

024.083

Ж-83

АКАДЕМІЯ НАУК У С Р Р

№ 26

ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

№ 26

Н. Д. ЖУДІН

ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ В СТАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

II. СТАЛІ БЕЗ ПЛОЩАДКИ ТЕКУЧОСТІ.
ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ ПЕРЕРІЗУ

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК У С Р Р

КИЇВ—1936

ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

№ 26

INSTITUT DE LA MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

№ 26

N. D. JOUDINE

LES DÉFORMATIONS PLÂSTIQUES DANS LES CONSTRUCTIONS EN ACIER

II. ACIER SANS PALIER D'ÉCOULEMENT

PUBLIÉ PAR L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE LA RSS D'UKRAINE

KIEV — 1936

П

У

624.083

ЖС-83

АКАДЕМІЯ НАУК УСРР
ІНСТИТУТ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

№ 26

№ 26

Н. Д. ЖУДІН

ПЛАСТИЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ В СТАЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

II. СТАЛІ БЕЗ ПЛОЩАДКИ ТЕКУЧОСТІ.
ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ ПЕРЕРІЗУ

3878

Бібліотека
Інституту Будівельної Механіки

жа

перевірено
1906 г.

И

О

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК УСРР
КИЇВ—1936

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису українського друку“, „Картковому репертуарі“ та інших періодичних Української книжкової палати.

Відповідальний редактор проф. *С. В. Серенсен*

Літредактор *Б. Є. Козловський*

Учений коректор *Є. І. Біганівська*

Техкер *Є. Ц. Каганов*

Друкується з розпорядження Академії Наук УРСР.

Неодмінний секретар акад. *О. В. Палладін*

Друкарня-літографія Академії Наук УРСР, Київ

ПЕРЕДМОВА

Ця робота має метою дати розв'язання деяких задач розрахунку балок із сталей без площадки текучості і намітити можливі шляхи розв'язання інших, складніших, задач розрахунку систем. Застосування спеціальних сталей у будівництві виправдується технічно і економічно, особливо у важких конструкціях. Досвід проєктування в СРСР показує, що, застосовуючи спеціальні сталі, вдається, наприклад, складні трудомісткі, двостінчасті перерізи важких підкранових балок замінити простими одностінчастими, що значно спрощує заводське виготовлення, транспортування їх, такелажні і монтажні роботи. Застосування у будівництві спеціальних сталей, що розвивається в зв'язку з цим в СРСР, відшукання нових сортів сталей, які своїми фізико-механічними властивостями відповідають умовам роботи складних і потужних конструкцій, ставить на чергу питання всебічного дослідження міцності конструкцій з цих сталей. Дослідження ці повинні йти, як по лінії дослідження їх фізико-механічних і виробничих властивостей, так і по лінії експериментального й теоретичного дослідження роботи елементів і систем з цих сталей.

У цій роботі введено теоретичне дослідження деяких задач розрахунку балок для тих спеціальних сталей, які не мають вираженої площадки текучості, при чому розглянено чистий згин балок прямокутного, двотаврового і таврового перерізів, виведено відповідні розрахункові формули, досліджено дотичні напруги в пружно-пластичній зоні, розглянено випадок складного опору—згин з поздовжньою силою. Крім того, в роботі дані приклади розрахунку статично визначних балок і намічено розв'язання складної задачі розрахунку статично невизначних балок у пружно-пластичному стані.

Проведене дослідження вказує шляхи, якими може бути теоретично оцінена несуча здатність конструкцій з спеціальних сталей.

Як виявилось, спеціальні сталі без площадки текучості з погляду „пластичної“ теорії розрахунку (для розглянутих випадків опору) порівнюючи з сталями, які мають площадку текучості, дають в конструкціях додатковий резерв опору, обумовлений процесом зміцнення. Границя текучості у спеціальних сталей вища, ніж у звичайних м'яких сталей. Отже, „пластична“ теорія розрахунку виявляє додатково новий фактор, який визначає

вагову вигідність конструкцій з таких сталей. Для конструкцій з спеціальних сталей це набуває значення, зважаючи на вищу вартість цих сталей. Числове значення вигідності, яке визначається коефіцієнтами розрахункових формул, і особливо доцільні запаси міцності повинні бути встановлені дослідями, які передбачено провести надалі.

Наші норми проектування металічних конструкцій ще не базуються на „пластичній“ теорії. Тільки останнім часом науководослідні інститути почали дослідження і розробку цієї нової галузі статки і експериментальну перевірку її. Результати цієї роботи висвітлюють ряд теоретичних питань, зв'язаних з методом розрахунку за критичними навантаженнями, а разом з тим з введенням його в норми проектування металічних конструкцій.

Листопад 1935 р.

Н. Жудін

ВСТУП

Теорія розрахунку сталених конструкцій з урахуванням пластичних деформацій матеріалу останніми роками дедалі більше привертає увагу дослідників. Після виходу з друку першої частини нашої роботи ¹⁾ з'явився цілий ряд нових робіт, які розвивають і уточнюють нову „пластичну теорію“ ²⁾. Якщо до 1934 р. більшість досліджень як теоретичних, так і експериментальних були проведені і опубліковані за кордоном, то за останній рік з'явився ряд робіт і в СРСР. Всі ці дослідження стосуються звичайної м'якої сталі (сталь 3 у нас і St 37 — в Німеччині), яка має добре розвинуту площадку текучості. Наявність такої площадки дозволяє покласти в основу розрахунку спрощену, так звану ідеалізовану, діаграму напоуг-видовжень. Приймають, що ця діаграма, за пропозицією Prandtl-я, складається з двох прямих ділянок, при чому друга ділянка горизонтальна (відповідає площадці текучості). Можливість застосування такої діаграми розтягу для розрахунку балок, які перебувають в умовах згину, показана була Fritsche (див. с. 19 роботи, зазначеної у виводі 1). Природно, що нову теорію розрахунку найбільше розвинуто стосовно саме до м'яких сталей, тому що такі сталі найпоширеніші в сталених будівельних конструкціях. Всі експериментальні дослідження також проведені з балками цих сталей.

Разом з тим масштаб і велике навантаження багатьох сучасних сталених конструкцій приводять до мало доцільних, дуже важких конструктивних розв'язків у випадку застосування звичайних м'яких вуглецевих сталей. Тому питання відшукування нових будівельних сталей, які мають підвищений опір, набуває великого значення. В Німеччині і в Америці сталі підвищеної якості, як вуглецеві, так і спеціальні, знайшли вже досить широке застосування у будівництві важких конструкцій. В СРСР останніми роками також приділено досить уваги дослідженню питання про застосування якісних сталей у будівництві, освоєнню виробництва їх і безпосередньому застосуванню в спорудах. В деяких проектах важких конструкцій промислового будівництва вже фігурує спеціальна сталь ³⁾.

¹⁾ Н. Жудін, Пластичні деформації в сталених конструкціях, I. Основи розрахунку, Київ, УАН, 1935.

²⁾ Див. список літератури в кінці книжки.

³⁾ Див., напр., К. Муханов и И. Вормс, Проект металлических конструкций прессового цеха, „Строительная промышленность“, 1933, № 7.

Дніпрогесівські мости, як відомо, також збудовані з спеціальної сталі (силіційної). У нас уже є деяка, хоч покишо й невелика, література щодо застосування в будівництві і інших галузях техніки спеціальних сталей⁴⁾.

Дослідження спеціальних сталей тепер провадиться як по лнії відшукання нових типів сталей, так і в розумінні освоєння виробництва відомих уже сортів і дослідження їх механічних властивостей, корозійної стійкості, загартовуваності. Розробляються також конструктивні розв'язання і їх економіка.

Застосовувані тепер розрахунки конструкцій з спеціальних сталей нічим не різняться від розрахунків конструкцій з звичайної сталі. Вся різниця полягає тільки в інших, вищих величинах допустимих напруг. Нова „пластична“ теорія розрахунку сталевих конструкцій дає нові основи розрахунку; вони полягають у встановленні граничного стану конструкції, тобто такого стану, при якому конструкція вже остаточно втрачає здатність опору (перетворюється на рухому систему), і в розрахунку конструкції за навантаженнями цього граничного стану. Цей метод розрахунку звать часто „розрахунком за критичними навантаженнями“. Правда, нова теорія також дозволяє вести розрахунок за допустимими напруженнями, але ці допустимі напруження різняться від звичайних і являють собою не дійсно допущені в конструкції напруги, а певні умовні напруги, які одержуються від ділення напруг граничного стану (σ_s — границі текучості) на коефіцієнт безпеки, встановлюваний новою теорією.

Нову теорію розрахунку в такому вигляді, як вона викладається більшістю дослідників, не можна застосувати до розрахунку конструкцій з спеціальних сталей, якщо вони не мають площадки текучості, властивої сталі 3. Справді, наявність цієї площадки, як уже відзначено, дає можливість оперувати при розрахунках, ніби з ідеально пластичним матеріалом, який має згадану вище діаграму деформації у вигляді двох прямих. Прийняття такої умовної діаграми дає ясне уявлення про граничний стан перерізу балки при згині, крученні і у випадку складного опору, а саме, граничним станом вважається той, при якому напруги текучості поширюються по всій висоті перерізу. Епюра напруг при цьому дістає вигляд двох прямокутників.

Для матеріалу ж, який не має горизонтальної площадки текучості, очевидно, такої епюри напруг бути не може і тому

⁴⁾ Н. С. Стрелецкий, Курс мостов, ч. 1; Е. О. Патон и Б. Н. Горбунов, Стальные мосты, ч. 1; Н. С. Стрелецкий, Новые идеи и возможности в металлических промышленных конструкциях; Н. П. Шапов и В. В. Смирнов, Исследование кремнистой стали, 40-й сборник НИИМ НКПС, 1934; С. Ильясевич, Применение сталей повышенного качества в металлоконструкциях, Сборник статей ВИА РККА, Металлические конструкции, 1934; С. Ильясевич, „Строительная промышленность“, 1933, № 9; Т. Э., т. 21, статья С. Ильясевича — Сталь; журнал „Качественная сталь“ та ін.

⁵⁾ Докладніше про це див. нашу роботу, зазначену у виводі 1.

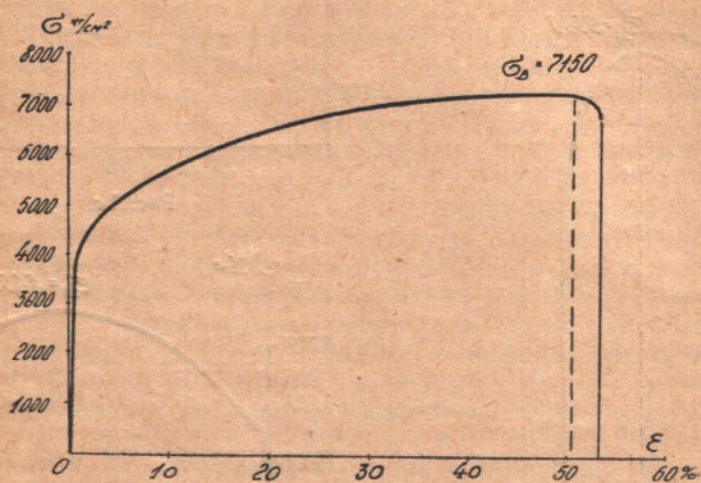


Рис. 1а.

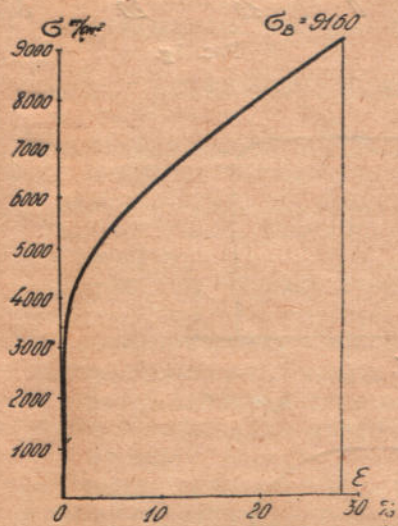


Рис. 1б.

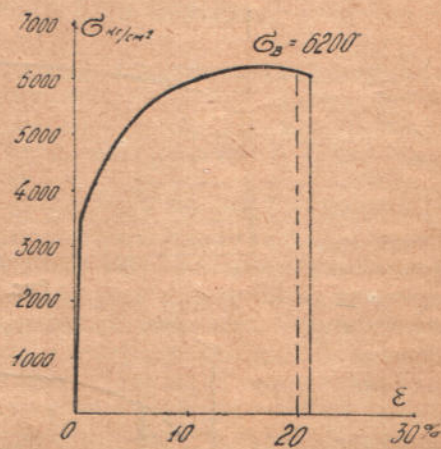


Рис. 1с.

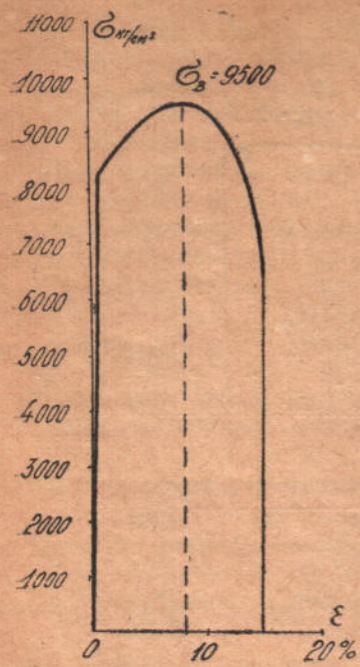


Рис. 1d.

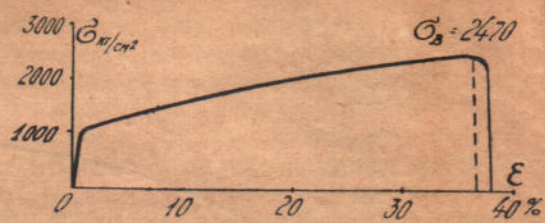


Рис. 1e.

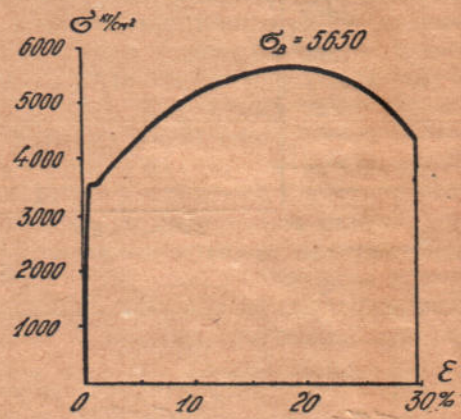


Рис. 1g.

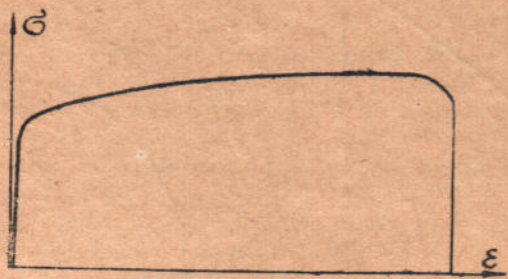


Рис. 1f.

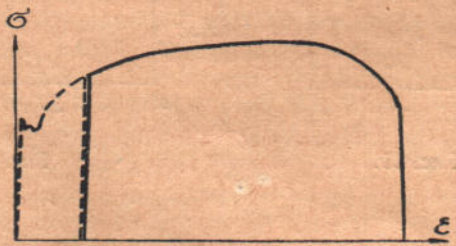


Рис. 2.

до таких матеріалів не можна застосувати всіх висновків нової теорії, побудованих на основі діаграми Prandtl-я. При розвитку нової теорії стосовно до матеріалів без горизонтальної площадки найістотнішим питанням є обґрунтований вибір граничного стану, про що докладніше буде сказано нижче.

Не вдаючись тут у розгляд питання, які спеціальні сталі мають горизонтальну площадку текучості і які не мають її, а також, які фактори впливають на утворення цієї площадки, наведемо тільки кілька запозичених з різних джерел прикладів діаграм деформацій розтягу різних матеріалів. Ці діаграми ствержують відсутність горизонтальної площадки текучості в ряді випадків (рис. 1а—f). На рис. 1e і 1f дано діаграми для бронзи і алюмінієвого ступу, які також не мають горизонтальної площадки.

Отже все викладене в цій роботі до певної міри може бути застосоване до конструкцій і з цих матеріалів. Нарешті, викладені тут методи розрахунку мають силу і для конструкцій з звичайної м'якої сталі, у яких частина процесу деформації з тих чи інших причин уже пройшла перед тим (наприклад, погнуті і випрямлені балки) і діаграма деформації розтягу має вигляд, показаний на рис. 2 грубою лінією. Тут пунктирна лінія зображає цю, вже пройдену, деформацію, і при новому навантаженні матеріал вже йде за „укороченою“ діаграмою.

1. Дослідження роботи перерізу при чистому згині

Граничний напружений стан перерізу

Для обґрунтування прийнятого нижче граничного стану перерізу балки з сталі без площадки текучості, нагадаємо деякі основні положення, що стосуються до сталей, які мають таку площадку, а також уточнімо визначення граничного стану для цього випадку.

Поперше, як відомо, гіпотеза плоских перерізів Бернуллі приймається при дослідженні напруженого стану згину і у випадку переходу границі пружності. В усіх дальших висновках ми також приймемо в основу цю гіпотезу для пружно-пластичного стану. Граничний стан перерізу, як уже відзначено вище, досягається тоді, коли напруги текучості поширюються по всій висоті перерізу. На рис. 3а подана відповідна еюра напруг. Таким чином, граничний стан можна також відзначити як такий, при якому зникає пружне ядро ($2a = 0$, див. рис. 3а). Насправді такий стан перерізу не може бути досягнутий, тому що деформації крайніх волокон в такому випадку стають нескінченно великими⁶⁾. Отже гранична діаграма напруг в дійсності завжди

⁶⁾ Fritsche, Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens, Bauingenieur, 1930, № 49, 50, 51.

матиме певне пружне ядро, яке визначається висотою $2a$ (рис. 3 б). Якщо в основу розрахунків і приймається спрощена епюра без пружного ядра, то тільки тому, що вже при невеликих деформаціях крайніх волокон $0,3-2,0\%$ момент внутрішніх сил дуже мало різниться від граничного моменту, який визначається епюрою рис. 3 а (див. с. 19 роботи, зазначеної у виводі 1). Інакше кажучи, для досягнення напруженого стану, який практично не відрізняється від теоретичного граничного стану, досить мати деформації крайніх волокон порядку одиниць процентів, а не рівні нескінченності. Звідси виходить, що граничний стан перерізу при згині не може бути точно фіксований і є поняттям умовним. Умовність полягає у величині того відхилення значення моменту внутрішніх сил дійсної епюри напруг від відповідного значення у випадку теоретичної граничної епюри (рис. 3 а), яке ми вважатимемо можливим встановити. Практичний граничний стан можна також встановити за величиною пружного ядра, що лишається (за його висотою або

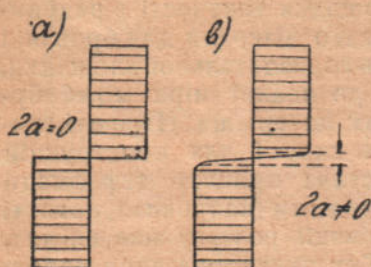


Рис. 3.

за величиною моменту сил цього ядра відносно моменту всіх сил перерізу), або за величиною деформацій крайніх волокон.

Тому що при розрахунку балок однією з вирішальних величин є згинальний момент, то можна практичний граничний стан визначити величиною моменту, допустивши певне відхилення значення цього моменту від теоретичної величини, яка визначається епюрою рис. 3 а. Звичайно більшість технічних розрахунків провадиться з точністю до $3-5\%$ (напр., допуски у величинах допустимих напруг). Якщо ми приймемо цю величину за вихідну, то можна буде визначити як величину пружного ядра, так і значення деформацій крайніх волокон.

Розгляньмо випадок прямокутного перерізу. Fritsche ⁶⁾ одержав таку залежність між деформаціями і моментами для пружно-пластичного стану:

$$\Delta = \pm \Delta_s \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_s}}}, \quad (1)$$

де:

Δ — сума деформацій (за абсолютною величиною) крайніх волокон;

Δ_s — те ж для волокон, які тільки досягли границі текучості;

M — момент внутрішніх сил усього перерізу;

$M_s = \sigma_s \cdot W$ — момент для випадку, коли границя текучості досягнута тільки у крайніх волокнах.

Дослідження рівняння (1¹) для випадку теоретичного граничного стану ($\Delta = \infty$) дає значення

$$M_T = \frac{3}{2} \cdot M_S$$

Якщо прийняти, як сказано вище, що практичний граничний стан визначається величиною

$$M'_T = 0,95 \cdot \frac{3}{2} \cdot M_S,$$

то з (1) знайдемо значення Δ'_T :

$$\Delta'_T = \pm \Delta_S \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 3 \cdot 0,95}} = \pm 2,58 \Delta_S$$

Якщо прийняти середнє значення $\sigma_S = 2400 \text{ кг/см}^2$ і $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, то одержимо значення $\frac{\Delta_S}{2} = 0,114\%$. Таким чином, деформація крайнього волокна

$$\frac{\Delta'_T}{2} = \pm 2,58 \cdot \frac{\Delta_S}{2} = 0,294 \sim 0,3\%$$

Це дає нам підставу визначити практичний граничний стан, як такий напружений стан, при якому деформації крайніх волокон досягають величини не менше 0,3%. Це значення є ніби нижчою границею, яка відповідає порівнюючи грубому підрахункові з точністю 5%. Надалі граничний стан ми визначаємо вищим значенням Δ , порядку 1—1,5%. Треба не забувати, що це стосується тільки прямокутного перерізу. Інші види перерізів будуть розглянені далі.

Перейдімо тепер до визначення величини пружного ядра, яка відповідає одержаному значенню $\Delta'_T = 0,294\%$. На рис. 4 показані відповідні епюри деформацій і напруг. Прості обчислення дають висоту пружного ядра $2a = 0,388h$, при чому момент сил пластичної частини перерізу:

$$M_p = N_p \cdot h_p = 0,85 M_T,$$

а момент сил пружного ядра:

$$M_e = N_e \cdot h_e = 0,10 M_T$$

Тут:

$M_T = \frac{3}{2} \cdot M_S = \sigma_S \cdot T$ — теоретичне значення граничного моменту, який відповідає епюрі напруг на рис. 3а;

$T = \frac{b \cdot h^2}{4}$ — „пластичний“ момент опору прямокутного перерізу.

Повний момент за рис. 4 одержимо:

$$M'_T = (0,85 + 0,10) M_T = 0,95 M_T,$$

що служити перевіркою розрахунку.

Отже тепер можна дати інше визначення практичного граничного стану (для випадку прямокутного перерізу). Граничним станом є той, при якому висота пружного ядра становить не більше 0,39 (з округленням) повної висоти перерізу. Якщо ж виходити з величини моменту сил пружного ядра, то граничний стан визначається тією величиною пружного ядра, при якій момент пружних сил ядра становить 10% від теоретичного значення граничного моменту або 10,5% від моменту сил усього перерізу. Остання цифра одержується з такого розрахунку:

$$\frac{N_e}{N_e + N_p} = \frac{0,10 M_T}{0,95 M_T} = 0,105$$

Прийнята цифра (5%) точності підрахунку граничного моменту відносно теоретичного його значення є, звичайно, умовною. Але для обґрунтування прийнятого далі граничного стану для сталей

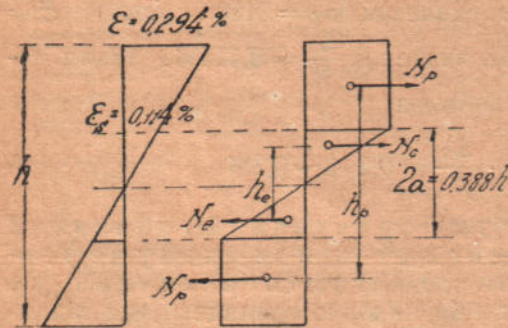


Рис. 4.

без площадки текучості важлива не величина цієї цифри, а те, що фактично опір перерізу вичерпується вже при дуже незначній величині деформацій крайніх волокон. При 5% розходження між M'_T і M_T ця деформація вийшла всього 0,3%. Якщо б ми прийняли іншу цифру замість 5%, наприклад, всього 1%, то одержали б $\frac{\Delta T'}{2} = 0,658 \sim 0,7\%$. Відповідно висота пружного ядра $2a = 0,173h$. Значення $M_p = 0,97 M_T$ і $M_e = 0,02 M_T$.

Хоч у цьому випадку пружне ядро вже значно зменшується, але величина крайових деформацій також дуже невелика.

Для двотаврового перерізу ще М. Grüning відзначив, що опір балки при згині вже майже цілком вичерпаний, коли напруги текучості поширились тільки по висоті полиць. Ми показали⁷⁾ на окремому прикладі зварного двотавра № 30, що в цьому випадку момент сил перерізу різниться тільки на 5,1% від теоретичного значення, яке відповідає поширенню текучості

⁷⁾ Див. с. 24 роботи, зазначеної у виводі 1.

по всій висоті перерізу. Для даного прикладу одержимо при цьому деформацію крайніх волокон в 0,124% (рис. 5). Очевидно, що й інші типи і номери двотаврів дадуть також дуже незначну величину граничних деформацій, які мало різняться від одержавої цифри 0,124%.

Перейдімо тепер до розгляду граничного стану перерізу при згині для сталей без площадки текучості. Якщо для м'якої сталі, з добре розвинутою площадкою текучості, встановлення теоретичного граничного стану є очевидним

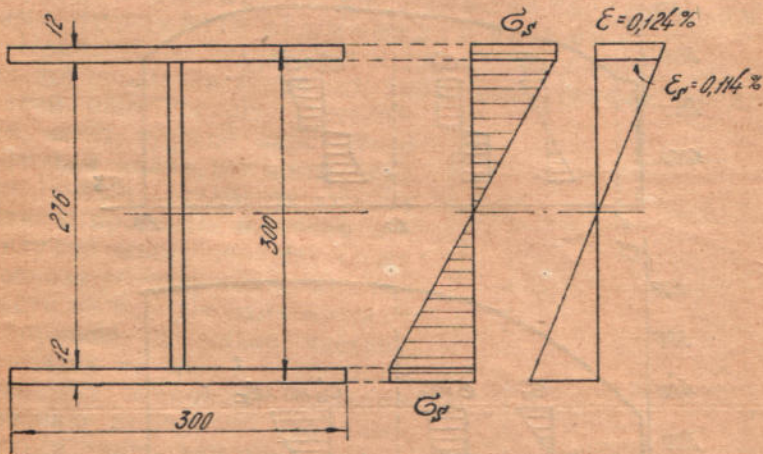


Рис. 5.

і простим завданням, то для сталей без площадки текучості, навпаки, завдання це є менш визначеним. Трудність полягає в тому, що після переходу границі текучості опір перерізу не вичерпується до самого руйнування. Одразу ж після переходу границі текучості відбуваються паралельно два процеси — текучість і зміцнення. Здавалося б можливим для сталей без площадки текучості встановити граничний стан, виходячи з початку дійсного руйнування перерізу, тобто початку розриву крайніх розтягнутих волокон. Такий стан відповідає досягненню тимчасового опору у цих волокнах. Очевидно, що такий граничний стан не може бути основою для міркування про практичне вичерпання опору балки, тому що задовго до цього стану деформації балки стануть такі великі, що балку вже можна буде вважати виведеною з роботи. Природнішим було б встановлення граничного стану, який відповідає певному прогинові балки, умовно визнаному, за граничний. Умовність такого припущення дуже велика, і крім того, кожна задача вимагала б індивідуального підходу, залежно від схеми, прогону балки і її перерізу.

Таким чином, треба відмовитись від спроби виходити з дійсних руйнуючих напружень волокон або з умовного граничного прогину. Тим більше, що від цього відмовились і для м'яких сталей, хоч тут теж можна було б, на такій самій підставі, вважати граничним станом той, при якому крайні волокна починають руйнуватись. На рис. 6 показана діаграма деформацій

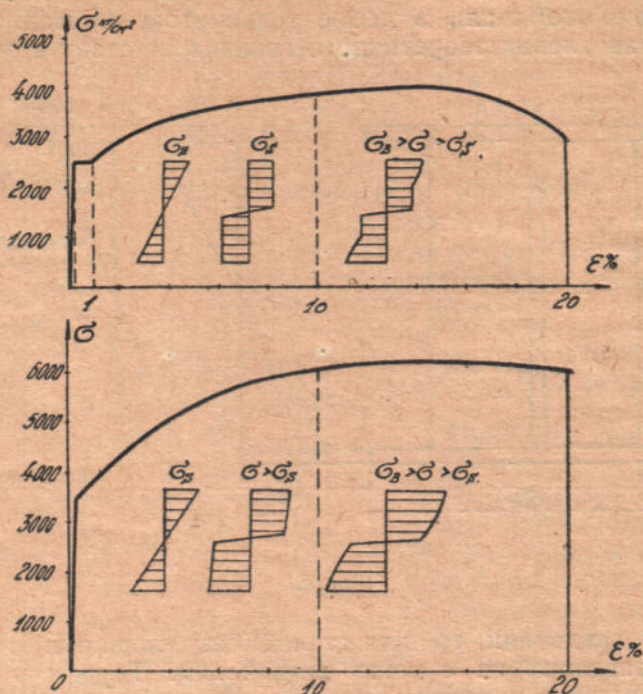


Рис. 6.

і епюри напруг згину для різних стадій деформації, з яких ясно, що як при наявності площадки текучості, так і при відсутності її опір перерізу не вичерпується, поки напруга крайніх волокон $\sigma < \sigma_B$.

При встановленні граничного стану перерізу для сталей без площадки текучості доцільно виходити з тих самих основ, які прийняті для м'яких сталей, скористувавшись для цього даними вище визначеннями практичного граничного стану. Ці визначення дані були з числовими характеристиками (деформацій крайніх волокон, висоти пружного ядра і моменту внутрішніх сил цього ядра), при чому було зазначено, що числові величини є умовними і залежать від прийнятого степеня точності визначення граничного моменту. Розрахункові формули зміняться мало, чи буде зазначений степінь точності 5 чи 1%. Розрахунок однаково будемо провадити за теоретичною гра-

ничною епюрою, пам'ятаючи, що в дійсності така епюра напруг не може бути досягнута, але що при дійсній епюрі, яка різниться моментом на 1—5% від теоретичної, опір перерізу практично вичерпаний. Таким чином, практичний граничний стан у випадку м'яких сталей формується так: граничним станом є той, при якому пружне ядро практично зникає, чому відповідає деформація крайніх волокон перерізу порядку одиниць процента і момент пружних сил ядра теж становить при цьому одиниці процентів від моменту всіх сил.

Приймімо це визначення і для випадку сталей без горизонтальної площадки текучості, тобто вважатимемо, що для таких сталей опір перерізу вичерпаний, якщо пружне ядро стало настільки малим, що момент сил цього ядра становить тільки одиниці процентів відносно моменту сил усього перерізу. Отже в основу розрахунків можна покласти не всю діаграму процесу деформацій, а тільки частину її, подану на рис. 7 грубою лінією, яка відповідає певному значенню деформації, що вимірюється одиницями процентів.

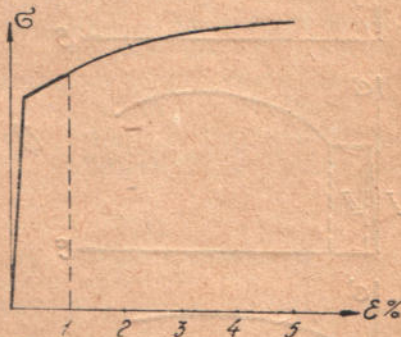


Рис. 7.

Встановлення граничного стану тісно зв'язане з проблемою коефіцієнта безпеки. Ця проблема по суті сходиться до встановлення таких мінімальних значень коефіцієнта безпеки, які забезпечують безаварійне існування споруди протягом призначеного для нього експлуатаційного строку. Розвиток теорії розрахунків конструкцій, знань в галузі фізико-механічних властивостей матеріалів і дослідження роботи конструкцій в умовах експлуатації дозволяють знижувати прийняті коефіцієнти безпеки, тому що звичайно старі коефіцієнти мають перебільшене значення, що пояснюється неточністю як визначення зовнішніх впливів, так і розрахунку міцності, а також недостатнім використанням властивостей матеріалів і т. ін. Проте в окремих випадках ці коефіцієнти не забезпечують надійності конструкції.

„Пластична“ теорія розрахунку дає можливість в більшості випадків знизити передніші коефіцієнти, звужити інтервал між напруженнями, допущеними в конструкції і граничними напруженнями, а тим самим повніше використати властивості матеріалу. Слід уточнити поняття граничних напруг. Усяка допустима напруга є границя експлуатаційних напруг, яка повинна забезпечити нормальну роботу споруди. Доцільно вдатись до встановлення нового поняття граничних напруг, — умовних напруг, що відповідають певному стану, який може бути

умовно прийнятий за граничний. Цей стан може бути встановлений величиною загальних деформацій конструкції (наприклад, якимось прогином балки) або деформацією окремих частин його, наприклад, деформацією крайніх волокон балки, що згинається, як це зроблено нами вище.

Звичайно „пружна“ теорія розрахунку сталених конструкцій, призначаючи допустимі напруги, виходить з граничних (ідеальних) допустимих напруг, вважаючи їх взагалі граничними. Коефіцієнт безпеки при цьому

$$n_s = \frac{\sigma_s}{R},$$

де R — допустима напруга. Якщо $R = 1400 \text{ кг/см}^2$, то $n_s = 1,71$. При такому розрахунку конструктор оперує з формулами і цифрами тільки з ділянкою I діаграми (рис. 8), а всі дальші стадії деформації тільки має на увазі, знаючи, що при випадкових перевантаженнях або неврахуванні якихнебудь навантажень можливості аварії конструкції завдяки виглядові діаграми дуже малі.

Нова „пластична“ теорія іде далі. Вона виходить з умовних граничних напруг, які відповідають уже ділянці діаграми II (рис. 8 *b*). Це дозволяє звужити інтервал між дійсними напру-

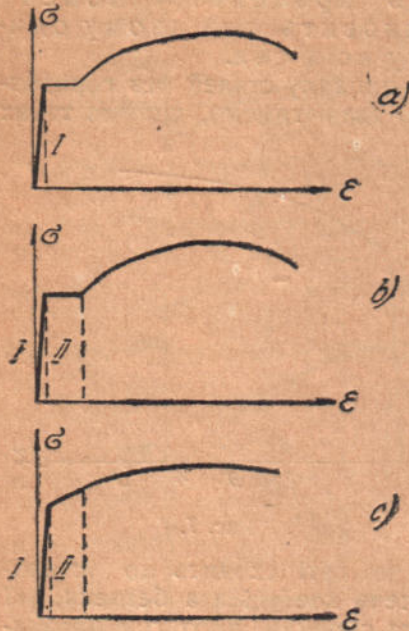


Рис. 8.

гами і допустимими (σ_s), тому що в розрахунок у вигляді формул і цифр вводиться вже дальша стадія деформації.

Очевидно, немає підстав робити різницю між сталями з площадкою текучості і без неї (рис. 8 *c*). В обох випадках ми оперуємо при розрахунку з ділянками I і II і знаємо, що це не є справжнім граничним станом, а тільки умовним, бо матеріал може ще довго робити опір зовнішнім навантаженням. Різниця тільки в тому, що в сталях з площадкою текучості стадія зміцнення починається після проходження площадки текучості, а коли немає площадки, зміцнення настає одразу після σ_s . Найзручніше граничний стан визначити величиною деформації крайніх волокон або, ще краще, відношенням цієї деформації до деформації при границі текучості. Це відношення $\epsilon_T : \epsilon_s$ приймемо далі рівним 10, виходячи з того, що при $\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2$, ϵ_s близьке до 0,1%, а при $\epsilon_T \cong 1\%$ момент сил пружного ядра дуже малий і теж становить лише близько

1% від моменту сил усього перерізу. Трохи далі, розглядаючи графіки рис. 12, ми ще повернемося до цього питання.

Дальше розв'язання задачі вимагає знання рівняння кривої деформації після границі текучості. Для сталей з площадкою текучості рівняння цієї дільниці II діаграми, якщо прийняти, що $E' = \operatorname{tg} \alpha = 0$, буде:

$$\sigma = \sigma_s$$

Коли такої площадки немає і діаграма має криволінійний вигляд, рівняння дільниці II в загальному вигляді буде:

$$\sigma = f(\varepsilon),$$

де σ — напруга, а ε — відносна деформація.

Останнє рівняння в кожному окремому випадку визначається виглядом діаграми деформацій і для різних сталей буде різне. Як побачимо далі, здебільшого це рівняння можна замінити рівнянням прямої. Раніше, ніж перейти до розрахунків, які базуються на останньому спрощуючому припущенні (лінійний закон деформації для дільниці II деформації), розглянемо випадок згину при будьякому законі деформацій, досліджений Nádaи⁸⁾.

Згин стрижнів при будьякому законі деформації

На рис. 9 подана діаграма деформації розтягу і стиску, яка визначається рівнянням

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

В загальному випадку дільниці діаграми для стиску не є косо-симетричною фігурою розтягнутої дільниці. На рис. 10 показаний поперечний переріз довільної форми, епюри нормальних напруг для нього у випадку згину і деформований елемент балки довжиною dx . При прийнятих на цих рисунках позначеннях одержуємо:

Відносне подовження будьякого волокна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\eta}{\rho}$$

Умови рівноваги для розглядуваного перерізу:

$$\int \sigma \cdot dF = 0 \quad \text{і} \quad \int \sigma \cdot dF \cdot \eta = M$$

Тут $dF = b_\eta \cdot d\eta$, при чому $b_\eta = \Phi(\eta)$ — змінна ширина перерізу.

⁸⁾ A. Nádaи, Der bildsame Zustand der Werkstoffe.

Перше рівняння рівноваги після перетворень набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \int \sigma \cdot dF &= \int_{-\eta_1}^{\eta_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi'(\rho \cdot \varepsilon) \cdot d\varepsilon \cdot \rho = \\ &= \rho \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi(\rho \cdot \varepsilon) \cdot d\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

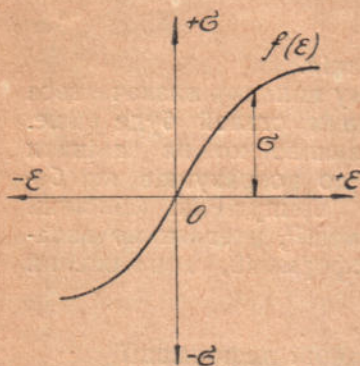


Рис. 9.

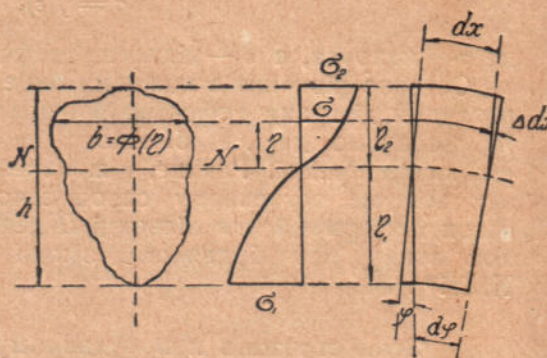


Рис. 10.

Друге рівняння $\int \sigma \cdot dF \cdot \eta = M$ можна подати в такому вигляді:

$$M = \int_F \sigma \cdot dF \cdot \eta = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi(\rho \cdot \varepsilon) \cdot \rho \cdot d\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \rho$$

або

$$M = \rho^2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi(\rho \cdot \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon \quad (2)$$

Тому що ε_2 можна виразити через ε_1 :

$$\eta_1 + \eta_2 = h; \quad \varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{\rho} \quad \text{і} \quad \varepsilon_2 = \frac{\eta_2}{\rho}; \quad \varepsilon_2 = \frac{h}{\rho} - \varepsilon_1,$$

то можна вважати, що рівняння (1) служить для визначення ε_1 , тобто

$$\varepsilon_1 = \psi(\rho)$$

Коли визначені ε_1 , ε_2 і ρ , то одержимо певне значення M з рівняння (2).

На основі цього загального розв'язку Nádai розглядає окремий випадок чистого згину балки прямокутного перерізу. В цьому випадку ширина перерізу

$$b = \Phi(\eta) = \text{const}$$

Якщо вигляд кривої деформації для розтягу і стиску різний, то $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Рівняння (1) набуває вигляду:

$$\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot d\varepsilon = 0$$

Тому що підінтегральний вираз являє собою алгебричну суму площ діаграми деформацій для розтягнутої і стисненої ділянок, то очевидно, що ці площі повинні бути рівні.

Рівняння (2) матиме вигляд:

$$M = b \cdot \rho^2 \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

Тому що $\rho = \frac{h}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$, то

$$M = \frac{h^2 \cdot b}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon \quad (3)$$

Якщо розглянемо частину балки довжиною l з центральним кутом деформованої осі 2θ , то одержимо залежність

$$2\theta = \frac{l}{\rho}$$

або

$$\theta = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l}{2h} \quad (4)$$

Користуючись рівнянням (3) і (4), Nádai показує можливість за знайденою з досліду залежністю M , θ одержати залежність σ , ε , тобто за даними досліду на згин визначити аналітично вигляд діаграми простої деформації розтягу і стиску.

Нас же цікавить інше питання: знайти значення моменту M для будьякої стадії деформації і особливо для тієї, яка прийнята відповідною граничному станом, на основі дослідної діаграми процесу деформації при розтягу і стиску. Для цього можна скористуватись рівнянням (3) для випадку прямокутного перерізу і (2) — для перерізу будьякої форми.

Епюра напруг граничного стану для прямокутного перерізу

На рис. 11 показана діаграма термічно обробленої хромо-нікелевої сталі (див. також рис. 1с) і ряд епюр напруг прямокутного перерізу, які відповідають різним стадіям деформації крайніх волокон. Вже раніше було сказано, що за аналогією з м'якими сталями практичним граничним станом ми вважаємо такий, при якому пружне ядро стає настільки малим, що опором його можна нехтувати. Було також показано, що навіть

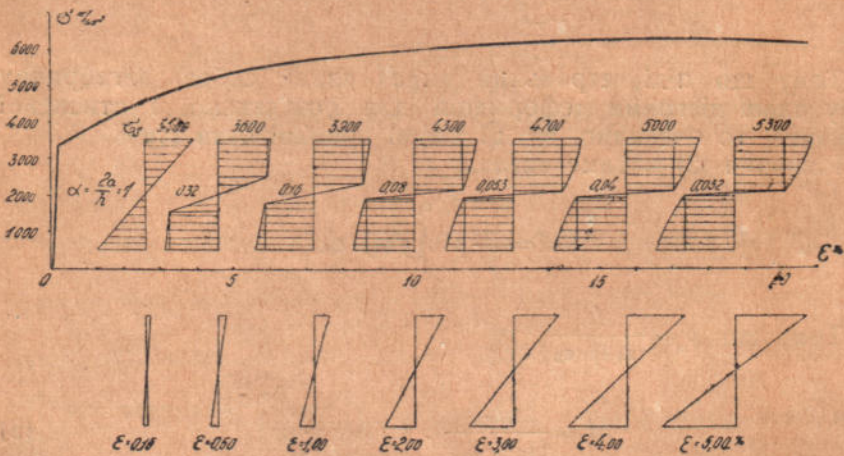


Рис. 11.

при відносно значній величині пружного ядра (0,39 висоти перерізу у випадку м'яких сталей) момент сил всього перерізу різниться тільки на 5% від моменту сил у випадку теоретичної епюри з двох прямокутників. Деформації крайніх волокон при цьому одержуються порядку 0,3—1,0%. Очевидно, якщо для граничного стану ми виберемо ще більші деформації, наприклад 2,0%, то ми ще більше наблизимось до теоретичного граничного стану. Опір пружного ядра дуже швидко спадає з збільшенням деформацій крайніх волокон. Рис. 12 а—е наочно це ілюструють. По осі абсцис відкладені відносні деформації крайніх волокон перерізу в процентах, а по осі ординат — відношення моменту пружного ядра M_e до повного моменту перерізу M .

Графіки побудовані за формулами, виведеними нами для прямокутного і двотаврового перерізів, при різних діаграмах деформації. Для двотаврових перерізів масштаб ординат в 10 разів більший, ніж для прямокутних. Рис. 12 а стосується ідеально пластичної сталі з $\sigma_S = 2400 \text{ кг/см}^2$. Для цього випадку $\epsilon_S = \sigma_S / E = 0,112\%$. На цьому графіку видно, що при $\epsilon \cong 1\%$, момент сил пружного ядра становить $\sim 1\%$. Прийняте вище

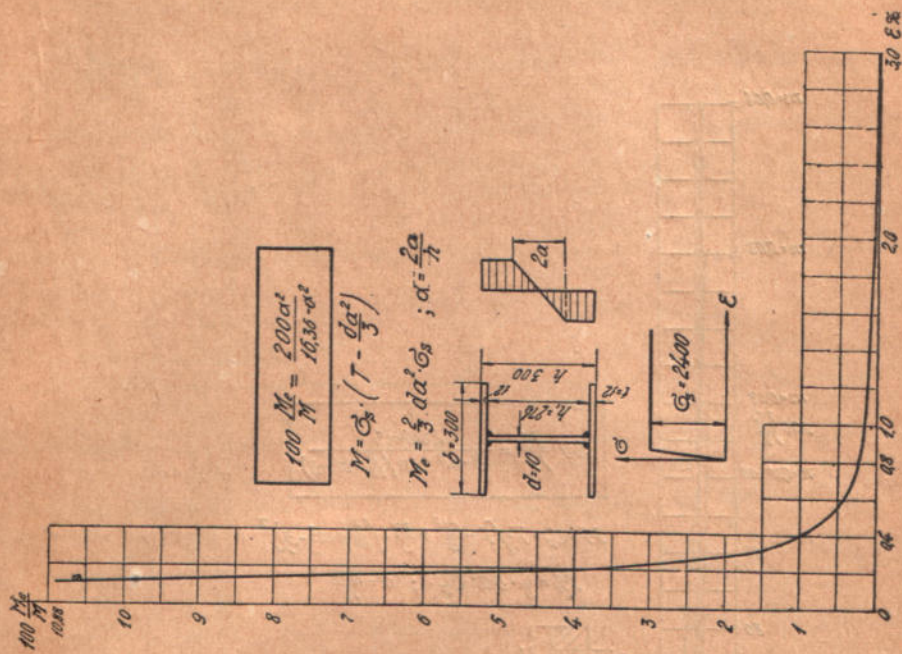


Рис. 12 б.

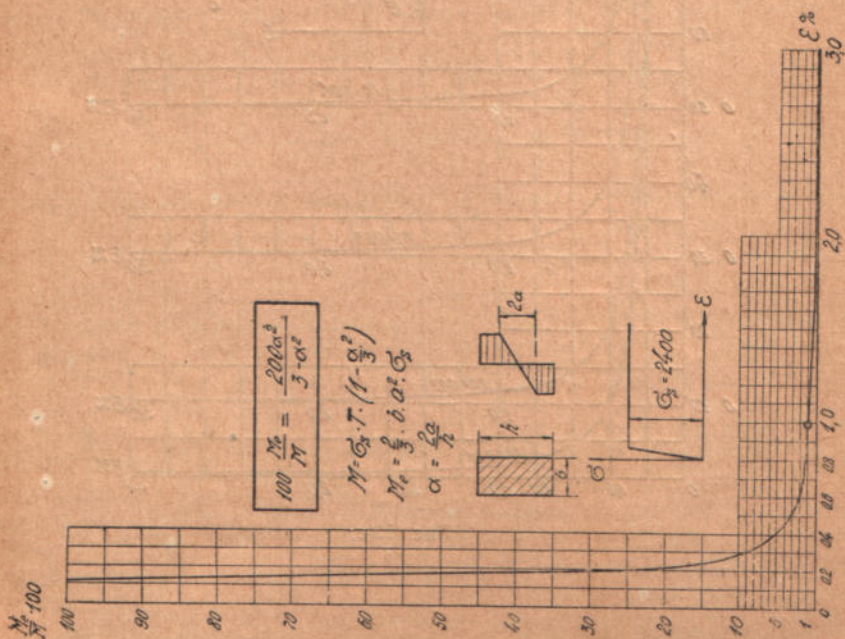


Рис. 12 а.

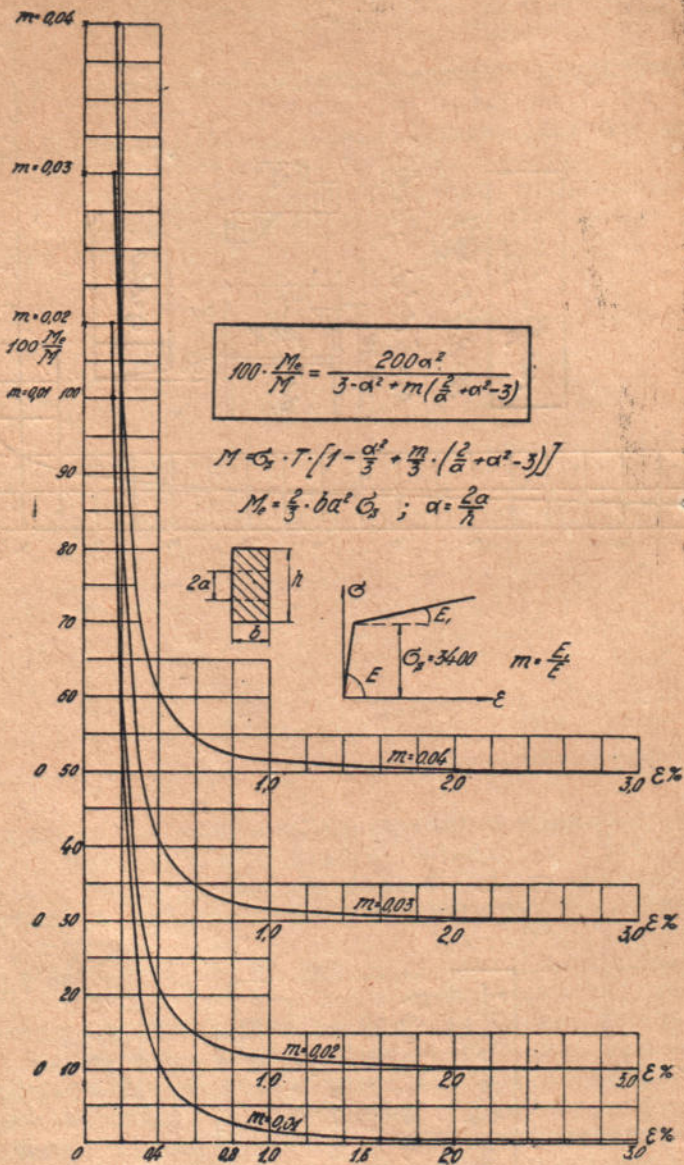


Рис. 12 с.

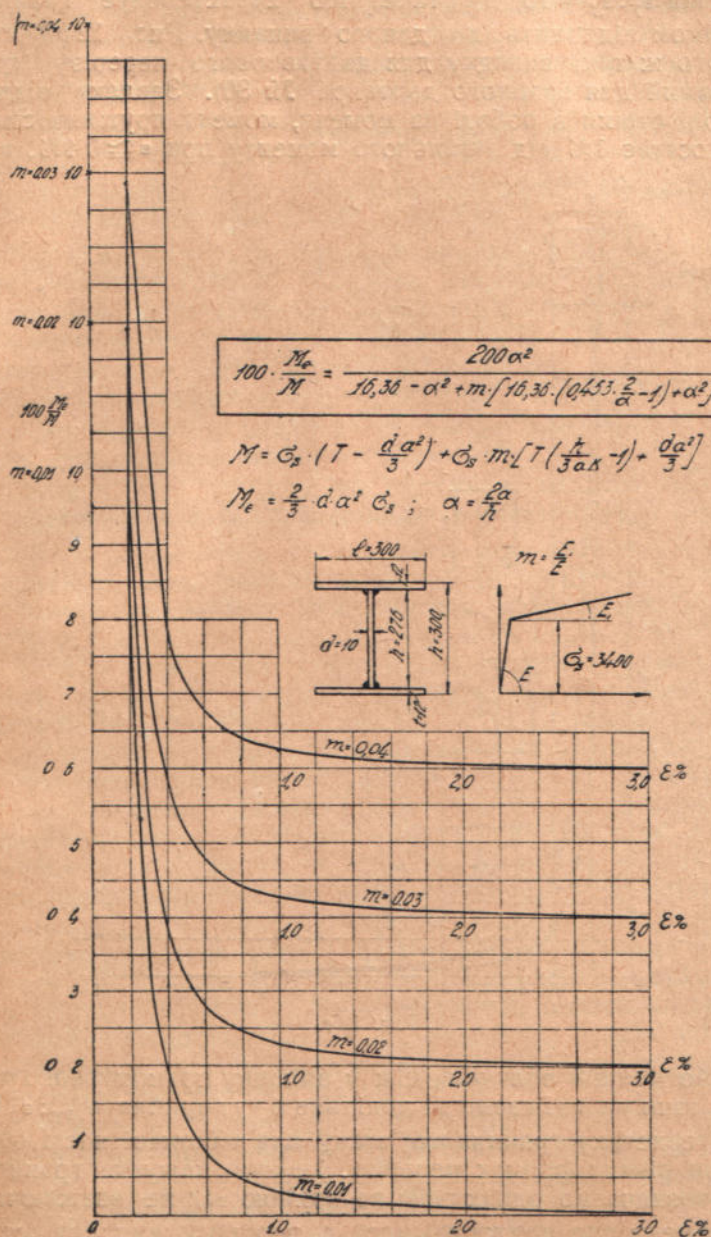


Рис. 12 д.

відношення $\varepsilon_T:\varepsilon_S = 10$, як таке, що характеризує граничний стан, цілком підходить до даного випадку. Рис. 12b — стосується того ж таки випадку для двотаврового перерізу (графік побудований для зварного двотавра № 30). Завдяки відносно малій ролі стінки в роботі на момент, момент пружних сил перерізу досягає 1% від загального моменту при $\varepsilon \cong 0,4\%$, тобто

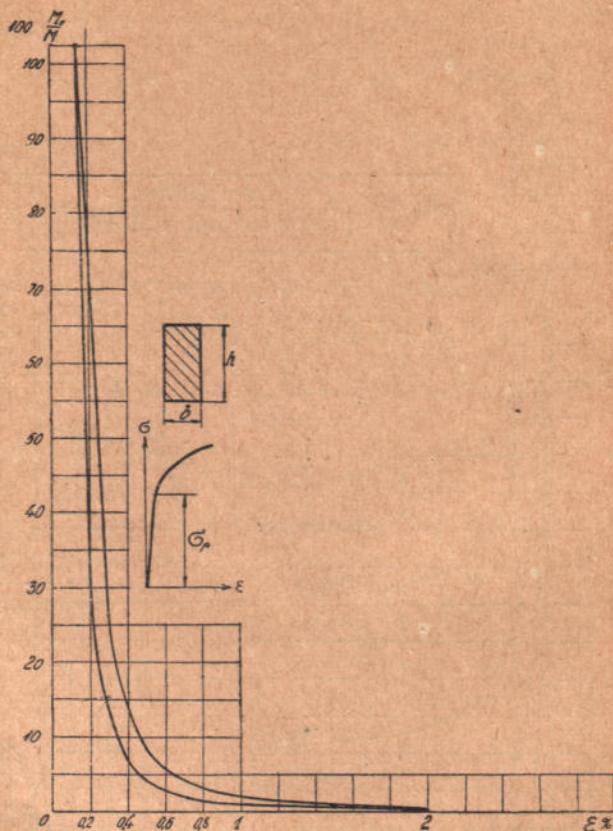


Рис. 12e.

при значно меншій величині, ніж у випадку прямокутного перерізу. Все таки ми вважаємо за доцільне й тут прийняти $\varepsilon_T:\varepsilon_S = 10$ як характеристику граничного стану для одноманітності розрахунку при різних формах перерізу. Інакше кажучи, граничний стан ми визначаємо однаковою величиною ε_T , не зважаючи на те, що момент сил пружного ядра в першому випадку становить близько 1%, а в другому — близько 0,15% від загального моменту.

Рис. 12c і 12d стосуються того самого випадку для сталі без площадки текучості, яка має $\sigma_S = 3400 \text{ кг/см}^2$. На них побу-

довані чотири графіки для різних відношень $m = E_1 : E$ — модулів пружності ділянок I і II діаграм. Рис. 12c стосується прямокутного перерізу. Деформація при границі текучості $\epsilon_S = \sigma_S : E = 0,158\%$. З графіків видно, що при $M_e : M \cong 1\%$, $\epsilon \cong 1,5\%$ (точніше, ϵ для різних m дорівнює 1,63; 1,58; 1,53; 1,49). Отже і тут до речі прийняти $\epsilon_T : \epsilon_S = 10$. Рис. 12d стосується двотаврового перерізу. На основі сказаного вище для ідеально пластичної сталі теж приймаємо $\epsilon_T : \epsilon_S = 10$.

Рис. 12e стосується такого ж випадку для сталі, яка не має ясно виявленої границі текучості. На ньому побудовані дві криві для $\sigma_p = 3850$ і 2800 для різних параметрів параболічної кривої ділянки II. Величина ϵ_p відповідно дорівнює 0,179 і 0,130%. Розгляд цих графіків показує також, що $\epsilon_T : \epsilon_S = 10$ можна прийняти як величину, яка досить добре характеризує граничний стан.

Отже в усіх випадках ми приймаємо однако-
ве відношення $\epsilon_T : \epsilon_S$ і відповідні епюри напруг умовного граничного стану матимуть вигляд, поданий на рис. 13, з трохи різною в різних випадках, але завжди дуже малою величиною пружного ядра.

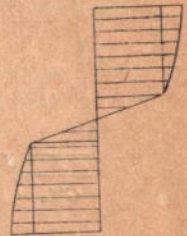


Рис. 13.

Аналітичний вираз моменту сил перерізу можна одержати тільки тоді, коли відоме рівняння $\sigma = f(\epsilon)$. Маючи дослідні діаграми деформацій при розтягу і стиску, можна підібрати для них рівняння. В деяких роботах наведені ці рівняння, при чому по суті треба було б користуватись діаграмою дійсних напруг⁹⁾. Прийнятий нами граничний стан значно спрощує задачу, тому що в границях деформацій до 1—2% дійсна діаграма від умовної практично не відрізняється і, крім того, крива дільниці II діаграми може бути замінена прямою, що дає дуже малу похибку. Останнє припущення стосується до таких сталей, у яких є ясно виявлена критична точка, тобто є певний злам діаграми після досягнення границі текучості (рис. 1c, 1d). Для сталі ж з плавним переходом коло границі текучості, інакше кажучи, — коли границя текучості виразно не виявлена, заміна криволінійної лінії деформацій прямолінійною вже має менше підстав. Цей випадок ми розглянемо окремо.

Обмеження граничного стану деформаціями порядку одиниць процентів дає нам можливість вважати закони деформації при розтягу і стиску однаковими (рис. 14). Отже при розрахунку балок на згин ми приймаємо за основу спрощену діаграму, однакову для стиснених і розтягнутих волокон, подану на рис. 15. Ця діаграма має тільки дві вітки, які визначаються умовами:

$$I) \operatorname{tg} \alpha = E \quad \text{і} \quad II) \operatorname{tg} \alpha_1 = E_1$$

⁹⁾ Див., напр., проф. С. И. Губкин и др., Экспериментальные вопросы пластической деформации металлов.

Для дільниці II епюра напруг перерізу має вигляд, поданий на рис. 16. Епюра граничного стану подана на рис. 17 а, при чому тут вона дана для сталі, розгляненої вище на рис. 11, при ϵ для крайніх волокон рівному 1,5%. При цьому значенні ϵ момент сил пружного ядра, як видно на діаграмі рис. 12, становить

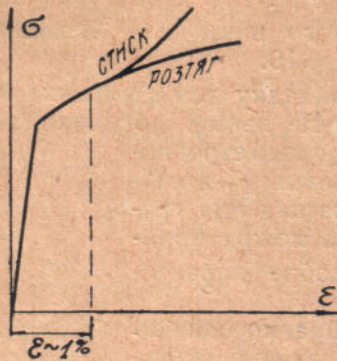


Рис. 14.

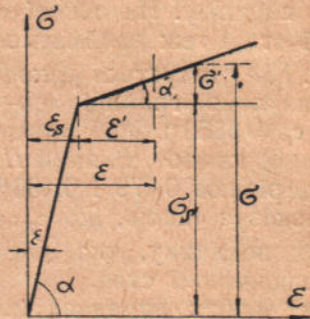


Рис. 15.

також близько 1% від моменту всіх сил перерізу. Це дає нам підставу спростити граничну епюру напруг, надавши їй вигляду епюри рис. 17 б.



Рис. 16.

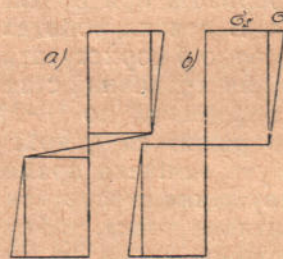


Рис. 17.

Таким чином, при встановленні граничного стану ми зробили цілий ряд припущень і спрощень, які зведемо тут в систему:

1. Перерізи лишаються плоскими як при пружному згині, так і при пружно-пластичному.

2. Практичний граничний стан визначається величиною пружного ядра, при якій момент сил цього ядра становить не більше 1% від повного моменту перерізу або $\epsilon_r \cdot \epsilon_s \cong 10$.

3. Приймається, що в границях до прийнятого граничного стану діаграма деформацій складається з двох прямих дільниць (рис. 15).

4. Закони деформацій для розтягнутих і стиснутих волокон вважаються однаковими.

5. Епюра напруг граничного стану приймається згідно з рис. 17 б, тобто з повною відсутністю пружного ядра.

6. Збільшення границі текучості при згині і підтримуюча дія пружно напружених частин балки не враховується.

Хоч остання обставина, загалом кажучи, істотно впливає на результати розрахунку, особливо для перерізів широких (прямокутні, круглі та інші перерізи), але тут покищо не розглядається і згодом буде розглянена окремо¹⁰⁾.

Дослідження напруг при згині балок прямокутного перерізу

Для одержання розрахункових формул досить розглянути граничну епюру (рис. 17 б). Але, тому що при розв'язанні деяких задач, наприклад, при розрахунку статично невизначених балок, треба знати напружений стан і для проміжних стадій, розгляньмо спочатку епюру напруг, подану на рис. 18.

Одержане раніше рівняння (3)

$$M = \frac{h^2 \cdot b}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

для даного випадку напишеться в такому вигляді:

$$M = \frac{h^2 \cdot b}{4\varepsilon_k^2} \cdot \int_{-\varepsilon_k}^{+\varepsilon_k} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon \quad (3a)$$

Тут, згідно з зробленим вище припущенням, прийнято:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_k$$

Інтеграл у виразі для M розпадається на два інтеграли, тому що діаграма деформації складається з двох ділянок (рис. 14).

Для ділянки I: $f(\varepsilon) = \sigma = \varepsilon \cdot E$.

Для ділянки II: $f(\varepsilon) = \sigma = \sigma_s + \sigma' = \varepsilon_s \cdot E + \varepsilon' \cdot E_1$.

¹⁰⁾ З питання про підвищення границі текучості і про підтримуюче діяння див. нашу роботу (виноска 1), с. 25, а також Ф. П. Бесянкіна, Пластичні деформації і підтримуюча дія при згині дерев'яних балок, АН УССР, 1936.

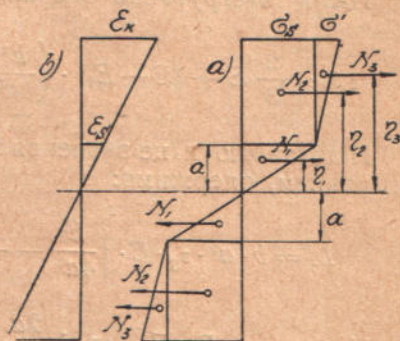


Рис. 18.

Враховуючи, що $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_S$, одержимо:

$$f(\varepsilon) = \varepsilon_S \cdot (E - E_1) + \varepsilon \cdot E_1$$

За рис. 18 *b* маємо:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_S \cdot \frac{h}{2a}$$

Підставляючи значення $f(\varepsilon)$ і ε_k , одержимо інтеграл виразу (3а) у вигляді:

$$\int_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon = \int_{-\varepsilon_S}^{\varepsilon_S} \varepsilon \cdot E \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon + 2 \int_{\varepsilon_S}^{\varepsilon_S \cdot \frac{h}{2a}} \{ \varepsilon_S \cdot (E - E_1) + \varepsilon \cdot E_1 \} \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

Після інтегрування одержимо вираз:

$$\varepsilon_S^3 \cdot \left[\frac{2}{3} E + (E - E_1) \cdot \left(\frac{h^2}{4a^2} - 1 \right) + \frac{2}{3} E_1 \cdot \left(\frac{h^3}{8a^3} - 1 \right) \right]$$

Підставляючи це значення інтеграла в (3а) і замінюючи ε_k його значенням, одержимо:

$$M = b \cdot a^2 \cdot \varepsilon_S \cdot E \cdot \left[\frac{h^2}{4a^2} - \frac{1}{3} + \frac{E_1}{E} \left(\frac{h^3}{12a^3} + \frac{1}{3} - \frac{h^2}{4a^2} \right) \right]$$

Позначмо $E_1 : E = m$ і $\frac{2a}{h} = \alpha$; тоді, виносячи за дужки $\frac{h^2}{4a^2}$, одержимо:

$$M = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \varepsilon_S \cdot E \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

Нарешті, замінюючи $\varepsilon_S \cdot E = \sigma_S$ і $\frac{b \cdot h^2}{4} = T$, одержимо остаточно:

$$\boxed{M = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]} \quad (5)$$

Наведене вище рівняння (1), одержане Fritsche, є окремим випадком цього більш загального рівняння. Справді, визначаючи з (1) M , одержимо:

$$M = M_S \cdot \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta_S}{\Delta} \right)^2 \right]$$

Тому що

$$M_S = \sigma_S \cdot W = \frac{2}{3} \cdot \sigma_S \cdot T \quad \text{і} \quad \frac{\Delta_S}{\Delta} = \frac{2a}{h} = \alpha,$$

то

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right),$$

що збігається з значенням M за рівнянням (5) для окремого випадку $m = 0$ (наявність горизонтальної площадки текучості).

Рівняння (5), звичайно, легко можна одержати за рис. 18 а безпосередньо з виразу

$$M = \sum N \cdot \eta \quad (6)$$

Слід відзначити, що визначення величини M як з допомогою рівняння (5) або (3), так і (6) сходять до обчислення статичних моментів площ: у першому випадку — площі діаграми деформацій відносно вертикальної осі σ , в другому — площі епюри напруг відносно горизонтальної центральної осі. Це дає підставу написати вираз моменту в більш узагальненому вигляді:

$$M = b \cdot \rho^2 \cdot 2S_y^{\sigma, \epsilon} \quad (7a)$$

або

$$M = b \cdot 2S_x^{\sigma, h} \quad (7b)$$

Перше значення M одержане з (3) після заміни

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 = 4\epsilon_k^2 = \frac{b \cdot a^2}{\epsilon_S^2} \quad \text{і} \quad \frac{a^2}{\epsilon_S^2} = \rho^2$$

Статичний момент площі діаграми деформацій (по один бік від горизонтальної осі) позначено через $S_y^{\sigma, \epsilon}$, а статичний момент площі епюри напруг (теж по один бік від осі X) — $S_x^{\sigma, h}$.

Вирази (7a) і (7b) дозволяють розглядати епюру напруг як повернуту на 90° діаграму деформацій. Перехідним множником при цьому є ρ^2 і, крім того, змінюється розмірність величин по одній з осей (h замість ϵ).

Перейдімо тепер до розгляду епюри напруг прийнятого вище граничного стану.

Для сталей з горизонтальною площадкою текучості рівняння (1) дає можливість одразу визначити величину граничного

моменту M_T , для чого треба застосувати умови зникнення пружного ядра

$$\alpha = \frac{\Delta_S}{\Delta} = 0$$

При цій умові $3 - \frac{2M_T}{M} = 0$ або $M_T = \frac{3}{2} M_S = \sigma_S \cdot T$.

Для нашого ж випадку, який визначається рівнянням (5), підставлення $\alpha = 0$ не дає значення моменту практичного граничного стану. При $\alpha = 0$ рівняння (5) дає значення

$$M = \infty$$

Цей результат, математично правильний і логічний при зроблених припущеннях, — зростання дільниці II діаграми за лінійним законом і повне зникнення пружного ядра ($\alpha = 0$), чому відповідають нескінченно великі деформації крайніх волокон, — практично, звичайно, не має значення, тому що деформації не можуть зростати до нескінченності і прямолінійність дільниці II прийнята нами тільки тому, що ми розглядаємо невеликі деформації, порядку одиниць процентів.

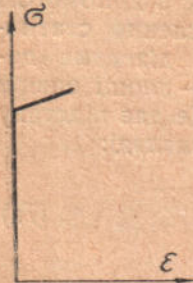


Рис. 19.

Для одержання значення граничного моменту доводиться відмовитись від використання рівняння (5) і, відкинувши спочатку пружне ядро, вивести формулу для цього моменту. Інакше кажучи, в основу виводу треба покласти епюру напруг (рис. 17b) або діаграму деформації за рис. 19, де прийнято $E = \infty$.

Епюра рис. 17b дає підставу одразу написати значення граничного моменту

$$M_T = \sigma_S \cdot T + \sigma' \cdot W \quad (8)$$

Цей вираз показує, що з погляду нової „пластичної“ теорії спеціальні сталі без площадки текучості мають ще додатковий „резерв“ опору, який виражається другим членом $\sigma' \cdot W$, якого немає у сталей з горизонтальною площадкою текучості.

Для практичного користування формулою (8) треба знати величину σ' , що не важко зробити, маючи діаграму деформації і встановивши величину деформації, яку ми прийняли відповідною граничному стану.

Вище ми прийняли на основі графіків рис. 12:

$$\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$$

За рис. 15 маємо:

$$\sigma' = \varepsilon' \cdot E_1 = (\varepsilon_T - \varepsilon_S) \cdot E_1$$

Отже

$$M_T = \sigma_s \cdot T + (\varepsilon_T - \varepsilon_s) \cdot E_1 \cdot \frac{2}{3} T$$

Тут для прямокутного перерізу $W = \frac{2}{3} T$.

Вводячи позначення $E_1 : E = m$, одержимо:

$$M_T = \sigma_s \cdot T \left[1 + \frac{2m}{3} \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_s} - 1 \right) \right] \quad (8a)$$

Отже розрахунок за формулами (8) або (8a) вимагає знання емпіричних величин ε_s і m , які завжди відомі, якщо є діаграма деформації при розтягу або стиску. Позначаючи вираз у прямих дужках формули (8) через β , одержимо далі просту формулу:

$$M_T = \beta \cdot \sigma_s \cdot T \quad (8b)$$

Величина β завжди більша за одиницю, тільки для сталей з площадкою текучості $\beta = 1$.

У табл. 1 дано значення β для різних сталей, залежно від m .

Таблиця 1

m	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
β	1,06	1,12	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,48	1,54	1,60

Як видно з цієї таблиці і формули (8b), спеціальні сталі без площадки текучості мають підвищений опір порівнюючи з звичайною сталлю не тільки в наслідок вищого значення σ_s , але й у наслідок наявності в розрахунковій формулі коефіцієнта β , більшого за одиницю.

Двотавровий переріз

На рис. 20 наведені всі дані для виводу формули моменту в пружно-пластичному стані. Момент визначаємо, користуючись виразом:

$$M = \sum N \cdot r_i$$

Вивід значно спрощується, якщо момент сил N_1 , N_2 і N_4 написати як різницю моментів прямокутної і трикутної елюр напруг. Отже одержимо:

$$M = \sigma_s \cdot T - \sigma_s \cdot \frac{a}{2} \cdot d \cdot \frac{2}{3} a + \sigma' \cdot \left(\frac{h}{2} - a \right) \cdot b \cdot \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{h}{2} - a \right) + \frac{a}{2} \right\} -$$

$$- \sigma' \cdot \left(\frac{h_1}{2} - a \right) \cdot \frac{\left(\frac{h_1}{2} - a \right)}{\frac{h}{2} - a} \cdot (b - d) \cdot \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{h_1}{2} - a \right) + a \right\}$$

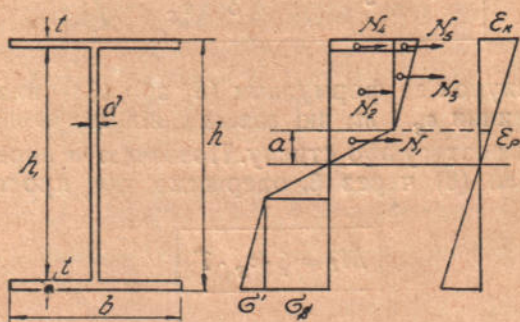


Рис. 20.

Зробивши перетворення і замінюючи σ' його значенням:

$$\sigma' = (\varepsilon_k - \varepsilon_s) \cdot E_1 = \frac{\sigma_s}{a} \cdot m \cdot \left(\frac{h}{2} - a \right),$$

де

$$m = E_1 : E,$$

остаточно одержимо:

$$M = \sigma_s \cdot \left(T - \frac{da^2}{3} \right) + \sigma_s \cdot m \cdot \left[T \cdot \left(\frac{h}{3a \cdot k} - 1 \right) + \frac{d \cdot a^2}{3} \right] \quad (9)$$

Величиною k позначено:

$$k = \frac{T}{\frac{3}{2} W} = \frac{\{ b \cdot (h^2 - h_1^2) + d \cdot h_1^2 \} \cdot h^*}{b \cdot (h^3 - h_1^3) + d \cdot h_1^3}$$

*) Див. сс. 22—23 роботи, зазначеної у виносці 1.

Якщо врахувати, що момент опору пружного ядра

$$W_e = \frac{2}{3} da^2$$

і, згідно з попереднім, позначити $a = \frac{2a}{h}$, то вираз (9) напишемо так:

$$M = \sigma_s \left(T - \frac{W_e}{2} + \sigma_s \cdot m \cdot \left[T \cdot \left(\frac{2}{3\alpha \cdot k} - 1 \right) + \frac{W_e}{2} \right] \right) \quad (9a)$$

Одержані результати мають силу, звичайно, тільки для випадку, поданого на рис. 20, тобто, коли пружне ядро не виходить за границі вертикальної стінки двотавра. Якщо ж висота пружного ядра $2a > h$, то аналогічно (рис. 21) одержимо:

$$M = \sigma_s \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) + \sigma_s \cdot W_e + \frac{\sigma_s \cdot m \cdot b}{3a} \cdot \left(\frac{h^3}{4} + a^3 - \frac{3}{4} h^2 \cdot a \right) \quad (10)$$

Тут W_e — момент опору пружного ядра, яке складається з вертикальної стінки і полиць висотою $t_1 = a - \frac{h_1}{2}$.

Формули (9) і (10) дають однаковий результат при

$$a = \frac{h_1}{2},$$

а саме:

$$M = \sigma_s \cdot \frac{b}{4} \cdot \left(h^2 - h_1^2 \right) + \sigma_s \cdot \frac{d \cdot h_1^2}{6} + \frac{\sigma_s \cdot m \cdot b}{6h_1} \cdot \left(h^3 + \frac{h_1^3}{2} - \frac{3}{2} h^2 h_1 \right) \quad (11)$$

Формули (7a) і (7b), виведені для прямокутного перерізу, дійсні також і для двотаврових перерізів, якщо тільки під величинами $S_y^{\sigma, c}$ і $S_x^{\sigma, h}$ розуміти статичні моменти, зведені до ширини b , тобто, наприклад, у формулі (7b):

$$S_x^{\sigma, h} = N'_1 \cdot \eta_1 + \frac{d}{b} \cdot N'_2 \cdot \eta_2,$$

де:

N'_1 і N'_2 — нормальні сили перерізу полиці і половини стінки, віднесені до одиниці ширини перерізу;

η_1 і η_2 — віддалі цих сил від центральної осі.

Як і для прямокутного перерізу, момент граничного стану не може бути одержаний за формулою (9) при $a = 0$, а для цього треба розглянути епюру напруг рис. 22, яка дає нам:

$$M_T = \sigma_s \cdot T + \sigma' \cdot W$$

Тому що для двотаврового перерізу $T = \frac{3}{2} k \cdot W$, то

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} \cdot \left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_S} - 1 \right) \right] \quad (12)$$

Ця формула відрізняється від формули (8а) для прямокутного перерізу тільки коефіцієнтом $\frac{1}{k}$ в другому члені в дужках. Середнє значення k для різних номерів і типів двотаврів $k = 0,78$.

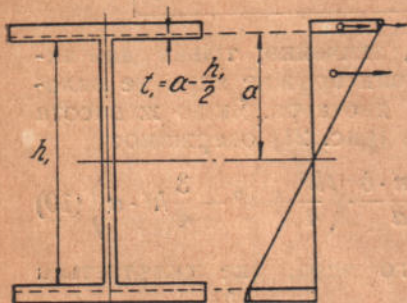


Рис. 21.

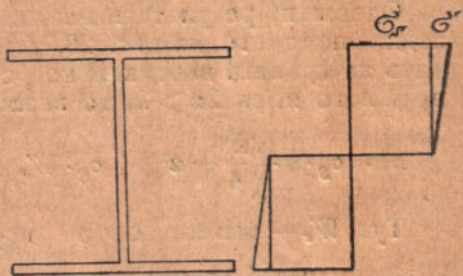


Рис. 22.

Вводячи його в формулу (12), одержимо:

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + 0,86 m \cdot \left(\frac{\epsilon_T}{\epsilon_S} - 1 \right) \right] \quad (12a)$$

або:

$$M_T = \gamma \cdot \sigma_S \cdot T \quad (12b)$$

В табл. 2 дано значення γ для тих самих сталей, які наведені в табл. 1.

Таблиця 2

m	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
γ	1,08	1,16	1,23	1,31	1,39	1,46	1,54	1,62	1,70	1,77

Як видно з цієї таблиці і з формули (12), γ завжди більше за β (табл. 2), отже двотаврові перерізи вигідніші з погляду додаткового опору, обумовленого відсутністю горизонтальної площадки текучості.

Тавровий переріз

Дослідимо спочатку випадок, коли в перерізі є тільки одна зона текучості (рис. 23).

Перший етап задачі — знаходження положення нейтральної осі, яка при переході перерізу в пружно-пластичний стан вже не буде збігатись з центральною віссю.

Рівняння для знаходження положення цієї осі ($x_1 - x_1$):

$$\sum N = 0,$$

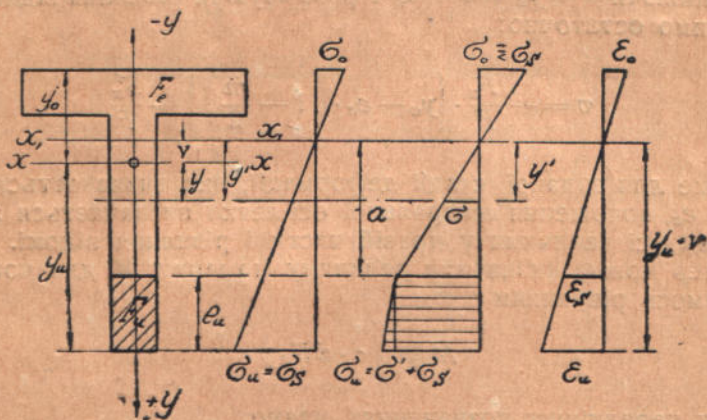


Рис. 23.

або

$$\sigma_S \cdot F_u + \frac{\sigma' \cdot F_u}{2} + \int_{F_e} \sigma \cdot dF_e = 0$$

Далі маємо:

$$\sigma = \sigma_S \cdot \frac{y'}{a} \quad \text{і} \quad \sigma' = (\varepsilon_u - \varepsilon_S) \cdot E_1$$

Заміняючи

$$\varepsilon_u = \varepsilon_S \cdot \frac{a + e_u}{a},$$

одержимо:

$$\sigma' = \sigma_S \cdot m \cdot \frac{e_u}{a}$$

Вводячи в рівняння $\sum N = 0$ значення σ і σ' , одержимо:

$$\sigma_S \cdot F_u + \sigma_S \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{e_u}{a} \cdot F_u + \frac{\sigma_S}{a} \int_{F_e} y' \cdot dF_e = 0$$

А тому що $y' = y + v$, то після скорочення на σ_S одержимо:

$$F_u \cdot \left(a + \frac{m \cdot e_u}{2} \right) + S_x^e + v \cdot F_e = 0$$

Тут величина $\int_{F_e} y \cdot dF_e$, яка являє собою статичний момент площі пружного ядра відносно центральної осі x , позначена S_x^e .

Заміняючи $a = y_u + v - e_u$ і розв'язуючи рівняння відносно v , одержимо остаточно:

$$v = -\frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (13)$$

Отже для заданої стадії деформації, яка визначається величиною e_u , положення центральної осі легко визначається за (13), тому що всі величини у правій частині рівняння відомі.

Тепер можна визначити величину моменту M , для чого скористуємось рівнянням

$$M = \int \sigma \cdot dF \cdot y'$$

При передніх позначеннях маємо:

$$M = \int_{F_e} \sigma \cdot y' \cdot dF_e + \sigma_S \cdot F_u \cdot \left(a + \frac{e_u}{2} \right) + \frac{\sigma' \cdot e_u}{2} \cdot d \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right)$$

Вводячи позначення: $W_{x_1}^e$ — момент опору пружного ядра для нижнього волокна відносно нейтральної осі x_1 ; $S_{x_1}^u = F_u \cdot \left(a + \frac{e_u}{2} \right)$ — статичний момент пластичної частини перерізу відносно тієї самої осі, при чому $F_u = e_u \cdot d$, одержимо:

$$M = \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) \right] \sigma_S \quad (14)$$

Випадок, коли є дві зони текучості (рис. 24).

Для цього випадку рівняння $\sum N = 0$ має вигляд:

$$-\sigma_S \cdot F_0 - \sigma'_0 \cdot \frac{F_0}{2} + \sigma_S \cdot F_u + \sigma'_u \cdot \frac{F_u}{2} + \int_{F_e} \sigma \cdot dF_e = 0$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon_0 = \frac{e_0 + a}{a} \quad \text{і} \quad \varepsilon_u = \frac{e_u + a}{a},$$

після аналогічних попереднім перетворень одержимо:

$$v = \frac{F_0}{F} \cdot \left\{ y_0 - e_0 \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (15)$$

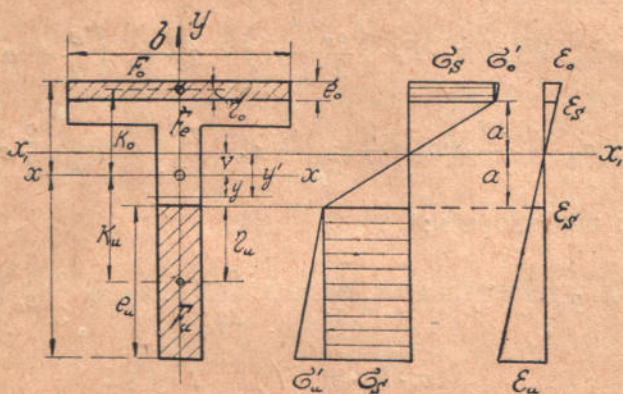


Рис. 24.

Очевидно, одержана вище формула (14) є окремим випадком (15), при $F_0 = 0$.

У першій частині нашої роботи (див. виноску 1) на с. 42 наведена формула Eisenmann-a:

$$v = \frac{1}{F} \cdot (F_u \cdot \eta_u - F_0 \cdot \eta_0)$$

для випадку сталі з горизонтальною площадкою текучості, при чому η_u і η_0 — координати центрів ваги пластичних частин перерізу відносно їх внутрішніх границь, тобто для таврового перерізу

$$\eta_u = \frac{e_u}{2} \quad \text{і} \quad \eta_0 = \frac{e_0}{2}$$

Формула ця є окремим випадком більш загальної формули (15) і одержується з неї при $m = 0$.

Справді, поклавши в (15) $m = 0$ і замінивши

$$y_0 - e_0 = k_0 - \eta_0 \quad \text{і} \quad y_u - e_u = k_u - \eta_u,$$

одержимо:

$$v = \frac{1}{F} \cdot (F_u \cdot \eta_u - F_0 \cdot \eta_0) - \frac{1}{F} \cdot (F_u \cdot k_u + S_x^e - F_0 \cdot k_0)$$

Вираз у дужках другого члена є статичний момент усього перерізу відносно центральної осі, тобто $S_x = 0$; отже одержуваний результат збігається з формулою Eisenmann-a.

За аналогією з попереднім випадком значення згинального моменту одержимо у вигляді:

$$M = \sigma_s \cdot W_{x_1}^e + \sigma_s \cdot F_u \cdot \left(\frac{e_u}{2} + a \right) + \sigma_s \cdot F_0 \cdot \left(\frac{e_0}{2} + a \right) + \\ + \sigma'_u \cdot \frac{e_u \cdot d}{2} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) + \sigma'_0 \cdot \frac{e_0 \cdot b}{2} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_0 \right)$$

або, після перетворень:

$$M = \sigma_s \cdot \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + S_{x_1}^0 + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) + \right. \\ \left. + \frac{m \cdot F_0 \cdot e_0}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_0 \right) \right] \quad (16)$$

Для одержання виразів v і M в граничному стані треба скористуватись епюрою напруг рис. 25. Значення v одержимо, написавши рівняння:

$$\sum N = 0,$$

яке для даного випадку має вигляд:

$$-\sigma_s \cdot F_0 + \sigma_s \cdot F_u - \int_{F_0} \sigma'_0 \cdot \frac{y'}{e_0} \cdot dF_0 + \int_{F_u} \sigma'_u \cdot \frac{y'}{e_u} \cdot dF_u = 0$$

Зробивши перетворення, аналогічні перетворенням при виводі формули (15), одержимо:

$$v = - \frac{m \cdot v \cdot (S_x^u - S_x^0) + (F_u - F_0) \cdot y_u}{m \cdot v \cdot F + F_u - F_0}$$

Тут $v = \frac{e_T^u}{e_S} - 1$ і S_x^u , S_x^0 — статичні моменти площ F_u і F_0 відносно центральної осі x .

Очевидно, що $S_x^0 = -S_x^u$, і тому різницю їх можна замінити величиною $2S_x^u$. Виключаючи F_0 , одержимо:

$$v = - \frac{m \cdot v \cdot 2S_x^u + (2F_u - F) \cdot y_u}{m \cdot v \cdot F + 2F_u - F} \quad (17)$$

Формули (15) і (17), які мають силу не тільки для таврових перерізів, але й для будьяких несиметричних відносно осі x перерізів, у написаному вигляді ще не дають змоги визначити v , а дають тільки залежність між величинами, що входять

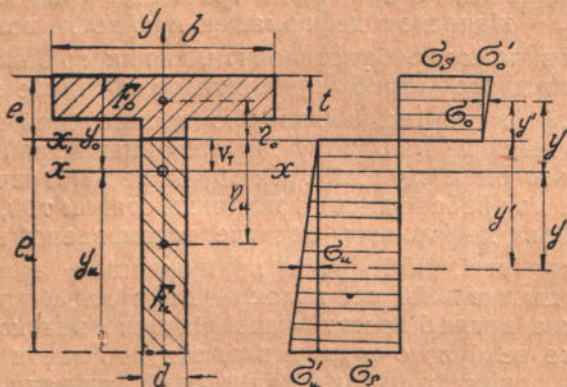


Рис. 25.

в них. У праві частини цих формул також входить v в неявному вигляді (в S_x^u і F_u). Для знаходження величини v треба в кожному окремому випадку, залежно від заданого перерізу, виразити S_x^u і F_u через v і розв'язати одержане рівняння відносно v . Зокрема для таврового перерізу, при позначеннях рис. 25, одержимо:

$$v = - \frac{m \cdot v \cdot d \cdot (y_u^2 - v^2) + (2d \cdot y_u + 2d \cdot v) \cdot y_u}{m \cdot v \cdot F + 2d \cdot y_u + 2d \cdot v - F} \quad (18)$$

Це квадратне рівняння зручніше розв'язувати не в загальному вигляді, а спочатку підставити числові значення, а далі, після перетворень, розв'язати відносно v .

Приклад визначення v . Задано (див. рис. 25):

$$\begin{aligned} b &= 10 \text{ см}; & t &= 2 \text{ см}; \\ h_1 &= 15 \text{ см}; & d &= 2 \text{ см}; \\ m &= 0,03; & v &= \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} - 1 = 5 \end{aligned}$$

Обчислення дають $u = 10,9$ см. Після підставлення цих значень у (18), одержимо:

$$3,7 v^2 + 44,7 v - 34,117 = 0,$$

звідки $v_1 = -13$ см і $v_2 = +0,72$ см.

Очевидно, для даної задачі має зміст тільки другий корінь. Значення $+$ показує, що вісь x_1 , яка визначається величиною v , лежить вище осі x , тому що при складанні рівняння $\sum N = 0$ враховані від'ємні знаки ординат для верхньої частини перерізу.

Зважаючи на те, що прийнятий граничний стан визначається величиною ε_T — відносною деформацією крайнього волокна, у розглядуваному випадку треба встановити, для якого волокна — верхнього чи нижнього — треба прийняти це граничне значення ε_T . Для перерізів з нерізка виявленою несиметричністю це особливого значення не має, тому що деформації крайніх волокон мало різняться одна від одної. Якщо ж несиметричність перерізу велика, то треба вважати граничним станом той, при якому більша крайова деформація досягне встановленої величини ε_T . В протилежному разі, тобто при припущенні ε_T в менше віддаленому від центральної осі волокні, деформація другого крайнього волокна могла б досягти такої відносно великої величини, при якій вже не було б підстав вважати, що закон деформацій для верхніх і нижніх волокон однаковий, визначуваний величиною m .

Виведемо тепер значення граничного моменту.

За рис. 25 рівняння

$$M_T = \int \sigma \cdot dF \cdot y'$$

напишеться у вигляді:

$$M_T = \sigma_S \cdot T_{x_1} + \sigma'_u \cdot W_{x_1}^u \quad (19)$$

Тут:

$$T_{x_1} = \left| S_{x_1}^0 \right| + \left| S_{x_1}^u \right| \quad \text{і} \quad W_{x_1}^u = \frac{J_{x_1}}{e_u}$$

Заміняючи

$$\sigma'_u = \sigma_S \cdot m \cdot \left(\frac{\varepsilon_T^u}{\varepsilon_S} - 1 \right) = \sigma_S \cdot m \cdot v,$$

одержимо:

$$M_T = \sigma_S \cdot (T_{x_1} + m \cdot v \cdot W_{x_1}^u) \quad (19a)$$

Якщо всі величини звести до осі x , тобто замість T_{x_1} і W_{x_1} написати:

$$T_{x_1} = |S_{x_1}^0| + |S_{x_1}^u| = |S_x^0| + |S_x^u| + v \cdot (F_u - F_0) = 2S_x + v \cdot (F_u - F_0)$$

$$W_{x_1} = \frac{1}{y_u + v} \cdot (J_x + F \cdot v^2),$$

то одержимо:

$$M_T = \sigma_S \cdot [2S_x + v \cdot (F_u - F_0) + \frac{m \cdot v}{y_u + v} \cdot (J_x + F \cdot v^2)] \quad (19b)$$

Робота прямокутного перерізу при другому законі деформації волокон

Прийнятий вище закон деформації волокон (рис. 15) значною мірою відповідає дійсному, якщо обмежитись невеликою частиною діаграми, в границях $\epsilon = 1-2\%$.

Як видно з попереднього, в усіх виводах ми користувались саме такою частиною діаграми, тому що для прийнятого граничного стану розгляд діаграми при великих деформаціях є зайвим. Можна сказати, що закон деформації, який характеризується двома прямими з $\text{tg } \alpha = E$ і $\text{tg } \alpha_1 = E_1$, може бути цілком застосований для сталей, які мають різко виявлену границю текучості (на діаграмі є різко виявлений злам — рис. 1 с). Якщо ж сталь переходить в пластичний стан поступово, без різко виявленої границі текучості (рис. 1 а, 1 б), то буде трохи важче визначити величину E_1 і, отже, m , яка входить в усі розрахункові формули. Дійсно, зовсім неясно, якою прямою треба замінити криволінійну дільницю діаграми abc (рис. 26) і що, власне, треба прийняти як σ_S .

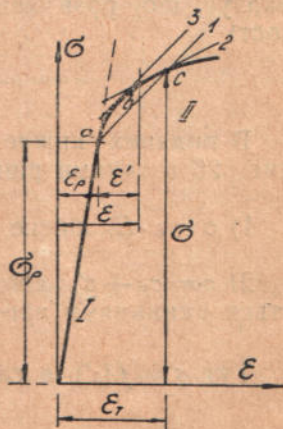


Рис. 26.

На рис. 26 наведені три прямі 1, 2, 3, якими можна замінити криву abc . Перша пряма сполучає точки a і c , друга — дотична до кривої і паралельна ac , третя — дотична до точки c . Звичайно, можна провести ще цілий ряд прямих, більш-менш довільних, які замінюють цю криву і жодна з них, так само як і три зазначені на рис. 26, не будуть досить обгрунтовані і не

На рис. 26 наведені три прямі 1, 2, 3, якими можна замінити криву abc . Перша пряма сполучає точки a і c , друга — дотична до кривої і паралельна ac , третя — дотична до точки c . Звичайно, можна провести ще цілий ряд прямих, більш-менш довільних, які замінюють цю криву і жодна з них, так само як і три зазначені на рис. 26, не будуть досить обгрунтовані і не

можуть бути досить точно нанесені на діаграму, зважаючи на трудність одержання цієї дільниці діаграми в належному масштабі. Навіть прес Гагаріна, який дає діаграму у великому масштабі, не дає цієї кривої досить точно.

Невизначеність задачі усувається, якщо при виводах базується не на границі текучості, якої, власне кажучи, тут немає, а на границі пропорціональності σ_p і, крім того, відмовитись від спроб замінити криволінійний закон деформації прямолінійним. Таким чином, питання сходить до визначення рівняння кривої abc , — інакше кажучи, коли її рівняння відоме, задача принципово розв'язана. При обмеженості розглядуваної дільниці, тобто в границях ϵ , рівних одиницям процентів, можна сказати, що будь-яка плавна крива, що вписується приблизно в точки a , b і c , буде підходити і, як і раніше, закон деформації при розтягу і стиску може бути прийнятий однаковою. Треба, звичайно, підібрати таку криву, яка дає найпростіші результати. Тимошенко¹¹⁾, наприклад, наводить рівняння параболи

$$\epsilon = m \cdot \epsilon + n \cdot \epsilon^2,$$

де m і n — константи, які визначають вигляд діаграми. Він же вказує, що розв'язок буде можливий і при показовій залежності

$$\epsilon = m \cdot \sigma^n$$

В поданих нижче виводах ми в основу поклали діаграму рис. 26 з такими рівняннями для дільниць I і II:

1) $\sigma = \epsilon \cdot E$, дійсне до $\sigma = \sigma_p$;

2) $\sigma = \sigma_p + \sigma'$, дійсне до певного значення ϵ_T , яке вимірюється одиницями процентів.

Тут $\sigma' = f(\epsilon')$, а саме, прийнята парабола другого степеня

$$\epsilon' = p \cdot \sigma'^2$$

Отже

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{\epsilon'} = n \cdot \sqrt{\epsilon'}$$

За рис. 26 маємо:

$$\epsilon' = \epsilon - \epsilon_p$$

¹¹⁾ С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, ч. 1, 1932, пер. с англ., сс. 233—234.

і остаточно для дільниці II

$$\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p}$$

На рис. 27 показані епюри напруг і деформацій прямокутного перерізу, за якими легко одержати значення моменту. Справді:

$$M = W_e \cdot \sigma_p + 2 \left(\frac{h}{2} - a \right) \cdot b \cdot \left(\frac{h}{4} - \frac{a}{2} + a \right) \cdot \sigma_p + 2 \int_a^{\frac{h}{2}} \sigma' \cdot b \cdot z \cdot dz$$

Підставляючи $\sigma' = n \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p}$, одержимо:

$$M = W_e \cdot \sigma_p + \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot b \cdot \sigma_p + 2b \cdot n \cdot \int_a^{\frac{h}{2}} z \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p} \cdot dz$$

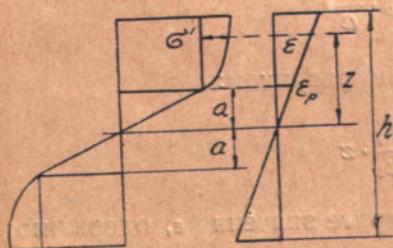


Рис. 27.

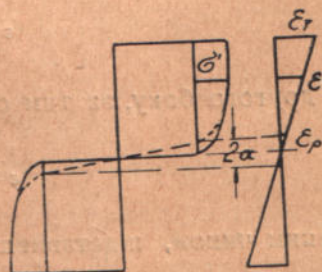


Рис. 28.

На основі прийнятої гіпотези плоских перерізів, за рис. 27b, маємо:

$$\varepsilon = \varepsilon_p \cdot \frac{z}{a};$$

отже

$$M = W_e \cdot \sigma_p + \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot b \cdot \sigma_p + 2b \cdot n \cdot \int_a^{\frac{h}{2}} z \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_p}{a} \cdot z - \varepsilon_p} \cdot dz$$

Після інтегрування і підставлення границь, остаточно одержимо:

$$M = W_e \cdot \sigma_p + \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot b \cdot \sigma_p + \frac{2b \cdot n \cdot a \cdot (3h + 4a)}{15\varepsilon_p} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{h}{2a} - 1 \right)} \right)^3 \quad (20)$$

Це рівняння дає змогу визначити M для будьякої стадії деформації, в границях дійсності нашого рівняння для σ' .

Так само легко одержати значення граничного моменту M_T (рис. 28):

$$M_T = \sigma_p \cdot T + 2b \cdot n \cdot \int_{a \rightarrow 0}^{\frac{h}{2}} z \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p} \cdot dz$$

Тут нижньою границею дано не нуль, а величину a , яка прямує до нуля. Це потрібно було зробити для того, щоб уникнути уявного значення визначеного інтеграла, яке одержується при нижній границі $a = 0$. Як з'ясовано вже вище, пружне ядро в дійсності, навіть при сталях з площадкою текучості, не може цілком зникнути, завжди зберігаючи певну висоту $2a$, якою можна нехтувати при виводі значення M_T .

Якщо пружне ядро лишається, то за рис. 28:

$$\varepsilon = \varepsilon_p \cdot \frac{z}{a}$$

З другого боку, за тим самим рисунком:

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot z$$

Таким чином, підставивши друге значення ε , одержимо:

$$M_T = \sigma_p \cdot T + 2b \cdot n \cdot \int_{a \rightarrow 0}^{\frac{h}{2}} z \cdot \sqrt{\frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot z - \varepsilon_p} \cdot dz$$

Після інтегрування і підставлення границь маємо:

$$M_T = \sigma_p \cdot T + 2b \cdot n \cdot \left[\frac{2h^2}{5 \cdot 4 \cdot \varepsilon_T^2} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot \frac{h}{2} + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{-\varepsilon_p + \frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot \frac{h}{2}} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2h^2}{5 \cdot 4 \cdot \varepsilon_T^2} \cdot \left(\frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot a + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{-\varepsilon_p + \frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot a} \right)^3 \right]$$

Якщо $a = 0$, то, як видно з останнього члена, розв'язок одержується уявний. Тому що в дійсності $a \neq 0$ і, крім того, за рис. 28 b:

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_p} = \frac{h}{2a}$$

то радикал

$$\sqrt{-\varepsilon_p + \frac{2\varepsilon_T}{h} \cdot a} = \sqrt{-\varepsilon_p + \frac{2\varepsilon_p \cdot h \cdot a}{h \cdot 2a}} = 0$$

Отже маємо

$$M_T = \sigma_p \cdot T + \frac{b \cdot h^2 \cdot n}{5\varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \quad (21)$$

Помножуючи і ділячи другий член на $4\sigma_p$, одержимо:

$$M_T = \sigma_p \cdot T \left[1 + \frac{4n}{5\varepsilon_T^2 \cdot \sigma_p} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \right] \quad (21a)$$

Вираз у прямих дужках, при прийнятій визначеній величині ε_T являє собою сталий коефіцієнт, який позначимо β_1 .
Тоді остаточно одержимо:

$$\boxed{M_T = \beta \cdot \sigma_p \cdot T} \quad (21b)$$

Двотавровий переріз

Аналогічно до попереднього за рис. 29 одержимо:

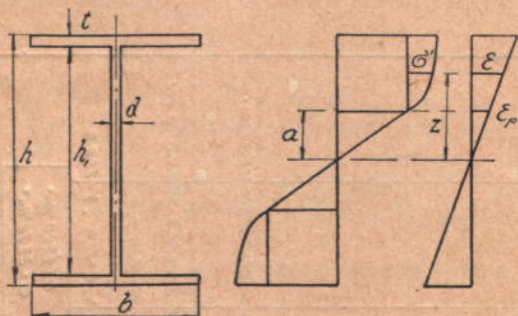


Рис. 29.

$$\begin{aligned} M = & \sigma_p \cdot \left(T - \frac{d \cdot a^2}{3} \right) + \frac{4}{5} n \cdot d \cdot a^2 \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \left(\frac{h_1}{2a} + \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{h_1}{2a} - 1 \right)} \right)^3 + \\ & + \frac{4}{5} b \cdot n \cdot a^2 \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \left[\left(\frac{h}{2a} + \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{h}{2a} - 1} \right)^3 - \right. \\ & \left. - \left(\frac{h_1}{2a} + \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{h_1}{2a} - 1} \right)^3 \right] \quad (22) \end{aligned}$$

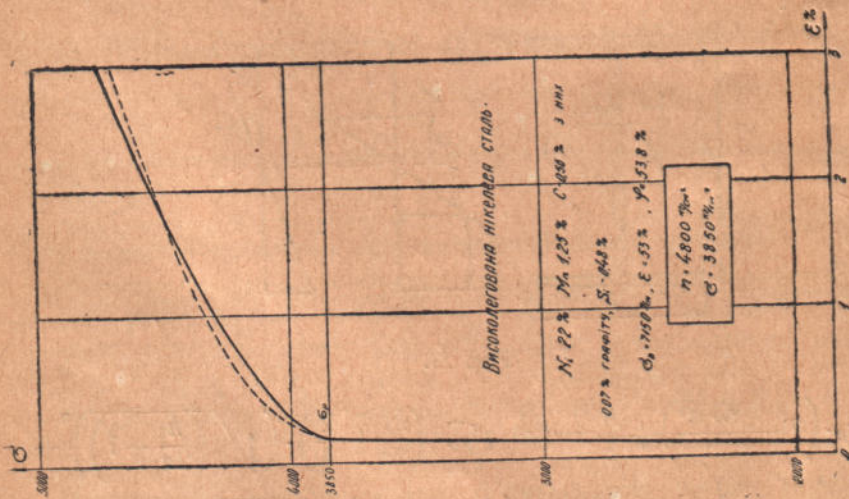


Рис. 30.

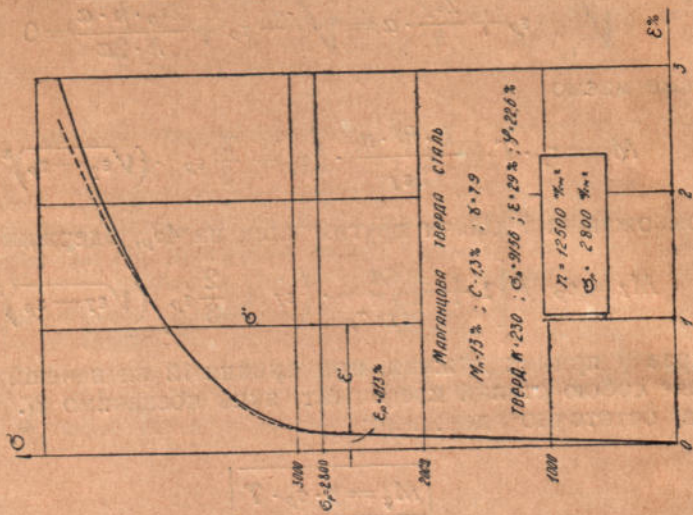


Рис. 31.

Граничний момент:

$$M_T = \sigma_p \cdot T - (b - d) \cdot \frac{n \cdot h^2}{5 \varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} - \varepsilon_p} \right)^3 + \frac{n \cdot h^2 \cdot b}{5 \varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \quad (23)$$

На рис. 30 і 31 у великому масштабі показані частини діаграм високолегованої нікелевої і манганової сталей, які відповідають рис. 1а і 1б¹²⁾. Для першої з них в границях до $\varepsilon \cong 2\%$ добре підходить рівняння

$$\sigma' = 4800 \cdot \sqrt{\varepsilon'}$$

тобто $n = 4800 \text{ кг/см}^2$. На діаграмі ця функція нанесена пунктиром. Для кривої рис. 31, яка йде крутіше після границі пропорційності, підібрана парабола

$$\sigma' = 12500 \cdot \sqrt{\varepsilon'}$$

яка дуже добре збігається з кривою діаграми при $\varepsilon' \leq 2\%$. Пропоноване Тимошенком рівняння

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \pm n \cdot \varepsilon^2$$

для сталей не підходить. Можна було б скористуватись рівнянням 4 для дільниці II діаграми

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - n \cdot \varepsilon'^2,$$

але через відносну пологість кривої діаграми не вдається підібрати таке значення n , яке задовольняє це рівняння. Очевидно, підійшло б рівняння з показником у ε' , меншим за 2 і близьким до одиниці, тобто в такому разі ми одержали б розв'язок, мало відмінний від одержаного раніше розв'язку при діаграмі з двох прямих дільниць.

Для простоти розв'язання завжди треба старатись користуватися саме такою діаграмою.

2. Дотичні напруги при згині

Дотичні напруги при пластичних деформаціях для сталей з площадкою текучості

З погляду нової теорії інтересні такі питання, які стосуються дотичних напруг: а) закон зміни дотичних напруг у пружно-пластичній зоні; б) величина небезпечних дотичних напруг, тобто

¹²⁾ Діаграми запозичені з книги С. Вах і Р. Вауманн, Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien, 1921.

тих граничних напруг, після досягнення яких можна вважати вичерпаним опір перерізу зсуву; с) вплив дотичних напруг на текучість сталі, спричинену нормальними напруженнями. Найявніший дотичних напруг ускладнює напружений стан і може привести до головних напруг, значення яких виявляться більшим за значення простих нормальних напруг і, отже, текучість у таких точках перерізу настане раніше, ніж це виходить при розрахунку за самими тільки нормальними напруженнями.

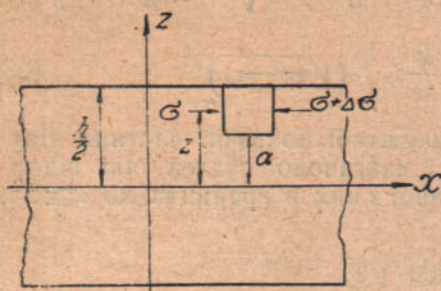


Рис. 32.

Fr. Stüssi¹⁹⁾ дослідив дотичні напруження при пластичних деформаціях для прямокутного перерізу. Як відомо, дотичні напруження в будь якій точці перерізу можуть бути знайдені з умов рівноваги виділеного елемента Δx (рис. 32):

$$\tau \cdot b_a \cdot \Delta x = \int_a^{\frac{h}{2}} \Delta \sigma \cdot b_z \cdot dz$$

або

$$\tau = \frac{1}{b_a} \cdot \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \cdot b_z \cdot dz,$$

де:

b_a — ширина перерізу в розглядуваному місці;

b_z — змінна ширина перерізу.

Для прямокутного перерізу:

$$\tau = \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \cdot dz \quad (24)$$

Величина $\frac{\Delta \sigma}{\Delta x}$ являє собою приріст τ на одиницю довжини.

Очевидно, інтеграл виразу (24) — це площа епюри різниці нормальних напруг на одиницю довжини. Також очевидно, що вираз (24) може бути застосований для будь якої стадії деформації, тобто і за границею пропорціональності. В останньому випадку

¹⁹⁾ Fr. Stüssi, Ueber den Verlauf der Schubspannungen in auf Biegung beanspruchten Balken aus Stahl, Schw. Bz, Bd. 98, № 1, 1931.

тільки закон зміни $d\sigma$ по висоті перерізу буде різнитись від закону зміни в границях пропорційності (рис. 33).

Stüssi, базуючись на діаграмі м'якої сталі, показаній на рис. 34, побудував епюри дотичних напруг для різних стадій деформацій,

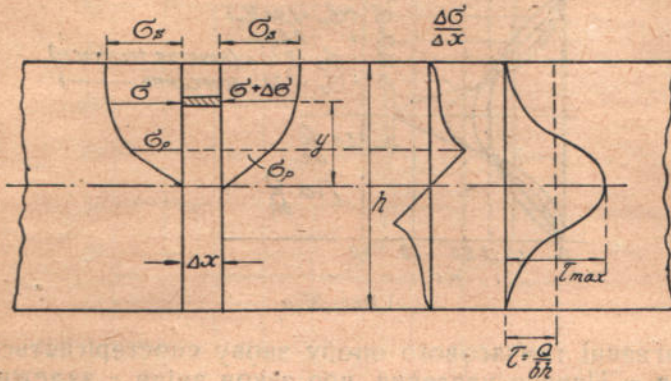


Рис. 33.

починаючи від $\sigma \leq \sigma_p$ і до тимчасового опору σ_B . Ці епюри показані на рис. 35 а і 35 б, з яких рис. 35 б є продовженням рис. 35 а.

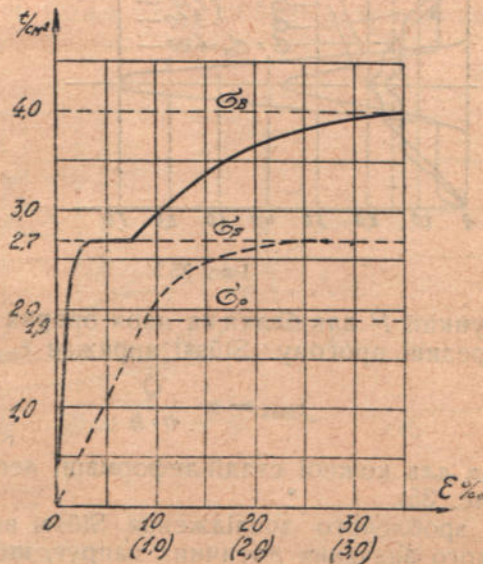


Рис. 34.

При побудованні цих епюр Stüssi врахував перехідну дільницю діаграми від σ_p до σ_s , тобто користувався дійсною діаграмою, а не спрощеною діаграмою Prandtl-я. Епюри $\Delta\sigma$ (рис. 33) і τ (рис. 35) побудовані не за аналітичним виразом σ , а за епюрами σ , нане-

сеними відповідно з діаграмою рис. 34. Звертає на себе увагу різке зростання напруг τ наприкінці періоду текучості і далі поступове їх зменшення, коли настає період зміцнення. Тільки

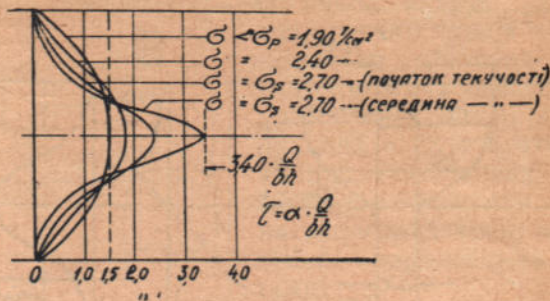


Рис. 35 а.

при досягненні тимчасового опору знову спостерігається деяке зростання τ . Наочне уявлення про закон зміни τ залежно від σ і P дають рис. 36 і 37, запозичені у Stüssi. Останній рисунок

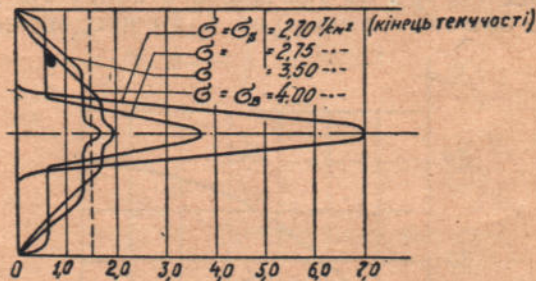


Рис. 35 б.

дає τ і σ у функції P для балки на двох опорах з зосередженою силою по середині прогону. Stüssi виражає τ_{\max} у вигляді

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (25)$$

Значення α для кожної стадії деформації легко прочитати на діаграмах (рис. 35).

На основі зробленого дослідження Stüssi встановлює величину граничного значення дотичних напруг, що не впливає на результати розрахунку за „пластичною“ теорією, тобто не зменшує підвищений опір, одержуваний за цією теорією, порівнюючи з звичайними „пружними“ розрахунками. На основі теорії міцності Mohr-а і дослідів R6s-а і Eichinger-а відношення границі текучості при зсуві становить близько 0,6 границі текучості, яка відповідає нормальним напругам. У пружно-пластичній зоні, як

вже відзначено, дотичні напруги зростають набагато швидше проти нормальних. Правильніше сказати, протягом періоду текучості максимальні нормальні напруги лишаються сталими (σ_s)

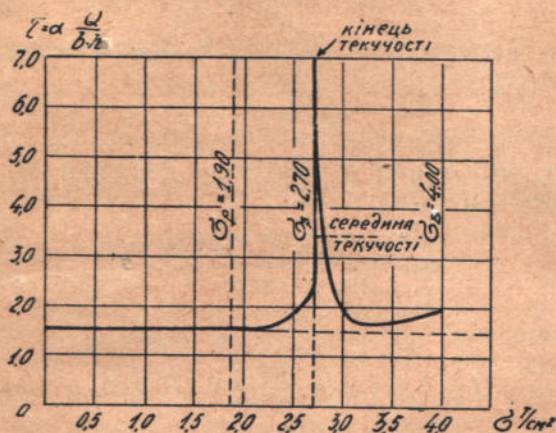


Рис. 36.

і тільки дедалі глибше проникають по висоті перерізу; дотичні ж напруги весь час зростають і досягають максимуму наприкінці періоду текучості. Отже відносна роль дотичних напруг зростає.

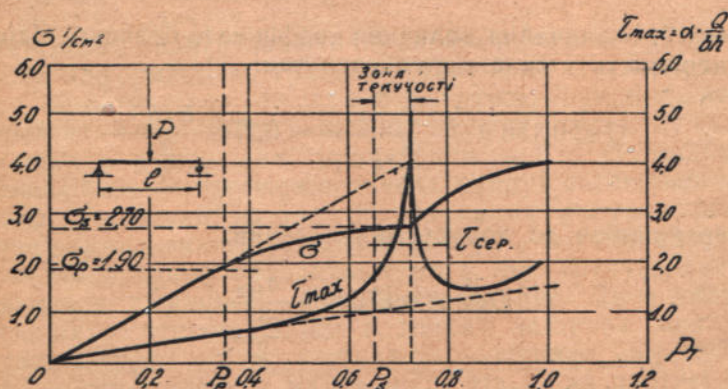


Рис. 37.

Stüssi виходить не з максимального значення $\tau_{\max} = 7,0 \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$ (рис. 35), а з значення

$$\tau_{\max} = 3,40 \cdot \frac{Q}{b \cdot h}, \quad (26)$$

яке відповідає приблизно середині площадки текучості. При цьому він виходить з того, що максимальна дотична напруга (тільки коло нейтральної осі) має місцевий характер.

Якщо на балку діє навантаження P , то при переході в граничний стан навантаження становитиме

$$P_T = P \cdot n_T^*)$$

Очевидно, перерізаюча сила Q також зростає в n_T разів, тобто одержимо:

$$Q_T = n_T \cdot Q$$

Поклавши, що границя текучості дорівнює σ_S , одержуємо граничне значення τ_{\max} :

$$\tau_{\max} = \frac{3,4 \cdot Q \cdot n_T}{b \cdot h} \leq 0,6 \sigma_S$$

або

$$Q \leq 0,176 b \cdot h \cdot \frac{\sigma_S}{n_T} = 0,176 b \cdot h \cdot \sigma'$$

Тут σ' — умовна напруга, яку одержуємо від ділення границі текучості σ_S на n_T . Коефіцієнт безпеки

$$n_T = \frac{3}{2} k \cdot n_S^*).$$

де $n_S = 1,71$ — звичайна величина коефіцієнта безпеки. Написану вище нерівність можна переписати так:

$$Q \leq 0,176 b \cdot h \cdot \frac{\sigma_S}{\frac{3}{2} k \cdot n} = 0,176 \frac{b \cdot h \cdot \sigma'}{\frac{3}{2} k}$$

або, перейшовши до допустимих величин:

$$Q_{\text{доп}} \leq 0,176 b \cdot h \cdot \frac{\sigma_{\text{доп}}}{\frac{3}{2} k} \quad (27)$$

Stüssi відзначає, що вираз (26) дійсний і для двотаврових перерізів, коли лише замість ширини перерізу b увійде товщина стінки d . Застосовність цієї формули для двотаврів обумовлена тим, що в розглядуваний період деформації напруги в полицях рівні границі текучості і, отже, в епюрах дотичних напруг, які являють собою різницю епюр нормальних напруг (ця різниця для полиць дорівнює нулеві), на протязі полиць будуть нульові дільниці.

*) Див. сс. 20 і 50 зазначеної у виводі 1 роботи.

Значення k для прямокутного перерізу — $k = 1$, а для двотаврового — в середньому $k = 0,78$. Отже одержимо:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) для прямокутного перерізу:} \\ Q_{\text{доп}} \leq 0,117 b \cdot h \cdot \sigma_{\text{дп}} \\ \text{б) для двотаврового перерізу:} \\ Q_{\text{доп}} \leq 0,15 b \cdot h \cdot \sigma_{\text{доп}} \end{array} \right\} \quad (28)$$

У Stüssi числові коефіцієнти трохи інші, а саме 0,13 і 0,16, що пояснюється тим, що він прийняв $\frac{3}{2} k = 1,40$ для прямокутника і $\frac{3}{2} k = 1,12$ — для двотавра відповідно до дійсної епюри напруг, одержаної за дійсною діаграмою рис. 34, а не за спрощеною діаграмою Prandtl-я. Отже, якщо поперечна сила Q „пружного“ розрахунку не перевищує величин, які визначаються рівняннями (28), то коефіцієнт безпеки конструкції, розрахований за „пластичною“ теорією, не буде меншим, ніж за прийнятим розрахунком. До цього в основному сходять виводи Stüssi, який відзначає, що врахування дотичних напруг має особливе значення для нерозрізних балок, де місія M_{max} і Q_{max} часто збігаються. Прийнята середня величина $\tau_{\text{max}} = 3,40 \frac{Q}{b \cdot h}$ значною мірою умовна і одержані результати вимагають дослідної перевірки, що Stüssi і відзначає.

Інтересно знайти аналітичні вирази дотичних напруг у різних стадіях деформації за границею текучості. Це легко зробити, якщо користуватись спрощеною діаграмою Prandtl-я, а не дійсною діаграмою, в якій дуже важко встановити аналітичну залежність, особливо для перехідної ділянки між σ_p і σ_s . Очевидно, що при спрощеній діаграмі епюри дотичних напруг послідовно матимуть вигляд, показаний на рис. 38. На цьому рисунку дані також епюри нормальних напруг і там, де $\sigma = \sigma_s$ дотичні напруги $r = 0$. Це безпосередньо виходить з того, що дотичні напруги визначаються різницею нормальних напруг двох нескінченно близьких перерізів. Якщо в деяких частинах цих перерізів є сталі напруги σ_s , то різниця їх, очевидно, дорівнює нулеві. Отже дотичні напруги мають місце тільки на протязі пружного ядра. Тому що закон зміни нормальних напруг у пружному ядрі такий самий, як взагалі в пружно-напруженому перерізі, тобто лінійний, то й закон зміни дотичних напруг теж буде відповідати законові змін дотичних напруг пружного стану. Для прямокутного перерізу — це буде парабола другого степеня (рис. 38). Максимальна дотична напруга становитиме:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F_e} \quad (29)$$

Тому що

$$F_e = b \cdot 2a, \quad \text{а} \quad \frac{2a}{h} = \alpha,$$

то

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h \cdot \alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\alpha \cdot F} \quad (29a)$$

Тут α — величина обернена величині α , прийнятій у Stüssi. Звичайно, з (29a) не виходить, що τ_{\max} змінюється обернено пропорційно α , тому що α — функція Q , що входить в чисельник. Дальше розв'язання задачі, тобто обчислення τ_{\max} для

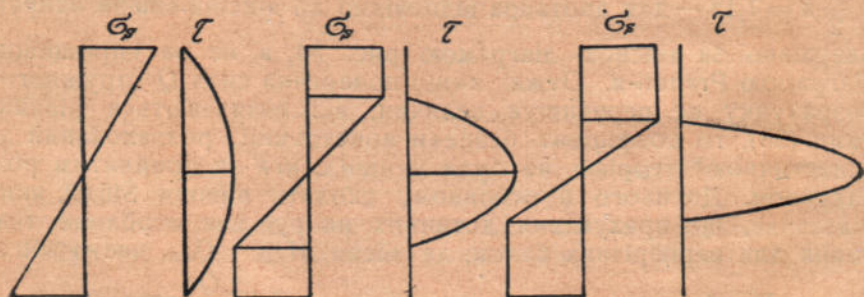


Рис. 38.

різних стадій деформацій, можливе тільки в кожному окремому випадку, при певній схемі балки і навантаження.

Розгляньмо кілька прикладів. Для випадку балки на двох опорах з тягарем посередині прогону, в будь якій стадії деформації, якщо тільки не порушено рівноваги,

$$M_{\max} = \frac{P \cdot l}{4} \quad \text{і} \quad Q_{\max} = \frac{P}{2}$$

Звідси маємо:

$$Q_{\max} = \frac{2M_{\max}}{l}$$

Раніш було одержано (с. 31) для пружно-пластичного стану

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

Отже

$$Q_{\max} = \frac{2\sigma_S \cdot T}{l} \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3\sigma_S \cdot T}{l \cdot F} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3}\right) \quad (30)$$

або

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} \right) \quad (30a)$$

При різних схемах балок і навантажень формула буде та сама, тільки змінюватиметься числовий коефіцієнт. Якщо балка навантажена двома симетричними силами P в третинах прогону, то замість $\frac{3}{4}$ буде $\frac{9}{8}$; для консолі з силою P на кінці буде $\frac{3}{8}$, а при суцільному рівномірному навантаженні P знов буде $\frac{3}{4}$ і т. д.

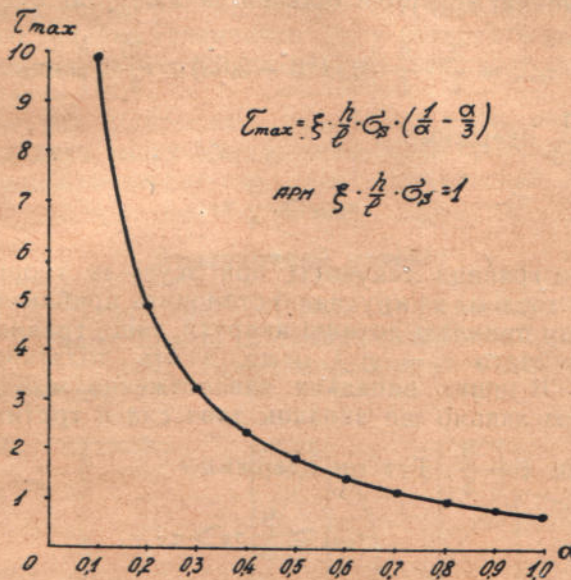


Рис. 39.

Тут розглядаються тільки випадки, коли Q_{\max} і M_{\max} — в одному перерізі. Це дає підставу узагальнити формулу (30a) у вигляді:

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} \right), \quad (30b)$$

де ξ — коефіцієнт, який залежить від розрахункової схеми. На рис. 39 побудований графік за (30b) при $\xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s = 1$.

Формула (30b) показує, що при $\alpha = 0$ $\tau_{\max} = \infty$.

Практичного значення цей результат не має, тому що в дійсності пружне ядро завжди лишається. Вище, при встановленні

поняття практичного граничного стану, ми виходили з величин моменту сил пружного ядра і знайшли залежність цього моменту від крайових деформацій (рис. 12). З'ясувалось, що граничний стан визначається деформаціями крайніх волокон порядку $\varepsilon_T = 1-2\%$. При такій деформації величина a пружного ядра визначається з співвідношення

$$\alpha = \frac{2a}{h} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_T}$$

Приймемо на основі викладеного вище $\alpha = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_T} = 0.1$, що відповідає величині ε_T трохи більшій за 1%; тоді одержимо:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S (10 - 0,03) \cong \frac{30}{4} \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S$$

При $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ одержимо

$$\tau_{\max} \cong \frac{3}{4} \sigma_S$$

Тому що границя текучості при зсуві за теорією міцності Mohr-a (і з дослідів на кручення) становить приблизно $\tau_S \cong 0,6 \sigma_S$ то в нашому прикладі дотичні напруги вище границі пружності (умовно прийнято $\tau_e = \tau_S$) і, отже, дають додаткові пластичні деформації. В інших випадках навантаження може вийти, що $\tau_{\max} < \tau_S$. Розгляньмо ще випадок двох сил в третирах прогонів

балки, коли $\xi = \frac{9}{8}$. Тут ми одержимо

$$\tau_{\max} \cong \frac{9}{8} \sigma_S > \tau_S$$

Ці приклади показують, що раніше, ніж буде досягнутий практичний граничний стан по нормальних напругах, почнеться помітна деформація в нейтральному шарі небезпечного перерізу. Як саме текучість зсуву вплине на роботу перерізу, який перебуває в пружно-пластичному стані, — з'ясувати без експериментального дослідження важко. Можна тільки сказати, що навряд чи пластичні деформації зсуву, які стались в будь-якому одному перерізі балки, можуть безперешкодно поширюватись вздовж балки. Цьому перешкоджають пружно напружені сусідні частини балки, вплив яких на пружно-пластичну частину незрівняно більший, ніж вплив останньої на пружні частини. Далі, можна висловити припущення, що пластичні деформації зсуву, зважаючи на їх відносно велику величину, дадуть таке викривлення плоского перерізу, що вже не буде підстав розглядати нормальні й дотичні напруги незалежно одні від одних,

тобго при дослідженні нормальних напруг треба буде врахувати викривлення перерізу. Нарешті, можна вважати, що наявність пластичних деформацій зсуву прискорить процес досягнення граничного стану перерізу. Дійсно, великі дотичні напруги, зустрічаючись на певній відстані від нейтральної осі з нормальними напругами, утворюють разом з ними головні напруги. При значній величині дотичних напруг головні нормальні напруги скоріше досягнуть границі текучості σ_S і, отже, весь процес утворення пластичного шарніру піде скоріше і буде закінчений при навантаженнях менших, ніж коли б дотичні напруги були невеликі або їх не було зовсім. Отже балка, розрахована за „пластичним“ методом з певним коефіцієнтом безпеки n_T , в дійсності матиме запас троти менший, ніж n_T . Тому в тих випадках, коли при досягненні практичного граничного стану виявляється, що $\tau_{\max} > \tau_S$, можна рекомендувати змінити переріз так, щоб τ_{\max} було не більше за τ_S .

Треба ще раз підкреслити, що тільки експериментальні дослідження дадуть змогу з'ясувати питання про вплив дотичних напруг на пружно-пластичний стан, спричинений нормальними напругами.

Двотавровий переріз

Розглянемо тільки випадок, коли пружне ядро не виходить за границі стінки. Епюри дотичних напруг в цьому випадку матимуть вигляд таких самих парабол, як і для прямокутних перерізів (рис. 40).

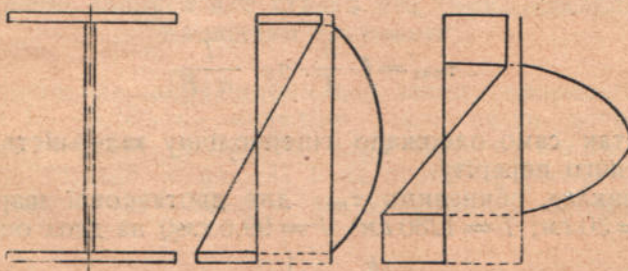


Рис. 40.

Отже, як і раніше

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{a \cdot F}$$

За (9), при $m = 0$, маємо:

$$M = \sigma_S \cdot \left(T - \frac{d \cdot a^2}{3} \right)$$

Для балки на двох опорах з силою посередині прогону:

$$Q = \frac{2M}{l}$$

Отже

$$\tau_{\max} = \frac{3\sigma_s \cdot \left(T - \frac{d \cdot a^2}{3} \right)}{\alpha \cdot F \cdot l} \quad (31)$$

Тут зручніше виключити α , замінивши його через $\frac{2a}{h}$. Тоді одержимо:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \frac{\left(T - \frac{d \cdot a^2}{3} \right)}{a \cdot F} \quad (31a)$$

Узагальнюючи для інших випадків навантаження, маємо:

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \frac{T - \frac{d \cdot a^2}{3}}{a \cdot F} \quad (31b)$$

Тому що в практичному граничному стані величина $\frac{d \cdot a^2}{3}$ дуже мала порівнюючи з T^* , то, відкинувши її, одержимо простіший вираз:

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \frac{T}{a \cdot F} \quad (32)$$

Отже так само одержано гіперболічну залежність, як і для прямокутного перерізу.

Як приклад, обчислимо τ_{\max} для двотаврової зварної балки № 30 ($h = 30$ см; $T = 1230$ см³, $F = 99,6$ см²) на двох опорах з силою посередині прогону. $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$; практичний граничний стан визначаємо відношенням

$$\alpha = \frac{2a}{h} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_l} \approx \frac{1}{10},$$

*) Для розгляненого вище прямокутного перерізу величина $\frac{a}{3}$ також мала порівнюючи з $\frac{1}{a}$, але не такою мірою, як для перерізу двотаврового.

Тобто

$$a = \frac{h}{20}; \quad \xi = \frac{3}{2}$$

для даного випадку навантаження.

Отже одержимо:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \sigma_S \cdot \frac{1230 \cdot 20}{30 \cdot 99,6} = 1,23 \sigma_S > \tau_S$$

На основі (32) можна знайти те значення a , при якому τ_{\max} не перевищує $\tau_S = 0,6 \sigma_S$. Для розглядуваного прикладу одержимо $a \cong \frac{h}{10}$. Тому що навіть при $a = \frac{h_1}{2}$ опір двотаврового перерізу вже майже цілком вичерпаний, то вплив пластичних деформацій зсуву на практичний граничний стан для двотаврових перерізів невеликий. Хоч цей результат одержано на одному числовому прикладі, але є підстави узагальнити його, поширивши на двотаврові перерізи. Таким чином, до експериментальної перевірки, можна висловити припущення, що двотаврові перерізи, розраховані за „пластичною“ теорією, не потребують додаткової перевірки на перехід дотичними напругами границі текучості. Звичайну ж перевірку „пружного“ розрахунку, зрозуміло, зробити треба.

Дотичні напруги для сталей без горизонтальної площадки текучості

Для нормальних напруг приймаємо закон деформацій, згідно з рис. 15 і 18. Спочатку виведемо закон зміни дотичних напруг за границями пружного ядра для прямокутного перерізу. Згідно з рис. 41 і на основі формули (24) для дотичних напруг на віддалі z від нейтральної осі можна написати:

$$\tau = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1;$$

$$\sigma_{z_1} = \sigma_S + \sigma'_{z_1};$$

отже

$$\Delta \sigma_{z_1} = \Delta \sigma'_{z_1}$$

Раніше було знайдено, що

$$\sigma'_{z_1} = (\varepsilon_{z_1} - \varepsilon_S) \cdot E,$$

отже

$$\Delta \sigma'_{z_1} = E_1 \cdot \Delta \varepsilon_{z_1}$$

За рис. 42 а і б одержуємо:

$$\frac{\varepsilon_{z_1}}{\varepsilon_S} = \frac{z_1}{a} \quad \text{і} \quad \frac{\varepsilon_{z_1} + \Delta \varepsilon_{z_1}}{\varepsilon_S} = \frac{z_1}{a - \Delta a}$$

Звідси:

$$\Delta \varepsilon_{z_1} = \varepsilon_{z_1} \cdot \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_{z_1} \cdot z_1 \cdot \frac{\Delta a}{a^2}$$

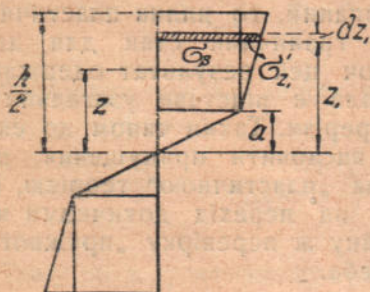


Рис. 41.

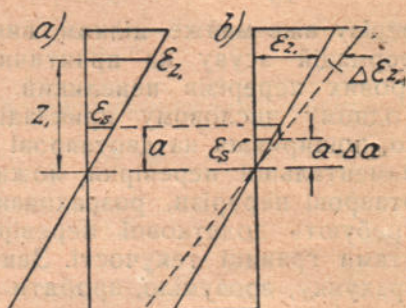


Рис. 42.

Отже:

$$\tau_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_1 \cdot \varepsilon_S \cdot z_1 \cdot \frac{\Delta a}{a^2} \cdot \frac{dz_1}{\Delta x} = E_1 \cdot \frac{\varepsilon_S}{a^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_1 \cdot dz_1$$

Після інтегрування і заміни $\varepsilon_S = \frac{\sigma_S}{E}$ одержуємо:

$$\tau_x = \sigma_S \cdot \frac{m}{a^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33)$$

Як бачимо, у формулу τ_x входить відношення приростів $\frac{\Delta a}{\Delta x}$, яке може бути знайдене тільки з розгляду кривої, що обмежує зону текучості. Рівняння цієї кривої залежить від схеми балки і навантаження.

Розглянемо випадок балки на двох опорах з силою P в середині прогону (рис. 43). З умов статички і за рівнянням (5) одержимо:

$$M = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

Замінивши в цьому рівнянні граничної кривої зони текучості $\alpha = \frac{2a}{h}$ і зробивши диференціювання по x , одержимо:

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{P}{2} = \sigma_s \cdot T \cdot \left[-\frac{8a}{3h^2} + \frac{m}{3} \cdot \left(-\frac{h}{a^2} + \frac{8a}{h^2} \right) \right] \cdot \frac{da}{dx}$$

Тому що границя відношення приростів дорівнює похідній, ми маємо право, визначивши з написаного вище виразу $\frac{da}{dx}$,

підставити його в (33). В даному прикладі $\frac{P}{2} = Q$. Величину

$$\left[\frac{8a}{3h^2} - \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{8a}{h^2} - \frac{h}{a^2} \right) \right]$$

позначаємо C . Тоді одержуємо:

$$\tau_z = \frac{m}{2a^2} \cdot \frac{Q}{T \cdot C} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33a)$$

Як видно з цього рівняння, дотичні напруги в даному випадку змінюються за законом параболи другого степеня, як і в пружній зоні. Якщо T виразити через J , тобто

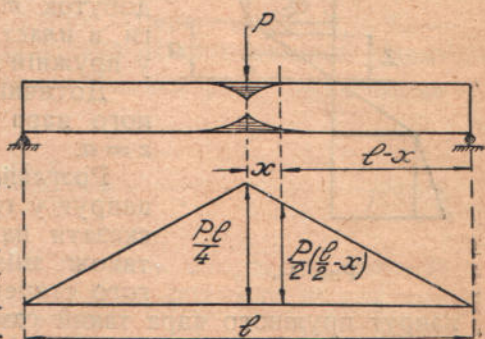


Рис. 43.

$$T = \frac{3}{2} W = \frac{3}{2} \cdot \frac{J \cdot 2}{h} = \frac{3 \cdot J}{h},$$

то рівняння (33a) набере вигляду:

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot \frac{h}{3a^2 \cdot C} = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot x \quad (33b)$$

Тут

$$S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

— статичний момент частини перерізу, яка лежить вище z . Отже дотичні напруги в пластичній зоні, при прийнятому законі деформації, різняться від дотичних напруг у пружній зоні балки множниками m і κ , який дорівнює

$$\kappa = \frac{h}{3a^2 \cdot \left[\frac{8a}{3h^2} - \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{8a}{h^2} - \frac{h}{a^2} \right) \right]} = \frac{1}{\alpha^3 - m \cdot (\alpha^3 - 1)}$$

При $\alpha = 1$, $\kappa = 1$ (m також повинне дорівнювати одиниці) і формула (33b) набирає звичайного вигляду:

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b}$$

При $\alpha < 1$ коефіцієнт κ завжди буде більше одиниці. Дотичні напруги в пластичній зоні можуть бути більші або менші від дотичних напруг при пружно напруженому стані, залежно від величини добутку $m \cdot \kappa$. При звичайних значеннях m добуток $m \cdot \kappa < 1$ і, отже, дотичні напруги в пластичній зоні відносно менші, ніж у пружній зоні.

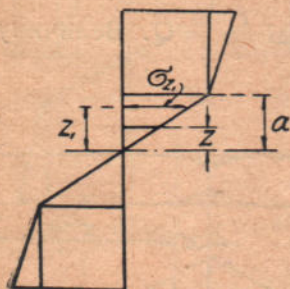


Рис. 44.

Дотичні напруги коло границі пружного ядра одержимо, вставивши в (33a) $z = a$.

Розгляньмо тепер закон зміни дотичних напруг у границях пружного ядра. Можна сказати наперед, що тут ми одержимо також зміну напруг за параболою другого степеня, тому що закон нормальних напруг пружного ядра такий самий, як і в перерізі, напруженому цілком пружно. За рис. 44 можна написати:

$$\tau_{z_1} = \int_z^a \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1 + \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1$$

Другий інтеграл, згідно з попереднім, дорівнює:

$$m \cdot \frac{Q \cdot S_a}{J \cdot b} \cdot \kappa$$

Приріст:

$$\Delta \sigma_{z_1} = E \cdot \Delta \varepsilon_{z_1}$$

Величина $\Delta\varepsilon_{z_1}$, як і раніше, буде:

$$\Delta\varepsilon_{z_1} = \varepsilon_S \cdot \frac{z_1}{a^2} \cdot da,$$

що очевидно з розгляду рис. 42, на якому $z_1 > a$. Якщо ж $z_1 < a$, то результат, однаково, буде такий самий. Отже маємо:

$$\Delta\sigma_{z_1} = E \cdot \varepsilon_S \cdot \frac{z_1}{a^2} \cdot da = \sigma_S \cdot \frac{z_1}{a^2} \cdot da$$

Зробивши ті самі дії і перетворення, як і раніш, ми, очевидно, одержимо:

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S_z^a}{J \cdot b} \cdot \chi + m \cdot \frac{Q \cdot S_a}{J \cdot b} \cdot \chi,$$

або

$$\tau_z = \frac{Q}{J \cdot b} \cdot (S_z^a + m \cdot S_a) \cdot \chi \quad (34)$$

Тут S_z^a — статичний момент частини перерізу між z і a , а S_a — те саме для всієї частини перерізу, яка лежить вище a . Називаючи $S_z^a + m \cdot S_a$ зведеним статичним моментом і позначаючи його S'_z , одержимо:

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot b} \cdot \chi \quad (34a)$$

Тут розглянено випадок балки на двох опорах з силою P в середині прогону. Очевидно, одержані формули можна поширити і на інші випадки навантажень, тому що для знаходження $\frac{da}{dx}$ треба було диференціювати рівняння моменту по x , що, як відомо, дає значення Q , незалежно від схеми балки і навантаження.

На рис. 45 як приклад побудована епюра τ для прямокутного перерізу при $\alpha = 0,5$ і $m = 0,10$. Написані на рисунку числові значення одержані при

$$\frac{6Q \cdot \chi}{b \cdot h} = 1$$

Для двотаврового перерізу значення дотичних напруг в за гальному вигляді одержимо таке саме, тільки χ буде інше. Справді, на рис. 46 для напруг у стінці маємо:

$$d \cdot \tau_z = \int_z^{\frac{h_1}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot d \cdot dz_1 + \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot b \cdot dz_1 = \sigma_S \cdot \frac{m}{a^2} \cdot S_z \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x}$$

З рівняння (9) знаходимо:

$$\frac{dM}{dx} = Q = \left\{ \frac{2}{3} d \cdot a - m \left[-\frac{T \cdot h}{3a^2 \cdot k} + \frac{2}{3} d \cdot a \right] \right\} \cdot \sigma_S \cdot \frac{da}{dx}$$

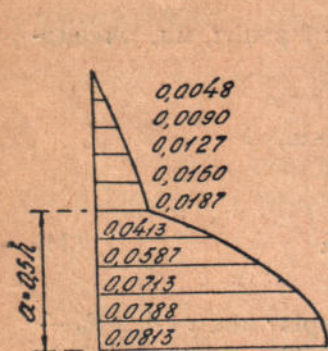


Рис. 45.

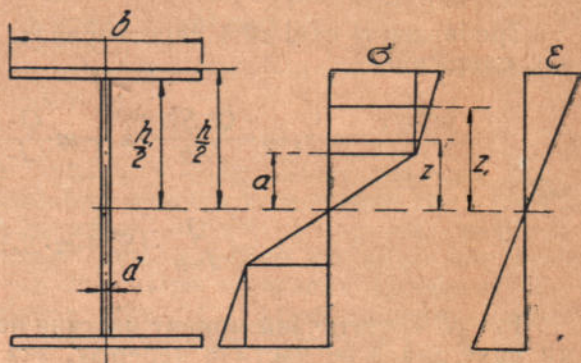


Рис. 46.

Тут, як і для прямокутного перерізу при диференціюванні, у правій частині змінено знак на супротивний (тобто замість da взято $-da$), тому що з зростанням M a спадає. Позначаючи вираз у дужках через C , одержимо:

$$\frac{da}{dx} = \frac{Q}{\sigma_S \cdot C}$$

і

$$\tau_z = \frac{m \cdot Q \cdot S_z}{d \cdot a^2 \cdot C}$$

або

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - m \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - 1 \right)} = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \cdot \chi_1 \quad (35)$$

Аналогічно можна вивести напруги τ в границях полиці і в границях пружного ядра, при чому в останньому випадку одержимо формулу за аналогією з (34а):

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \cdot \chi_1$$

Інтересна величина дотичних напруг у граничному стані. Для сталей з горизонтальною площадкою текучості теоретичні значення $\tau_{\max} = \infty$. Якщо ж немає такої площадки, то при повному зниканні пружного ядра ($a \leq 0$ або $\alpha = 0$) τ_{\max} не перетворюється на нескінченність. Справді, для прямокутного перерізу, при

$$\chi = \frac{1}{\alpha^3 - m(\alpha^3 - 1)} = \frac{1}{m},$$

одержимо за (34а):

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot b \cdot m} \quad (36)$$

Для двотаврового ж, при

$$\chi_1 = \frac{1}{\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - m \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - 1 \right)} = \frac{1}{m},$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot d \cdot m} \quad (37)$$

В дійсності в прийнятому практичному граничному стані пружне ядро не зникає, і тому χ і χ_1 будуть трохи менші, тобто τ_{\max} — трохи більше. Якщо, наприклад, $m = 0,01$, то при $\alpha = 0,1$ (таке значення приблизно відповідає практичному гранич-

ному станові) одержимо $\chi = \frac{1}{0,01099}$ замість $\chi = \frac{1}{0,01}$ при $\alpha = 0$.

Формули (36) і (37) перетворюються на звичайні формули, які відповідають пружному напруженому станові, якщо нехтувати дуже малою величиною статичного моменту, яка відповідає пружному ядру, або, точніше кажучи, замість величини

цього статичного моменту S_z^a прийняти величину $S_z^a \cdot m$. Тоді

$$S'_z = m \cdot S,$$

де S — статичний момент половини перерізу.

Для прямокутника одержимо:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot b}, \quad (36a)$$

а для двотавра:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S}{J \cdot d} \quad (37a)$$

Отже перевірка дотичних напруг граничного стану надзвичайно спрощується. Формули (36) і (37) показують, що при прийнятому законі деформації роль дотичних напруг значно менша, ніж при наявності горизонтальної площадки текучості.

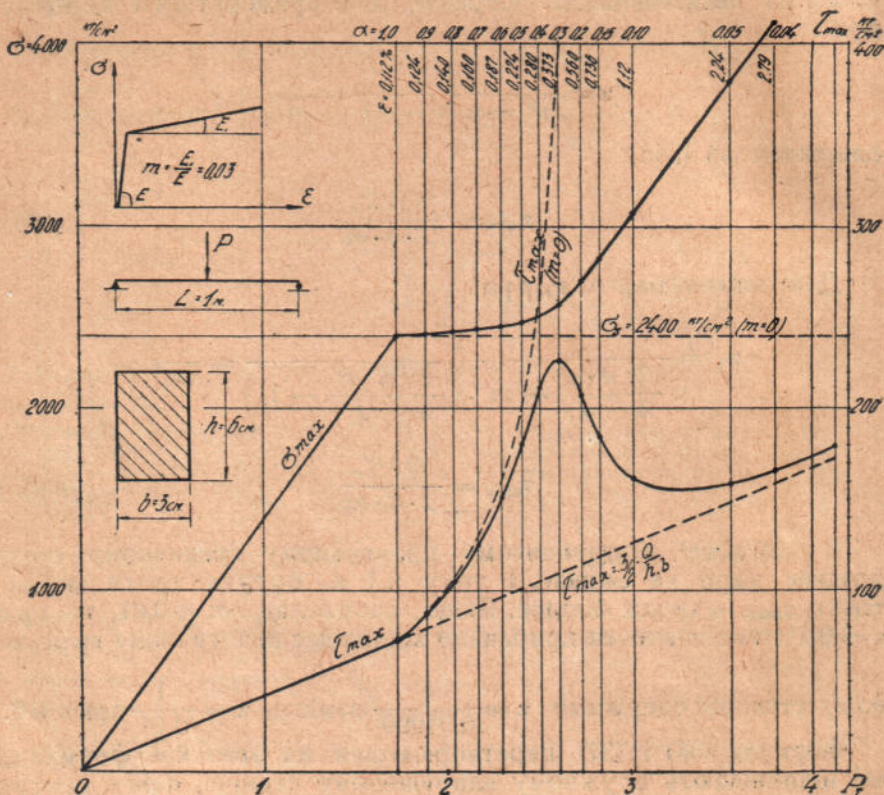


Рис. 47.

Це наочно пояснюється рис. 47, на якому нанесені криві σ_{\max} і τ_{\max} у функції навантаження P для окремого випадку балки на двох опорах з силою P в середині прогону. Прогін балки $L = 1 \text{ м}$, переріз $b \cdot h = 3 \cdot 6 \text{ см}$. Границя текучості прийнята $\sigma_S = 2400 \text{ кг/см}^2$. Суцільною лінією — для $m = 0$. Масштаб τ_{\max} в 10 разів більший за масштаб для σ_{\max} . На верхній горизонтальній осі показані значення відносної висоти пружного ядра α і деформації крайніх волокон ϵ . Для сталі з $m = 0,03$ обчислення провадились за такими формулами:

$$P = \frac{4M}{l} = \frac{4}{l} \cdot \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

[див. формулу (5)].

$$\sigma_{\max} = \sigma_S + \sigma' = \sigma_S \cdot \left[1 + m \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] \quad (38)$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S'}{J \cdot b} \cdot \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \frac{\alpha^2 (1-m) + m}{\alpha^3 \cdot (1-m) + m} \quad (39)$$

[див. формулу (34a)]. Вставляючи в ці формули значення α , одержимо величини P і відповідні їм σ_{\max} і τ_{\max} . При обчисленні τ_{\max} замість Q підставляється половина відповідного значення P . При $m=0$ (горизонтальна площадка текучості) користуємось тими самими формулами (38) і (39), які дають в цьому випадку

$$\sigma_{\max} = \sigma_S$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h \cdot \alpha}$$

Остання формула одержана була раніше з безпосереднього розгляду сталі з площадкою текучості [див. формулу (29a)].

На рис. 47 ясно видно, що при $m \neq 0$ роль дотичних напруг менша, ніж при $m=0$. Справді, в останньому випадку вже при невеликих значеннях ε , τ_{\max} швидко зростають і прямують до нескінченності. Якщо ж $m \neq 0$, то крива τ_{\max} , досягнувши певного максимуму, швидко спускається і прямує до збігу з прямою (пунктир на рис. 47), рівняння якої:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

Якщо при горизонтальній площадці текучості врахувати даліше зміцнення матеріалу, то дотичні напруги, досягнувши максимуму в кінці площадки текучості, почнуть спалати з зростанням нормальних напруг. Для такого випадку Stüssi побував наведені вище (рис. 37) діаграми.

Дотичні напруги при параболічному законі деформації

Для ділянки II діаграми деформацій приймемо, як і при виводі нормальних напруг, такий закон деформацій (рис. 26):

$$\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p}$$

Дотичні напруги в пластичній зоні (для прямокутного перерізу) становлять:

$$\tau_z = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1,$$

де

$$\Delta\sigma_{z_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot d\varepsilon_z}{\sqrt{\varepsilon_{z_1} - \varepsilon_p}}$$

Тому що гіпотезу плоских перерізів ми приймаємо і для цього випадку, то лишаються в силі одержані в попередньому розділі значення:

$$d\varepsilon_{z_1} = \varepsilon_p \cdot z_1 \cdot \frac{\Delta a}{a^2} \quad \text{і} \quad \varepsilon_{z_1} = \varepsilon_p \cdot \frac{z_1}{a}$$

Отже

$$\tau_z = \frac{n \cdot \sqrt{\varepsilon_p}}{2 \cdot i^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{z_1 \cdot dz_1}{\sqrt{\frac{z_1}{a} - 1}}$$

Після інтегрування одержимо:

$$\tau_z = \frac{1}{3} n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left[\left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} - \left(\frac{z}{a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{z}{a} - 1} \right] \quad (40)$$

На границі пластичної і пружної частин перерізу, тобто при $z = a$, одержимо:

$$\tau_z = \frac{1}{3} n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} \quad (41)$$

Дотичні напруги в границях пружного ядра

$$\tau_z = \int_z^a \frac{\Delta\sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1 + \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta\sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1$$

Після інтегрування і перетворень маємо:

$$\tau_z = \frac{\sigma_p}{a^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} (a^2 - z^2) + \frac{1}{3} n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} \quad (42)$$

Для визначення $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ користуємось рівнянням моменту, в даному випадку рівнянням (20). Зробивши диференціювання цього рівняння, одержимо:

$$\frac{\Delta a}{\Delta x} = \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha \cdot \sigma_p}{3} + \frac{2n}{15} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \cdot \left(\frac{3}{2\alpha} + 2 + 4\alpha\right)}$$

Підставивши це значення $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ в (42), одержимо закон зміни τ_z по висоті перерізу. Нас інтересує головню τ_{\max} , яке має місце при $z=0$. Для цього випадку матимемо:

$$\tau_{\max} = \frac{\frac{\sigma_p}{2} + \frac{n}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + 2\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}}{\frac{\alpha \cdot \sigma_p}{3} + \frac{2n}{15} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1} \cdot \left(\frac{3}{2\alpha} + 2 + 4\alpha\right)} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

$$\tau_{\max} = \frac{15\alpha \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 10n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (1 + 2\alpha) \cdot \sqrt{1 - \alpha}}{10\alpha^2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 2n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (3 + 4\alpha + 8\alpha^2) \cdot \sqrt{1 - \alpha}} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (43)$$

В граничному стані, коли α прямує до нуля, одержимо:

$$\tau_{\max} = \frac{5}{3} \frac{Q}{b \cdot h} \quad (44)$$

Отже тут τ_{\max} в граничному стані має відносно більшу величину, ніж у попередньому випадку. Разом з тим, крива τ_{\max} у функції P має не так різко виявлений шпиль порівнюючи з кривою рис. 47. На рис. 48 побудовані криві σ_{\max} і τ_{\max} для тої самої балки, що і на рис. 47. Ці криві побудовані при $\sigma_p = 2800 \text{ кг/см}^2$, $n = 12500 \text{ кг/см}^2$ (відповідно до рис. 1b і 31) за такими рівняннями, одержаними після перетворень і підставлення числових значень рівнянь (20), (43) і $\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_p}$:

$$P = 1008 \cdot (3 - \alpha^2) + 7,2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}\right)^3$$

$$\sigma_{\max} = 2800 + 450 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

$$\tau_{\max} = \frac{P}{36} \cdot \frac{420\alpha \cdot \sqrt{\alpha} + 45(1 + 2\alpha) \cdot \sqrt{1 - \alpha}}{280\alpha^2 \cdot \sqrt{\alpha} + 9(3 + 4\alpha + 8\alpha^2) \cdot \sqrt{1 - \alpha}}$$

Розглянені на рис. 47 і 48 приклади показують, що співвідношення нормальних і дотичних напруг порушується в пружно-пластичній зоні значно більше, ніж у пружній. Сповільнення росту нормальних напруг зв'язане з різким зростанням дотичних напруг; спостережуване далі прискорення росту нормальних

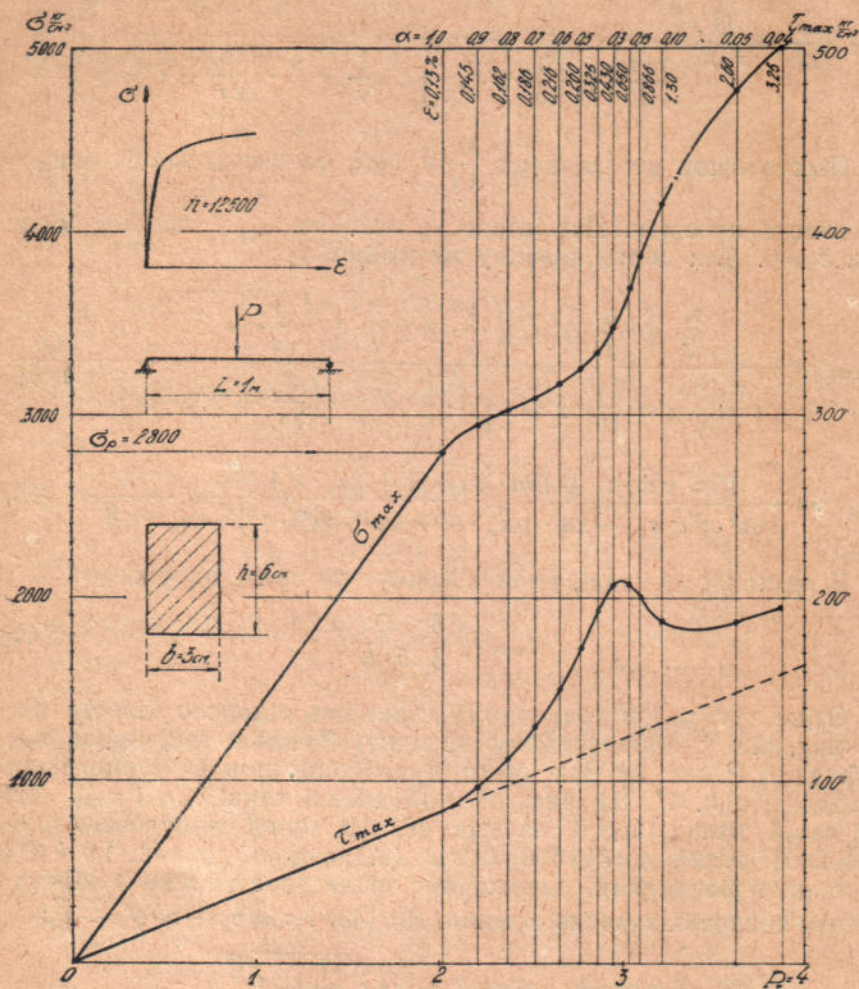


Рис. 48.

напруг спричиняє зниження дотичних напруг. Звідси виходить, що закон зміни головних напруг у функції навантаження повинен істотно різнитись від такого ж закону при пружно напруженому стані і тому інтересно дослідити ці напруги в пружно-пластичній зоні.

Обчислення головних напруг у будьякій точці пластичної частини перерізу, при будьякій стадії навантаження не становить труднощів, тому що зберігають силу звичайні формули головних напруг пружно напруженого стану:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

i

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Замість σ і τ вставляються їх значення, обчислені за формулами (для прямокутного перерізу):

$$\sigma = \sigma_s \cdot \left[1 + m \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right) \right]$$

$$\tau = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot x$$

або

$$\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right)}$$

$$\tau = \frac{n}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left[\left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} - \left(\frac{z}{a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{z}{a} - 1} \right],$$

залежно від закону деформації дільниці II деформації. Якщо нас буде інтересувати величина головних напруг у будьякому перерізі залежно від зміни величини навантаження, то за рівняннями (5) або (20) визначаємо навантаження P , задавшись α , а далі при тих самих значеннях α обчислюємо σ , τ і, нарешті,

σ_{\min}^{\max} і τ_{\max} .

Якщо ж нас цікавить зміна головних напруг по довжині балки в пружно-пластичній зоні, то, користуючись тими самими рівняннями, треба враховувати, що величина α є функція x (рис. 43). Задавшись значенням α в одному перерізі, наприклад, в середині балки, з рівняння моменту визначаємо навантаження P і далі за тим самим рівнянням моменту при одержаному P , але при відповідному значенні x , знаходимо α для перерізу, який визначається цією величиною x . Розв'язок задачі головних напруг у загальному вигляді виходить дуже складний, і тому в кожному окремому випадку дослідження треба проводити в числових значеннях.

3. Складний опір — згин з поздовжньою силою

Розглядаємо прямокутний переріз. Деформація волокон припущена згідно з рис. 15. На рис. 49 наведені всі дані для знаходження залежності між M і N у пружно-пластичному стані. Для розв'язання задачі складаємо такі рівняння:

1) $2a + e_1 + e_2 = h$.

2) Сума проєкцій на вісь балки зовнішніх і внутрішніх зусиль дорівнює нулеві. В остаточному вигляді одержимо:

$$N = \sigma_s \cdot b \cdot (e_2 - e_1) \cdot \left\{ 1 + \frac{m}{2a} \cdot (e_1 + e_2) \right\}$$

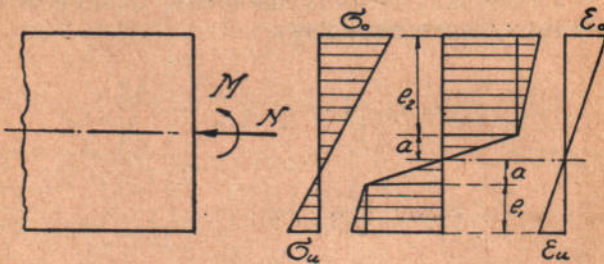


Рис. 49.

3) Сума моментів внутрішніх і зовнішніх сил дорівнює нулеві. Остаточний вигляд рівняння буде такий:

$$M + N \cdot \left(\frac{h}{2} - a - e_1 \right) = \frac{2}{3} \sigma_s \cdot a^2 \cdot b + \sigma_s \cdot b \cdot \left\{ e_2 \cdot \left(a + \frac{e_2}{2} \right) + e_1 \cdot \left(a + \frac{e_1}{2} \right) \right\} + \sigma_s \cdot \frac{b \cdot m}{2a} \cdot \left\{ e_2^2 \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_2 \right) + e_1^2 \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_1 \right) \right\}$$

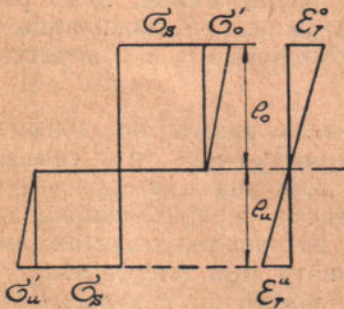


Рис. 50.

Виключаючи e_1 і e_2 , одержимо залежність між M і N , аналогічно з тим, як одержав її Girkmann для сталі з горизонтальною площадкою текучості. У загальному вигляді розв'язок виходить досить громіздкий.

Граничним станом вважаємо, як і у випадку простого згину той, при якому опір пружного ядра можна вважати практично вичерпаним. Нехтуючи опором цього ядра, одержимо епюру напруг, подану на рис. 50.

При дослідженні простого згину ми виходили з величин деформацій у крайніх волокнах, при яких можна вже не рахуватись з опором пружного ядра (рис. 12).

Для складного опору так само, як і при простому згині несиметричних перерізів, задача ускладнюється тим, що деформації крайніх волокон різні. Треба було б і тут побудувати діаграми, аналогічні рис. 12, за якими можна було б з'ясувати величини крайових деформацій, які відповідають практичній втраті опору пружного ядра. Такі діаграми довелося би побудувати для різних співвідношень M і N .

Не ставлячи собі метою дати в цій роботі цілковите розв'язання питання, обмежмося розглядом задачі в загальному вигляді, прийнявши, що граничному стані відповідають якісь величини граничних деформацій ε_T^0 і ε_T^u . За рис. 50 знаходимо:

$$M + N \cdot \left(\frac{h}{2} - e_1 \right) = \frac{\sigma_S \cdot b}{2} \cdot (e_2^2 + e_1^2) + \sigma'_0 \cdot \frac{b \cdot e_2^2}{3} + \sigma'_u \cdot \frac{b \cdot e_1^2}{3}$$

За рис. 15, так само, як і для простого згину, маємо:

$$\sigma'_0 = \sigma_S \cdot m \cdot \left(\frac{\varepsilon_T^0}{\varepsilon_S} - 1 \right) \quad \text{і} \quad \sigma'_u = \sigma_S \cdot m \cdot \left(\frac{\varepsilon_T^u}{\varepsilon_S} - 1 \right)$$

Для спрощення позначмо величини, які стоять у дужках, відповідно c_1 і c_2 . Величини e_1 і e_2 одержимо з рівнянь:

$$1) \quad e_1 + e_2 = h$$

$$2) \quad N = \sigma_S \cdot b \cdot (e_2 - e_1) + \frac{b}{2} \cdot (\sigma'_0 \cdot e_2 - \sigma'_u \cdot e_1)$$

Розв'язуючи відносно e_1 і e_2 , одержуємо:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2h - \frac{2N}{b \cdot \sigma_S} + m \cdot c_1 \cdot h}{4 + m \cdot (c_1 + c_2)} \\ e_2 &= \frac{2h + \frac{2N}{e \cdot \sigma_S} + m \cdot c_2 \cdot h}{4 + m \cdot (c_1 + c_2)} \end{aligned} \quad (45)$$

Вставляємо ці значення e_1 і e_2 в рівняння моментів; після перетворень одержуємо:

$$\begin{aligned} M + \frac{4N^2}{3b \cdot \sigma_S} \cdot \frac{3 + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2)}{\left(4 + m \cdot (c_1 + c_2) \right)^2} = \\ = \frac{N \cdot h \cdot m \cdot (c_1 - c_2)}{\left(4 + m \cdot (c_1 + c_2) \right)^2} \cdot \left\{ \frac{2}{3} + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2) \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_S}{\{4 + m \cdot (c_1 + c_2)\}^2} \cdot \left\{ 4 + m(c_1 + c_2) \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{m^2 \cdot c_1 \cdot c_2}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \cdot \left(c_1^2 + c_2^2 + \frac{16}{3} c_1 \cdot c_2 \right) \right\} \quad (46)$$

Це рівняння дає залежність між M і N в граничному стані, — як видно, залежність досить складну. З цього рівняння можна одержати окремий розв'язок для сталі з горизонтальною плошадкою текучості, якщо покласти $m = 0$, а саме:

$$M + \frac{N^2}{4b \cdot \sigma_S} = \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot \sigma_S,$$

що збігається з рівнянням Girkmann-а (див. першу частину нашої роботи, с. 35)

$$h^2 - \frac{N^2}{\sigma_S^2} - \frac{4M}{\sigma_S} = 0,$$

виведеним для $b = 1$.

Для практичного користування рівняння (46) надзвичайно незручне. Розв'язання значно спростилося би, якби для різних сортів сталі ввести у формулу (46) числові значення c_1 , c_2 , і m . Зроблене в числах дослідження рівняння (46) показує, що коефіцієнт при N^2 змінюється дуже мало при різних співвідношеннях c_1 і c_2 . Наприклад, при $c_1 : c_2 = 1$ і $c_1 : c_2 = 6$ цей коефіцієнт змінюється лише на 6,5%. Коефіцієнт при N взагалі дуже малий, бо він визначається різницею $c_1 - c_2$. Останній член правої частини рівняння змінюється при цьому досить значно — на 25%. Дослідження проведене при $m = 0,0,3$.

Ці дані показують, що можна без великої похибки нехтувати членом, який містить N в першому степені. Крім того, враховуючи, що при різних співвідношеннях c_1 до c_2 (або ϵ_T^0 до ϵ_T^u) члени, які залежать від цих коефіцієнтів, змінюються не так значно, можна для наближеного розв'язання ввести відношення $c_1 : c_2$, яке відповідає певним середнім умовам. При числовому дослідженні прийняті були відношення $\epsilon_T^0 : \epsilon_T^u$ від одиниці до чотирьох. Якщо, наприклад, прийняти це відношення 2,5 і граничний стан визначити відношенням $\epsilon_T^0 : \epsilon_S = 10$, то одержимо $c_1 = 9$ і $c_2 = 3$. Тоді рівняння (46) матиме простіший вигляд:

$$M + \frac{N^2}{4 \cdot b \cdot \sigma_S} \cdot \frac{1 + 2m}{(1 + 3m)^2} = \\ = \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_S}{(4 + 12m)^2} \cdot (4 + 40m + 117m^2 + 108m^3), \quad (46a)$$

Тут ми нехтували членом, який залежить від $(c_1 - c_2)$. Це наближене рівняння дає відносно точні результати для випадків, коли деформації крайніх волокон різняться одна від одної не дуже значно. Порядок розрахунку такий: момент і нормальну силу граничного стану вставляємо в рівняння (46a) і, задавшись відношенням $b:h$, визначаємо з рівняння один з розмірів перерізу. Для двотаврового перерізу розв'язання буде ще складніше, ніж для прямокутного.

Якщо згиніві з стиском піддані довгі стержні, то, звичайно, дослідження не може бути зроблене без розгляду питань стійкості. Задачі стійкості являють собою самостійну галузь і тут не розглядаються.

4. Порівнення відносної вигідності перерізів різної форми у випадку згину

У розділі I було показано, що для випадку сталей без площадки текучості перерізи, як прямокутні, так і двотаврові, виходять при розрахунку за „пластичною“ теорією менші, ніж для сталей з площадкою текучості. Разом з тим відносна вигідність різних перерізів при „пластичній“ теорії змінюється, зокрема двотаврові перерізи стають відносно менш вигідними порівнюючи з прямокутними, якщо порівнювати з даними розрахунку за „пружною“ теорією.

Як відомо, вигідність перерізу, який працює на згин, вимірюється величиною радіуса ядра перерізу, тобто величиною

$$r = \frac{W}{F}$$

Для прямокутного перерізу $r = 0,167h$, де h — висота перерізу. Далі будемо при порівненнях користуватись повною довжиною ядра перерізу, тобто $2r$. Отже для прямокутника

$$2r = 0,333 h$$

Для різних номерів і типів двотаврових перерізів відношення довжини ядра перерізу до висоти перерізу не є величиною сталою, але коливання цього відношення порівнюючи невеликі. В табл. 3 дані значення $2r:h$, при чому середні значення виведені як середнє арифметичне із значень для всіх номерів даного сортаменту (для зварних дровтарів обчислення зроблені за даними, наведеними на с. 23 першої частини нашої роботи).

Таблиця 3

Сортамент 1926 р.			Сортамент 1932 р.			Зварні двотаври					
№ 10	№ 45	Серед-не	№ 10	№ 60	Серед-не	№ 18	№ 60	Серед-не	№ 70	№ 100	Серед-не
0,654	0,617	0,630	0,685	0,578	0,625	0,755	0,687	0,736	0,606	0,585	0,588

Називаючи коефіцієнтом відносної вигідності перерізу ζ_e відношення довжин ядра перерізу різних перерізів при однаковій їх висоті, одержимо такі значення його для різних типів двотаврів:

$$\text{Сортамент 1926 р. } \zeta_e = \frac{0,630}{0,333} = 1,89$$

$$\text{Сортамент 1932 р. } \zeta_e = \frac{0,625}{0,333} = 1,88$$

$$\text{Зварні двотаври № 18—60 } \zeta_e = \frac{0,736}{0,333} = 2,21$$

$$\text{Зварні двотаври № 70—100 } \zeta_e = \frac{0,588}{0,333} = 1,77$$

Тут відносна вигідність оцінена відносно прямокутного перерізу.

Аналогічне порівняння можна зробити і з погляду „пластичної“ теорії.

Розгляньмо спочатку випадок ідеально пластичного матеріалу. Одержані при цьому дані, як відомо, можна застосувати без великої похибки для перерізів з м'якої сталі з добре розвинутою площадкою текучості. Критерієм вигідності перерізу тут також будемо вважати подвоєне відношення „пластичного“ моменту опору T до площі перерізу F , тобто довжину „пластичного“ ядра перерізу. Звичайно, тут ця величина не має того значення, яке властиве ядру перерізу, наприклад, у задачах складного опору при розрахунку за „пружною“ теорією, але як характеристика відносної вигідності перерізу є рівноцінна характеристичі за „пружною“ теорією.

Для прямокутного перерізу

$$2r_p = \frac{2T}{F} = 0,500 h$$

Як видно, відносна вигідність прямокутного перерізу з погляду „пластичної“ теорії підвищується.

Для двотаврових перерізів значення $\frac{2r_p}{h}$ зведені в табл. 4.

Таблиця 4

Сортамент 1926 р.			Сортамент 1932 р.			Зварні двотаври					
№ 10	№ 45	Серед- не	№ 10	№ 60с	Серед- не	№ 18	№ 60	Серед- не	№ 70	№ 100	Серед- не
0,762	0,725	0,736	0,795	0,680	0,731	0,833	0,771	0,815	0,706	0,690	0,694

Для прокатних двотаврів середні значення обчислені за середнім значенням $k \cong 0,78$, користуючись виразом

$$2r_p = \frac{2T}{F} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} k \cdot W}{F} = 1,17 \cdot 2r,$$

а для зварних двотаврів — за дійсними значеннями k для кожного нумера.

За цими даними одержуємо такі значення коефіцієнтів відносної вигідності відносно прямокутного перерізу:

$$\text{Сортамент 1926 р. } \zeta_p = \frac{0,736}{0,500} = 1,47$$

$$\text{Сортамент 1932 р. } \zeta_p = \frac{0,731}{0,500} = 1,46$$

$$\text{Зварні двотаври № 18 — 60 } \zeta_p = \frac{0,815}{0,500} = 1,63$$

$$\text{Зварні двотаври № 70 — 100 } \zeta_p = \frac{0,694}{0,500} = 1,39$$

Отже при „пластичній“ теорії співвідношення вигідностей двотаврового і прямокутного перерізів виходить інше, а саме: двотаври відносно менш вигідні, ніж це дає звичайний „пружний“ розрахунок. Очевидно, що двотаврові перерізи лишаються вигіднішими проти прямокутних і одержаний результат можна тлумачити так: якщо при розрахунку за „пластичною“ і за „пружною“ теоріями коефіцієнти безпеки вибрані так, що для двотаврових перерізів виходять однакові результати, тобто в обох випадках допущені дійсні напруги однакові, то для прямокутних перерізів при розрахунку за „пластичною“ теорією можна допустити більші напруги. І, навпаки, якщо для прямокутних перерізів допущені однакові напруги, то для двотаврових при розрахунку за „пластичною“ теорією треба допустити менші напруги. Ця обставина вже була нами відзначена в трохі іншій редакції в першій частині нашої роботи (с. 51).

Проведемо тепер таке саме дослідження вигідності перерізів для сталей без площадки текучості, при лінійному законі дільниці II діаграми деформацій. Згідно з виведеним раніш (с. 33, 36), відповідні формули мають в цьому випадку такий вигляд:

$$\text{а) прямокутний переріз } M_T = \sigma_s \cdot \beta \cdot T;$$

$$\text{б) двотавровий переріз } M_T = \sigma_s \cdot \gamma \cdot T.$$

Значення коефіцієнтів β і γ дані в табл. 1 і 2 залежно від $m = E_1 : E$.

Довжина „пластичного“ ядра перерізу

$$2r'_p = \frac{2\beta \cdot T}{F} = \beta \cdot 2r_p \quad \text{і} \quad 2r'_p = \gamma \cdot 2r_p$$

За цими формулами обчислені відношення $2r'_p : h$, вміщені в табл. 5 (обчислення зроблені за середніми значеннями для кожного сортаменту).

Таблиця 5

m	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
$2r'_p : h$ і ζ'_p										

Прямокутний переріз

$2r'_p : h$	0,53	0,56	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,74	0,77	0,80
-------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Двотавровий переріз. Сортамент 1932 р.

$2r'_p : h$	0,785	0,843	0,900	0,956	1,012	1,070	0,126	1,180	1,238	1,295
ζ'_p	1,48	1,50	1,53	1,54	1,56	1,57	1,58	1,59	1,61	1,62

Зварні двотаври № 18—60

$2r'_p : h$	0,878	0,942	1,007	1,070	1,132	1,196	1,260	1,321	1,385	1,450
ζ'_p	1,66	1,68	1,71	1,73	1,74	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81

Зварні двотаври № 70—100

$2r'_p : h$	0,747	0,802	0,855	0,909	0,962	1,016	1,071	1,123	1,179	1,232
ζ'_p	1,41	1,43	1,45	1,47	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54

Остання графа кожної частини табл. 5 містить коефіцієнт відносної вигідності перерізу. Для сортаменту 1926 р. дані не наведені, бо вони дуже мало різняться від даних для сортаменту 1932 р.

За даними табл. 5 побудовані графіки рис. 51 і 52. На першому з них показана залежність критерію вигідності ($2r : h$) від величини $m = E_1 : E$. На осі ординат відзначені точки, які відповідають $m = 0$, тобто для матеріалу з площадкою текучості. Прямі, паралельні осі абсцис, стосуються „пружного“ розрахунку, при якому діяльність II діаграми, яка визначається величиною m , в розрахунок не вводиться. Як видно з графіка, критерій вигідності в усіх випадках зростає за лінійним законом у функції m , що очевидно і з відповідних формул, де m входить в першому степені.

Користуючись таким графіком, можна оцінити відносну вигідність розглянутих перерізів як при „пружному“, так і при „пластичному“ розрахунках для конкретного матеріалу, коли відома його діаграма деформації розтягу або стиску. За такою діаграмою визначаємо величину m в границях $\epsilon = 1 - 2\%$

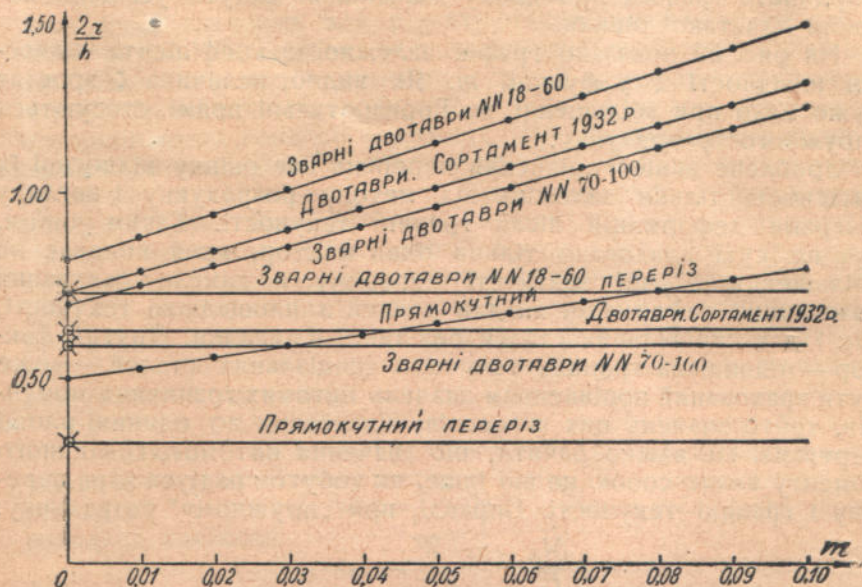


Рис. 51.

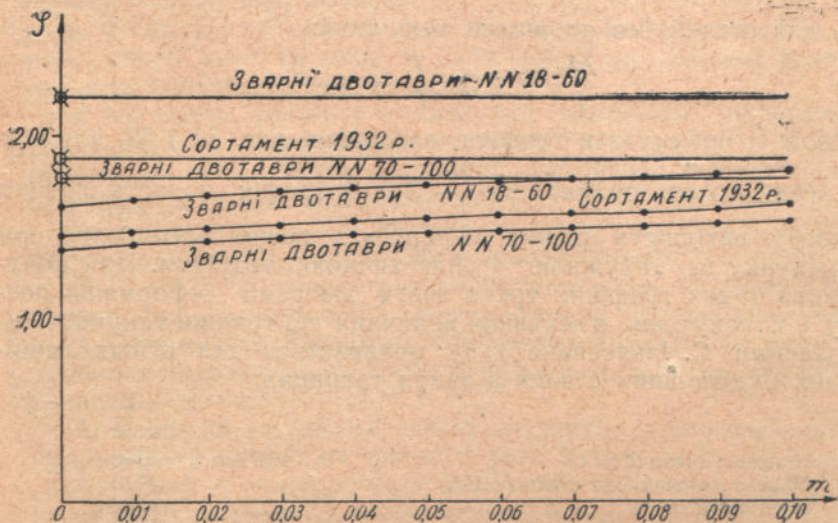


Рис. 52.

і ординати графіка при цьому значенні m дадуть усі дані, потрібні для такої оцінки.

На рис. 52 показано графік залежності коефіцієнта відносної вигідності ζ у функції m . Як видно, величина ζ зростає дуже мало при збільшенні m . Горизонтальні прямі стосуються „пружного“ розрахунку.

Зроблене вище порівняння перерізів дає оцінку відносної їх вигідності тільки залежно від методу розрахунку і вигляду діаграми деформацій після границі текучості. Таким чином, тут по суті враховано тільки один фактор, який впливає на збільшення несучої здатності перерізу, а саме — урахування пластичних деформацій як для сталей з площадкою текучості, так і для спеціальних сталей без такої площадки. Другий фактор — підвищена границя текучості спеціальних сталей — може бути врахований порівнянням значень питомих граничних моментів, тобто значень цих моментів, віднесених до одиниці площі перерізів. Не важко бачити, що значення питомого граничного моменту являє собою не що інше, як добуток радіуса ядра перерізу і границі текучості. Справді, при „пружному“ розрахунку:

$$\frac{M_S}{F} = \frac{\sigma_S \cdot W}{F} = \sigma_S \cdot r,$$

а при „пластичному“ розрахунку:

$$\frac{M_T}{F} = \frac{\sigma_S \cdot T}{F} = \sigma_S \cdot r_p$$

або, для сталей без площадки текучості:

$$\frac{M_T}{F} = \sigma_S \cdot \beta \cdot \frac{T}{F} = \sigma_S \cdot r'_p$$

Можна побудувати графіки, аналогічні рис. 51 і 52, але відкладаючи по осі ординат $\sigma_S \cdot \frac{2r}{h}$. Такий графік подасть наочно відносну вигідність різних перерізів з різних матеріалів при розрахунку за „пружною“ і „пластичною“ теоріями. Для побудування таких графіків треба знати діаграми деформацій розтягу і стиску для з'ясування величини m і границі текучості σ_S . За даними С. Ільєвича*) σ_S коливається для різних спеціальних будівельних сталей в таких границях:

	σ_S (кг/см ²)
Нікелева сталь (США)	3500
Манганово-силіційна сталь (США)	3170
Манганова сталь	3850
Силіційна сталь (Німеччина)	3600
Манганово-силіційна сталь з присадкою міді (Німеччина)	3600
Хромо-мідиста сталь (Німеччина)	3600
Манганова сталь з Халлівських руд (СРСР)	4130—4290

*) Див. виноску на с. 8.

Щождо величини m , то, на жаль, тепер ми ще не можемо дати певні значення для різних сталей, зважаючи на те, що досі при дослідженні механічних властивостей цих сталей інтегрувались головню величинами границі текучості, тимчасового опору, здовження при розриві, але не виглядом діаграми деформацій після границі текучості. Ми передбачаємо провести відповідне дослідження, після чого і можна буде дати конкретну оцінку відносної вигідності різних перерізів з розгляненого погляду. Треба відзначити ще, що при порівненні відносної вигідності перерізів з урахуванням другого фактора — границі текучості, треба урахувати коефіцієнт безпеки, встановлення мінімальних величин якого повинне спиратися на дослідні дані, на урахування експлуатаційних факторів роботи конструкції і стійкості, а також на характеристики однорідності механічних властивостей матеріалу.

Зроблені дослідження дають змогу зробити такі висновки:

1. Балки з сталей без горизонтальної площадки текучості можуть проектуватись менших перерізів, ніж при наявності такої площадки текучості, якщо навіть границя текучості в обох випадках однакова.

2. Балки однакового перерізу, спроектовані з різних сталей, які мають однакову границю текучості і тимчасовий опір, але різняться виглядом діаграми деформацій після границі текучості, мають різний коефіцієнт безпеки. Чим плавніший перехід від дільниці I діаграми до II і чим крутіша дільниця II — тим більший коефіцієнт безпеки.

3. В балках із сталей без горизонтальної площадки текучості дійсні напруги можуть бути допущені більшої величини, ніж при наявності такої площадки.

4. Чи треба балки з сталей без площадок текучості розраховувати за „пластичною“ теорією, чи, виходячи з виводів цієї теорії, застосувати звичайний „пружний“ розрахунок, але при підвищених допустимих напругах, — треба ще обмірковувати і далі досліджувати. Питання це виникає в зв'язку з відносною складністю деяких одержаних нами розрахункових формул.

5. Потрібне порівняльне експериментальне дослідження балок різних перерізів з різних сортів сталі (з площадкою текучості і без неї) для перевірки одержаних виводів, обґрунтування прийнятого граничного стану і вибору доцільних коефіцієнтів безпеки.

6. Відносна вигідність різних перерізів, оцінювана відношенням моменту опору до площі перерізу, одержується різна при „пружному“ і „пластичному“ розрахунках. При „пластичному“ розрахунку двотаврові перерізи лишаються вигідніші, ніж прямокутні, але коефіцієнт відносної вигідності трохи зменшується, в середньому на 23% при ідеально пластичному матеріалі.

7. Для сталі без площадки текучості коефіцієнт відносної вигідності більший, ніж для ідеально пластичного матеріалу.

Цей коефіцієнт мало змінюється при різних значеннях m в границях від 0,01 до 0,10.

8. Для оцінки відносної вигідності перерізів з конкретних сталей треба ще враховувати величину границі текучості. При порівненні з даними „пружного“ розрахунку, треба також ураховувати коефіцієнт безпеки, який для „пластичного“ розрахунку ще твердо не встановлений і, загалом кажучи, може різнитись від коефіцієнта безпеки при „пружному“ розрахунку.

Приклади розрахунку. Статично визначні балки

У цьому розділі наводяться приклади, які ілюструють одержані вище розрахункові формули і висновки попереднього розділу. Розглядаються тільки випадки діяння статичних навантажень (не повторних). Для порівняння дано розв'язання за „пружним“ і „пластичним“ методом, при чому останній метод застосований для балок з різних сталей, які мають діаграми деформацій, згідно з рис. 53 *a, b, c*. В усіх випадках, для порівняння результатів прийнята однакова величина границі текучості $\sigma_S = 2400 \text{ кг/см}^2$

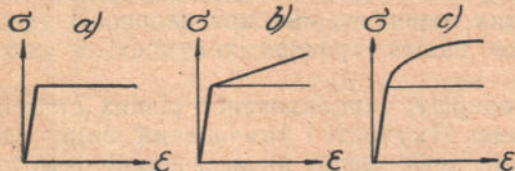


Рис. 53.

(для сталі рис. 53 *c* прийнято $\sigma_p = 2400 \text{ кг/см}^2$). Як і в першій частині нашої роботи розрахунок провадимо не за критичними (граничними) навантаженнями, а за дійсними, тобто потрібний переріз визначаємо за величиною умовної допустимої напруги $R_b = \sigma_S : n_T$.

Величина коефіцієнта безпеки умовно прийнята ¹⁴⁾ $n_T = 2$.

Приклад 1. Балка на двох опорах з прогоном $l = 1 \text{ м}$, з силою $P = 10 \text{ т}$ в середині прогону. Переріз балки прямокутний з відношенням сторін $b : h = 1 : 2$. За „пружним“ методом, незалежно від вигляду діаграми рис. 53, одержуємо:

$$W = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 1400} = 178,5 \text{ см}^3,$$

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = 178,5 \text{ см}^3;$$

звідси $h = 12,85 \text{ см}$ і $b = 6,42 \text{ см}$.

Площа перерізу $F = b \cdot h = 6,42 \cdot 12,85 = 82,5 \text{ см}^2$. Переріз підбрано так, що дійсна напруга саме дорівнює допустимій, тобто, що коефіцієнт безпеки відносно σ_S дорівнює $n_S = 1,71$.

¹⁴⁾ Див. с. 50, 51 першої частини нашої роботи.

„Пластичний“ розрахунок для ідеально пластичного матеріалу (рис. 53а):

$$T = \frac{b \cdot h^2}{4} = \frac{M}{R_b} = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 1200} = 208 \text{ см}^3$$

При $b = \frac{h}{2}$ одержимо $h = 11,87 \text{ см}$, $b = 5,93 \text{ см}$, $F = b \cdot h = 70,4 \text{ см}^2$. Тут $R_b = 1200$ — умовна допустима напруга, яка дорівнює

$$R_b = \frac{\sigma_s}{n_T}$$

Дійсна напруга:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 139} = 1800 \text{ кг/см}^2,$$

де

$$W = \frac{5,93 \cdot 11,87^2}{6} = 139 \text{ см}^3$$

Очевидно, коефіцієнт безпеки з погляду звичайної „пружної“ теорії, відносно границі текучості, буде менший за 1,71, а саме:

$$n_s = \frac{2400}{1800} \approx 1,29$$

„Пластичний“ розрахунок для діаграми за рис. 53б. Відношення модулів пружності прийнято $m = E_1 : E = 0,03$. Розрахункова формула для цього випадку

$$T = \frac{M}{\beta \cdot R_b}$$

[див. формулу (8b)]. Як було знайдено вище,

$$\beta = 1 + \frac{2m}{3} \cdot \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_s} - 1 \right)$$

Як уже відзначалось, практичне зникнення пружного ядра, чим ми визначаємо практичний граничний стан, приблизно відповідає величині

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_s} = 10$$

Цю величину m й прийнемо для розрахунку. Тоді

$$\beta = 1 + \frac{2 \cdot 0,03}{3} \cdot 9 = 1,18$$

R_b , як і в попередньому розв'язанні, дорівнює 1200 кг/см^2 .
Отже:

$$T = \frac{b \cdot h^2}{4} = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 1200 \cdot 1,18} = 176,5 \text{ см}^3$$

$$h = 11,2 \text{ см}, b = 5,6 \text{ см}, F = b \cdot h = 62,8 \text{ см}^2, W = 117,2 \text{ см}^3.$$

Дійсна напруга:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 117,2} = 2140 \text{ кг/см}^2$$

Запас відносно границі текучості:

$$n_s = \frac{2400}{2140} = 1,12$$

Отже в цьому прикладі дійсні напруги значно ближчі до границі текучості, ніж у попередньому, і разом з тим коефіцієнт безпеки відносно граничного стану лишається той самий, тобто $n_T = 2$. Чим крутіше дільниця II діаграми, тобто чим більше m , тим більші можна допустити дійсні напруги, не знижуючи при цьому коефіцієнт безпеки n_T відносно прийнятого граничного стану (зникнення пружного ядра).

„Пластичний“ розрахунок для діаграми за рис. 53 с. Розрахункова формула [див. формулу (21а)]:

$$T = \frac{M}{R_b \cdot \beta_1}$$

Тут

$$\beta_1 = 1 + \frac{4n}{5 \varepsilon_T^2 \cdot \sigma_p} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3$$

Прийнято, згідно з діаграмою рис. 31, $n = 12500 \text{ кг/см}^2$. Як і раніше, вважаємо, що $\varepsilon_T = 10\varepsilon_p$. Після підставлення числових значень, одержимо $\beta_1 = 1,4$. Отже

$$T = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 1200 \cdot 1,40} = 149 \text{ см}^3$$

$$h = 10,54 \text{ см}, b = 5,27 \text{ см}, F = b \cdot h = 56,6 \text{ см}^2, W = 97,6 \text{ см}^3.$$

Дійсна напруга:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{10000 \cdot 100}{4 \cdot 97,6} = 2560 \text{ кг/см}^2$$

Отже тут ми одержимо дійсні напруги навіть вищі $\sigma_p = 2400 \text{ кг/см}^2$, тобто $n_s < 1$. Для сталей, які мають діаграму вигляду рис. 51с, на нашу думку, невелике перевищення дійсних напруг, порівнюючи з σ_p , допустиме, тому що завдяки плавному переходові від ділянки I до II діаграми воно не спричиняє значних деформацій волокон балки. Отже і загальна деформація балки (прогин) не стає великою. В даному випадку, наприклад, прогин дорівнює

$$f = \frac{P \cdot l^3}{48E \cdot J} = 0,188 \text{ см} = \frac{1}{532} l$$

Тут прогин розраховано за „пружною“ формулою, тому що при невеликому перевищенні границі пропорціональності і при плавному переході діаграми після σ_p похибка в підрахунку прогину незначна.

Як сказано вже вище, прийнято умовно, що коефіцієнт безпеки дорівнює двом. Величина $n_T = 2$ запропонована Eisenmann-ом і Girkmann-ом, які виходили при цьому з того, щоб для двотаврових перерізів з м'якої сталі розрахунки за „пружною“ і „пластичною“ теорією давали однакові результати.

Приклад 2. Зварна двотаврова балка має розрахунковий момент $M = 3740000 \text{ кг} \cdot \text{см}$. Переріз балки добирається за таблицею зварних двотаврів, наведеною в першій частині нашої роботи (с. 23) і в нашій статті в другому збірнику праць Київського будівельного інституту (1935 р.). Пружний розрахунок дає

$$W = \frac{M}{R_p} = \frac{3740000}{1400} = 2670 \text{ см}^3,$$

чому точно відповідає двотавр № 50, для якого $F = 151,8 \text{ см}^2$.

„Пластичний“ розрахунок для ідеально пластичного матеріалу:

$$T = \frac{M}{R_b} = \frac{3740000}{1200} = 3120 \text{ см}^3$$

Той самий № 50 має $T = 2985 \text{ см}^3$, що на 4,5% менше за потрібне. Отже обидва розрахунки практично дали однакові результати при $n_T = 2$ ($R_b = 1200$ відповідає $n_T = 2$).

„Пластичний“ розрахунок при діаграмі рис. 53b. За формулою (12b) одержимо:

$$T = \frac{M}{\gamma \cdot R_b}$$

Тут

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_s} - 1 \right)$$

Середнє значення k для двота рових перерізів 0,78. Тому що попередній розрахунок дав двотавр № 50, а при діаграмі за рис. 53 b ми повинні одержати менший номер, то приймаємо $k = 0,733$, що відповідає № 45, сусідньому з № 50. Значення m і $\varepsilon_T : \varepsilon_S$ — передніші. Одержимо після підставлення числових значень $\gamma = 1,246$. Отже

$$T = \frac{3\,740\,000}{1200 \cdot 1,246} = 2500 \text{ см}^3$$

Нумер 45 має $T = 2450 \text{ см}^3$, що відрізняється від розрахункового лише на 2%. Площа перерізу $F = 134,6 \text{ см}^2$.

В цьому розрахунку, як і в попередніх, прийнято $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$, що, звичайно, є до певної міри умовним, тому що на графіках рис. 12 немає різкого зламу, який дозволив би фіксувати цю цифру точніше. Але структура одержаних нами розрахункових формул така, що й при інших значеннях $\varepsilon_T : \varepsilon_S$, які чимало візняються від прийнятого значення 10, остаточний результат розрахунку змінюється незначно. В розглядуваному прикладі зроблено підрахунок для різних значень $\varepsilon_T : \varepsilon_S$, в границях від 7 до 13, тобто середнє значення збільшувалось і зменшувалось на величину до 30%. Виявляється, що значення T змінюється при цьому лише на 6,5%. Таким чином, немає потреби точно фіксувати і обґрунтовувати величину $\varepsilon_T : \varepsilon_S$, досить вибрати таку величину, яка приблизно відповідає практичному зникненню пружного ядра, критерієм чого може бути прийнята величина моменту сил пружного ядра близько 1% від моменту сил усього перерізу. Цьому приблизно відповідає $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$ (див. графіки рис. 12).

„Пластичний“ розрахунок при діаграмі за рис. 53 c . Тут розрахунковою формулою є формула (23). Користування цією формулою трохи складніше, ніж попередньою, тому що немає змоги визначити одразу T . Доводиться наосліп добирати переріз і дані для прийнятого перерізу підставляти в (23). Зварний двотавр № 40, який має $T = 2075 \text{ см}^3$, $h = 40 \text{ см}$, $h_1 = 37,2 \text{ см}$, $b = 32 \text{ см}$ і $d = 1,0 \text{ см}$, при $n = 12\,500 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_p = 2400 \text{ кг/см}^2$ і $\varepsilon_T = 10\varepsilon_S$ дає значення граничного моменту:

$$M_T = \sigma_p \cdot T - (b-d) \cdot \frac{n \cdot h^2}{5 \varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} - \varepsilon_p} \right)^3 + \\ + \frac{n \cdot h^2 \cdot b}{5 \varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 = 7\,430\,000 \text{ кг} \cdot \text{см},$$

що відрізняється від розрахункового граничного моменту $M_T = M \cdot n_T = 3\,740\,000 \cdot 2 = 7\,480\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ лише щось близько на 1%.

Отже, як і для прямокутного перерізу, різний вигляд діаграми деформацій у дільниці II дає різні перерізи при одному і тому самому коефіцієнті безпеки $n_T = 2$.

Порівняймо дійсні напруги в усіх підібраних двотаврових перерізах.

1-й і 2-й розрахунки дають однакову дійсну напругу:

$$\sigma = 1400 \text{ кг/см}^2$$

Для № 45 (3-й розрахунок):

$$\sigma = \frac{3740000}{2231} = 1680 \text{ кг/см}^2$$

Для № 40 (4-й розрахунок):

$$\sigma = \frac{3740000}{1884} = 1980 \text{ кг/см}^2$$

Коефіцієнт безпеки відносно $\sigma_s = 2400 \text{ кг/см}^2$ відповідно буде 1,71, 1,43 і 1,21.

ДОДАТОК

Основи розрахунку статично невизначних балок

Нові дані про розрахунок балок з сталей з площадкою текучості

Розрахунок статично невизначних балок за „пластичною“ теорією тепер вже досить добре розроблений для м'яких сталей з площадкою текучості. Можна сказати, що більшість як теоретичних, так і експериментальних досліджень присвячені головно статично невизначним балкам, тому що саме для цих балок нова теорія дає найбільший ефект. Експериментальні дослідження досить добре стверджують теоретичні дані. Як відомо, розрахунок статично невизначних балок за „пластичною“ теорією сходиться до вирівнювання моментів і добирання перерізів за формулою:

$$T = \frac{M}{R_b} \quad \text{або} \quad T = \frac{M_T}{\sigma_s},$$

де M (або при розрахунку за граничними навантаженнями M_T) — значення вирівненого моменту. Разом з тим ряд питань, зв'язаних з вирівнюванням моментів, ще не досить з'ясовано. В першій частині нашої роботи (с. 198) ми відзначили, що серед інших питань слід ще дослідити випадки згину балок з дуже великою різницею величин вирішальних моментів. У цьому випадку досягнення граничного стану в другому небезпечному перерізі може бути зв'язане з переходом першого перерізу в зону зміцнення. Отже вирівнювання моментів тут не буде.

В „Обзоре научно-исследовательской работы ЦНИПС“ (1934 р.) у статті проф. Ю. А. Нілендера є вказівки на те, що досліди ЦНИПС з металічними балками не цілком стверджують основні передумови „пластичної“ теорії. Зокрема „вирівнювання моментів“, на якому базується весь розрахунок, в дійсності відбувається при деформаціях, які в 10—15 разів перевищують теоретичні величини“. З погляду нової теорії, для ідеально пластичного матеріалу, співвідношення моментів, які підлягають вирівнюванню, не має значення, але при великій різниці цих моментів ще задовго до вирівнювання моментів прогини балок досягнуть такої величини, що треба буде граничний стан визначати величиною

недопустимого прогину, а не настанням вирівнювання моментів. Отже теорія вирівнювання моментів тут не може бути застосована. G. v. Kazinczy¹⁵⁾ докладно досліджує це питання стосовно до пружно затиснених балок. Він визначає можливість застосування „пластичної“ теорії для випадків, коли у балці з пружно затисненими кінцями момент в середині прогону не більше за опорний. В протилежному разі розрахунок треба провадити за прогином.

G. v. Kazinczy приймає в таких випадках коефіцієнт безпеки відносно недопустимого прогину, рівний 1,7. F. Stüssi і C. F. Kollbrüner¹⁶⁾ в інтересній статті показали, що взагалі повного вирівнювання моментів в дійсності ніколи не буває, крім випадків „природного“ вирівнювання моментів, тобто рівності моментів і в пружному стані. Робота Stüssi і Kollbrüner-а розглянена буде трохи далі.

Усе викладене показує, що теорію вирівнювання моментів ще далеко не можна вважати остаточно розробленою. В застосуванні ж до сталей без площадки текучості цю теорію зовсім не розглядали і, власне кажучи, вона тут не може бути застосована. Не зважаючи на це, можна прийняти доведеним для балок з м'яких сталей і наперед твердити для балок з сталей без площадки текучості, що розраховані за „пружною“ теорією статично невизначні балки мають більший запас міцності, ніж статично визначні. Отже для одержання однакового запасу міцності статично невизначні балки можна і треба розраховувати за меншими моментами, ніж це дає „пружна“ теорія. В різних випадках ці моменти більш-менш наближаються до „вирівнених“ моментів, одержаних за „пластичною“ теорією для ідеально пластичного матеріалу.

Далі розглянено буде розрахунок статично невизначних балок з сталей без площадки текучості. Спочатку ж розглянемо коротко результати роботи Stüssi і Kollbrüner-а. Автори розглянули випадок трипрогінної нерозрізної балки, з рівними крайніми прогонами, при навантаженні середнього прогону зосередженою силою в середині прогону (рис. 54). Ця затача досліджена теоретично і експериментально. За „пружною“ теорією для даного випадку опорний момент становитиме:

$$M_B = - \frac{3l_2}{4l_1 + 6l_2} \cdot M_0 = - \delta \cdot M_0$$

Досліджуваний випадок можна розглядати як проміжний для двох крайніх випадків: однопрогінна, що вільно лежить,

¹⁵⁾ G. v. Kazinczy, стаття в Abhand. Zw. B., 1933—1934, Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Zürich; див також Н. Д. Жулін, Пластичні деформації в сталевих конструкціях, I. Основи розрахунку, УАН, 1935.

¹⁶⁾ F. Stüssi u. C. F. Kollbrüner, Beitrag zur Traglastverfahren, Bautechnik, 1935, № 21.

балка з прогоном l_2 , тобто $M_B = 0$, і балка такого самого прогону, цілком затиснена на опорах B і C . Для цього випадку $M_B = 0,5M_0$. Залежно від співвідношення прогонів l_1 і l_2 величина M буде змінюватись від 0 до $0,5M_0$, а розрахунковий момент — від M_0 до $0,5M_0$. Проміжне значення розрахункового моменту

$$M = (1 - \delta) \cdot M_0$$

Якщо для простої однопрогінної балки граничне навантаження з погляду „пружної“ теорії дорівнює P_T^0 , то для балки рис. 54

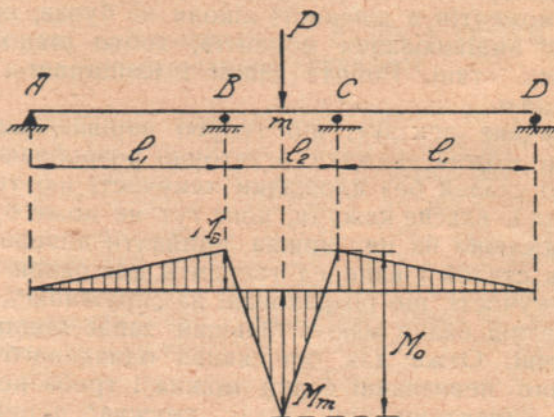


Рис. 54.

граничне навантаження P_T знайдемо з рівності граничних моментів (припускаючи, що перерізи балок однакові):

$$\frac{P_T^0 \cdot l}{4} = (1 - \delta) \cdot \frac{P_T \cdot l}{4},$$

звідки:

$$P_T = \frac{1}{1 - \delta} \cdot P_T^0$$

Для балки з затисненими кінцями $\delta = 0,5$ і, отже, $P_T = 2P_T^0$.

Для проміжних значень $\frac{1}{1 - \delta}$ зміна P_T ітме за лінійним законом. На рис. 55 це подається прямою AB .

З погляду „пластичної“ теорії виходить інша картина. Як відомо, тут розрахунковим моментом буде „вирівнений“ момент. Величина останнього при ідеально пластичному матеріалі не залежить від співвідношення опогного і прогінного моментів (отже і від співвідношення прогонів l_1 і l_2). Який би малий не

був опорний момент, в граничному стані він зрівняється з прогінним і стане рівним $0,5M_0$. Отже з погляду „пластичної“ теорії розглядувана трипрогінна балка завжди має те саме граничне навантаження, що й балка, загиснена двома кінцями, незалежно від співвідношення прогонів l_1 і l_2 . Інакше кажучи, граничне навантаження P_T завжди дорівнює $2P_T^0$. На графіку рис. 55 це подається ламаною лінією ACB , тому що,

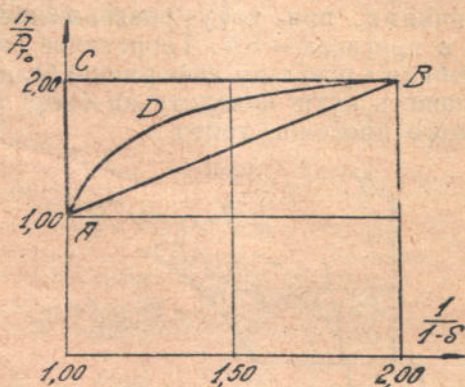


Рис. 55.

як тільки $\frac{1}{1-\delta}$ трохи перевищить одиницю, тобто коли будуть хоч найменші опорні моменти, то в граничному стані вони зрівняються з прогінним і $P_T = 2P_T^0$. Разом з тим різкий стрибок P_T від P_T^0 до $2P_T^0$ фізично неможливий, як зауважує Stüssi. Тому природно припустити зростання граничного навантаження при

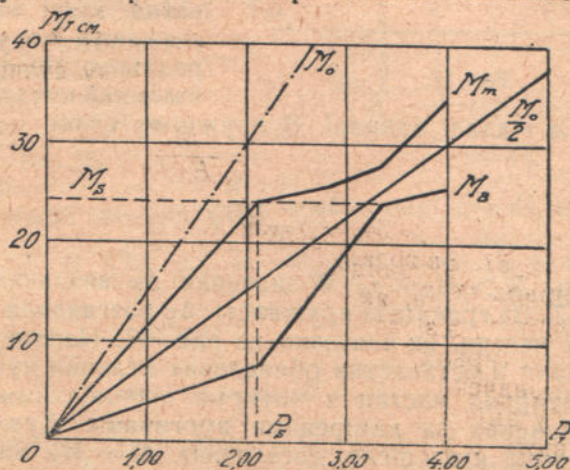


Рис. 56.

зміні відношення l_1 і l_2 по деякій кривій ADB (рис. 55). Дослідні ствердили це досить задовільно. Досліджені були двотаврові балки за схемою рис. 54 для відношень l_1 до l_2 : 3, 2, 1 і 0,5. Також випробувані балки однопрогінні з $l = 60$ см (в усіх дослідях $l_2 = 60$ см). На рис. 56 показана діаграма залежності M_m і M_B від P , побудована за даними дослідів для випадку $l_1:l_2 = 2$. Як видно, повного вирівнювання моментів немає, і після

деякого зближення значень M_m і M знову починається їх розходження. Крім моментів, які визначали на основі показів тензометрів, вимірювали також прогини у серединах прогонів. Дослідні величини моментів і прогинів порівнювали з теоретичними, при чому розходження в моментах досягало 5%, а в прогинах — 8%. Теоретичне визначення моментів і прогинів робили з розгляду деформацій балки, а саме, складали рівняння — рівність кутів повороту на опорі B (рис. 54) для лівого і середнього прогонів, тобто

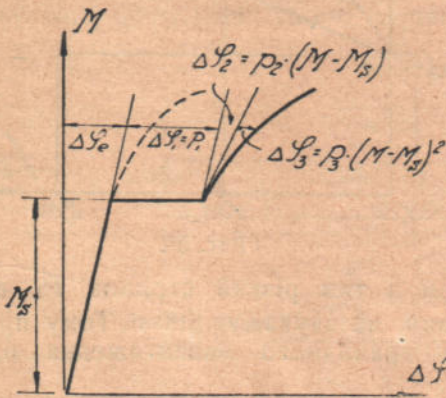


Рис. 57.

перерізів на віддалі одиниці. В пружному стані

$$\Delta\varphi = \frac{M}{E \cdot J}$$

для значень $M > M_S = \sigma_S \cdot W$ значення $\Delta\varphi$ визначали з допомогою рис. 57. За границею пружності $\Delta\varphi$ розглядали як складену з чотирьох частин, як показано на рис. 57. Параметри p_0, p_1, p_2 і p_3 визначали з зіставлення обчислених величин кутів повороту для цих чотирьох частин з чотирма відповідними значеннями кутів, визначених за виміреними прогинами. Дуже сумнівний стрибок у зміні кута після досягнення $M = M_S$. Стюссі пояснює необхідність цього стрибка тим, що вимірені криві прогини мали різко виявлений злам при досягненні границі текучості. Разом з тим теоретично цього стрибка не повинно бути, що видно з рівняння (10) для двотаврового перерізу. Для $m = 0$ (при горизонтальній площадці текучості) це рівняння набирає вигляду:

$$M = \sigma_S \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) + \sigma_S W$$

$$\tau'_B = \tau''_B$$

Ці кути визначали звичайним способом з виразів

$$\tau'_B = \frac{1}{l_1} \cdot \int_A^B \Delta\varphi \cdot x \cdot dx$$

і

$$\tau''_B = \int_B^m \Delta\varphi \cdot dx$$

Для τ''_B границі інтегрування взяті від B до m , зважаючи на симетрію середнього прогону. $\Delta\varphi$ — це взаємний кут повороту двох

або, якщо позначити $\alpha = \frac{2a}{h}$:

$$M = \sigma_s \cdot \frac{b \cdot h^2}{4} \cdot (1 - \alpha^2) + \sigma_s \cdot W_e$$

Згідно з рис. 58 кут $\Delta\varphi = \frac{\Delta}{h}$, а тому що $\alpha = \frac{2a}{h} = \frac{\Delta_s}{\Delta}$, то

$$\alpha = \frac{\Delta_s}{\Delta\varphi \cdot h}$$

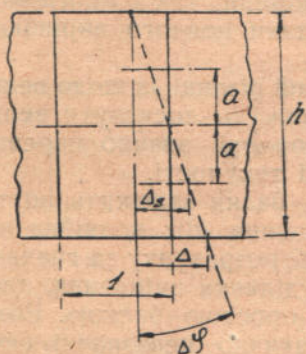


Рис. 58.

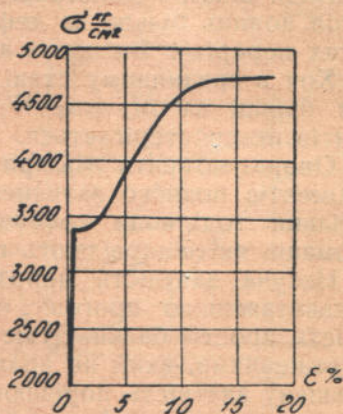


Рис. 59.

Підставляючи це значення α у вираз для M , одержимо залежність між M і $\Delta\varphi$. Як видно для $\Delta\varphi = \frac{\Delta_s}{h}$, чому відповідає

$\alpha = 1$ або $a = \frac{h}{2}$, одержимо

$$M = \sigma_s \cdot W = M_s,$$

тобто одне певне значення. При іншому значенні $\Delta\varphi$ ми не матимемо того самого значення M , тобто площадки при M_s , одержаної на рис. 57 бути не може. Діаграма $M, \Delta\varphi$ повинна мати вигляд, як показано на тому самому рисунку пунктиром. Частина такої діаграми, починаючи з $M = M_s$, показана в першій частині нашої роботи на рис. 7 (для прямокутного перерізу).

В основу своїх розрахунків Stüssi прийняв середню діаграму деформацій, одержану з дослідів на розтяг і стиск. Ця діаграма подана на рис. 59. Граничний стан балок під час дослідів визначався величиною навантаження, при якому прогини збільшувались без збільшення навантаження, що було перед руйну-

ванням. Досліди показали, що балки при різних відношеннях l_1 до l_2 різняться одна від одної як величиною граничного навантаження, так і величиною залишкового прогину. Причиною неповного вирівнювання моментів є те, що при великій різниці у величинах прогінного і опорного моментів переріз з великим моментом попадає в зону зміцнення раніше, ніж досягається граничний стан в другому перерізі. Якщо різниця в моментах не дуже велика, то більший момент, дійшовши теоретичної граничної величини, має можливість „почекати“ на інший момент, доки цей останній не „дожене“ його. При великій же різниці моментів ця можливість виключається.

Досліди Stüssi і Kollbruner-а показали також, що деформації волокон полиці більші за деформації, які відповідають гіпотезі плоских перерізів. Висновки авторів такі:

1. Хоч в граничному стані як опорний, так і прогінний моменти більші за $M_S = \sigma_S \cdot W$, все таки повного вирівнювання моментів не спостерігається.

2. Опорні моменти M_B , при чималій різниці їх щодо величини від моментів повного затиснення, можуть досягнути величини M_S тільки тоді, коли крайові деформації значно перевищать деформації, які відповідають границі текучості.

3. Несуча здатність нерозрізної балки залежить не тільки від навантаженого прогону; вона менша, ніж подвійна несуча здатність простої балки. Отже спосіб розрахунку за граничними навантаженнями, який не враховує ділянки зміцнення, дає перебільшену здатність порівнюючи з простою балкою. Розраховані ж за „пружною“ теорією статично невизначні системи мають надвишковий запас міцності порівнюючи з статично визначними.

4. Для двотаврового перерізу за діаграмами деформацій простого розтягу і стиску не можна зробити висновку про деформації згину, тому що перерізи в пластичній ділянці не лишаються плоскими.

Статично невизначні балки з сталей без площадки текучості

Очевидно, що у випадку діаграми деформації за рис. 15 вирівнювання моментів ніколи не може бути. Разом з тим можна твердити, що вигляд епюри моментів балки буде інший після переходу границі текучості в будьякому перерізі, порівнюючи з епюрою моментів пружного стану. Прогінний момент, якщо він більший за опорний, після досягнення границі текучості почне зростати повільніше, а опорний — швидше. Вирівнювання ж моментів виключається, тому що тут немає горизонтальної площадки на діаграмі деформацій, яка дає змогу одному моменту „догнати“ інший. Ця задача ускладнюється тим, що важко теоретично встановити граничний стан статично невиз-

начної балки, тобто той стан, при якому опір балки можна вважати вичерпаним. У балках же з ідеально пластичної сталі граничний стан цілком ясно визначається з'явленням $n+1$ пластичних шарнірів, якщо n — степінь статичної невизначності. В такому випадку система стає геометрично змінною і дальший опір її неможливий.

Якщо матеріал не має площадки текучості, то геометрична незмінність системи не вичерпується до самого зруйнування. Вище було встановлене поняття умовного (практичного) граничного стану перерізу балки, яка працює на згин. Цей стан ми визначаємо такою величиною моменту внутрішніх сил перерізу, при якій момент сил пружного ядра становить близько 1% від моменту сил усього перерізу. Звичайно цьому відповідають деформації крайніх волокон порядку також близько 1%. Якщо при розрахунку статично невизначної балки ми виходитимемо з такого граничного стану перерізу, то природно було б вважати граничним станом балки той, при якому в другому небезпечному перерізі (для балки з одною зайвою невідомою) буде досягнутий цей граничний стан. Разом з тим, в першому небезпечному перерізі в цей час момент уже збільшиться, порівнюючи з прийнятим граничним моментом. Отже є певна неясність — не можна фіксувати якінебудь значення моментів, які б більш-менш певно вказували на те, що опір балки практично вичерпаний. Можна запропонувати кілька критеріїв граничного стану статично невизначної балки (розглядається балка з однією зайвою невідомою), а саме:

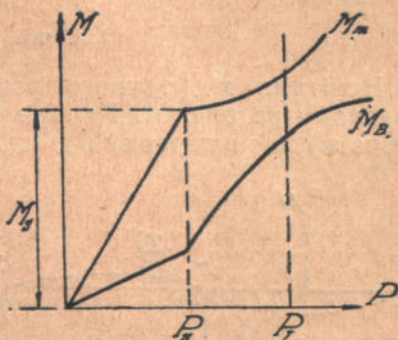


Рис. 60.

1. Граничний стан перерізу досягнуто тільки в першому небезпечному перерізі.

2. Граничний стан перерізу досягнуто в другому небезпечному перерізі.

3. Граничний стан балки визначається тим навантаженням, при якому моменти в обох небезпечних перерізах максимально наблизились один до одного.

Як уже відзначалось, ці моменти зрівнятись ніколи не можуть, але тенденція до вирівнювання буде і при відсутності площадки текучості, тільки різниця між моментами завжди буде більша, ніж для сталей з площадкою текучості. Діаграма залежності M від P матиме приблизно такий самий вигляд, як показано на рис. 56. Рис. 60 пояснює, що припущено вважати за граничне навантаження.

4. Граничний стан балки визначається навантаженням балки, при якому загальна деформація балки (прогин) починає помітно зростати без помітного зростання навантаження.

Як видно, всі запропоновані критерії граничного стану є досить умовні, крім останнього, який дає яснішу картину втрати опору балки. Разом з тим цей критерій до певної міри незручний, тому що вимагає індивідуального підходу до кожної задачі. Очевидно, що правильне уявлення про втрату опору балки з спеціальної сталі можна одержати тільки дослідним шляхом. Такі досліди ми маємо намір провести в недалекому майбутньому, як з статично визначними балками, так, головню, і з статично невизначними. Тут же ми маємо тільки намітити можливі шляхи аналітичного розв'язання задачі розрахунку статично невизначної балки.

1. Точне розв'язання

Намітьмо хід точного розв'язання на окремому прикладі, поданому на рис. 61. Переріз балки прямокутний. Припустімо спочатку, що в перерізі під силою при будь-якому навантаженні одержано пружно-пластичний стан, при чому на опорі *B* (другий небезпечний переріз) напруги ще не перевищили σ_s (рис. 62).

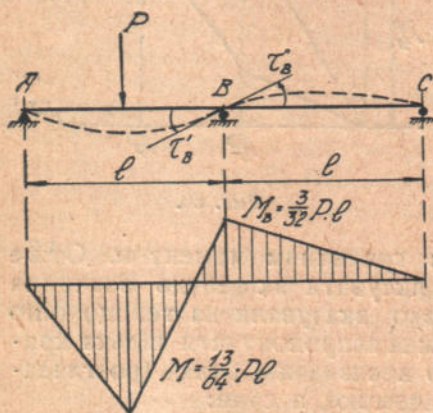


Рис. 61.

Розв'язуючи задачу для певного навантаження *P*, ми матимемо в числі невідомих і величину *a* — половину висоти пружного ядра. Можна α вважати відомою величиною (тобто задатись нею), і тоді невідомою буде *P*. Усього невідомих буде п'ять: *P*, M_B , c_1 , c_2 , α_x . c_1 і c_2 — довжини зон текучості. $2\alpha_x$ — висота пружного ядра в перерізі *x*.

Завдяки наявності пружного ядра лінія згину балки буде плавною. Основне рівняння — рівність кутів повороту τ'_B і τ''_B (рис. 61). Для пружно напружених частин балки кут повороту двох перерізів на віддалі *dx* дорівнює

$$\Delta\varphi = \frac{M \cdot dx}{E \cdot J}$$

Для пружно-пластичного стану, як це знайдено на с. 95,

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\alpha \cdot h} = \frac{\varepsilon_s}{\alpha \cdot h},$$

де $\alpha = \frac{2a}{h}$. Кут $\tau''_B = \frac{M_B \cdot l}{3E \cdot J}$, тому що правий прогін напружений тільки пружно.

Рівняння $\tau'_B = \tau''_B$ напишеться так:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int_0^{\frac{l}{2} - c_1} \left(\frac{P}{2} \cdot x - M_B \cdot \frac{x}{l} \right) \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \\
 & + \int_{\frac{l}{2} + c_2}^l \left\{ \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) - \frac{M_B \cdot x}{l} \right\} \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \\
 & + \int_{\frac{l}{2} - c_1}^{\frac{l}{2}} \frac{\epsilon_s}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx + \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2} + c_2} \frac{\epsilon_s}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \frac{M_B \cdot l}{3E \cdot J}
 \end{aligned}$$

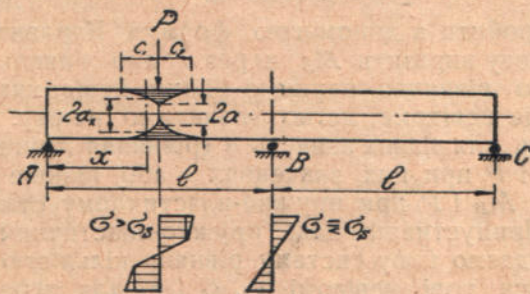


Рис. 62.

Перші два члени, звичайно, можуть бути написані одразу як реакції опори B од відповідного моментного навантаження, поділені на цупкість балки.

Друге рівняння, яке дає залежність між M_B і P , напишемо згідно з (5):

$$2) \quad \frac{P \cdot l}{4} - \frac{M_B}{2} = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right],$$

де α — величина відома, якою ми задались.

Для перерізу x одержимо третє рівняння:

$$3) \quad \frac{P \cdot x}{2} - M_B \cdot \frac{x}{l} = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha_x^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha_x} + \alpha_x^2 - 3 \right) \right],$$

Четверте і п'яте рівняння, які дають можливість виключити c_1 і c_2 , можна одержати безпосередньо за рис. 61 або з третього рівняння, підставивши замість x відповідно $\frac{l}{2} - c_1$ і $\frac{l}{2} + c_2$, а праву частину замінивши $\sigma_S \cdot W$:

$$4) \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - c_1 \right) - M_B \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - c_1 \right)}{l} = \sigma_S \cdot W$$

$$5) \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + c_2 \right) - M_B \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} + c_2 \right)}{l} = \sigma_S \cdot W$$

Розв'язувати ці рівняння треба в такому порядку: з четвертого і п'ятого визначаємо c_1 і c_2 і підставляємо в перше. З третього визначаємо α_x , для чого треба розв'язати кубічне рівняння вигляду

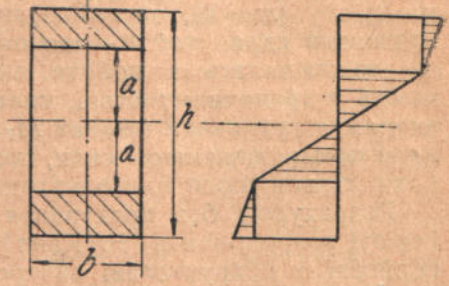
$$y^3 + p \cdot y + q = 0,$$

що можна зробити з допомогою формул Кардана. Друге рівняння дає змогу виразити M_B через P або навпаки. Отже лишається одне рівняння перше з одним невідомим M_B або P . Знайшовши це невідоме, легко визначимо решту. Повторивши це розв'язання для різних значень α (рівняння друге), одержимо значення M_B і P при цих значеннях α або, інакше кажучи, залежність між M_B і P при пружно-пластичному стані в перерізі під силою. Припустивши далі пружно-пластичний стан і на опорі B , складаємо нову систему рівнянь кількістю вісім, тому що додадуться нові невідомі c_3 , c_4 і α_x для перерізу B . Розв'язуючи ці рівняння, одержимо залежність між M_B і P для випадку, коли в перерізі B перевищено границю текучості σ_S . Такий спосіб розв'язання надзвичайно незручний і важкий, бо після виключення всіх невідомих, крім одного (M_B або P), ми одержуємо рівняння шостого степеня з усіма степенями невідомого — від 0 до 6. Коли б ми все таки розв'язали ці рівняння, це дало б змогу побудувати графік рис. 60 і за ним визначити умовне граничне навантаження, згідно з граничним станом п. 3 на с. 97. Знаючи M_B і P , можна знайти залежність прогину від навантаження і з'ясувати граничний стан, згідно з п. 4 на стор. 98.

Очевидно, описаний спосіб розрахунку для розв'язання практичних задач цілком неприйнятний, зважаючи на надзвичайну його складність, необхідність індивідуально підходити до кожної задачі і, нарешті, на те, що він дає змогу з'ясувати граничний стан, який сам собою є умовний і не досить обґрунтований.

2. Розв'язання за принципом задачі для балок з різних матеріалів

Будьяка статично невизначна балка може бути порівнюючи легко розв'язана для пружно-пластичного стану, якщо на протязі зон текучості її розглядати як балку з двох матеріалів: у пружній частині матеріал має модуль пружності E , а в пластичній — E_1 . Для спрощення розрахунку без великої похибки можна прийняти замість кривої, яка обмежує зону текучості, пряму лінію. Як відомо, для балок з різних матеріалів, при відсутності зсуву між складовими частинами, розрахунок сходиться до визначення зведеної ширини перерізу¹⁷⁾:



$$b_1 = b \cdot \frac{E_1}{E} = m \cdot b$$

Рис. 63.

Рис. 64.

Для нашого випадку (рис. 63) момент інерції зведеного перерізу напишеться так:

$$J' = \frac{b \cdot (2a)^3}{12} + \frac{b_1}{12} \cdot \{h^3 - (2a)^3\}$$

або

$$J' = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot [\alpha^3 + m \cdot (1 - \alpha^3)] = J \cdot [\alpha^3 + m \cdot (1 - \alpha^3)]$$

Тут

$$\alpha = \frac{2a}{h}, \quad m = \frac{E_1}{E} \quad \text{і} \quad b_1 = m \cdot b$$

На протязі зони текучості J' буде змінюватись залежно від α . Не важко бачити, що задача тут сходиться до складання цупкостей пружної і пластичної частин перерізу. Справді, цупкість перерізу

$$\begin{aligned} E \cdot J' &= E \cdot J_a + E_1 \cdot J_p = E \cdot \frac{(2a)^3}{12} + E_1 \cdot \frac{b}{12} \cdot \{h - (2a)^3\} = \\ &= E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot [\alpha^3 + m \cdot (1 - \alpha^3)] \end{aligned}$$

¹⁷⁾ Див. С. П. Тимошенко, Сопротивление материалов, 1932, ч. 1, перевод с англ., с. 241.

Цей спосіб розв'язання сходить до розрахунку статично невизначної балки змінного перерізу, що, загалом кажучи, не становить труднощів. Не зважаючи на теоретичну обґрунтованість цього розрахунку, він все таки мало придатний для розрахунку сталених балок за границею текучості, що видно з таких міркувань: якщо припустимо балку з ідеально пластичного матеріалу ($m=0$), то вийде, що $J=J_a$, де J_a — момент інерції пружного ядра, тобто — що пластична частина перерізу зовсім виключилась з роботи, що, очевидно, невірно, тому що навіть в граничному стані, коли пружне ядро зникло, переріз витримує граничний момент $M_T = \sigma_S \cdot T$. Переріз не може сприйняти тільки надвишок сили, понад P_T , і він виключається з роботи тільки щодо цього надвишку сили.

Розрахунок без врахування опору пластичної частини перерізу запропонував Ф. Капп¹⁸⁾. Розрахунок Капп-а зустрів серйозні і обґрунтовані заперечення Eisenmann-а. Для сталей без горизонтальної площадки текучості цей метод розрахунку сходить до неврахування опору внутрішніх сил перерізу, не заштрихованих на епюрі напруг (рис. 64).

3. Розв'язання за методом кривої неповного вирівнювання моментів

Цей метод, пропонований нами, є найпростіший, але, на жаль, ще не перевірений експериментально, без чого, звичайно, покищо немає підстав рекомендувати його для практичного застосування. Досліди, які ми маємо зробити, і повинні будуть дати головню експериментальне обґрунтування цього методу. Пропонований метод значною мірою базується на даних розрахунку і дослідів Stüssi, описаних вище.

Розгляньмо три схеми балки, подані на рис. 65. Порівняємо для всіх цих випадків відношення моментів опорного і прогінного $M_B : M$. Одержимо такі значення:

$$1) \frac{M_B}{M} = 0; \quad 2) \frac{M_B}{M} = \mu, \text{ при чому } 0 < \mu < 1, \quad \text{і} \quad 3) \frac{M_B}{M} = 1$$

Для всіх випадків це відношення можна узагальнити однією формулою:

$$\frac{M_B}{M} = \mu,$$

де μ змінюється від 0 до 1. Будь-яка статично невизначна балка (з однією зайвою невідомою) задовольняє це відношення. Коли б

¹⁸⁾ Див. с. 83 першої частини нашої роботи, а також Ф. Капп, Der Momentenausgleich durchlaufender Tragbände im Stahlbau, 1932.

закон Гука мав силу для будьякої стадії деформації, то і в граничному стані ми мали б те саме відношення $\frac{M_B}{M}$. На рис. 66 пряма OA подає це графічно. На цьому рисунку по осі абсцис відкладені μ , які відповідають пружному р'зрахункові, по осі ординат — відношення $M_B:M$. В дійсності, після переходу границі пропорціональності в першому небезпечному перерізі

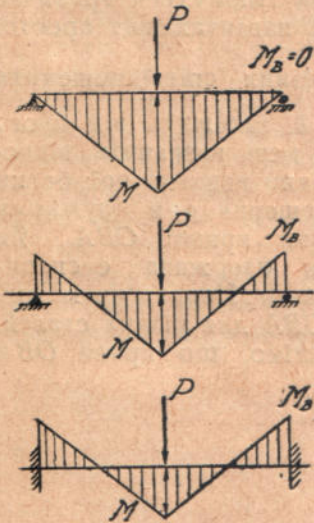


Рис. 65.

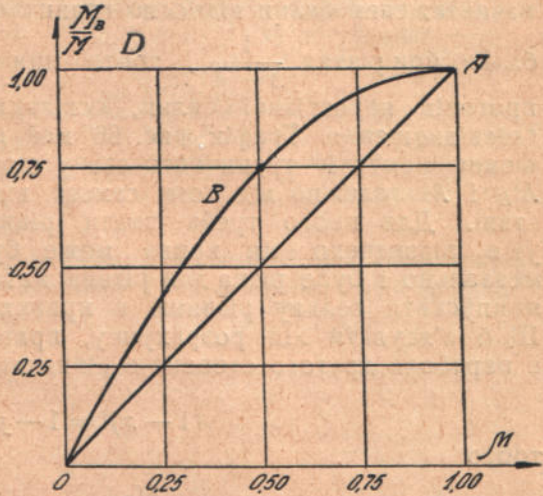


Рис. 66.

(при діаграмі деформацій за рис. 15 границя пропорціональності ототожнюється з границею текучості), співвідношення моментів $M_B:M$ зміниться. Момент M_B почне зростати швидше, а M — повільніше. Якби матеріал був ідеально пластичний, то навіть при самому малому відношенні $M_B:M$ обидва моменти кінець-кінцем зрівнялись би, тобто в граничному стані відношення $M_B:M$ одразу стало б рівним 1, якщо тільки не було б раніше досягнуто граничного стану за прогином. На рис. 66 цьому відповідає ламана лінія ODA . Для сталей без площадки текучості таке положення неможливе. Тому, припускаємо, що при різних μ в пружному стані відношення $M_B:M$ буде змінюватись за якоюсь кривою OBA . Ця крива може бути одержана експериментально і буде різна для різних сортів сталі залежно від характеру дільниці II деформації. Для сталей з більшою величиною $m = E_1:E$ крива буде пологішою і навпаки.

Не важко бачити, що графік рис. 66 є певною мірою „перифразовкою“ графіка Stüssi, поданого на рис. 55, одержаного ним з дослідів з балками з звичайної м'якої сталі. Різниця цих

графіків така: у Stüssi по осі абсцис відкладається $\frac{1}{1-\delta}$, тобто відношення моменту простої балки до моменту в прогоні статично невизначної балки (див. с. 92). У нас же по осі абсцис відкладено μ — відношення опорного і розрахункового моментів „пружного“ розрахунку. По осі ординат у Stüssi відкладено відношення граничного навантаження статично невизначної балки і граничне навантаження простої балки, а в нас — відношення опорного і прогінного моментів граничного стану. Графік Stüssi має на меті показати, як змінюється граничне навантаження балки відносно граничного навантаження простої балки, при різних $\frac{1}{1-\delta}$, тобто при різних співвідношеннях прогонів нерозрізної балки, скільки δ залежить від цього співвідношення. Графік рис. 66 має на меті визначити відношення моментів граничного стану статично невизначної балки M_B і M залежно від того самого відношення μ в пружному стані. Для цього треба знати рівняння кривої *OBA*. Як уже відзначено, ця крива може бути одержана експериментально і буде різна для різних матеріалів. Навряд чи можна припустити велику різницю в кривих *OBA* для різних сталей. Щоб з'ясувати від розрахунку, припустимо, що крива *OBA* є парабола другого степеня з рівнянням

$$(1-x)^2 = 1-y,$$

тобто

$$1 - \frac{M_B}{M} = (1-\mu)^2$$

Порядок розрахунку одержуємо такий: за „пружним“ розрахунком практично невизначної системи одержуємо моменти M_B і M і, отже, відношення їх μ . На осі абсцис шукаємо відповідне значення μ . Ордината кривої *OBA* для цього μ дає шукане відношення $M_B:M$ в граничному стані. Можна, звичайно, користуватись не графіком, а рівнянням. Для одержання другої залежності між M_B і M робимо за епюрою моментів балки „неповне вирівнювання“ моментів, як показано на рис. 67. Припустимо, що за „пружним“ розрахунком одержано $M_B:M=0,5$. За графіком або з рівняння знайдемо, що в граничному стані $M_B:M=0,75$. За рис. 67 маємо

$$M' + M_B = 0,75M_T$$

i

$$M - \frac{M'}{2} = M_T$$

Тут M і M_B (рівне $0,5M$) відомі з „пружного“ розрахунку. Визначаємо з написаних вище двох рівнянь M' і M_T . Маючи розрахунковий граничний момент M_T , можемо визначити переріз балки, користуючись, наприклад, формулою (8b).

Отже цей метод розрахунку припускає, що при досягненні граничного стану в перерізі під силою (для даного прикладу) момент на опорі досягає певного значення, меншого ніж M_T , залежно од відношення цих моментів в пружному стані, але відносно більшого, ніж виходить за „пружним“ розрахунком. Розрахунковий момент під силою при цьому відносно зменшиться. Розраховані за цим методом балки потребують меншого перерізу, ніж це потрібно за звичайним розрахунком. Можливість розрахунку за запропонованим методом може бути з'ясована остаточно тільки після проведення відповідних дослідів.

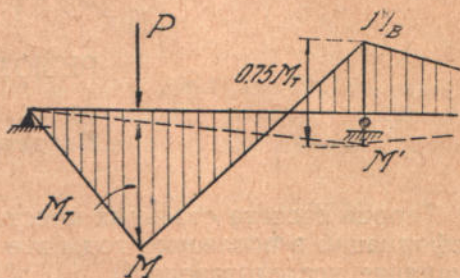


Рис. 67.

РЕЗЮМЕ

Введение

Теория расчета стальных конструкций с учетом пластических деформаций в последние годы все больше и больше привлекает внимание исследователей.

Основы новой теории уже достаточно хорошо разработаны для некоторых конструкций из мягкой стали, имеющей хорошо развитую площадку текучести. Особенно подробно исследованы, как теоретически, так и экспериментально, неразрезные балки. Опыты достаточно хорошо подтверждают теоретические исследования.

Развивающееся в СССР и за границей применение специальных сталей в строительстве и других областях техники ставит на очередь вопрос всестороннего исследования таких сталей и конструкций из них. Специальные стали, вообще говоря, менее пластичны, чем обычная сталь (в СССР — сталь 3), и площадка текучести у них при опыте на разрыв значительно меньше, чем у мягких сталей, а у некоторых сортов отсутствует вовсе (рис. 1).

В настоящей работе исследованы теоретически некоторые задачи расчета стальных конструкций из сталей без площадки текучести, с точки зрения новой „пластической“ теории. Полученные выводы применимы также для конструкций из алюминиевых сплавов, на диаграмме деформаций которых площадка текучести обычно отсутствует (рис. 1*f*).

1. Исследование работы сечения при чистом изгибе

Предельное напряженное состояние сечения. Для сталей с ясно выраженной площадкой текучести предельное состояние сечения характеризуется эпюрой напряжений по рис. 3*a*. Такая эпюра соответствует теоретическому предельному состоянию, когда упругое ядро совершенно исчезает. В действительности это не может иметь места, так как полному исчезновению упругого ядра ($2a = 0$) соответствуют деформации крайних волокон сечения, равные бесконечности. Это положение очевидно

и также следует из выражения, полученного Fritsche, для краевой деформации в случае прямоугольного сечения:

$$\Delta = \pm \Delta_s \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_s}}} \quad (1')$$

Здесь Δ_s — деформация волокон у края зоны текучести, $M_s = \sigma_s \cdot W$ — момент для случая, когда предел текучести достигнут только в крайних волокнах, M — момент для данной стадии деформации.

Для $\Delta = \infty$ получаем условие предельного состояния

$$M = \frac{3}{2} M_s = \sigma_s \cdot \frac{3}{2} W = \sigma_s \cdot T,$$

где T — пластический момент сопротивления, равный для прямоугольного сечения $\frac{b \cdot h^2}{4}$.

В действительности теоретическое предельное состояние никогда не может быть достигнуто и всегда останется некоторая величина упругого ядра $2a$ (рис. 3 б). Практическим предельным состоянием следует считать то, при котором значение момента внутренних сил, вычисленное по эпюре напряжений (рис. 3 б), будет мало отличаться от момента теоретической эпюры (рис. 3 а) или, другими словами, момент сил упругого ядра будет весьма мал по сравнению с моментом сил всего сечения. В зависимости от принятой степени точности определения практического предельного момента (по отношению к теоретическому значению его), будем получать ту или иную величину упругого ядра $2a$. Определенной величине $2a$ соответствует определенная величина деформаций крайних волокон. Например, если предельный момент M'_T подсчитывается с точностью до 1%, т. е. принимаем, что

$$M'_T = 0,99 M_T = 0,99 \cdot \frac{2}{3} M_s,$$

то получим (для прямоугольного сечения) по формуле (1') деформацию крайнего волокна:

$$\frac{\Delta'_T}{2} = 0,7\%$$

При этом $2a = 0,173 h$ и момент сил упругого ядра

$$M_e = 0,02 M_T$$

Если же $M_e \cong 0,01 M_T$, то $\frac{\Delta_T}{2} \cong 1,0\%$. Эти подсчеты показывают, что практическое предельное состояние можно определять или по величине остающегося упругого ядра, или по величине момента сил этого ядра, приняв его около 1% от момента сил всего сечения, или по величине краевых деформаций, которые в этом случае также составляют около 1%. Наиболее удобно, как будет видно из дальнейшего, пользоваться величиной краевых деформаций.

Очевидно, что в принятом определении практического предельного состояния имеется определенная условность, так как и после достижения этого состояния сечение еще может оказывать сопротивление внешним нагрузкам, особенно учитывая период упрочнения, наступающий после периода текучести. Это дает основание распространить данное определение предельного состояния и на стали без площадки текучести. Такие стали также после достижения предела текучести способны к дальнейшему сопротивлению, и полная потеря сопротивления произойдет только тогда, когда начнется действительное разрушение материала. Исходить из такого действительного предельного состояния для случаев изгиба нецелесообразно, так как задолго до начала разрушения деформации балки будут настолько велики, что ее уже нужно будет считать выбывшей из строя. Другими словами, предельное состояние здесь определяется не разрушением, а значительной общей деформацией. Исходить же из общей деформации (прогиба), как критерия предельного состояния, также нецелесообразно, так как это потребовало бы индивидуального подхода к каждой задаче.

Таким образом, предельное состояние в случае изгиба будем определять величиной краевых деформаций порядка единиц процентов. Величину этой деформации для разных сталей будем применять разную, но мало отличающуюся одна от другой в разных случаях, в зависимости от величин предела текучести σ_S . Удобнее даже в расчет вводить не ϵ_T , а отношение $\epsilon_T : \epsilon_S$. Это отношение в дальнейшем принято равным 10, что и соответствует значениям $\epsilon_T \cong 1,0 - 1,5\%$ для разных сталей.

Отличие „упругой“ теории расчета от „пластической“ иллюстрируется рис. 8. В первом случае (рис. 8а) конструктор при расчетах оперирует с цифрами только с I участком диаграммы деформации, так как предельное состояние здесь определяется величиной ϵ_S в крайних волокнах, т. е. концом I периода. Остальная же часть диаграммы, так сказать, только принимается во внимание. „Пластическая“ теория основывается на предельном состоянии, которое соответствует концу II участка (рис. 8 б и с); таким образом, в расчет вводится в виде формул и чисел уже дальнейшая стадия деформации. Это позволяет, вообще говоря, повышать действительные напряжения в кон-

струкции, которые всегда все же должны оставаться в пределах l участка.

Изгиб стержней при любом законе деформации. Изгиб стержней из сталей без площадки текучести является частным случаем более общей задачи изгиба стержней при любом законе деформации растяжения и сжатия. Последняя задача рассмотрена Nádaí. Рис. 9 показывает диаграмму σ, ε . Закон растяжения и сжатия разный. На рис. 10 показано сечение, эпюра напряжений и деформаций. Уравнение диаграммы деформации

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

Условия равновесия для сечения:

$$\int \sigma \cdot dF = 0 \quad \text{и} \quad \int \sigma \cdot dF \cdot \eta = M$$

Второе уравнение после преобразований получит вид:

$$M = \rho^2 \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi(\rho\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon,$$

где ρ — радиус кривизны, $\Phi(\rho\varepsilon) = b_\eta$ — переменная ширина сечения.

Для прямоугольного сечения

$$M = \frac{h^2 \cdot b}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

Для балки длиной l с центральным углом деформированной оси 2θ получим:

$$\theta = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot l}{2h}$$

Пользуясь двумя последними выражениями, Nádaí показывает возможность получения по опытным величинам M и θ зависимости σ, ε . Нас же интересует вопрос определения момента M для любой стадии деформации, в частности для принятого нами предельного состояния.

Эпюра напряжений предельного состояния. Выше было указано, что практически предельным состоянием мы приняли такое, при котором сопротивление упругого ядра настолько мало, что им можно пренебречь. Рис. 12 *a—e* наглядно показывают, как падает роль упругого ядра с возрастанием деформаций крайних волокон. По оси абсцисс отложены деформации ε , по оси ординат — относительная величина момента сил упругого ядра, выраженная в процентах, т. е. $100 \frac{M_e}{M}$. Графики рис. 12 построены при разных диаграммах деформации для прямоугольного и двутаврового сечений. Эти графики показывают, что

при $\varepsilon \cong 1\%$ момент M_e также составляет около 1% от M в случае прямоугольного сечения. Для двутавровых сечений величина $\varepsilon \cong 1\%$ соответствует величине M_e даже меньше, чем 1% от M . В дальнейшем везде, как уже отмечено раньше, практическое предельное состояние определяем отношением $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$. Малая величина момента M_e и деформаций крайних волокон ε позволяет без большой погрешности принять для расчетов диаграмму деформаций, одинаковую для растянутых и сжатых волокон (рис. 14). Кроме того, можно кривую Π участка деформации заменить прямой (рис. 15). Наконец, эпюра напряжений предельного состояния может быть принята согласно рис. 17 б, т. е. совсем без упругого ядра, что значительно упрощает расчеты.

Таким образом, все принятые упрощения и допущения сводятся к следующему:

1. Сечения остаются плоскими, как при упругом изгибе, так и при упруго-пластическом.

2. Практическое предельное состояние определяется такой величиной упругого ядра, при которой момент сил этого ядра составляет около 1% или меньше от момента сил всего сечения, или $\varepsilon_T : \varepsilon_S \cong 10$.

3. В пределах до принятого предельного состояния диаграмма деформаций принимается состоящей из двух прямых участков.

4. Закон деформаций для растянутых и сжатых волокон считается одинаковым.

5. Эпюра напряжений предельного состояния принимается согласно рис. 17 б, т. е. без упругого ядра.

6. Повышение предела текучести при изгибе и поддерживающее действие упруго напряженных частей балки не учитывается.

Исследование напряжений при изгибе балок прямоугольного сечения. По уравнению, выведенному Nádaí (см. выше), или непосредственно по рис. 18, получим для упруго-пластического состояния

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha^2} + \alpha^2 - 3 \right) \right] \quad (5)$$

Здесь $T = \frac{b \cdot h^2}{4}$ — пластический момент сопротивления, $\alpha = \frac{2a}{h}$ — относительная высота упругого ядра, $m = E_1 : E$ — отношение модулей упругости Π и I участков диаграммы в соответствии с рис. 15.

При $m = 0$, т. е. для идеально пластического материала, получим

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \quad (5a)$$

Последнее равенство есть не что иное, как преобразованное выражение (1'), выведенное Fritsche.

Равенство (2) не позволяет определить величину момента предельного состояния, положив $\alpha = 0$. При таком значении α момент $M_T = \infty$. Этот результат был бы вполне логичен, если бы принятая диаграмма деформаций (рис. 15) — возрастание II участка по линейному закону — не имела бы ограничения.

Для получения значения предельного момента нужно воспользоваться непосредственно рис. 17 *b*, который позволяет сразу написать

$$M_T = \sigma_S \cdot T + \sigma' \cdot W \quad (8)$$

Заменив σ' его значением

$$\sigma' = (\varepsilon_T - \varepsilon_S) \cdot E_1,$$

получим

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + \frac{2m}{3} \cdot \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} - 1 \right) \right] \quad (8a)$$

Так как при принятом предельном состоянии величина, стоящая в прямых скобках, является постоянной для данного материала, то поэтому можно написать

$$M_T = \beta \cdot \sigma_S \cdot T \quad (8b)$$

При $\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} = 10$ и изменении m от 0,01 до 0,10, β изменяется в пределах от 1,06 до 1,60.

Таким образом, специальные стали без площадки текучести имеют повышенное сопротивление по сравнению с обычными мягкими сталями не только вследствие более высокого значения σ_S , но и вследствие наличия в расчетной формуле коэффициента β , который больше единицы.

Двутапное сечение. Аналогично предыдущему, по рис. 20 получим для упруго-пластического состояния, в случае $2a < h_1$,

$$M = \sigma_S \cdot \left(T - \frac{W_e}{2} \right) + \sigma_S \cdot m \cdot \left[T \cdot \left(\frac{2}{3\alpha \cdot k} - 1 \right) + \frac{W_e}{2} \right] \quad (9a)$$

Здесь W_e — момент сопротивления упругого ядра, т. е.

$$W_e = \frac{2d \cdot a^2}{3}.$$

$k = T : \frac{3}{2} W$, причем среднее значение k для разных типов и номеров двутавров $k \cong 0,78$,

$$T = \frac{b \cdot (h^2 - h_1^2)}{4} + \frac{d \cdot h_1^2}{4}$$

Если $2a > h_1$, то получим

$$M = \sigma_S \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) + \sigma_S \cdot W_e + \frac{\sigma_S \cdot m \cdot b}{3a} \cdot \left(\frac{h^3}{4} + a^3 - \frac{3}{4} h^2 \cdot a \right) \quad (10)$$

При $2a = h_1$, формулы (9а) и (10) дают одинаковый результат:

$$M = \sigma_S \cdot \frac{b}{4} \cdot \left(h^2 - h_1^2 \right) + \sigma_S \cdot \frac{d \cdot h_1^2}{6} + \frac{\sigma_S \cdot m \cdot b}{6h_1} \cdot \left(h^3 + \frac{h_1^3}{2} - \frac{3}{2} h^2 \cdot h_1 \right) \quad (11)$$

В предельном состоянии, согласно рис. 22, получим по прежнему

$$M_T = \sigma_S \cdot T + \sigma' \cdot W$$

или после преобразований

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} \cdot \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} - 1 \right) \right] \quad (12)$$

$$\text{Здесь } T = \frac{3}{2} k \cdot W.$$

Приняв среднее значение $k = 0,78$, можем считать выражение в прямых скобках постоянной величиной при заданном m . Обозначая его γ , получим

$$M_T = \gamma \cdot \sigma_S \cdot T, \quad (12b)$$

причем γ больше β (см. 8б). При $m = 0,01, \dots, 0,10$ величина $\gamma = 1,08, \dots, 1,77$. Следовательно, двутавровые сечения выгоднее прямоугольных с точки зрения дополнительного сопротивления, обусловленного отсутствием площадки текучести.

Тавровое сечение. При переходе в упруго-пластическое состояние, нейтральная ось не совпадает с центральной. В случае одной зоны текучести (рис. 23) положение нейтральной оси найдем из условия $\sum x = 0$, а именно:

$$v = -\frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (13)$$

Значение момента

$$M = \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) \right] \cdot \sigma_S \quad (14)$$

При двух зонах текучести (рис. 24)

$$v = \frac{F_0}{F} \cdot \left\{ y_0 - e_0 \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (15)$$

Момент

$$M = \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + S_{x_1}^0 + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) + \frac{m \cdot F_0 \cdot e_0}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_0 \right) \right] \cdot \sigma_S \quad (16)$$

В предельном состоянии v_T и M_T определяем по рис. 25:

$$v_T = - \frac{m \cdot v \cdot 2S_x^u + (2F_u - F) \cdot y_u}{m \cdot v \cdot F + 2F_u - F}, \quad (17)$$

где

$$v = \frac{\varepsilon_T^u}{\varepsilon_S} - 1$$

Предельный момент

$$M_T = \sigma_S \cdot T_{x_1} + \sigma'_u \cdot W_{x_1}^u \quad (19)$$

Здесь

$$T_{x_1} = |S_{x_1}^0| + |S_{x_1}^u| \quad \text{и} \quad W_{x_1}^u = \frac{J_{x_1}}{e_u}$$

После преобразований

$$M_T = \sigma_S \cdot (T_{x_1} + m \cdot v \cdot W_{x_1}^u) \quad (19a)$$

или

$$M_T = \sigma_S \cdot \left[2S_x + v_T \cdot (F_u - F_0) + \frac{m \cdot v}{J_u + v_T} \cdot (J_x + F \cdot v_T^2) \right] \quad (19b)$$

Полученные формулы действительны для любых сечений, имеющих одну ось симметрии, например, для несимметричных двутавров, коробчатых сечений и т. п.

Работа прямоугольного сечения при другом законе деформации волокон. Для материалов, не имеющих резко выраженного предела текучести, т. е. в случае плавного перехода от I ко II участку диаграммы, затруднительно воспользоваться полученными выше результатами, так как трудно установить определенную величину $m = E_1 : E$. На рис. 31 приведен пример такой диаграммы для марганцевой стали (Mn 13%). В таких случаях следует учесть криволинейный характер II участка и принять для него уравнение параболы второй степени (рис. 26):

$$\varepsilon' = p \cdot \sigma'^2$$

или

$$\sigma' = n \cdot \sqrt{\varepsilon'},$$

где $n = \frac{1}{V_p}$. В пределах $\varepsilon = 1 - 2\%$ всегда можно подобрать параболу 2-й степени. Вместо предела текучести σ_s мы здесь пользуемся пределом пропорциональности σ_p , как более определенной величиной при такой диаграмме.

По рис. 27 получим значение момента для любой стадии деформации:

$$M = W_e \cdot \sigma_p + \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot b \cdot \sigma_p + \frac{2b \cdot n \cdot a \cdot (3h + 4a)}{15\varepsilon_p} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{h}{2a} - 1 \right)} \right)^3 \quad (20)$$

Значение предельного момента (рис. 28), пренебрегая, как и раньше упругим ядром,

$$M_T = \sigma_p \cdot T \cdot \left[1 + \frac{4n}{5\varepsilon_T^2 \cdot \sigma_p} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \right] \quad (21a)$$

Обозначая выражение в прямых скобках, которое при заданном ε_T является постоянной величиной для данного материала, через β_1 , получим

$$M_T = \beta_1 \cdot \sigma_p \cdot T \quad (21b)$$

Для двутаврового сечения (обозначения по рис. 29), получим

$$M_T = \sigma_p \cdot T - (b - d) \cdot \frac{n \cdot h^2}{5\varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} - \varepsilon_p} \right)^3 + \frac{n \cdot h^2 \cdot b}{5\varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \quad (23)$$

2. Касательные напряжения при изгибе

Касательные напряжения при пластических деформациях для сталей с площадкой текучести. Fr. Stüssi исследовал касательные напряжения для прямоугольного сечения, пользуясь обычным выражением (рис. 33)

$$\tau = \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma}{\Delta x} \cdot dz$$

Величины $\frac{\Delta \sigma}{\Delta x}$, представляющие собой приращение касательных напряжений на единицу длины балки, Stüssi определял, пользуясь

диаграммой деформации стали с площадкой текучести, причем он учел переходной участок диаграммы от σ_p к σ_s и упрочнение после площадки текучести. Эпюры касательных напряжений для разных стадий деформаций изображены на рис. 35 а и 35 б. Величина τ_{\max} определяется формулой

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

Значения α для разных стадий деформации можно прочесть на указанных рисунках. На рис. 37 представлен график зависимости σ и τ от P для частного случая балки на двух опорах с силой в середине пролета.

Основываясь на теории прочности Mohr-a и опытах Rös-a и Eichinger-a, т. е. исходя из условия, что предел текучести при сдвиге $\tau_s \cong 0,6\sigma_s$, Stüssi получил предельные значения поперечной силы, при которых касательные напряжения еще не оказывают влияния на коэффициент безопасности, принятый при расчете по „пластической“ теории. Stüssi получил:

Для прямоугольного сечения $Q_{\text{доп}} \leq 0,13 b \cdot h \cdot \sigma_{\text{доп}}$.

Для двутаврового сечения $Q_{\text{доп}} \leq 0,16 d \cdot h \cdot \sigma_{\text{доп}}$.

Для случая идеально пластического материала легко получить аналитически значение касательных напряжений. Эпюры напряжений последовательно получают вид согласно рис. 38. Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F_e}$$

Так как площадь упругого ядра $F_e = b \cdot 2a$ и $\frac{2a}{h} = \alpha$, то

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\alpha \cdot F} \quad (29a)$$

Здесь α обратная величина того же обозначения у Stüssi.

Исключая Q , выразив его через M , и вставляя его значение по (3), получим для балки на двух опорах пролетом l

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} \right) \quad (30b)$$

Здесь h — высота прямоугольного сечения, ξ — коэффициент, зависящий от схемы нагрузки. Та же формула остается и для балки, защемленной одним концом. Значение ξ для некоторых случаев нагрузки следующее:

сосредоточенная сила в середине пролета $\xi = \frac{3}{4}$

сосредоточенные силы в третях пролета $\xi = \frac{9}{8}$

сосредоточенная сила на конце консоли $\xi = \frac{3}{8}$

сплошная равномерная нагрузка на консоли $\xi = \frac{3}{4}$

Для принятого нами предельного состояния, определяемого отношением $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$, получим

$$\alpha = \frac{2a}{h} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_T} = 0,1$$

и

$$\tau_{\max} = \xi \cdot 9,97 \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S \cong \xi \cdot 10 \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S$$

Для простой балки с силой в середине пролета, при $h:l = 0,1$, получим:

$$\tau_{\max} \cong \frac{3}{4} \sigma_S$$

Если имеем две равных силы в третях пролета, то

$$\tau_{\max} \cong \frac{9}{8} \sigma_S$$

В обоих случаях $\tau_{\max} > \tau_S \cong 0,6\sigma_S$.

В тех случаях, когда получается $\tau_{\max} > \tau_S$, рекомендуется изменить сечение так, чтобы τ_{\max} было не больше τ_S . В противном случае наличие больших касательных напряжений будет способствовать ускорению процесса распространения напряжений текучести по высоте сечения. Здесь приобретают большое значение главные напряжения. При больших значениях τ главные нормальные напряжения скорее, т. е. при меньших нагрузках, достигнут значения σ_S и коэффициент безопасности балки окажется ниже, чем это получается при расчете только по нормальным напряжениям. Сказанное выше относится, главным образом, к случаям, когда M_{\max} и Q_{\max} имеют место в одном и том же сечении.

Двутавровое сечение. Если упругое ядро не выходит за пределы стенки, то на основании выведенных раньше формул, получим

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S \cdot \frac{T - \frac{d \cdot a^2}{3}}{a \cdot F} \quad (31b)$$

В практическом предельном состоянии величина $\frac{d \cdot a^2}{3}$ очень мала по сравнению с T . Отбрасывая ее, получим

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \frac{T}{a \cdot F} \quad (32)$$

Касательные напряжения для сталей без площадки текучести. Прямоугольное сечение. На рис. 41 дана эпюра нормальных напряжений. Касательные напряжения

$$\tau_z = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1$$

Пользуясь рис. 42 и зависимостями

$$\sigma_{z_1} = \sigma_s + \sigma'_{z_1} \quad \text{и} \quad \sigma'_{z_1} = (\varepsilon_{z_1} - \varepsilon_s) \cdot E_1,$$

получим после преобразований

$$\tau_z = \sigma_s \cdot \frac{m}{a^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33)$$

Для нахождения $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ нужно знать уравнение кривой, ограничивающей зону текучести, которое легко написать в каждом частном случае. Например, для балки на двух опорах с силой P посередине пролета получим из условий статики и по (5):

$$M = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

Дифференцируя по x , получим значение $\frac{da}{dx}$, заменив предварительно α на $\frac{2a}{h}$. Далее, обозначая $\left[\frac{8a}{3h^2} - \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{8a}{h^2} - \frac{h}{a^2} \right) \right]$ через C и подставляя $\frac{P}{2} = Q$, получим:

$$\tau_z = \frac{m}{2a^2} \cdot \frac{Q}{T \cdot C} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33a)$$

Если T выразить через J , т. е.

$$T = \frac{3}{2} W = \frac{3J}{h},$$

то получим

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot x, \quad (33b)$$

где

$$S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{1}{\alpha^3 - m \cdot (\alpha^3 - 1)}$$

Формула (30b) дает значение касательных напряжений в пластической части сечения. Аналогичным путем легко получить значение τ_z в пределах упругого ядра. Окончательный результат получим в виде

$$\tau_z = \frac{Q}{J \cdot b} \cdot (S_z^a + m \cdot S_a) \cdot \kappa \quad (34)$$

S_z^a — статический момент части сечения между z и a (рис. 44), S_a — то же для части сечения выше a . Называя $S_z^a + m \cdot S_a$ приведенным статическим моментом и обозначая его S_z' , получим

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S_z'}{J \cdot b} \cdot \kappa \quad (34a)$$

Формулы (29a), (30b), (31b) и (32) действительны не только для рассмотренной задачи балки на двух опорах с силой P , но и для всякой другой схемы, так как вывод формул основан на дифференцировании M по x , что, как известно, дает значение Q независимо от схемы нагрузки.

Двутавровое сечение. Таким же методом, как и для прямоугольного сечения, получим значение касательных напряжений в пластической части стенки

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \cdot \kappa_1 \quad (35)$$

и для упругого ядра

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z'}{J \cdot d} \cdot \kappa_1 \quad (35a)$$

Здесь

$$\kappa_1 = \frac{1}{\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - m \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{d \cdot a^3}{J} - 1 \right)}$$

Приближенные значения касательных напряжений для предельного состояния получим, если в выведенных формулах положить $\alpha = 0$ (или $a = 0$). Тогда получим

$$\kappa = \frac{1}{m} \quad \text{и} \quad \kappa_1 = \frac{1}{m}$$

и

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot b \cdot m} \text{ — для прямоугольного сечения,}$$

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot d \cdot m} \text{ — для двутаврового сечения}$$

При нахождении τ_{\max} можно сделать дальнейшее упрощение, заменив весьма малую величину статического момента упруго-напряженной части сечения $S'_z \alpha = 0$ величиной $m \cdot S'_{z=0}$. Тогда получим такие же формулы, как и при „упругом“ расчете:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b}, \quad (36a)$$

и

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \quad (37a)$$

На рис. 47 показан график зависимости τ_{\max} и σ (для крайних волокон) от P для случая нагрузки, приведенного на том же рисунке. Видно, как при приближении к предельному состоянию ($\varepsilon \cong 1\%$ и больше) кривая касательных напряжений приближается к прямой $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b \cdot h}$ „упругого“ расчета. Максимум τ_{\max}

получился при $\alpha \cong 0,3$. На верхней горизонтальной шкале отложены α и ε . Пунктирные линии относятся к идеально пластическому материалу, т. е. для $m = 0$.

Касательные напряжения при параболическом законе деформации. Метод исследования касательных напряжений такой же, как и в предыдущем случае. В случае прямоугольного сечения получим для напряжений в нейтральном слое

$$\tau_{\max} = \frac{15 \alpha \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 10 n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (1 + 2\alpha) \cdot \sqrt{1 - \alpha}}{10 \alpha^2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 2 n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (3 + 4\alpha + 8\alpha^2) \cdot \sqrt{1 - \alpha}} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (43)$$

Здесь буквенные обозначения те же, что и раньше. Для предельного состояния, когда α стремится к нулю, получим

$$\tau_{\max} = \frac{5}{3} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (44)$$

Таким образом, здесь τ_{\max} в предельном состоянии имеет относительно большую величину, чем в предыдущем случае [формула (35)]. Это видно и на графике рис. 48, где кривая касательных напряжений не стремится к совпадению с прямой „упругого“ расчета, как это было на рис. 47. Кроме того, пик кривой τ здесь менее резко выражен, чем на кривой рис. 47.

Рассмотрение кривых рис. 47 и 48 показывает, что соотношение нормальных и касательных напряжений в упруго-пластической зоне значительно нарушается по сравнению с упругой зоной.

Отсюда следует, что закон изменения главных напряжений в функции нагрузки также существенно изменится. Общие формулы главных напряжений

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

конечно, останутся те же, так как они выведены из условий равновесия, но вместо σ и τ нужно вставить их значения для упруго-пластического состояния, т. е., в случае прямоугольного сечения

$$\sigma = \sigma_s \cdot \left[1 + m \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right) \right]$$

$$\tau = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot z$$

или

$$\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right)}$$

$$\tau = \frac{n}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left[\left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} - \left(\frac{z}{a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{z}{a} - 1} \right]$$

в зависимости от закона деформации второго участка диаграммы деформации. Решение задачи главных напряжений в общем виде получается сложным и здесь не рассмотрено.

3. Сложное сопротивление — изгиб с продольной силой

К. Girkmann вывел для случая идеально-пластического материала зависимость между M и N в предельном состоянии:

$$h^2 - \frac{N^2}{\sigma_s^2} - \frac{4M}{\sigma_s} = 0, \quad (46')$$

что относится к прямоугольному сечению шириной $b=1$. Это выражение получено из рассмотрения равновесия внутренних и внешних сил в предельном состоянии.

Аналогичную зависимость можно получить и для сталей без площадки текучести, как для промежуточной стадии деформа-

ции (рис. 49), так и для предельного состояния (рис. 50). В последнем случае получим

$$\begin{aligned}
 M + \frac{4N^2}{3b \cdot \sigma_S} \cdot \frac{3 + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2)}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} = \\
 = \frac{N \cdot h \cdot m \cdot (c_1 - c_2)}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} \cdot \left\{ \frac{8}{3} + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2) \right\} + \\
 + \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_S}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} \cdot \left\{ 4 + m \cdot (c_1 + c_2) \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{m^2 \cdot c_1 \cdot c_2}{3} \right) + \right. \\
 \left. + \frac{m^2}{2} \cdot \left(c_1^2 + c_2^2 + \frac{16}{3} c_1 \cdot c_2 \right) \right\} \quad (46)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$c_1 = \frac{\varepsilon_1^0}{\varepsilon_S} - 1 \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{\varepsilon_2^0}{\varepsilon_S} - 1$$

Если $m = 0$ и $b = 1$, то (46) переходит в (46'). Для практического пользования уравнение (40) очень сложно и поэтому следует в каждом частном случае расчет вести в числах, приводя уравнение к виду

$$M + \frac{N^2}{b \cdot \sigma_S} \cdot A = N \cdot h \cdot B + b \cdot h^2 \cdot \sigma_S \cdot C \quad (46'')$$

A, B, C — величины постоянные для данного материала при заданной величине предельного состояния ε_1^0 . Исследования в числах показали, что член, содержащий N в первой степени, имеет малое значение и может быть отброшен. Тогда получим

$$M + \frac{N^2}{b \cdot \sigma_S} \cdot A = b \cdot h^2 \cdot \sigma_S \cdot C \quad (46''')$$

Расчет сводится к тому, чтобы, подобрав сечение, удовлетворить этому условию предельного состояния. M и N относятся к предельному состоянию, т. е. получены после умножения заданных величин на коэффициент безопасности.

4. Сравнение относительной выгодности сечений разной формы

Сравнение проведено для прямоугольных сечений, двугавровых сортамента СССР 1926 г., то же сортамента 1932 г. и сварных двугавров (данные для них в таблице на с. 23 первой

части нашей работы). Обычным критерием относительной выгодности сечения является величина радиуса ядра сечения, т. е.

$$r = \frac{W}{F}$$

В дальнейшем для сравнительной оценки сечений принято отношение полной длины ядра сечения $2r$ к высоте сечения h . Для двутавровых сечений это отношение относительно мало меняется для разных номеров и поэтому сравнение ведется по средним величинам для данного сорта металла. Коэффициентом относительной выгодности сечения ζ мы называем отношение длин ядра сечений при одинаковой высоте сечения h . В таблице даны значения $2r:h$ и ζ при „упругом“ расчете Коэффициенты ζ вычислены по отношению к прямоугольному сечению.

	Прямоугольное сечение	Двутавры 1926 г.	Двутавры 1932 г.	Сварные двутавры	
				№ 18—60	№ 70—100
$2r:h$	0,333	0,630	0,625	0,736	0,588
ζ	1,00	1,89	1,88	2,21	1,77

Аналогичные данные приведены в следующей таблице для случая „пластического“ расчета при идеально пластическом материале. Вводится условное понятие „пластического“ радиуса ядра сечения

$$r_p = \frac{T}{F}$$

	Прямоугольное сечение	Двутавры 1926 г.	Двутавры 1932 г.	Сварные двутавры	
				№ 18—60	№ 70—100
$2r:h$	0,500	0,736	0,731	0,815	0,694
ζ	1,00	1,47	1,46	1,63	1,33

Как видно, относительная выгодность прямоугольных сечений при пластическом расчете повышается. Конечно, двутавровые сечения остаются выгоднее прямоугольных, но степень выгодности их меньше, чем при „упругом“ расчете. При отсутствии площадки текучести, когда второй участок диаграммы деформаций определяется величиной $m = E_1 : E$, „пластические“ ради-

усы ядра сечения для прямоугольного и двутаврового сечений соответственно равны:

$$r'_p = \frac{\beta \cdot T}{F} = \beta \cdot r_p \quad \text{и} \quad r'_p = \frac{\gamma \cdot T}{F} = \gamma \cdot r_p$$

Величины β и γ зависят от m [см. ф-лы (8a) (8b) (12) и (12b)]. В таблице даны значения $2r'_p : h$ и ζ при разных значениях m .

	m	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
Прям. уг. сечение	$2r'_p : h$	0,53	0,56	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,74	0,77	0,80
Двутавры 1932 г.	$2r'_p : h$	0,785	0,843	0,900	0,956	1,012	1,070	1,126	1,180	1,238	1,295
	ζ	1,48	1,50	1,53	1,54	1,56	1,57	1,58	1,59	1,61	1,62
Двутавры № 18—60	$2r'_p : h$	0,878	0,942	1,007	1,070	1,132	1,196	1,260	1,321	1,385	1,450
	ζ	1,66	1,68	1,71	1,73	1,74	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81
Сварные № 7,7—103	$2r'_p : h$	0,747	0,802	0,805	0,909	0,962	1,016	1,071	1,123	1,179	1,232
	ζ	1,41	1,43	1,45	1,47	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54

Как видно из этой таблицы, при отсутствии площадки текучести относительная выгодность двутавровых сечений повышается, но не достигает значений „упругого“ расчета.

На рис. 51 и 52 представлены графики зависимости $2r : h$ и ζ от m . Горизонтальные прямые соответствуют „упругому“ расчету. Имея данные для определенного материала (величину m), по этим графикам легко получить необходимые данные для оценки сравнительной выгодности сечений.

В приведенном сравнении учтен только один фактор, оказывающий влияние на увеличение несущей способности сечения, а именно, учет пластических деформаций при расчете балки. Другой фактор — повышенный предел текучести специальных сталей — может быть учтен путем сравнения удельных значений предельных моментов, т. е. отнесенных к единице площади.

При упругом расчете „получим“

$$\frac{M_S}{F} = \frac{\sigma_S \cdot W}{F} = \sigma_S \cdot r$$

При „пластическом“ расчете

$$\frac{M_T}{F} = \sigma_s \cdot \frac{T}{F} = \sigma_s \cdot r_p \quad \text{и} \quad \frac{M_T}{F} = \sigma_s \cdot \beta \cdot \frac{T}{F} = \sigma_s \cdot r'_p$$

Можно построить графики, аналогичные рис. 51 и 52 для конкретных материалов, если известны для них m и σ_s . При сравнении сечений с учетом σ_s , необходимо принять во внимание коэффициент безопасности, который, вообще говоря, будет разный при „упругом“ и „пластическом“ методах расчета.

Проделанные исследования приводят к следующим выводам:

1. Балки из сталей без площадки текучести могут проектироваться меньших сечений, чем при наличии этой площадки, если даже предел текучести в обоих случаях одинаков.

2. Балки одинакового сечения, спроектированные из разных сталей, имеющих одинаковый предел текучести и временное сопротивление, но отличающиеся видом диаграммы деформаций после предела текучести, имеют разный коэффициент безопасности. Чем круче II участок диаграммы и чем более плавный переход от I ко II участку, тем коэффициент безопасности больше.

3. В балках из сталей без площадки текучести действительные напряжения могут быть допущены большей величины, чем при наличии такой площадки.

4. Следует ли балки из сталей без площадки текучести рассчитывать по „пластической“ теории, или, основываясь на выводах этой теории, применять обычный „упругий“ расчет, но при повышенных допускаемых напряжениях, необходимо выяснить дальнейшим изучением. Этот вопрос возникает в связи с относительной сложностью некоторых полученных нами расчетных формул.

5. Необходимо сравнительное экспериментальное исследование балок разных сечений из разных сортов сталей для проверки полученных выводов и обоснования принятого предельного состояния.

6. Относительная выгодность разных сечений, оцениваемая отношением момента сопротивления к площади сечения, получается разная при „упругом“ и „пластическом“ расчетах. При „пластическом“ расчете двутавровые сечения остаются выгоднее прямоугольных, но коэффициент относительной выгодности несколько уменьшается, в среднем на 23% при идеально пластическом материале.

7. В случае стали без площадок текучести, коэффициент относительной выгодности сечения больше на 5—10%, чем для идеально пластического материала. Этот коэффициент мало меняется при разных значениях m в пределах от 0,01 до 0,10.

8. Для оценки относительной выгодности балок из конкретных сталей, необходимо еще учитывать величину предела те-

кучести. При сравнении с данными „упругого“ расчета необходимо также учесть коэффициент безопасности, который еще твердо не установлен для „пластического“ расчета и, вообще говоря, может отличаться от такового при „упругом“ расчете.

Примеры расчета статически определимых балок. Рассматривается случай действия только статической нагрузки. Проведенные примеры имеют целью иллюстрировать применение выведенных выше расчетных формул и показать на частных примерах, что применение „пластической“ теории ведет к более экономному проектированию. Экономический эффект получается больше, если материал не имеет площадки текучести. Для выяснения влияния на подбор сечения только метода расчета („упругого“ или „пластического“) предел текучести во всех случаях принят одинаковым (рис. 53 *a, b, c*). Коэффициент безопасности при „пластическом“ методе принят $n_T = 2$, при „упругом“ — $n_S = 1,71$.

Пример 1. Балка на двух опорах пролетом $l = 1$ м с силой $P = 10$ т в середине пролета. Сечение прямоугольное с заданным соотношением сторон $b:h = 1:2$. Результаты расчета сведены в таблицу:

Метод расчета	Диаграм. деформации	Расчетная формула	R_b	n_S или n_T	$b \cdot h$	F см ²	%	Действ. напряжен.	Запас по отнош. к σ_S
„Упругий“		$W = \frac{M}{R_b}$	1400	1,71	6,42 · 12,85	82,5	100	1400	1,71
„Пластич.“	рис. 53 <i>a</i>	$T = \frac{M}{R_b}$	1200	2	5,93 · 11,87	70,4	85,4	1800	1,29
„	рис. 53 <i>b</i>	$T = \frac{M}{\beta \cdot R_b}$	1200	2	5,60 · 11,20	62,8	76,2	2140	1,12
„	рис. 53 <i>c</i>	$T = \frac{M}{\beta_1 \cdot R_b}$	1200	2	5,27 · 10,57	56,6	68,6	2560	0,94

Предел текучести по всем случаям $\sigma_S = 2400$ кг/см². В диаграмме рис. 53 *b* принято $m = 0,03$, в диаграмме рис. 53 *c* параметр $n = 12500$ кг/см² (см. стр. 113). В последнем случае действительные напряжения получились даже несколько больше σ_S , хотя коэффициент безопасности по отношению к принятому предельному состоянию принят достаточным, а именно, $n_T = 2$. При диаграмме вида рис. 53 *c*, по нашему мнению, можно допустить действительные напряжения несколько больше σ_S (или, точнее говоря, σ_p , т. к. здесь нет ясно выраженного предела текучести). Благодаря плавному переходу диаграммы от σ_p ко второму участку деформации небольшое превышение предела пропорциональности

не приводит к значительным остаточным деформациям. При расчете по „пластическому“ методу во всех случаях необходима проверка упругого прогиба и сравнение его с допусковым, определяемого нормами в зависимости от условий эксплуатации.

Пример 2. Сварная двутавровая балка рассчитывается на момент $M = 3740000 \text{ см}$. Сечение подбирается по таблице сварных двутавров, приведенной в первой части нашей работы (стр. 23). В основу расчета положены те же диаграммы деформаций, что и в примере 1. Результаты расчета сведены в таблице.

Метод расчета	Диаграм. деформации	Расчетная формула	R_b	n_S или n_T	Номер двутавра	$F \text{ см}^2$	%	Действит. напряжен.	Запас по отношению к σ_S
„Упругий“	—	$W = \frac{M}{R_b}$	1400	1,71	№ 50	151,8	100	1400	1,71
„Пластич.“	рис. 53 а	$T = \frac{M}{R_b}$	1200	1,91	№ 50	151,8	100	1400	1,71
„	рис. 53 б	$T = \frac{M}{\gamma \cdot R_b}$	1200	1,96	№ 45	134,6	88,7	1680	1,43
„	рис. 53 с	Формула (23)	1200	1,98	№ 40	126,8	83,5	1980	1,21

Сопоставление данных 1 и 2 примера показывает, что при $n_T = 2$ экономия в сечениях двутавровых получается относительно выше, чем в прямоугольных, при применении „пластического“ метода расчета.

ДОБАВЛЕНИЕ

Основы расчета статически неопределимых балок

Новые данные о расчете балок из сталей с площадкой текучести. Как известно, расчет статически неопределимых балок по „пластической“ теории сводится к выравниванию моментов и подбору сечений по формуле

$$T = \frac{M}{R_b} \quad \text{или} \quad T = \frac{M_T}{\sigma_S},$$

где M — значение выравненного момента. Ряд известных экспериментальных работ (особенно опыты G. Grüning-a и E. Kohl-я) достаточно хорошо подтвердили имеющий место процесс выравнивания моментов. Вместе с тем, при большой разнице и величинах моментов опасных сечений, еще до достижения предельного состояния во втором опасном сечении, напряжения

первого сечения могут уже оказаться соответствующими зоне упрочнения. Таким образом, здесь никогда не наступит выравнивание моментов. Кроме того, выравнивание или максимальное сближение моментов опасных сечений имеет место уже после того, как общие деформации балки (прогиб) достигнут столь большой величины, что сопротивление балки придется считать исчерпанным по прогибу.

Fr. Stüssi и С. F. Kollbrunner показали, что вообще полное выравнивание моментов никогда не имеет места. Stüssi рассмотрел случай, изображенный на рис. 54. Опорный момент

$$M_B = - \frac{3l_2}{4l_1 + 6l_2} \cdot M_0 = - \delta \cdot M_0$$

Исследуемый случай можно рассматривать, как промежуточный между двумя крайними: свободно лежащая однопролетная балка, т. е. $M_B = 0$, и жестко защемленная балка, для которой $M_B = = 0,5M_0$. На рис. 55 показан график, построенный Stüssi, показывающий зависимость $P_T : P_1$ от $\frac{1}{1 - \delta}$ при разных соотношениях

пролетов l_1 и l_2 . Прямая AB соответствует случаю материала, неограниченно подчиняющегося закону Гука. Ломаная ACB соответствует „пластическому“ расчету в случае идеально пластического материала. Этот график показывает, что в последнем случае, независимо от соотношения пролетов l_1 и l_2 , предельная нагрузка трехпролетной балки P_T всегда в два раза больше предельной нагрузки простой балки P_1 (при схеме рис. 54). Очевидно, в случае реального материала скачек от A к C физически немыслим и поэтому Stüssi предполагает, что в действительности изменение предельной нагрузки будет по некоторой кривой ADB . Таким образом, полное выравнивание моментов не имеет места. Произведенные указанными авторами опыты подтвердили изложенное достаточно хорошо. На рис. 56 указана диаграмма зависимости M от P для случая $l_1 : l_2 = 2$. Как видно, опорный момент M_B не выравнивается с моментом в пролете M_m , хотя оба момента и имеют тенденцию к этому выравниванию. Выводы, сделанные авторами, сводятся к тому, что обычный „пластический“ расчет дает преувеличенную несущую способность для неразрезных балок по сравнению с простой балкой. Расчет же по „упругой“ теории приводит к излишнему запасу прочности. Полное выравнивание моментов не имеет места и поэтому расчет следует вести не по выравненным моментам, а по несколько большим величинам.

Статически неопределимые балки из стальных без площадки текучести. Очевидно, что в этом случае выравнивание моментов тем более никогда не произойдет. Вместе с тем можно утверждать, что после перехода предела текучести в каком-либо сечении балки вид эпюры моментов будет иной по сравнению

с „упругой“ эпюрой. Меньший момент начнет возрастать сильнее, а больший — медленнее. Выравнивания моментов не будет, но тенденция к такому выравниванию будет. Задача установления предельного состояния для такой балки неопределенна. Для балки с одной лишней неизвестной можно предложить несколько критериев практического предельного состояния.

1. Предельное состояние сечения достигнуто в первом опасном сечении.

2. Предельное состояние сечения достигнуто во втором опасном сечении.

3. Предельное состояние балки определяется той нагрузкой, при которой моменты в обоих опасных сечениях максимально сблизились.

4. Предельное состояние балки определяется той нагрузкой, при которой общая деформация балки (прогиб) начинает заметно расти без заметного возрастания нагрузки.

Все эти критерии достаточно условны, кроме последнего. Правильное представление о предельном состоянии балки из специальной стали без площадки текучести можно получить только опытным путем. Здесь же мы только наметим возможные пути аналитического решения задачи расчета статически неопределимой балки.

1. Точное решение. Наметим ход решения на частном примере рис. 61. Сечение балки прямоугольное. Рассмотрим сперва случай, когда упруго-пластическое состояние достигнуто только в первом сечении, под силой (рис. 62). Для решения задачи необходимо составить пять уравнений для пяти неизвестных P , M_B , c_1 , c_2 и α_x . Рассматривается случай при заданном $2a$. Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \int_0^{\frac{l}{2} - c_1} \left(\frac{P}{2} \cdot x - M_B \cdot \frac{x}{l} \right) \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \\
 & + \int_{\frac{l}{2} + c_2}^l \left\{ \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) - M_B \cdot \frac{x}{l} \right\} \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \\
 & + \int_{\frac{l}{2} - c_1}^{\frac{l}{2}} \frac{\epsilon_S}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2} + c_2} \frac{\epsilon_S}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \frac{M_B \cdot l}{3E \cdot J}
 \end{aligned}$$

$$2) \frac{P \cdot l}{4} - \frac{M_B}{2} = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

$$3) \frac{P \cdot x}{2} - M_B \cdot \frac{x}{l} = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha_x^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha_x} + \alpha_x^2 - 3 \right) \right]$$

$$4) \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - c_1 \right) - M_B \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} - c_1 \right)}{l} = \sigma_S \cdot W$$

$$5) \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + c_2 \right) - M_B \cdot \frac{\left(\frac{l}{2} + c_2 \right)}{l} = \sigma_S \cdot W$$

Первое уравнение — это в раскрытом виде равенство углов (рис. 61):

$$\tau'_B = \tau''_B$$

Второе и третье — это уравнение (5) для сечений $\frac{l}{2}$ и x . Четвертое и пятое — условия у краев зон текучести. Решение этой системы уравнений в общем виде сложно и не оправдывается поставленной целью. Задавшись разными значениями $2a$, пришлось бы несколько раз решать уравнения. Затем нужно было бы предположить упруго-пластическое состояние и во втором опасном сечении и опять несколько раз решить систему уравнений при разных $2a$ в опорном сечении. Здесь было бы уже восемь неизвестных. Решение этих систем уравнений дало бы возможность построить график, аналогичный рис. 56 и при помощи него определить условную предельную нагрузку, согласно п. 3 на стр. 128. Зная M_B и P , можно найти зависимость прогиба от нагрузки и выяснить предельное состояние, согласно п. 4 той же страницы. Как видно, для выяснения предельного состояния, которое само по себе является слишком условным, такой прием решения очень сложен и не приемлем для решения практических задач.

2. Решение по принципу задачи для балок из разных материалов. Можно считать, что рассматриваемая балка состоит из двух материалов (рис. 63): в упругой части материал имеет модуль E , в пластической — E_1 . Как известно, в этом случае расчет сводится к решению задачи балки из одного материала, но имеющей приведенную ширину

$$b_1 = b \cdot \frac{E_1}{E} = m \cdot b$$

на протяжении, в данном случае, зон текучести. По приведенной ширине вычисляется момент инерции

$$J' = J \cdot [\alpha^3 + m \cdot (1 - \alpha^3)],$$

где $\alpha = 2a : h$. J' меняется в функции x . Таким образом, задача сводится к расчету балки переменного сечения.

Этот, казалось бы, правильный и относительно простой прием решения, все же здесь не применим, так как при таком решении не учитывается сопротивление внутренних сил сечения, которые не заштрихованы на эпюре напряжений рис. 64.

3. Решения по методу кривой неполного выравнивания моментов. Назовем отношение моментов „упругого“ расчета (напр., для случая рис. 61) буквой μ , т. е.

$$\frac{M_B}{M} = \mu$$

Для простой балки $\mu = 0$, для жестко защемленной двумя концами $\mu = 1$. Все остальные случаи статически неопределимых балок с одной лишней неизвестной удовлетворяют условию

$$0 < \mu < 1$$

На рис. 66 по оси абсцисс отложены μ , т. е. отношение моментов „упругого“ расчета, а по оси ординат то же отношение „пластического“ расчета. Если бы материал все время следовал

закону Гука, то график $\frac{M_B}{M}$, μ изображался бы прямой OA .

Аналогично тому, как Stüssi нашел, что отношение предельных нагрузок $P_T : P_{T_0}$ (рис. 55) меняется по некоторой кривой, так и здесь предполагаем, что при переходе в пластическое состояние

зависимость $\frac{M_B}{M}$, μ изобразится кривой OBA (рис. 66).

Как видно, наш график является некоторым видоизменением графика Stüssi и применением его для сталей без площадки текучести. Кривую OBA мы называем кривой неполного выравнивания моментов и предлагаем принять ее в виде параболы второй степени с уравнением

$$1 - \frac{M_B}{M} = (1 - \mu)^2$$

Порядок расчета получается следующий: „упругий“ расчет дает значения M_B и M , т. е. μ . На оси абсцисс находим это значение μ . Ордината, соответствующая этому μ , дает искомое отношение $M_B : M$ для нашего условного предельного состояния.

На рис. 67 показан пример решения для случая, когда $\mu = 0,5$. По графику находим, при $\mu = 0,5$, $M_B : M = 0,75$. На эпюре моментов рис. 67 производим „неполное выравнивание“ моментов, проводя пунктирную линию так, чтобы

$$M' + M_B = 0,75M_T$$

Кроме того,

$$M - \frac{M'}{2} = M$$

Здесь два неизвестных M_T и M' , так как M и M_B известны из „упругого“ расчета.

Как видно, этот метод расчета предполагает, что при достижении практического предельного состояния в сечении под силой, момент на опоре достигнет некоторого значения, меньшего чем M_T , но относительно большего, чем при „упругом“ расчете. Расчетный момент под силой при этом относительно уменьшится. Рассчитанные по такому методу балки потребуют меньшего сечения, чем это требуется по обычному расчету. Возможность расчета балок по такому методу должна быть проверена соответствующими опытами, которые предположено нами провести в недалеком будущем.

RÉSUMÉ

Introduction

La théorie du calcul des constructions en acier, appliquée en tenant compte des déformations plastiques, a attiré toujours plus l'attention des investigateurs pendant ces dernières années.

Les fondements de cette nouvelle théorie sont suffisamment établis actuellement pour certaines constructions en acier doux, qui possède un palier d'écoulement bien développé. Au point de vue théorique et expérimental ce sont les poutres continues qui avaient été examinées d'une manière particulièrement détaillée. Les essais appuient assez heureusement les expérimentations théoriques.

L'utilisation toujours croissante, en URSS et à l'étranger, d'aciers spéciaux pour les constructions et dans les autres domaines de la technique pose en toute actualité l'étude détaillée des aciers de ce genre et des constructions pour lesquelles ceux-ci servent de matériaux. L'acier spécial est généralement moins plastique que l'acier ordinaire (en URSS — l'acier 3) et son palier d'écoulement pendant un essai de traction, est beaucoup moindre que chez l'acier doux. Chez certaines sortes d'acier le palier d'écoulement fait même totalement défaut (fig. 1).

Dans le présent travail, ce sont certains problèmes du calcul des constructions en acier sans palier d'écoulement qui sont examinés au point de vue de la nouvelle théorie de plasticité. Les résultats qu'on a obtenus peuvent être aussi appliqués aux constructions en alliages d'aluminium, au diagramme de déformation desquels le palier d'écoulement ne figure ordinairement pas (fig. 1).

1. Étude du travail de la section soumise à flexion pure

Etat limite de tension de la section. Pour l'acier avec un palier d'écoulement bien prononcé l'état limite de la section est caractérisé par le diagramme des tensions à la fig. 3a. Ce diagramme correspond à l'état limite théorique — lorsque le noyau élastique disparaît entièrement. Or cela ne peut avoir lieu en réalité, puisqu'à la disparition totale du noyau élastique ($2a = 0$) correspondent les déformations des fibres extrêmes de la section, qui égalent l'infini. Cette position est évidente et résulte aussi de l'ex-

pression obtenue par Fritsche pour une déformation de bord dans le cas de section rectangulaire:

$$\Delta = \pm \Delta_S \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - \frac{2M}{M_S}}} \quad (1')$$

Δ_S étant la déformation des fibres au bord de la région d'écoulement, $M_S = \sigma_S \cdot W$ — le moment pour le cas quand la limite d'écoulement est atteinte dans les fibres extrêmes seulement, M — le moment pour la phase donnée de déformation. En posant $\Delta = \infty$ nous obtenons la condition de l'état limite

$$M = \frac{3}{2} M_S = \sigma_S \cdot \frac{3}{2} W = \sigma_S \cdot T,$$

où T est le module de flexion en plasticité, qui égale pour une section rectangulaire $\frac{b \cdot h^2}{4}$.

En réalité l'état limite théorique ne pourra jamais être atteint et il y aura toujours une certaine valeur rémanente du noyau élastique $2a$ (fig. 3 b). L'état limite pratique doit être considéré comme tel quand la valeur du moment des efforts intérieurs, calculée d'après le diagramme des tensions (fig. 3 b), se distingue fort peu du moment dans le diagramme théorique (fig. 3 a), ou, autrement dit, quand le moment des efforts intérieurs du noyau élastique sera de faible dimension comparativement à celui de la section entière. En raison du degré de précision adopté pour déterminer le moment limite pratique (par rapport à sa valeur théorique) nous obtiendrons une valeur telle ou autre pour le noyau élastique $2a$. A la valeur déterminée $2a$ correspond une valeur déterminée de déformation des fibres extrêmes. Ainsi, par exemple, si le moment limite M'_T est calculé à 1 p. c. de précision c'est-à-dire qu'en posant

$$M'_T = 0,99M_T = 0,99 \cdot \frac{2}{3} M_S,$$

nous obtiendrons pour la section rectangulaire, d'après la formule (1') la déformation du fibre extrême

$$\frac{\Delta'_T}{2} = 0,7\%$$

Il résulte de là que $2a = 0,173h$, et le moment des efforts intérieurs du noyau élastique

$$M_e = 0,02M_T$$

D'autre part, si $M_e \cong 0,01M_T$, donc $\frac{\Delta'_T}{2} \cong 1,0\%$. Ces calculs démontrent

qu'on pourra déterminer l'état limite pratique ou bien d'après la valeur rémanente du noyau élastique, ou d'après celle du moment des efforts intérieurs de ce noyau, estimant qu'il égale 1 p. c. environ du moment des efforts intérieurs de toute la section, ou bien encore d'après la valeur des déformations de bord, laquelle dans ce cas vaut aussi 1 p. c. Le plus convenable, comme on le verra plus bas, serait de mettre à profit la valeur des déformations de bord.

Il est évident que la détermination qu'on adopte de l'état limite pratique accuse certains caractères conditionnels, puisque même après que cet état soit atteint la section est encore capable de résistance sous charges extérieures, surtout si on tient compte de la zone d'augmentation des tensions, qui succède à celle d'écoulement. Ce fait permet d'étendre une détermination de l'état limite pareille aux aciers sans palier d'écoulement. Ceux-ci conservent leur propriété de résistance après avoir atteint la limite d'écoulement, et ce n'est que quand commence la destruction du matériau que la capacité de résistance se trouve épuisée. C'est pourquoi il ne serait pas rationnel du tout de partir d'un état limite réel de cette nature pour des cas de flexion, puisque longtemps encore avant le commencement de la destruction, les déformations de la poutre prendront de telles proportions qu'on sera obligé de la changer. Autrement dit, l'état limite est déterminé dans ce cas non par la destruction, mais par une déformation générale et de grande proportion. Il serait hasardeux aussi de partir de la déformation générale (flèche), comme critérium de l'état limite, parce que cela aurait exigé un raisonnement tout individuel du problème.

Ainsi, pour le cas de flexion, nous déterminerons l'état limite par la valeur des déformations de bord de l'ordre des unités du pourcentage. Nous prendrons aussi pour divers aciers des valeurs de déformation différentes, qui se distinguent fort peu de l'une de l'autre pour différents cas en dépendance des valeurs de la limite d'écoulement σ_S . Il serait même plus simple d'introduire dans le calcul non pas ε_T , mais le rapport $\varepsilon_T : \varepsilon_S$. Cette relation dans la suite est supposée comme égale à 10, ce qui est conforme aux valeurs $\varepsilon_T \cong 1,0 - 1,5\%$ pour différents aciers.

La différence qui existe entre les deux théories de calcul — d'élasticité et de plasticité — est illustrée à la fig. 8. Dans le premier cas (fig. 8 a), le constructeur en calculant opère avec des chiffres qui n'ont trait qu'à la première zone du diagramme de déformation, l'état limite étant déterminé ici par la valeur σ_S dans les fibres extrêmes, c'est-à-dire par la fin de la première phase. Le restant du diagramme n'est, pour ainsi dire, que pris en considération. La théorie de plasticité est fondée sur l'état limite, qui correspond à la deuxième zone (fig. 8 b et c), et c'est de cette façon qu'on introduit dans le calcul, sous forme de formules et de chiffres, la phase ultérieure de la déformation. Tout cela permet généralement d'aug-

menter les tensions réelles dans la construction lesquelles devront quand même demeurer toujours dans les limites de la première zone.

Flexion des barres d'après une loi de déformation quelconque.
La flexion des barres en acier sans palier d'écoulement est un cas partiel d'un problème plus général concernant la flexion des barres d'après une loi quelconque de déformation, de traction et de compression. Ce problème a été examiné par Nádai. La fig. 9 présente le diagramme σ, ε . Les lois de traction et de compression sont différentes. La fig. 10 reproduit la section ainsi que le diagramme des tensions et des déformations. L'équation du diagramme des déformations s'écrit:

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

Les conditions d'équilibre pour la section:

$$\int \sigma \cdot dF = 0 \quad \text{et} \quad \int \sigma \cdot dF \cdot \eta = M$$

La deuxième équation après les transformations, prendra la forme:

$$M = \rho^2 \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \Phi(\rho\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon,$$

où ρ est le rayon de courbure, $\Phi(\rho\varepsilon) = b_\eta$ la largeur variable de la section.

Pour la section rectangulaire

$$M = \frac{h^2 \cdot b}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2} \cdot \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

Pour une poutre d'une longueur l avec l'angle central de l'axe déformé 2θ nous aurons:

$$\theta = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot l}{2h}$$

En recourant aux deux dernières expressions Nádai avait démontré qu'on peut obtenir d'après les valeurs d'essai M et θ la fonction σ, ε . Quant à nous, c'est seulement la détermination du moment M pour une phase quelconque de déformation, pour l'état limite en particulier, qui présente un intérêt.

Le diagramme des tensions à l'état limite. Il a été énoncé plus haut que nous prenons l'état limite pratique comme tel, lorsque la résistance du noyau élastique devient si infime qu'on peut la négliger. Les fig. 12a—12e démontrent avec clarté la décroissance du rôle du noyau élastique au fur et à mesure de l'augmentation des déformations des fibres extrêmes. Sur l'axe des abscisses on a porté

les déformations ε , sur l'axe des ordonnées le pourcentage de la valeur relative du moment des efforts du noyau élastique, c'est à dire $100 \frac{M_e}{M}$. Le diagramme à la fig. 12 est établi pour des sections rectangulaires et en double T d'après des diagrammes de tension — déformation différents.

Le diagramme démontre que lorsque $\varepsilon \cong 1$ p. c., le moment M_e vaut aussi 1 p. c. environ de M , dans le cas d'une section rectangulaire. Pour les sections en double T la valeur $\varepsilon \cong 1$ p. c. correspond à la valeur M_e , étant même inférieure à 1 p. c. de M . Dans la suite, comme il a été noté ailleurs, nous déterminerons l'état limite pratique par le rapport $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$. La valeur très réduite du moment M_e et des déformations des fibres extrêmes ε permet sans forte erreur d'adopter pour les calculs le même diagramme de déformation, tant pour les fibres en traction, que pour les fibres comprimés (fig. 14). En outre il est possible de substituer à la courbe de la deuxième zone de déformation une droite (fig. 15). C'est le diagramme, enfin, des tensions à l'état limite, comme il apparaît à la fig. 17 *b*, qu'on peut adopter, c'est-à-dire sans noyau élastique, ce qui simplifie considérablement les calculs.

Aussi tout ce qu'on simplifie et admet se résume-t-il comme suit:

1. Les sections restent planes, tant pour la flexion élastique, que pour la flexion élastique-plastique.
2. L'état limite pratique est déterminé par la valeur du noyau élastique, dont le moment des efforts égale 1 p. c. ou moins du moment des efforts de toute la section, où $\varepsilon_T : \varepsilon_S \cong 10$.
3. Dans les frontières jusqu'à l'état limite admis le diagramme de déformation est pris, comme étant composé de deux droites.
4. La loi de déformation est considérée la même pour les fibres en traction et comprimés.
5. Le diagramme des tensions à l'état limite est adopté, comme il apparaît à la fig. 17 *b*, c'est-à-dire sans noyau élastique.
6. L'augmentation de la limite d'écoulement à l'état de flexion et la réaction d'appui des parties de la poutre, les tensions desquelles sont en limite d'élasticité, ne sont pas pris en considération.

Etude de la tension des poutres à section rectangulaire, soumises à flexion. D'après l'équation déduite par Nádaï (voir plus haut) ou directement, comme il résulte de la fig. 18, nous aurons pour l'état élastique plastique

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right], \quad (5)$$

expression dans laquelle $T = \frac{b \cdot h^2}{4}$ est le module de flexion en plasticité, $\alpha = \frac{2a}{h}$ — la hauteur relative du noyau élastique,

$m = E_1 : E$ — le rapport des modules d'élasticité de la II-ème et I-ère zones du diagramme conformément à la fig. 15.

En faisant $m = 0$, c'est-à-dire pour un matériau idéalement plastique, on obtient

$$M = \sigma_S \cdot T \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \quad (5a)$$

Cette égalité n'est donc rien d'autre que l'expression transformée (1'), déduite par Fritsche.

L'égalité (5) ne permet pas de déterminer la valeur du moment de l'état limite, posant $\alpha = 0$. Avec une valeur α telle, le moment $M_T = \infty$. Ce résultat serait tout-à-fait logique, si le diagramme de déformation adopté (fig. 15) — accroissement de la II-ème zone d'après la loi linéaire — n'avait pas de limitation.

Pour obtenir la valeur du moment limite, il faudra recourir directement à la fig. 17 b, qui permet d'écrire tout à la fois.

$$M_T = \sigma_S \cdot T + \sigma' \cdot W \quad (8)$$

En remplaçant σ' par sa valeur

$$\sigma' = (\varepsilon_T - \varepsilon_S) \cdot E_1$$

on aura

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + \frac{2m}{3} \cdot \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} - 1\right)\right] \quad (8a)$$

Puisque la valeur qu'on lit entre les parenthèses droites est constante à l'état limite admis pour le matériau qu'on étudie, il sera possible d'écrire

$$\boxed{M_T = \beta \cdot \sigma_S \cdot T} \quad (8b)$$

Lorsque $\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} = 10$ et m varie de 0,01 à 0,10, β varie dans les limites de 1,06 à 1,60.

De cette façon les aciers spéciaux sans palier d'écoulement ont une capacité de résistance augmentée comparativement à l'acier doux ordinaire, non seulement parce que la valeur σ_S est plus grande, mais aussi parce que dans la formule de calcul figure le coefficient $\beta > 1$.

Section en double T. Nous obtiendrons, comme précédemment, d'après la fig. 20 pour l'état élastique-plastique, dans le cas $2a < h_1$

$$M = \sigma_S \cdot \left(T - \frac{W_e}{2}\right) + \sigma_e \cdot m \cdot \left[T \cdot \left(\frac{2}{3x \cdot k} - 1\right) + \frac{W_e}{2}\right], \quad (9a)$$

où W_e est le module de flexion du noyau élastique, donc

$$W_e = \frac{2 \cdot d \cdot a^2}{3}$$

$k = T : \frac{3}{2} W$; la valeur moyenne pour les différents types et numéros de poutres en double T est $k \cong 0,78$, tandis que

$$T = \frac{b \cdot (h^2 - h_1^2)}{4} + \frac{d \cdot h_1^2}{4}$$

Si $2a > h_1$, on aura

$$M = \sigma_S \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) + \sigma_S \cdot W_e + \frac{\sigma_S \cdot m \cdot b}{3a} \cdot \left(\frac{h^3}{4} + a^3 - \frac{3}{4} h^2 \cdot a \right) \quad (10)$$

Quand $2a = h_1$, les formules (9a) et (10) donneront des résultats identiques:

$$M = \sigma_S \cdot \frac{b}{4} \cdot \left(h^2 - h_1^2 \right) + \sigma_S \cdot \frac{d \cdot h_1^2}{6} + \frac{\sigma_S \cdot m \cdot b}{6h_1} \cdot \left(h^3 + \frac{h_1^3}{2} - \frac{3}{2} h^2 \cdot h_1 \right) \quad (11)$$

A l'état limite, d'après la fig. 22 nous obtiendrons comme auparavant

$$M_T = \sigma_S \cdot T + \sigma' \cdot W$$

ou bien, après les transformations faites,

$$M_T = \sigma_S \cdot T \cdot \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{m}{k} \cdot \left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_S} - 1 \right) \right] \quad (12)$$

dans laquelle $T = \frac{3}{2} k \cdot W$.

En faisant la valeur moyenne $k = 0,78$, nous pouvons considérer l'expression entre les parenthèses droites comme une valeur constante avec un m donné. En la désignant par γ , nous aurons

$$M_T = \gamma \cdot \sigma_S \cdot T \quad (12b)$$

γ étant supérieur à β [voir (8b)]. Quand $m = 0,01, \dots, 0,10$, la valeur $\gamma = 1,08, \dots, 1,77$. Par conséquent les sections en double T sont plus avantageuses au point de vue de la résistance supplémentaire, qui est conditionnée par l'absence du palier d'écoulement.

Section en T. En passant à l'état élastique-plastique, l'axe neutre ne coïncide pas avec l'axe central. Dans le cas d'une seule

région d'écoulement (fig. 23), nous obtiendrons la position de l'axe neutre de la condition $\sum x = 0$, à savoir:

$$v = -\frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (13)$$

La valeur du moment

$$M = \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) \right] \cdot \sigma_S \quad (14)$$

Dans le cas de deux régions d'écoulement (fig. 24)

$$v = \frac{F_0}{F} \cdot \left\{ y_0 - e_0 \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{F_u}{F} \cdot \left\{ y_u - e_u \cdot \left(1 - \frac{m}{2} \right) \right\} - \frac{S_x^e}{F} \quad (15)$$

Le moment

$$M = \left[W_{x_1}^e + S_{x_1}^u + S_{x_1}^0 + \frac{m \cdot F_u \cdot e_u}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_u \right) + \frac{m \cdot F_0 \cdot e_0}{2a} \cdot \left(a + \frac{2}{3} e_0 \right) \right] \cdot \sigma_S \quad (16)$$

A l'état limite nous déterminons v_T et M_T d'après la fig. 25

$$v_T = -\frac{m \cdot v \cdot 2S_x^u + (2F_u - F) \cdot y_u}{m \cdot v \cdot F + 2F_u - F} \quad (17)$$

où

$$v = \frac{\varepsilon_7^u}{\varepsilon_S} - 1$$

Le moment limite

$$M_T = \sigma_S \cdot T_{x_1} + \sigma_u' \cdot W_{x_1}^u \quad (19)$$

On a ici

$$T_{x_1} = |S_{x_1}^0| + |S_{x_1}^u| \quad \text{et} \quad W_{x_1}^u = \frac{J_{x_1}}{e_u}$$

Après les transformations

$$M_T = \sigma_S \cdot (T_{x_1} + m \cdot v \cdot W_{x_1}^u) \quad (19a)$$

ou bien

$$M_T = \sigma_S \cdot \left[2S_x + v_T \cdot (F_u - F_0) + \frac{m \cdot v}{y_u + v_T} \cdot (J_x + F^2 \cdot v_T) \right] \quad (19b)$$

Les formules qu'on a obtenues sont valables pour chaque section qui possède un seul axe symétrique, comme les sections en double T non symétriques, en caisson etc.

Travail de la section rectangulaire d'après une loi autre de déformation des fibres. Pour les matériaux qui n'ont pas une limite d'écoulement fortement prononcée, c'est-à-dire lorsque le passage de la I-ère à la II-ème zone du diagramme se fait d'une manière coulante, il sera malaisé de tirer profit des résultats obtenus précédemment, puisqu'il est difficile d'établir une valeur déterminée $m = E_1 : E$.

On trouve à la fig. 31 l'exemple d'un diagramme de ce genre pour l'acier manganeux (Mn 13 p. c.). Dans des cas pareils il faut tenir compte du caractère curviligne de la II-ème zone et d'affecter à celle-ci l'équation parabolique de deuxième degré (fig. 26)

$$\varepsilon' = p \cdot \sigma'^2$$

ou bien

$$\sigma' = n \cdot \sqrt{\varepsilon'}$$

où $n = \frac{1}{\sqrt{p}}$. Dans les limites $\varepsilon = 1 - 2$ p. c. on pourra toujours choisir une parabole de deuxième degré. Au lieu de la limite d'écoulement σ_s , nous prenons ici la limite de proportionnalité σ_p , comme valeur plus déterminée pour un diagramme de ce genre.

D'après la fig. 27 nous obtiendrons la valeur du moment pour une phase quelconque de déformation

$$M = W_e \cdot \sigma_p + \left(\frac{h^2}{4} - a^2 \right) \cdot b \cdot \sigma_p + \frac{2b \cdot n \cdot a \cdot (3h + 4a)}{15\varepsilon_p} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{h}{2a} - 1 \right)} \right)^3 \quad (20)$$

La valeur du moment limite (fig. 28), en négligeant comme auparavant le noyau élastique, sera

$$M_T = \sigma_p \cdot T \cdot \left[1 + \frac{4n}{5\varepsilon_T^2 \cdot \sigma_p} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \right] \quad (21a)$$

En désignant par β_1 l'expression qui figure entre les parenthèses droites, laquelle avec un ε_T donné est une valeur constante pour le matériau en question, nous aurons

$$\boxed{M_T = \beta_1 \cdot \sigma_p \cdot T} \quad (21b)$$

Pour une section en double T (les désignations sont faites d'après la fig. 29), nous obtiendrons

$$M_T = \sigma_p \cdot T - (b-d) \cdot \frac{n \cdot h^2}{5\varepsilon_T^2} \cdot \left(\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T \cdot \frac{h_1}{h} - \varepsilon_p} \right)^3 + \frac{n \cdot h^2 \cdot b}{5\varepsilon_T} \cdot \left(\varepsilon_T + \frac{2}{3} \varepsilon_p \right) \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_T - \varepsilon_p} \right)^3 \quad (23)$$

2. Les tensions tangentielles à l'état de flexion

Les tensions tangentielles des régions en déformations plastiques pour des aciers avec un palier d'écoulement. Fr. Stüssi avait étudié les tensions tangentielles pour la section rectangulaire faisant usage de l'expression habituelle (fig. 34)

$$\tau = \int_a^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta\sigma}{\Delta x} \cdot dz$$

Les valeurs $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$, qui représentent l'accroissement des tensions tangentielles sur l'unité de longueur de la poutre, Stüssi déterminait en recourant au diagramme de déformation de l'acier avec un palier d'écoulement, en tenant compte aussi de la zone transitoire du diagramme de σ_p à σ_S , ainsi que de la zone d'augmentation des tensions après le palier d'écoulement. Le diagramme des tensions tangentielles pour les différentes phases de déformation se trouve reproduit aux fig. 35 a et 35 b. La valeur τ_{\max} est déterminée par la formule

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

Les valeurs α pour les différentes phases de déformation peuvent être lues aux figures mentionnées. A la fig. 37 on a représenté le diagramme de σ et τ en fonction de P pour un cas particulier de poutre sur deux appuis avec une charge concentrée au milieu de la travée.

En se basant sur la théorie de résistance de Mohr et les essais de Rös et Eichinger, c'est-à-dire en partant de la condition que la tension tangentielle d'écoulement $\tau_S = 0,6\sigma_S$, Stüssi avait obtenu la valeur de l'effort tranchant, lorsque les tensions tangentielles n'exercent pas encore d'influence sur le coefficient de sécurité, adopté pour le calcul d'après la théorie de la plasticité. Stüssi avait donc obtenu:

Pour la section rectangulaire $Q_{\text{adm}} \leq 0,13 b \cdot h \cdot \sigma_{\text{adm}}$.

Pour la section en double T $Q_{\text{adm}} \leq 0,16 d \cdot h \cdot \sigma_{\text{adm}}$.

Pour le cas d'un matériau idéalement plastique il sera facile d'obtenir au moyen de l'analyse la valeur des tensions tangentielles. Les diagrammes des tensions affectent successivement l'allure de la fig. 38. La tension tangentielle maximum

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F_e}$$

Puisque l'aire du noyau élastique $F_e = b \cdot 2a$ et $\frac{2a}{h} = \alpha$, donc

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\alpha \cdot F} \quad (29a)$$

α est ici la valeur inverse de même signification que chez Stüssi. En éliminant Q après l'avoir exprimé par M et en substituant sa valeur d'après (5a), nous aurons pour une poutre sur deux appuis avec la travée l

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{3} \right), \quad (30b)$$

où h est la hauteur de la section rectangulaire, ξ — le coefficient qui dépend du schéma de la charge. La même formule peut être aussi appliquée à une poutre encastrelibre. La valeur ξ pour certains cas de charge est la suivante:

charge concentrée au milieu de la travée $\xi = \frac{3}{4}$

charges concentrées sur les tiers de la travée $\xi = \frac{9}{8}$

charge concentrée au bout de la console $\xi = \frac{3}{8}$

charge uniformément répartie sur la console $\xi = \frac{3}{4}$

Pour l'état limite adopté par nous et qui est déterminé par le rapport $\varepsilon_T : \varepsilon_S = 10$, nous aurons

$$\alpha = \frac{2a}{h} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_T} = 0,1$$

et

$$\tau_{\max} = \xi \cdot 9,97 \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_s \cong \xi \cdot 10 \frac{h}{l} \cdot \sigma_s$$

Pour une poutre simple sollicitée au milieu de la travée, lorsque $h:l=0,1$, on obtiendra $\tau_{\max} \cong \frac{3}{4} \sigma_s$.

Si on a deux charges égales dans les tiers de la travée, alors

$$\tau_{\max} \cong \frac{9}{8} \sigma_s$$

Dans les deux cas $\tau_{\max} > \tau_S \cong 0,6\sigma_S$.

Il est recommandé, quand $\tau_{\max} > \tau_S$, de modifier la section d'une telle manière pour que τ_{\max} ne soit pas supérieur à τ_S . Autrement les grandes tensions tangentielles vont contribuer à accélérer le processus de l'extension des tensions d'écoulement sur la hauteur de la section. Une très grande importance ont ici les tensions principales. Celles-ci atteindront beaucoup plus vite la valeur σ_S , quand les valeurs de τ sont grandes, c'est-à-dire avec des charges moindres; le coefficient de sécurité de la poutre sera plus bas que celui qu'on obtient en calculant d'après les tensions normales seulement. Tout ce qui a été énoncé plus haut a trait principalement aux cas lorsque M_{\max} et Q_{\max} ont lieu dans la même section.

Section en double T. Quand le noyau élastique ne sort pas des limites de l'âme, nous obtiendrons d'après les formules déduites antérieurement:

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S \cdot \frac{T - \frac{d \cdot a^2}{3}}{a \cdot F} \quad (31b)$$

A l'état limite pratique la valeur $\frac{d \cdot a^2}{3}$ est très petite comparativement à T . En l'éliminant on a

$$\tau_{\max} = \xi \cdot \frac{h}{l} \cdot \sigma_S \cdot \frac{T}{a \cdot F} \quad (32)$$

Les tensions tangentielles pour des aciers sans palier d'écoulement. Section rectangulaire. Le diagramme des tensions normales est donné à la fig. 41. Les tensions tangentielles

$$\tau_x = \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{\Delta \sigma_{z_1}}{\Delta x} \cdot dz_1$$

En recourant à la fig. 42 et aux égalités

$$\sigma_{z_1} = \sigma_S + \sigma'_{z_1} \quad \text{et} \quad \sigma'_{z_1} = (\varepsilon_{z_1} - \varepsilon_S) \cdot E_1,$$

on obtiendra après les transformations

$$\tau_z = \sigma_S \cdot \frac{m}{a^2} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33)$$

Pour l'obtention de $\frac{\Delta a}{\Delta x}$ il faut connaître l'équation de la courbe qui limite la région d'écoulement et qu'on peut facilement écrire pour

chaque cas particulier. Ainsi, par exemple, pour une poutre sur deux appuis, avec la sollicitation P au milieu de la travée, on aura d'après les conditions d'équilibre et la formule (5)

$$M = \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

En différenciant d'après x on a la valeur $\frac{da}{dx}$, après avoir préalablement remplacé α par $\frac{2a}{h}$. Ensuite en désignant

$$\left[\frac{8a}{3h^2} - \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{8a}{h^2} - \frac{h}{a^2} \right) \right]$$

par C et en substituant $\frac{P}{2} = Q$, nous obtiendrons

$$\tau_z = \frac{m}{2a^2} \cdot \frac{Q}{T \cdot C} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad (33a)$$

Si on exprime T par J , c'est-à-dire

$$T = \frac{3}{2} W = \frac{3J}{h}$$

on aura

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot \alpha, \quad (33b)$$

où

$$S_z = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{1}{\alpha^3 - m \cdot (\alpha^3 - 1)}$$

La formule (33b) donne la valeur des tensions tangentielles dans la partie plastique de la section. Il sera facile d'avoir d'une manière analogue la valeur τ_z dans les limites du noyau élastique. Le résultat définitif sera donc

$$\tau_z = \frac{Q}{J \cdot b} \cdot (S_z^a + m \cdot S_a) \cdot \alpha \quad (34)$$

S_z^a étant le moment statique d'une partie de la section entre z et a (fig. 44), S_a — le moment statique pour une partie de la section au-dessus de a . En nommant l'expression $S_z^a + m \cdot S_a$ — moment statique réduit, et en la désignant par S'_z , on aura

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot b} \cdot \alpha \quad (34a)$$

Les formules (33a), (33b), (34), (34a) sont valables non seulement pour le problème d'une poutre sur deux appuis avec la sollicitation P , mais aussi pour un schéma quelconque puisque les formules sont établies sur la base de la différentiation M d'après x , qui donne, comme on le sait, la valeur Q indépendamment du schéma de la charge.

Section en double T. Au moyen de la même méthode, comme pour la section rectangulaire, nous obtiendrons la valeur des tensions tangentielles dans la partie plastique de l'âme

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \cdot \alpha_1 \quad (35)$$

et pour le noyau plastique

$$\tau_z = m \cdot \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot d} \cdot \alpha_1, \quad (35a)$$

où

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{2}{3} \cdot \frac{d \cdot a^3}{J} - m \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{d \cdot a^3}{J} - 1 \right)}$$

Les valeurs approchées des tensions tangentielles pour l'état limite seront établies, si dans les formules qu'on a déduites on pose $\alpha = 0$ (ou $a = 0$). On aura

$$\alpha = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \frac{1}{m}$$

e.

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot b \cdot m} \quad \text{— pour la section rectangulaire,}$$

$$\tau_z = \frac{Q \cdot S'_z}{J \cdot d \cdot m} \quad \text{— pour la section en double T}$$

Pour obtenir τ_{\max} on peut encore simplifier le procédé en remplaçant la valeur très petite du moment statique de la partie en tension plastique de la section

$$S_{z=0}^a \text{ par } m \cdot S_{z=0}^a$$

On disposera alors des mêmes formules que pour le calcul „élastique“

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \quad (36a)$$

et

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot d} \quad (37a)$$

A la fig. 47 on trouve le diagramme τ_{\max} et σ (pour les fibres extrêmes) en fonction de P pour un cas de charge qui est rapporté à la même figure. On voit là qu'en approchant de l'état limite ($\varepsilon \cong 1$ p. c. et plus) la courbe des tensions tangentielles se rapproche de la droite

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h}$$

du calcul „élastique“. Le maximum τ_{\max} a été obtenu en posant $\alpha \cong 0,3$. Sur l'échelle supérieure horizontale on a pointé α et ε . Les lignes en pointillé se rapportent au matériau idéalement plastique, c'est-à-dire lorsque $m = 0$.

Les tensions tangentielles d'après la loi parabolique de déformation. La méthode d'investigation des tensions tangentielles est la même que pour le cas précédent. Dans le cas de la section rectangulaire, nous aurons pour les tensions qui ont lieu dans la couche neutre

$$\tau_{\max} = \frac{15\alpha \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 10n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (1 + 2\alpha) \cdot \sqrt{1 - \alpha}}{10\alpha^2 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sigma_p + 2n \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot (3 + 4\alpha + 8\alpha^2) \cdot \sqrt{1 - \alpha}} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (43)$$

dans laquelle les indications alphabétiques sont les mêmes qu'au paravant.

Pour l'état limite, quand α tend à zéro, on a

$$\tau_{\max} = \frac{5}{3} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \quad (44)$$

Il résulte donc que τ_{\max} à l'état limite a une valeur relativement plus grande que dans le cas précédent [formule 36a], ce qui est vu aussi sur le diagramme à la fig. 48, où la courbe des tensions tangentielles ne tend pas à coïncider avec la droite „élastique“, ainsi que cela avait lieu à la fig. 47. D'autre part, le pic de la courbe τ y est moins accentué, que celui de la courbe à la fig. 47.

L'examen des courbes aux fig. 47 et 48 démontre que les proportions des tensions normales et tangentielles dans la zone élastique-plastique, se trouve intervertie d'une manière considérable comparativement à la zone d'élasticité.

Il suit de là que la loi de variation des tensions principales dans la fonction de la charge sera aussi modifiée en traits essentiels. Les formules générales pour les tensions principales

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

seront certainement les mêmes, puisque'elles sont tirées des conditions d'équilibre, mais au lieu de σ et τ il faudra intercaler leurs

valeurs pour l'état élastique-plastique, ce qui veut dire que pour le cas de section rectangulaire

$$\sigma = \sigma_S \cdot \left[1 + m \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right) \right]$$

$$\tau = m \cdot \frac{Q \cdot S_z}{J \cdot b} \cdot \kappa$$

ou

$$\sigma = \sigma_p + n \cdot \sqrt{\varepsilon_p \cdot \left(\frac{z}{a} - 1 \right)}$$

$$\tau = \frac{n}{3} \cdot \sqrt{\varepsilon_p} \cdot \frac{\Delta a}{\Delta x} \cdot \left[\left(\frac{h}{2a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{h}{2a} - 1} - \left(\frac{z}{a} + 2 \right) \cdot \sqrt{\frac{z}{a} - 1} \right],$$

le tout dépendant de la loi de déformation de la deuxième zone du diagramme de ces déformations. La solution du problème des tensions principales se présente donc comme étant très complexe; ce problème n'a pas été examiné ici.

3. Résistance composée — flexion et force axiale

K. Girkmann a établi pour le cas d'un matériau idéalement plastique la relation entre M et N à l'état limite

$$h^2 - \frac{N^2}{\sigma_S^2} - \frac{4M}{\sigma_S} = 0 \quad (46')$$

qui a trait à la section rectangulaire d'une largeur $b=1$. Cette expression a été obtenue par l'examen de l'équilibre des forces intérieures et extérieures à l'état limite.

Une relation analogue pourra être obtenue pour les aciers sans palier d'écoulement, aussi bien pour la phase intermédiaire de déformation (fig. 49), que pour l'état limite (fig. 50). Dans le dernier cas on aura

$$\begin{aligned} M + \frac{4N^2}{3b \cdot \sigma_S} \cdot \frac{3 + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2)}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} = \\ = \frac{N \cdot h \cdot m \cdot (c_1 - c_2)}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} \cdot \left\{ \frac{8}{3} + \frac{m}{2} \cdot (c_1 + c_2) \right\} + \\ + \frac{b \cdot h^2 \cdot \sigma_S}{(4 + m \cdot c_1 + m \cdot c_2)^2} \cdot \left\{ 4 + m \cdot (c_1 + c_2) \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{m^2 \cdot c_1 \cdot c_2}{3} \right) + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} \cdot \left(c_1^2 + c_2^2 + \frac{16}{3} c_1 \cdot c_2 \right) \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

où

$$c_1 = \frac{\varepsilon_T^0}{\varepsilon_S} - 1 \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\varepsilon_T^u}{\varepsilon_S} - 1$$

D'autre part, si $m=0$ et $b=1$, la formule (46) se transforme en formule (46'). L'équation (46) pour un usage pratique est par trop complexe et c'est pourquoi il faudra procéder pour chaque cas particulier à des calculs numériques, en réduisant cette équation à la forme

$$M + \frac{N^2}{b \cdot \sigma_S} \cdot A = N \cdot h \cdot B + b \cdot h^2 \cdot \sigma_S \cdot C \quad (46')$$

A, B, C sont des valeurs constantes pour le matériau donné avec une valeur ε_T^0 établie de l'état limite. Les investigations numériques ont démontré que le membre qui renferme N au premier degré est d'une valeur très petite et qu'on peut éliminer. On obtiendra de cette façon

$$M + \frac{N^2}{b \cdot \sigma_S} \cdot A = b \cdot h^2 \cdot \sigma_S \cdot C \quad (46'')$$

Le calcul se réduit donc à choisir la section en satisfaisant à cette condition de l'état limite. M et N se rapportent à l'état limite, puisqu'on les a obtenues en multipliant les valeurs établies par le coefficient de sécurité.

4. Comparaison de l'utilité relative des sections de formes diverses

La comparaison est établie pour des poutres à section rectangulaire, en double T de la série URSS année 1926, de la même série année 1932 et pour les poutres en double T soudées (les données concernant celles-ci figurent dans la table à la p. 23 de la 1-ère partie de notre travail). Le critérium habituel de l'utilité relative de la section est la valeur du rayon du noyau de celle-ci, c'est-à-dire

$$r = \frac{W}{F}$$

Dans la suite, pour l'estimation comparée des sections, c'est le rapport entre la longueur totale du noyau de la section $2r$ et la hauteur de celle-ci h qui a été adopté. Pour les sections en double T de numéros différents le rapport est relativement peu modifié, aussi la comparaison est-elle établie d'après les valeurs moyennes de la série donnée. Nous appelons coefficient d'utilité relative de la section ζ le rapport des longueurs du noyau des sections, lorsque la hauteur h de la section est égale. On donne dans la table les valeurs $2r:h$ et ζ d'après le calcul „élastique“. Les coefficients ζ sont calculés par rapport à la section rectangulaire.

	Section rectangulaire	Poutres en double T, année 1926	Poutres en double T, année 1932	Poutres en double T soudées	
				№ 18-60	№ 70-100
$2r : h$	0,333	0,630	0,625	0,736	0,588
ζ	1,00	1,89	1,88	2,21	1,77

Des données analogues figurent dans la table suivante pour le cas du calcul „plastique“ d'un matériau idéalement plastique. On y introduit une notion conditionnelle du rayon „plastique“ du noyau de la section

$$r_p = \frac{T}{F}$$

	Section rectangulaire	Poutres en double T, année 1926	Poutres en double T, année 1932	Poutres en doubles T soudées	
				№ 18-60	№ 70-100
$2r : h$	0,500	0,736	0,731	0,815	0,694
ζ	1,00	1,47	1,46	1,63	1,39

On voit donc que l'utilité relative des sections rectangulaires augmente d'après le calcul en „plasticité“. Il est certain aussi que les sections en double T sont toujours plus avantageuses que les sections rectangulaires mais le degré d'utilité en est moindre que d'après le calcul en „élasticité“. Quand le palier d'écoulement fait défaut et la deuxième zone du diagramme des déformations se trouve déterminée par la valeur $m = E' : E$, les rayons „plastiques“ du noyau pour les cas des sections rectangulaires et en double T égaleront respectivement

$$r'_p = \frac{\beta \cdot T}{F} = \beta \cdot r_p \quad \text{et} \quad r'_p = \frac{\gamma \cdot T}{F} = \gamma \cdot r_p$$

Les valeurs β et γ sont en relation de m [voir les formules (8a), (8b), (12) et (12b)]. Dans la table sont données les valeurs $2r'_p : h$ et ζ , lorsque les valeurs de m sont différentes (voir table à la page 150).

Il résulte donc que lorsque le palier d'écoulement fait défaut, l'utilité relative des sections en double T se trouve augmentée, mais n'atteint pas les valeurs du calcul „élastique“.

Aux fig. 51 et 52 sont représentés les diagrammes de la relation $2r : h$ et ζ de m . Les droites horizontales correspondent au calcul „élastique“. En disposant des données pour un matériau concret (la valeur m), il sera facile d'obtenir ce qui est nécessaire pour estimer l'utilité relative de la section.

	<i>m</i>	0,01	0,02	0,03	0,04	0,5	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
Section rectangulaire	$2r'_p : h$	0,53	0,56	0,59	0,62	0,65	0,68	0,71	0,74	0,77	0,80
Poutres en doubles T, année 1982	$2r'_p : h$	0,785	0,843	0,900	0,956	1,012	1,070	1,126	1,180	1,238	1,295
	ζ	1,48	1,50	1,53	1,54	1,56	1,57	1,58	1,59	1,61	1,62
Poutres soudées N° 18-60	$2r'_p : h$	0,78	0,942	1,007	1,070	1,132	1,196	1,260	1,321	1,385	1,450
	ζ	1,66	1,68	1,71	1,73	1,74	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81
Poutres soudées N° 70-100	$2r'_p : h$	0,747	0,802	0,855	0,909	0,962	1,016	1,071	1,123	1,179	1,232
	ζ	1,41	1,43	1,45	1,47	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54

En faisant cette comparaison on ne tient compte que d'un seul facteur, qui exerce une influence sur l'augmentation de la capacité de résistance de la section, et qui est de tenir compte des déformations plastiques lorsqu'on procède au calcul des poutres. L'autre facteur, une limite d'écoulement plus étendue chez les aciers spéciaux, peut être pris en considération en comparant les valeurs spécifiques des moments limites, c'est-à-dire des moments rapportés à l'unité de l'aire de la section.

D'après le calcul en „élasticité“ on aura donc

$$\frac{M_S}{F} = \frac{\sigma_S \cdot W}{F} = \sigma_S \cdot r$$

D'après le calcul en „plasticité“

$$\frac{M_T}{F} = \sigma_S \cdot \frac{T}{F} = \sigma_S \cdot r_p \quad \text{et} \quad \frac{M_T}{F} = \sigma_S \cdot \beta \cdot \frac{T}{F} = \sigma_S \cdot r'_p$$

On peut établir des diagrammes analogues à ceux des fig. 51 et 52 pour des matériaux désignés, pour lesquels *m* et σ_S sont connus. Aussi pour comparer les sections en tenant compte de σ_S faudra-t-il prendre en considération le coefficient de sécurité, lequel généralement sera différent dans le calcul d'après les méthodes d'élasticité et de plasticité.

Les études qui eurent lieu permettent donc de venir aux conclusions suivantes:

1. On pourra faire le projet de poutres en acier sans palier d'écoulement avec des sections plus réduites que lorsque l'acier en

possède un, même si la limite d'écoulement dans ces deux cas est égale.

2. Les poutres de sections égales, en acier divers, qui ont une limite d'écoulement et une résistance à la rupture identiques, mais qui se distinguent par l'aspect du diagramme des déformations après la limite d'écoulement, auront des coefficients de sécurité différents. Plus la *II*-ème zone du diagramme est raide et le passage de la *I*-ère à la *II*-ème zone coulant, plus le coefficient de sécurité sera grand.

3. Des tensions réelles plus grandes pourront être tolérées dans les poutres en aciers sans palier d'écoulement, que dans celles dont le matériau comporte le palier.

4. La question s'il est nécessaire d'opérer le calcul des poutres en aciers sans palier d'écoulement d'après la théorie de plasticité, ou bien en se basant sur les déductions de celle-ci, d'appliquer le calcul „élastique“ habituel, mais avec des tensions admissibles plus grandes, sera résolue par des essais ultérieurs. Cette question se pose en raison de la complexité relative de certaines formules que nous avons obtenues pour les calculs.

5. Pour vérifier les résultats obtenus et fonder l'état limite qu'on a adopté, une étude expérimentale comparée des poutres, dont les sections et l'acier sont différents, devient indispensable.

6. L'utilité relative des différentes sections, estimée d'après le rapport du module de flexion à l'aire de la section, varie selon que le calcul soit fait en „élasticité“ ou „plasticité“. D'après le calcul „plastique“ les sections en double *T* sont plus avantageuses que les sections rectangulaires, mais le coefficient d'utilité relative baisse un peu, de 23 p. c. en moyenne, pour un matériau idéalement plastique.

7. Dans le cas de l'acier sans palier d'écoulement, le coefficient d'utilité relative de la section est de 5—10 p. c. plus grand que pour le matériau idéalement plastique. Il varie très peu selon les valeurs différentes de m , dans les limites de 0,01 à 0,10.

8. Pour être en état d'estimer l'utilité relative des poutres en aciers concrets, il faudra prendre en considération la valeur de la limite d'écoulement. D'autre part, en comparant avec les données obtenues d'après le calcul „élastique“, on devra tenir compte aussi du coefficient de sécurité, lequel n'a pas été encore établi assez exactement pour le calcul „plastique“, et qui pourrait différer de celui qu'on obtiendrait en procédant d'après le calcul „élastique“.

Exemples pour le calcul des poutres isostatiques. C'est le cas seulement de la sollicitation par une mise en charge statique qui est considéré. Les exemples ont pour but d'illustrer l'application des formules qui avaient été déduites plus haut et de montrer au moyen d'exemples d'un ordre particulier, qu'en adoptant la théorie de plasticité on parvient à une plus grande économie dans l'élaboration des projets. L'effet économique est toujours plus grand, lorsque le matériau ne possède pas de palier d'écoulement. Pour déterminer

l'influence exercée sur le choix de la section par la méthode seule du calcul (en „élasticité“ ou „plasticité“) on considère pour tous les cas la limite d'écoulement comme égale (fig. 53 *a, b, c*). Le coefficient de sécurité pour la méthode de plasticité est posé $n_T = 2$, pour celle d'élasticité $n_S = 1,17$.

1er exemple. Considérons une poutre sur deux appuis, ayant la travée $l = 1$ m et portant une charge $P = 10$ tonnes au milieu de la travée. La section est rectangulaire avec les proportions données des côtes $b : h = 1 : 2$. Les résultats du calcul figurent dans la table suivante.

Méthode de calcul	Diagramme de déformation	Formule pour le calcul	R_b	n_S ou n_T	$b \cdot h$	F	%	Tensions réelles	Sécurité contre à σ_S
En „élasticité“	—	$W = \frac{M}{R_b}$	1400	1,71	6,42-12,85	82,5	100	1400	1,71
En „plasticité“	fig. 53 <i>a</i>	$T = \frac{M}{R_b}$	1200	2	5,93-11,87	70,4	85,4	1800	1,29
„	fig. 53 <i>b</i>	$T = \frac{M}{\beta \cdot R_b}$	1200	2	5,60-11,20	62,8	76,2	2140	1,12
„	fig. 53 <i>c</i>	$T = \frac{M}{\beta_1 \cdot R_b}$	1200	2	5,27-10,57	58,6	68,6	2560	0,94

Pour tous les cas l'état limite $\sigma_S = 2400$ kg/cm². Dans le diagramme à la fig. 53 *b* on a posé $m = 0,03$, dans le diagramme à la fig. 53 *c* le paramètre $n = 12500$ kg/cm² (voir p. 140). Dans le dernier cas les tensions réelles sont même un peu plus grandes que σ_S , quoique le coefficient de sécurité par rapport à l'état limite adopté soit suffisant, étant supposé $n_T = 2$. Lorsqu'on a le diagramme qui se trouve à la fig. 53 *c*, il est tout à fait possible de tolérer des tensions réelles un peu plus grandes que σ_S (ou plus exactement σ_p , puisqu'il n'y a pas ici d'état limite nettement prononcé). Par suite de ce que le diagramme passe d'une manière coulante de σ_p à la deuxième zone de déformation, un certain excédent par rapport à la limite de proportionnalité ne sera pas suivi par d'importantes déformations résiduelles. Quand on fait le calcul d'après la méthode de plasticité il est nécessaire de vérifier, pour ce qui concerne les cas étudiés la flèche élastique et de la comparer à celle qui est admise et qu'on détermine à l'aide des normes établies conformément aux conditions d'exploitation.

2ème exemple. Une poutre en double T soudée est calculée au moment $M = 3740000$ kg · cm. La section est choisie d'après la

table des poutres en double T soudées qui figure dans la 1ère partie de notre travail à la p. 23. On a pris pour base du calcul les mêmes diagrammes de déformation que dans le 1er exemple. Les résultats sont rapportés à la table ci-dessous.

Méthode de calcul	Diagramme de déformation	Formules pour le calcul	R_b	n_S ou n_T	N° de la poutre en double T	F	%	Tensions réelles	Sécurité contre à σ_S
En „élasticité“	—	$W = \frac{M}{K_b}$	1400	1,71	N° 50	151,8	100	1400	1,71
En „plasticité“	fig. 53 a	$T = \frac{M}{R_b}$	1200	1,91	N° 50	151,8	100	1400	1,71
„	fig. 53 b	$T = \frac{M}{\gamma \cdot R_b}$	1200	1,96	N° 45	134,6	88,7	1680	1,43
„	fig. 53 c	Formule (23)	1200	1,98	N° 40	126,8	83,5	1980	1,21

La confrontation des données du 1er et 2ème exemples démontre qu'en posant $n_T = 2$, l'économie dans les sections des poutres en double T est relativement moindre que dans les sections rectangulaires, quand la méthode de plasticité est appliquée au calcul.

APPENDICE

Les fondements du calcul des poutres hyperstatiques

Nouvelles données sur le calcul des poutres en acier avec un palier d'écoulement. Le calcul des poutres hyperstatiques d'après la méthode de plasticité se réduit, comme on le sait, à l'égalisation des moments et au choix des sections selon la formule

$$T = \frac{M}{R_b} \quad \text{ou} \quad T = \frac{M_T}{\sigma_S},$$

où M est la valeur du moment égalisé. Une suite de travaux d'expérimentation, les études de G. Grüning et E. Kohl surtout, ont confirmé assez heureusement le processus d'égalisation des moments qui a lieu. D'autre part, lorsqu'il y a une grande différence entre les valeurs des moments dans les sections dangereuses, avant même que l'état limite soit atteint dans la deuxième section dangereuse, les tensions de la première section pourront déjà correspondre à la zone d'augmentation des tensions. C'est pourquoi il n'y aura jamais d'égalisation des moments. En outre, l'égalisation ou le rap-

prochement maximum des moments dans les sections dangereuses a lieu déjà après que les déformations générales de la poutre (flèche) auront atteint de telles proportions qu'on devra considérer sa résistance sur la flèche comme épuisée.

Fr. Stüssi et C. F. Kollbrunner ont démontré que généralement l'égalisation complète des moments n'a jamais lieu. Stüssi avait examiné le cas représenté à la fig. 54. Le moment d'appui

$$M_B = - \frac{3l_2}{4l_1 + 6l_2} \cdot M_0 = - \delta \cdot M_0$$

Le cas étudié peut être considéré comme un cas intermédiaire entre deux extrêmes: une poutre à une travée librement posée, donc $M_B = 0$ et une poutre rigidement encastrée, pour laquelle $M_B = 0,5 M_0$. A la fig. 55 on voit le diagramme établi par Stüssi,

qui indique la relation $P_T : P_T$ de $\frac{1}{1-\delta}$, lorsque les proportions des travées l_1 et l_2 sont différentes. La droite AB correspond au cas d'un matériau soumis d'une manière illimitée à la loi de Hook. La ligne brisée ACB correspond au calcul „plastique“ — le cas d'un matériau idéalement plastique. Le diagramme démontre que dans ce dernier cas, indépendamment des proportions des travées l_1 et l_2 , la charge limite P_T d'une poutre à trois travées est toujours deux fois plus grande que la charge limite P_T d'une poutre simple (lors du schéma de la fig. 54). Evidemment, dans le cas d'un matériau réel, le passage brusque de A à C est physiquement inadmissible et c'est pourquoi Stüssi présume qu'en réalité la variation de la charge limite suivra une certaine courbe ADB . De cette façon l'égalisation complète des moments n'aura pas lieu. Les expériences effectuées par les auteurs cités appuient assez bien tout ce qui a été exposé. A la fig. 56 le diagramme de la relation M de P pour le cas $l_1 : l_2 = 2$ se trouve démontré. Comme on voit, le moment d'appui M_B ne s'égalise pas avec le moment dans la travée M_m , quoique ces deux moments accusent une tendance à s'égaliser. Les conclusions auxquelles ont abouti les auteurs se réduisent donc à ce que le calcul en „plasticité“ habituel donne une capacité de résistance exagérée aux poutres continues comparativement à une poutre simple. Quant au calcul d'après la théorie d'élasticité, il conduit à une réserve exagérée de sécurité. L'égalisation complète des moments n'a donc pas lieu et c'est pourquoi il faut calculer non pas d'après les moments égalisés, mais selon des valeurs un peu plus grandes.

Les poutres hyperstatiques en aciers sans palier d'écoulement.
Il est évident que dans ce cas l'égalisation des moments n'aura d'autant plus jamais lieu. D'autre part on peut affirmer que lorsque la limite d'écoulement est dépassée dans une section quelconque de la poutre, la forme du diagramme des moments sera autre que celle du diagramme en „élasticité“. Le moment qui est plus petit

augmentera plus rapidement, tandis que celui qui est plus grand le fera plus lentement. Il n'y aura donc pas d'égalisation des moments, mais la tendance à cette égalisation subsistera. Aussi le problème qui consiste à établir un état limite pour une poutre de ce genre est-il assez vague. C'est ainsi que pour une poutre avec une seule inconnue en trop on peut proposer plusieurs critères de l'état limite pratique.

1. L'état limite de la section est atteint seulement dans la première section dangereuse.

2. L'état limite de la section est atteint dans la deuxième section dangereuse.

3. L'état limite de la poutre est déterminé par une charge telle que les moments dans les deux sections dangereuses se trouvent rapprochés au maximum.

4. L'état limite de la poutre se trouve déterminé par une charge telle, que la déformation générale (flèche) commence à augmenter visiblement, sans augmentation apparente toutefois de la charge.

Tous ces critères accusent un caractère assez conditionné à l'exception du dernier. La notion exacte de l'état limite d'une poutre en acier spécial sans palier d'écoulement peut être obtenue par voie d'expérimentation seulement. Aussi nous n'indiquerons ici que les voies qu'on pourrait suivre pour aboutir à la solution analytique du problème ayant trait au calcul d'une poutre hyperstatique.

1. Solution exacte. Indiquons donc la marche à suivre d'après l'exemple d'un caractère particulier, qu'on trouve à la fig. 61. La section de la poutre étant rectangulaire, examinons d'abord le cas lorsque l'état d'élasticité-plasticité est atteint seulement dans la première section sous charge (fig. 62). Pour résoudre le problème il faudra écrire cinq équations pour cinq inconnues P , M_B , c_1 , c_2 et α_x . On considère le cas avec $2a$ posé. Nous obtiendrons de cette façon es équations suivantes:

$$1) \int_0^{\frac{l}{2}-c} \left(\frac{P}{2} \cdot x - M_B \cdot \frac{x}{l} \right) \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \int_{\frac{l}{2}+c_1}^l \left\{ \frac{P}{2} \cdot x - P \cdot \left(x - \frac{l}{2} \right) - M_B \cdot \frac{x}{l} \right\} \cdot \frac{dx}{E \cdot J} \cdot \frac{x}{l} + \int_{\frac{l}{2}-c_1}^{\frac{l}{2}} \frac{\epsilon_s}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx + \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}+c_2} \frac{\epsilon_s}{\alpha_x \cdot h} \cdot \frac{x}{l} \cdot dx = \frac{M_B l}{3E \cdot J}$$

$$2) \frac{P \cdot l}{4} - \frac{M_B}{2} = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} + \alpha^2 - 3 \right) \right]$$

$$3) \frac{P \cdot x}{2} - M_B \cdot \frac{x}{l} = \sigma_s \cdot T \cdot \left[1 - \frac{\alpha_x^2}{3} + \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{2}{\alpha_x} + \alpha_x^2 - 3 \right) \right]$$

$$4) \quad \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} - c_1 \right) - M_B \cdot \frac{\frac{l}{2} - c_1}{l} = \sigma_S \cdot W$$

$$5) \quad \frac{P}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + c_2 \right) - M_B \cdot \frac{\frac{l}{2} + c_2}{l} = \sigma_S \cdot W$$

La première équation est l'égalité développée des angles (fig. 61)

$$\tau'_B = \tau''_B$$

La deuxième et la troisième sont les équations (5) pour les sections $\frac{l}{2}$ et x . La quatrième et la cinquième — les conditions aux bords des régions d'écoulement. La solution de ce système d'équations dans sa forme générale, présente un caractère très complexe, qui ne se trouve pas justifié par le but proposé. C'est ainsi qu'en posant les différentes valeurs $2a$, il aurait fallu résoudre plusieurs fois ces équations. Ensuite en supposant l'état d'élasticité-plasticité dans la deuxième section dangereuse aussi, on aurait dû résoudre de nouveau plusieurs fois ces équations avec des $2a$ différents dans la section d'appui. Il y aurait eu de cette façon déjà huit inconnues. La solution de ces systèmes d'équations permettrait d'établir un diagramme analogue à celui de la fig. 56 et de déterminer à l'aide de ce diagramme la charge limite conditionnelle conformément à l'article 3, p. 155. On pourrait obtenir, lorsque M_B et P sont connues la relation qui existe entre la flèche et la charge, pour établir ensuite l'état limite, comme il suit de l'article 4 à la même page. Il résulte donc que pour déterminer l'état limite, lequel par soi-même a un caractère par trop conditionnel, ce procédé étant très complexe, ne peut être appliqué pour la solution de problèmes d'un ordre pratique.

2. Solution suivant le principe du problème de la poutre en matériaux différents. On estime que la poutre considérée est composée de deux matériaux (fig. 63): dans sa partie élastique le matériau a le module E , dans sa partie plastique — E_1 . Le calcul, comme on le sait, se réduit dans ce cas à résoudre le problème de la poutre en matériau unique, mais dont la largeur est

$$b_1 = b \cdot \frac{E_1}{E} = m \cdot b$$

sur l'étendue, dans le cas donné, des régions d'écoulement. D'après la largeur mentionnée on calcule le moment d'inertie

$$J = J \cdot [\alpha^3 + m \cdot (1 - \alpha^3)],$$

où $\alpha = 2a : h$. J varie en fonction de x . C'est ainsi que le problème se réduit au calcul de la poutre dont la section est variable.

Ce procédé, qui paraît exact et relativement simple, n'est pas tout de même applicable ici, puisqu'on ne tient pas compte pour une solution de ce genre de la résistance des efforts intérieurs de la section, lesquels ne sont pas hachurés sur le diagramme des tensions (fig. 64).

3. Solution suivant la méthode de la courbe d'égalisation incomplète des moments. Indiquons le rapport des moments de calcul „en élasticité“ (pour le cas à la fig. 61 par exemple) par μ , donc

$$\frac{M_B}{M} = \mu$$

Pour une poutre simple $\mu = 0$, pour une poutre encastree aux deux bouts $\mu = 1$. Tous les autres cas de poutres hyperstatiques avec une seule inconnue en trop seulement satisfont à la condition

$$0 < \mu < 1$$

A la fig. 66, sur l'axe des abscisses on a porté μ , c'est-à-dire le rapport des moments du calcul „élastique“, sur l'axe des ordonnées ce même rapport d'après le calcul „plastique“. Si le matériau se comportait tout le temps d'après la loi de Hook, le diagramme $\frac{M_B}{M}$, μ aurait été représenté par la droite OA . Par analogie à Stüssi, qui avait trouvé que le rapport des charges limites $P_T : P_{T_0}$ (fig. 55) varie en suivant une certaine courbe, nous supposons aussi qu'en passant à l'état de plasticité la relation $\frac{M_B}{M}$, μ sera représentée par la courbe OBA (fig. 66). Il apparaît donc que notre diagramme est une certaine variation du diagramme de Stüssi, en l'appliquant aux aciers sans palier d'écoulement. La courbe OBA est appelée par nous courbe d'égalisation incomplète des moments, et nous proposons de l'adopter en forme de parabole de deuxième degré avec l'équation

$$1 - \frac{M_B}{M} = (1 - \mu)^2$$

Le calcul est effectué dans l'ordre suivant. Le calcul „élastique“ donne les valeurs M_B et M , donc μ . Sur l'axe des abscisses on trouve cette valeur de μ . L'ordonnée, qui correspond à μ , donne le rapport recherché $M_B : M$ pour notre état limite conditionnel. A la fig. 67 on trouvera l'exemple d'une solution pour le cas, quand $\mu = 0,5$. D'après le diagramme on obtient $M_B : M = 0,75$ lorsque $\mu = 0,5$. Sur le diagramme des moments, à la fig. 67, on procède à une „égalisation incomplète“ des moments en traçant une ligne en pointillé d'une telle façon pour que

$$M' + M_B = 0,75 M_T$$

En outre

$$M - \frac{M'}{2} = M_T$$

On a donc ici deux inconnues M_T et M' , puisque M et M_B sont connues du calcul en „élasticité“.

Cette méthode de calcul comme on le voit, présume que lorsque le moment limite pratique se trouve atteint dans la section sous charge, le moment sur l'appui atteindra une certaine valeur moindre que M_T , mais relativement plus grande que d'après le calcul „élastique“. Le moment de calcul sous charge sera donc relativement diminué. Les poutres calculées suivant cette méthode pourront avoir une section plus réduite, que celle qui est exigée par le calcul habituel. La possibilité d'appliquer cette méthode au calcul des poutres tient à être vérifiée au moyen d'expériences que nous nous proposons de faire dans un avenir très prochain.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ¹⁾

I. ІНШОМОВНА

29. F. Stüssi, Sicherheit statisch unbestimmter Fachwerke bei Veränderung einzelner Stabquerschnitte, Bautechnik, 1931, № 40.
30. Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau, Wien, 1929.
31. G. v. Kazinczy, Die Weiterentwicklung der Plastizitätslehre „Teknika“, Budapest, 1931.
32. Hartmann, Die Formänderungen einfacher und durchlaufender Stahlträger. Mit einem Versuch, Schw. Bztg., 18. Februar, 1933.
33. E. Chwalla, Drei Beiträge zur Frage des Tragvermögens statisch unbestimmter Stahltragwerke, Intern. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen, Bd. II, Zürich, 1933—1934.
34. G. v. Kazinczy, Die Bemessung unvollkommen eingespannter Stahl „I“-Deckenträger unter Berücksichtigung der plastischen Formänderungen, Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Abhandlungen, Bd. II, Zürich, 1933—1934.
35. Fr. Bleich, La ductilité de l'acier. Son application au dimensionnement des systèmes hyperstatiques, L'ossature métallique, 1934, № 2.
36. F. Masi, La ductilité de l'acier, L'ossature métallique, 1934, № 5.
37. L. Baes, Les principes de la plasticité parfaite appliqués aux calculs de résistance des matériaux, L'ossature métallique, 1934, № 6.
38. L. Baes, Application de la plasticité parfaite à l'étude d'une enveloppe cylindrique à forte épaisseur, soumise à une forte différence de pression, L'ossature métallique, 1934, № 6.
39. A. S. Joukoff, Principes d'application de la plasticité au calcul des constructions métalliques hyperstatiques, L'ossature métallique, 1934, № 7—8.
40. G. Wilkin, Exemple d'étude de région plastique. Action de mandrinage dans une tôle, L'ossature métallique, 1934, № 7—8.
41. I. Verdeyen, Application de la plasticité au calcul des systèmes hyperstatiques, L'ossature métallique, 1934, № 9.
42. St. Bryla et Al. Chmiłowicz, Influence des semelles soudées aux ailes des poutrelles I sur leur résistance à la flexion, L'ossature métallique, 1935, № 4.
43. W. Prager, Der Einfluss der Verformung auf die Fließbedingung zähplastischer Körper, Zt. für angew. Mathem. und Mech, 1935, № 1—2.
44. K. Ježek, Die Tragfähigkeit des gleichmässig querbelasteten Druckstabes aus einem ideal-plastischen Stahl, Stahlbau, 1935, № 5.
45. F. Stüssi und C. F. Kollbrunner, Beitrag zum Traglastverfahren, Bautechnik, 1935, № 21.
46. Fr. Glaser, Die Sicherheit von Bogenbrücken aus Beton und aus Stahl, Bautechnik, 1935, № 48.
47. F. Stüssi, Schw. B., 106, № 11, 12, 1935.
48. F. Nakanishi, On the Yield Point of Mild Steel Beams under Uniform Bending, Reports of the Aeronautical Research Institute of Tokyo Imperial University, 1934, № 104.

¹⁾ У цей список не ввійшли роботи, подані в списку літератури першої частини нашої роботи. Нумерація робіт — продовження нумерації першої частини.

49. Th. Pöschl, Über eine direkte Methode zur Lösung von Aufgaben der Plastizitätstheorie, *Zt. für angew. Mathem. und Mech.*, 1935, № 6.
50. E. O. Patton und B. N. Gorbunow, Tragfähigkeit von geschweiseten Trägern, welche bei wiederholter Belastung plastische Verformungen erfahren, *Stahlbau*, 1936, № 1.
51. F. Wachendorf, Beitrag zur Frage der Verformungen und der Bruchsicherheit insbesondere von vollwandigen Zwei- und Dreigelenkbogen aus Stahl unter Berücksichtigung der Plastizitätseigenschaften, *doct. dissert. Braunschweig*, 1933.
52. F. Nakanishi, On the Yield Point of Mild Steel, *Rep. Aeron. Res. Inst. Tōkyo Imp. Univ.*, 1931, № 72.
53. W. Kuntze, Neuzeitliche Festigkeitsfragen, *Stahlbau*, 1935, № 2.
54. I. Fritsche, Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie, *Stahlbau*, 1936, № 9.
55. M. A. Rywosch, La poutre continue en tenant compte de la ductilité de l'acier, *Travaux*, 1936, № 40.

II. Література російською і українською мовами

14. Б. Г. Абрикосов, Расчет металлических конструкций с допуском пластических деформаций, ЦНИПС, 1934.
15. Е. О. Паттон і Б. М. Горбунов, Опір зварних балок при пластичних деформаціях під повторним навантаженням, УАН, 1935.
16. А. М. Василенко, Вправи з опору матеріалів, с. 192—199, Київ, 1935.
17. В. М. Наумович, Теория пластических деформаций в приложении к расчету неразрезных балок, Проект и стандарт, 1935, № 3.
18. К. С. Завриев, О расчете сварных металлических балок на изгиб, Проект и стандарт, 1935, № 4.
19. Н. С. Стрелецкий и А. Н. Гениев, Основы металлических конструкций, сс. 133—151, 1935.
20. С. Г. Михлин, Основные уравнения математической теории пластичности, 1934.
21. Г. А. Смирнов-Аляев, Приближенная теория пластичности квази-изотропного тела, *Вестник инж. и техн.*, 1935, № 4.
22. И. А. Одинг, Прочность металлов, сс. 454—494, 1935.
23. Г. А. Смирнов-Аляев, Теория пластичности квази-изотропного тела, Сборник под редакцией Д. К. Кнолля и др., Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах, 1935.
24. Г. А. Смирнов-Аляев, Процессы пластического растяжения и кручения металла в их взаимном сопоставлении, — там само.
25. Г. А. Смирнов-Аляев, Метод построения действительной кривой растяжения по данным испытания металла на прессе Гагарина, — там само.
26. С. И. Губкин и др., Экспериментальные вопросы пластической деформации металлов, 1934.
27. Журнал „Стройиндустрия“, 1935, № 8, 9, 12, аннотации статей К. Ježek и F. Stüssi.
28. С. И. Губкин, Пластическая деформация металлов, 1935.

ЗМІСТ

Передмова	5
Вступ	7
1. Дослідження роботи перерізу при чистому згині	9
Граничний напружений стан перерізу	9
Згин стрижнів при будьякому законі деформації	19
Ешюра напруг граничного стану для прямокутного перерізу	22
Дослідження напруг при згині балок прямокутного перерізу	29
Двотавровий переріз	33
Тавровий переріз	37
Робота прямокутного перерізу при другому законі деформації волокон	43
Двотавровий переріз	47
2. Дотичні напруги при згині	48
Дотичні напруги при пластичних деформаціях для сталей з площадкою текучості	48
Двотавровий переріз	59
Дотичні напруги для сталей без горизонтальної площадки текучості	61
Дотичні напруги при параболічному законі деформації	69
3. Складний опір — згин з поздовжньою силою	74
4. Порівнення відносної вигідності перерізів різної форми у випадку згину	77
Приклади розрахунку. Статично визначні балки	84
Додаток	90
Основи розрахунку статично невизначних балок	90
Нові дані про розрахунок балок з сталей з площадкою текучості	90
Статично невизначні балки з сталей без площадки текучості	96
1. Точне розв'язання	98
2. Розв'язання за принципом задачі для балок з різних матеріалів	101
3. Розв'язання за методом кривої неповного вирівнювання моментів	102
Резюме	106
Résumé	132

8

Ціна 6 крб.

ПРИЙМАННЯ ЗАМОВЛЕНЬ ТА ПЕРЕДПЛАТИ

на всі видання Академії Наук УСРР провадиться в секторі
поширення Видавництва Академії Наук УСРР

Київ, вул. Чудновського, 2

ПРОДАЖ ВИДАНЬ

у науковій книгарні Академії Наук УСРР — Київ, вул. Леніна, 12
і по всіх книгарнях Книгокультторгу, Книгоцентра ОГІЗ-а
та Книгозбуту ОНТИ

Друкарня-літографія Академії Наук УСРР у Києві