Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра хімії та фізики

05-06-136М

Методичні вказівки
до виконання практичних та самостійних робіт
із освітньої компоненти «Фізика»,
розділ «Механіка»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Агрономія» спеціальності 201 «Агрономія»; «Екологія» спеціальності 101 «Екологія»; «Технології захисту навколишнього середовища» спеціальності 183 «Технології захисту навколишнього середовища»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з якості ННІАЗ
Протокол № 12 від 20.02.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт із освітньої компоненти «Фізика», розділ «Механіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Агрономія» спеціальності 201 «Агрономія»; «Екологія» спеціальності 101 «Екологія»; «Технології захисту навколишнього середовища» спеціальності 183 «Технології захисту навколишнього середовища» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Лебедь О. О., Рудик Б. П., Мороз М. В. – Рівне : НУВГП, 2024. – 60 с.

Укладачі:
Лебедь О. О., к.т.н., доцент кафедри хімії та фізики;
Рудик Б. П., к.ф.-м.н., доцент кафедри хімії та фізики;
Мороз М. В., д.х.н., професор кафедри хімії та фізики.

Відповідальний за випуск: Мороз М. В., завідувач кафедри хімії та фізики, д.х.н., професор.

Керівник групи забезпечення спеціальності 201 «Агрономія» – Колесник Т. М., к.с.-г.н., доцент, завідувач кафедри агрохімії, ґрунтознавства та землеробства;

Керівник групи забезпечення спеціальності 101 «Екологія» – Буднік З. М., к.с.-г.н., доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 183 «Технології захисту навколишнього середовища» – Статник І. І., к.с.-г.н., доцент

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мета практичних занять з навчальної дисципліни «Фізика з основами біофізики» – закріпити вивчення теоретичного матеріалу шляхом вироблення вмінь та навичок його застосування до розв'язування задач. Історично сформувався певний алгоритм цього процесу:

1. Перш за все потрібно уяснити до якого розділу відноситься розглядувана задача і ознайомитись з теорією цього розділу, бо без знання базових понять науки і зв'язків між ними неможливе правильне оперування цими поняттями.
2. Умову задачі слід записати словесно і скорочено у загальноприйнятих символічних позначеннях (див. **Приклади розв'язування задач**)
3. Дані задачі та необхідні константи перевести до однієї системи одиниць (загальноприйнятою зараз є міжнародна система одиниць СІ).
4. Зробити малюнок до задачі (за винятком окремих очевидних випадків); малюнок допомагає збагнути зміст задачі і часто підказує ідею її розв'язання.
5. Розв'язати задачу у загальному вигляді, одержавши робочу формулу шуканої величини. Розв'язання супроводжувати короткими поясненнями, які розкривають логіку міркувань.
6. Підставити у робочу формулу дані задачі та константи і обрахувати числове значення шуканої величини, вказавши її одиницю. Точність обчислень не повинна перевищувати точність заданих величин.
7. Переконатись у «розумності» одержаного результату як з точки зору його розмірності, так і з точки зору відповідності до загальних законів природи.

1. Механіка. Основні закони та співвідношення

1.1. Кінематика

- **Кінематичне рівняння руху матеріальної точки**

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (векторний спосіб),

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ (координатний спосіб),

$S = S(t)$ (натуральний спосіб),

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор точки, x, y, z – його проекції на осі координат, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей, S – шлях.

- **Швидкість точки**

$\vec{\upsilon} = \vec{i}\,\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z$ (векторна форма)

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$ (модуль швидкості),

де $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \frac{dz}{dt}$.

середня швидкість

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

миттєва швидкість

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

модуль середньої швидкості (для прямолінійного руху)

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

модуль миттєвої швидкості

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \; -.$$

- **Прискорення точки**

середнє прискорення

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} \; -;$$

миттєве прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \; ;$$

для криволінійного руху:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

тангенціальне прискорення

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} \; ;$$

нормальне прискорення

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} \; ;$$

де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор дотичної до траєкторії, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до траєкторії, R – радіус кривизни траєкторії.

модуль повного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \; .$$

модуль середнього прискорення (для прямолінійного руху)

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

модуль миттєвого прискорення (для прямолінійного руху)

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} \ .$$

- **Формула шляху для рівномірного руху** $(\upsilon = \text{const})$

$$S = \upsilon t \ .$$

- **Формули швидкості та шляху для рівнозмінного руху** $(a = \text{const})$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

(знак «+» відноситься до рівноприскореного, а «–» – для рівносповільненого рухів; в останньому випадку слід враховувати, що в певний момент часу напрямок руху точки може змінюватись).

- **Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по колу**

$$\varphi = \varphi(t).$$

- **Модуль кутової швидкості (середньої та миттєвої)**

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}; \ \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

- **Модуль кутового прискорення (середнього та миттєвого)**

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}; \ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

- **Формула кута повороту для рівномірного руху по колу**

$$(\omega = \text{const}) \quad \varphi = \omega t \ .$$

- **Формули кутової швидкості та кута повороту для рівнозмінного руху по колу** $(\varepsilon = \mathrm{const})$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

(знак “+” відноситься до рівноприскореного, а “–” – до рівносповільненого обертання).

- **Зв’язок між лінійними і кутовими характеристиками руху точки по колу**

$$\upsilon = \omega \cdot R;$$
$$a_\tau = \varepsilon \cdot R;$$
$$a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{\upsilon^2}{R},$$

де R – радіус кола.

- **Зв’язок між кутовою швидкістю, періодом і частотою обертання**

$$\omega = 2\pi\nu;$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \;.$$
$$T = \frac{1}{\nu}$$

де ν – частота, T – період.

1.2 Динаміка

- **Імпульс матеріальної точки**

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon},$$

де m – маса точки, $\vec{\upsilon}$ – її швидкість.

- **Другий закон Ньютона (три форми запису)**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

$$\vec{F}dt = d\vec{p},$$

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

де $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ – рівнодійна всіх сил, що діють на точку, $\vec{F}dt$ – імпульс сили.

- **Третій закон Ньютона**

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

де $\vec{F}_{12}$ та $\vec{F}_{21}$ - сили взаємодії матеріальних точок.

- **Сили, що розглядаються в механіці**

сила тяжіння

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

модуль сили гравітаційної взаємодії (закон всесвітнього тяжіння)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

де: g – прискорення вільного падіння; G – гравітаційна стала; m_1 та m_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між ними.

модуль сили тертя ковзання

$$F_{mp} = \mu N,$$

де μ – коефіцієнт тертя, N – сила нормального тиску.

проекція сили пружності на напрямок деформації (закон Гука)

$$F_x = -kx,$$

де k – жорсткість, x – абсолютна деформація.

При послідовному з’єднанні пружин

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n},$$

При паралельному з’єднанні пружин

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n .$$

- **Закон збереження імпульсу замкненої механічної системи**

$$\sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const} .$$

для системи двох взаємодіючих тіл

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

де $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$ – швидкості тіл до взаємодії, $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ – після взаємодії.

- **Основний закон динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі** z

$$M_z = I_z \varepsilon,$$

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d\left(I_z \omega\right)}{dt},$$

де M_z – результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі z; I_z – момент інерції тіла відносно цієї осі; $L_z = I_z \omega$ – момент імпульсу тіла відносно нерухомої осі z.

- **Момент інерції матеріальної точки**

$$I_{z\,\text{т}} = mr^2 .$$

- **Момент інерції системи матеріальних точок та твердого тіла**

$$I_{z\text{С}} = \sum_i m_i r_i^2 ,$$

$$I_{z\,\text{т.т.}} = \int_V \rho r^2 dV ;$$

де ρ – густина тіла.

- **Момент інерції деяких тіл відносно осі, що проходить через центр мас:**

а) стрижня масою m і довжиною l відносно осі, перпендикулярної до стрижня

$$I_c = \frac{1}{12} m l^2 ;$$

б) обруча (тонкостінного циліндра) відносно осі, що співпадає з віссю циліндра

$$I_c = mR^2 ;$$

в) диска (суцільного циліндра) відносно осі, що співпадає з віссю циліндра

$$I_c = \frac{1}{2} mR^2 ;$$

г) суцільної кулі радіусом R

$$I_c = \frac{2}{5} mR^2 ;$$

де m – маса тіла, R – його радіус.

- **Теорема Штейнера**

$$I_z = I_c + md^2 ,$$

де: I_Z – момент інерції тіла відносно осі Z; I_C – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас паралельно осі Z; d – відстань між осями.

- **Закон збереження моменту імпульсу замкненої системи тіл, що обертаються відносно нерухомої осі**

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 ,$$

де I_1, ω_1 та I_2, ω_2 – моменти інерції системи тіл та кутові швидкості в початковий та кінцевий моменти часу.

1.3 Енергетика

- **Робота постійної сили**

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\Delta\vec{r}\right| \cos\alpha ,$$

де $\vec{F}$ – сила, $\Delta\vec{r}$ – переміщення, α – кут між $\vec{F}$ і $\Delta\vec{r}$.

- **Робота змінної сили**

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS ,$$

де $F_S = F\cos\alpha$ – проекція вектора $\vec{F}$ на напрямок переміщення.

- **Потужність (середня і миттєва)**

$$N_{cp} = \frac{A}{t}; \quad N = \frac{dA}{dt} .$$

- **Зв'язок між потужністю двигуна, силою тяги і швидкістю руху**

$$N = F \cdot \upsilon .$$

- **Кінетична енергія поступального руху**

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

де p – імпульс тіла, m – його маса, υ – швидкість.

- **Кінетична енергія обертального руху**

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

де I – момент інерції тіла, ω – кутова швидкість.

- **Кінетична енергія тіла, що котиться**

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

- **Теорема про зміну кінетичної енергії**

$$A = W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k,$$

де A – робота рівнодійної всіх сил, що діють на тіло.

- **Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії**

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

де – гравітаційна стала, m_1, m_2 – маси взаємодіючих тіл, r – відстань між ними.

- **Потенціальна енергія тіла поблизу поверхні Землі**

$$W_n = mgh.$$

- **Потенціальна енергія пружно деформованого тіла**

$$W_p = \frac{kx^2}{2},$$

де k – жорсткість, x – величина абсолютної деформації.

- **Теорема про зміну потенціальної енергії**

$$W_{p2} - W_{p1} = \Delta W = -A_{пот},$$

де $A_{пот}$ – робота потенціальних сил (зокрема сили пружності та гравітаційної сили).

- **Повна механічна енергія**

$$W_{мех} = W_k + W_p .$$

- **Закон збереження механічної енергії консервативної системи взаємодіючих тіл**

$$W_{мех} = W_k + W_p = \text{const} .$$

- **Застосування законів збереження енергії та імпульсу до абсолютно пружного центрального зіткнення та абсолютно непружного центрального зіткнення:**

- **для абсолютно пружного**

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{2m_2\vec{\upsilon}_2 + (m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2};\ \vec{\upsilon}_2' = \frac{2m_1\vec{\upsilon}_1 + (m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2},$$

де $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ – швидкості тіл до зіткнення; $\vec{\upsilon}_1'$ і $\vec{\upsilon}_2'$ – після зіткнення.

- **для абсолютно непружного**

$$\vec{\upsilon}' = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2},$$

де $\vec{\upsilon}_1$ і $\vec{\upsilon}_2$ – швидкості тіл до зіткнення; $\vec{\upsilon}'$ - спільна швидкість тіл після зіткнення.

2. Приклади розв'язування задач

2.1 Кінематика

Вказівки до розв'язування задач з кінематики

1. При розв'язуванні задач з кінематики важливо, перш за все, встановити характер руху (прямолінійний чи криволінійний, наприклад, по колу; рівномірний чи рівнозмінний), щоб для його опису використати відповідні формули.

2. Необхідно уважно слідкувати, з яким типом величин і співвідношень маємо справу: векторним чи скалярним.

3. Часто буває корисним принцип незалежності рухів, коли складний рух можна розкласти на прості і розглядати їх незалежно.

Приклад 1.

Швидкість точки при деякому русі змінювалась з часом за законом $\upsilon = At + Bt^2$, де $A = 0{,}03\text{м}/\text{с}^2$, $B = 0{,}01\text{м}/\text{с}^3$. Знайти: 1) швидкість і прискорення точки в кінці другої секунди руху; 2) середні швидкість і прискорення та пройдений шлях за дві секунди руху.

Розв'язання

Дано:

$t_1 = 0\,, t_2 = 2c$

$\upsilon(t) = At + Bt^2$

$A = 0{,}03\text{м}/\text{с}^2$

$B = 0{,}01\text{м}/\text{с}^3$

$\upsilon_2\,?\, a_2\,?$

$\langle\upsilon\rangle ? \langle a\rangle ?\; S_2\,?$

Очевидно, що швидкість точки υ_2 у час t_2 може бути знайдена простою підстановкою значення t_2 до закону руху точки (з умови):

$$\upsilon(t) = At + Bt^2, \tag{1}$$

$$\upsilon_2(t_2) = A \cdot t_2 + B \cdot t_2{}^2 = 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}01 \cdot 4 = 0{,}1 м/с$$

Миттєве прискорення точки знайдемо продиференціювавши вираз швидкості (1) по t:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\left(At + Bt^2\right)}{dt} = A + 2Bt\,. \tag{2}$$

Відповідно, прискорення a_2 знайдемо підставивши час t_2 у вираз $a(t)$ (2):

$$a_2(t_2) = A + 2Bt_2 = 0{,}03 + 2\cdot 0{,}01\cdot 2 = 0{,}07 м/с^2$$

Середнє прискорення знайдемо за відношенням середньої швидкості $\Delta\upsilon$ за середній час Δt на усьому проміжку руху:

$$\langle a\rangle = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1}. \qquad (3)$$

Знайдемо середнє прискорення підставивши до (3):

$t_1 = 0с$, $t_2 = 2с$, $\upsilon_0 = 0$, $\upsilon_2 = 0{,}1 м/с$

$$\langle a\rangle = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}1 - 0}{2} = 0{,}05 \text{ м/с}^2.$$

Пройдений точкою шлях обчислюється за формулою:

$$S(t) = \int_0^t \upsilon(t)dt,$$

тому у нашому випадку інтеграл шляху буде рівний:

$$S(t) = \int_0^t \left(At + Bt^2\right)dt = \frac{At^2}{2} + \frac{Bt^3}{3}.$$

Підставивши дані з умови знайдемо шлях S_2:

$$S_2 = \frac{0{,}03\cdot 4}{2} + \frac{0{,}01\cdot 8}{3} = 0{,}06 + 0{,}027 = 0{,}087 м.$$

Середня швидкість руху матеріальної точки рівна:

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_0}{t_2 - t_0} = \frac{0{,}087}{2} = 0{,}044 м/с.$$

Відповідь: υ_2=0,1м/с, a_2=0,07м/с^2, $\langle\upsilon\rangle$=0,044м/с, $\langle a\rangle$=0,05м/с^2, S_2=0,087м.

Приклад 2.

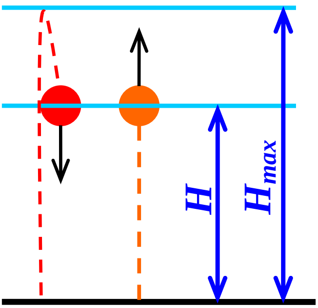
Два тіла, кинуті вертикально вгору з однієї точки та з однаковою початковою швидкістю $\upsilon_0 = 19{,}6$ м/с. Через який час t після кидання другого тіла і на якій висоті h вони зустрінуться, якщо відомо, що тіла кинуті з проміжком часу рівним $\tau = 0{,}5$ с?

Розв'язання

Дано:
$\upsilon_{01} = \upsilon_{02} = \upsilon_0$
$\upsilon_0 = 19{,}6$ м/с
$\tau = 0{,}5$ с

t? h?

Розглянемо умову задачі, маємо одновимірний випадок руху (на рисунку траєкторії тіл зображено роздільно для кращого сприйняття руху). Оптимально вибрати напрям осі OY паралельно до напрямку вектору швидкості υ_0, тобто вертикально вгору (на рисунку вісь OY не показана).



Перше тіло почне рухатися вертикально вгору, досягне максимальної висоти H_{max}, і на зворотному русі донизу на деякій висоті H зустрінеться з другим тілом, що почало рухатися із запізненням τ.

Скористаємося координатним способом розв'язку задачі, і запишемо кінетичне рівняння руху тіла від часу при рівнозмінному русі:

$$y(t) = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2},$$

де υ_0 – початкова швидкість вздовж осі OY, a – прискорення тіла.

Згідно умови, початкові швидкості тіл однакові $\upsilon_{01} = \upsilon_{02} = \upsilon_0$. Розглянемо напрями векторів для першого тіла: у початковий момент часу $(y_0 = 0)$ воно кинуте вертикально вгору, тому проекція його прискорення на вісь OY – $a_y = -g$. Час до зустрічі першого тіла з другим складається з двох доданків: t – часу, що буде однаковим для обох тіл і τ – перевага у часі першого тіла, відповідно $t + \tau$.

Координата першого тіла в момент зустрічі

$$y_1 = \upsilon_0(t+\tau) - \frac{g(t+\tau)^2}{2}.$$

Для другого тіла початкові умови руху будуть: $y_0 = 0$; $\upsilon_{02} = \upsilon_{0y} = \upsilon_0$; $a_y = -g$; час до зустрічі рівний *t*;

Координата другого тіла в момент зустрічі:

$$y_2 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент зустрічі $y_1 = y_2$, отже

$$\upsilon_0(t+\tau) - \frac{g(t+\tau)^2}{2} = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

З цього виразу отримаємо:

$$\upsilon_0 - gt - \frac{g\tau}{2} = 0.$$

З отриманого рівняння знайдемо час зустрічі тіл:

$$t = \frac{\upsilon_0}{g} - \frac{\tau}{2}.$$

Підставимо числові значення до виразу:

$$t = \frac{19{,}6}{9{,}8} - \frac{0{,}5}{2} = 1{,}75 с.$$

Знайдемо висоту, на якій зустрілися тіла, підставивши час до рівняння руху тіл:

$$h = y_2 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$h = 19{,}6 \cdot 1{,}75 - \frac{9{,}8 \cdot 1{,}75^2}{2} = 19{,}3 м.$$

Відповідь: $t = 1{,}75с$; $h = 19{,}3м$.

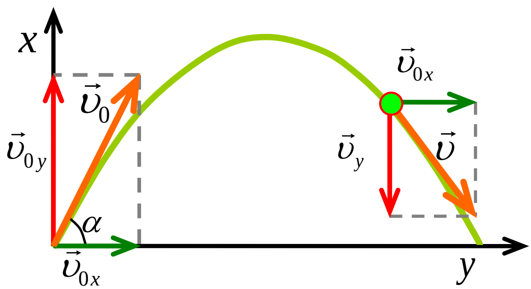
Приклад 3

Тіло кинуте під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 10\,м/с$. Знайти радіус кривизни траєкторії через $t = 1с$ після початку руху.

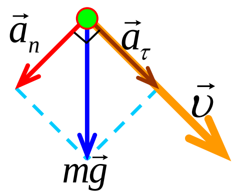
Розв'язання

Дано:
$\alpha = 30°$
$\upsilon_0 = 10\,м/с$
$t = 1с$

R?



Розглянемо умову задачі. Для суттєвого спрощення її розв'язку, Землю вважаємо пласкою та нерухомою, *інакше* необхідно було б враховувати кривизну поверхні Землі та вплив обертання на рух кинутого тіла (силу Коріоліса). Також знехтуємо розмірами тіла, вважаємо його матеріальною точкою; оскільки опір повітря не враховується, відповідно, траєкторія руху тіла являє собою параболу у системі відліку, що зв'язана з Землею в точці кидання .



Рух тіла по параболічній траєкторії, як і будь який інший криволінійний рух, для аналізу розкладаємо на два рухи: *прямолінійний* та *рух по колу*. Для того, щоб не загромаджувати рисунок до задачі надлишковими векторами, векторний рисунок сил, що діють на тіло, виконаємо окремо.

Розглянемо детально сили, що діють на тіло, це:

вектор нормального або доцентрового прискорення $\vec{a}_n$, що направлений нормально до вектора швидкості $\vec{\upsilon}$ до центру окружності кривизни траєкторії R (вектор $\vec{a}_n$ відповідає за зміну напряму руху тіла, за *заокруглення* його траєкторії, іншими словами вектор $\vec{a}_n$ не впливає на величину модуля вектора швидкості руху тіла, а лише на напрям $\vec{\upsilon}$):

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R};$$

вектор тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$, що направлений дотично (тангенціально) до руху тіла, напрям його співпадає зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ тіла ($\vec{a}_\tau$ впливає *лише на* величину модуля вектора швидкості тіла $\vec{\upsilon}$):

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt};$$

вектор повного прискорення рівний сумі векторів нормального та тангенціального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

та збігається з вектором гравітаційного прискорення $m\vec{g}$ та вектором проекції швидкості $\vec{\upsilon}_y$ (див. перший рисунок).

Радіус кривизни траєкторії можна визначити з формули нормального прискорення a_n :

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1}$$

звідки виразимо радіус:

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n}. \tag{2}$$

Для знаходження швидкості точки, розкладемо криволінійний рух по параболі на два прямолінійні рухи: горизонтальний – вздовж осі OX та вертикальний – вздовж осі OY .

Рух тіла вздовж осі *OX* - це *рівномірний рух*, оскільки ніякі сили вздовж *OX* не діють, прискорення тіла $a_x = 0$, відповідно це рух зі сталою швидкістю рівною проекції початкової швидкості υ_0 на *OX*, знайдемо цю проекцію:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha \tag{2}$$

Рух по осі *OY* - це *рівнозмінний рух* з початковою швидкістю рівній проекції швидкості υ_0 на вісь *OY* –

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$$

та гравітаційним прискоренням рівним $g = 9{,}8 м/с^2$ (вздовж *OY* на тіло діє сила тяжіння), тому рівняння швидкості по осі *OY* буде:

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt\,,$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt\,. \tag{3}$$

Швидкість точки у момент часу t буде рівною:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2}\,. \tag{4}$$

Запишемо формулу тангенціального прискорення:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\,. \tag{5}$$

Після підстановки виразу (4) у (5) отримаємо вираз

$$a_\tau = \frac{(\upsilon_0 \sin\alpha - gt)g}{\sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2}}\,. \tag{6}$$

Оскільки повне прискорення дорівнює векторній сумі нормального та тангенціального прискорень, то модуль результуючого прискорення буде рівний:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = g\,,$$

виразимо нормальне прискорення з цього виразу:

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}\ ,$$

і знайдемо шуканий радіус *R*:

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\upsilon^2}{\sqrt{g^2 - a_\tau^2}}\ . \qquad (7)$$

Проведемо обрахунки за формулами (4), (6),

$$\upsilon = \sqrt{(10\cdot 0{,}85)^2 + (10\cdot 0{,}5 - 9{,}8\cdot 1)^2} = 9{,}9\text{м}/\text{с}$$

$$a_\tau = \frac{(10\cdot 0{,}5 - 9{,}8)\cdot 9{,}8}{\sqrt{(10\cdot 0{,}85)^2 + (10\cdot 0{,}5 - 9{,}8\cdot 1)^2}} = 4{,}75\text{м}/\text{с}$$

$$a_n = \sqrt{9{,}8^2 - 4{,}75^2} = 8{,}57\text{м}/\text{с}$$

та підставимо у вираз (7) отримані значення:

$$R = \frac{9{,}9^2}{8{,}57} = 11{,}4\text{м}$$

Відповідь: $R = 11{,}4\text{м}$.

Кінематика обертального руху

Приклад 4.

Колесо радіуса $R = 0{,}1\text{м}$ обертається так, що залежність кутової швидкості від часу задається рівнянням $\omega(t) = 2At + 5Bt^4$ ($A = 2\,\text{с}^{-2}$, $B = 1\text{с}^{-5}$). Через $t = 1\text{с}$ після початку руху визначити повне прискорення точок ободу колеса і кількість обертів, зроблених за цей час.

Розв'язання

Дано:

$R = 0{,}1\text{м}$

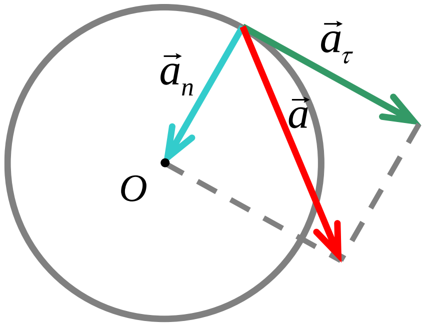
$\omega(t) = 2At + 5Bt^4$

$A = 2\text{c}^{-2}$,

$B = 1\text{c}^{-5}$

$t = 1\text{c}$

$a?\ \ N?$



Розглянемо умову задачі, згідно якої дано математичну функцію, яка описує залежність кутової швидкості обертання колеса від часу *t*. Для знаходження кутового прискорення ε знайдемо диференціал функції кутової швидкості ω:

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt},$$

$$\varepsilon = \frac{d\left(2At + 5Bt^4\right)}{dt} = 2A + 20Bt^3$$

Тангенціальне прискорення a_τ пов’язане з кутовим ε прискоренням наступним співвідношенням:

$$a_\tau = \varepsilon R.$$

Підставимо числові дані

$$a_\tau = \varepsilon R = \left(2A + 20Bt^3\right)R = (4 + 20)\cdot 0{,}1 = 2{,}4 м/с.$$

Нормальне (доцентрове) прискорення a_n точок кола дорівнює:

$$a_n = \omega^2 R,$$

отже, підставивши дані, отримаємо:

$$a_n = \omega^2 R = \left(2At + 5Bt^4\right)^2 R = (4 + 5)^2 0{,}1 = 8{,}1\ \text{м/с}.$$

Вектор повного прискорення рівний векторній сумі нормального та тангенціального прискорень, а його модуль становить:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2{,}4^2 + 8{,}1^2} = 8{,}51\,м/с\,.$$

Кут повороту φ колеса за час t знайдемо із співвідношення

$$\varphi = \int_0^t \omega(t)\,dt\,,$$

$$\varphi = \int_0^t \left(2At + 5Bt^4\right)dt = \left(At^2 + Bt^5\right)\Big|_0^t = 2 + 1 = 3\,.$$

Для знаходження кількості обертів колеса, запишемо вираз для шляху при обертовому русі

$$\varphi = 2\pi N\,,$$

тоді виразимо шукане N:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{3}{2\cdot 3{,}14} = 0{,}48\,.$$

Відповідь: $a = 8{,}51\,\text{м}/\text{с}^2$; $N = 0{,}48$.

2.2 Динаміка

Вказівки до розв'язування задач з динаміки

При розгляді задач динаміки потрібно:

1. Показати на рисунку вектори всіх сил, що діють на тіло, пам'ятаючи, що на тіло діє стільки сил, скільки тіл з ним взаємодіють.

2. Для тіл, що рухаються поступально, записати основний закон динаміки поступального руху (другий закон Ньютона) у векторній формі для кожного з тіл; рівнянь має бути стільки, скільки тіл рухаються поступально.

3. Для тіл, що здійснюють обертальний рух відносно нерухомої осі, записати основний закон динаміки обертального руху.

4. Спроектувати векторні рівняння на вибрані осі координат (зручно – на напрям прискорення відповідного тіла).

5. Розв’язати одержану систему скалярних рівнянь, яких має бути стільки, скільки невідомих у задачі.

Приклад 5. По похилій площині з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 30°$ ковзає тіло. Визначити швидкість тіла наприкінці третьої секунди після початку ковзання, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}15$.

Розв'язання

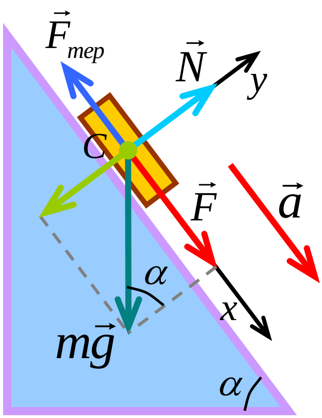
Дано:
$\alpha = 30°$
$\mu = 0{,}15$
$t = 3$с
$\upsilon_0 = 0$ м/с

υ?

Зобразимо на малюнку прикладені до тіла сили і запишемо другий закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F}_{т} + m\vec{g} \,. \qquad (1)$$

Виберемо осі координат OX та OY як показано на малюнку: вісь OX вздовж похилої площини, вісь OY – перпендикулярно до площини. Спроектуємо векторне рівняння (1) на координатні осі, отримаємо систему двох скалярних рівнянь:



$$\left.\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_{т} \\ 0 &= N - mg\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

З другого рівняння системи (2) знайдемо $N = mg\cos\alpha$. Як відомо, сила тертя залежить від

$$F_{т} = \mu N \,,$$

у проекції сили mg на OY:

$$F_{т} = \mu mg\cos\alpha \,.$$

Підставимо цей вираз для сили тертя в перше рівняння системи (2) і знайдемо прискорення тіла:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \,. \qquad (3)$$

Як видно з (3), рух тіла – рівноприскорений $(a \neq 0)$, тому швидкість, якої набуде тіло за час t ,

$$\upsilon = at \quad (\upsilon_0 = 0), \tag{4}$$

На основі (3) і (4) одержуємо

$$\upsilon = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\upsilon = 9{,}8 \cdot 3(\sin 30° - 0{,}15\cos 30°) = 10{,}9 м/с.$$

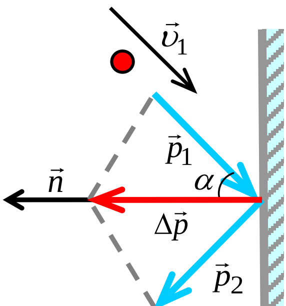
Відповідь: $\upsilon = 10{,}9$ м/с

Приклад 6. Молекула масою $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, що летить зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, стикається зі стінкою посудини під кутом $\alpha = 60°$ до нормалі і відбивається від стінки без втрати швидкості. Знайти імпульс сили, з яким молекула подіяла на стінку.

Розв'язання

Дано:
$m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг
$\alpha = 60°$
$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon = 600$ м/с

$F\Delta t$?



Згідно умови задачі, точкове тіло внаслідок удару змінює напрям імпульсу $\vec{p}$, відповідно поверхня отримує подвійний імпульс $2\vec{p}$ (за законом збереження імпульсу).

На рисунку $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до стінки, $\vec{p}_1$ – імпульс молекули до удару, $\vec{p}_2$ – імпульс молекули після удару. Оскільки, удар пружній, і швидкість зберігається $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon$ (за умовою), то і імпульс молекули до і після взаємодії буде сталий – $p_1 = p_2 = p = m\upsilon$, зміниться лише його напрям.

Застосуємо другий закон Ньютона

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}, \tag{1}$$

тут $\vec{F}$ – сила, з якою стінка подіяла на молекулу. Очевидно, що сила, з якою молекула подіяла на стінку, буде $-\vec{F}$ (на основі третього закону Ньютона), тому імпульс цієї сили:

$$-\vec{F}\Delta t = -\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2, \qquad (2)$$

де Δt – час удару (тривалість зіткнення).

З рисунка видно, що імпульс сили, з яким молекула подіяла на стінку, перпендикулярний до стінки і спрямований на неї. Модуль імпульсу сили:

$$F\Delta t = \Delta p = 2p\cos\alpha = 2m\upsilon\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

Обраховуючи, знаходимо

$$F\Delta t = 2\cdot 4{,}65\cdot 10^{-26}\cdot 600\cdot\cos 60^\circ = 2{,}8\cdot 10^{-23}\,H\cdot c\,.$$

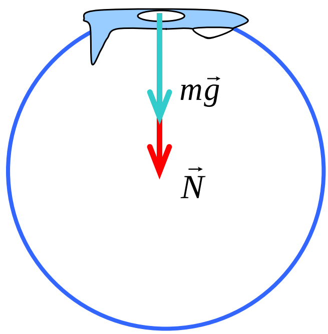
Відповідь: $F\Delta t = 2{,}8\cdot 10^{-23}$ Н·с.

Приклад 7. Літак робить «мертву петлю» радіусом $R = 80\,\text{м}$. Якою має бути найменша швидкість літака, щоб пілот не відірвався від сидіння у верхній точці траєкторії?

Розв'язання

Дано:
$R = 80\,\text{м}$

υ?



Розглянемо умову задачі. Під час виконання фігури вищого пілотажу "мертва петля", літак рухається по колу у вертикальній площині (див. рис.). Запишемо для пілота другий закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}\,, \qquad (1)$$

де m – маса пілота, $\vec{N}$ – сила реакції опори.

У верхній точці С траєкторії сила реакції опори напрямлена донизу, тому проектування (1) на напрямок прискорення у цій точці дає

$$mg + N = ma\,, \qquad (2)$$

Пілот має рухатись з доцентровим прискоренням $a = \upsilon^2 / R$. Тому

$$mg + N = \frac{m\upsilon^2}{R}. \qquad (3)$$

Найменшу можливу швидкість знайдемо, поклавши в останньому рівнянні N=0 (якщо пілот відривається від сидіння, то він не тисне на нього, а доцентрове прискорення йому забезпечує сила тяжіння).

$$mg = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8 \cdot 80} = 28\,м/с.$$

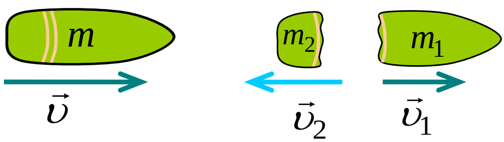
Відповідь: $\upsilon = 28$ м/с.

Приклад 8. Снаряд, що летів горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 10$ м/с, розірвався на два уламки. Більший уламок, маса якого складає 60% від маси цілого снаряда продовжував рухатись у тому ж напрямку, але зі швидкістю $\upsilon_1 = 25$ м/с. Знайти швидкість меншого уламка.

Розв'язання

Дано:
$\upsilon = 10$ м/с
$m_1 = 0{,}6m$
$m_2 = 0{,}4m$
$\upsilon_1 = 25$ м/с

υ_2 ?



1. 2.

Розглянемо умову задачі. Снаряд та його уламки летять горизонтально, вздовж однієї лінії, отже маємо одновимірний випадок руху, вісь OX виберемо у напрямку руху снаряду – вектора $\vec{\upsilon}$. Як і будь-яке рухоме тіло, снаряд масою m що летить зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, має імпульс, що рівний:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Хоч на снаряд і діє сила земного тяжіння, так що систему не можна вважати строго замкненою, але час вибуху малий тому, у відповідності до теореми про зміну імпульсу, можна застосувати закон збереження імпульсу:

$$m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 .$$

Перепишемо вираз замінивши маси уламків на частки від маси снаряду (з умови):

$$m\vec{\upsilon} = 0{,}6m\vec{\upsilon}_1 + 0{,}4m\vec{\upsilon}_2 .$$

Скоротимо маси поділивши обидві сторони рівняння на m:

$$\vec{\upsilon} = 0{,}6\vec{\upsilon}_1 + 0{,}4\vec{\upsilon}_2 ,$$

та визначимо швидкість другого уламку $\vec{\upsilon}_2$:

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{\vec{\upsilon} - 0{,}6\vec{\upsilon}_1}{0{,}4} .$$

Виберемо напрямок $\vec{\upsilon}$ за додатній і спроектуємо останнє рівняння на цей напрямок. Отримаємо шуканий вираз швидкості другого уламку $\vec{\upsilon}_2$:

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon - 0{,}6\upsilon_1}{0{,}4}$$

$$\upsilon_2 = \frac{10 - 0{,}6 \cdot 25}{0{,}4} = -12{,}5\,\text{м/с} .$$

Знак «–» вказує, що швидкість меншого уламка напрямлена проти початкової швидкості снаряда.

Відповідь: $\upsilon_2 = 12{,}5\,\text{м/с}$

Приклад 9. Два тягарці масами $m_1 = 2кг$ і $m_2 = 1кг$ зв'язані мотузкою, що перекинута через невагомий блок. Знайти прискорення тягарців і силу натягу мотузки. Вважаємо, що мотузка нерозтяжна і невагома, тертям у блоці знехтувати.

Розв’язання

Дано:

$m_1 = 2кг$

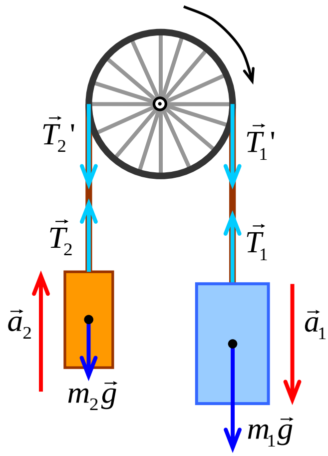
$m_2 = 1кг$

$F_T = 0H$

$g = 9{,}8 м/с^2$

$a?, T?$

Розглянемо умову задачі. На рисунку показані сили, що діють на обива тягарці з масами m_1 і m_2 та блок. На тягарці, що підвішені на мотузці, буде діяти сила гравітаційного притягання $m\vec{g}$, яка буде зрівноважуватися натягом мотузки $\vec{T}$. Оскільки обидва тягарці мають різні маси m_1 і m_2, то натяги мотузки для першого та другого тягарця відповідно будуть рівні $\vec{T}_1$ та $\vec{T}_2$, котрі, у свою чергу діють на блок, і, згідно III закону Ньютона, викликають рівні за модулем, але протилежно напрямлені сили протидії $\vec{T}_1'$ та $\vec{T}_2'$:



$$T_1 = T_1',$$

$$T_2 = T_2'.$$

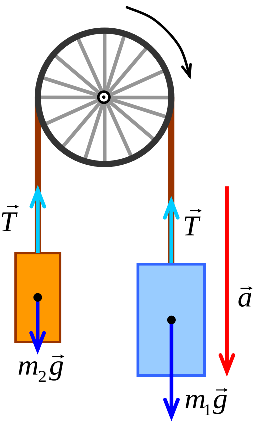
Згідно умови, масою мотузки та блока нехтують, відповідно сили натягу нитки будуть рівними по обидві сторони від блоку, позначимо їх T:

$$T_1 = T_2 = T,$$

Мотузка є нерозтяжною, тому прискорення першого та другого вантажу будуть рівні:

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

Запишемо другий закон Ньютона для кожного з тіл та спроєктуємо векторні рівняння на напрям прискорення $\vec{a}_1$, який позначимо $\vec{a}$ (див рис. 2)



$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{g} + \vec{T} &= m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 &= m_2\vec{a}_2 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} m_1 g - T &= m_1 a \\ -m_2 g + T &= m_2 a \end{aligned}\right\}.$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо:

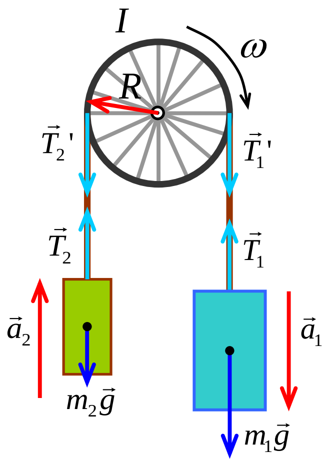
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g\ ;\ T = m_2(a + g).$$

Підставимо числові значення:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 9{,}8 \approx 3{,}3\,\text{м/с}^2, \quad T = 1 \cdot 13{,}1 = 13{,}1\,\text{Н}.$$

Відповідь: a=3,3 м/с^2, T=13,1 Н

Приклад 10. Визначити прискорення тіл і натяг нитки на машині Атвуда, припускаючи, що $m_2 > m_1$. Момент інерції блока відносно осі обертання рівний I, радіус блока R. Нитку вважати невагомою та нерозтяжною, тертям в блоці знехтувати.



Розв'язання

Дано:
m_1
m_2
$m_2 > m_1$
I
R

---

a?, T_1? T_2?

На рисунку показані сили, що діють на тіла і блок (див. розгляд задачі 18). Оскільки, маса нитки мала, можна вважати, що $T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$. Оскільки нитка нерозтяжна, то $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$. Якщо нитка не ковзає по блоку, то кутове прискорення блоку буде пов'язане з лінійним прискоренням нитки виразом:

$$\varepsilon = a/R.$$

Запишемо основний закон динаміки поступального руху (другий закон Ньютона) для кожного з тіл та основний закон динаміки обертального руху – для блока:

$$\left.\begin{aligned} &m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ &m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \\ &I\varepsilon = M_2 - M_1 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

де $M_2 = RT_2$, $M_1 = RT_1$ – моменти сил натягу нитки, що діють на блок.

Спроектуємо векторні рівняння системи (1) на напрям прискорення відповідного тіла:

$$\left.\begin{aligned} &T_1 - m_1 g = m_1 a \\ &m_2 g - T_2 = m_2 a \\ &I\frac{a}{R} = R(T_2 - T_1) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g , \qquad (3)$$

$$T_1 = m_1(a + g), \qquad (4)$$

$$T_2 = m_2(g - a). \qquad (5)$$

Відповідь: $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} g$, $T_1 = m_1(a + g)$, $T_2 = m_2(g - a)$.

Приклад 11. Людина масою $m = 80$кг стоїть на краю горизонтальної платформи масою $M = 100$кг, що обертається навколо вертикальної осі з частотою $\nu_1 = 10\text{хв}^{-1}$. З якою частотою ν_2 буде обертатись платформа, якщо людина перейде в її центр? Платформу вважати однорідним диском, людину – точковою масою.

Розв'язання

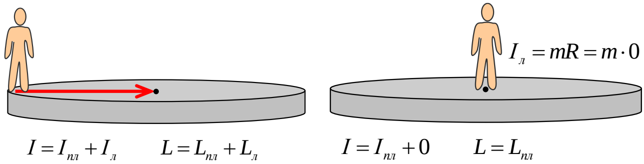
Дано:

$m = 80$ кг

$M = 100$ кг

$\nu_1 = 10$ хв$^{-1}$

ν_2 ?



Для спрощення розвязку задачі, людину вважаємо точковим тілом. Система ”платформа-людина“ – замкнена, тому її момент імпульсу під час переходу людини залишається незмінним, отже сума моментів імпульсу до переходу рівна сумі моментів імпульсу після переходу людини до центру платформи:

$$L_1 + L_2 = L'_1 + L'_2 \,. \tag{1}$$

Момент імпульсу платформи у початковому і кінцевому станах:

$$L_1 = I_{пл}\omega_1 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1 \,; \tag{2}$$

$$L'_1 = I_{пл}\omega_2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_2 \,. \tag{3}$$

Момент імпульсу людини в початковому і кінцевому станах (людину вважаємо матеріальною точкою з моментом інерції $I_л = mR^2$ на краю платформи та $I_л = mR = m \cdot 0 = 0$ у її центрі):

$$L_2 = m R^2 \omega_1 \,, \tag{4}$$

$$L'_2 = 0 \,. \tag{5}$$

Підставивши моменти платформи (2), (3) та людини (4), (5) до виразу закону збереження моменту імпульсу (1) отримаємо:

$$\frac{1}{2} M R^2 \omega_1 + m R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_2 \,. \tag{6}$$

Враховуючи, що кутова швидкість пов'язана з частотою виразом $\omega = 2\pi\nu$, останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{2}MR^2\nu_1 + mR^2\nu_1 = \frac{1}{2}MR^2\nu_2 .$$

Знайдемо частоту платформи ν_2 у кінцевому стані:

$$\nu_2 = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\nu_1}{\frac{1}{2}MR^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)\nu_1}{\frac{1}{2}M} ;$$

$$\nu_2 = \frac{(50+80)\cdot 10}{50} = 26 хв^{-1} .$$

Відповідь: $\nu_2 = 26\text{хв}^{-1}$.

2.3 Енергетика

Приклад 12. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $S = Ct^2 + Dt^3$, де $C = 1\text{м}/\text{с}^2$, $D = 0{,}1\text{м}/\text{с}^3$. Знайти роботу сили, що діє на тіло, за перші 10 секунд після початку руху. Маса тіла $m = 0{,}5\text{кг}$.

Розв'язання

Дано:
$S = Ct^2 + Dt^3$
$C = 1\text{м}/\text{с}^2$
$D = 0{,}1\text{м}/\text{с}^3$
$m = 0{,}5\text{кг}$
$t_1 = 10\text{с}$

A?

Силу, що діє на тіло, знаходимо за другим законом Ньютона

$$F = ma.$$

Прискорення тіла

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(Ct^2 + Dt^3\right) = 2C + 6Dt.$$

Тоді

$$F = m(2C + 6Dt).$$

Сила F залежить від часу, тому для знаходження її роботи треба застосувати формулу змінної сили

$$A = \int_0^{S_1} FdS = \int_0^{t_1} m(2C + 6Dt)d\left(Ct^2 + Dt^3\right) = \int_0^{t_1} m(2C + 6Dt)\left(2Ct + 3Dt^2\right)dt$$

$$A = \int_0^{t_1} m\left(4C^2t + 18CDt^2 + 18D^2t^3\right)dt.$$

Закінчивши інтегрування, отримаємо

$$A = m\left(2C^2t_1^2 + 6CDt_1^3 + 4{,}5D^2t_1^4\right).$$

Після підстановки одержимо

$$A = 0,5\left(2 \cdot 1 \cdot 10^2 + 6 \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 10^3 + 4,5 \cdot 0,1^2 \cdot 10^4\right) = 625\,Дж\,.$$

Відповідь: $A = 625$ Дж .

Приклад 13. Автомобіль масою $1m$ рушає з місця і, рухаючись рівноприскорено, проходить шлях 20м за 2 секунди. Знайти середню потужність двигуна. Тертям знехтувати.

Розв’язання

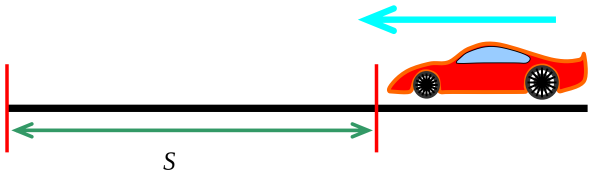
Дано:

$m = 1m = 1 \cdot 10^3$ кг

$S = 20$ м

$t = 2$ с

N ?



Розглянемо умову задачі.

Сила тяги двигуна *F*, яку вважаємо незмінною під час усього руху, буде спричиняти прискорення *a* автомобіля з масою *m*, за другим законом Ньютона отримаємо:

$$F = ma\,.$$

Прискорення автомобіля знайдемо з формули залежності пройденого шляху від часу при рівноприскореному русі без початкової швидкості

$$S = \frac{at^2}{2}\,,$$

тоді прискорення рівне:

$$a = \frac{2S}{t^2}\,.$$

Отже, силу тяги двигуна знайдемо підставивши вираз з прикоренням у II закон Ньютона:

$$F = \frac{m \cdot 2S}{t^2}. \qquad (1)$$

Зв'язок між потужністю двигуна, силою тяги і швидкістю руху

$$N = F \cdot \upsilon.$$

Оскільки нас цікавить середня потужність, то необхідно підставити середню швидкість $\langle \upsilon \rangle$

$$N = F \cdot \langle \upsilon \rangle, \qquad (2)$$

яка у свою чергу рівна відношенню пройденого автомобілем шляху за час t:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{S}{t}. \qquad (3)$$

Після підстановки (1) і (3) у (2) одержимо:

$$N = \frac{m \cdot 2S}{t^2} \cdot \frac{S}{t} = \frac{m \cdot 2S^2}{t^3}$$

$$N = \frac{10^3 \cdot 2 \cdot 20^2}{2^3} = 1 \cdot 10^5\, Вт.$$

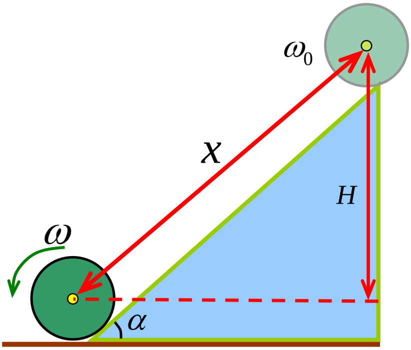
Відповідь: $N = 1 \cdot 10^5$ Вт.

Приклад 14. По похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом, скочується без тертя і ковзання суцільний однорідний диск. Визначити лінійне прискорення центра диска. В початковий момент диск був нерухомим.

Розв'язання

Дано:	
$\angle\alpha$	
a?	

Розглянемо умову задачі. Диск, що скочується, приймає часть у двох рухах одночасно – поступальному зі швидкістю υ і обертальному з кутовою швидкістю ω навколо горизонтальної осі, що проходить через його центр, який є також і центром мас (позначений точкою, див. рис).



На висоті H енергія диска складається лише з потенціальної E_p, яка повністю переходить у кінетичну енергію поступального та обертового рухів у нижній точці руху. Запишемо закон збереження механічної енергії:

$$E_p = E_{k1} + E_{k2},$$

$$mgH = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

де H – висота, підняття центра мас диска, яку виразимо як проекцію пройденого диском шляху x, що є одним з катетів трикутника (див. рис.):

$$H = x\sin\alpha .$$

Тоді підставивши цей вираз у попередній, отримаємо:

$$mgx\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} .$$

Момент інерції циліндра $I = \frac{1}{2}mR^2$, а кутова швидкість $\omega = \frac{\upsilon}{R}$, де R – радіус циліндра. Після підстановки запишемо

$$mgx\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\cdot\upsilon^2}{4R^2} = \frac{3}{4}m\upsilon^2,$$

$$x = \frac{3}{4g\sin\alpha}\cdot\upsilon^2 .$$

Диференціюючи цю рівність по часу і враховуючи, що $\frac{dx}{dt} = \upsilon$; $\frac{d\upsilon}{dt} = a$ – шукане прискорення, знайдемо

$$a = \frac{2}{3} g \sin \alpha \, .$$

Відповідь: $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

Приклад 15. Куля з пістолета, що летіла горизонтально зі швидкістю 600м/с, влучає у балістичний маятник, підвішений на легкому жорсткому стрижні і застряє у ньому. Маса балістичного маятника M у 1000 разів більше, ніж маса кулі m. Довжина підвісу маятника $L = 1$ м. Визначити максимальний кут α відхилення маятника від вертикалі.

Розв'язання

Дано:

$\upsilon = 600$м/с

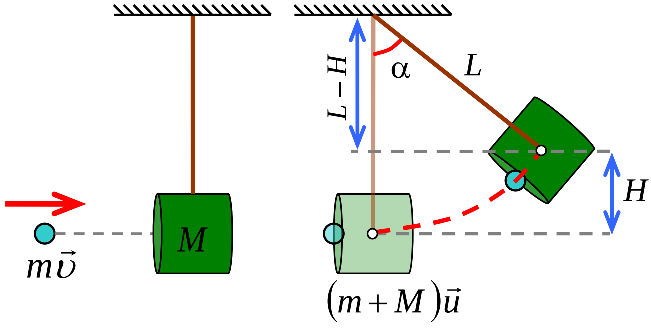
$M = 1000m$

$L = 1$ м

α?

Балістичний маятник (див.рис.) – пристрій, який дозволяє знайти швидкість кулі випущеної з вогнепальної зброї, винайдений 1742 р. англійським математиком Б. Робінсом.

Принцип дії заснований на законах збереження механічної енергії та імпульсу.



Кінетична енергія кулі E_k йде на надання системі «*маятник + куля*» потенціальної енергії E_p, отже на підняття балістичного маятника із застряглою кулею на висоту H (тут і далі розглядаємо рух центра мас маятника – позначений точкою див. рис.).

Позначимо масу кулі *m*, а балістичного маятника – *M*. Швидкість руху системи «*маятник + куля*» одразу після зіткнення (абсолютно непружнього, адже система «маятник+куля» після зіткнення рухаються разом) позначимо *u* і знайдемо її на основі закону збереження імпульсу:

$$m\upsilon = (m + M)\cdot u,$$

знайдемо швидкість руху системи «маятник+куля» *u*:

$$u = \frac{m\upsilon}{m + M}.$$

У крайньому положенні швидкість маятника дорівнює нулю, уся кінетична енергія перейшли у потенціальну; тому, згідно з законом збереження механічної енергії запишемо

$$\frac{(m + M)\cdot u^2}{2} = (m + M)gH;$$

де H – максимальна висота підйому, знайдемо її:

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{(m\upsilon)^2}{(m + M)^2 2g}.$$

З рисунка видно, що

$$\cos\alpha = \frac{L - H}{L} = 1 - \frac{H}{L},$$

де α – шуканий кут. Отже:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(m\upsilon)^2}{(m + M)^2 2gL}.$$

Після підстановки числових значень одержимо:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m^2\upsilon^2}{(m + 1000m)^2\, 2gL}.$$

Врахуємо, що маси кулі та маятника поєднані виразом $M = 1000m$:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\upsilon_1^2}{1001^2 \cdot 2gL}.$$

Виконаємо підстановку:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{600^2}{1001^2 \cdot 2 \cdot 9{,}8 \cdot 1} = 0{,}98$$

отже кут α рівний:

$$\alpha = \arcsin 0{,}98 = 12^{\circ}.$$

Відповідь: $\alpha = 12^{\circ}$.

Приклад 16. Баба копра масою $m_1 = 0{,}6$ т падає з деякої висоти на палю масою $m_2 = 150$ кг. Знайти ККД баби копра, вважаючи удар непружним. Корисною вважати енергію, що пішла на заглиблення палі.

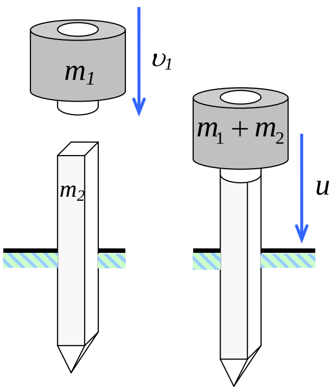
Розв'язання

Дано:

$m_1 = 0{,}6т = 600кг$

$m_2 = 150кг$

η?



Розглянемо умову задачі.

Для забивання паль у ґрунт використовують спеціальну машину – копер (*англ.* *diesel hammer*).

Принцип дії такої системи подібний до двигуна внутрішнього згорання – масивний мотот – "*баба*" приводиться у дію енергією згоряння дизельного палива.

У початковий момент часу рухомою частиною відносно землі є лише баба копра масою m_1, котра падає зі швидкістю $\vec{\upsilon}_1$ та має імпульс $\vec{p}_1$, а імпульс палі $\vec{p}_2$ рівний нулю (паля нерухома, відповідно $\vec{\upsilon}_2 = 0$),:

$$\vec{p}_1 = m_1\vec{\upsilon}_1,$$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{\upsilon}_2 = m_2 \cdot 0 = 0$$

Тому імпульс системи "*паля + баба* до взаємодії буде рівним імпульсу палі $\vec{p}_1$.

Після взаємодії (удару) система "*паля + баба*" масою $m_1 + m_2$ рухається вниз зі швидкістю $\vec{u}$,

$$\vec{p}' = (m_1 + m_2)\vec{u} \ .$$

Вважаємо, що удар є абсолютно непружній, і вся енергія йде на пластичну деформацію ґрунту, і, відповідно, заглиблення палі.

Запишемо закон збереження імпульсу для абсолютно непружного удару баби копра:

Імпульс тіл $\sum \vec{p}$ *до взаємодії = імпульсу* $\sum \vec{p}'$ *після взаємодії,*

отже

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u \ ,$$

υ_1 – швидкість баби копра до удару, $\vec{\upsilon}_2$ – швидкість палі до удару, u – спільна швидкість баби копра і палі в момент удару і заглиблення палі. Врахуємо що паля нерухома $\vec{\upsilon}_2 = 0$,

$$m_1\upsilon_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2)u \ ,$$

тоді

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)u \ .$$

Знайдемо швидкість системи “*паля + баба*”:

$$u = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \ . \qquad (1)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) визначається відношенням корисної роботи до затраченої:

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{зат}} \ . \qquad (2)$$

Для знаходження η поміркуємо, чим обумовлена корисна та затрачена робота копра. Очевидно, що корисною роботою такої будівельної техніки як копер, має бути *кінетична енергія витрачена на забивання паль у ґрунт*, а затраченою – паливо, енергія згоряння якого перетворюється на *кінетичну енергію баби копра*.

Затрачена робота $A_{зат}$ рівна початковій кінетичній енергії баби до удару, її ми знайдемо з виразу кінетичної енергії $E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}$:

$$E_{k0} = \frac{m_1\upsilon_1^{\ 2}}{2} \ . \qquad (3)$$

Кінетичну енергію системи “*паля + баба*”, котра пішла на заглиблення палі ($A_{кор}$) знайдемо з виразу кінетичної енергії системи після удару (вважаємо, що удар був абсолютно непружній і уся енергія системи пішла на забивання палі):

$$E_k = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}. \qquad (4)$$

Підставимо вирази енергій E_{k0} та E_k у вираз η (2):

$$\eta = \frac{E_k}{E_{k1}} = \frac{\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}}{\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \frac{u^2}{\upsilon_1^2}.$$

Підставимо у отриманий вираз швидкість *u* (1):

$$\eta = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_1^2}.$$

Після скорочення отримаємо кінцеву формулу:

$$\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Підставимо числові значення і знайдемо ККД установки:

$$\eta = \frac{600}{600 + 150} = 0{,}8.$$

Відповідь: η =0,8.

3. Задачі для самостійного розв’язування

Варіант	Номер задачі						
1	1	13	32	52	66	85	90
2	2	14	33	53	69	88	91
3	3	15	34	54	70	94	96
4	4	16	35	55	74	95	97
5	5	17	36	56	75	96	98
6	6	22	38	57	76	97	99
7	7	23	39	58	78	80	84
8	8	24	40	60	80	82	85
9	9	26	41	62	82	84	86
10	11	27	44	63	84	86	92

3.1 Кінематика

Кінематика поступального руху

1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухається зі швидкістю 80км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Знайти середню швидкість автомобіля. $(\upsilon = 60 км/год)$

2. Першу половину шляху автомобіль рухався зі швидкістю 80км/год, а другу половину – зі швидкістю 40 км/год. Знайти середню швидкість. $(\upsilon_{ср} = 53{,}3 км/год)$

3. Точка рухалась 15с з швидкістю 5м/с, 10с з швидкістю 8 м/с і 6с з швидкістю 20 м/с. Яка середня швидкість руху точки? $(\upsilon = 8{,}87 м/с)$

4. Швидкість човна за течією 6 м/с, а проти течії 2 м/с. Визначити швидкість течії і човна відносно течії. $(\upsilon_1 = 2 м/с; \upsilon_2 = 4 м/с)$

5. Пасажирський пароплав проходить відстань 150 км між двома пристанями за течією за 2 год, а проти течії – за 3 год. Визначити швидкість пароплава в стоячій воді і швидкість течії води в річці.

$(\upsilon_1 = 62{,}5 км/год; \upsilon_2 = 12{,}5 км/год)$

6. Камінь кинутий вертикально в гору з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20 м/с$. Через скільки секунд камінь буде знаходитись на висоті h=15м? Яка буде швидкість υ каменя на цій висоті? Опором повітря знехтувати. Прийняти g=10м/с^2. $(t = 1с; \upsilon = 10 м/с)$

7. Камінь падає в шахту. Через 6 с чути удар каменя об дно шахти. Визначити глибину шахти, якщо швидкість звуку 330 м/с. (h=148 м)

8. Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулось на землю через 3 секунди. Яка була початкова швидкість тіла? На яку висоту піднялось тіло? $(\upsilon_0 = 14{,}7 м/с; H = 11 м)$

9. З аеростата, що знаходиться на висоті 300м, впав камінь. За який час він долетить до землі, якщо: 1) аеростат нерухомий; 2) аеростат

піднімається зі швидкістю 5м/с; 3) аеростат опускається зі швидкістю 5м/с. (t_1=7,8*с*; t_2=8,4*с*; t_3=7,3*с*)

10.*Тіло, що вільно падає, за останню секунду свого падіння проходить половину всього шляху. Знайти: 1) з якої висоти *H* падає тіло; 2) тривалість його падіння. (*H*=57*м; t=3,4с)*

11. Потяг рухається рівносповільнено з від'ємним прискоренням $|a| = 0{,}5\,\text{м/с}^2$. Початкова швидкість потягу 54км/год. За який час і на якій відстані від початкової точки потяг зупиниться? (*t=30с; S=225м)*

12. Два тіла почали рухатись одночасно в одному напрямку: одне рухалося рівномірно з швидкістю 54 км/год, інше рівноприскорено з прискоренням 0,6 м/с^2. Через який проміжок часу друге тіло наздожене перше? Накреслити графік руху двох тіл. (*t*=50с)

13. Залежність шляху від часу задається рівнянням $S = At - Bt^2 + Ct^3$ де *A*=2м/с, *B*=3м/с^2, *C*=4м/с^3. Знайти: 1) залежність швидкості та прискорення від часу; 2) швидкість та прискорення тіла через 2с після початку руху. $\left(\upsilon = 38\,м/с;\, a = 42\,м/с^2\right)$

14. Залежність шляху від часу визначається рівнянням $S = A + Bt + Ct^2$, де *A*=3м, *B*=2м/с, *C*=1м/с^2. Знайти середню швидкість та середнє прискорення за другу секунду руху.
$\left(\upsilon_{ср} = 5\,м/с;\, a = 2\,м/с^2\right)$

15. Залежність шляху від часу дається рівнянням $S = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де *C*=0,11м/с^2, *D*=0,01м/с^3. Знайти: 1) за який час після початку руху прискорення тіла дорівнюватиме 1м/с^2; 2) чому дорівнює середнє прискорення за цей проміжок часу.(*t*=12*с*;$a_{ср}$=0,5*м/с*^{2})

16. Рух двох матеріальних точок описується рівняннями:

$X_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ де $A_1 = 20\,м,\ B_1 = 2\,м/с,\ C_1 = -4\,м/с^2.$

$X_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$ де $A_2 = 2\,м,\ B_2 = 2\,м/с,\ C_2 = 0{,}5\,м/с^2.$ В який момент часу швидкості цих точок будуть однаковими? Чому рівні швидкості та прискорення точок в цей момент?

$$\left(t = 0;\, \upsilon_1 = 2\,м/с;\, \upsilon_2 = 2\,м/с;\, a_1 = -8\,м/с^2;\, a_2 = -1\,м/с^2\right)$$

17. З башти висотою H=25м в горизонтальному напрямку кинуто камінь зі швидкістю υ_0=15м/с. Знайти: 1) час руху каменя: 2) на якій відстані S від башти він впаде на землю; 3) яку швидкість він матиме в момент падіння; 4) який кут з горизонтом складатиме траєкторія каменя у точці його падіння?
$\left(t = 2{,}26c;\ S = 33{,}9м;\ \upsilon = 26{,}7м/с;\ \varphi = 55^0 48'\right)$

18.*Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю υ_0=10 м/с. Знайти радіус кривизни траєкторії через 3с після початку руху.

$\left(R = 305м\right)$

19.*Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю υ_0=15м/с. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення каменя через 1с після початку руху. $\left(a_\tau = 5{,}4м/с^2;\ a_n = 8{,}2м/с^2\right)$

20.*Під яким кутом α до горизонту треба кинути тіло, щоб максимальна висота підйому дорівнювала дальності польоту? $\left(\alpha = 76^0\right)$

21.*Тіло кинуте з початковою швидкістю υ_0=20м/с під кутом α=45° до горизонту. Через який час після початку руху швидкість тіла складатиме кут β=30° з горизонтом? $\left(t = 0{,}6c\right)$

Кінематика обертального руху

22. Диск радіусом r=20 см обертається згідно рівняння $\varphi = A + Bt + ct^3$, де A=3 рад, B= -1 рад/с, C=0,1 рад/с^3. Визначити тангенціальне a_τ, нормальне a_n і повне прискорення точок на ободі диска для моменту часу t=10 с. (a_τ =1,2 м/с^2, a_n =168 м/с^2, $a \approx$ 168м/с^2)

23. Лінійна швидкість точок на ободі диска, що обертається, $\upsilon_1 = 3м/с$. Точки, розміщені на 10 см ближче до осі, мають лінійну

швидкість $\upsilon_2 = 2$м/с. Скільки обертів в секунду має диск? (n=1,59 об/с)

24. Вал здійснює 1440 об/хв. Визначити період обертання шківа насадженого на вал і лінійну швидкість точок на його ободі. Якщо діаметр шківа 0,4 м. ($\upsilon = 30{,}1 м/с$, T=0,042$с$)

25. В скільки разів лінійна швидкість хвилинної стрілки годинника більша лінійної швидкості кінця годинникової стрілки, якщо хвилинна стрілка в 1,5 разів довша годинникової? (у 18 разів)

26. Колесо, що обертається рівноприскорено, досягає кутової швидкості ω=20рад/с. При цьому воно зробило N=10 обертів після початку руху. Знайти кутове прискорення колеса. $\left(\varepsilon = 3{,}2 рад/с^2\right)$

27. Вентилятор обертається з частотою $\nu = 180$об/хв. Починаючи з деякого моменту він починає гальмувати і обертається рівносповільнено з кутовим прискоренням, чисельно рівним 3рад/с^2. За який час вентилятор зупиниться? Скільки обертів зробить він до зупинки? (t=6,3$с$; N=9,4$об$)

28.*Точка рухається по колу радіусом R=10см з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти нормальне прискорення через t=20с після початку руху, якщо відомо, що наприкінці п'ятого оберту від початку руху швидкість точки дорівнює 0,792м/с. (a_n=0,01$м/с^2$)

29. Точка рухається по колу радіусом R=20см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ=5см/с^2. За який час від початку руху нормальне прискорення дорівнюватиме тангенціальному? (t=2$с$)

30. *Точка рухається по колу радіусом R=2см. Залежність шляху від часу $S=Ct^2$, де C=0,1см/с^2. Знайти нормальне і тангенціальне прискорення точки в той момент, коли її лінійна швидкість υ=0,3м/с.

(a_n=4,5$м/с^2$; a_τ=0,06$м/с^2$)

31. Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через 2с після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення для точок, що лежать на ободі, складає кут 60° з напрямком дотичної до траєкторії в цій точці. $\left(\varepsilon = 0{,}43 рад/с\right)$

32. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням

$\varepsilon = 2$рад/с^2. Через t=0,5с після початку руху повне прискорення колеса a=13,6см/с^2. Знайти радіус колеса. (R=6,1м)

33. Колесо радіусом R=0,1м обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу дається рівнянням $\varphi = A+Bt+Ct^3$, де B=2рад/с, C=1рад/с^3. Для точок, що лежать на ободі, знайти через 2с після початку руху: 1) кутову швидкість, 2) кутове прискорення, 3) лінійну швидкість, 4) тангенціальне прискорення, 5) нормальне прискорення.

$$\left(\omega = 14 рад/с; \varepsilon = 12 рад/с^2; \upsilon = 1{,}4 м/с; a_\tau = 1{,}2 м/с^2; a_n = 19{,}6 м/с^2\right)$$

3.2. Динаміка

Динаміка поступального руху

34. Тіло масою 0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого шляху від часу має вигляд $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де C=5м/с^2 і D =1м/с^3. Знайти величину сили, що діє на тіло наприкінці першої секунди руху. (F=2Н)

35. Під впливом постійної сили F=10Н тіло рухається так, що залежність шляху від часу визначається рівнянням $S = A - Bt + Ct^2$. Знайти масу тіла, якщо C=1м/с^2. (m=5кг)

36. Знайти натяг троса при рівноприскореному спусканні кабіни ліфта масою 400 кг, якщо за 10 с вона пройшла відстань 30м. (F=3680Н)

37. Камінь масою 1 кг при падінні з висоти 25 м набув в кінці шляху швидкість 20 м/с. Знайти середню силу опору повітря при падінні каменя. (F=1,8 Н)

38. До нитки підвішений вантаж масою 1кг. Знайти натяг нитки, якщо вантаж: 1) піднімають з прискоренням $a = 5\,\text{м}/\text{с}^2$; 2) опускають з таким же прискоренням. (T_1=15Н; T_2=5Н)

39. Автомобіль масою 1000кг зупиняється при гальмуванні через 5 секунд, пройшовши при цьому до зупинки шлях 25м. Знайти силу гальмування. (F=2040Н)

40. Потяг масою 500т рухається рівносповільнено при гальмуванні і за 1 хвилину зменшує свою швидкість від 40км/год до 28км/год. Знайти силу гальмування. (F=2,8·10^{4}Н)

41.Тіло масою m=0,5кг рухається так, що залежність шляху від часу визначається рівнянням $S = A\sin\omega t$, де A=5·10^{-2}м, ω=π рад/с. Знайти силу, що діє на тіло через 1/6 секунди після початку руху.

(F= –0,123Н)

42.*Трос лежить на столі так, що частина його звисає, і починає ковзати тоді, коли звисає 25% усієї довжини. Чому дорівнює коефіцієнт тертя μ? (μ=0,33)

43. Знайти силу тяги двигуна, якщо автомобіль рухається вгору з прискоренням 1м/с^2. Нахил гори складає 1м на кожні 25м шляху. Маса автомобіля $1\cdot10^3$кг , коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$. (F=2370Н)

44. Тіло ковзає по похилій площині, що складає кут 45° з горизонтом. Пройшовши шлях S=0,364м, тіло набуло швидкості 2м/с. Чому дорівнює коефіцієнт тертя? (μ=0,2)

45. Тіло ковзає по похилій площині, що складає з горизонтом кут 45°, Залежність шляху від часу S=ct^2, де c=1,73м/с^2. Знайти коефіцієнт тертя μ. (μ=0,5)

46. Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини (α = 30°), як зображено на рис.1. Вантажі A і B рівної маси m_1=m_2=1кг сполучені ниткою, що перекинута через блок. Знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, та натяг нитки. Тертям знехтувати.

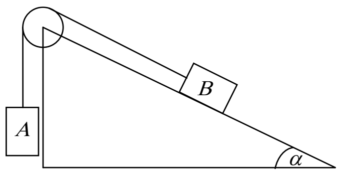


Рис. 1

(a=2,45$м/с^2$; T=7,35$Н$)

47. *Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, що складають з горизонтом кути α=30° та β=45°, як зображено на рис. 2. Вантажі A та B рівної маси m_1=m_2=1кг сполучені ниткою, що перекинута через блок. Нехтуючи тертям, знайти прискорення

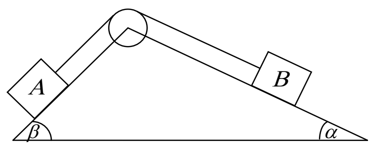


Рис. 2

a, з яким рухаються вантажі, та силу натягу нитки T. (a=1$м/с^2$; T=5,9H)

48. Два вантажі масами m_1=7кг та m_2=11кг підвішені до кінців нитки, яку перекинуто через блок. Початково вантажі знаходяться на одній висоті. Через який час після початку руху відстань між вантажами дорівнюватиме 10см? (t=0,21 c)

49. Яким має бути коефіцієнт тертя μ між колесами автомобіля і дорогою, щоб автомобіль міг пройти закруглення радіусом R=200м при швидкості υ=100км/год? (μ=0,4)

50.*З якою максимальною швидкістю υ може їхати по горизонтальній площині мотоцикліст, якщо він описує дугу радіусом R=90м, а коефіцієнт тертя μ=0,4. На який кут φ від вертикалі він повинен при цьому відхилитись? $\left(\upsilon = 18{,}8 км/с; \varphi = 21{,}8^0\right)$

51. Яку тривалість повинна мати доба на Землі, щоб тіла на екваторі не мали ваги? (t=1*год*25*хв*)

52. Людина та візок рухаються назустріч одне одному, причому маса людини вдвічі більша від маси візка. Швидкість людини 2м/с, візка – 1м/с. Людина стрибає на візок та залишається на ньому. Знайти швидкість візка з людиною. $(\upsilon = 1 м/с)$

53. Потяг масою m=1,8·10^{5}кг, який рухається рівномірно зі швидкістю 0,5м/с, стикається з нерухомим вагоном і продовжує рухатись разом із ним. Яка маса вагона, якщо швидкість потягу зменшилась до 0,4 м/с? $\left(m = 4{,}5 \cdot 10^4 кг\right)$

54. Молекула масою $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, що летить зі швидкістю $\upsilon = 600$м/с, вдаряється об стінку та відбивається від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили, отриманий стінкою. Молекула рухалась нормально до стінки. $\left(F \cdot \Delta t = 5{,}6 \cdot 10^{-23} H \cdot c\right)$

55. *Водяний струмінь перерізом S=6см^2 стикається зі стінкою під кутом α=60° до нормалі та відбивається від неї без втрати швидкості. Знайти силу, що діє на стінку, якщо швидкість води в струмені υ=12м/с. (F=86Н)

56. Людина масою 60кг, що біжить зі швидкістю 8км/год, наздоганяє візок масою 80кг, що котиться зі швидкістю 2,9км/год, та вистрибує на нього. З якою швидкістю буде рухатись візок після цього?

$\left(\upsilon = 5{,}14 км/год\right)$

57. Куля масою m_1=2кг рухається з швидкістю $\upsilon_1 = 4$м/с і стикається з нерухомою кулею масою m_2=5кг. Визначити швидкість куль після прямого центрального удару. Удар вважати абсолютно пружним.

$\left(\upsilon_1' = -1{,}7 м/с; \upsilon_2' = 2{,}3 м/с\right)$

Динаміка обертального руху

58. До ободу однорідного диска радіусом R=0,2м прикладена дотична сила F=98,1Н. При обертанні на диск діє момент сил тертя $M_{тр}$=4,9Н·м. Знайти масу диска, якщо відомо, що він обертається з постійним кутовим прискоренням ε=100рад/с^2. (m=7,36кг)

59. Однорідний стрижень довжиною 1м і масою 0,5кг обертається у вертикальній площині навколо горизонтальної осі, що проходить через його середину, під дією обертаючого моменту $M = 9{,}8 \cdot 10^{-2}$ Н · м . Знайти кутове прискорення. (ε=2,35*рад/с*)

60. Однорідний диск радіусом R=2м і масою m=5кг обертається навколо осі, що проходить через його центр. Залежність кутової швидкості обертання диска від часу задається рівнянням $\omega = A + Bt$, де B=8рад/с. Знайти величину дотичної сили, яка прикладена до ободу диска. Тертям знехтувати. (F=4,0*Н*)

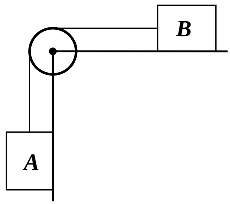
61. Махове колесо, момент інерції якого I=245кг·м^2, обертається з частотою ν=20об/с. Через одну хвилину після того, як припинилась дія обертаючого моменту, воно зупинилось. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) кількість обертів, яке зробило колесо до повної зупинки після припинення дії обертаючого моменту сили. (M=513*Н · м*; N=600*об*)

62. Невагома і нерозтяжна нитка перекинута через блок масою 1кг. До кінців нитки прикріплені вантажі масами m_1=2кг та m_2=1кг.

Знайти: 1) прискорення a, з яким рухаються вантажі, 2) натяги нитки T_1 та T_2 з обох боків блоку. (a=2,8$м/с^2$; T_1=14$Н$; T_2=12,6$Н$)

63. На барабан масою m_1=9кг намотаний шнур, до кінця якого прикріплено вантаж масою m_2=2кг. Знайти прискорення вантажу. Барабан вважати однорідним циліндром. (a=3$м/с^2$)

64. На барабан радіусом R=20см, момент інерції якого I=0,1кг·м^2, намотаний шнур, до якого прикріплено вантаж m=0,5кг. До початку руху вантаж знаходився на висоті h=1м над підлогою. Знайти: 1) за який час вантаж опуститься до підлоги; 2) натяг нитки. (t=1,1$с$; T=4,1$Н$)



65. *Блок масою 1кг закріплений на краю стола. Вантажі A і B рівної маси m_1=m_2=1кг сполучені ниткою, яку перекинуто через блок (дивись рисунок). Коефіцієнт тертя тіла B об стіл рівний μ=0,1. Блок вважати однорідним диском. Тертям у блоці знехтувати, Знайти: 1) прискорення вантажів; 2) натяги T_1 та T_2 ниток. (a=3,53$м/с^2$; T_1=6,3$Н$; T_2=4,5$Н$)

66. Колесо, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшило за 1хв частоту обертання від 300об/хв до 180об/хв. Момент інерції колеса I=2кг·м^2. Знайти: 1) кутове прискорення колеса ε; 2) гальмівний момент $M_{тр}$; 3) кількість обертів N, зроблених колесом за цю хвилину. (ε=– 0,21$рад/с^2$;M=0,42$Н·м$; N=240$об$)

67. Махове колесо, момент інерції якого I=245кг·м^2, обертається з частотою 20об/с. Після того, як на колесо перестав діяти обертальний момент сил, воно зупинилось, зробивши 1000 обертів. Знайти: 1) момент сил тертя $M_{тр}$; 2) час, що пройшов до зупинки. ($M_{тр}$=308$Н·м$; t=100$с$)

68. *По ободу шківа, насадженого на спільну вісь з маховим колесом, намотано нитку, до кінця якої підвішений вантаж масою 1кг. На яку відстань повинен опуститись вантаж, щоб колесо зі шківом набуло швидкості, що відповідає частоті ν=60об/хв? Момент інерції колеса разом зі шківом I=0,42кг·м^2, радіус шківа R=10см. (h=0,865$м$)

69. До ободу однорідного суцільного диска радіусом R=0,5м прикладена постійна дотична сила F=100Н. При обертанні на нього

діє момент сил тертя $M_{тр}$=2Н·м. Визначити масу диска, якщо відомо, що його кутове прискорення ε=12рад/с^2. (m=32*кг*)

70. Платформа у вигляді суцільного диска радіусом R=1,5м і масою m=180кг обертається зі сталою кутовою швидкістю, що відповідає частоті ν=10об/хв. В центрі платформи знаходиться людина масою m_2=60кг. Яку лінійну швидкість відносно землі матиме людина, якщо вона перейде на край платформи? (υ=1*м/с*)

71. Платформа у вигляді диска рівномірно обертається навколо вертикальної осі з частотою ν_1=14об/хв. На краю платформи стоїть людина масою m=70кг. Коли людина перейшла до центру платформи, вона почала обертатися з частотою ν_2=25об/хв. Визначити масу M платформи. Людину вважати матеріальною точкою. (M=210*кг*)

72. *Нерухома платформа має вигляд диска діаметром D=0,8м і масою m_1=6кг. На краю платформи стоїть людина масою m_2=60кг. З якою кутовою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина, спіймає м'яч масою m_3=0,5кг? Траєкторія м'яча горизонтальна і проходить на відстані r=0,4м від осі платформи. Швидкість м'яча становить υ=5м/с. Людину вважати матеріальною точкою. (ω=0,1*рад/с*)

73. У центрі горизонтальної платформи, що обертається з кутовою швидкістю ω_1=4рад/с, стоїть людина і тримає в руках стрижень вертикально вздовж осі обертання. З якою кутовою швидкістю ω_2 буде обертатись платформа, якщо людина поверне стрижень так, що він набуде горизонтального положення? Сумарний момент інерції людини і платформи I=5кг·м^2. Довжина стрижня l=1,8м, маса m=6кг. Вважати, що центр мас стрижня з людиною знаходиться на осі обертання. (ω_2=3,02*рад/с*)

74. Горизонтальна платформа масою m=80кг та радіусом R=1м обертається з частотою ν_1=20об/хв. В центрі платформи стоїть людина, яка тримає у розставлених руках вантажі. Яку кількість обертів за хвилину робитиме платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від I_1=2,94кг·м^2 до I_2=0,98кг·м^2. Платформу вважати однорідним диском, а людину – матеріальною точкою. (ν_2=21*об/хв.*)

3.3. Робота, потужність, енергія

75. Автомобіль масою 2т підіймається на гору з ухилом 4м на кожні 100м шляху. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}08$. Яку роботу виконує двигун автомобіля на шляху 3км? (*A*=7*МДж*)

76. Яку роботу потрібно виконати, щоб стиснути пружину на 10см, якщо для її стискування на 1см потрібна сила 100Н? (*A*=50*Дж*)

77. *Залежність пройденого шляху від часу має вигляд $S = Dt^3$, де $D = 0{,}01\text{м}/\text{с}^3$. Маса тіла 1кг. Знайти роботу сили, що діє на тіло, за перші 5 секунд після початку руху. (*A*=0,28 *Дж*)

78. Потяг масою $5 \cdot 10^5$кг підіймається зі швидкістю 30км/год на гору з ухилом 10м на кожен кілометр шляху. Коефіцієнт тертя 0,002. Визначити потужність двигуна. (*N*=500 *кВт*)

79. Знайти, яку потужність розвиває двигун автомобіля масою 1т, якщо автомобіль їде зі сталою швидкістю $36\text{км}/\text{год}$: 1) по горизонтальній дорозі; 2) на гору з ухилом 5м на кожні 100м шляху; 3) з гори з таким же ухилом. Коефіцієнт тертя у всіх випадках дорівнює 0,07. (N_1=6,9 *кВт*; N_2=11,8 *кВт*; N_3=1,96 *кВт*)

80. При підійманні вантажу масою 2кг на висоту 1м сталою силою було виконано роботу 78,5Дж. З яким прискоренням підіймався вантаж? (a=39,25$м/с^2$)

81. Диск масою 2кг котиться без ковзання по горизонтальній дорозі зі швидкістю 4м/с. Знайти його кінетичну енергію. (W_k=24 *Дж*)

82. Обруч і диск однакової маси котяться без ковзання з однаковою лінійною швидкістю. Кінетична енергія обруча W_{k1}=40Дж. Знайти кінетичну енергію диска W_{k2}. (W_{k2}=29,4 *Дж*)

83. *Автомобіль масою 1т рухається з гори при вимкненому двигуні зі сталою швидкістю 15м/с. Ухил гори дорівнює 4м на кожні 100м шляху. Яку потужність повинен розвивати двигун цього автомобіля, щоб рухатись з тією ж швидкістю на гору з тим же ухилом? (*N*=11,8 *кВт*)

Теорема про зміну кінетичної та потенціальної енергії; закон збереження енергії в механіці

84. Куля масою 10г підлітає до дошки товщиною 4см зі швидкістю 600м/с і, пробивши дошку, вилітає зі швидкістю 400м/с. Знайти середню силу опору дошки. (F=2,5·$10^4$$H$)

85. Обчислити роботу, потрібну для того, щоб збільшити швидкість тіла масою 1кг від 2м/с до 6м/с на шляху 10м. На всьому шляху діє стала сила тертя 19,6Н. (A=35,6 *Дж*)

86. З якою швидкістю рухався вагон масою 1т, якщо при ударі об стінку кожний буфер стиснувся на 10см? Відомо, що пружина кожного буфера стискається на 1см під дією сили $1 \cdot 10^4$ Н. (υ=1*м/с*)

87. Яку роботу виконують гравітаційні сили при падінні на Землю тіла масою 2кг 1) з висоти 1000км; 2) з нескінченості. Маса Землі $6 \cdot 10^{24}$ кг, радіус Землі $6{,}4 \cdot 10^6$ м. (A=17·10^6 *Дж*; A=125·10^6 *Дж*)

88. Диск масою 1кг і діаметром 60см обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска, з частотою 20об/с. Яку роботу потрібно виконати, щоб зупинити диск?

(A=355 *Дж*)

89. Хлопець котить обруч по горизонтальній дорозі зі швидкістю 7,2км/год. На яку відстань може закотитись обруч на гірку за рахунок його кінетичної енергії? Ухил гірки дорівнює 10м на кожні 100м шляху. Тертя відсутнє. (S=4,1 м)

90. *З похилої площини з кутом нахилу α скочуються без ковзання і без тертя куля, диск і обруч. Знайти прискорення кожного з цих тіл. Початкові швидкості рівні нулю.

$$\left(a_к = \frac{5}{7} g \sin\alpha;\ a_д = \frac{2}{3} g \sin\alpha;\ a_{об} = \frac{g \sin\alpha}{2} \right)$$

91. *Ковзаняр масою 70кг стоїть на ковзанах на гладкому льоду. Яку роботу повинен виконати ковзаняр, щоб кинути в горизонтальному напрямку камінь масою 3кг зі швидкістю 8м/с? (A=4,046 *Дж*)

92. *Олівець довжиною 15см, що стоїть вертикально, падає на стіл. Яку лінійну швидкість матиме в кінці падіння 1) середина олівця; 2) верхній його кінець? ($\omega_1 = \omega_2$=14*рад/с*; υ_1 =1,05*м/с*; υ_2=2,10 *м/с*)

93. *Знайти роботу розтягу двох з'єднаних одна з одною пружин з коефіцієнтами пружності $k_1 = 400\,Н/м$ і $k_2 = 250\,Н/м$, якщо перша пружина при цьому розтягнулась на 2см. Задачу розв'язати у випадках, коли пружини з'єднані 1) послідовно; 2) паралельно. ($A_{посл}$=0,21 *Дж*)

Зіткнення тіл (абсолютно пружні та абсолютно непружні)

94. Куля масою 500г, яка рухається зі швидкістю 10м/с, стикається з нерухомою кулею масою 200*г*, після чого обидві кулі рухаються разом. Знайти їх кінетичну енергію після зіткнення. (W_k=18 *Дж*)

95. Куля масою 10г, яка летить зі швидкістю 100м/с, влучає в нерухоме тіло масою 90г і застряє у ньому. Яка кількість теплоти виділиться під час зіткнення? (Q=45 *Дж*)

96. Тіло масою 5кг стикається з нерухомим тілом масою 2,5кг. Кінетична енергія цих двох тіл після їх абсолютно непружнього зіткнення – 5Дж. Знайти швидкість першого тіла до зіткнення. (υ_1=1,7*м/с*)

97. Куля масою 1кг рухається зі швидкістю 4м/с і стикається з кулею масою 2кг, що рухається їй назустріч зі швидкістю 3м/с. Знайти швидкості куль після їх абсолютно пружного прямого центрального зіткнення. $\left(\upsilon_1' = -4 м/с; \upsilon_2' = 1{,}25 м/с\right)$

98. Дві кулі підвішені на паралельних нитках однакової довжини так, що вони дотикаються одна до одної. Першу кулю відхиляють так, що її центр мас підіймається на висоту 4,5см, і відпускають. На яку висоту підіймуться кулі після абсолютно пружного зіткнення? Маса першої кулі 0,2кг, а другої – 0,1кг. (h_1=0,005*м*; h_2=0,08*м*)

99. *Куля масою 2кг стикається з нерухомою кулею і втрачає при цьому 40% кінетичної енергії. Визначити масу другої кулі. Зіткнення абсолютно пружне, пряме, центральне. (m_2=15,75*кг*)

4. Довідкові дані

Фундаментальні фізичні сталі

Гравітаційна стала	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2/кг^2$
Прискорення вільного падіння	$g = 9.81 м/с^2$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$
Маса електрона	$m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ кг$
Маса протона	$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ кг$
Елементарний заряд	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ Кл$
Електрон-вольт	$1 еВ = 1{,}60 \cdot 10^{-19} Дж$

Густина деяких речовин

Речовина	$\rho \cdot 10^3$ (кг/м^3)	Речовина	$\rho \cdot 10^3$ (кг/м^3)
мідь	8,6	вода	1,00
залізо	7,9	гліцерин	1,26
свинець	11,3	касторове масло	0,89
ртуть	13,6	повітря	0,00129

Префікси для утворення кратних одиниць

Префікс	**Позначення**		**Числове значення**	**Префікс**	**Позначення**		**Числове значення**
тера	*Т*	*T*	10^{12}	піко	*п*	*p*	10^{-12}
гіга	*Г*	*G*	10^{9}	нано	*н*	*n*	10^{-9}
мега	*М*	*M*	10^{6}	мікро	*мк*	μ	10^{-6}
кіло	*к*	*k*	10^{3}	мілі	*м*	*m*	10^{-3}

Одиниці довжини, площі, об'єму, маси, густини, сили і швидкості, використані в задачах (перевод в СІ)

$1см = 10^{-2} м$; $1км = 10^3 м$;

$1см^2 = 10^{-4} м^2$;

$1л = 1дм^3 = 1 \cdot 10^{-3} м^3$; $1см^3 = 10^{-6} м^3$;

$1г = 10^{-3} кг$; $1т = 10^3 кг$; $1г/см^3 = 10^3 кг/м^3$;

$1кгс = 9{,}8 Н$;

$1км/год = 0{,}28 м/с$, $1м/с = 3{,}6 км/год$

Одиниці, в яких вимірюються деякі фізичні величини

Швидкість υ	*м/с*
Прискорення *a*	$м/с^2$
Частота обертання ν	$с^{-1}$; *об/с*
Кутова швидкість ω	*рад/с*
Кутове прискорення ε	$рад/с^2$
Момент інерції *I*	$кг \cdot м^2$
Сила *F*	*Н*
Момент сили *M*	$Н \cdot м$
Імпульс *p*	$Н \cdot с$ або $кг \cdot м/с$
Момент імпульсу *L*	$Н \cdot м \cdot с$
Жорсткість *k*	*Н/м*
Робота *A*	*Дж*
Енергія *E* або *W*	*Дж*
Кількість теплоти *Q*	*Дж*
Потужність *P*	*Вт= Дж/с*
Тиск *p*	$Н/м^2 = Па$
Нормальна напруга σ	$Н/м^2 = Па$
Модуль Юнга *E*	*Па*
Температура по шкалі Кельвіна *T*	*К*
Динамічна в'язкість η	$кг/м \cdot с$ або $Па \cdot с$

Додаток 1

Приклад оформлення титульної сторінки

НУВГП

Кафедра хімії та фізики

Самостійна розрахункова робота
з механіки

Варіант 1

ст. АІ- 11
Яковчук А.А
Виконав:
Перевірив:
Лебедь О.О.

Рівне 2024 р