штивно. Знайдіть згинний момент у вузлі *B* й осідання точки *B* від чину сили *P* (рис. 392). Дослідіть вплив кута α.

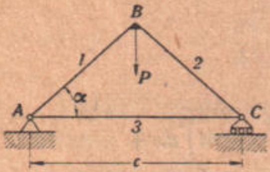


Рис. 392

Розв'язання. Нехай *X* буде розтяжне зусилля в стяглі *AC*, тоді потенційна енергія системи буде:

$$V=\frac{X^2c}{2EF}+\int\limits_0^{\frac{c}{2\cos\alpha}}\frac{\left[X\sin\alpha-\frac{P}{2}\cos\alpha\right]^2x^2dx}{EF}+$$

$$+\frac{\left[X\cos\alpha+\frac{P}{2}\sin\alpha\right]^2\frac{c}{2\cos\alpha}}{EF}.$$

Склавши рівнання $\frac{dV}{dX}=0$, одержимо:

$$X=\frac{\frac{\mathrm{tg}\alpha.c^2}{24\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha.r^2}{2}}{\frac{c^2\mathrm{tg}^2\alpha}{12\cos\alpha}+r^2+r^2\cos\alpha}\cdot P.$$

Момент у вузлі B дорівнюватиме:

$$M=\frac{Pc}{4}-X\frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{Pc}{4}\,\frac{1}{\cos\alpha+\frac{c^2\operatorname{tg}^2\alpha}{12r^2(1+\cos^2\alpha)}}.$$

Тут літерою r позначено радіюс інерції поперечча.

416. Стрижні AB й BC однакового поперечча мають у вузлі B штивне злучення, а в точках A й C — сустави. Знайдіть опорні реакції від чину сили P й осідання точки B (рис. 393). Порівняйте з тим результатом, що його одержується, коли в B є сустав.

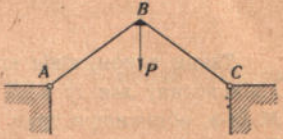


Рис. 393

Розв'язання. Вартість розпору одержимо тоді, коли припустимо в розв'язанні попередньої задачі, що поперечча стягля AC безмежно велике, або, однаково, вважаючи стягель за нерозтяжний.

417. Горизонтальний стрижень BC, що обтяжений рівномірно розподіленим обтяженням, злучено в C суставом, а в B — штивно стрижнями CD й AB. Знайдіть згинний момент у B (рис. 394).

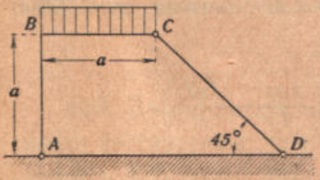


Рис. 394

Розв'язання. Зусилля в стрижні CD можна знайти з умов статики:

$$M_B=-\frac{Pa}{4}, \text{ де } P=qa.$$

Як зміниться M_B, коли в C матимемо штивне злучення?

418. Розрахуйте підсилковий трям, припустивши, що розміри тряму, стяглів і стояків завдано (рис. 395).

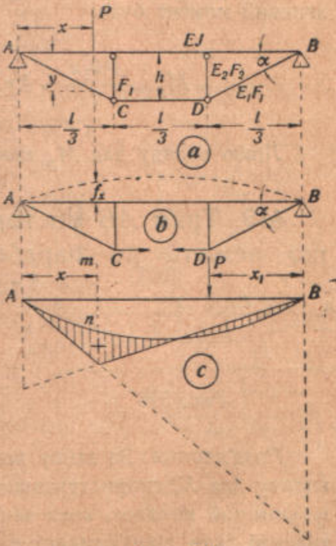


Рис. 395

Розв'язання. За зайву невідому візьмім натяг X стягля CD. Збудуймо лінію впливу для цього натягу. За другий стан візьмім випадок, змальований на рис. 395b, коли в C й D чинять дві рівні й прямопротилежні сили, рівні одиниці. Знайдім для цього другого стану вгин тряму AB (на трям чинитимуть тиски стояків, рівні $\operatorname{tg} \alpha . 1$) і зближення δ точок C й D. Приклавши теорему Максвела, знайдемо:

$$-Pf_x + X\delta = -1 . \frac{X \frac{l}{3}}{E_1 F};$$

звідси:

$$X = \frac{Pf_x}{\delta + \frac{l}{3E_1F}} = \frac{Pf_x}{k}.$$

Таким чином, лінія вгину тряму AB, відповідна до другого стану, буде за лінію впливу для зусилля X. Вгини f_x найзручніше знайти графічно або способом Mohr-а, обтяживши трям уявним обтяженням, що міниться за законом трапезу. Щождо δ, то його знайдемо, приклавши теорему Кастіліяно. У нашому випадку:

$$\delta = \frac{1.5h^2 l}{9EJ} + \frac{2.1.l}{3E_1F_1 \cos^3 \alpha} + \frac{2h \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_2F_2}.$$

Знайшовши натяг X, легко збудувати лінію впливу для моменту в довільному поперечні тряму. Для поперечня mn на віддалі x від лівого кінця (рис. 395 *c*) згинний момент буде:

$$M_x = \frac{Px_1x}{l} - Xy = \frac{Px_1x}{l} - \frac{Pf_xy}{k} = P\left(\frac{x_1x}{l} - \frac{f_xy}{k}\right).$$

Лінію впливу для M_x змальовано на рис. 395 *c*.

419. Трям *AB* мостового зводу підсилено системою стяглів, що лежать по параболі, й системою рівновіддалених один від одного вертикальних стояків. Збудуйте лінію впливу для згинного моменту в якомунебудь поперечні тряму *AB* (рис. 396).

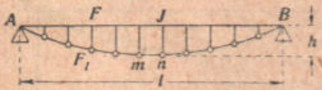


Рис. 396

Розв'язання. За зайву невідому візьмім натяг X стягля mn. Збудуймо лінію впливу для X, скориставшись теоремою Максвела. За другий стан системи візьмім той випадок, коли замість стягля mn прикладено дві рівні й прямопротилежні сили, рівні одиниці; тоді, скориставшись тою формулою, що її одержано для гинкої нитки, знайдемо, що при n панелях стискне зусилля в кожному стояку буде:

$$S = \frac{8h\ 1}{ln}.$$

Коли стояків багато, то можна вважати, що трям обтяжено рівномірно розподіленим обтяженням

$$q = \frac{8h.1}{ln} : \frac{l}{n} = \frac{8h.1}{l^2},$$

що відповідає умовам рівноваги гинкої нитки.

Визначмо зігнуту вісь тряму *AB* від цього обтяження й зближення δ точок mn.

Щоб визначити частину зближення δ', зумовлену згином тряму, прикладім Кастіліянову теорему; тоді

$$\delta' = \frac{8h^2 l}{15EJ} \cdot 1.$$

Зближення від розтягу стяглів при малій вартості відношення $\frac{h}{l}$ можна покласти рівним

$$\delta'' = \frac{1.l\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{EF_1}.$$

Зближення від стиску тряму буде:

$$\delta''' = \frac{1.l}{EF}.$$

Приклавши теорему Максвела, знайдемо:

$$X(\delta' + \delta'' + \delta''') - Pf_x = \frac{Xl}{nEF_1}.$$

420. Знайдіть зусилля в стрижні *CD* від рівномірно розподіленого обтяження, що лежить на поперечному трямі (*AB*) (рис. 397).

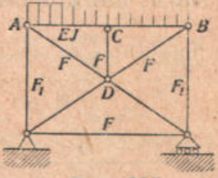


Рис. 397

421. Знайдіть розпір *H* від чину на раму *ABCD* вертикальних сил P_1 (рис. 398).

422. Знехтувавши стиск стрижнів, збудуйте лінію впливу для зусиль у *CE* й *ED* (рис. 399).

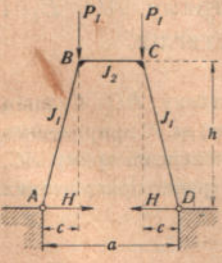


Рис. 398

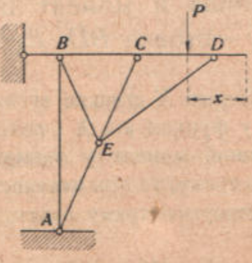


Рис. 399

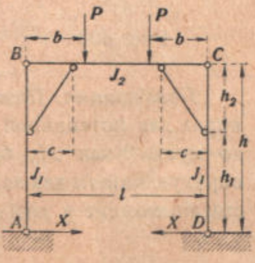


Рис. 400

423. Розрахуйте трям *BC* для мостового зводу (рис. 400).

Відповідь. За зайву невідому беремо розпір X; тоді, нехтуючи стиском, одержуємо:

$$X = \frac{P}{2} \frac{b(l-b) - \frac{c^2}{3}}{\frac{h_1^2}{8}\frac{J_2}{J_1} + h\left(\frac{l}{2} + \frac{2c}{3}\right)}.$$

Скориставшись теоремою Максвела, збудуйте лінію впливу для X при переміщенні тягара по тряму BC.

424. Скориставшись теоремою Максвела, збудуйте лінію впливу для згинного моменту в попереччі mn (рис. 401).

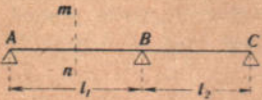


Рис. 401

425. Збудуйте лінії впливу для опорних моментів тряму з закріпленими кінцями.

426. Збудуйте лінії впливу для опорних реакцій трипрогінного нерозрізного тряму.

427. Збудуйте лінію впливу для розпору X мостового зводу $ABCD$ (рис. 402).

Рис. 402

428. Розрахуйте, скориставшись принципом найменшої роботи, підсилковий трям, змальований на рис. 403. Стяглі прикріплено до тряму AC з ексцентриситетом, і через це на кінцях виникає якийсь згинний момент. E_0, F_0 і J_0 є модуль, площа й момент інерції тряму AC; E_1 і F_1 — стояка BD; E_2 й J_2 — стяглів.

Рис. 403

Розв'язання. Позначмо літерою X стискне зусилля в стояку BD. Складім вираз для потенційної енергії у функції від X і похідну від неї за X прирівняймо до нуля. Коли M_0 буде згинний момент у якомунебудь поперечні тряму AC, вирахуваний як для звичайного тряму, то при наявності ексцентрично прикріплених стяглів момент у довільному поперечні тряму буде:

$$M = M_0 - \frac{X}{2}x - \frac{X}{2}\frac{c}{h}e.$$

Вираз для потенційної енерґії у випадку симетричного обтяження буде:

$$V=\underset{\text{(тряму)}}{V_0}+\underset{\text{(стояка)}}{V_1}+\underset{\text{(стягля)}}{V_2}=\frac{2}{2E_0J_0}\int_0^c\left[M_0-\frac{X}{2}x-\frac{Xce}{2h}\right]^2dx+$$

$$+\frac{2}{2E_0F_0}\int_0^c\left[\frac{Xc}{2h}\right]^2dx+\frac{1}{2E_1F_1}\int_0^h X^2dx+\frac{2}{2E_2F_2}\int_0^{\frac{c}{\sin\alpha}}\left[\frac{X}{2\cos\alpha}\right]^2dx.$$

$$\frac{dV}{dX}=\frac{2}{E_0J_0}\int_0^c\left[M_0-\frac{X}{2}x-\frac{Xce}{2h}\right]\left[-\frac{x}{2}-\frac{ce}{2h}\right]dx+\frac{2}{E_0F_0}\int_0^c\left(\frac{Xc}{2h}\right)\left(\frac{c}{2h}\right)dx+$$

$$+\frac{1}{E_1F_1}\int_0^h Xdx+\frac{2}{E_2F_2}\int_0^{\frac{c}{\sin\alpha}}\left(\frac{X}{2\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right)dx=0;$$

отже:

$$X=\frac{\int_0^c M_0\left(x+\frac{ce}{h}\right)dx}{\frac{c^3}{6}\left[1+\frac{3J_0}{F_0h^2}+\frac{6hE_0J_0}{c^3E_1F_1}+\frac{3E_0F_0}{E_2F_2c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)\right)}. \qquad [1]$$

Коли в знаменнику позначити ті члени, що не залежать від ексцентриситета e, літерою μ, то одержимо:

$$X=\frac{\int_0^c M_0\left(x+\frac{ce}{h}\right)dx}{\frac{c^3}{6}\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)\right]}. \qquad [1a]:$$

Коли $e=0$, то матимемо вираз для звичайного підсилкового тряму, а коли $\mu=1$ то одержимо вираз для тряму на трьох непружних опорах.

Коли обтяження несиметричне, то інтеґраля в числівнику поділиться на два:

$$X=\frac{\frac{1}{2}\int_0^c M_0'\left(x_1+\frac{ec}{h}\right)dx_1+\frac{1}{2}\int_0^c M_0''\left(x_2+\frac{ec}{h}\right)dx_2}{\frac{c^3}{h}\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)\right]}. \qquad [2]$$

Щоб зменшити вплив згинного моменту на трям, можна дати штучний натяг підсилкові. Припустім, що за допомогою якогось приладу можна збільшити довжину стояка на δ *см*; тоді, прирівнявши похідну від потенційної енерґії за X до величини δ, знайдемо:

$$X=\frac{\delta E_0J_0}{\frac{c^3}{6}\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)\right]}. \qquad [3$$

429. Доберіть поперечні розміри підсилкового тряму попередньої задачі, коли довжина $l=2c=10$ *см*, $h=1{,}5$ *м*, трям обтяжено рівномірним обтяженням $p=2{,}4$ *т/м*, всю систему треба зробити з заліза $E=2.10^6$ *кг/см*^{2}.

Розв'язання. Для завданого обтяження маємо:

$$\int_0^c M_0\left(x+\frac{ce}{h}\right)dx=\int_0^c\left[pcx\left(x+\frac{ce}{h}\right)-\frac{px^2}{2}\left(x+\frac{ce}{h}\right)\right]dx=\frac{pc^4}{6}\left(\frac{5}{4}+\frac{2e}{h}\right)$$

і вираз [1*a*] набуде такого вигляду:

$$X=\frac{pc\left(\frac{5}{4}+\frac{2e}{h}\right)}{\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)}. \qquad [4]$$

Щоб орієнтуватись у виборі ексцентриситета e й поперечча тряму, нарисуймо найневигіднішу лінію моментів (рис. 404). Найбільший згинний момент для тряму на двох опорах з віддаллю c між опорами при даному обтяженні буде:

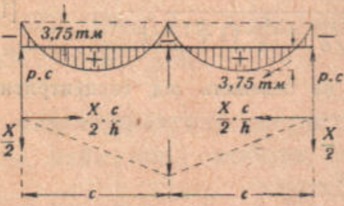


Рис. 404

$$M=\frac{1}{8}\cdot 2{,}4.5^2=7{,}5\ тм.$$

Зробивши так, щоб від'ємний момент на опорі дорівнював додатному по середині прогону, одержимо для найбільшого моменту вартість:

$$M_{max}=\frac{1}{2}\cdot 7{,}5=3{,}75\ тм,$$

і тоді момент, завдяки ексцентрично прикріпленому стяглеві, буде:

$$M=-3{,}75\ тм.$$

Відповідну вартість сили X визначимо з рівняння:

$$pc^2-\frac{pc^2}{2}-\frac{X}{2}c=0;$$

звідси:

$$X=pc=12\ т;$$

при цьому та сила, що стискає трям, буде:

$$\frac{X}{2}\,\frac{c}{h}=\frac{12}{2}\,\frac{5}{1{,}5}=20\ т.$$

Потрібний ексцентриситет дорівнює:

$$e=\frac{M}{20}=\frac{3{,}75}{20}=0{,}19\ \text{м}.$$

Коли припустити, що міцний опір матеріялу 1000 $кг/см^2$, то можна взяти для тряму профіль

$$J_0=8430\ см^4 \quad \text{і} \quad F_0=67{,}9\ см^2$$

для стояків і стяглів:

$$F_1=F_2=25\ см^2;$$

тоді

$$\mu=1+\frac{3J_0}{h^2F_0}+\frac{6hE_0J_0}{c^3E_1F_1}+\frac{3E_0J_0}{E_2F_2c^2\sin\alpha\cos^2\alpha}=1{,}07$$

і справжня величина

$$X=\frac{pc\left(\frac{5}{4}+\frac{2e}{h}\right)}{\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)}=12{,}04\ т,$$

при цьому момент на опорах буде:

$$M_0=\frac{X}{2}\,\frac{c}{h}\,e=-\frac{12{,}04}{2}\,\frac{5}{1{,}5}\cdot 0{,}19=-3{,}81\ тм.$$

Момент по середині тряму

$$M_{сер}=\frac{1}{8}\cdot 2{,}4.10^2-\frac{12{,}04}{2}\cdot 5-3{,}81=-3{,}91\ тм.$$

Найбільша напруга в трямі буде:

$$\frac{M_{сер}}{W_0}+\frac{X}{2}\,\frac{c}{h}\,\frac{1}{F_0}=\frac{391000}{602}+\frac{20100}{67{,}9}=949 кг/см^2.$$

Для звичайного підсилкового тряму без ексцентриситета найвигіднішу лінію моментів (тобто ту лінію, що для неї найбільша додатна вартість згинного моменту дорівнює абсолютною вартістю моментові по середині прогону тряму), змальовано на рис. 405. Візьмім трям із профілем:

$$J_0=10870\ см^4, \quad F_0=77\ см^2;$$

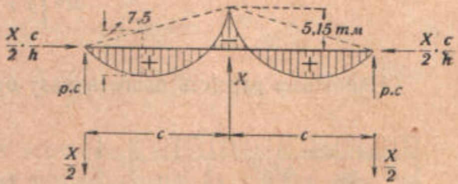


Рис. 405

стояки й стяглі

$$F_1=F_2=20\ см^2;\quad \mu=1{,}088;\quad X=\frac{5}{4}\,\frac{pc}{\mu}=13{,}8\ т.$$

Момент по середині тряму:

$$M_{сер}=30-\frac{13{,}8}{2}\cdot 5=-4{,}5\ тм,$$

отже, для добраного нумеру тряму момент по середині не відповідає найвигіднішому, і найбільший додатний момент буде більший за 5,15 *тм*. Подовжна стискна сила буде:

$$\frac{X}{2}\,\frac{c}{h}=23\ m,$$

отже, напруга

$$\frac{515000}{725}+\frac{23000}{77}=712+299=1011\ кг/см^2.$$

430. Збудуйте лінію впливу зусилля X у стояку підсилкового тряму, змальованого на рис. 403.

Розв'язання. Припустім, що трям обтяжено симетрично двома зосередженими силами на віддалі a від кінців тряму; тоді маємо:

$$\int\limits_0^c M\left(x+\frac{ec}{h}\right)dx=\int\limits_0^a Px\left(x+\frac{ec}{h}\right)dx+\int\limits_0^c Pa\left(x+\frac{ec}{h}\right)dx=$$

$$=\frac{Pa}{6}\left(3c^2-a^2+\frac{6ec^2}{h}-\frac{3aec}{h}\right).$$

Щоб одержати лінію впливу, треба лише замість a змінну величину x і вищезазначений вираз поділити на два; тоді, на основі розв'язання задачі 428, одержимо для X такий вираз:

$$X=\frac{Px\left(3c^2+\frac{bec^2}{h}-x^2-\frac{3ec}{h}x\right)}{2c^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)\right]}. \qquad [5]$$

Найбільша вартість цього виразу буде, коли $x=c$.

$$X_c=P\,\frac{1-\frac{3}{2}\,\frac{e}{h}}{\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)}. \qquad [5a]$$

Ту саму лінію впливу зручно будувати, користуючись теоремою Максвела.

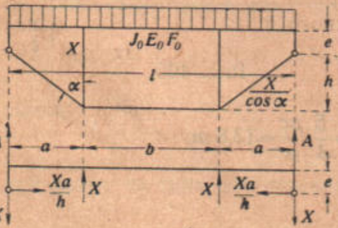


Рис. 406

431. Знайдіть зусилля X у підсилковому трямі з двома стояками (рис. 406).

Розв'язання. При симетричному обтяженні тряму

$$V=V_0+V_1+V_2=\frac{1}{2E_0J_0}\left[2\int_0^a\left(M_0-Xx-X\frac{ae}{h}\right)^2dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^b\left(M_0'-Xa-\frac{Xae}{h}\right)^2dx\right]+\frac{1}{2E_0F_0}\int_0^l\left(X\frac{a}{h}\right)^2dx+\frac{2}{2E_1F_1}\int_0^h X^2dx+$$

$$+\frac{2}{2E_2F_2}\int_0^{\frac{a}{\sin\alpha}}\left(\frac{X}{\cos\alpha}\right)^2dx+\frac{1}{2E_2F_2}\int_0^b\left(X\frac{a}{h}\right)^2dx.$$

$$\frac{dV}{dX}=\frac{1}{E_0J_0}\left\{2\int_0^a\left[M_0-Xx-\frac{Xae}{h}\right]\left[-x-\frac{ae}{h}\right]dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^b\left[M_0'-Xa-\frac{Xae}{h}\right]\left[-a-\frac{ae}{h}\right]dx\right\}+\frac{1}{E_0F_0}\int_0^l\left(X\frac{a}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)dx+$$

$$+\frac{2}{E_1F_1}\int_0^h Xdx+\frac{2}{E_2F_2}\int_0^{\frac{a}{\sin\alpha}}\left(\frac{X}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)dx+\frac{1}{E_2F_2}\int_0^l\left(X\frac{a}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)dx=0.$$

$$X=\frac{2\int_0^a M_0\left(x+\frac{ae}{h}\right)dx+\left(a+\frac{ae}{h}\right)\int_0^b M_0'dx}{\frac{2}{3}a^3\left[1+\frac{3}{2}\frac{J_0l}{F_0ah^2}+\frac{3E_0J_0h}{E_1F_1a^3}+\frac{3E_0J_0}{E_2F_2a^2\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{3E_0J_0b}{2E_2F_2ah^2}+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3b}{2a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}\cdot \qquad [6]$$

Позначивши суму перших п'ятьох членів у знаменнику літерою μ, одержимо:

$$X=\frac{2\int_0^a M_0\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx+a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int_0^b M_0'dx}{\frac{2}{3}a^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3}{2}\frac{b}{a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \qquad [6a]$$

Поклавши $e=0$, одержимо вираз для X звичайного підсилкового тряму; поклавши $\mu=1$, одержимо вираз для тряму на чотирьох штивних опорах при симетричному обтяженні.

Для несиметричного обтяження треба першу інтеґралю в числівнику поділити на два:

$$X=\frac{\int_0^a M_0''\left(x+\frac{ae}{h}\right)dx+\int_0^a M_0'''\left(x+\frac{ae}{h}\right)dx+a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int_0^a M'dx}{\frac{2}{3}a^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3}{2}\frac{b}{a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \qquad [7]$$

Для тряму, рівномірно обтяженого суцільним обтяженням інтенсивности q *кгм*, числівник у виразі [6a] буде:

$$2\int\limits_0^a M_0\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx=2\int\limits_0^a\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^a\left(\frac{ql}{2}x^2+\frac{qleax}{2h}-\frac{qx^3}{2}-\frac{qeax^2}{2h}\right)dx=\frac{qla^3}{3}-\frac{qlea^3}{2h}-\frac{qa^4}{4}-$$

$$-\frac{qea^4}{3h}\cdot a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int\limits_0^b M'_0 dx=a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int\limits_0^{l-a}\left(\frac{ql}{2}x-\frac{qx^2}{2}\right)dx=$$

$$=a\left(1+\frac{e}{h}\right)\left[\frac{ql}{4}(l-a)^2-\frac{q}{6}(l-a)^3-\frac{qla^2}{4}+\frac{qa^3}{6}\right].$$

У сумі обидві інтеґралі дають:

$$\frac{qa}{12}\left[l^3\left(1+\frac{e}{h}\right)+a^3-2a^2l\right];$$

отже:

$$X=\frac{q\left[l^3\left(1+\frac{e}{h}\right)+a^3-2a^2l\right]}{8a^2\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3}{2}\,\frac{b}{a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \qquad [8]$$

При $b=a$ маємо:

$$X=\frac{qa}{8}\cdot\frac{22+27\frac{e}{h}}{\mu+\frac{3}{2}\left(1+\frac{4e}{h}+\frac{3e^2}{h^2}\right)}. \qquad [8a]$$

Найвигідніша довжина панель для розглядуваного тряму буде:

$$a=b=\frac{1}{3}l;$$

тоді можна досягти того, щоб у всіх панелях величини додатних і від'ємних моментів були однакові; ці моменти дорівнюватимуть половині згинного моменту для вільнолежного тряму з прогоном $a=\frac{l}{3}$.

432. Доведіть, що, коли в розглянутому вище підсилковому трямі вкоротити горизонтального стягля на δ_0, то в ньому з'явиться зусилля X_0, що визначається такою формулою:

$$X=\frac{\delta_0\frac{a^2}{h^2}E_0J_0}{\frac{2}{3}a^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3b}{3a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}.$$

433. Збудуйте лінію впливу для зусиль X у стояках підсилкового тряму, змальованого на рис. 406.

Розв'язання. Для цього найзручніше припустити, що трям обтяжено симетрично двома зосередженими силами; тод інтеґралі у формулі [6a] будуть:

$$2\int_0^a M_0\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx=2\int_0^\zeta Px\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx+2\int_\zeta^a P\zeta\left(x+\frac{ea}{h}\right)dx=$$

$$=\frac{P\zeta}{3}\left(3a^2+\frac{3ea^2}{h}-\zeta^2-\frac{3ea}{h}\zeta\right);$$

$$\int_0^b M_0' dx=\int_0^b P\zeta dx=Pb\zeta.$$

(Літерою ζ позначено віддаль двох симетрично прикладених сил від відповідних кінців тряму). Отже, числівник у виразі [6a] буде:

$$\frac{P\zeta}{3}\left(3a^2-\zeta^2+\frac{6ea^2}{h}-\frac{3ea}{h}\zeta+3ab+\frac{3abe}{h}\right);$$

тоді:

$$X=P\frac{\zeta\left(3a^2-\zeta^2+3ab+\frac{6ea^2}{h}+\frac{3abe}{h}-\frac{3ae}{h}\right)\zeta}{2a^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{a}\left(1+\frac{b}{h}\right)^2\right]},$$

очевидно, коли $\zeta=a$, $\mu=1$ і $e=0$, то

$$X=P.$$

Щоб одержати рівняння для лінії впливу в границях від нуля до a, треба щойно одержаний вираз для X поділити на 2. Поклавши $2a+b=l$ і підстановивши замість ζ змінну величину x, одержимо:

$$X=P\frac{x\left[3a^2-x^2+3ab+\frac{3ae}{h}(l-x)\right]}{4a^3\left[\mu+\frac{3e}{h}\left(1+\frac{e}{h}\right)+\frac{3}{2}\ \frac{b}{a}1\left(+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \quad [9]$$

434. Розрахуйте трям AD, змальований на рис. 407.

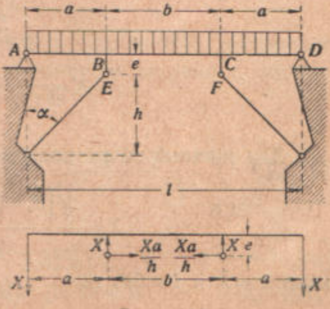


Рис. 407

Розв'язання. Позначивши літерою X стискні зусилля в проміжних стояках BE й CF і знехтувавши їхній стиск, одержимо при симетричному обтяженні:

$$V=V_0+V_1=\frac{1}{2E_0J_0}\left[2\int\limits_0^a(M_0-Xx)^2dx+\int\limits_0^b\left(M_0'-Xa-X\frac{ae}{h}\right)^2dx\right]+$$

$$+\frac{1}{2E_0F_0}\int\limits_0^b\left(X\frac{a}{h}\right)^2dx+\frac{1}{2E_1F_1}\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\alpha}}\left(\frac{X}{\cos\alpha}\right)^2dx;$$

$$\frac{dV}{dX}=\frac{1}{E_0J_0}\left[2\int\limits_0^a(M_0-Xx)\,(-x)\,dx+\int\limits_0^b\left(M_0'-Xa-X\frac{ae}{h}\right)\left(a-\frac{ae}{h}\right)dx\right]+$$

$$+\frac{1}{E_0F_0}\int\limits_0^b\left(X\frac{a}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)dx+\frac{1}{E_1F_1}\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\alpha}}\left(\frac{X}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)dx=0.$$

Коли $E_1=E_0$, то одержимо:

$$-\frac{2}{J_0}\int\limits_0^a M_0xdx-\frac{a\left(1+\frac{e}{h}\right)}{J_0}\int\limits_0^b M_0'dx+\frac{2}{J_0}\int\limits_0^a Xx^2dx+$$

$$+\frac{a^2\left(1+\frac{e}{h}\right)^2}{J_0}\int\limits_0^b Xdx+\frac{a^2}{F_0h^2}\int\limits_0^b Xdx+\frac{1}{F_1\cos^2\alpha}\int\limits_0^{\frac{a}{\sin\alpha}}Xdx=0;$$

звідси:

$$X=\frac{2\int\limits_0^a M_0xdx+a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int\limits_0^b M_0'dx}{\frac{2}{3}a^3\left[1+\frac{3bJ_0}{2h^2aF_0}+\frac{3J_0}{a^2\sin\alpha\cos^2\alpha F_1}+\frac{3b}{2a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \qquad [10]$$

Позначивши три перші члени в знаменнику літерою μ, одержимо:

$$X=\frac{2\int\limits_0^a M_0xdx+a\left(1+\frac{e}{h}\right)\int\limits_0^b M_0'dx}{\frac{2}{3}a^3\left[\mu+\frac{3b}{2a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}. \qquad [10a]$$

Для рівномірно розподіленого обтяження q *кг/м* цей вираз буде:

$$X=\frac{q\left[l^3-2a^2l+a^3+\frac{e}{h}\left(l^3-6a^2l+4a^3\right)\right]}{8a^2\left[\mu+\frac{3b}{2a}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2\right]}; \qquad [11]$$

коли $a=b$ й $l=3a$, то

$$X=\frac{qa}{8}\,\frac{22+13\frac{e}{h}}{\mu+\frac{3}{2}\left(1+\frac{e}{h}\right)^2}. \qquad [11a]$$

435. Знайдіть зусилля X у стяговині (струні), змальованій на рис. 408.

Розв'язання. Згинний момент, що чинить натрям, можна зменшити, закріпивши стяговину CD з ексцентриситетом e (M_0 є згинний момент для звичайного тряму). Довжину стяговини вважаємо за рівну довжині тряму.

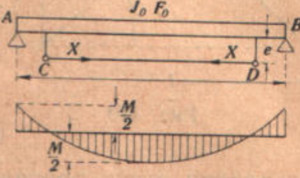


Рис. 408

$$V = V_0 + V_1 = \frac{1}{2E_0J_0}\int_0^l (M_0 - Xe)^2dx + \frac{1}{2E_0F_0} + \int_0^l X^2dx + \frac{1}{2E_1F_1}\int_0^l X^2dx;$$

$$\frac{dV}{dX} = -\frac{1}{E_0J_0}\int_0^l M_0e\,dx + \frac{1}{E_0J_0}\int_0^l Xe^2dx + \frac{1}{E_0F_0}\int_0^l Xdx + \frac{1}{E_1F_1}\int_0^l Xdx = 0,$$

або, поклавши $E_0 = E_1$, одержимо:

$$-\frac{1}{J_0}\int_0^l M_0e\,dx + X\frac{e^2l}{J_0} + \frac{Xl}{F_0} + \frac{Xl}{F_1} = 0;$$

звідси:

$$X = \frac{e\int_0^l M_0dx}{l\left(e^2 + \frac{J_0}{F_0} + \frac{J_0}{F_1}\right)}; \qquad [12]$$

e можна добрати так, щоб найбільший додатний момент дорівнював від'ємному. Цього легко можна досягти, коли e завдано, за допомогою штучного натягу. Коли довжина стяговини зміняється на δ, то маємо натяг

$$X = \frac{\delta J_0}{l\left(e^2 + \frac{J_0}{F_0} + \frac{J_0}{F_1}\right)}. \qquad [13]$$

Рис. 409

436. Збудуйте лінію впливу для опорних реакцій зв'язня, зложеного з рівнобоких трикутників, коли довжини стрижнів і їхні поперечча ми знаємо (рис. 409).

437. Збудуйте лінію впливу для розпору двосуставного луку, коли розміри стрижнів завдано (рис. 410).

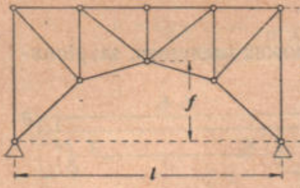


Рис. 410

438. Збудуйте лінії впливу для зусиль S_1, S_2 і S_3 в стяглях, що підтримують трям *abcd* зводу (рис. 411).

При розрахунку треба припустити, що стяглі можуть зазнавати лише розтяжних зусиль. Противага G забезпечує при довільному положенні тягара P розтяжне зусилля в стяглі *aO*; видовженням стяглів знехтуйте. У такому разі, коли сила P лежить у прогоні *bc*, треба розраховувати двопрогінний трям *abc*; коли ж сила P лежить на дільниці *cd*, то треба робити розрахунок для трипрогінного тряму *abcd*.

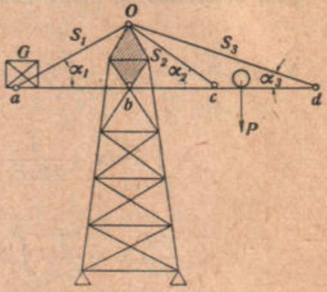


Рис. 411

РОЗДІЛ VIII

КРИВІ БРУСИ

439. Кривого залізного бруса квадратового попереччя $10\,см \times 10\,см$ з віссю, що становить $\frac{1}{4}$ кола, згинає вертикальна сила P (рис. 412). Знайдіть осідання точки B; $a = 2\,м$, $P = 500\,кг$. (Впливом подовжної сили нехтуємо).

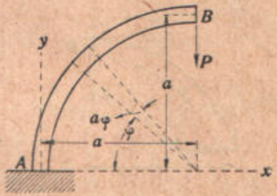


Рис. 412

Розв'язання.

$$\Delta y = -x_0 \int_0^s \frac{Mds}{EJ} + \int_0^s \frac{Mxds}{EJ}\,;\; ds = ad\varphi.$$

$$x = a\,(1 - \cos\varphi);\quad M = aP\cos\varphi.$$

$$\Delta y = -\frac{a^3P}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi + \frac{a^3P}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi)\cos\varphi d\varphi = -\frac{a^3P}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{a^3P}{EJ}\frac{\pi}{4};$$

$$\Delta x = \frac{a^3P}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi - \frac{a^3P}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{a^3P}{2EJ}.$$

440. Зберігаючи сталу ширину попереччя кривого бруса попередньої задачі, треба так зміняти його височину, щоб найбільша нормальна напруга від згинного моменту і від подовжної сили була однакова вздовж бруса. (Прикладіть лінійний закон розподілу напруг).

Розв'язання.

$$\frac{M}{W}+\frac{N}{F}=\text{const}; \quad \frac{aP\cos\varphi}{\frac{bh^2}{6}}+\frac{P\cos\varphi}{bh}=\text{const}.$$

441. Наскільки поменшає осідання точки B кривого бруса AB (рис. 412), коли кінець B підперти вертикальним дерев'яним брусом, що має поперечча $F_1=10\,см\times 10\,см$, а довжину $l=2\ м$?

Розв'язання. На брус передається зусилля X, що визначається з рівняння:

$$\frac{Xa}{E_1F_1}=\frac{a^3(P-X)}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4};$$

$$X\left[\frac{1}{E_1F_1}+\frac{\pi a^2}{4EJ}\right]=\frac{a^2P}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4};$$

$$X=\frac{\pi a^2P}{4\left(\frac{a^2\pi}{4}+\frac{EJ}{E_1F_1}\right.}.$$

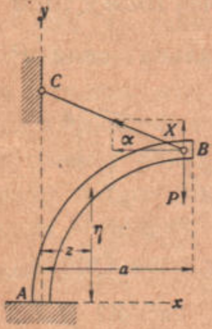


Рис. 413

442. Знайдіть угин кінця B кривого бруса попередніх розмірів, коли точку B прикріплено стяглем BC до стіни (рис. 413).

Розв'язання. Коли позначити літерою X зусилля в залізному стяглі BC, тоді кривий брус буде згинатись вертикальною силою $P-X\sin\alpha$ й горизонтальною силою $X\cos\alpha$. На основі відомих формул, знаходимо переміщення Δx і Δy від чину цих сил. Ці переміщення будуть такі:

$$\Delta x=\frac{a^3(P-X\sin\alpha)}{2EJ}-\frac{a^3X\cos\alpha\,(3\pi-8)}{4EJ};$$

$$\Delta y=-\frac{a^3(P-X\sin\alpha)}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{a^3X\cos\alpha}{2EJ}.$$

Прирівнявши проекцію цих переміщень на напрям стягля BC до видовження стягля $\delta l=\frac{Xa}{E\cos\alpha\,F_1}$, одержимо рівняння для знаходження X.

Для випадку горизонтального стягля $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$ одержимо рівняння:

$$\frac{a^3P}{2EJ}-\frac{a^3X(3\pi-8)}{4EJ}=\frac{Xa}{EF_1}.$$

Той самий результат легко одержати, коли прикладемо принцип найменшої роботи.

443. Обрисованого за дугою чверти кола кривого бруса AB однакового попереччя підтримує на кінці B горизонтальна розпинка CB, зв'язана суставом з брусом і стіною (рис. 414). Знайдіть величину зусилля в розпинці й небезпечне попереччя в кривому брусі, коли чинить вертикальна сила P.

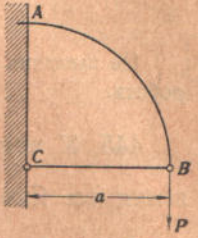


Рис. 414

Розв'язання. Скориставшись розв'язанням попередньої задачі, можемо скласти рівняння для визначення стискного зусилля X в розпинці BC:

$$\frac{Xa}{E_1F_1}=\frac{Pa^3}{2EJ}-\frac{Xa^3}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4};$$

звідси легко знайти невідому X.

Згинний момент у довільному попереччі mn буде:

$$M\varphi=Pa\,(1-\sin\varphi)-Xa\cos\varphi.$$

444. Кронштейна ABC зложено з дерев'яного тряму AB прямокутнього попереччя $20\,см\times30\,см$ і з кривого бруса BC жолобчастого попереччя № 18. Знайдіть найбільший згинний момент для тряму й кривого бруса, коли на трям чинитиме рівномірно розподілене обтяження $q=400\,кг/м$ (рис. 415). (При обчисленнях знехтувати чином подовжної сили на трям і кривий брус. Припустіть, що в B є сустав, а в A й C — абсолютне закріплення).

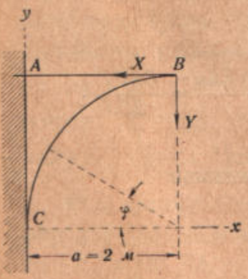


Рис. 415

Роз'вязання. Позначмо літерами X і Y горизонтальну й вертикальну складові від того зусилля, що його передає трям на кривого бруса в точці B. Переміщення кінця B від чину сили Y, на основі розв'язання задачі 439, будуть:

$$\Delta x'=\frac{a^3Y}{2EJ};\quad \Delta y'=-\frac{a^3Y}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Від сили X відповідні переміщення будуть:

$$\Delta x''=-\frac{a^3X}{EJ}\cdot\frac{(3\pi-8)}{4};\quad \Delta y''=\frac{a^3X}{2EJ}.$$

А що видовженням тряму ми нехтуємо, то одне з рівнянь буде:

$$\Delta x'+\Delta x''=0. \qquad [1]$$

Друге рівнання напишемо на основі того, що в точці B трям AB й кривий брус мають спільний угин; отже:

$$\frac{qa^4}{8E_1J_1}-\frac{Ya^3}{3E_1J_1}=-(\Delta y'+\Delta y''). \qquad [2]$$

Це завдання легко можна розв'язати, скористувавшись принципом найменшої роботи.

445. У ненапруженому стані пружину, яка має колову вісь, зімкнуто. Яке повинно бути граничне співвідношення $\frac{d}{r}$, якщо треба, щоб, коли кінці пружини розсунути на віддаль d, рівну діяметрові пружини, напруги не перевищували 2000 *кг/см*²? $E=2.10^6$ *кг/см*² (рис. 416).

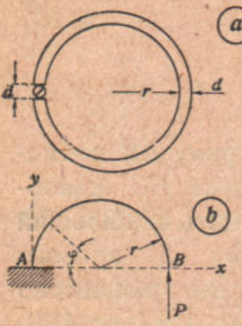


Рис. 416

Розв'язання. Вертикальне переміщення Δy кінця B від чину сили P (рис. 416*b*) визначимо за формулою:

$$\Delta y=2rP\int_0^\pi\frac{r^2(1+\cos\varphi)\,d\varphi}{EJ}-$$

$$-P\int_0^\pi\frac{r^2(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi)\,r\,d\varphi}{EJ}=\frac{3\pi r^3P}{2EJ}.$$

Величину сили P знайдемо, поклавши:

$$2\Delta y=d;$$

звідси:

$$P=\frac{EJd}{3\pi r^3}.$$

Найбільший згинний момент і найбільші напруги будуть на кінці A:

$$M_{max}=2Pr=\frac{2EJd}{3\pi r^2};$$

нехтуючи напругами від подовжної сили, знайдемо:

$$(p_n)_{max}=\frac{M}{W}=\frac{Ed^2}{3\pi r^2}.$$

Прирівнявши це до завданої напруги, знайдемо шукану вартість відношення $\frac{d}{r}$.

446. Кривого бруса, зложеного з півперсня і двох прямолінійних відтинків, обтяжено силами $\frac{P}{2}\cdot$ Знайдіть розсування кінців (рис. 417).

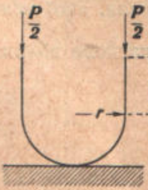


Рис. 417

447. Пружину зложено з колової частини і двох прямолінійних дільниць. Визначте прирости віддалей δ й δ_1 між обома гілками пружини від чину сил P (рис. 418).

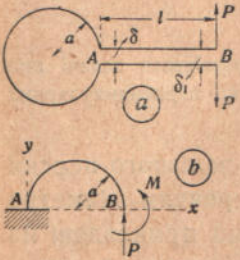


Рис. 418

Розв'язання. Треба розглянути переміщення й поворіт кінця B (рис. 418b) півокруглого кривого бруса AB, коли чинить сила P й пара $M = Pl$; очевидно, $2\Delta y = \delta$. Щоб знайти δ_1, треба до δ прилучити переміщення правих кінців прямолінійних дільниць пружини від згину й повороту цих дільниць.

448. Яку найбільшу силу можна зміряти динамометром, що має форму круглого персня $r = 10\,см$ з квадратовим попереччям $3\,см \times 3\,см$, коли найбільша допускна напруга $p_n = 7000\ кг/см^2$. Знайдіть зближення точок A, що відповідає цій максимальній напрузі (рис. 419).

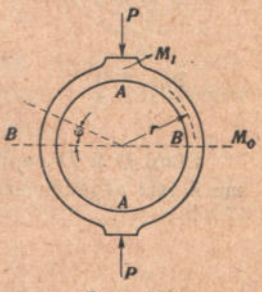


Рис. 419

Розв'язання. Позначивши літерою M_1 згинний момент у точках A й літерою M_0 — момент у B, матимемо: $M_1 = 0{,}318\,Pr$; $M_0 = -0{,}182\,Pr$; нехтуючи впливом подовжної сили, одержимо:

$$0{,}318\,Pr = 7000\,\frac{3.3^2}{6},$$

звідси:

$$P = \frac{7000.3^2}{2.10.0{,}318} = \sim 10\ т.$$

Зближення точок A дорівнює:

$$\frac{2Pr^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\right) = 0{,}149 \cdot \frac{Pr^3}{EJ}.$$

Зближення точок B дорівнює:

$$-\frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{4-\pi}{2\pi}\right) = -0{,}137\,\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Коли радіюс r не дуже великий проти поперечних розмірів (це якраз тут і трапилось), то на величину зближення точок A, A й B, B значно впливає подовжна сила, якої величина в будь-якому поперечці mn дорівнюватиме $N=\frac{P}{2}\cos\varphi$. Додаткове зближення точок A, A від подовжної сили можна приблизно визначити так:

$$2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Nd\varphi}{EF}\cos\varphi=\frac{aP}{EF}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{aP\pi}{4EF}\cdot$$

Докладніше див. Курс опору матеріялів, стор. 376.

Користуючися зазначеними формулами, легко можна розв'язати задачі про стиск персня у випадку чину стискних сил у двох взаємно перпендикулярних діяметрах.

449. Наскільки розійдуться кінці розрізаного залізного персня з радіюсом $r=10$ *см* і з сталим округлим попереччям діяметра $d=1$ *см* від чину сил P, що прикладені на кінцях горизонтального діяметра й спричиняються в небезпечному поперечці до напруги 2000 *кг/см*^{2} (рис. 420)?

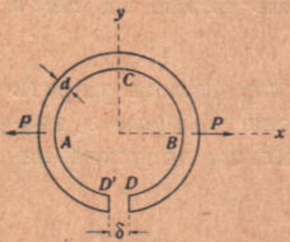


Рис. 420

Розв'язання. Вважаючи поперечча C за нерухоме, знайдемо, на основі розв'язання задачі 439, що горизонтальний діяметр AB від чину сил P видовжиться на величину:

$$\delta=2\cdot\frac{Pr^3}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{Pr^3\pi}{2EJ}. \qquad [1]$$

Кінці D й D', крім таких самих переміщень, як і поперечча A й B, дістають ще й такі переміщення, що залежать від повороту на кут φ попереччів A й B:

$$\varphi=\int_0^{\frac{r\pi}{2}}\frac{Mds}{EJ}=\frac{Pr^2}{EJ}. \qquad [2]$$

Горизонтальні переміщення кінців D й D', через поворіт на кут φ, очевидно, будуть:

$$\frac{Pr^2}{EJ}\cdot r\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{Pr^3}{EJ}.$$

Шукане розсування кінців D й D', на основі [1] і [2], буде:

$$\delta'=\frac{Pr^3}{EJ}\left(\frac{\pi}{2}+2\right).$$

Величину сили P легко знайти із завданої напруги; вона буде 19,6 *кг*.

Одержаний результат легко знайти на основі теореми Кастіліяно.

450. Бабу підіймають із прискоренням c за вухо, що має форму півперсня круглого поперечча. Радіус персня r. Знайдіть найбільшу напругу матеріялу. Важить баба Q (рис. 421).

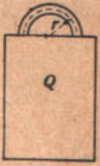


Рис. 421

451. Визначте напругу й деформації в округлому персні незмінного поперечча, коли чинить шість рівних і симетрично прикладених стискних сил P (рис. 422).

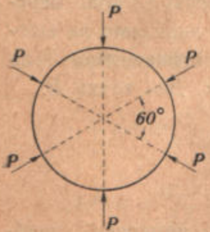


Рис. 422

Розв'язання. Скористувавшись розв'язанням задачі для персня, стиснутого двома рівними й прямопротилежними силами, можна в довільному поперечці знайти напруги від кожної пари взаємно протилежних сил. Щоб одержати результат чину шістьох сил, треба скористуватись „принципом додавання чину сил"·

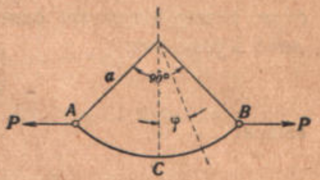


Рис. 423

452. Знайдіть вертикальне переміщення точки C кривого бруса незмінного поперечча, обрисованого за дугою кола, розтягнутого двома взаємно протилежними силами P (рис. 423). Порівняйте це переміщення зі зближенням точок A й B, коли чинить вертикальна сила P в точці C. Припускаємо, що точки A й B можуть переміщуватись лише в горизонтальному напрямі.

Розв'язання. Припустім, що поперечча C закріплено нерухомо; тоді вертикальне переміщення δ точок A й B знайдемо за відомими формулами. У цьому випадку:

$$M = Fa\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\delta = \frac{Pa^3}{EJ\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\varphi - \frac{Pa^3}{EJ}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2 - \pi}{8}\cdot\frac{Pa^3}{EJ}.$$

Приклавши в поперечці C вертикальну силу P й оперши бруса в точках A й B (одна з цих опор рухома), одержимо, за теоремою Максвела, для зближення точок A й B величину δ.

453. Знаючи вертикальні переміщення точок півкруглого луку від чину сил P, збудуйте інфлюентну лінію для розпору цього луку від зосередженої вертикальної сили (попереччя луку незмінне) (рис. 424).

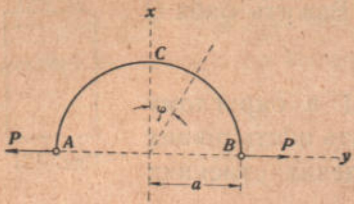


Рис. 424

Розв'язання. Вважаємо половину луку BC за нібито закріплену в попереччі C; тоді переміщення Δx окремих точок знайдемо за відомими формулами. Ординати інфлюентної лінії розпору пропорційні до $-\Delta x$. Для точки B:

$$\Delta x = \frac{a^3P}{2EJ};\quad \Delta y = \frac{a^3P}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4},$$

отже, розпір від тягара одиниця, покладеного у вищезгаданому поперечці, знайдемо з рівняння:

$$H.2\cdot\frac{a^3P}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4} - 1\,\frac{a^3P}{2EJ} = 0;$$

звідси:

$$H = \frac{1}{\pi}.$$

454. Знайдіть напруги в ресорі, зложеній із двох кривих брусів (рис. 425). При виготовленні віддаль між кінцевими суставами для одного бруса помилково зроблено на 2 *мм* меншу від проєктованої довжини, і через це при складанні, щоб вставити прогоничі A й B, треба бруси трохи зігнути; бруси стальні квадратового поперечча 3 *см* × 3 *см*, $a = 60$ *см*.

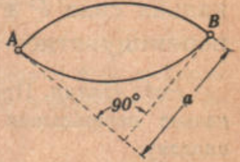


Рис. 425

Розв'язання. Позначмо літерою X ті зусилля, що передаються через сустави A й B. Складім вираз для потенційної енергії системи (енергія згину двох кривих брусів при чині сил X, спрямованих по AB).

Для визначення X матимемо рівняння: $\frac{dV}{dX} = 0{,}2$ *см.*

455. Доведіть, що в ресорі (рис. 426), зложеній із двох брусів, скривлених за дугою чверти кола, сустав B завжди переміщується в напрямі чинної сили P.

Розв'язання. Розгляньмо окремий випадок вертикальної сили. Позначивши літерами X і Y компоненти сили взаємочину між брусами в суставі B, дійдемо до схеми, змальованої на рис. 426*b*.

Переміщення точки B' будуть:

$$\Delta x' = -\frac{a^3(P-X)}{2EJ} - \frac{a^3Y}{EJ}\cdot\frac{(3\pi-8)}{4};$$

$$\Delta y' = \frac{a^3(P-X)}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{a^3Y}{2EJ}.$$

Переміщення точки B'' будуть:

$$\Delta x'' = \frac{a^3Y}{EJ}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{a^3X}{2EJ};$$

$$\Delta y'' = -\frac{a^3X}{EJ}\cdot\frac{(3\pi-8)}{4} + \frac{a^3Y}{2EJ}.$$

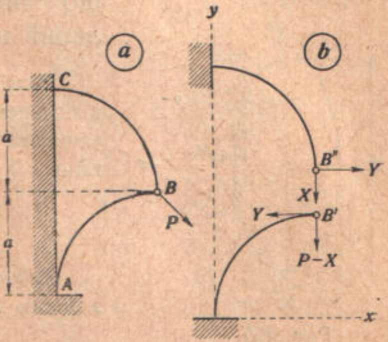


Рис. 426

Умови, щоб знайти X та Y, будуть такі: $\Delta y' = \Delta y''$; $\Delta x' = \Delta x''$.

$$-a^3(P-X)\frac{\pi}{4} + \frac{a^3Y}{2} = -a^3X\frac{(3\pi-8)}{4} + \frac{a^3Y}{2};\quad (P-X)\pi = X(3\pi-8);$$

$$X = P\frac{\pi}{4(\pi-2)}.$$

З умови $\Delta x' = \Delta x''$ одержимо:

$$\frac{P}{2} = Y(\pi-2);\quad Y = P\cdot\frac{1}{2(\pi-2)}.$$

Вставивши одержані вартості для X і Y у вирази для $\Delta x'$, знайдемо: $\Delta x' = 0$, отже, при чині вертикальної сили переміщення вертикальні.

Для вертикального переміщення одержуємо:

$$\Delta y' = \frac{Pa^3}{4EJ(\pi-2)}\left[1 - \frac{\pi}{4}(3\pi-8)\right].$$

Подібно до цього можна довести, що від чину горизонтальної сили точка B буде переміщуватись горизонтально:

$$\Delta x' = \frac{Pa^3}{4EJ(\pi-2)}\left[-1 + \frac{\pi}{4}(3\pi-8)\right].$$

При довільному напрямі сили ми можемо розкласти її на горизонтальну й вертикальну складові. Ті горизонтальне й вертикальне переміщення точки B, що виникають від цих складових, відносяться одне до одного, як проекції сили, отже, повне переміщення точки B зливається напрямом з силою P.

456. Знайдіть напруги й деформації в стінці труби, симетричного відносно осей x і y поперечча (рис. 427), при умові, що чинить середовий рівномірно розподілений по стінці тиск інтенсивности p.

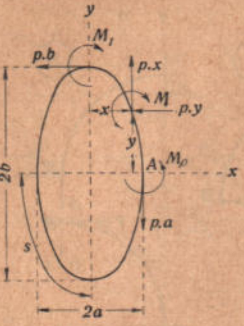


Рис. 427

Розв'язання. Позначивши літерами M_1 і M_0 моменти в поперечнях $x=0$ і $y=0$, знаходимо з умов рівноваги елемента між поперечням A й поперечням з координатами x і y такий вираз для згинного моменту:

$$M=M_0-\frac{pa^2}{2}+\frac{px^2}{2}+\frac{py^2}{2}. \qquad [1]$$

Зміну кута між двома дотичними, рівнобіжними з осями x і y, визначає формула:

$$\int_0^s \frac{Mds}{EJ}.$$

Ми припускаємо, що грубина трубки незмінна; отже, через симетрію поперечча,

$$\int_0^s Mds=0;$$

підстановивши вартість моменту [1], знайдемо:

$$M_0=\frac{pa^2}{2}-\frac{pJ_x}{2s}-\frac{pJ_y}{2s}; \quad M_1=M_0-\frac{p}{2}(a^2-b^2).$$

Тут

$$J_x=\int_0^s x^2ds; \quad J_y=\int_0^s y^2ds.$$

Розгляньмо окремий випадок поперечча, зложеного з двох півкіл і двох прямолінійних дільниць (рис. 428).

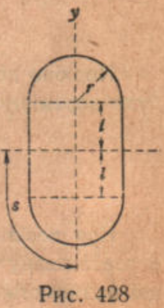


Рис. 428

Для цього випадку:

$$a=r,\ b=r+l; \quad s=\frac{\pi r}{2}+l.$$

$$J_x=\frac{\pi r^3}{4}+lr^2;$$

$$J_y=\frac{\pi r^3}{4}+\frac{\pi r l^2}{2}+\frac{l^3}{3}+2r^2l.$$

$$M_0=\frac{pr^2}{2}-\frac{p}{\pi r+2l}\left[\frac{\pi r}{2}(r^2+l^2)+3lr^2+\frac{l^3}{3}\right].$$

У випадку круглого поперечча $l=0$, $M_0=M_1=0$.

457. Ланку, зложену з двох півкіл і двох прямолійних дільниць, розтягується двома взаємно протилежними силами P (рис. 429). Знайдіть згинні моменти в попереччях, відповідних до осей симетрії.

Розв'язання. Момент M_0 знаходимо з умови:

$$\int_0^s \frac{Mds}{EJ}=0;$$

звідси:

$$\int_0^s Mds=0.$$

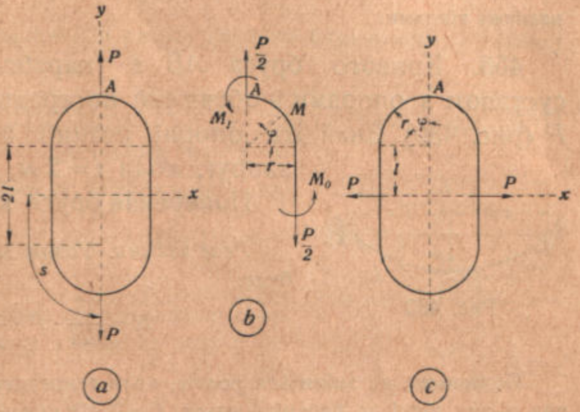


Рис. 429

Для круглої частини (рис. 429 *b*):

$$M=-M_0+\frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi).$$

З формули [1] знайдемо:

$$-M_0l+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi)-M_0\right]rd\varphi=0,$$

звідси:

$$M_0=\frac{Pr^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{l+r\frac{\pi}{2}}.$$

Поклавши $l=0$, доходимо до відомих формул для круглого персня.

Коли сили розташуємо згідно з рис. 429 *c*, то момент M_0 у точці A визначимо з умови:

$$\int_0^{\frac{\pi r}{2}}\left[\frac{Pr}{2}(1-\cos\varphi)-M_0\right]ds+\int_0^l\left(-M_0+\frac{P\zeta}{2}+\frac{Pr}{2}\right)d\zeta=0.$$

Зробивши інтегрування, знайдемо:

$$M_0=\frac{P}{2}\cdot\frac{r^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+rl+\frac{l^2}{2}}{\frac{\pi r}{2}+l}.$$

При $l=0$ одержуємо формулу для випадку круглого персня. Коли $r=0$, то $M_0=\frac{Pl}{4}$, тобто вартість згинного моменту така сама, як і для тряму з закріпленими кінцями.

458. Кривого бруса AB з параболічною віссю злучено суставом з опорами й обтяжено посередині зосередженою силою P (рис. 430). Знайдіть опорні реакції й величину найбільших напруг, коли $l=2$ *м*, $f=0{,}5$ *м*, $P=1$ *т*. Поперечча бруса квадратове: 10 *см*×10 *см*.

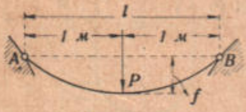


Рис. 430

Розв'язання. Розпір для параболічного обрису осі буде:

$$H=\frac{25}{128}\cdot P\cdot\frac{l}{f}=\frac{1000}{1{,}28}=781\ кг.$$

Погляньмо, як зміниться розпір, коли температура бруса підвищиться на 40°; при цьому кінці не переміщуються. $E=2.10^6$ *кг/см²*, $\alpha=0{,}0000125$.

Склавши похідну від потенційної енергії за розпором, прирівняймо її до того побільшання прогону, що його ми одержали б при підвищенні температури у випадку одної рухомої опори:

$$\frac{dV}{dH}=\frac{1}{EJ}\int_0^l M\frac{dM}{dH}\,dx=\alpha lt;$$

тут покладено: $ds=dx$. Підстановивши

$$M=-Hy;\ y=x\,(l-x)\,\frac{4f}{l^2},$$

знайдемо

$$\frac{dV}{dH}=\frac{16Hf^2}{EJl^4}\int_0^l (x^2l^2-2lx^3+x^4)\,dx=\alpha lt;$$

$$H=\frac{30\alpha tEJ}{16f^2}=625\ кг.$$

Таким чином, ми одержали додатковий розпір від підвищення температури.

459. Визначте, яка повинна бути грубина бетонного склепіння з прогоном 10 *м* і відношенням $\frac{f}{l}=\frac{1}{4}$, коли на *м²* горизонтальної проєкції склепіння припадає стале обтяження 1000 *кг* і коли допускна напруга на стиск 15 *кг/см²*. Обрис склепіння параболічний (грубина склепіння стала).

Розв'язання. Визначаємо розпір за формулою:

$$H=\frac{ql^2}{8f}=5000\ кг.$$

Потрібна грубина склепіння $h=3{,}37$ *см.* Ця грубина буде замала з погляду стійкости.

460. Параболічний лук двотетового поперечча (рис. 431) згинає сила $P=1\ m$, прикладена по середині прогону. Знайдіть зусилля в стяглі AB, що має поперечча $F=10\,см^2$, $\frac{f}{l}=\frac{1}{4}$, $l=10\ м$.

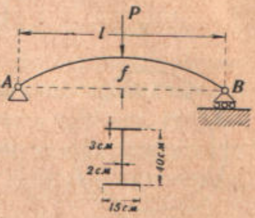


Рис. 431

Розв'язання. Складім рівнання для потенційної енергії системи в функції від зусилля стягля X; тоді X визначимо з рівнання:

$$\frac{dV}{dX}=0.$$

461. Збудуйте лінію впливу для розпору двосуставного параболічного луку незмінного поперечча й лінію впливу для згинного моменту в замку луку.

462. Знайдіть напруги в стінці циліндричної труби круглого поперечча, наповненої водою й опертої по горизонтально положеній твірній (рис 432).

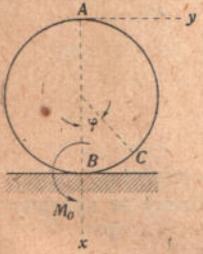


Рис. 432

Розв'язання. Вилучім з труби перстень завдовжки по твірній циліндра 1 *см.* Позначмо літерами M_0 і H величину згинного моменту й розтяжної сили в поперечці B цього персня. Згинний момент в якійнебудь точці C буде:

$$M=\gamma r^3\left(\frac{\varphi\sin\varphi}{2}-\cos\varphi\right)-Hr\,(1-\cos\varphi)-Vr\sin\varphi+M_0.$$

Тут літерою V позначено поперечну силу в персні безпосередньо праворуч від поперечча B. Ця сила, очевидно, спрямована знизу догори, і величина її дорівнює половині ваги води, що міститься у вилученому об'ємі труби; отже:

$$V=\frac{\pi}{2}\cdot\gamma r^2.$$

Величини M_0 і H знайдемо з тієї умови, що поперечча B не повертається й не переміщується в напрямі осі y; отже,

$$\int_0^\pi Mrd\varphi = 0; \quad \int_0^\pi Mr^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi = 0.$$

463. Знайдіть зміну довжини вертикального й горизонтального діяметрів персня незмінного поперечча від чину власної ваги (рис. 433).

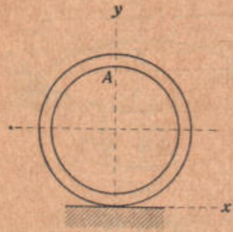


Рис. 433

Розв'язання. Візьмім поперечча в точці A. Величину подовжної сили й величину згинного моменту для цього поперечча знаходимо з тієї умови, що для точки A переміщення $\Delta x = 0$ і кут повороту поперечча — нуль.

464. Який повинен бути зовнішній діяметр чавунної толокової пружини у вільному стані і як повинна мінитись її грубина, щоб після того, як вкласти пружину в паровий циліндер діяметром 50 *см*, вона, при напрузі матеріялу не вищій, як 300 $кг/см^2$, спричинилась до рівномірно розподіленого тиску на стінки $q = 0{,}1\ кг/см^2$; $E = 8 \cdot 10^5\ кг/см^2$ (рис. 434).

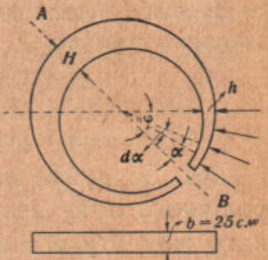


Рис. 434

Відповідь. 1) 51 *см*; 2) $h^3 = 21{,}6 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ *см*.

Розв'язання. Згинний момент

$$M = \int_0^\varphi qbr^2 \sin(\varphi - \alpha)\,d\alpha = 2\,qbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\cdot$$

де $q = 0{,}1\ кг/см^2$, $r = 25\ см$. Позначивши радіюс пружини у вільному стані через $r_1 = r + \delta$, одержимо (взявши наближено кривину зовнішнього обрису за кривину осі персня):

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\delta} = \frac{M}{EJ}; \quad J = \frac{bh^3}{12}; \quad h^3 = \frac{24\,qr^4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{E\delta}.$$

При $\varphi = \pi$ ширина h має найбільшу вартість

$$H^3 = \frac{24\,qr^4}{E\delta}; \quad h^3 = H^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\cdot$$

Напруга

$$p_n = \frac{M}{W} = \frac{2qb\varrho^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\frac{bh^2}{6}};$$

найбільша напруга p_n для поперечча A:

$$300 = \frac{2 . 0{,}1 . 25^2 . 6}{H^2}; \quad H = 1{,}6 \text{ см}, \quad \delta = 0{,}5 \text{ см}.$$

На кінцях грубина дорівнює нулеві. Зауважмо, що зміна згинного моменту вздовж пружини така, немовби кінці пружини в поперечч́і B стягнуто двома взаємно протилежними силами $P = qbr$. Цим користуються, коли роблять пружини. Роблять неповний перстень, стягують кінці силою P й потім обточують на верстаті до середового радіюса циліндра. Така пружина після того, як її вставити в циліндер, буде рівномірно тиснути на стінки.

465. Пружина, що має форму Архімедової спіралі з зовнішнім діяметром 12 *см*, завгрубшки $\frac{1}{2}$ *мм* й завширшки 5 *см*, служить для нагромадження енерґії 200 *кгсм* (рис. 435). Визначте потрібну кількість звоїв і кількість обертів ключа при накручуванні, припустивши, що найбільша напруга матеріялу $p_n = 8000$ *кг/см*^{2}, $E = 2{,}2 . 10^6$ *кг/см*^{2}.

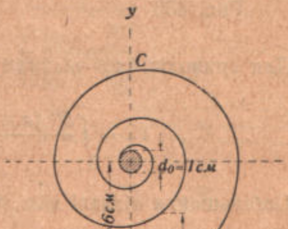


Рис. 435

Відповідь. 1) 33 звої, 2) 7, 3.

Розв'язання. Кут поверту

$$\varphi = \int_0^s \frac{Mds}{EJ}; \quad M = Py;$$

$\int yds$ являє собою статичний момент спіралі, рівний lr, де l є довжина. Отже, $\varphi = \frac{Plr}{EJ}$. Потенційна енергія

$$V \equiv \frac{1}{2} M'\varphi = (Pr)^2 . \frac{l}{2EJ},$$

де $M' = Pr$ є пересічна вартість згинного моменту. Найбільший згинний момент буде в попереччі C; він дорівнює $M_{max}=2Pr$.

$$p_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{2Pr}{\frac{bh^2}{6}};\quad V=\frac{p^2bhl}{24E};\quad l=\frac{r+r_0}{2}\cdot 2\pi n=660;\quad n=33;$$

$$M_{max}=pW=\frac{50}{3}\,кгсм;\quad P=\frac{M_{max}}{2r}=\frac{25}{18}\,кг;$$

$$M'=Pr=\frac{25}{3};\quad \varphi=\frac{2V}{M'}=\frac{2.200.3}{25}=48.$$

Кількість обертів ключа дорівнює $\frac{24}{\pi}=7,3.$

466. Скористувавшись Кастіліяновою теоремою, визначте побільшання віддалі між кінцями A й D пружини $ABCD$ при чині двох взаємно протилежних сил P. Пружина має незмінне попереччя (рис. 436).

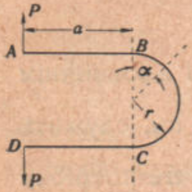


Рис. 436

Розв'язання. Треба скласти вираз для потенційної енергії системи. Для прямолінійних дільниць AB й CD енергія буде:

$$V_1=2\int_0^a\frac{M^2dx}{2EJ}=2\int_0^a\frac{P^2x^2dx}{2EJ}.$$

Для криволінійної частини (взявши лише енергію згину):

$$V_2=\int_0^\pi\frac{P^2\,(a+r\sin\alpha)^2\,rd\alpha}{2EJ}.$$

Побільшання віддалі між точками A й D буде:

$$\delta=\frac{d\,(V_1+V_2)}{dP}.$$

467. Знайдіть розподіл напруг по попереччю MN кривого бруса, коли радіюс кривини (рахуйте до центра тяжіння поперечча) $\varrho=5$ *см*. Розміри поперечча наведено на рис. 437.

Рис. 437

Розв'язання. Положення невтральної лінії визначиться її віддаллю r від центра O:

$$r=\frac{7-3}{\ln\frac{7}{3}}=\frac{4}{0,846}=4,73\,см.$$

Невтральна лінія відхиляється від центра тяжіння на $5-4,73=0,27$ *см*.

Нормальна напруга для якоїнебудь точки на віддалі y від невтрального шару буде:

$$p=E\frac{\delta d\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{y}{r+y}=a\cdot\frac{y}{r+y};$$

величину a визначимо з формули:

$$M=E\frac{\delta d\varphi}{d\varphi}\int\frac{y^2dF}{r+y}=a\int\frac{y^2dF}{r+y}=abh\left(\frac{u_2+u_1}{2}-r\right);$$

$$a=\frac{M}{bh\left(\frac{u_2+u_1}{2}-r\right)}.$$

Коли замість y підстановити його найбільшу й найменшу вартість:

$$y_{max}=7-4{,}73=2{,}27\ см;\quad y_{min}=-1{,}73\ см,$$

то знайдемо, що

$$p_{max}=\frac{ay_{max}}{u_2}=0{,}145M \text{ (зовнішній бік кривого бруса),}$$

$$p_{min}=\frac{ay_{min}}{u_3}=0{,}256M.$$

Зауважмо тут, що

$$\frac{1}{r}\int\frac{y^2dF}{1+\frac{y}{r}}$$

мало чим різниться від

$$\frac{1}{r}\cdot J=\frac{1}{r}\cdot\frac{bh^3}{12}.$$

Різниця в розглядуваному випадку менша, ніж 5%.

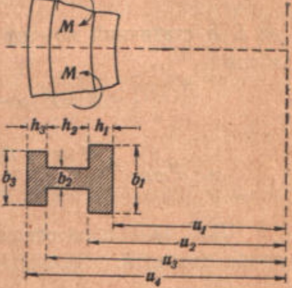


Рис. 438

468. Визначте положення невтральної лінії при згині кривого бруса двотетового попереччя (рис. 438).

Розв'язання.

$$\int\frac{ydF}{r+y}=\int\frac{(u-r)\,dF}{u}=0.$$

$$b_3\int_{u_4}^{u^3}\frac{(u-r)\,du}{u}+b_2\int_{u_3}^{u_2}\frac{u-r}{u}\,du+b_1\int_{u_2}^{u_1}\frac{(u-r)\,du}{u}=0.$$

$$b_3\left[u_4-u_3-r\ln\frac{u_4}{u_3}\right]+b_2\left[u_3-u_2-r\ln\frac{u_3}{u_2}\right]+b_1\left[u_2-u_1-r\ln\frac{u_2}{u_1}\right]=0.$$

$$r=\frac{b_3h_3+b_2h_2+b_1h_1}{b_3\ln\frac{u_4}{u_3}+b_2\ln\frac{u_3}{u_2}+b_1\ln\frac{u_2}{u_1}}. \qquad [1]$$

Поклавши $b_1=3$ *см*, $b_2=1$ *см*, $b_3=2$ *см*; $h_1=1$ *см*, $h_2=2$ *см*, $h_3=1$ *см*; $F=7$ *см*^{2} й $u_1=3$ *см*, одержимо:

$$r=\frac{7}{2.\ln\frac{7}{6}+1.\ln\frac{3}{2}+3.\ln\frac{4}{3}}=\frac{7}{1,577}=4,44\ см;$$

ϱ—радіюс, відповідний до осі бруса, рівний 4,79 *см*; переміщення невтральної лінії до центра: $4,79-4,44=0,35$ *см*. Відношення найбільшої напруги до найменшої:

$$\frac{p_{max}}{p_{min}}=\frac{(u_4-r)\,u_1}{u_4\,(u_1-r)}=-0,762.$$

Величини напруг знайдемо з формули:

$$p=\frac{E\delta d\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{y}{r+y}+a\,\frac{y}{r+y};$$

$$M=a\int\frac{y^2dF}{r+y}=a\int\left(y=\frac{ry}{r+y}\right)dF=a\int ydF=aS.$$

де S є статичний момент поперeччя відносно невтральної лінії. При наших розмірах

$$S=F\,(\varrho-r)=7.0,35=2,45\ см^3;\quad p=\frac{M}{S}\cdot\frac{y}{r+y},$$

$$p_{max}=\frac{M\,(u_4-r)}{Su_4}=\frac{2,56}{2,45.7}M;\quad p_{max}=0,149M;\quad p_{min}=-0,196M.$$

Щоб найбільша стискна й розтяжна напруги від моменту M були однакові, треба покласти:

$$\frac{u_4-r}{u_4}=\frac{r-u_1}{u_1};\quad \text{звідси}\quad r=\frac{2u_4u_1}{u_4+u_1}.$$

У цьому випадку треба розміри добрати так, щоб

$$r=\frac{2.7.3}{7+3}=4,2\ см;\quad r=\frac{F}{b_3\ln\frac{u_4}{u_3}+b_2\ln\frac{u_3}{u_2}+b_1\ln\frac{u_2}{u_1}},$$

отже·

$$b^3\ln\frac{u_4}{u_3}+b_2\ln\frac{u^3}{u_3}+b_1\ln\frac{u_2}{u_1}=\frac{7}{4,2},$$

$$b_3.0,154+b_2.0,406+b_1.0,288=\frac{7}{4,2}.$$

Можна зберегти попередню вартість для b_2 й попередню вартість для $b_1+b_3=5$; тоді:

$$5-b_1)\,0,154+1.0,406+b_1.0,288=\frac{7}{4,2}=1,67;\quad b_1=3,68\ см;\quad b_3=1,32\ см.$$

469. Визначте напруги в точках A й B для під'ємного гака трапезоїдального поперечча, коли чинна сила P дорівнює 2 *т*. Розміри поперечча такі: $b_1 = 4$ *см*, $b_2 = 1$ *см*, $u_1 = 3$ *см*, $u_2 = 12$ *см*, $h = 9$ *см* (рис. 439).

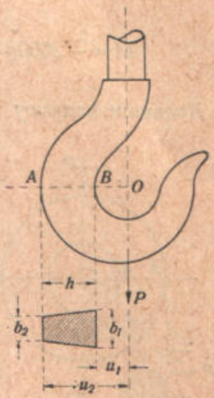


Рис. 439

Розв'язання. Віддаль центра тяжіння поперечча AB від центра кривини буде:

$$\varrho = u_1 + \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \frac{h}{3} = 6{,}6 \text{ см.}$$

Віддаль r до невтральної лінії від центра O визначимо з умови:

$$\int \frac{(u - r)\, dF}{u} = 0.$$

Позначивши змінну ширину поперечча літерою z, ми можемо, на основі формули [1] попередньої задачі, написати [1]):

$$r = \frac{F}{\int z \ln \frac{u}{u - du}} = \frac{F}{\int z \frac{du}{u}} = \frac{F}{\int \left[b_2 + \frac{(b_1 - b_2)(u_2 - u_1)}{u_2 - u_1}\right] \frac{du}{u}} =$$

$$= \frac{F}{\left[b_2 + \frac{u_2 (b_1 - b_2)}{u_2 - u_1}\right] \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} = \frac{5.9}{2\,(1 + 4)\ \ln 4 - 3} = 5{,}72 \text{ см.}$$

Переміщення невтральної лінії: $\varrho - r = 6{,}6 - 5{,}72 = 0{,}88$ *см*.

$$\int \frac{y^2 dF}{r + y} = F.0{,}88; \quad r \int \frac{y^2 dF}{r + y} = J' = 113 \text{ см}^4; \quad J = \frac{6 + 6.3 + 9}{36\,(2 + 3)} \,.\, 9^3 = 134 \text{ см}^4.$$

---

[1]) Зауважмо, що

$$\int z \ln \frac{u}{u - du} = \int z \ln \frac{1}{1 - \frac{du}{u}} = - \int z \ln \left(1 - \frac{du}{u}\right) = \int z \frac{du}{u},$$

бо

$$\ln \left(1 - \frac{du}{u}\right) = - \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{(du)^2}{u^2} - \frac{1}{3} \frac{(du)^3}{u^3} + \cdots,$$

а після того, як відкинути безмежно малі вищих порядків,

$$\ln \left(1 - \frac{du}{u}\right) = - \frac{du}{u}.$$

Напруга від згину буде:

$$p=\frac{ay}{r+y}+\frac{M}{\int\frac{y^2dF}{r+y_1}}\cdot\frac{y}{r+y}=\frac{My}{J.0,88\,(r+y)};$$

$$M=-2000\varrho=-2000.6,6\ кгсм;\quad p_{max}=\frac{2.2000.6,6.2,72}{45.0,88.3}=604\ кг/см^2.$$

Додавши напругу від подовжної сили, знайдемо:

$$p=604+\frac{2000.2}{45}\cong 690\ кг/см^2.$$

470. Визначте напругу в поперечці AB персня круглого поперечня від розтягу двома взаємно протилежними силами $P=3000$ *кг*. Розміри персня зазначено на рис. 440.

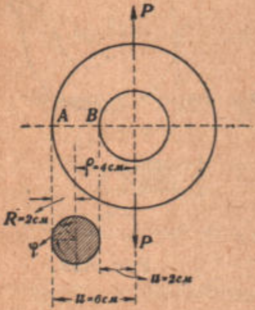


Рис. 440

Розв'язання. Величину згинного моменту в поперечці AB визначимо з формули: $M=0{,}182P\varrho$. Положення невтральної лінії, відповідне до чину згинного моменту, знайдемо з такої умови:

$$\int\frac{(u-r)\,dF}{u}=0.$$

Як і в попередній задачі, матимемо:

$$r=\frac{F}{\int z\,\frac{du}{u}}=\frac{\pi R^2}{2\pi(\varrho-\sqrt{\varrho^2-R^2})}=\frac{4}{2\,(4-\sqrt{16-4})}=\frac{2}{0{,}536}=3{,}731\ см. \qquad [1]$$

Переміщення осі: $4-3{,}731=0{,}260$ *см.*

$$z=\frac{u_2-u_1}{2}\cdot 2\sin\varphi;\quad r\cos\varphi=u-\frac{u_2+u_1}{2};\quad \int z\,\frac{du}{u}=\int\frac{rd\xi}{\varrho+\xi},$$

де ξ є абсциси, що відлічуються від центра круглого поперечня, $z=2\sqrt{R^2-\xi^2}$

$$\int\frac{zdu}{u}=2\int_{-R}^{+R}\frac{\sqrt{R^2-\xi^2}}{\varrho+\xi}\,d\xi=2\pi\,(\varrho-\sqrt{\varrho^2-R^2}),$$

$$\int\frac{\sqrt{R^2-\xi^2}}{\varrho+\xi}\,d\xi=R^2\int\frac{d\xi}{(\varrho+\xi)\sqrt{R^2-\xi^2}}-\int_{-R}^{+R}\frac{\xi^2d\xi}{(\varrho+\xi)\sqrt{R^2-\xi^2}}=$$

$$=\frac{\pi R^2}{\sqrt{\varrho^2-R^2}}+\pi\varrho-\frac{\pi\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2-R^2}}=\pi\,(\varrho-\sqrt{\varrho^2-R^2}),$$

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{\xi^2 d\xi}{(\varrho+\xi)\sqrt{R^2-\xi^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\varrho^2-R^2}} \text{ arc sin } \frac{R^2+\varrho\xi}{R(\varrho+\xi)}\right]_{-R}^{+R} \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2-R^2}},$$

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{\xi d\xi}{(\varrho+\xi)\sqrt{R^2-\xi^2}} = \int\limits_{-R}^{+R} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{R^2-\xi^2}} - \varrho\int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{\sqrt{R^2-\xi^2}} +$$

$$+\varrho^2 \int\limits_{-R}^{+R} \frac{d\xi}{(\varrho+\xi)\sqrt{R^2-\xi^2}} = -\pi\varrho + \frac{\pi\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2-R^2}}.$$

Положення невтральної лінії визначить формула:

$$r = \frac{R^2}{2\left(\varrho-\sqrt{\varrho^2-R^2}\right)};$$

коли ϱ велике, то можна покласти $R=\varrho\alpha$, де α є мала величина. У такому разі

$$r = \frac{R^2}{2\varrho\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)} = \frac{R^2}{2\varrho\left(1-1+\frac{\alpha^2}{2}\right)} = \frac{\alpha^2\varrho^2}{\alpha^2\varrho} = \varrho.$$

Коли $\varrho=R$, то $r=\frac{\varrho}{2}$.

Положення невтральної лінії можна знайти ще й так:

$$\int \frac{ydF}{r+y} = \int \frac{(e+y')\,dF}{\varrho+y'} = 0;$$

тут e є віддаль від центра тяжіння поперечча до невтральної лінії, y' — віддаль, яку відлічується від осі, що рівнобіжна з невтральною лінією й переходить через центр тяжіння поперечча.

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{dF}{\varrho+y'} + \int\limits_{-R}^{+R} \frac{y'dF}{\varrho+y'} = 0; \quad \int\limits_{-R}^{+R} \frac{y'dF}{\varrho+y'} = \int\limits_{-R}^{+R} \left(\frac{y'}{\varrho} - \frac{y'^2}{\varrho^2} + \frac{y'^3}{\varrho^3} - \frac{y'^4}{\varrho^2} + \cdots\right) dF =$$

$$= -\pi R^2 \left[\frac{1}{4}\,\frac{R}{\varrho}\Big)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{R}{\varrho}\right)^6 + \cdots\right] = -\pi R^2 k,$$

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{dF}{\varrho+y'} = \frac{e}{\varrho}\int\left(1-\frac{y'}{\varrho}+\frac{y'^2}{\varrho^2}-\frac{y'^3}{\varrho^3}+\cdots\right) dF = \frac{eF}{\varrho} + \frac{e}{\varrho}\pi R^2 k,$$

отже:

$$e = \frac{\varrho\pi R^2 k}{F+\pi R^2 k};$$

для нашого відношення:

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{1}{2}; \qquad e = \frac{\varrho k}{1+k} = \frac{4}{15} = 0.267 \text{ см}; \qquad k = \sim\frac{1}{14}.$$

Визначивши положення невтральної лінії, ми легко знайдемо напругу від згину:

$$p = \frac{M}{S} \cdot \frac{y}{r+y}, \quad S = Fe.$$

До цих напруг треба додати розтяжні напруги від подовжної сили.

471. Стальний циліндер (рис. 441), якого зовнішній діяметр дорівнює 40 *см*, а грубина стінки 10 *см*, зазнає середового тиску 2000 *атм*. Визначте величину найбільших розтяжних напруг у точках на середовій поверхні, по середині грубини стінки й на зовнішній поверхні.

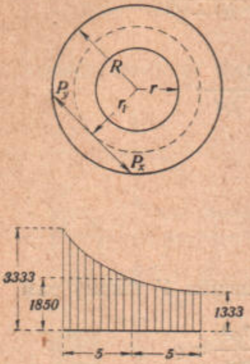


Рис. 441

Відповідь. Приклавши формулу Ляме, одержимо: 3333 *кг/см²*, 1850 *кг/см²*, 1333 *кг/см²*.

472. Розв'яжіть попередню задачу, припустивши, що циліндра зложено з двох трубок (рис. 442) однакової грубини (5 *см*), при тому зовнішня трубка I, яку надягнуто на середову нагрітою, мала за нормальної температури середовий радіюс на 0,012 *см* менший від зовнішнього радіюса середової трубки II.

Рис 442

Розв'язання. Коли δ буде різниця радіюсів дотичних поверхонь двох трубок, то інтенсивність тиску q, що виникає по поверхні дотикання трубок, визначимо з формули:

$$q_1 = \frac{\delta E}{r_1} \cdot \frac{(r_1^2 - r^2)\ (R^2 - r_1^2)}{2 r_1^2 (R^2 - r^2)} = 260\, кг/см^2,$$

де $E = 2 . 10^6$ *кг/см²*.

Для трубки I додаткові розтяжні напруги, коли холоне зовнішня трубка, будуть:

1) на середовій поверхні:

$$p_1' = \frac{q_1 r_1^2}{R^2 - r_1^2} \left(1 + \frac{R^2}{r_1^2}\right) = +936\, кг/см^2,$$

2) на зовнішній поверхні:

$$p_1'' = \frac{q_1 r_1^2}{R^2 - r_1^2} . 2 = +690\, кг/см^2.$$

Для трубки II додаткові напруги будуть:

1) **на середовій поверхні:**

$$p'_2 = \frac{q_1 r_1^2}{r_1^2 - r^2} \cdot 2 = -936 \text{ кг/см}^2;$$

2) **на зовнішній поверхні:**

$$p''_2 = -\frac{q_1 r_1^2}{r_1^2 - r^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) = -676 \text{ кг/см}^2.$$

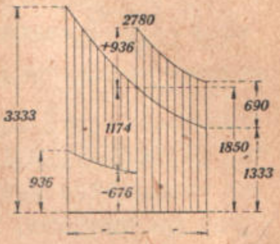


Рис. 443

Повні напруги по тих площах, що лежать у діяметральному поперечці трубок, змальовано на рис. 443 ординатами зарискованих площ.

РОЗДІЛ IX

ЗАДАЧІ З ДИНАМІКИ

473. Визначте натяг линви, що підіймає тягара 4 *т* рівномірно прискорено. За перші 4 *сек.* тягар підіймається на височину 10 *м.*

Розв'язання. До ваги тягара Q треба додати сили інерції $\frac{Qa}{g}$. Прискорення a знайдемо з рівняння: $\frac{at^2}{2}=\frac{a.4^2}{2}=10.$

474. Розрахуйте обід маховика, вважаючи його за перстень, що вільно крутиться. Діяметр персня дорівнює 4 *м.* Яку кількість обертів можна допустити, коли розтяжна напруга не повинна перевищувати 300 *кг/см*²? Питома вага 7,5.

Розв'язання. Напруга $p=\mu v^2=\frac{0{,}0075}{981}\cdot v^2=300$ *кг/см*².

$$v^2=\frac{300.981.10^4}{75},\ \omega=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{300.981.10^4}{75}}.$$

Кількість обертів за хвилину:

$$\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60}{2\pi r}\sqrt{\frac{300.981.10^4}{75}}=300.$$

475. Знайдіть граничну швидкість для точила. Питома вага 2,3; Пуассонове відношення $\sigma=0{,}3$, допускна напруга 5 *кг/см*². Розрахунок треба робити з припущенням, що точило являє собою суцільний диск однакової грубини.

476. Залізну штабу завдовжки $l=5$ *м* і з площею попереччя 4 *см*² підіймає вертикально догори прикладена до верхнього кінця сила $P=45$ *кг.* Як міняться розтяжні напруги вздовж штаби?

Розв'язання. У верхньому кінці розтяжна напруга дорівнює $\frac{45}{4}\frac{кг}{см^2}$, а в нижньому — нулеві. Вздовж штаби розтяжна напруга міниться за лінійним законом.

477. Під'ємний механізм, що підіймає тягара 5 *т*, влаштовано на двох двотетових грямах № 40 з прогоном 8 *м* [$J = 292.10^2\ см^4$ (нім. сорт.)]. Знайдіть натяг линви T й величину найбільших напруг p_{max} у трямах, коли тягар Q лежить по середині прогону, підіймається рівномірно прискорено й у першу *сек.* проходить 2 *м*.

Розв'язання. Натяг $T = \left[5 + \frac{5a}{g}\right] t = \sim 7{,}04 т, \quad a = 4\ м/сек^2.$

$$p_{max} = \frac{M}{2W} = \frac{7{,}04.2.10^5}{2.1460} = \sim 482\ кг/см^2.$$

До знайдених напруг треба додати напруги від власної ваги трямів і під'ємної машини.

478. Залізна штанґа MN (рис. 444) крутиться з однаковою кутовою швидкістю довкола вертикальної осі AB. Знайдіть для цієї штанґи граничну кількість обертів за хвилину, коли поперечча штанґи однакове, овжина $l = 2\ м$, питома вага 7,5 і допускна напруга на розтяг 750 *кг/см²*. Знайдіть видовження штанґи.

Рис. 444

Розв'язання. Вилучім елемент штанґи завдовжки dx на віддалі x від осі кружіння. Коли F буде площа поперечча, γ — вага одиниці об'єму й ω — кутова швидкість, то на вилучений елемент чинить сила:

$$dT = \frac{\gamma F dx}{g} \cdot \omega^2 x. \qquad [1]$$

Найбільші розтяжні напруги будуть біля осі AB, і їхню величину одержимо інтеґруванням виразу [1]:

$$T = \frac{F\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{l^2}{8};$$

звідси:

$$\omega = \sqrt{\frac{p_{max} g}{\gamma} \cdot \frac{8}{l^2}},$$

$$n = \frac{60.\omega}{2\pi} = \frac{30}{\pi l}\sqrt{\frac{p_{max} g.8}{\gamma}} = 1330 \text{ обертів за хвилину.}$$

479. Брусок AB крутиться довкола рівнобіжної з ним осі OO. Яка буде напруга, коли віддаль r і кількість обертів за хвилину n завдано (рис. 445)?

Рис. 445

Розв'язання. Вважаємо, що кінці бруска AB при згині можуть вільно повертатись. У такому разі брусок AB буде в таких самих умовах, що й трям, опертий на кінцях, який тримає рівномірно розподілене обтяження.

480. Довкола осі A, перпендикулярної до площі рисунку, крутиться штаба AB з кутовою швидкістю ω. За яким законом треба зміняти площу поперечча штаби, коли треба одержувати рівноопірну форму (рис. 446)?

Рис. 446

Розв'язання.

$$\text{Площа} = \frac{G_0}{g} \cdot \frac{\omega^2 l}{p} \cdot e^{\frac{\gamma\omega^2}{2gp}(l^2 - x^2)}.$$

Тут G_0 є вага тягара на кінці штаби, γ — вага одиниці об'єму матеріялу, p — допускна напруга й g — прискорення від сили ваги. Хід розв'язання буде такий самий, як і при визначенні форми рівноопірного бруса, якого розтягає сила, прикладена на кінці, і власна вага.

481. Тягар $Q = 1$ *кг*, прикріплений до спіральної ресори, крутиться довкола осі, перпендикулярної до площі рисунку з кутовою швидкістю $\omega = 20$ (рис. 447).

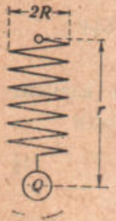


Рис. 447

Знайдіть розтяг ресори, нехтуючи її масою, і найбільшу напругу в матеріялі. Розміри ресори такі: середній радіюс звою $R = 2$ *см*, кількість звоїв $n = 10$, радіюс дроту $\varrho = 0{,}2$ *см*, довжина розтягнутої ресори $r = 10$ *см*, модуль зсуву вважайте за рівний $G = 8.10^5$ *кг/см²*.

Відповідь. Розтяжну силу визначмо з рівняння:

$$P = \frac{Q\omega^2}{g}\left(r + \frac{4nR^3}{G.\varrho^4}P\right);$$

звідси $P = 4{,}54$ *кг*.

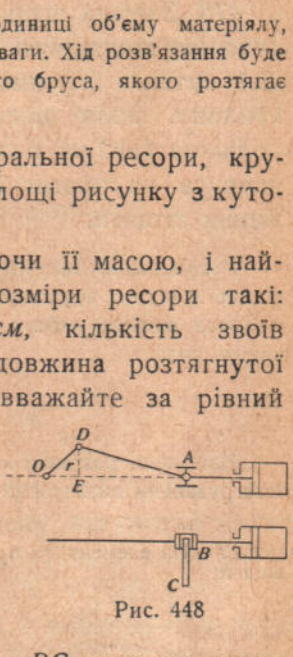


Рис. 448

482. До поплазня A прикріплено стрижня BC круглого поперечча (рис. 448). Вісь стрижня перпендикулярна до площі корбового механізму. Знайдіть напругу в стрижні, коли довжина стрижня l, його діяметр d й кількість обертів машини за хвилину n (вважаємо, що довжина гонка велика проти радіюса корби).

Розв'язання. Коли гонок довгий, то переміщення поплазня, отже, й стрижня BC, можна вважати за рівне переміщенню точки E—проєкції ґудзика вітряниці D. Коли $OD = r$ і $\omega = \frac{2\pi n}{60}$, то $OE = r\cos DOE$. Коли за початковий момент взяти момент зливання корби OD з лінією OE, то

$$\angle DOE = \omega t = \frac{2\pi n}{60} \cdot t;\quad OE = r\cos\frac{2\pi n}{60}\cdot t.$$

Прискорення точки E буде:

$$-r\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 \cdot \cos\frac{2\pi n}{60}\cdot t.$$

Найбільше прискорення буде при скрайніх положеннях точки E, коли

$$\cos\frac{2\pi n}{60}\cdot t = \pm 1.$$

На стрижні BC чинять сили інерції, рівномірно розподілені вздовж. Коли γ є вага одиниці об'єму, то та сила, що припадає на одиницю довжини стрижня, буде:

$$r\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}\cdot\frac{\pi d^2}{4}.$$

483. До осі AB, що крутиться з однаковою кутовою швидкістю й робить 240 обертів за хвилину, прикріплено штабу CD однакового поперечча. Збудуйте епюру згинних моментів для штаби CD й для осі AB (рис. 449).

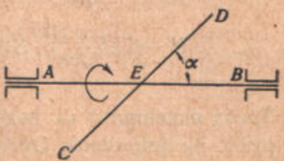


Рис. 449

Розв'язання. Коли q буде вага одиниці довжини штаби CD, то на елемент довжини dx на віддалі x від точки E чинить відцентрова сила $\frac{qdx}{g}\cdot(4\,.\,2\pi)^2 x\,.\,\sin\alpha$. Згинати штабу будуть складові відцентрової сили, перпендикулярні до осі штаби CD. На елемент dx буде припадати таке згинне зусилля:

$$\frac{qdx}{g}(4.2\pi)^2\,x.\sin\alpha\cos\alpha,$$

отже, ми маємо обтяження, розподілене за законом $\triangle$-ка. Штабу AB буде згинати той момент, що передається від штаби CD в поперечці E.

484. Розрахуйте паровозний спарник завдовжки $l=2\ м$ прямокутнього поперечча ($h:b=2$) (рис. 450) при таких даних: подовжна стискна сила $P=10\ т$, швидкість паровоза 81,4 *км* на годину, діяметр спарованих коліс $d=1,8\ м$ (кутова швидкість 8π), радіюс корби $r=0,3$, питома вага матеріялу 7,5, допускна напруга $p_{max}=700\ кг/см^2$.

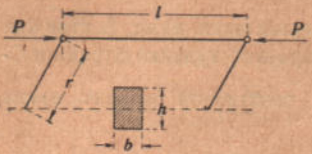


Рис. 450

Розв'язання. Відношення сил інерції, що припадають на одиницю маси спарника, до сили ваги буде:

$$\frac{\omega^2 r}{g}=\frac{(8\pi)^2.0,3}{9,81}=\sim 19,3.$$

Спарника згинають сили інерції, рівномірно розподілені вздовж. Найбільша напруга від згину по середині довжини спарника буде:

$$p_d=\frac{6\gamma l^2.19,3}{8h}=\frac{6.0,0075.200^2.19,3}{8h}\ кг/см^2.$$

Повна напруга (нехтуючи власною вагою) буде:

$$p=p_s+p_d=\frac{10000.2}{h^2}+\frac{4343}{h},$$

де p_s є напруга від подовжної сили (тут можна допустити принцип додавання). Підставовивши замість p вартість p_{max}, одержуємо:

$$700.h^2-4343h-20000=0,$$

$$h^2-6,2h-\frac{200}{7}=0;\quad h=3,1+\sqrt{9,61+28,57}=3,1+6,18=\sim 9,3\ см.$$

Треба перевірити на подовжний згин у напрямі, перпендикулярному до площі руху. За формулою Ойлера:

$$P_{кр}=\frac{EJ\pi^2}{l^2}=\frac{2.10^6.78.9,87}{200^2}=10^2.39.9,87=38500\ кг.$$

Запас міцности майже почвірний.

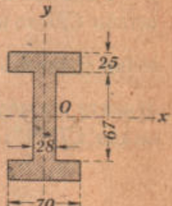


Рис. 451

485. Паровозний гонок зазначеного на рис. 451 поперечча й завдовжки $l=2,9\ м$ стиснуто силою $P=20\ т$. Радіюс корби $r=350\ мм$, кількість обертів за хвилину $n=210$. Знайдить величину найбільших напруг і перевірте на подовжний згин.

Розв'язання. Перевірмо гонка на подовжний згин. Момент інерції відносно вертикальної осі

$$J_y = \frac{5.7^3}{12} + \frac{6{,}7.2{,}8^3}{12} = 143 + 12 = 155\ \textit{см}^4;\quad F = 35 + 18{,}8 = 53{,}8\ \textit{см}^2;$$

радіюс інерції

$$r = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{155}{53{,}8}} = 1{,}7;\quad \frac{l}{r} = 171.$$

За таблицею Ясинського, критична напруга 728 *кг/см²*. Припущено напругу:

$$\frac{20000}{53{,}8} = 372\ \textit{кг/см}^2$$

отже, приблизно, є подвійний запас міцности.

Напруга від згину в площі Oy.

$$J_x = 829\ \textit{см}^4,\ W \approx 142\ \textit{см}^3;\quad \frac{r\omega^2}{g} = 17{,}3.$$

Згинні сили інерції розподіляються за законом Δ-ка. Якщо вагу гонка позначити літерою Q, то $Q = 0{,}0075.290.53{,}8 \approx 117$ *кг*. Найбільша напруга від згину

$$p_d = \frac{0.064.117.290.17{,}3}{142} = 264\ \textit{кг/см}^2.$$

Напруги від подовжної стискної сили

$$p_s = 372\ \textit{кг};\quad p = p_s + p_d = 636\ \textit{кг/см}^2.$$

Напруги від власної ваги тут не взято до уваги.

486. Мостовий звід переміщується з сталою швидкістю 1 *м/сек*. Коли звід спиниться, то тягар Q через інерцію буде рухатись далі й спричиниться до вгину двотетових мостових трямів у горизонтальній площі. Вирахуйте величину цього вгину і відповідно до нього напругу, коли $Q = 5$ *т*. Віддаль від точки чіпляння до центра тяжіння тягара Q дорівнює $h = 4$ *м*. Довжина мостового зводу $l = 6$ *м*. Попереччя трямів змальовано на рис. 452.

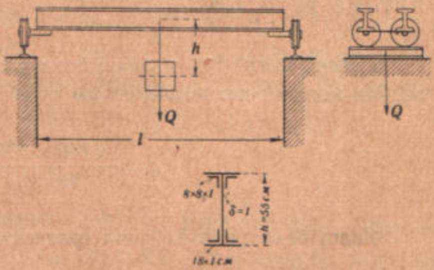


Рис. 452

$$W_x = 2395\ \textit{см}^3,\ W_y = 98{,}5\ \textit{см}^3,\ J_y = 837\ \textit{см}^4.$$

Розв'язання. Щоб мати приблизне розв'язання задачі, будемо вважати, що, коли звід спиниться, то тягар Q почне хитатись так само, як звичайний маятник. Щоб знайти вгин трямів у горизонтальній площі, треба знати кут φ найбільшого відхилення (рис. 453). Підіймання δ центра тяжіння тягара при хитанні визначимо з рівнання живих сил:

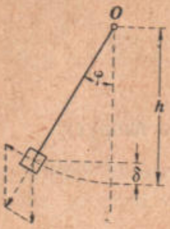


Рис. 453

$$\frac{Q}{g}\cdot\frac{v^2}{2}=Q\delta;\quad \delta=\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2.9{,}81};\quad h\,(1-\cos\varphi)=\delta=\frac{1}{2.9{,}81};$$

$$1-\cos\varphi=\frac{1}{2.h.9{,}81}=\frac{1}{2.4.9{,}81};\quad \cos\varphi=0{,}9873,\quad \varphi=9^\circ 10'.$$

Можна приблизно рахувати, що та сила, яка згинає трям у горизонтальній площі, буде: $Q.\sin\varphi=Q.0{,}159$; отже, сила становить, приблизно, $\frac{1}{6}Q$. А що момент опору трямів у горизонтальній площі в 25 разів менший, ніж у площі вертикальній, т'отже, ті напруги, що зумовлені раптовим спиненням, будуть дуже значні. Щоб точніше розв'язати завдання, треба взяти до уваги вгин трямів у горизонтальній площі. Через цей вгин точка чіпляння тягара Q буде переміщуватись, і це зменшить кут відхилення φ.

487. Квадратова рама сталого попереччя крутиться з однаковою швидкістю довкола вертикальної осі AB (рис. 454). Знайдіть граничну кількість обертів за хвилину, коли довжина боку рами $l=20$ *см*; попереччя рами квадратове$=1$ *см*$\times 1$ *см*; допускна напруга $p_{max}=750$ *кг/см*^{2}; питома вага 7,5.

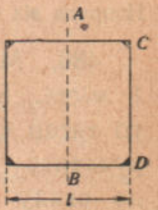


Рис. 454

Розвя'зання. Вертикальні боки рами згинаються силами інерції. На кожний подовжинний *см* припадає зусилля:

$$q=\frac{0{,}0075.\omega^2 l}{981.2}.$$

Якщо боки рами злучено суставами, то

$$M_{max}=\frac{ql^2}{8}.$$

При штивному злученні в кутах момент у точках C й D визначимо з рівнання:

$$\frac{ql^3}{24EJ}-\frac{Ml}{2EJ}=\frac{Ml}{2EJ},\quad M=\frac{ql^2}{24},\quad M_{max}=\frac{ql^2}{8}-\frac{ql^2}{24}=\frac{ql^2}{12}.$$

Граничну кутову швидкість знайдемо з рівнання:

$$\frac{ql^2 . 6}{12} = 750 \text{ кг/см}^2; \quad \frac{0{,}0075 . \omega^2 . l^3}{981 . 2 . 2} = 750,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 . 10^8}{2^3 . 10^3}} = 224, \quad n = \frac{224 . 60}{2\pi}.$$

488. Реґулятор крутиться з однаковою кутовою швидкістю довкола вертикальної осі AB (рис. 455). Знайдіть величину найбільших напруг у платівці DE й переміщення точки E, коли реґулятор робить 200 обертів за хвилину, $a = 15$ *см*, $b = 60$ *см*, $c = 5$ *см*, $d = 1{,}2$ *см*, вага кулі $Q = 12$ *кг*. (Нехтуємо масою платівки DE, штабу CD вважаємо за абсолютну штивну).

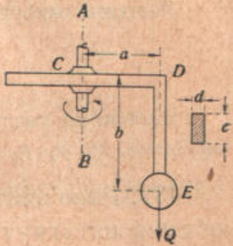


Рис. 455

Розв'язання. Коли f є вгин платівки DE в точці E, то чинна згинна сила дорівнюватиме:

$$F = \frac{Q}{g} \cdot \omega^2 (a + f) = f \cdot \frac{3EJ}{l^3},$$

отже:

$$f = \frac{\frac{a\omega^2 Q}{g}}{\frac{\omega^2 Q}{g} + \frac{3EJ}{l^3}}.$$

489. Визначте, скільки обертів за хвилину можна дати чавунному маховикові діяметром 200 *см*, коли обід завгрубшки 20 *см*, завширшки 30 *см*, питома вага чавуну 7 і допускна напруга 200 *кг/см*^{2}. Впливом шпиць нехтуємо. Припустіть, що розтяжна напруга розподіляється рівномірно по попереччю ободу.

Відповідь. 500.

490. На чавунний обід маховика зазначених у попередній задачі розмірів ($\delta_2 = 20$ *см*), натягнуто щільно стального обруча такого самого завширшки. Обруч завгрубшки $\delta_1 = 4$ *см*. Визначте, скільки обертів можна дати такому маховикові і яка буде при цьому напруга в обручі. Модуль пружности сталі $E_1 = 2 . 10^6$ *кг/см*^{2}, E_2 (для чавуну) $= 8 . 10^5$ *кг/см*^{2}, питома вага сталі 7,85 (рис. 456).

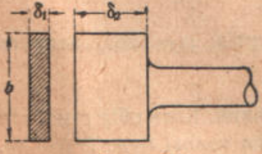


Рис. 456

Розв'язання. Позначмо літерою X тиск на 1 *см*² середової поверхні обруча; тоді та сила, що припадає на елемент обруча завдовжки 1 *см*, рахуючи за колом, буде:

$$P_1 = \left(\frac{\delta_1 \cdot \gamma_1}{g} \cdot \omega^2 R_1 + X\right) b.$$

Тут γ_1 є вага одиниці об'єму сталі, а R_1—середній радіюс обруча. Так само для елемента ободу маховика знайдемо:

$$P_2 = \left(\frac{\delta_2 \cdot \gamma_2}{g} \cdot \omega^2 R_2 + X\right) b.$$

Розтяжні напруги в обручі й ободі будуть:

$$p_1 = \frac{P_1 R_1}{b\delta_1}; \quad p_2 = \frac{P_2 R_2}{b\delta_2}.$$

Взявши до уваги, що відносні видовження обруча й ободу майже однакові, знайдемо, що $p_1 : p_2 = E_1 : E_2$. З цього рівняння визначимо невідомий тиск X.

491. Розв'яжіть попередню задачу, припустивши, що стального обруча натягнуто на маховик гарячим. Коли обруча охолоджено до нормальної температури, то в ньому з'являються розтяжні напруги, що залежать від первісної різниці між середовим радіюсом обруча й зовнішнім радіюсом ободу маховика. Зробіть розрахунок, припустивши, що ці розтяжні напруги дорівнюють 500 *кг/см*².

Розв'язання. Зумовлений охолоджуванням тиск ободу на подовжний *см* ободу по колові, буде:

$$b \cdot \frac{500 \, . \, \delta_1}{R_1} \approxeq 20b \text{ кг}.$$

Напруги, що відповідають цьому тискові, треба додати до напруг від сил інерції, вирахованих у попередній задачі.

492. Розв'яжіть попередню задачу, припустивши, що замість стального персня до попередньої стискної напруги в чавунному ободі, рівній 100 *кг/см*², спричиняються залізні диски, що заміняють шпиці й заштамповані на ободі гарячими (патент Ріне в Ессені), диск завгрубшки 1 *см* (рис. 457).

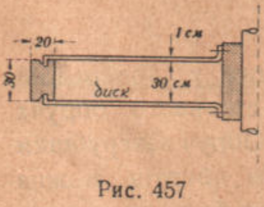


Рис. 457

Відповідь. Кількість обертів $n = 1580$, напруга в диску 1518 *кг/см*².

Розв'язання. Для спрощення вважаємо диск за суцільний. Коли обід стиснуто до напруги 100 *кг/см*², то зусилля на 1 подовжинний *см* по колові буде 2·030 *кг*.

У дисках маємо попередню розтяжну напругу, рівну $\frac{20.30}{2}=300\ кг/см^2$. Ці попередні напруги треба додати до напруг від сил інерції. Вираховуючи напруги від сил інерції, позначмо літерою X те зусилля, що його передають диски на кожний подовжинний *см* ободу маховика; тоді відносне видовження ободу буде:

$$\left(\frac{\delta_2\gamma_2\omega^2R}{g}-\frac{X}{b}\right)\frac{R}{\delta_2.E_2}.$$

Щоб знайти X, треба це видовження прирівняти до видовження радіюса суцільного диска:

$$\frac{\gamma_1}{g}\cdot\frac{\omega^2(1-\sigma^2)R^2}{4E_1}+\frac{X(1-\sigma)}{2E_1}.$$

Знайшовши X, легко обчислити ті напруги, що зумовлені силами інерції.

493. Тонкий круглий перстень, що важить Q, крутитьса з однаковою кутовою швидкістю ω довкола вертикального діяметра AB (рис. 458). Знайдіть величину найбільшого згинного моменту й зміну горизонтального діяметра персня.

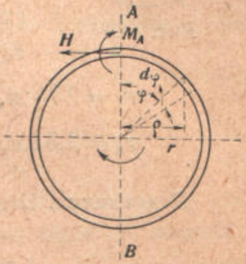


Рис. 458

Розв'язання. Нехай H і M_A будуть подовжна сила й згинний момент у поперечці A; тоді

$$H=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q.rd\varphi.\omega^2.\varrho}{2\pi r.g};$$

взявши до уваги, що $\varrho=r\sin\varphi$, одержимо:

$$H=\frac{Q.r^2\omega^2}{2\pi r.g}.$$

Момент M_A знайдемо, скориставшись принципом найменшої роботи. Момент довільному поперечці персня визначимо рівнянням:

$$M_\varphi=M_A-H.r(1-\cos\varphi)+\frac{Qr^2\omega^2}{2\pi g}\int_0^\varphi\sin\psi(\cos\psi-\cos\varphi)\,d\psi=$$

$$=M_A-\frac{Qr^2\omega^2}{4\pi g}\cdot\sin^2\varphi.$$

Склавши вираз для потенційної енергії:

$$V=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi r}M^2ds=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi}M^2r\,d\varphi,$$

одержимо, на основі принципу найменшої роботи:

$$\frac{dV}{dM_A}=0;$$

звідси:

$$M_A=\frac{Qr^2\omega^2}{8\pi g}.$$

Щоб одержати зміни горизонтального діяметра, прикладім до його кінців дві взаємно протилежні фіктивні сили P. Поклавши в похідній $\frac{dV}{dP}$ фіктивну силу $P=0$, знайдемо шукане видовження:

$$\delta=\frac{Qr^4\omega^2}{12\pi g.EJ}.$$

494. Маховик, що крутиться зі швидкістю $n=7500$ обертів за хвилину, складається з чавунного диска, на який натягнуто залізний перстень. Знайдіть найбільші напруги матеріялу від відцентрової сили (рис. 459).

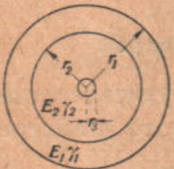


Рис. 459

$$r_1=25\ см,\ E_1=2.10^6\ кг/см^2,\ r_2=12{,}5\ см,\ \gamma_1=0{,}00785,$$
$$r_3=2{,}5\ см,\ E_2=1.10^6\ кг/см^2,\ \sigma=\ 0{,}3\ см,\ \gamma_2=0{,}0072.$$

Розвя'зання. Напруга p матиме такий вираз:

$$p=\frac{E}{1-\sigma^2}\left[-\frac{(3+\sigma)}{8}A_1r^2+\frac{1+\sigma}{2}C_1=\frac{1-\sigma}{r^2}D_1\right].$$

Коли $r=r_1$, то $p=0$:

$$\frac{E_1}{1-\sigma^2}\left[-\frac{3+\sigma}{8}A_1r_1^2+\frac{1+\sigma}{2}C_1-\frac{1-\sigma}{r_1^2}D_1\right]=0.$$

Коли $r=r_2$, то $p=-p_0$:

$$\frac{E_1}{1-\sigma^2}\left[-\frac{3+\sigma}{8}A_1r_2^2+\frac{1+\sigma}{2}C_1-\frac{1-\sigma}{r_2^2}D_1\right]=-p_0.$$

Звідси:

$$D_1=\frac{p_0(1-\sigma^2)r_1^2r_2^2}{E_1(r_1^2-r_2^2)(1-\sigma)}+\frac{(3+\sigma)r_1^2r_2^2}{8(1-\sigma)}A_1,$$

$$C_1=\frac{p_0(1-\sigma).2r.r_2^2}{E_1(r_1^2-r_2^2)}+\frac{(3+\sigma)r_1^2+r_2^2}{4(1+}A.$$

C_2 й D_2 для другого персня знайдемо з таких рівнань:

$$\frac{E_2}{1-\sigma^2}\left[-\frac{3+\sigma}{8}A_2r_2^2+\frac{1+\sigma}{2}C_2-\frac{1-\sigma}{r_2^2}D_2\right]=-p_0,$$

$$\frac{E_2}{1-\sigma^2}\left[-\frac{3+\sigma}{8}A_2r_3^2+\frac{1+\sigma}{2}C_2-\frac{1-\sigma}{r_3^2}D_2\right]=0\cdot$$

звідси

$$D_2=\frac{p_0(1+\sigma)r_2^2r_3^2}{E_2\left(r_3^2-r_2^2\right)}+\frac{(3+\sigma)r_2^2r_3^2}{8(1-\sigma)}A_2,$$

$$C_2=\frac{p_0(1-\sigma).2.r_2^2}{E_2\left(r_3^2-r_2^2\right)}-\frac{(3+\sigma)\left(r_2^2+r_3^2\right)}{4(1+\sigma)}A_2.$$

Переміщення по радіюсу ξ матиме такий вираз:

$$\xi=-\frac{Ar^3}{8}+\frac{Cr}{2}+\frac{D}{r}.$$

Очевидно, що, коли $r=r_2$, то переміщення ξ повинно бути однакове для першого й другого персня:

$$-\frac{A_1}{8}r_2^3+\frac{C_1r_2}{2}+\frac{D_1}{r_2}=-\frac{A_2}{8}r_2^3+\frac{C_2r_2}{2}+\frac{D_2}{r_2},$$

$$-\frac{A_1-A_2}{8}r_2^3+\frac{C_1-C_2}{2}r_2+\frac{D_1-D_2}{r_2}=0.$$

Підстановивши, замість C_1, C_2, D_1 і D_2, одержані вище вартості і взявши до уваги, що

$$A_1=\frac{\gamma_1}{g}\cdot\omega^2\frac{(1-\sigma^2)}{E_1} \quad \text{і} \quad A_2=\frac{\gamma_2}{g}\cdot\omega^2\frac{(1-\sigma^2)}{E_2},$$

знайдемо вартість p_0. Дальше визначення напруг можна зробити за відомими формулами.

495. Маховик американської системи з діяметром 2 *м* складається з бетонної маси, обтягнутої стальним обручем завгрубшки 1 *см* (рис. 460). Нехтуючи опором бетону розривові, обчисліть граничну кількість обертів маховика за хвилину, коли допускну напругу для стального обруча взяти 1500 *кг/см²*.

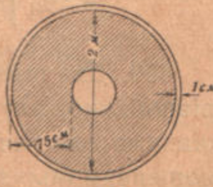


Рис. 460

Питома вага бетону 2,2; питома вага сталі 7,85.

496. Взявши до уваги, що обід маховика зазначених у задачі 489 розмірів злучено з маточиною шістьма чавунними шпицями, що мають поперечча 120 $см^2$, визначте напруги в шпицях і в ободі в місці закріплення шпиць, коли маховик крутиться зі швидкістю 500 обертів за хвилину.

497. На вал діяметром 20 *см* і завдовжки $l = 14$ *м* настромлено на кінцях два маховики однакової ваги 1000 *кг*, але з різними радіусами інерції: $\varrho_1 = 1$ *м* і $\varrho_2 = 0{,}577$ *м*. Знайдіть період власних хитань системи, нехтуючи вагою вала.

Відповідь.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\theta_1 . \theta_2 . l}{GJ_p(\theta_1 + \theta_2)}} = 0{,}106 \text{ сек.}$$

Тут θ_1 і θ_2 є моменти інерції маховиків.

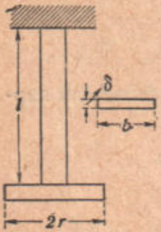


Рис. 461

498. Диск радіюса $r = 10$ *см* і вагою $Q = 1$ *кг* почеплено на стальній бинді завширшки $b = 5$ *см*, завгрубшки $\delta = 1$ *мм* і завдовжки $l = 1$ *м*. Знайдіть період хитань скручування диска.

Розв'язання. Залежність між кутом закручування φ й крутним моментом M визначить формула:

$$M = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\delta^3 G . \varphi}{l} = A\varphi.$$

Момент інерції диска:

$$J = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1 . 10^2}{981 . 2}.$$

Рівнання руху

$$J\varphi'' + A\varphi = 0.$$

Період

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{A}} = 0{,}388 \text{ сек.}$$

499. Два рівні вали I і II, що йдуть рівнобіжно, злучено одного з одним рівними еліптичними трибами з відношенням полувісків 4 : 3. Вал I рівномірно крутиться з кутовою швидкістю ω, на валі II заклинковано маховика, що важить $Q = 120$ *кг* і має радіюс інерції $\varrho = 0{,}8$ *м*. Яка може бути швидкість ω, коли діяметри валів $d = 8$ *см*,

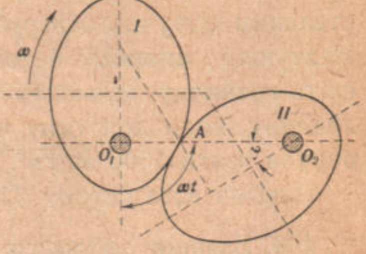


Рис. 462

коли напруги, зумовлені силами інерції маховика, не повинні перевищувати 800 *кг/см*^{2} (рис. 462).

Розв'язання. Вали лежать у фокусах еліпс, віддаль між валами дорівнює більшій осі еліпси. Точки дотикання завжди на лінії O_1O_2. Рівнання еліпси в полярних координатах буде:

$$\varrho=\frac{p}{1+e\cos\theta}=\frac{b^2}{a\left(1+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\varphi\right)}; \quad p=\frac{b^2}{a}, \quad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

$$b=\frac{3}{4}a, \; b^2=\frac{9}{16}a, \; a^2-b^2=\frac{7}{16}a^2, \; e=\frac{a\sqrt{7}}{4a}=\frac{\sqrt{7}}{4}, \; \frac{b^2}{a}=\frac{9}{16}a.$$

$$O_1A=\frac{b^2}{a\left(1+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\omega t\right)}; \quad O_2A=\frac{b^2}{a\left(1-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\varphi\right)}.$$

Маємо умову:

$$\frac{b^2}{a\left(1+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\omega t\right)}+\frac{b^2}{a\left(1-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cos\varphi\right)}\doteq 2a.$$

З цієї умови знаходимо φ''. Знавши кутове прискорення, знайдемо крутний момент $\frac{Q\varrho^2}{g}\varphi''$ від сил інерції й відповідні до нього напруги.

500. Знайдіть період T, частоту хитань і критичну швидкість для залізного вала, коли довжина вала $l=79$ *см*, $d=1$ *см*, $E=2.10^6$ *кг/см*^{2} і питома вага $\gamma=7{,}8$. Загальна вага вала $Q=0{,}483$ *кг*. Дані взято із спроби, поставленої в лябораторії Київського політехнічного інституту.

Розв'язання. Критичну кутову швидкість знайдемо з формули:

$$\omega_{\kappa p}=\sqrt{\frac{FJ.\pi^4}{\frac{Q}{lg}.l^4}};$$

звідси:

$$n=\frac{60.\omega}{2\pi}\simeq 1900; \qquad T=\frac{60}{n}\cong 0{,}0316 \textit{ сек.}$$

501. Знайдіть період і частоту хитань вантажного вагона, якщо його ресори мають стрілку вгину 3,3 *см*. Їхня „фабрична“ стрілка вгину (тобто до обтяження вагона ящиком і товаром) дорівнює 12,3 *см*.

Розв'язання. Розгляньмо ті хитання, що при них ящик вагона робить вертикальні поступні переміщення. Період хитань цього типу буде такий самий, як і в математичного маятника, що має довжину $l=12{,}3-3{,}3=9$ *см*:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=0{,}6\ сек.$$

Кількість хитань на хвилину дорівнює 100.

502. Машину, що важить 3,2 *т*, поставлено на двох опертих кінцями двотетових трямах з прогоном 3 *м* (рис. 463). Мавши на увазі, що підчас роботи машини будуть струшення й поштовхи, конструктор допустив напругу близько 550 *кг/см*² і взяв трями № 20 ($W=216$ *см*³, $J=2162$ *см*⁴). Спробою виявлено, що підчас нормального ходу машини 325 обертів за хвилину виникають дужі хитання трямів, що не дозволяють притримуватись потрібної кількости обертів. З'ясуйте, через що це.

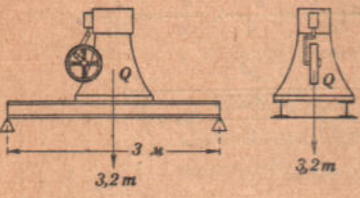


Рис. 463.

Розв'язання. Період власних хитань системи буде:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{f}{g}},\quad \text{де}\quad f=\frac{Ql^3}{2.48EJ}=0{,}208\ см.$$

Частота хитань:

$$k=\sqrt{\frac{g}{f}}=68{,}6;$$

$\omega_{кр}$ — критична кутова швидкість для машини $=k,\ \frac{k}{2},\ \frac{k}{3}$ й т. д.

Прирівнявши кутову швидкість машини до чисел $k,\ \frac{k}{2},\ \frac{k}{3},\ldots,$ знайдемо ті швидкості, що при них відбувається явище резонансу. Коли $\omega=\frac{2\pi n}{60}=k,$ то відповідна кількість обертів машини дорівнює $n=\frac{68{,}6.60}{2\pi}\cong 650$; коли $\omega_1=\frac{k}{2}$, то $n_1=325$. Отже при 325 обертах за хвилину відбувається явище резонансу. Якщо трями взяти слабші, допустивши напругу $R=1000$ *кг/см*², то $W=120$ *см*³. Можна взяти трями № 16:

$$W_1=118\ см^3,\quad J_1=945\ см^4,\quad f_1=0{,}476\ см,\quad k=\sqrt{\frac{981.1890}{900}}=45{,}3.$$

Відповідні критичні кількості обертів за хвилину $n_1 = 432$, $n_2 = 216$, $n_3 = 144$, $n_4 = 108$ і т. д., тобто трями цих нумерів для динамічних опорів будуть надійніші.

При розрахунках ми нехтували власною вагою трямів; щоб впровадити поправку, треба до ваги машини додати половину власної ваги трямів.

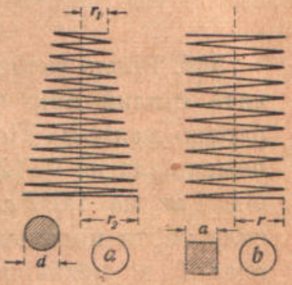


Рис. 464

503. Знайдіть період і частоту хитань трамвайного вагона, коли в ньому сидить 50 чоловіка пасажирів. Розгляньте той тип хитань, коли всі ресори стискаються або розтягуються воднораз. Ресори спіральні двох типів: 1) конічні круглого попереччя (рис. 464*a*) або 2) циліндричні квадратового попереччя (рис. 464*b*). Вага ящика = 3,2 *т*. Пересічна вага пасажира = 4 пуди, отже, 50 чоловіка важать 200 пудів = 3,2 *т*. Ресор 8.

Розмір ресор:

1) $r_1 = 5{,}1$ *см*, $r_2 = 6{,}4$ *см*, кількість звоїв $n = 6{,}5$, довжина $l = 235$ *см*^{2}, $d = 2{,}3$ *см*, $G = 1050000$ *кг/см*;

2) $r = 4{,}5$ *см*, $n = 7{,}5$, $a = 1{,}9$ *см*, $G = 915000$г *кг/см*^{2}.

Розв'язання. Тягар, що припадає на одну ресору:

$$P = \frac{(3{,}2 + 3{,}2) . 1000}{8} = 800 \text{ кг.}$$

Осідання ресор:

1) конічної:

$$f = \frac{Pl\,(r_2^3 + r_1^2)}{2GJ_p} = \frac{800 . 235\,(6{,}4^2 + 5.1^2)}{2 . 1050000 . 2{,}75} = 2.2 \text{ см.}$$

2) циліндричної:

$$f = \frac{P . 2\pi r^3 . n}{G . 0{,}141 a^4} = \frac{800 . 2\pi . 4{,}5^3 . 7{,}5}{915000 . 1{,}9^4} \approxeq 1{,}9 \text{ см.}$$

Конічна ресора

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2{,}2}{981}} = 0{,}3; \quad n = \frac{60}{0{,}3} = 200 \text{ хитань за хвилину,}$$

частота хитань $k = 21{,}1$.

Циліндрична ресора:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{1{,}9}{981}} = 0{,}28; \quad n' = \frac{60}{0{,}28} = 214 \text{ хитань за хвилину.}$$

Якщо профіль залізниці має такий криволінійний обрис, що через кожні 2 *м* ординати профіля повторюються в тому самому порядку, то для розглянутого вище роду хитань для конічної ресори за критичну швидкість буде:

$$v=\frac{2}{0{,}3}=6{,}67\ м/сек,$$

для циліндричної ресори:

$$v'-\frac{2}{0{,}28}=7{,}14\ м/сек.$$

504. Вільні хитания ресори записує писальний апарат, що ставить сталий опір (тертя), і через це амплітуди хитань безперервно маліють. Помічено, що після 5 повних хитань амплітуда поменшала на 0,512 *см*; крім того, відомо, що ресора витягається від 1 *кг* на 1,037 *см* і період хитання $T=0{,}925$ *сек.* Вирахуйте силу тертя писального приладу. (Дані взято із спроби, поставленої в механічній лябораторії Київського політехнічного інституту).

Відповідь. Сила тертя $S=0{,}0247$ *кг.*

505. Обчисліть розміри нормального стального камертона (рис. 465), що робить 870 звичайних хитань за секунду.

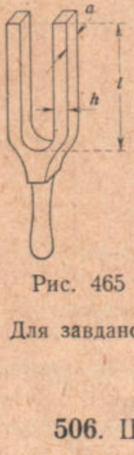


Рис. 465

Розв'язання. Частоту хитань визначимо з формули:

$$k=\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{33}{140}\cdot\frac{a.h.l.\gamma.l^3.12}{g.3.E.a.h^3}}};\quad l=\sqrt[4]{\frac{140.3.E.h^2g}{33.12.k^2.\pi^2.\gamma}}.$$

$$k=870,\quad \gamma=0{,}0078,\quad E=2{,}2.10^6\ кг/см^2.$$

Коли взяти $h=0{,}3$ *см*, то

$$l=\sqrt{\frac{140.3.2{,}2.10^6.0.3^2g}{33.12.870^2.3{,}14^2.0{,}0078}}=7{,}72\ см.$$

Для завданого матеріялу

$$\frac{l^2}{h}=\text{const}.$$

506. Щоб забивати палі завдовжки $l=5$ *м* і діяметром $d=30$ *см*, користуються бабою, що важить $Q=500$ *кг*. Які будуть стискні напруги в палі при вдарі, коли нижній кінець палі впреться нерухомо і височина підіймання баби $h=1$ *м*. Модуль пружности для дерева $E=1.10^5$ *кг/см²*.

Відповідь. 169 *кг/см*².

Розв'язання. Нехай λ буде те вкорочення, що виникне підо впливом удару. Потенційна енергія стиснутої палі буде:

$$V = \frac{\lambda^2 . E . F}{2l}.$$

Вона повинна дорівнювати тій роботі, що її зроблять зовнішні сили — в цьому випадку сила тяжіння Q (припускаємо, що вся кінетична енергія баби, що падає, перетворюється на потенційну енергію стиску). Щоб визначити λ, маємо рівняння:

$$\frac{\lambda^2 . E . F}{2l} Q (h + \lambda),$$

звідси при наших даних

$$\lambda = \frac{Ql}{EF} + \sqrt{\left(\frac{Ql}{EF}\right)^2 + \frac{Ql}{EF} 2h}.$$

Напруга

$$R = \frac{\lambda}{l} \cdot E = \frac{Q}{F} + \frac{F}{Q} \sqrt{1 + \frac{2hEF}{Ql}} = \frac{500}{707} \cdot 248{,}7 \approxeq 169 \text{ кг/см}^2.$$

Звичайно λ мале порівняно з h, і ми ними можемо знехтувати; тоді:

$$\frac{\lambda^2 EF}{2l} = Qh; \quad \lambda = \sqrt{\frac{2Ql . h}{EF}} = \sqrt{\frac{2 . 500 . 500}{1 . 10^5 . 700} \cdot 100}.$$

Вкорочення при вдарі дорівнює квадратовому кореневі з подвоєного добутку височини падання баби на те вкорочення, що його викликала б баба в палі при спокійному обтяженні.

507. Тягар $Q = 4\ m$ спускають на линві зі швидкістю 1 *м/сек*. Яка буде напруга в линві, коли верхній кінець линви раптово затримати. Довжина линви $l = 20$ *м*, площа поперечча $F = 15$ *см*², $E = 2 . 10^6$ *кг/см*². (Найнебезпечніший буде той випадок, коли линву спинити з самого початку руху, тобто, коли l мале. У цьому випадку потрібний дуже малий промежок часу, щоб напруга від нижнього кінця передалась до верхнього, і через це можна нехтувати масою линви).

Розв'язання. Положення центра тяжіння тягара Q в момент затримки верхнього кінця візьмім за початок координат. Від впливу сил інерції линва, після затримки верхнього кінця, буде витягатись, і тягар буде спускатись донизу доти, аж уся кінетична енергія тягара перетвориться на потенційну енергію розтягнутої линви. Нехай a буде видовження линви, відповідне до моменту затримки, $a = \frac{Ql}{EF}$, а λ—додаткове видовження, що його робить тягар через інерцію. Призростання потенційної енергії в линві буде:

$$\frac{(a+\lambda)^2 EF}{2l} - \frac{a^2 EF}{2l} = \frac{\lambda^2 EF}{2l} + \frac{a\lambda EF}{l} = \frac{\lambda^2 EF}{2l} + Q\lambda.$$

Цей приріст потенційної енергії повинен дорівнювати роботі зовнішніх сил плюс втрачена кінетична енергія:

$$\frac{\lambda^2 EF}{2l} + Q\lambda = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + Q\lambda; \qquad \lambda = v\sqrt{\frac{Ql}{gEF}}.$$

Натяг линви

$$P = \frac{(\lambda + a) EF}{l} = Q + v\sqrt{\frac{Q}{g} \cdot \frac{EF}{l}} = Q + 100\sqrt{\frac{4000.2.10^6.15}{981.2000}} =$$

$$= 4000 + 24700 \text{ кг}.$$

Коли l малі, то можуть виникнути величезні напруги. Якщо миттьова затримка відбувається з початку руху, то це може спричинитись до розриву линви.

При обчисленнях ми взяли модуль пружности линви, рівний модулеві пружности заліза. Насправді ж для E треба брати значно менші величини, бо розтяжність линви значно більша, ніж розтяжність тих дротів, що з них линву сплетено.

Рис. 466

508. Доведіть, що напруги, які ми одержали в попередній задачі, можна значно зменшити, якби між тягарем і линвою вставити пружину (рис. 466). Знайдіть величину найбільших напруг, коли всі умови руху залишаються ті самі, що й у попередній задачі. Штивність пружини характеризує те, що вона видовжується на $s = 2$ *см* від чину розтяжної сили $1m$.

Розв'язання. Позначмо літерою P величину найбільшого розтяжного зусилля, що виникає тоді, як раптово спинити верхній кінець линви. Відповідне видовження линви буде:

$$\frac{Pl}{EF} + \frac{Ps}{1000}.$$

Статичний розтяг визначає формула:

$$\frac{Ql}{EF} + \frac{Qs}{1000}.$$

Рівнання живої сили дає нам:

$$\frac{P^2}{2}\left(\frac{l}{EF} + \frac{s}{1000}\right) - \frac{Q^2}{2}\left(\frac{l}{EF} + \frac{s}{1000}\right) = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + Q(P - Q$$

$$\left(\frac{l}{EF} + \frac{s}{1000}\right).$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l}{EF}+\frac{s}{1000}\right)[P^2-2PQ+Q^2]=\frac{Q}{g}\cdot\frac{v^2}{2};$$

$$P=Q+v\sqrt{\frac{Q}{g\left(\frac{l}{EF}+\frac{s}{1000}\right)}}=4000+100\sqrt{\frac{4000}{981\left(\frac{2000}{2\,.\,10^6\,.\,15}+\frac{2}{1000}\right)}}\approx 8440\ кг.$$

Величина найбільших напруг буде:

$$p_{max}=\frac{P}{F}=563\ кг/см^2.$$

509. Линва ліфта має діяметр $d=2\,см$ і являє собою замкнуте коло, що охоплює верхні й нижні коліщата (рис. 467). Вага клітки 115 *кг*. Спускання й підіймання відбувається зі швидкістю 1 *м/сек*. Визначте, яка напруга виникне в линві, коли через защекнення в крутнях або якби машина раптово спинилась, клітка з шістьма людьми затримається на початку спускання, тобто на височині 15,5 *м* від точки її закріплення на линві до нижнього крутня. Шість чоловік важать пересічно по 4 пуди, отже, загальне обтяження буде ~500 *кг*. Линва має 48 ниток діяметром 1,8 *мм*, $F=0{,}0254\,.\,48=1{,}22\,см^2$ (взагалі 40% загальної площі). Модуль пружности линви вважаємо за рівний $\frac{1}{3}$ модуля його складових дротів. Візьмім $E=2{,}1\,.\,10^6\ кг/см^2$; $\frac{1}{3}E=700000\ кг/см^2$. Розривну напругу для дротів візьмім 12000 *кг/см²*. Для линви цю величину треба зменшити, згідно з спробами, на 10%, $R_b=10800\ кг/см^2$. Приблизна вага линви 1,15 *кг/м*.

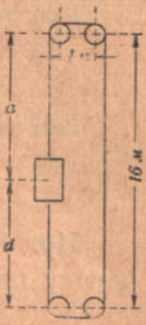


Рис. 467

Розв'язання. Через сили інерції линва, після затримки верхнього кінця, буде витягатись, а тягар буде спускатись донизу доти, аж вся кінетична енергія тягара перетвориться на потенційну енергію розтягнутої линви. Видовження від статичного обтяження Q:

$$\lambda_s=\frac{Ql}{EF};$$

коли λ_d буде видовження линви від динамічних причин, то приріст потенційної енергії буде:

$$\frac{(\lambda_s+\lambda_d)^2EF}{2l}-\frac{\lambda_s^2EF}{2l}=\frac{\lambda_d^2EF}{2l}+\frac{\lambda_d\lambda_sEF}{l}=$$

$$=\frac{\lambda_d^2EF}{2^l}+Q\lambda_d.$$

бо

$$\frac{\lambda_s EF}{l} = Q.$$

Рівнання живих сил дає нам:

$$\frac{\lambda_d^2 EF}{2l} = Q\lambda_d = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} + Q\lambda_d; \quad \lambda_d = v\sqrt{\frac{Ql}{gEF}}.$$

Натяг линви

$$P = \frac{(\lambda_d + \lambda_s)EF}{l} = Q + v\sqrt{\frac{Q}{g} \cdot \frac{EF}{l}}; \quad v\sqrt{\frac{QEF}{gl}} = \frac{66000}{\sqrt{l}}.$$

Коли защекнення станеться в верхньому коліщаті, то $l = 0,5$ *м*.

$$P = 500 + \frac{66000}{\sqrt{50}} = 9850 \text{ кг}.$$

Коли защекнеться нижнє коліща, то l візьмемо 17 *м*,

$$P_1 = 500 + \frac{66000}{\sqrt{1700}} = 2100 \text{ кг}.$$

510. Визначте напруги в линві попередньої задачі, коли клітку почеплено на линві за допомогою двох пружин, що автоматично гальмують у випадку розриву линви (рис. 468)

Розміри пружини такі, що від натягу линви 1 *т* віддаль AB більшає на $s = \frac{25}{6}$ *см*.

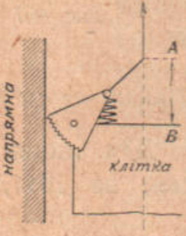


Рис. 468

Розв'язання. Коли клітка спиниться в верхньому положенні, то $l = 0,5$ *м*. Натяг P визначимо з формули:

$$P = Q + v\sqrt{\frac{Q}{g\left(\frac{l}{EF} + \frac{s}{1000}\right)}} = 1600 \text{ кг}.$$

511. Тягар 20 *кг* спускається вільно від чину сили тяжіння на стальному дроті, що розмотується з барабана. Діяметр дроту 2 *мм*. Визначте напругу в дроті, нехтуючи його вагою, коли раптово затримати верхній кінець дроту (рис. 469).

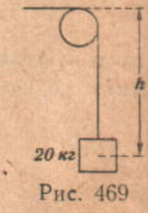


Рис. 469

Розв'язання. Для найбільшого натягу дроту маємо наближену формулу:

$$P = Q + v\sqrt{\frac{Q}{g} \cdot \frac{EF}{l}}.$$

Покладім:

$$v^2=2gh,\quad h=l;\quad P=Q+\sqrt{\frac{QEFgl}{gl}}=Q+\sqrt{2QEF},$$

тобто натяг дроту не залежить від довжини l.

512. Знайдіть граничну височину h, що з неї може впасти тягар $Q=12\,кг$, не викликавши в штабі AB напруг більших від межі пружности (рис. 470). Межа пружности $p=200\,кг/см^2$. Довжина штаби $l=3\,м$, площа попереччя $F=3\,см^2$. Припускаємо, що вся кінетична енерґія тягара, що падає, перетворюється на потенційну енерґію розтягу.

Рис. 470

Розв'язання.

$$p_{max}=\frac{Q}{F}+\sqrt{\left(\frac{Q}{F}\right)^2+\frac{Q}{F}\cdot\frac{F}{l}\cdot\frac{v^2}{g}},\quad \lambda=\lambda_{st}+\sqrt{\lambda^2_{st}+2\lambda_{st}h}.$$

Найбільше видовження

$$\lambda=\frac{2000}{2.10^6}\cdot 200=0{,}2\,см.\quad \lambda_{st}=\frac{4}{2.10^6}\cdot 200=\frac{1}{500}\cdot 0{,}2\,см.$$

У першому наближенні можна знехтувати величиною λ_{st}; тоді:

$$\lambda^2=2\lambda_{st}.h;\quad h=\frac{\lambda^2}{2\lambda_{st}}=\frac{1}{2}\cdot\lambda.500=50\,см;$$

точніше:

$$h=49{,}8\,см.$$

Розв'язуючи задачу, ми нехтували масою штаби; тоді кінетична енерґія тягара, що падає, цілком перетворюється на потенційну енерґію розтягу. Вплив маси штаби приблизно можна обислити так. Нехай v_c буде швидкість тягара Q після закінчення першого періоду вдару. Швидкість у довільному попереччі mn можна покласти:

$$v_x=\frac{v_c.x}{l}.$$

Відповідна жива сила штаби буде:

$$\frac{1}{2}\int_0^l\frac{F.\gamma.dx}{g}\left(\frac{v_c.x}{l}\right)^2=\frac{q}{2g}\cdot\frac{v_c^2}{3},$$

де q є вага штаби. Жива сила така сама, якби $\frac{1}{3}$ маси штаби зосереджено на кінці, а штаба неваговита. При такій умові v_c знайдемо з рівнання кількости руху:

$$\left(Q+\frac{q}{3}\right)v_c=Q.v;\quad v_c=\frac{Q}{Q+\frac{q}{3}}\cdot v.$$

На потенційну енерґію розтягу перетвориться жива сила:

$$\frac{\left(Q+\frac{1}{3}q\right)v^2}{2g}\cdot\frac{Q}{\left(Q+\frac{q}{3}\right)^2}=\frac{Q.v^2}{2g}\cdot\frac{Q}{Q+\frac{q}{3}}.$$

513. Двотетовий трям № 15 лежить на двох опорах з прогоном 2 *см*. З якої височини повинен упасти тягар $Q=100$ *кг*, щоб найбільші напруги від згину дорівнювали 2000 *кг/см*²? Як доведеться змінити височину падання, коли прогін збільшити в два рази? $J_x=734$ *см*⁴ (німецький сортамент), $W_x=98$ *см*³.

Розв'язання. $f_{st}=\frac{Ql^3}{48EJ}=\frac{100.200^3}{48.2.10^6.734}=0{,}01134$ *см*. Напруга, що відповідає статичному вгинові, $\frac{M}{W}=\frac{100.200}{4.98}=51$ *кг/см*². При динамічному обтяженні напруга буде 2000 *кг/см*², тобто в 40 разів більша, отже, динамічний вгин f_d можна вважати за великий проти f_{st}; тоді, за наближеною формулою для f_d, знайдемо:

$$f_d=\sqrt{2h.f_{st}};\quad h=\frac{1}{2}f_d\frac{f_d}{f_{st}},$$

отже, $h=\sim 2fd$. Друге наближення:

$$2f_{st}\ h=\sim(f_d-f_{st})^2,\quad h=\frac{(fd-f_{st})^2}{2f_{st}}.$$

Коли збільшити прогін у два рази, то цим об'єм тряму побільшає в два рази. Напруга p_d, визначена з формули:

$$p_d=\sqrt{\frac{Q.E.v^2}{F.l.g}},$$

не зміниться, коли v^2 побільшає в два рази, тобто, коли h побільшає в два рази. Так само, як і в попередній задачі, можна приблизно врахувати вплив маси тряму. Нехай v_c буде швидкість тягара після першого періоду вдару. Припустім, що вздовж тряму швидкість міниться за законом синуса. У поперечці mn на віддалі x від лівого кінця швидкість буде:

$$v_x=v_c\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Жива сила визначиться формулою:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{v_c^2\lambda F dx}{g}\cdot\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{v_c^2 q}{2g}\cdot 0{,}5,$$

де q є вага тряму. Результат такий самий, якби трям був неваговитий. а 0,5 його маси зосереджено по середині прогону. Швидкість v_c знайдемо з рівнання: $(Q+0{,}5q) = Qv$. Жива сила системи, що перетворюється на потенційну енергію згину, буде:

$$\frac{(Q+0{,}5q)}{2g}\cdot v^2\cdot\frac{Q^2}{(Q+0{,}5q)} = \frac{v^2 Q}{2g}\cdot\frac{1}{1+0{,}5\cdot\frac{Q}{q}}.$$

514. Круглий перстень, що має незмінне поперечча, зазнає чину вдару тягарем Q, що падає з височини h. Знайдіть динамічний стиск персня (рис. 471).

Розв'язання. Динамічний стиск λ_d можна знайти з рівнання:

$$\lambda_d = \lambda_{st} + \sqrt{\lambda_d^2 + 2h\lambda_{st}}.$$

Замість λ_{st} для персня, нехтуючи впливом подовжної сили, можемо взяти:

$$\lambda_{st} = \frac{2Qr^3}{EJ}\left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\right].$$

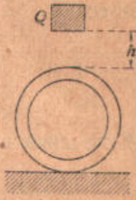


Рис. 471

515. Знайдіть угин однокінцево закріпленого тряму від удару тягарем, що падає на вільний кінець. Вираховуючи візьміть до уваги масу тряму (рис. 472).

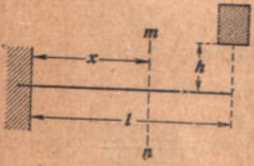


Рис. 472

Розв'язання. Коли знехтувати масою тряму, то кінетична енергія тягара Q, що падає, цілком перетвориться на потенційну енергію зігнутого тряму (в момент найбільшого вгину f_d). Позначмо вагу тряму літерою q. Швидкість тягара Q, що падає, в той момент, коли він торкнеться тряму, $v = \sqrt{2gh}$. Позначивши швидкість після вдару в поперечні mn літерою v_x, швидкість вільного кінця літерою v_c і відповідні вгини літерами f_x і f, можемо покласти:

$$v_x = v_c\frac{f_x}{f},$$

але для цього випадку

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ},\quad f_x = \frac{P(3lx^2 - x^3)}{6EJ},$$

отже,

$$v_x = v_c \cdot \frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}.$$

Жива сила тряму безпосередньо після вдару буде:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{b}{g.l} v_x^2 dx = \frac{1}{2} \frac{qv_c^2}{4g.l^6}\int_0^l (9l^2x^4 - 6lx^5 + x^6)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q}{g} \cdot \frac{1}{4l^6}\left(\frac{9l^7}{5} - l^7 + \frac{l^7}{7}\right) v_c^2 = \frac{1}{2} \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{g}\, v_c^2,$$

де q є власна вага тряму. Зведену масу тряму можна вважати за рівну $\frac{33}{140} \cdot \frac{q}{}$. Тепер з рівнання кількостей руху при вдарі знайдемо:

$$v_c\left(\frac{Q}{g} + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{g}\right) = v.\frac{Q}{g}.$$

звідси

$$v_c = v \cdot \frac{\frac{Q}{g}}{\frac{Q}{g} + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{g}}, \text{ або } v_c = v \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{Q}}.$$

Жива сила всієї системи буде:

$$\frac{Q}{2g}\left(\frac{1}{1 + \frac{33}{140} \frac{q}{Q}}\right) v^2.$$

Вгин знайдемо з рівнання:

$$\frac{3EJ}{2l^3} \cdot f_d^2 + \frac{Q}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{Q}} \cdot v^2 + Q.f_d + \int_0^l \frac{qdx}{l} \cdot f_x.$$

Припустім, що височина, з якої падає тягар, велика проти вгину; тоді:

$$f_d = \sqrt{\frac{2Ql^3}{3EJ} \cdot h \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{Q}}}, \text{ або } f_d = \sqrt{2f_{st} \cdot h . \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{q}{Q}}}.$$

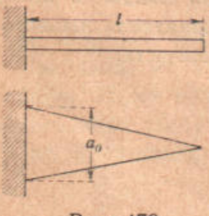


Рис. 473

516. На кінець тряму, що має рівноопірну форму (рис. 473), падає тягар $Q = 4$ *кг* з височини $h = 1{,}2$ *м*. Височина тряму $b = 1$ *см*, ширина в підошві $a_0 = 20$ *см*, прогін $l = 1$ *м*. Знайдіть динамічну стрілу вгину, напруги й обчисліть вплив на вгин маси тряму $E = 2.10^6$ *кг/см*^{2}, $\gamma = 0{,}00785$ *кг/см*^{3}.

Розв'язання.

$$f_d=f_{st}+\sqrt{f_{st}^2+2f_{st}h},\quad f_{st}=\frac{Ql^3}{2EJ_0}=\frac{4.10^6.12}{2.2.10^6.20.1^3}=0{,}6\ \text{см.}$$

$$f_d=0{,}6+\sqrt{0{,}36+2.0{,}6.120}=12{,}62\ \text{см.}$$

Напруга

$$p_{max}=\frac{6Pl}{a_0b^2},\ P=\frac{f_d.2EJ_0}{l^3},\ p_{max}=\frac{22{,}62.2.2.10^6.1.100.}{10^6.12}=2524\ кг/см^2$$

Визначмо вплив маси тряму:

$$E\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P(l-x).12}{\frac{a_0}{l}(l-x).b^3}=\frac{12Pl}{a_0b^3};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12Pl}{a_0b^3E}\cdot x+C_1;$$

коли $x=0$, то $y'=0$, отже, $C_1=0$.

Рівнання зігнутої осі буде:

$$y=\frac{6Plx^2}{a_0b^3E}+C_2;$$

коли $x=0$, то $y=0$, отже, $C_2=0$. Припустім, що швидкості окремих елементів тряму міняться за тим самим законом:

$$y=f\cdot\frac{x^2}{l^2};\quad v_x=v_c\cdot\frac{x^2}{l^2}.$$

Жива сила, що її набуває трям, коли падає тягар, буде:

$$\int_0^l\frac{a_0(l-x)}{l}\cdot\frac{\gamma b}{g}\cdot\frac{v_c^2x^4}{2l^4}\cdot dx=\frac{1}{15}\frac{q}{g}\cdot\frac{v_c^2}{2},$$

де $q=\frac{a_0b.\gamma.l}{2}$ є власна вага тряму. Отже, зведена тряму дорівнює $\frac{1}{15}\frac{q}{g}$. Швидкість v_c знайдемо з рівнання кількостей руху:

$$\frac{Q}{g}\cdot v=\frac{\left(Q+\frac{1}{15}q\right)v_c}{g};\quad v_c=\frac{v.Q}{Q+\frac{1}{15}q}.$$

Жива сила системи, що перетворюється на потенційну енергію згину, буде:

$$\frac{\left(Q+\frac{1}{15}q\right)v_c^2}{2.g}=\frac{Q.v^2}{2.g}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{15}\cdot\frac{q}{Q}}.$$

Динамічна стріла вгину f'_d, що при цьому одержується, буде, очевидно, менша, ніж та, що ми одержали вище, знехтувавши масою тряму, а саме:

$$f'_d = f_d \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{15}\cdot\frac{q}{Q}}} = f_d \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}131}} = 0{,}94 . f_d.$$

517. На валі, що має діяметр 10 *см*, крутиться з кутовою швидкістю 100 обертів за хвилину й передає 35*HP*, настромлено маховика, що важить 1000 *кг* і має діяметр 2 *м*. Вирахуйте, на скільки відсотків побільшають максимальні напруги вала, коли нерівномірність кружіння маховика $\beta = \frac{1}{100}$. Обчисляючи моменти інерції, треба припустити, що 0,9 усієї маси зосереджено на ободі.

Відповідь. На 80%.

Розв'язання. Припустім, що кутова швидкість визначається формулою:

$$\omega = \omega_0 (1 + \beta \sin 2\, \omega_0 t),$$

де ω_0 є пересічна швидкість; при цьому кутове прискорення буде:

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\beta\omega_0^2 \cos 2\omega_0 t,$$

отже,

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{max} = 2\beta\omega_0^2 = 0{,}02 \left(\frac{100 . 2\pi}{60}\right)^2 = 2{,}19.$$

Крутний момент від сил інерції маховика буде:

$$\frac{Q}{g} \cdot 0{,}9 . R^2 \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{max} = \sim 20000 \text{ кгсм}.$$

518. Вирахуйте величину танґенційних напруг у валі попередньої задачі, припустивши, що трапилась раптова затримка вала біля корби, яка віддалена від маховика на 2 *м*. Масою вала знехтуйте.

Розв'язання. Припустім, що вся жива сила маховика перетворюється на потенційну енерґію скручування вала; тоді:

$$\frac{J\omega^2}{2} = \frac{\varphi^2 G J_p}{2l}\,;\ p_t = \frac{Gr}{l}\,\varphi;$$

модуль зсуву $G = 8 . 10^5$ *кг/см²*, J — момент інерції маховика, l — довжина й J_p — полярний момент інерції поперечня вала.

519. Вирахуйте напругу в чавунних шпицях маховика при умовах, зазначених у попередніх задачах, тобто: 1) коли маховик крутиться з нерівномірністю $\beta = \frac{1}{100}$, і 2) коли вал раптово спиниться. Шпиць 6, попереччя шпиць округле: їхній діяметр 7 *см*; довжину вважайте за рівну радіюсові маховика; E для чавуну $= 8 . 10$ *кг*/*см*^{2}. Масою шпиць знехтуйте.

Розв'язання. Обчисляємо шпиці, як однокінцево закріплені трями. Другий кінець переміщується так, що скривлена вісь шпиці нормальна до ободу колеса. При вдарі живу силу треба прирівняти до енергії скручування вала, додаваній до енергії згину шпиць. Наявність шпиць, очевидно, трохи пом'якшить удар.

520. На валі, що має діяметр 10 *см*, є два маховики з однаковими моментами інерції: $J = \frac{900}{g} \cdot 100^2$, при тому одного маховика заклинковано на валі постійно, а другий, що вільно крутиться з швидкістю 100 обертів на хвилину, можна в мить злучити з валом за допомогою особливого пристрою й таким чином урухомити всю систему. Які при цьому виникнуть тангенційні напруги у валі, коли віддаль між маховиками 8 *м*? Масою вала знехтуйте.

Розв'язання. Моменти кількостей руху до вдару й після нього дорівнюють один одному: $J\omega = J\omega_1 + J\omega_2$. У момент найбільшого закручування вала $\omega_1 = \omega_2$, отже:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{2}; \quad \frac{J\omega^2}{4} = \frac{\varphi^2 G J_p}{2l}; \quad p_t = r\omega \sqrt{\frac{GJ}{2lJ_p}} = 3550 \text{ кг/см}^2.$$

521. Тягар Q падає з височини h на два трями з опертими кінцями, що лежать навхрест і дотикаються один до одного. Знайдіть напругу в трямах при вдарі. Масою трямів можна знехтувати (рис. 474).

Розв'язання.

$$\frac{X}{2} \cdot f_d + \frac{Y}{2} \cdot f_d = Q(h + f_d);$$

$$f_d = \frac{Xl_1^3}{48EJ}, \quad f_d = \frac{Yl_2^3}{48EJ}.$$

Для визначення f_d одержимо рівняння другого степеня.

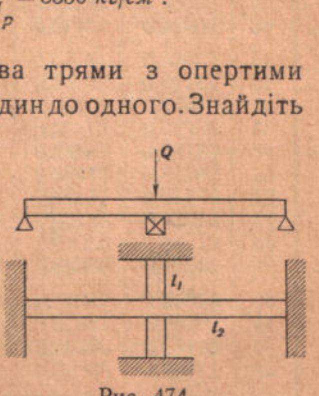


Рис. 474

522. Визначте напруги в трямах і в ланцюзі зводу, припустивши, що підіймання тягара Q, яке відбувалось зі швидкістю 0,25 *м/сек*, раптово припинено. Віддаль від тягара до точки чіпляння 4 *м*. Ланцюг системи Галя (вважайте за суцільну штабу) має площу попереччя 34 *см*^{2}. Масою трямів (вони важать 1200 *кг*) і ланцюга (він важить 300 *кг*) знехтуйте.

Розв'язання. Тягар підіймається через інерцію на височину $h=\frac{v^2}{2g}$ і, впавши назад, спричиниться до натягу в ланцюзі X. Позначивши літерою f_d динамічний угин трямів і літерою δ — динамічний розтяг ланцюга, одержимо:

$$\frac{X(f+d)}{2}=Q(h+f+\delta).$$

Підстановивши в це рівнання вартості:

$$\delta=\frac{Xl_1}{EF},\ f=\frac{Xl_2^3}{48EJ},$$

одержимо рівнання для визначення X.

ТАБЛИЦІ ДЛЯ ОБЧИСЛЕНЬ

ТАБЛИЦІ КОЛОВИХ ФУНКЦІЙ

Град.	Sinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07845	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	**80**
10	0,17365	0,17651	0,17937	9,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	**70**
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	**50**
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69041	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Cosinus							

Град.	Cosinus							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	**80**
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95772	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,95264	0,94167	0,94068	0,93969	**70**
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	**60**
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	**50**
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,77325	0,71121	0,70916	0,70711	45
	60′	40′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Sinus							

Град.	Tangens						
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0.03492	0,03783	0,04075	0,04366	0.04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,95824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0.07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0.12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0.14054	0,14351	0,14648	0,14945	0.15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0.16734	0,17033	0,17333	0,17633	**80**
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0.19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0.22475	0,22781	0,23087	77
13	0.23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0.26795	0,27107	0,27419	0,27732	0.28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0.36497	**70**
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0.42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0.44175	0,44523	66
24	0.44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0.47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0.50222	0.50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0.51688	0,52057	0,52427	0,52798	0.53171	62
28	0.53171	0,53545	0,53920	0.54296	0,54673	0,55051	0.55431	61
29	0,55431	0,55812	0.56194	0,56577	0.56962	0,57348	0.57735	**60**
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0.64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0.66608	0,67028	0,67451	56
34	0.67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0.70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0.72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0.76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0.79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	**50**
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0'88473	0,88992	0,89515	0.90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0.92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0.94345	0,94896	0,95451	0,96008	0.96569	46
44	0,96569	0,9713$_3$	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Cotangens							

Град.	Cotangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	∞	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8.55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7.77035	7,59575	7,42871	7.26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6.69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5.97576	5,87080	5,76937	5,67128	**80**
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3.44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3.27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3.17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2.96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2.74748	**70**
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2.00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1.93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	**60**
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1.66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1.61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1.56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1.51084	1,50133	1.49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1.36800	1,35968	1.35142	1.34323	1.33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1.23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1.20593	1,19882	1,19175	**50**
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1.11061	1,10414	1,09770	1,09131	1.08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1.05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1.03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	
	Tangens							

ДОВЖИНИ ДУГИ, СТРІЛКИ, ХОРДИ Й ПЛОЩ СЕҐМЕНТА ДЛЯ РАДІЮСА = 1

Центр. кут у град.	Довжина дуги	Стрілка	Довжина хорди	Площа сеґмента	Центр. кут у град.	Довжина дуги	Стрілка	Довжина хорди	Площа сеґмента
1	0,0175	0.0000	0,0175	0,00000	31	0,5411	0,0364	0,5345	0,01301
2	0,0349	0,0002	0,0349	0,00000	32	0,5585	0,0387	0,5512	0,01429
3	0,0524	0,0003	0,0524	0,00001	33	0,5760	0,0412	0,5680	0,01566
4	0,0698	0,0006	0,0698	0,00003	34	0,5934	0,0437	0,5847	0,01711
5	0,0873	0,0010	0,0872	0,00006	35	0,6109	0,0463	0,6014	0,01864
6	0,1047	0,0014	0,1047	0,00010	36	0,6283	0,0489	0,6180	0,02027
7	0,1222	0,0019	0,1221	0.00015	37	0,6458	0,0517	0,6346	0,02198
8	0,1396	0,0024	0,1395	0,00023	38	0,6632	0,0545	0,6511	0,02378
9	0,1571	0,0031	0,1569	0,00032	39	0,6807	0,0574	0,6676	0,02568
10	0,1745	0,0038	0,1743	0,00044	**40**	0,6981	0,0603	0,6840	0,02767
11	0,1920	0,0046	0,1917	0,00059	41	0,7156	0,0633	0,7004	0,02976
12	0,2094	0,0055	0,2091	0,00076	42	0,7330	0,0664	0,7167	0,03195
13	0,2269	0,0064	0,2264	0,00097	43	0,7505	0,0696	0,7330	0,03425
14	0,2443	0,0075	0,2437	0,00121	44	0,7679	0,0728	0,7492	0,03664
15	0,2618	0,0086	0,2611	0,00149	45	0,7854	0,0761	0,7654	0,03915
16	0,2793	0,0097	0,2783	0,00181	46	0,8029	0,0795	0,7815	0,04176
17	0,2967	0,0110	0,2956	0,00217	47	0,8203	0,0827	0,7975	0,04448
18	0,3142	0,0123	0,3129	0,00257	48	0,8378	0,0865	0,8135	0,04731
19	0,3316	0,0137	0,3301	0,00302	49	0,8552	0,0900	0,8294	0,05025
20	0,3491	0,0152	0,3473	0.00352	**50**	0,8727	0,0937	0,8452	0,05331
21	0,3665	0,0167	0,3645	0,00408	51	0,8901	0,0974	0,8610	0,05649
22	0,3840	0,0184	0,3816	0,00468	52	0.9076	0,1012	0,8767	0,05978
23	0,4014	0,0201	0,3987	0,00535	53	0,9250	0,1051	0,8924	0,06319
24	0,4189	0,0219	0,4158	0,00607	54	0,9425	0,1090	0.9080	0,06673
25	0,4363	0,0237	0,4329	0,00686	55	0,9599	0,1130	0,9235	0,07039
26	0,4538	0.0256	0,4499	0,00771	56	0,9774	0,1171	0,9389	0,07417
27	0.4712	0,0276	0,4669	0,00862	57	0,9948	0,1212	0,9543	0,07808
28	0,4887	0,0297	0,4838	0,00961	58	1,0123	0,1254	0,9696	0,08212
29	0,5061	0,0319	0,5008	0,01067	59	1,0297	0,1296	0,9848	0,08629
30	0,5236	0,0341	0,5176	0,01180	**60**	1,0472	0,1340	1,0000	0,09059

Центр. кут у град.	Довжина дуги	Стрілка	Довжина хорди	Площа сегмента	Центр. кут у град.	Довжина дуги	Стрілка	Довжина хорди	Площа сегмента
61	1,0647	0,1384	1,0151	0,09502	76	1,3265	0,2120	1,2313	0,17808
62	1,0821	0,1428	1,0301	0,09958	77	1,3439	0,2174	1,2450	0,18477
63	1,0996	0,1474	1,0450	0,10428	78	1,3614	0,2229	1,2586	0,19160
64	1,1170	0,1520	1,0598	0,10911	79	1,3788	0,2284	1,2722	0,19859
65	1,1345	0,1566	1,0746	0,11408	**80**	1,3963	0,2340	1,2856	0,20573
66	1,1519	0,1613	1,0893	0,11919	81	1,4137	0,2396	1,2989	0,21301
67	1,1694	0,1661	1,1039	0,12443	82	1,4312	0,2453	1,3121	0,22045
68	1,1869	0,1710	1,1184	0,12982	83	1,4486	0,2510	1,3252	0,22804
69	1,2043	0,1759	1,1328	0,13535	84	1,4661	0,2569	1,3383	0,23578
70	1,2217	0,1808	1,1472	0,14102	85	1,4835	0,2627	1,3512	0,24367
71	1,2392	0,1859	1,1614	0,14683	86	1,5010	0,2686	1,3640	0,25171
72	1,2566	0,1910	1,1756	0,15279	87	1,5184	0,2746	1,3767	0,25990
73	1,2741	0,1961	1,1896	0,15889	88	1,5359	0,2807	1,3893	0,26825
74	1,2915	0,2014	1,2036	0,16514	89	1,5533	0,2867	1,4018	0,27675
75	1,3090	0,2066	1,2175	0,17154	**90**	1,5708	0,2929	1,4142	0,28540

Якщо r радіюс кола і φ центральний кут у градусах, то

1) довжина хорди: $s=2r\sin\frac{\varphi}{2}$;

2) стрілка: $h=r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4}=r\quad\sin^2\frac{\varphi}{4}$;

3) довжина дуги: $l=\pi r\frac{\varphi}{180}=0{,}017453\ r\varphi=\sqrt{s^2+\frac{16}{3}h^2}$ (приблизно);

4) площа сегмента $=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\varphi-\sin\varphi\right)$;

5) площа сектора $=\frac{\varphi}{360}\pi r^2=0{,}00872665\varphi r^2$;

6) довжина дуги $=r$ при $\varphi=57°17'\ 44{,}806''$;
7) arc $1°=\pi/180=0{,}017453292$; lg arc $1°=0{,}241877-1$;
8) arc $1'=\pi/10800=0{,}000290888$; lg arc $1'=0{,}463726-4$;
9) arc $1''=\pi/648\,000=0{,}000004848$; lg arc $1''=0{,}685574866-6$.

КВАДРАТОВІ Й КУБІЧНІ КОРЕНІ З ДЕЯКИХ ДРОБІВ

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
$^1/_3$	0,57735	0,69336	$^1/_7$	0.37796	0,52276	$^1/_8$	0,35355	0,50000	$^4/_9$	0,66667	0,76314
$^2/_3$	0,81650	0,87358	$^2/_7$	0,53452	0,65863	$^3/_8$	0,61237	0,72112	$^5/_9$	0,74536	0,82207
$^1/_4$	0,50000	0,62996	$^3/_7$	0,65465	0,75395	$^5/_8$	0,79057	0,85499	$^7/_9$	0,88192	0,91964
$^3/_4$	0,86603	0,90856	$^4/_7$	0.75593	0,82983	$^7/_8$	0,93541	0,95647	$^1/_{12}$	0,28868	0,43679
$^1/_6$	0,40825	0,55032	$^5/_7$	0,84515	0,89390	$^1/_9$	0,33333	0,48075	$^5/_{12}$	0,64550	0,74690
$^5/_6$	0,91287	0,94104	$^6/_7$	0,92582	0,94991	$^2/_9$	0,47140	0,60571	$^7/_{12}$	0,76376	0,83555

ВАЖЛИВІ ЧИСЛОВІ ВЕЛИЧИНИ

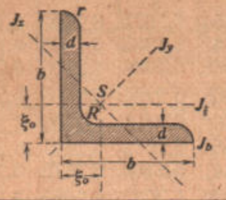
Величина	n	$\log n$	Величина	n	$\log n$	Величина	n	$\log n$
π	3,1415927	0,49715	$\pi\sqrt{2}$	4.4428829	0,64767	$\sqrt[3]{3:\pi}$	0,984745	0,99332—1
2π	6.2831853	0,79718	g	9,81	0,99167	$1:2g$	0,050968	0,70830—2
3π	9,4247780	0,97427	g^2	96,2361	1,98334	$2\sqrt{g}$	6,264184	0,79686
$\pi:2$	1,5707963	0,19612	$\sqrt{g}$	3,1320919	0,49583	$\sqrt{2g}$	4,429447	0,64635
$\pi:3$	1,0471976	0,02003	$\pi:\sqrt{2}$	2,221442	0,34663	$\pi\sqrt{g}$	9,839757	0,99298
$\pi:4$	0,7853982	0,89509—1	$2\sqrt{\pi}$	3,544908	0,54960	$\pi\sqrt{2g}$	13,91536	1,14350
π^2	9,8696044	0,99430	$\sqrt{2\pi}$	2,506628	0.39909	$\pi:\sqrt{g}$	1,003033	0.00132
π^3	31,006277	1,49145	$\sqrt{\pi:2}$	1,253314	0,09806	$\pi:\sqrt{2g}$	0,709252	0,85080—1
$\sqrt{\pi}$	1,7724539	0,24157	$\sqrt{2:\pi}$	0,797885	0,90194—1	e	2,718282	0,43429
$\sqrt[3]{\pi}$	1.4645919	0,16572	$\sqrt{3:\pi}$	0.977205	0,98998—1	e^2	7,389056	0,86859
$\pi\sqrt{\pi}$	5,5683280	0,74572	$\sqrt[3]{2\pi}$	1,845261	0,26606	$1:e$	0,367879	0,56571—1
$\pi\sqrt[3]{\pi}$	4,6011511	0,66287	$\sqrt[3]{\pi:2}$	1.162447	0,06537	$1:e^2$	0,135335	0.13141—1
$4\pi^2$	36,478418	1,59636	$\sqrt[3]{\pi:4}$	0,692635	0,96503—1	$\sqrt{e}$	1,648721	0.21715
$\pi^2:4$	2,4674011	0.39224	$\sqrt[6]{2:\pi}$	0,860254	0,93463—1	$\sqrt[3]{e}$	1,395612	0,14476

НАТ УРАЛЬНІ ЛОГАРИТМИ

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$-\infty$	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0784	2,1972
10	2,3026	2,7379	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2.9444
20	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
30	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
40	3,6889	3,7136	3,7377	3.7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
50	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4.0604	4.0775
60	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4.1744	4,1897	4.2047	4,2195	4,2341
70	4,2485	4,2627	4,2767	4.2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3594
80	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
90	4,4998	4,5109	4,5218	4.5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
100	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
110	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4.7707	4,7791
120	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
130	4,8675	4,8752	4.8828	4.8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
140	4,9416	4.9488	4 9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
150	5,0106	5,0113	5.0239	5,0304	5,0370	5.0434	5,0499	5.0562	5,0626	5,0689
160	5.0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
170	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5.1761	5,1818	5,1874
180	5,1930	5,1985	5.2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5.2417
190	5.2470	5,2523	5,2575	5,2627	5.2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
200	5.2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
210	5,3471	5.3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5.3891
220	5,3936	5,3982	5,4027	5,4075	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
230	5,4381	5.4424	5,4467	5,4510	5,4553	5.4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
240	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5.5013	5,5053	5,5094	5.5134	5,5175
250	5,5215	5,5255	5,5294	5.5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5.5568
260	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
270	5.5984	5,6021	5,6058	5.6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5.6276	5,6312
280	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
290	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5.6836	5,6870	5.6904	5,6937	5,6971	5,7004
300	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
310	5,7366	5,7398	5,7430	5.7462	5,7494	5,7526	5.7557	5,7589	5,7621	5,7652
320	5,7683	5.7714	5,7746	5,7777	5.7807	5 7838	5,7869	5,7900	5,7930	5.7961
330	5,7991	5.8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
340	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
350	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
360	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9011
370	5,9135	5,9162	5,9189	5.9216	5,9243	5,9269	5.9296	5,9322	5,9349	5,9375
380	5,9402	5,9428	5,9454	5.9480	5.9506	5,9532	5,9558	5.9584	5,9610	5,9636
390	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
400	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
410	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
420	6.0403	6,0426	6,0450	6,0474	6.0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
430	6,0638	6,0661	6,0684	9.0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
440	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
450	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6.1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
460	6.1312	6,1334	6.1356	6.1377	6.1399	6,1420	6.1442	6,1463	6,1485	6,1506

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
470	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
480	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
490	6.1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126
500	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
510	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
520	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
530	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
540	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
550	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
560	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
570	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
580	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6.3784
590	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
600	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6.4118
610	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
620	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
630	6,4457	6,4473	6.4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
640	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
650	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
660	6,4922	6,4938	6.4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
670	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6.5177	6,5191	6,5206
680	6,5221	6,5236	6.5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
690	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
700	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
710	6,5653	6,5667	6.5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6.5751	6,5765	6.5779
720	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
730	6,5930	6,5944	6.5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6.6039	6,6053
740	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187
750	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
760	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
770	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6547	6,6554	6,6567	6,6580
780	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
790	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6.6771	6,6783	6,6796	6,6809	6.6821	6,6834
800	6,6946	6,6859	6,6871	6.6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
810	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
820	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
830	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
840	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7352	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
850	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
860	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
870	6,7685	6,7696	6.7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
880	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6.7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
890	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
900	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
910	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
920	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
930	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6.8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448

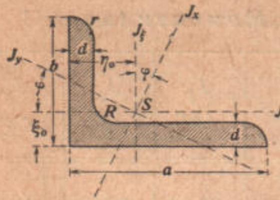
НОРМАЛЬНІ ПРОФІЛІ ОБРИСОВОГО ЗАЛІЗА РОСІЙСЬКОГО СОРТАМЕНТУ



РІВНОБОКЕ КУТІВКОВЕ ЗАЛІЗО

№ профілю	Ширина b мм	Грубина d мм	Площа профілю $см^2$	Вага подовж. метра кг	Віддаль центра тяжіння ξ_0 см	Моменти інерції			
						J_b $см^4$	J_ξ $см^4$	J_y $см^4$	J_x $см^4$
$1^1/_2$	15	3	0,82	0 64	0,47	0,338	0,1528	0,2397	0,0659
		3	1,05	0,82	0,51	0,465	0,1897	0,2921	0,0873
2	20	3	1,12	0,88	0,60	0,793	0,392	0,6185	0,1651
		4	1,45	1,14	0,64	1,08	0,492	0,771	0,2124
$2^1/_2$	25	3	1.43	1,12	0,72	1.535	0,798	1,262	0,3333
		4	1,86	1,46	0,76	2.084	1.012	1,597	0,4273
		5	2.27	1,78	0,80	2,646	1,206	1.888	0,5241
3	30	3	1,73	1,36	0,84	2,654	1,424	2.26	0,590
		4	2,26	1,77	0.88	3,59	1,824	2.884	0,764
		5	2,77	2,17	0,92	4.54	2,183	3,44	0,925
$3^1/_2$	35	4	2,67	2,10	1,00	5,64	2.954	4.68	1.227
		5	3,28	2,57	1.04	7,13	3,564	5,64	1,493
		6	3,87	3,04	1,08	8,65	4,13	6,50	1,754
4	40	4	3,08	2,42	1,12	8,33	4,47	7,09	1,859
		5	3,79	2,97	1,16	10,54	5,43	8,59	1,263
		6	4,48	3,52	1,20	12,78	6,31	9,98	2.654
		7	5.15	4,04	1.24	15,06	7,14	11,24	3.040
		8	5,80	4,55	1,28	17.37	7,91	12,4	3,434
$4^1/_2$	45	5	4,30	3,37	1.28	14,95	7.87	12,48	3.27
		6	5,09	4,00	1,32	18.11	9,19	14.55	3,84
		7	5.86	4,60	1,36	21.31	10,43	16,47	4.39
		8	6,61	5,19	1,40	24,56	10,60	18,25	4,95
5	50	5	4,80	3.77	1,40	20,43	10,96	17,38	4,55
		6	5,69	4,47	1.44	24.74	12,85	20,34	5,35
		7	6.56	5.15	1,48	29,10	14.62	23,10	6,13
		8	7,41	5,82	1,53	33,50	16,28	25,70	6.87
		9	8,24	6,47	1,56	37,96	17,86	28,10	7,63
$5^1/_2$	55	6	6,31	4,95	1.56	32,7	17,3	27,4	7,19
		7	7.28	5.71	1,60	38,46	19,73	31,2	8,22
		8	8,23	6,46	1,64	44,3	22.04	34,8	9.24

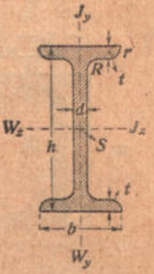
№ профілю	Ширина b *мм*	Грубина d *мм*	Площа профілю *см*²	Вага подовж. метра *кг*	Віддаль центра тяжіння ξ_0 *см*	Моменти інерції			
						J_b *см*⁴	J_ξ *см*⁴	J_y *см*⁴	J_x *см*⁴
$5^1/_2$	55	9	9,16	7,19	1,68	50,2	24,24	38,2	10,25
		10	10.07	7,90	1,72	56,1	26,3	41,4	11,26
6	60	6	6,91	5,42	1,69	42,5	22,84	36,15	9,53
		7	7,98	6,26	1,73	49,9	26,05	41,3	15,82
		8	9,03	7,09	1,77	57,4	29,16	46,15	12,16
		9	10,06	7,90	1,81	65,0	32,1	50,7	13,5
		10	11,07	8,69	1,85	72,6	34.9	55,1	14,8
$6^1/_2$	65	6	7,51	5,89	1,81	54,0	29,36	46,6	12,14
		7	8.68	6,81	1,85	63,4	33.6	53,3	13.9
		8	9.83	7,72	1,89	72.9	37,66	59.7	15,63
		9	10,96	8,60	1,93	82,5	41,5	65,7	17,34
		10	12,07	9,47	1,97	92,1	45,2	71,5	19,03
7	70	7	9,39	7,37	1,97	79,0	42,4	67,3	17,53
		8	10.64	8,35	2.02	90,8	47,6	75,5	19.7
		9	11.87	9,32	2,06	102,7	52,6	83,3	21,9
		10	13,08	10,27	2,09	114,7	57,3	90,7	24,0
$7^1/_2$	75	8	11.47	9,00	2,13	110,9	58,9	93,3	24.4
		9	12,80	10,05	2,17	125,5	65,1	103,2	27,1
		10	14,11	11 08	2,21	140,2	71.2	112,7	29.7
		11	15,40	12,09	2.25	155.0	77,0	121,7	32,3
		12	16,67	13,09	2,29	170,0	82,6	130,3	34,86
8	80	8	12,27	9,63	2,25	134.6	72,5	114,6	30,4
		9	13,70	10,75	2,30	152,2	79,8	126,9	32,65
		10	15,11	11,86	2,34	170,0	87,2	138,6	35 8
		11	16,50	12,95	2,37	187,8	95,1	149.9	40,3
		12	17,87	14,03	2,41	205,8	102,0	160,7	43,26
9	90	9	15,52	12.18	2,54	215,9	115,7	183,8	47,7
		10	17,13	13,45	2,58	241.0	127,0	201,3	52,5
		11	18,72	14,69	2,62	266,0	137,6	218,0	57,1
		12	20,29	15,93	2,66	291,5	148,0	234.4	61,4
		13	21.84	17,14	2,70	317,0	157,8	250,0	65,5
10	100	9	17,36	13.63	2,78	294,5	160,3	255	65,7
		10	19,17	15,05	2.82	328.7	176,3	280	72,7
		11	20,96	16,45	2,86	363,0	191,6	304	79,3
		12	22.73	17,84	2,90	397,6	206,4	327	85.7
		13	24.48	19,22	2,94	432	220,7	349,6	91.8
		14	26.21	20,57	2.98	467	234.5	371	97,6
		15	27,92	21,92	3.02	502	247,7	392	103,1
		16	29.61	23,24	3,05	538	262	412,5	112,0
12	120	14	31.82	24,98	3.48	804	419	666	172
		16	36,02	28,28	3,55	924	470	743	197,3



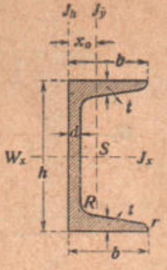
НЕРІВНОБОКЕ КУТІВКОВЕ ЗАЛІЗО

№ профілю	Розміри в *мм*			Площа профілю $см^2$	Вага подовж. метра *кг*	Віддаль центра тяж.		Моменти інерції			
	a	*b*	*d*			ξ_0 *см*	η_0 *см*	J_b $см^4$	J_a $см^4$	J_ξ $см^4$	J_η $см^4$
3—2	30	20	3	1,42	1.11	0,50	0,99	2,66	0.802	1,267	0,447
			4	1,85	1,45	0,54	1,03	3,58	1,101	1,597	0.561
4—2	40	20	4	2,26	1,77	0,48	1,46	8,41	1,112	3,586	0,593
			5	2,77	2,17	0,52	1,50	10,57	1,452	4,34	0,706
$4^1/_2$—3	45	30	4	2.87	2,25	0,74	1.47	11,95	3,584	5,74	2,03
			6	4,17	3,27	0,81	1,55	18,16	5,59	8,08	2,83
5—$2^1/_2$	50	25	5	3,54	2,78	0,60	1,82	20,48	2.606	8,74	1,336
			7	4.80	3,77	0,67	1,91	28,95	4,07	11,52	1,89
6 - 3	60	30	6	5,09	4,00	0,72	2,19	42,5	5,62	18,13	2,986
			8	6,61	5,19	0,80	2,27	57,14	7,95	22,97	3,75
6—4	60	40	6	5,69	4,47	1,01	1,99	42,6	12,84	20,06	7,07
			8	7,41	5,82	1,08	2,07	57,3	17,63	25,5	8,91
$7^1/_2$—5	75	50	6	7,21	5,66	1,20	2,43	84,6	24,75	42,2	14,33
			8	9,43	7,40	1,28	2,51	111,4	33,77	51,9	18,27
			10	11,57	9,08	1,36	2,59	140,2	43,2	62,5	21,84
8—4	80	40	6	6,91	5,42	0,88	2,84	100,6	12,88	44,8	7,52
			8	9,03	7,09	0,96	2,93	135	17,89	57,5	9,55
			10	11,07	8,69	1,04	3,01	169,7	23,3	69,1	11,36
9—6	90	60	8	11,45	8,99	1,48	2,95	192,0	57,6	92,1	32,65
			10	14,09	11,06	1,56	3,04	241,4	73,4	111,4	39,3
10—5	100	50	8	11,45	8,99	1,12	3,59	263,3	34,0	116,0	19,53
			10	14,09	11,06	1,20	3,67	330,6	43,84	140,6	23,42
10—$6^1/_2$	100	65	8	12,60	9,93	1,56	3,28	263,5	73,2	127,1	42,5
			10	15.59	12,24	1,64	3,37	331,0	93,0	154,3	51,2
12—8	120	80	10	19,13	15,02	1,95	3,92	570	170,7	275,6	98,2
			12	22,69	17,81	2,03	4,00	686	207,5	323	14,31
13—$8^1/_2$	130	85	10	20,65	16,21	2,02	4,24	723	203,8	351	119,1
			12	24,51	19,24	2,10	4,32	871	247,6	412	139
			14	28,29	22,21	2,18	4,41	1020	292,5	470	158
15—$7^1/_2$	150	75	10	21,63	16,98	1,61	5,32	1113	142	501	85 8
			12	25,69	20,17	1,69	5,41	1340	173,6	589	99,9
15—10	150	100	11	26,47	20,80	2,38	4,84	1222	365	601	215
			13	30,99	24,33	2,46	4,93	1450	435	697	248.3

ДВОТЕТОВЕ ЗАЛІЗО



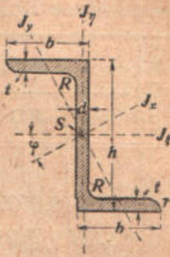
№ профілю	Височина h мм	Ширина b мм	Грубина		Площа профілю см^2	Вага подовж. метра кг	Моменти інерції		Моменти опору	
			Стінки d мм	Полиці t мм			J_x см^4	J_y см^4	W_x см^3	W_y см^3
8	80	50,6	3,9	5,5	8,16	6,406	86,3	9,71	21,6	3,84
10	100	57,0	4,5	6,3	11,03	8,659	180,4	16,1	36,1	5,65
12	120	63,4	5,1	7,1	14,34	11,257	334,4	25,2	55,7	7,95
14	140	69,8	5,7	7,9	18,08	14,193	569	37,7	81,3	10,8
16	160	76,2	6,3	8,8	22,26	17,474	909	54,3	113,4	14,26
18	180	82,6	6,9	9,6	26,87	21,093	1381	75,9	153,4	18,4
20	200	89,0	7,4	10,4	31,91	25,049	2014	103,4	201,4	23,24
22	220	95,4	8,1	11,3	37,38	29,343	2843	137,5	258,5	28,83
24	240	101,8	8,7	12,1	43,29	33,983	3903	180	325	35,36
26	260	108,2	9,3	13,0	49,63	38,960	5234	231	403	42,75
28	280	114,6	9,9	13,9	56,40	44,274	6878	293	491	51,1
30	300	121,0	10,5	14,7	63,61	49,934	8881	366	592	60,5
32	320	127,4	11,1	15,5	71,25	55,931	11292	452	706	70,9
34	340	133,8	11,7	16,4	79,32	62,266	14161	552	833	82,5
36	360	140,2	12,3	17,2	87,82	68,939	17544	668	975	95,3
38	380	146,6	12,9	18,0	96,76	75 956	21499	801	1132	109,3
40	400	153,0	13,5	18,9	106,13	83,312	26087	954	1304	124,7



КОРИТУВАТЕ ЗАЛІЗО

№ профілю	Розміри в *мм*				Площа профілю $см^2$	Вага подовж. метра *кг*	Віддаль центра тяжіння x_0	Моменти інерції			Моменти опору	
	h	b	d	t				J_h $см^4$	J_y $см^4$	J_r $см^4$	W_x $см^3$	W_y $см^3$
5	50	38	5	7,5	7,47	5,86	1,41	24,2	27,57	9,44	11,03	3,942
$6^1/_2$	65	43	5,5	8	9,62	7,55	1,43	34,8	59,9	14,98	18,43	5,42
8	80	45	6	9	11,85	9,30	1,53	48,4	113,9	20,9	28,5	7.02
10	100	50	6	9	13,92	10,93	1,60	65,6	213,2	30,16	42,65	8,86
12	120	55	6,5	9,5	17,26	13,55	1,65	92,0	371,6	44,9	61,9	11,67
14	140	60	7	10,5	20,92	16,42	1,80	132,2	624	64,5	89,2	15,35
16	160	65	7,5	11	24,92	18,56	1,86	175,6	954	89,0	119,2	19,2
18	180	70	8	12	29,26	22,97	2,01	239,6	1433	121	159,2	24,26
20	200	75	8,5	12,5	33,93	26,64	2,08	306	2018	159,2	202	29,4
22	220	80	9	13,5	38,94	30,57	2,23	402	2831	207,3	257,3	36,0
24	240	85	9,5	14	44,28	34,76	2,30	499	3773	264	314,4	42,6
26	260	90	10	15	49,95	39,21	2,45	635	5045	334	388	51,0
28	280	95	10,5	15,5	55,96	43,93	2,53	771	6472	413	462	59,2
30	300	100	11	16,5	62,30	48,91	2,68	957	8361	510	557	69,7

ЗЕТОВЕ ЗАЛІЗО



№ профілю	Розміри в *мм*				Площа профілю	Вага подовж. метра	Моменти інерції				Віддаль найдальших точок від головних осей			Кут між осями
	h	b	d	t			J_ξ	J_η	$J_{\max}$	$J_{\min}$	x_1	x_2	y	
					*см*²	*кг*	*см*⁴	*см*⁴	*см*⁴	*см*⁴	*см*	*см*	*см*	φ
4	40	40	4,5	6.5	6.55	5,14	15,7	22,7	34,9	3,5	1,16	1,71	4,20	51°30′
6	60	45	5	7,5	9,18	7,21	51.3	37,4	80,1	8,6	1,70	2,10	5,02	39 23
8	80	50	6	8.5	12,51	9,82	124	57,4	164	16,5	2,18	2,36	5,87	31 43
10	100	55	6.5	9,5	16,01	12.57	248	85,6	306	27,2	2,58	2.58	6.81	27 14
12	120	60	7	10,5	19,89	15,61	443	123	524	41,7	2,96	2,78	7,79	24 15
14	140	65	8	11,5	24,74	19,42	738	170	847	61,4	3,32	2,97	8,77	21 48
16	160	70	8,5	12,5	29,48	23.14	1149	231	1294	86,0	3,65	3,17	9.78	20 17
18	180	75	9	13.5	34,61	27,17	1706	308	1896	117	3,97	3,37	10,81	19 6
20	200	80	10	15	41,72	32,75	2514	411	2765	160	4,30	3,58	11,83	18 5
25	250	90	12	18	59,12	46,33	5455	693	5861	286	4,99	3,95	14,30	15 40

МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ВЕРТИКАЛЬНОЇ СТІНКИ ВІДНОСНО ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ГОЛОВНОЇ ОСІ в *дм*⁴

Грубина стінки в *мм*	Височина вертикальної стінки в *мм*												
	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
8	0,1800	0,4266	0,8334	1,440	2,287	3,412	4,860	6,666	8,874	11,52	14,65	18,29	22,50
9	0,2025	0,4799	0,9375	1,620	2,572	3,840	5,468	7,499	9,981	12.96	16,48	20,58	25.31
10	0,2250	0,5333	1,142	1,800	2,858	4,267	6,075	8,333	11,09	14.40	18,31	22.87	28,13
11	0,2475	0,5866	1,146	1,980	3.144	4,693	6,683	9,166	12,20	15,84	20,14	25,15	30.94
12	0,2700	0,6399	1,250	2,160	3,429	5,120	7,290	9,999	13,31	12,28	21,97	27,44	33,75
13	0,2925	0,6933	1,354	2,340	3,715	5.547	7,898	10,83	14,42	18,72	23,80	29,73	36,56

МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ПАРИ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ АРКУШІВ ЗАВШИРШКИ 100 *мм* ВІДНОСНО ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ГОЛОВНОЇ ОСІ в *дм*^{4}

Грубина горизон. арк. в *мм*	Височина вертикальної стінки в *мм*												
	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
8	0,3795	0,6666	1,032	1,478	2,005	2,611	3,297	4,064	4,911	5,837	6,844	7,930	9,096
9	0,4298	0,7530	1,166	1,669	2,262	2,945	3,718	4,581	5,535	6,578	7,711	8,934	10,25
10	0,4807	0,8410	1,301	1,861	2,521	3,281	4,141	5,101	6,161	7,321	8,581	9,941	11,40
11	0,5322	0,9290	1,436	2,053	2,781	3,618	4,565	5,622	6,789	8,066	9,453	10,95	12,56
12	0,5843	1,009	1,573	2,248	3,042	3,957	4,991	6,145	7,420	8,814	10,33	11,96	13,72
13	0,6372	1,109	1,711	2,443	3,305	4,297	5,419	6,670	8,052	9,564	11,21	12,98	14,88
14	0,6906	1,200	1,850	2,639	3,569	4,639	5,848	7,198	8,687	10,32	12,09	14,00	16,05
15	0,7448	1,292	1,990	2,837	3,835	4,982	6,280	7,727	9,325	11,07	12,97	15,02	17,22
16	0,7995	1,385	2,131	3,036	4,102	5,328	6,713	8,259	9,964	11.83	13,86	16,04	18,39
18	0,9111	1,573	2.416	3,438	3,641	6,023	7,585	9,328	11,25	13,35	15,64	18,10	20,74
20	1,025	1,765	2,705	3.845	5,185	6,725	8,465	10,41	12,55	14,89	17,43	20,17	23,10
24	1,142	1,961	2,999	4,257	5,736	7,434	9,353	11,49	13,85	16,43	19,23	22,25	25,48
23	1,262	2,160	3,297	4,675	6,292	8,150	10,25	12,59	15,16	17,98	21,04	24,34	27,87
26	1.385	2,362	3,600	5,097	6,855	8,873	11,15	13,69	16,49	19,54	22,86	26,44	30,28
27	1,447	2,465	3,753	5,311	7,138	9,236	11,60	14,24	17,15	20,33	23,77	27,49	31,48
30	1,638	2,778	4,218	5,958	7,998	10,34	12,98	15,92	19,16	22,70	26,54	30,68	35,12
32	1,769	2,991	4,534	6,396	8,579	11,08	13,90	17,05	20,51	24,29	28,39	32,82	37,56
33	1,836	3,099	4,693	6,617	8,871	11,45	14,37	17,61	21,19	25,09	29,33	33,89	38,78
36	2,040	3,430	5,179	7.289	9,758	12,59	15,77	19,33	23,24	27,51	32,14	37,12	42,47
39	2,255	3,767	5,675	7,972	10,66	13,72	17,20	21,07	25,31	29,95	34,97	40,39	46,20
40	2,323	3,883	5,833	8,203	10,96	14,12	17,68	21,64	26,00	30,76	35,92	41,48	47,44
44	2,618	4,351	6,525	9,138	12,19	15,67	19,60	24,04	28,81	34,06	39,75	45,89	52,46
45	2,693	4,471	6,698	9.376	12,50	16,08	20.11	24,59	29,51	34,89	30,72	47,00	53,72
48	2,925	4,835	7,226	9,997	13,45	17,28	21,59	26,38	31,65	37,40	43,63	50,34	57,53
50	3,083	5,083	7,583	10,58	14,08	18,12	22,58	27,58	33.08	39,06	45,58	52,58	60,08
52	3,245	5,335	7,946	11,18	14,73	18,90	23,39	28,80	34,53	40,78	47,55	54,84	62,65
55	3,493	5,721	8.498	11,84	15,70	20,13	21,11	30,64	36.71	43.34	50,51	58,25	66,52

МОМЕНТИ ІНЕРЦІЇ ЧОТИРЬОХ РІВНОБОКИХ КУТІВОК ВІДНОСНО ГОРИЗОНТАЛЬНОЇ ГОЛОВНОЇ ОСІ в *дм*⁴

Розміри кутівок у *мм*		Височина вертикальної стінки в *мм*												
		300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
60	6	0,4988	0,9358	1,645	2,224	3,076	4,066	5,194	6,460	7,867	9,407	11,09	12,91	14,86
	7	0,5725	1,076	1,739	2,561	3,544	4,685	5,987	7,448	8,948	10,85	12,79	14,89	17,15
	8	0,6439	1,212	1,961	2,890	4,000	5,291	6,762	8,414	10,25	12,26	14,45	16,83	19,42
	9	0,7129	1,344	2,177	3,210	4,446	5,882	7,519	9,358	11,40	13,64	16,04	18.72	21,57
	10	0,7796	1,473	2,387	3,523	4,882	6,459	8,259	10,28	12,52	14,99	17,67	20,58	23,71
65	6	0,5322	0,9057	1,628	2,399	3,321	4.393	5,615	6,988	8,522	10,15	11,97	13,94	16,06
	7	0,6138	1,157	1,874	2,765	3,829	5,067	6,478	8,063	9,822	11.75	13,84	16,11	18,57
	8	0,6912	1,307	2,114	3,121	4,311	5,730	7,320	9,116	11,10	13,30	15,66	18,17	21,02
	9	0,7655	1,448	2,350	3,471	4,811	6,370	8,149	10,15	12,36	14,80	17,46	20,33	23,43
	10	0,8377	1,588	2,579	3,819	5.285	7,001	8,958	11,16	13,59	16,28	19,20	22,36	25,76
70	7	0,6546	1,238	2,009	2,968	4,115	5,449	6,971	8,682	10,58	12,66	14,90	17,40	20,05
	8	0,7361	1,395	2,267	3,351	4,648	6,158	7,881	9,817	11,65	14,25	16,90	19,69	22,69
	9	0,8162	1,549	2,520	3.727	5,172	6,856	8,776	10,93	13,01	15,88	18,84	21,94	25,28
	10	0,8949	1,701	2,769	4,098	5,689	7,542	9,656	12.03	14,67	17,57	20,73	24.15	27,84
	13	1,123	2,145	3,501	5,191	7,214	9,571	12,26	15,29	18,65	22,34	26,36	30,72	35,42
75	8	0,7834	1,488	2,423	3,587	4,981	6,603	8,455	10,54	12,85	15,39	18,16	21,16	24,39
	9	0,8688	1,654	2,695	3,992	5,544	7,353	9,418	11,74	14,32	17,15	20,24	23,58	27,22
	10	0,9516	1,815	2,961	4,388	6,092	8,085	10,36	12,91	15.76	18,87	22,28	25,97	30,00
	11	1,032	1,972	3,219	4,774	6,637	8,808	11,29	14,08	17,17	20,57	24,29	28,31	32,63
	12	1,110	2,124	3,472	5,153	7.167	9,515	12,20	15,21	18,56	22,24	26,25	30.60	35,29
	16	1,417	2,727	4,472	6,651	9,264	12.30	15,79	19,71	24,06	28,84	34,06	39,71	45,80
80	8	—	1,575	2,569	3,808	5,293	7,023	8 999	11,22	13,69	16.40	19,35	22,56	26,00
	9	—	1,749	2,856	4,236	5,893	7,821	10,02	12,50	15.25	18,28	21,58	25,16	29,01
	10	—	1.920	3,138	4,659	6,482	8,607	11,03	13.76	16,79	20.13	23,76	27,70	31,94
	11	—	2,088	3,416	5.074	7,062	9,380	12,03	15,01	18,31	21,95	25,92	30.19	34,81
	12	—	2,252	3,689	5,482	7,633	10,14	13,01	16.23	19,81	23,75	28,04	32,60	37,61
90	9	—	1,939	3,178	4,727	6,587	8,758	11,24	14,03	17,13	20,54	24,26	28,30	32,64
	10	—	2,129	3,495	5.202	7.252	9,645	12,38	15,46	18,88	22,64	26,75	31,20	35,99
	11	—	2,315	3,805	5,668	7,905	10,52	13,50	16,86	20,60	24,71	29,19	34,05	39,28
	12	—	2,499	4,109	6,125	8,547	11,37	14,61	18,25	22,29	26,74	31,60	36,86	42,53
	13	—	2,678	4,407	6,574	9,177	12,22	15,69	19.61	23,96	28,75	33,97	39,63	45,73
100	9	—	—	3,493	5,209	7,275	9,684	12.44	15.55	19.00	22,80	26.95	31,44	36,28
	10	—	—	3,843	5,735	8,011	10,67	13,71	17,14	20,95	25,14	29,72	34,68	40,02
	11	—	—	4,186	6,252	8,737	11,64	14,96	18,71	22,87	27,45	32,45	37,87	43,70
	12	—	—	4,523	6,760	9.451	12.60	16,20	20,25	24,76	29,72	35,14	41,06	47,35
	13	—	—	4,853	7,259	10,15	13,54	17.41	21,77	26.63	31,97	37,80	44.12	50,93
	14	—	—	5,177	7,748	10,84	14.46	18,60	23.27	28,46	34,18	40,42	47,18	54,47
	15	—	—	5,495	8.230	11,52	15,38	19.79	24.75	30,29	36,36	43,01	50,20	57,96
	16	—	—	5,811	8,766	12,19	16,27	20,95	26,21	32.07	38,52	45.56	53,19	61,42
120	10	—	—	—	6,730	9.44	12,61	16,24	20,34	24,90	29,92	35.41	41,36	47,78
	12	—	—	—	7,939	11,15	14,90	19,21	24,07	29,48	35.44	41,95	49,01	56,62
	14	—	—	—	9,119	12,81	17,14	22,11	27,71	33.95	40,83	48,34	56,49	65.27
	16	—	—	—	10,27	14,43	19,33	24,94	31,27	38,33	46,10	54.59	63,81	73,74
140	12	—	—	—	—	12,77	17,12	22,12	22.77	34,06	41.00	48,59	56,83	65,71
	14	—	—	—	—	14,70	19.72	25,49	32,01	39,28	47.30	56,07	65,58	75,85
	16	—	—	—	—	16,57	25,25	28,78	36,16	44,38	53,46	63,38	74,16	85,78

СЛОВНИК

УЖИТИХ В ЦІИ КНИЗІ УКРАЇНСЬКИХ ТЕРМІНІВ

Вгин — прогиб
Вервечка — подвеска
Відцентрова сила — центробежная сила
Вітряниця — мотыль
Видовження — удлинение
Випинання — выпучивание
Вислідна — равнодействующая
Гак — крюк
Ґвинт — винт
Гинкий — гибкий
Гніт — пресс
Гонок — шатун
Гребля — плотина
Доцентрова сила — центростремительная сила
Живе срібло — ртуть
Запобіжний — предохранительный
Заставка — щит
Защекнення — защемление
Звід — под. кран
Звій — виток
Згин — изгиб
Зминання — смятие
Знетяження — разгружение
Зосереджений — сосредоточенный
Зріз -- срезывание
Зсув — сдвиг
Казан — котел
Кай — врубка
Катеринка — лебедка
Клямра — скоба
Коліша — ролик
Коло — окружность , контур (элек.), цепь — (элек.)
Корба — кривошип
Кріпильний — скрепляющий
Крутний — скручивающий
Кулястий — шаровой
Кут — угол
Кутівка — уголок
Лівар — домкрат
Линва — трос
Лук — арка
Лютувати — паять
Маточина ступица
Місткість — емкость
Мур — ьаменная стіна
Мурування — кладка
Наворіть — нарезка винтовая
Неваговитий — невесомий
Нюта — заклепка
Нютувати -- клепать
Обвисання — провес, провисание
Оболонка — оболочка
Обтяження — нагрузка
Одвірок — притолока
Паля — свая
Перегин — перегиб
Питома вага — удельный вес
Подовжинний — погонный
Поміст — настил
Поплазень — ползун
Попереччя — поперечное сечение
Порожнявий — полый
Потужність — мощность
Похідна — производная
Прогін — пролет
Прогонич — болт

Прозір — зазор
Пружність — упругость
Риштування — леса́
Розпір — распор
Розтяжне зусилля — растягивающее усилие
Сволок — потолочная балка
Середовище — среда
Складова — составляющая
Склепіння — свод
Скручування — кручение
Смуга — полоса
Спиж — бронза
Стискне зусилля — сжимающее усилие
Стояк — стойка
Стрижень — стержень
Стягель — тяга, затяжка
Сустав — шарнир
Суцільний — сплошной
Твірна — образующая
Тертя — трение
Течиво — жидкость
Толок — поршень
Точило — точильный камень
Триб — зубчатое колесо, шестерня
Тягар — груз
Хлипак — клапан
Хвилясте залізо — волнистое железо
Шпуга — шпонка
Штивний — жесткий
Ящик — кузов

ЗМІСТ

Ціна 1 крб. 25 коп. (П)