Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-130М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання.

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол №12 від 20.02.2024р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Зрівноважування вимірів параметричним способом [Електронне видання] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2024. – 41 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст

ВСТУП

В геодезичних задачах загальна кількість вимірюваних величин n завжди перевищує необхідну кількість вимірюваних величин k. Необхідними називають k величин, яких мінімально достатньо для розв’язування задачі. Виміри тільки необхідних величин не гарантують достовірність кінцевого результату розв’язку задачі. Різниця $r = n - k$ називається кількістю надлишкових виміряних величин. Надлишкові виміри дають можливість здійснювати контроль вимірів, виконувати їх обробку з метою обчислення надійних кінцевих значень, підвищують їх точність і забезпечують оцінку їх точності за тим чи іншим критерієм. У всіх геодезичних задачах наявність надлишкових виміряних величин є обов’язковою. Наприклад, для полігонометричного ходу, зображеного на схемі рис. 1.а, n = 9, k = 6, r = 3; для мережі тріангуляції (рис. 1.б) n = 15, k = 6, r = 9; для нівелірної мережі (рис. 1.в) n = 5, k = 2, r = 3.

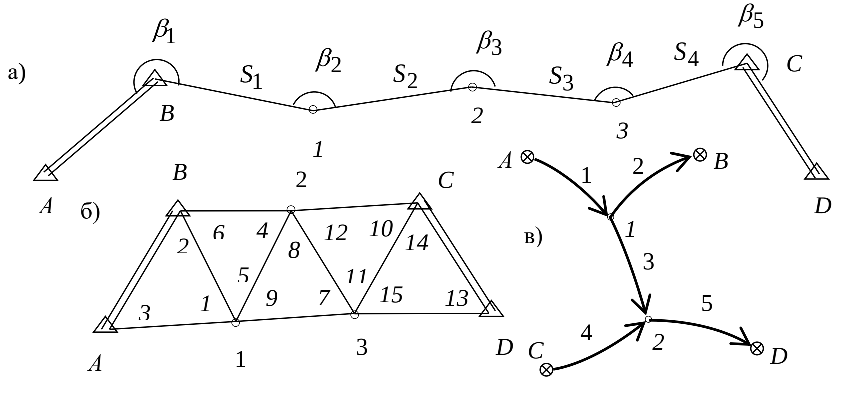

Рис. 1. Геодезичні мережі з надлишковими виміряними величинами

Разом з надлишковими вимірами вирішальною умовою досягнення розв'язку задачі сумісної обробки вимірів багатьох величин є наявність між вимірюваними величинами математичних взаємозв'язків. Умови математичних співвідношень, якими виражаються ці зв'язки, після розв'язування задачі повинні задовольнятись. Наприклад, сума внутрішніх кутів трикутника, сума перевищень замкненого нівелірного ходу тощо.

Задача сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин, які зв'язані поміж собою математичними умовами, з метою знаходження найбільш надійних значень та оцінки точності цих величин і їх функцій, називається **зрівноважування результатів вимірів**.

У загальній формі зв'язки між вимірюваними величинами виражаються рівняннями $\varphi_j(X_1,...,X_n)=0$, де X_i – істинні значення величин; $i=\overrightarrow{1,n}$; n – кількість величин. Серед складених рівнянь можуть бути такі, котрі залежні між собою. Із загальної кількості можливих рівнянь потрібно враховувати лише незалежні між собою рівняння. Вони завжди формують систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості надлишкових вимірів r: $j=\overrightarrow{1,r}$. Інші можливі рівняння будуть наслідками незалежних рівнянь сформованої системи. Утворену таким чином систему рівнянь називають системою умовних рівнянь. Кількість умовних рівнянь r завжди менша кількості невідомих величин n. Тому система умовних рівнянь є невизначеною і допускає нескінченну кількість розв'язків.

Умовні рівняння, складені з результатами вимірів величин x_i, мають вигляд $\varphi_j(x_1,...,x_n)=W_j$. Величини W_j називають нев'язки умовних рівнянь. Нев'язки – це істинні похибки функцій φ_j. Вони є наслідком впливу на результати вимірів похибок різного походження. Нев'язки виражають сумарну похибку вимірів тих величин, які є аргументами відповідних умовних рівнянь. Для здобуття розв'язку задачі зрівноважування вимірів необхідно позбутись нев'язок умовних рівнянь. Це досягають виправленням результатів вимірів шляхом введення до них поправок v_i: $x_i+v_i=\tilde{x}_i$. Поправки v_i за абсолютним значенням повинні дорівнювати, а за знаком бути протилежними істинним похибкам вимірів величин. Найбільш надійні значення $\tilde{x}_i$ називають зрівноваженими результатами вимірів. Умовні рівняння, складені за зрівноваженими результатами, мають вигляд $\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0$, тобто зрівноважені результати вимірів величин повинні задовольняти математичні умови, які закладені в умовних рівняннях.

Отже, мета зрівноважування – визначити поправки v_i, які дозволять виправити результати вимірів і позбутись нев'язок умовних рівнянь. Причина виникнення завдання зрівноважування – наявність похибок у результатах вимірів величин. Основні умови, які забезпечують розв'язок завдання, – це наявність надлишкових виміряних величин і математично виражених взаємозв'язків між усіма вимірюваними величинами. Розв'язок такого завдання досягається за принципом найменших квадратів.

Принцип найменших квадратів. За умови нормального розподілу сукупності істинних похибок $\theta_i = x_i - X_i$ результатів вимірів x_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ ймовірність цієї сукупності досягає максимуму $\dfrac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}$ (див. рис. 2) при абсолютному значенні показника степені у функції щільності $f(x_i) = \dfrac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - X_i)^2}{2\sigma_i^2}}$, який буде найменший, тобто $\left[\dfrac{\theta^2}{\sigma^2}\right] = \min$. Сукупність похибок θ_i, котра задовольняє такій умові, буде найбільш ймовірною з огляду на якість вимірів – грубі похибки вимірів відсутні, а їх систематична складова максимально врахована. Беручи до уваги, що середня квадратична похибка виміру m за своїм змістом відповідає середньому квадратичному відхиленню (стандарту) σ, а в числовому відношенні вони дорівнюють одне одному, одержимо: $\left[\dfrac{\theta^2}{m^2}\right] = \min$.

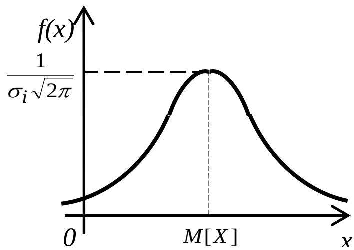

Рис. 2. Графік функції щільності нормального закону розподілу

Якщо на поправки v_i накласти умову $\left[\dfrac{v^2}{m^2}\right] = \min$, то їх сукупність в імовірнісному відношенні буде найкраще наближатись до сукупності істинних похибок θ_i. За умовою задачі, поправки повинні ліквідовувати нев'язки, тому за знаком вони мають бути протилежними до похибок θ_i.

Беручи до уваги зв'язок $p_i = \frac{c}{m_i^2}$ середньої квадратичної похибки m та ваги p виміру, одержимо: $[pv^2] = \min$ або $[v^2] = \min$, якщо зрівноважуванню підлягають рівноточні результати вимірів. Одержана умова – це **математичне вираження принципу найменших квадратів**.

Розв’язок задачі зрівноважування під умовою принципу найменших квадратів – це всього лиш один із можливих розв’язків, проте у порівнянні з іншими він має деякі істотні переваги. Головні з них такі:

1) наявність v_i^2 обмежує великі за абсолютною величиною поправки. Ця властивість передусім важлива у випадку зрівноважування рівноточних вимірів, оскільки обчислені поправки будуть більш-менш рівномірно розподілятись поміж результатами вимірів;
2) у випадку зрівноважування нерівноточних вимірів ваги p_i при v_i^2 зменшують поправки до більш точних та збільшують поправки до менш точних результатів вимірів.

Задача зрівноважування розв’язується здебільшого для великих масивів результатів вимірів, тому розв’язок зручно представляти і виконувати у матричній формі. Масив поправок v_i до вимірів формує матрицю $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$, а ваги вимірів – діагональну матрицю $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$, яку називають вагова матриця. З урахуванням цього, умова $[pv^2] = \min$ набуває вигляду $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$ або відповідно $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$, якщо зрівноважуванню підлягають рівноточні результати вимірів.

Задача зрівноважування під умовою принципу найменших квадратів з математичної точки зору – це задача знаходження умовного екстремуму: необхідно виразити мінімум функції $[pv^2] = \min$, якщо змінні v_i зв’язані поміж собою незалежними умовними рівняннями. Така задача може бути розв’язана шляхом виконання різних математичних дій. На практиці це зводиться до використання різних способів зрівноважування, зокрема, параметричного, корелатного або видозмін чи комбінацій цих способів. Незважаючи на відмінності закладених у них алгоритмів, усі способи еквівалентні, тобто забезпечують однакові у межах заданої точності кінцеві результати зрівноважування.

Параметричний спосіб зрівноважування під умовою принципу найменших квадратів – це спосіб абсолютного екстремуму, в якому всі вимірювані величини виражають функціями незалежних невідомих параметрів.

1. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ПОПРАВОК

Стадія формування системи параметричних рівнянь поправок розпочинається з прийняття важливого рішення, від якого залежить складність побудови самих рівнянь, а також об'єм подальших обчислювальних робіт – потрібно визначитись із вибором невідомих параметрів. Параметрами обирають величини, які не підлягали безпосереднім вимірам, але їх зрівноважені значення матимуть пряму практичну значущість. Наприклад, при зрівноважуванні результатів нівелювання параметрами обирають невідомі відмітки вузлових реперів, при зрівноважуванні результатів вимірів у планових мережах параметрами можуть бути невідомі координати пунктів, дирекційні кути чи довжини сторін. Кількість параметрів T_j ($j = \overrightarrow{1,k}$) повинна дорівнювати кількості необхідних виміряних величин *k*. Опісля всі вимірювані величини X_i виражають функціями вибраних параметрів

$$X_i = f_i(T_1,...,T_k)\,. \qquad (1)$$

$i = \overrightarrow{1,n}$, *n* – загальна кількість вимірюваних величин. Рівняння (1) називають параметричними рівняннями зв'язку.

Якщо зрівноважені значення параметрів позначити t_j, то за результатами зрівноважування умови рівнянь (1) повинні задовольнятись:

$$\tilde{x}_i = f_i(t_1,...,t_k)\,. \qquad (2)$$

Виходячи з рівності $x_i + v_i = \tilde{x}_i$, вираження поправок до результатів вимірів тепер набувають вигляду

$$v_i = f_i t_1,...,t_k) - x_i\,, \qquad (3)$$

і відповідно видозмінюється умова принципу найменших квадратів: $[p(f(t_1,...,t_k) - x)^2] = \min$. Позаяк невідомими тут є тільки величини t_j, то умова перетворюється до вигляду: $F(t_1,...,t_k) = \min$. Таким чином, розв'язування задачі зрівноважування способом умовного екстремуму перетворюється до розв'язування задачі на абсолютний екстремум. Для здобуття розв'язку задачі необхідно скласти систему рівнянь вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0 \qquad (4)$$

і виразити з неї необхідні невідомі t_j.

Рівняння (4) можуть мати нелінійний вигляд, тому з метою уніфікації наступних розв'язків їх лінеаризують шляхом розкладання параметричних рівнянь зв'язку вигляду (2) в ряд Тейлора:

$$f_i(t_1,\dots,t_k) = f_i(t_1^\circ,\dots,t_k^\circ) + \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_\circ \tau_j + R. \qquad (5)$$

Тут t_j° – наближені значення параметрів t_j; $\tau_j = t_j - t_j^\circ$ – поправки до наближених значень параметрів; коефіцієнти $\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_\circ = a_{ij}$ – це значення частинних похідних рівнянь зв'язку f_i за параметрами t_j (їх можна обчислити за результатами вимірів x_i та наближеними значеннями параметрів t_j°); R – сума всіх нелінійних членів ряду, включаючи другий і вище порядки. Якщо значення t_j° розрахувати з точністю, яка відповідає точності результатів вимірів, то поправки τ_j будуть малими настільки, що гранично величина $R \to 0$. За такої умови величиною R можна нехтувати. Тоді рівняння (3) набувають вигляду $v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + f_i(t_1^\circ,\dots,t_k^\circ) - x_i$ або

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i\,, \qquad (6)$$

де $l_i = f_i(t_1^\circ,\dots,t_k^\circ) - x_i$ – це вільні члени рівнянь. Однорідні лінійні рівняння (6) називають параметричними рівняннями поправок. Кількість рівнянь дорівнює кількості виміряних величин n.

Параметричні рівняння поправок (6) за посередництва відомих коефіцієнтів a_{ij} та вільних членів l_i задають лінійне перетворення системи величин τ_j ($j = \overrightarrow{1,k}$) у систему величин v_i ($i = \overrightarrow{1,n}$). За правилами лінійної алгебри таке перетворення можна показати матричною формою

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \dots \\ \tau_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

або, з врахуванням позначень відповідних матриць,

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{n\times 1}{l}\,. \qquad (8)$$

Формування системи параметричних рівнянь поправок передбачає дотримування чіткого порядку дій:

1) вибір параметрів T_j і обчислення їх наближених значень t_j°;

2) формування системи параметричних рівнянь зв'язку (1);
3) складання рівнянь поправок у загальному вигляді (3);
4) формування матриць коефіцієнтів a_{ij} та вільних членів l_i. За можливості вільні члени рекомендується виражати такими одиницями міри, щоб їх абсолютні значення були цілими числами;
5) складання параметричних рівнянь поправок у лінійному вигляді (6)-(8).

Параметричні рівняння поправок навіть для різних за фізичним змістом вимірюваних величин різняться лише кількістю та значеннями коефіцієнтів a_{ij} та вільних членів l_i. Останні ж повністю визначаються параметричними рівняннями зв'язку (1). Оскільки рівняння зв'язку (1) складають для окремого виду вимірюваної величини, то саме вона визначає собою відповідний вид параметричного рівняння поправок. Залежно від фізичного змісту вимірюваної величини можна виокремити найбільш **типові види параметричних рівнянь поправок** :

1. У нівелірних мережах для кожного виміряного перевищення h_i параметричні рівняння зв'язку мають вигляд $X_i = f_i(T_1,...,T_k) = T_{кінц} - T_{поч}$, де $T_{поч}$ та $T_{кінц}$ – відмітки початкового та кінцевого реперів ходу. Рівняння поправок мають загальний вигляд $v_i = t_{кінц} - t_{поч} - h_i$ або у лінійному вигляді $v_i = \tau_{кінц} - \tau_{поч} + l_i$, де $l_i = t^{\circ}_{кінц} - t^{\circ}_{поч} - h_i$. Оскільки рівняння зв'язку мають лінійний вигляд, то коефіцієнти a_{ij} набувають значень ± 1 (або 0 при поправках τ_j до наближених значень відміток реперів, які відсутні у рівнянні). Якщо $T_{поч}$ або $T_{кінц}$ є сталою величиною, то його відмітку параметром не іменують і поправки до відміток таких реперів не обчислюють.

2. Параметричне рівняння поправок до суми виміряних кутів окремого полігонометричного ходу має вигляд $v = \tau_{\alpha_{кінц}} - \tau_{\alpha_{поч}} + l$, де $\tau_{\alpha_{поч}}$ та $\tau_{\alpha_{кінц}}$ – поправки до наближених значень $\alpha^{\circ}_{поч}$ та $\alpha^{\circ}_{кінц}$ дирекційних кутів у вузлових точках ходу; $l = \alpha^{\circ}_{кінц} - \alpha'_{кінц}$; $\alpha'_{кінц}$ – дирекційний кут вузлового напряму, обчислений за дирекційним кутом $\alpha^{\circ}_{поч}$ та виміряними кутами ходу між початковою та кінцевою вузловими точками. Рівняння поправок має вагу $P = \left[\frac{1}{p_i}\right]^{-1}$, де p_i - ваги виміряних кутів.

3. Довжина сторони S між пунктами B і C виражається через координати X_B, Y_B та X_C, Y_C пунктів параметричним рівнянням зв'язку вигляду

$S=\sqrt{(X_C-X_B)^2+(Y_C-Y_B)^2}=f(X,Y)$. Координати пунктів є невідомими параметрами. Частинні похідні рівняння зв'язку дають такі коефіцієнти рівняння поправок: $\left(\frac{\partial f}{\partial X_B}\right)_\circ=-\cos\alpha^\circ$; $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_B}\right)_\circ=-\sin\alpha^\circ$; $\left(\frac{\partial f}{\partial X_C}\right)_\circ=\cos\alpha^\circ$; $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_C}\right)_\circ=\sin\alpha^\circ$. Числові значення коефіцієнтів обчислюють за дирекційним кутом α° напряму *BC*, виходячи з наближених значень параметрів X_B°, Y_B° та X_C°, Y_C°. Вільний член рівняння поправок $l_s=f(X^\circ,Y^\circ)-s=\sqrt{(X_C^\circ-X_B^\circ)^2+(Y_C^\circ-Y_B^\circ)^2}-s$, де s – результат виміру довжини сторони. Остаточно поправку до результату виміру довжини s виражає параметричне рівняння вигляду $v_s=-\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{X_B}-\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_B}+\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{X_C}+\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_C}+l_s$.

4. Істинне значення дирекційного кута $\overline{\alpha}$ з пункту *B* на пункт *C* виражається через параметри (координати X_B, Y_B та X_C, Y_C) параметричним рівнянням зв'язку $\overline{\alpha}=arctg\frac{Y_C-Y_B}{X_C-X_B}=f(X,Y)$. За ним виражають коефіцієнти рівняння поправок $\left(\frac{\partial f}{\partial X_B}\right)_\circ=\frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ$, $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_B}\right)_\circ=-\frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ$, $\left(\frac{\partial f}{\partial X_C}\right)_\circ=-\frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ$, $\left(\frac{\partial f}{\partial Y_C}\right)_\circ=\frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ$ і обчислюють за дирекційним кутом α° та довжиною s° сторони *BC*. Значення α° та s° обчислюють за наближеними значеннями X_B°, Y_B° та X_C°, Y_C°. Поправку до результату виміру дирекційного кута α виражає рівняння $v_\alpha=\frac{\rho}{s^\circ}(\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{X_B}-\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_B}-\sin\alpha^\circ\cdot\tau_{X_C}+\cos\alpha^\circ\cdot\tau_{Y_C})+l_\alpha$, де вільний член $l_\alpha=f(X^\circ,Y^\circ)-\alpha=arctg\frac{Y_C^\circ-Y_B^\circ}{X_C^\circ-X_B^\circ}-\alpha$.

5. Параметричне рівняння поправок до результату виміру горизонтального кута β на пункті *B* між напрямами на пункти *C* і *D* виражають відніманням рівнянь поправок, складених для дирекційних кутів α_{BC} і α_{BD}: $v_\beta=v_{\alpha_{BC}}-v_{\alpha_{BD}}+l_\beta$, де $l_\beta=l_{\alpha_{BC}}-l_{\alpha_{BD}}=\alpha_{BC}^\circ-\alpha_{BD}^\circ-\beta$.

2. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОПРАВОК

Невідомі поправки v_i до результатів вимірів виражаються параметричними рівняннями поправок як лінійне перетворення через невідомі поправки τ_j до наближених значень параметрів t_j°. Кількість невідомих поправок τ_j перевищує кількість рівнянь, тому така система не має однозначного аналітичного розв'язку. Для досягнення розв'язку використаємо принцип найменших квадратів.

Враховуючи параметричні рівняння поправок (6), математичне вираження принципу найменших квадратів набуває вигляду

$$[pv^2] = [p(a_1\tau_1 + \ldots + a_k\tau_k + l)^2] = F(\tau_1, \ldots \tau_k) = \min . \qquad (9)$$

Під такою умовою невідомі поправки τ_j можна визначити з розв'язування системи рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_j} = 0 . \qquad (10)$$

Отже: $\dfrac{\partial F}{\partial \tau_j} = 2[pv\dfrac{\partial v}{\partial \tau_j}] = 0$. Беручи до уваги параметричні рівняння поправок (6), $\dfrac{\partial v_i}{\partial \tau_j} = a_{ij}$ і система рівнянь (10) набуває вигляду

$$[pa_j v] = 0 \qquad (11)$$

або у матричній формі

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = 0 . \qquad (12)$$

Якщо умова отриманих рівнянь буде витримана, тим самим буде забезпечена умова мінімуму функції (9), яка виражає принцип найменших квадратів.

Підстановка до формули (12) замість матриці невідомих поправок v_i їх вираження параметричними рівняннями поправок (8) показує наступне:

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{l} = 0 . \qquad (13)$$

Рівняння (13) називають нормальним рівнянням поправок. Система нормальних рівнянь поправок містить k лінійних рівнянь з k невідомими поправками τ_j:

$$\left.\begin{array}{l} [pa_1a_1]\tau_1 + [pa_1a_2]\tau_2 + \ldots + [pa_1a_k]\tau_k + [pa_1l] = 0 \\ [pa_2a_1]\tau_1 + [pa_2a_2]\tau_2 + \ldots + [pa_2a_k]\tau_k + [pa_2l] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pa_ka_1]\tau_1 + [pa_ka_2]\tau_2 + \ldots + [pa_ka_k]\tau_k + [pa_kl] = 0 \end{array}\right\} . \qquad (14)$$

Добуток

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & p_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & p_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk}\end{pmatrix}$$

дає квадратну симетричну матрицю порядку k з коефіцієнтами $N_{js}=[pa_ja_s]=p_1a_{1j}a_{1s}+p_2a_{2j}a_{2s}+\ldots+p_na_{nj}a_{ns}$:

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}=\underset{k\times k}{N}=\begin{pmatrix}N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1k}\\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ N_{k1} & N_{k2} & \dots & N_{kk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[pa_1a_1] & [pa_1a_2] & \dots & [pa_1a_k]\\ [pa_2a_1] & [pa_2a_2] & \dots & [pa_2a_k]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ [pa_ka_1] & [pa_ka_2] & \dots & [pa_ka_k]\end{pmatrix}.$$

Вздовж головної діагоналі цієї матриці (зліва донизу вправо) містяться коефіцієнти, які завжди додатні: $N_{11}, N_{22},\ldots,N_{kk}$. Їх називають квадратичними. Коефіцієнти, які розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно дорівнюють один одному: $N_{js}=N_{sj}$. Ця рівність виражає властивість симетричності недіагональних коефіцієнтів.

Добуток $\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{l}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{nk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & p_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & p_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ \dots\\ l_n\end{pmatrix}$ дає масив вільних членів $L_j=[pa_jl]=p_1a_{1j}l_1+p_2a_{2j}l_2+\ldots+p_na_{nj}l_n$:

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{l}=\underset{k\times 1}{L}=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ \dots\\ L_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[pa_1l]\\ [pa_2l]\\ \dots\\ [pa_kl]\end{pmatrix}.$$

З врахуванням введених позначень для коефіцієнтів та вільних членів нормальне рівняння поправок набуває вигляду

$$\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times 1}{\tau}+\underset{k\times 1}{L}=0 \tag{15}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{matrix}N_{11}\tau_1+N_{12}\tau_2+\ldots+N_{1k}\tau_k+L_1=0\\ N_{21}\tau_1+N_{22}\tau_2+\ldots+N_{2k}\tau_k+L_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ N_{k1}\tau_1+N_{k2}\tau_2+\ldots+N_{kk}\tau_k+L_k=0\end{matrix}\right\}. \tag{16}$$

Допустимо, зрівноважуванню підлягають результати рівноточних вимірів. Такі результати мають однакові ваги, наприклад, $p_i=1$. Тоді вагова матриця $\underset{n\times n}{P}$ перетворюється у одиничну матрицю:

$$\underset{n\times n}{P}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\underset{n\times n}{E}\ .$$

За таких умов нормальне рівняння поправок (13) набуває вигляду

$$\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times 1}{\tau}+\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times 1}{l}=0 \tag{17}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{aligned} &[a_1a_1]\tau_1+[a_1a_2]\tau_2+\dots+[a_1a_k]\tau_k+[a_1l]=0 \\ &[a_2a_1]\tau_1+[a_2a_2]\tau_2+\dots+[a_2a_k]\tau_k+[a_2l]=0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[a_ka_1]\tau_1+[a_ka_2]\tau_2+\dots+[a_ka_k]\tau_k+[a_kl]=0 \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

Система рівнянь (17) зберігає усі властивості системи нормальних рівнянь (13) для випадку зрівноважування нерівноточних вимірів. З практичної точки зору це означає, що за умови зрівноважування рівноточних вимірів на стадії формування системи нормальних рівнянь поправок ваги не враховуються, а відповідні позначення у робочих формулах можна опустити і не брати до уваги.

З метою досягнення ефективного вирішення завдання зрівноважування система нормальних рівнянь поправок повинна бути добре обумовленою. Для цього визначник матриці N завжди має бути величиною додатною (жоден з її квадратичних коефіцієнтів не повинен дорівнювати нулю), квадратичні коефіцієнти повинні значно перевищувати абсолютні значення не квадратичних, а вільні члени рівнянь мають бути невеликими.

3. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОПРАВОК

Система нормальних рівнянь поправок (15) – це система лінійних рівнянь, кількість яких співпадає з кількістю невідомих τ_j $(j=\overrightarrow{1,k})$. Систему таких рівнянь можна розв’язати будь-яким способом лінійної алгебри. Розв’язування рівнянь має за мету визначення вектора $\tau=(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_k)$, елементами якого є корені рівнянь τ_j.

Формально розв’язок матричного рівняння (15) має вигляд

$$\underset{k\times 1}{\tau}=-\underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times 1}{L}\ , \tag{19}$$

де $\underset{k\times k}{Q}=\underset{k\times k}{N}^{-1}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь $\underset{k\times k}{N}=\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}$.

Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв’язуванні рівняння

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{E} \tag{20}$$

відносно $\underset{k\times k}{Q}$, де $\underset{k\times k}{E}$ – одинична матриця. Якщо квадратна матриця $\underset{k\times k}{N}$ неособлива та її визначник $|N| \neq 0$, то існує однозначний розв'язок рівняння (20). Елементи Q_{js} матриці $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ виражаються рівністю $Q_{js} = \dfrac{N'_{sj}}{|N|}$, де N'_{sj} – алгебраїчне доповнення елемента N_{sj} у визначнику $|N|$, тобто мінор, який помножений на $(-1)^{j+s}$ і одержаний з $|N|$ викреслюванням $s-$го рядка та $j-$го стовпця.

Обернена матриця $\underset{k\times k}{Q}$ має такі ж властивості, що і матриця $\underset{k\times k}{N}$. Основною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі. Для симетричної матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь справедлива рівність $\underset{k\times k}{N} = \underset{k\times k}{N}^T$. На цій основі $\underset{k\times k}{N}^{-1} = (\underset{k\times k}{N}^T)^{-1}$ або $\underset{k\times k}{N}^{-1} = (\underset{k\times k}{N}^{-1})^T$. З цього слідує, що $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{Q}^T$, тобто обернена матриця є симетричною відносно головної діагоналі.

Отже, рівняння (19) виражає розв'язок системи нормальних рівнянь поправок, а рівнянням (20) можна скористатись для контролю побудови оберненої матриці. За умови використання сучасних технічних засобів обчислень слід мати на увазі, що їх програмне забезпечення завжди містить алгоритм розв'язку (20), тому немає необхідності додатково створювати відповідне програмне забезпечення.

4. ОБЧИСЛЕННЯ ЗРІВНОВАЖЕНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ ТА ПАРАМЕТРІВ

Зрівноважені значення результатів вимірів $\tilde{x}_i$ виражають рівняння $\tilde{x}_i = x_i + v_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ або їх матрична форма

$$\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} + \underset{n\times 1}{V}, \tag{21}$$

де $\underset{n\times 1}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця результатів вимірів величин; $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{\cdots} \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ – матриця зрівноважених результатів вимірів; $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ – матриця поправок v_i.

Невідомі поправки до результатів вимірів v_i виражаються параметричними рівняннями поправок вигляду (6) $v_i = a_{i1}\tau_1 + \ldots + a_{ik}\tau_k + l_i$ або (8) $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{\tau} + \underset{n\times 1}{l}$ за посередництва поправок τ_j, які завчасно обчислено за результатами розв'язування системи нормальних рівнянь.

Зрівноважені значення невідомих параметрів t_j виражають рівняння $t_j = t_j^\circ + \tau_j$ $(j = \overrightarrow{1,k})$ або їх матрична форма

$$\underset{k\times 1}{t} = \underset{k\times 1}{t^\circ} + \underset{k\times 1}{\tau}, \tag{22}$$

де $\underset{k\times 1}{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_k \end{pmatrix}$ – матриця зрівноважених значень параметрів; $\underset{k\times 1}{t^\circ} = \begin{pmatrix} t_1^\circ \\ t_2^\circ \\ \cdots \\ t_k^\circ \end{pmatrix}$ – матриця наближених значень параметрів; $\underset{k\times 1}{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ \tau_k \end{pmatrix}$ – матриця поправок до наближених значень параметрів.

Розкриттям числових значень $\tilde{x}_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ та t_j $(j = \overrightarrow{1,k})$ завершуються основні зрівноважувальні обчислення. На цій стадії розв'язування задачі проводять завершальний контроль результатів зрівноважування. Контроль реалізовують шляхом перевірки істинності умов, які закладено до параметричних рівнянь зв'язку (2): $\tilde{x}_i = f_i(t_1,\ldots,t_k)$, тобто зрівноважені значення результатів вимірів, які обчислено за рівняннями $\tilde{x}_i = x_i + v_i$, повинні дорівнювати відповідним значенням, які виражаються параметричними рівняннями зв'язку через зрівноважені параметри t_j.

5. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

Оцінкою точності за результатами зрівноважування параметричним способом називають обчислення середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів, параметрів та їх функцій.

Загалом середня квадратична похибка M будь-якої величини виражається формулою теорії похибок

$$M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}, \tag{23}$$

де μ – середня квадратична похибка одиниці ваги; P – вага оцінюваної величини.

Якщо обробці підлягають результати рівноточних вимірів, то формула (23) набуває вигляду

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}}\ , \tag{24}$$

де m – середня квадратична похибка рівноточних вимірів.

Виходячи з цих формул теорії похибок, завдання оцінки точності розділяють на дві складові частини.

Перша складова – це обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ або середньої квадратичної похибки результатів рівноточних вимірів m. Числове значення μ в задачі зрівноважування параметричним способом обчислюють за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}\ . \tag{25}$$

Різниця $n-k=r$ виражає кількість надлишкових виміряних величин. Формула (25) є узагальненням формули Бесселя для оцінювання точності вимірів окремої величини при $k=1$. Величину m виражає узагальнена формула Бесселя вигляду

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}\ . \tag{26}$$

Друга складова – обчислення ваги оцінюваної величини. Для вирішення цієї частини завдання величину виражають функцією результатів вимірів x_i загального вигляду $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Далі застосовується формула теорії похибок вимірів, за якою вага оцінюваної величини обчислюється як вага функції виміряних величин:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i}\ . \tag{27}$$

Тут p_i - ваги результатів вимірів x_i. Складність обчислення оберненої ваги $\frac{1}{P_F}$ у задачі зрівноважування полягає у тому, що оцінювані величини виражаються функціями зрівноважених параметрів або зрівноважених значень виміряних величин, а не безпосередніх результатів вимірів цих величин. Отже, використовувати формулу (27) у чистому вигляді неприпустимо. Передусім потрібно розкрити зв'язки результатів вимірів величин x_i із зрівноваженими вимірами $\tilde{x}_i$, із зрівноваженими параметрами

t_j чи їх функціями. Відтак хід дій з обчислення ваги оцінюваної величини залежатиме від того, як на основі встановлених зв’язків вона виразиться через виміряні величини. Означені зв'язки можна розкрити наступним чином.

1. Всі результати вимірів x_i $(i=\overrightarrow{1,n})$ виражаються через параметри t_j $(j=\overrightarrow{1,k})$ рівняннями $x_i = \tilde{x}_i - v_i = f_i(t_1,t_2,...,t_k) - v_i$. Отже, функція $F = f(x_1,x_2,...,x_n)$ перетворюється до вигляду $F = F(t_1,t_2,...,t_k)$.

2. Оскільки $t_j = t_j^\circ + \tau_j$, то величину F можна визнати функцією невідомих τ_j системи нормальних рівнянь. Отже, $F = F(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k)$. Таким чином, якщо τ_j виразити через x_i, то величина F буде розкрита функцією результатів вимірів x_i.

3. Невідомі τ_j обчислюються з розв’язування системи нормальних рівнянь поправок $N_{j1}\tau_1 + N_{j2}\tau_2 + ... + N_{jk}\tau_k + L_j = 0$. Отже, вони залежні від вільних членів цих рівнянь. Вільні члени $L_j = [pa_j l]$, у свою чергу, є функціями вільних членів l_i параметричних рівнянь поправок. Тому можна вважати, що $F = F(l_1,l_2,...,l_n)$.

Отже, поставлене завдання буде вирішене, якщо врахувати, що ваги вільних членів $l_i = f_i(t_1^\circ,t_2^\circ,...,t_k^\circ) - x_i$ параметричних рівнянь поправок дорівнюють вагам результатів вимірів x_i. Інакше кажучи, похибки вільних членів l_i у завданні оцінки точності можна ототожнювати з похибками результатів вимірів x_i. Сформульоване твердження має визначальне значення у обґрунтуванні способів та формуванні алгоритмів обчислення ваг потрібних величин. З метою уніфікації та забезпечення оптимального розв’язання завдання та методологічної систематики алгоритмів оцінювані величини виражають здебільшого функціями зрівноважених параметрів.

5.1. Оцінка точності зрівноважених параметрів

Зрівноважені параметри t_j розкриває система рівнянь $\underset{k\times1}{t} = \underset{k\times1}{t^\circ} + \underset{k\times1}{\tau}$. Параметри t_j знаходяться у прямій залежності від невідомих τ_j. Невідомі τ_j розкриває система лінійних рівнянь (19): $\underset{k\times1}{\tau} = -\underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times1}{L}$. Вони залежні від вільних членів L_j нормальних рівнянь поправок:

$$\tau_j = -Q_{j1}L_1 - Q_{j2}L_2 - ... - Q_{jk}L_k . \quad (28)$$

Беручи нарешті до уваги залежність $L_j = [pa_j l]$, одержимо наступне:

$$\tau_j = -Q_{j1}[pa_1 l] - Q_{j2}[pa_2 l] - ... - Q_{jk}[pa_k l]; \tag{29}$$

$$\tau_j = -p_1(a_{11}Q_{j1} + ... + a_{1k}Q_{jk})l_1 - ... - p_n(a_{n1}Q_{j1} + ... + a_{nk}Q_{jk})l_n; \tag{30}$$

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} p_i(a_{i1}Q_{j1} + ... + a_{ik}Q_{jk})l_i . \tag{31}$$

Позначимо $p_i(a_{i1}Q_{j1} + ... + a_{ik}Q_{jk}) = \alpha_{ij}$, де α_{ij} – це сталі коефіцієнти, які формують матрицю $\underset{n\times k}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nk} \end{pmatrix}$. Беручи до уваги введене позначення, матриця $\underset{k\times n}{\alpha}^T$ виразиться добутком

$$\underset{k\times n}{\alpha}^T = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A}^T \cdot \underset{n\times n}{P} . \tag{32}$$

Тепер залежність (31) перетворюється до наступного вигляду:

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} l_i = -[\alpha_j l]; \tag{33}$$

$$\underset{k\times 1}{\tau} = -\underset{k\times n}{\alpha}^T \cdot \underset{n\times 1}{l} . \tag{34}$$

Отже, лінійні функції (33), (34) розкривають залежність невідомих τ_j і параметрів t_j від вільних членів параметричних рівнянь поправок l_i. Враховуючи, що з точки зору точності вільні члени l_i ототожнюються з результатами вимірів і мають ваги p_i, тепер на основі формули (27) для оберненої ваги $\frac{1}{P_j}$ невідомого τ_j і параметра t_j можна записати наступне:

$$\frac{1}{P_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \tau_j}{\partial l_i} \right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \frac{1}{p_i} = \left[\frac{\alpha_j \alpha_j}{p} \right]. \tag{35}$$

Права частина формули (35) розкриває добуток елементів матриць $\underset{k\times n}{\alpha^T} \cdot \underset{n\times n}{P^{-1}} \cdot \underset{n\times k}{\alpha}$, де $\underset{n\times n}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n} \end{pmatrix}$ – діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. З такого добутку слідує:

$$\underset{k\times n}{\alpha^T}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{\alpha} = \underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{Q}\cdot\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A}\cdot\underset{k\times k}{Q}\ .$$

Враховуючи рівності $\underset{k\times n}{A^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ та $\underset{k\times k}{N}\cdot\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{E}$,

$$\underset{k\times n}{\alpha^T}\cdot\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times k}{\alpha} = \underset{k\times k}{Q} \tag{36}$$

або

$$\left[\frac{\alpha_j\alpha_s}{p}\right] = Q_{js}\ . \tag{37}$$

Остаточно формула (35) для обернених ваг параметрів набуває вигляду

$$\frac{1}{P_j} = \left[\frac{\alpha_j\alpha_j}{p}\right] = Q_{jj}\ . \tag{38}$$

Отже, обернені ваги параметрів t_j з порядковими номерами j дорівнюють діагональним (квадратичним) елементам оберненої матриці $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ з відповідними індексами *jj*. З огляду на отриманий результат, усі елементи матриці $\underset{k\times k}{Q}$ називають ваговими коефіцієнтами. Не квадратичні вагові коефіцієнти матриці $\underset{k\times k}{Q}$ виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Коефіцієнт кореляції між параметрами t_i та t_j розкриває формула

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}\ . \tag{39}$$

Обчислення середньої квадратичної похибки потрібного параметра забезпечують формули (23) або (24).

Матриця

$$\underset{k\times k}{M^2} = \mu^2\cdot\underset{k\times k}{Q} \tag{40}$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{k\times k}{M^2} = m^2\cdot\underset{k\times k}{Q} \tag{41}$$

називається кореляційна матриця зрівноважених параметрів. На головній діагоналі матриці $\underset{k\times k}{M^2}$ розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок параметрів з відповідними їм індексами.

5.2. Оцінка точності функцій параметрів

Нехай дано функцію параметрів $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$. Перетворимо її до лінійного вигляду розкладанням в ряд Тейлора. Враховуючи, що $t_j = t_j^{\circ} + \tau_j$,

$$F(t_1,...,t_k) = F(t_1^{\circ},...,t_k^{\circ}) + \left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_{\circ} \tau_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial t_k}\right)_{\circ} \tau_k + R. \qquad (42)$$

R – сума всіх нелінійних членів ряду. Якщо на наближені значення t_j° накласти умову, щоб їх точність відповідала точності результатів вимірів, то поправки τ_j будуть малими настільки, що гранично величина $R \to 0$. За такої умови величиною R можна нехтувати. Тоді

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 + F_1\tau_1 + ... + F_k\tau_k, \qquad (43)$$

де $F_0 = F(t_1^{\circ},...,t_k^{\circ})$ – наближене значення функції; $F_j = \left(\frac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\circ}$ – числові значення частинних похідних функції за параметрами t_j. Беручи до уваги констатовану раніше залежність величин τ_j та l_i вигляду (33), одержимо:

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 - F_1[\alpha_1 l] - ... - F_k[\alpha_k l];$$

$$F(t_1,...,t_k) = F_0 - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)l_i = \varPhi(l_1,...,l_n). \qquad (44)$$

Отже, оцінювану функцію параметрів $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$ тепер можна визнати лінійною функцією вільних членів l_i параметричних рівнянь поправок. Враховуючи, що з точки зору точності вільні члени l_i ототожнюються з результатами вимірів і мають ваги p_i, тепер на основі формули (27) обчислення ваги функції виміряних величин для оберненої ваги функції $F = F(t_1, t_2, ..., t_k)$ можна записати наступне:

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varPhi}{\partial l_i}\right)^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}F_1 + ... + \alpha_{ik}F_k)^2 \frac{1}{p_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}\alpha_{i1}F_1F_1 + 2\alpha_{i1}\alpha_{i2}F_1F_2 + ... + \alpha_{i2}\alpha_{i2}F_2F_2 + 2\alpha_{i2}\alpha_{i3}F_2F_3 + ... + \alpha_{ik}\alpha_{ik}F_kF_k)\frac{1}{p_i} =$$

$$\left.\begin{aligned} = F_1F_1\left[\frac{\alpha_1\alpha_1}{p}\right] + 2F_1F_2\left[\frac{\alpha_1\alpha_2}{p}\right] + ... + 2F_1F_k\left[\frac{\alpha_1\alpha_k}{p}\right] + \\ + F_2F_2\left[\frac{\alpha_2\alpha_2}{p}\right] + 2F_2F_3\left[\frac{\alpha_2\alpha_3}{p}\right] + ... + 2F_2F_k\left[\frac{\alpha_2\alpha_k}{p}\right] + \\ + ... + \\ + F_kF_k\left[\frac{\alpha_k\alpha_k}{p}\right] \end{aligned}\right\}$$

або з врахуванням позначень вагових коефіцієнтів (37) і (38)

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij} . \qquad (45)$$

Формула (45) розкриває добуток матриць

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T} \qquad (46)$$

Обчислення середньої квадратичної похибки потрібної функції параметрів забезпечують формули (23) або (24).

Матричною формою (46) зручно користуватись, якщо оцінюють не одну, а деяку кількість m функцій. Тоді матриця F має розмірність $m \times k$. Кожний її рядок містить значення похідних $F_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial t_j}\right)_{\circ}$ функцій $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ ($i = \overrightarrow{1, m}$), а формула (46) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1k} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & \dots & F_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & \dots & F_{m1} \\ F_{12} & F_{22} & \dots & F_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{1k} & F_{2k} & \dots & F_{mk} \end{pmatrix} =$$

$$= \underset{m\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times m}{F^T} = \underset{m\times m}{Q_F} , \qquad (47)$$

де $\underset{m\times m}{Q_F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{F_1}} & Q_{F_{12}} & \dots & Q_{F_{1m}} \\ Q_{F_{21}} & \frac{1}{P_{F_2}} & \dots & Q_{F_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{F_{m1}} & Q_{F_{m2}} & \dots & \frac{1}{P_{Fm}} \end{pmatrix}$ – вагова матриця системи m функцій.

На головній діагоналі матриці $\underset{m\times m}{Q_F}$ розташовані обернені ваги $\frac{1}{P_{F_i}}$ відповідних оцінюваних функцій $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$. Оскільки добуток (47) визначає симетрична матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$, то відносно головної діагоналі матриці $\underset{m\times m}{Q_F}$ розміщені коефіцієнти, які наділені властивістю симетричності $Q_{F_{ij}} = Q_{F_{ji}}$. Ці елементи виражають залежність між функціями зрівноважених параметрів і називаються кореляційними моментами. Тісноту залежності між функціями за номерами i та j розкриває коефіцієнт кореляції

$$r_{F_i F_j} = \frac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_i}} \cdot \frac{1}{P_{F_j}}}}. \tag{48}$$

Матриця

$$\underset{m\times m}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \tag{49}$$

або при зрівноважуванні рівноточних вимірів

$$\underset{m\times m}{M^2} = m^2 \cdot \underset{m\times m}{Q_F} \tag{50}$$

називається кореляційна матриця функцій зрівноважених параметрів. На головній діагоналі матриці $\underset{m\times m}{M^2}$ розташовані значення квадратів M_i^2 середніх квадратичних похибок функцій зрівноважених параметрів $F_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ з відповідними їм індексами $i = \overrightarrow{1, m}$.

5.3. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ результатів вимірів x_i виражаються функціями зрівноважених параметрів t_j, які називають параметричними рівняннями зв'язку (2): $\tilde{x}_i = f_i(t_1, ..., t_k)$ $(i = \overrightarrow{1, n})$. Їх складають на початковій стадії зрівноважування. Виходячи з цього, задачу оцінки точності зрівноважених результатів вимірів можна вважати частковим випадком задачі оцінки точності функцій параметрів. Розв'язок такої задачі спрощується тим, що частинні похідні функцій за параметрами t_j, які є елементами матриці F, вже відомі – це коефіцієнти $F_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_{\circ} = a_{ij}$ параметричних рівнянь поправок (6)-(8).

Для обчислення оберненої ваги зрівноваженого значення окремої вимірюваної величини за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ у формулі (46) $\frac{1}{P_F} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}$ містить коефіцієнти a_{ij} параметричного рівняння поправок за тим же номером i . Обчислення середньої квадратичної похибки зрівноваженого значення потрібної вимірюваної величини забезпечують формули (23) або (24).

Для обчислення обернених ваг усіх зрівноважених значень результатів вимірів матриця F має розмірність $n \times k$ з елементами a_{ij}:

$\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$. Вагову матрицю зрівноважених результатів вимірів $\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ виражає рівняння

$$\underset{n\times n}{Q_F} = \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T}, \tag{51}$$

а відповідну кореляційну матрицю розкривають формули (49) або (50).

6. ПРИКЛАДИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ ПАРАМЕТРИЧНИМ СПОСОБОМ

Завдання 1. У нівелірній мережі з трьома вузловими реперами *D, E, F* виміряно перевищення *h* у шести ходах різної довжини *S*. Мережа опирається на три вихідних репери *A, B, C* з відомими відмітками $H_A = 183{,}496$ *м*, $H_B = 192{,}353$ *м*, $H_C = 191{,}890$ *м*. Схема мережі зображена на рис. 3. Необхідно визначити зрівноважені значення виміряних перевищень та відмітки вузлових реперів *D, E, F*, оцінити точність зрівноваженого перевищення та відмітки вузлового репера.

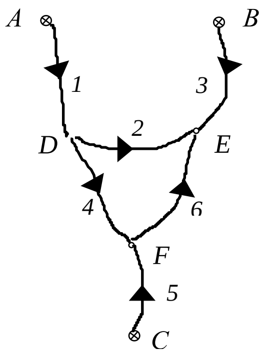

Рис. 3. Схема нівелірної мережі

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 1.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні результати вимірів перевищень та довжини ходів:

№ ходу	1	2	3	4	5	6
Перевищення h (*м*)	6,125	8,320	5,580	1,368	-0,905	6,944
Довжина S (*км*)	12,6	16,4	14,1	10,0	12,0	13,2

Для заданої мережі загальна кількість вимірів $n = 6$, кількість необхідних вимірів $k = 3$, кількість надлишкових вимірів $r = 3$.

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

1.1) вибір параметрів і обчислення їх наближених значень:

Позначення параметрів	Наближені значення параметрів (*м*)
$H_E = t_1 = t_1^\circ + \tau_1$	$t_1^\circ = H_B + h_3 = 197{,}933$
$H_F = t_2 = t_2^\circ + \tau_2$	$t_2^\circ = H_C + h_5 = 190{,}985$
$H_D = t_3 = t_3^\circ + \tau_3$	$t_3^\circ = H_A + h_1 = 189{,}621$

1.2) складання параметричних рівнянь зв'язку $\tilde{h}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$:

$\tilde{h}_1 = t_3 - H_A$; $\quad \tilde{h}_2 = t_1 - t_3$; $\quad \tilde{h}_3 = t_1 - H_B$;

$\tilde{h}_4 = t_2 - t_3$; $\quad \tilde{h}_5 = t_2 - H_C$; $\quad \tilde{h}_6 = t_1 - t_2$.

1.3) складання параметричних рівнянь поправок у загальному вигляді $v_i = f_i(t_1, t_2, t_3) - h_i$:

$v_1 = t_3 - H_A - h_1$; $\quad v_2 = t_1 - t_3 - h_2$; $\quad v_3 = t_1 - H_B - h_3$;

$v_4 = t_2 - t_3 - h_4$; $\quad v_5 = t_2 - H_C - h_5$; $\quad v_6 = t_1 - t_2 - h_6$.

1.4) обчислення вільних членів рівнянь поправок $l_i = f_i(t_1^\circ, t_2^\circ, t_3^\circ) - h_i$:

$l_1 = t_3^\circ - H_A - h_1 = 0$; $\quad l_2 = t_1^\circ - t_3^\circ - h_2 = -8$ *мм*;

$l_3 = t_1^\circ - H_B - h_3 = 0$; $\quad l_4 = t_2^\circ - t_3^\circ - h_4 = -4$ *мм*;

$l_5 = t_2^\circ - H_C - h_5 = 0$; $\quad l_6 = t_1^\circ - t_2^\circ - h_6 = 4$ *мм*.

1.5) складання параметричних рівнянь поправок у лінійному вигляді

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + l_i, \qquad \text{де } a_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_\circ :$$

$v_1 = \tau_3$; $\quad v_2 = \tau_1 - \tau_3 - 8$; $\quad v_3 = \tau_1$;

$v_4 = \tau_2 - \tau_3 - 4$; $\quad v_5 = \tau_2$; $\quad v_6 = \tau_1 - \tau_2 + 4$.

1.6) формування системи параметричних рівнянь поправок у матричній формі $\underset{6\times1}{V} = \underset{6\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{6\times1}{l}$. Матриці коефіцієнтів та вільних членів рівнянь утворені наступними елементами: $\underset{6\times3}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\underset{6\times1}{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Система параметричних рівнянь поправок:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Система нормальних рівнянь поправок має загальний вигляд

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + L_2 = 0 \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + L_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{3\times1}{L} = 0.$$

Матриці коефіцієнтів та вільних членів рівнянь розкривають добутки $\underset{3\times3}{N} = \underset{3\times6}{A^T} \cdot \underset{6\times6}{P} \cdot \underset{6\times3}{A}$ та $\underset{3\times1}{L} = \underset{3\times6}{A^T} \cdot \underset{6\times6}{P} \cdot \underset{6\times1}{l}$. Вагова матриця $\underset{6\times6}{P}$ утворена вагами результатів вимірів перевищень $p_i = \dfrac{10}{S_i}$ (S_i – довжини ходів):

$$\underset{6\times6}{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}. \quad \underset{3\times3}{N} = \begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix}; \quad \underset{3\times1}{L} = \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix}.$$

Система нормальних рівнянь поправок:

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок

3.1) формування матриці $\underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{N}^{-1}$ – оберненої до матриці $\underset{3\times3}{N}$:

$\underset{3\times3}{Q} = \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix}$. Перевірка правильності побудови оберненої матриці рівнянням $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{E}$, де $\underset{3\times3}{E}$ – одинична матриця:

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2) обчислення невідомих τ_j системи нормальних рівнянь поправок:

$$\underset{3\times1}{\tau} = -\underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times1}{L};$$

$$\underset{3\times1}{\tau} = -\begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7607 \\ 1.9842 \\ -2.6498 \end{pmatrix}.$$

3.3) контроль розв’язування системи нормальних рівнянь поправок $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{3\times1}{L} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2.1 & -0.8 & -0.6 \\ -0.8 & 2.6 & -1.0 \\ -0.6 & -1.0 & 2.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.7607 \\ 1.9842 \\ -2.6498 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.6 \\ -7.2 \\ 8.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислення зрівноважених значень виміряних перевищень та відміток вузлових реперів

4.1) обчислення поправок v_i до виміряних перевищень $\underset{6\times1}{V} = \underset{6\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{\tau} + \underset{6\times1}{l}$:

$$\underset{6\times1}{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.7607 \\ 1.9842 \\ -2.6498 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6498 \\ -4.5895 \\ 0.7607 \\ 0.6339 \\ 1.9842 \\ 2.7765 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень $\tilde{h}_i$ виміряних перевищень $\underset{6\times1}{\tilde{h}} = \underset{6\times1}{h} + \underset{6\times1}{V}$, де $\underset{6\times1}{h}$ – матриця результатів вимірів перевищень:

$$\underset{6\times1}{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 6125 \\ 8320 \\ 5580 \\ 1368 \\ -905 \\ 6944 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.6 \\ -4.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 2.0 \\ 2.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6122.4 \\ 8315.4 \\ 5580.8 \\ 1368.6 \\ -903.0 \\ 6946.8 \end{pmatrix}.$$

4.3) обчислення зрівноважених значень відміток реперів (параметрів) $\underset{3\times1}{t} = \underset{3\times1}{t^\circ} + \underset{3\times1}{\tau}$, де $\underset{3\times1}{t^\circ} = \begin{pmatrix} t_1^\circ \\ t_2^\circ \\ t_3^\circ \end{pmatrix}$ – наближені значення параметрів:

$$\underset{3\times1}{t} = \begin{pmatrix} 197933 \\ 190985 \\ 189621 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 2.0 \\ -2.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 197933.8 \\ 190987.0 \\ 189618.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_E \\ H_F \\ H_D \end{pmatrix}.$$

4.4) контроль зрівноважування перевищень та відміток реперів – це завершальний контроль результатів зрівноважування, який реалізовуємо перевіркою істинності умов параметричних рівнянь зв'язку $\tilde{h}_i = f_i(t_1, t_2, t_3)$: зрівноважені перевищення, які обчислені з рівняння $\tilde{h}_i = h_i + v_i$ у п.4.2, повинні дорівнювати відповідним значенням, які обчислені за зрівноваженими відмітками реперів.

$\tilde{h}_1 = H_D - H_A = 6122{,}4$ *мм*; $\tilde{h}_2 = H_E - H_D = 8315{,}4$ *мм*;

$\tilde{h}_3 = H_E - H_B = 5580{,}8$ *мм*; $\tilde{h}_4 = H_F - H_D = 1368{,}6$ *мм*;

$\tilde{h}_5 = H_F - H_C = -903{,}0$ *мм*; $\tilde{h}_6 = H_E - H_F = 6946{,}8$ *мм*.

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$, де $[pv^2] = \underset{1\times 6}{V^T} \cdot \underset{6\times 6}{P} \cdot \underset{6\times 1}{V} = 28{,}3792$: $\mu = \pm 3{,}08$ *мм*.

5.2) **оцінка точності зрівноважених параметрів** – відміток вузлових реперів. Середню квадратичну похибку будь-якої величини визначає похибка одиниці ваги та вага оцінюваної величини. Обернені ваги параметрів дорівнюють діагональним елементам матриці вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$ з відповідними індексами: $\frac{1}{P_j} = Q_{jj}$. Отже, наприклад, для середньої квадратичної похибки параметра t_3, яким позначено відмітку репера *D*, одержимо наступний результат: $M_{H_D} = \mu\sqrt{Q_{33}} = \pm 2{,}46$ (*мм*) і остаточно $H_D = 189618{,}4 \pm 2{,}46$ (*мм*).

Інші елементи матриці $\underset{k\times k}{Q}$ виражають залежність між зрівноваженими параметрами. Тісноту залежності між параметрами t_i та t_j розкриває коефіцієнт кореляції $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$. Наприклад, коефіцієнт кореляції між параметрами t_1 та t_3 $r_{13} = \frac{Q_{13}}{\sqrt{Q_{11} \times Q_{33}}} = \frac{0.3117}{\sqrt{0.6921 \times 0.6366}} = 0.47$.

5.3) **оцінка точності зрівноважених перевищень**. Для визначення оберненої ваги зрівноваженого перевищення його потрібно виразити функцією параметрів t_j і скористатись формулою $\frac{1}{P_F} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T}$, де матриця $\underset{1\times k}{F}$ формується значеннями частинних похідних складеної функції за параметрами t_j: $F_j = \left(\dfrac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\circ}$. Зрівноважені перевищення виражаються функціями параметрів, які називають параметричними рівняннями зв'язку. Частинні похідні параметричного рівняння зв'язку для зрівноваженого перевищення за номером i – це коефіцієнти a_{ij} відповідного i-го параметричного рівняння поправок, які містяться у рядку з тим же номером i у матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$. Таким чином, для обчислення оберненої ваги зрівноваженого перевищення за номером i матриця $\underset{1\times k}{F}$ формується елементами i-го рядка матриці $\underset{n\times k}{A}$. Наприклад, для перевищення $\tilde{h}_{DE} = \tilde{h}_2 = \tau_1 - \tau_3 - 8$ матриця $\underset{1\times 3}{F}$ містить частинні похідні $\underset{1\times 3}{F} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Обернена вага цього перевищення

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{h}_{DE}}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0{,}7052,$$

а середня квадратична похибка $M_{\tilde{h}_{DE}} = M_F = \mu\sqrt{\dfrac{1}{P_F}} = \pm\, 2{,}59$ (*мм*).

За потреби оцінки точності усіх *n* зрівноважених перевищень матриця F має розмірність $n \times k$, а її елементами є сукупність усіх коефіцієнтів a_{ij} матриці $\underset{n\times k}{A}$: $\underset{n\times k}{F} = \underset{n\times k}{A}$. Тоді добуток $\underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times n}{A^T} = \underset{n\times n}{Q_F}$ виражає вагову матрицю системи *n* зрівноважених перевищень:

$$\underset{6\times 6}{Q_F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.6921 & 0.3328 & 0.3117 \\ 0.3328 & 0.6181 & 0.3408 \\ 0.3117 & 0.3408 & 0.6366 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6366 & -0.3249 & 0.3117 & -0.2958 & 0.3407 & -0.0291 \\ -0.3249 & 0.7052 & 0.3803 & 0.3170 & -0.0079 & 0.3883 \\ 0.3117 & 0.3803 & 0.6920 & 0.0211 & 0.3328 & 0.3592 \\ -0.2958 & 0.3170 & 0.0211 & 0.5732 & 0.2773 & -0.2562 \\ 0.3407 & -0.0079 & 0.3328 & 0.2773 & 0.6181 & -0.2853 \\ -0.0291 & 0.3883 & 0.3592 & -0.2562 & -0.2853 & 0.6445 \end{pmatrix}.$$

На головній діагоналі утвореної матриці розташовані обернені ваги усіх зрівноважених перевищень. Інші елементи матриці виражають їх взаємні залежності і називаються кореляційними моментами. Коефіцієнт кореляції між зрівноваженими перевищеннями виражає формула $r_{F_iF_j} = \dfrac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_i}} \cdot \dfrac{1}{P_{F_j}}}}$.

Наприклад, тіснота залежності між першим та другим зрівноваженими перевищеннями $r_{\tilde{h}_1\tilde{h}_2} = \dfrac{Q_{F_{12}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_1}} \times \dfrac{1}{P_{F_2}}}} = \dfrac{-0.3249}{\sqrt{0.6366 \times 0.7052}} = -0.48$.

Матриця $\underset{n\times n}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{n\times n}{Q_F}$ називається кореляційна матриця зрівноважених результатів вимірів:

$$\underset{6\times 6}{M^2} = \begin{pmatrix} 6.0216 & -3.0733 & 2.9483 & -2.7984 & 3.2232 & -0.2748 \\ -3.0733 & 6.6713 & 3.5980 & 2.9983 & -0.0750 & 3.6729 \\ 2.9483 & 3.5980 & 6.5463 & 0.1999 & 3.1482 & 3.3981 \\ -2.7984 & 2.9983 & 0.1999 & 5.4220 & 2.6235 & -2.4236 \\ 3.2232 & -0.0750 & 3.1482 & 2.6235 & 5.8467 & -2.6985 \\ -0.2748 & 3.6729 & 3.3981 & -2.4236 & -2.6985 & 6.0966 \end{pmatrix}.$$

На головній діагоналі цієї матриці розташовані значення квадратів середніх квадратичних похибок $M^2_{\tilde{h}_i}$ зрівноважених перевищень $\tilde{h}_i$.

Завдання 2. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (див. рис. 4). Необхідно визначити зрівноважені значення виміряних кутів і координат пунктів D і C, оцінити точність зрівноважених координат і довжини сторони DC.

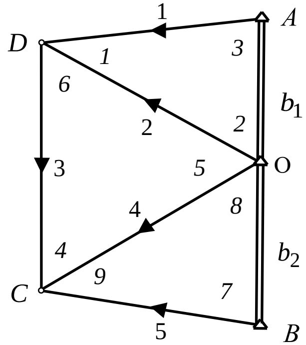

Рис. 4. Схема мережі мікротріангуляції

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 2.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні результати вимірів кутів:

№	β_i	№	β_i	№	β_i
1	64°36´00,9″	4	55°19´45,2″	7	33°44´19,4″
2	65°53´45,2″	5	55°12´15,1″	8	103°13´43,4″
3	49°30´19,3″	6	69°27´52,6″	9	43°02´01,7″

Для заданої мережі загальна кількість вимірів $n = 9$, кількість необхідних вимірів $k = 4$, кількість надлишкових вимірів $r = 5$.

1. Формування системи параметричних рівнянь поправок

1.1) вибір параметрів і визначення їх наближених значень:

Параметри	Наближені значення параметрів (*м*)
$X_D = t_1 = t_1^\circ + \tau_1$	$t_1^\circ = 623{,}360$
$Y_D = t_2 = t_2^\circ + \tau_2$	$t_2^\circ = -1393{,}272$
$X_C = t_3 = t_3^\circ + \tau_3$	$t_3^\circ = -897{,}701$
$Y_C = t_4 = t_4^\circ + \tau_4$	$t_4^\circ = -1488{,}183$

1.2) складання параметричних рівнянь поправок до виміряних кутів. З метою зменшення ймовірності допущення помилок при складанні рівнянь цю частину завдання доцільно розв'язувати у два етапи:

1.2.1) складання параметричних рівнянь зв'язку та рівнянь поправок до дирекційних кутів сторін мережі (проміжний етап). Істинне значення дирекційного кута $\overline{\alpha}$ окремої сторони виражається через параметри (координати $X_{поч}, Y_{поч}$ та $X_{кінц}, Y_{кінц}$ початкового та кінцевого пунктів сторони) параметричним рівнянням зв'язку $\overline{\alpha} = arctg\,\dfrac{Y_{кінц} - Y_{поч}}{X_{кінц} - X_{поч}} = f(X, Y)$. Частинні похідні такого рівняння зв'язку за його аргументами – це коефіцієнти рівняння поправок до дирекційного кута окремої сторони наступного вигляду:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_{поч}}\right)_\circ = \frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_{поч}}\right)_\circ = -\frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X_{кінц}}\right)_\circ = -\frac{\rho}{s^\circ}\sin\alpha^\circ; \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial Y_{кінц}}\right)_\circ = \frac{\rho}{s^\circ}\cos\alpha^\circ.$$

$$\alpha^\circ = arctg\,\frac{Y^\circ_{кінц} - Y^\circ_{поч}}{X^\circ_{кінц} - X^\circ_{поч}} \quad \text{та} \quad s^\circ = \sqrt{(X^\circ_{кінц} - X^\circ_{поч})^2 + (Y^\circ_{кінц} - Y^\circ_{поч})^2} \quad –$$

наближені значення дирекційного кута і довжини сторони, які обчислені за наближеними значеннями параметрів $X^\circ_{поч}, Y^\circ_{поч}$ та $X^\circ_{кінц}, Y^\circ_{кінц}$. Остаточний вигляд параметричного рівняння поправок до дирекційного кута $v_\alpha = \frac{\rho}{s^\circ}(\sin\alpha^\circ \cdot \tau_{X_{поч}} - \cos\alpha^\circ \cdot \tau_{Y_{поч}} - \sin\alpha^\circ \cdot \tau_{X_{кінц}} + \cos\alpha^\circ \cdot \tau_{Y_{кінц}}) + l_\alpha$.

Параметричні рівняння зв'язку і поправок до дирекційних кутів усіх сторін заданої мережі мають наступний вигляд:

✓ сторона AD ($\alpha_1^\circ = 229^\circ 30' 17.8''$; $s_1^\circ = 1832.139\,м$):

$$\overline{\alpha}_1 = arctg\,\frac{Y_D - Y_A}{X_D - X_A} = arctg\,\frac{t_2 - Y_A}{t_1 - X_A};$$

$$v_{\alpha_1} = \frac{\rho}{s_1^\circ}(-\sin\alpha_1^\circ \cdot \tau_1 + \cos\alpha_1^\circ \cdot \tau_2) + l_{\alpha_1} = 86 \cdot \tau_1 - 73 \cdot \tau_2 + l_{\alpha_1}.$$

✓ сторона OD ($\alpha_2^\circ = 294^\circ 06' 14.7''$; $s_2^\circ = 1526.363\,м$):

$$\overline{\alpha}_2 = arctg\,\frac{Y_D - Y_O}{X_D - X_O} = arctg\,\frac{t_2 - Y_O}{t_1 - X_O};$$

$$v_{\alpha_2} = \frac{\rho}{s_2^\circ}(-\sin\alpha_2^\circ \cdot \tau_1 + \cos\alpha_2^\circ \cdot \tau_2) + l_{\alpha_2} = 123 \cdot \tau_1 + 55 \cdot \tau_2 + l_{\alpha_2}.$$

✓ сторона DC ($\alpha_3^\circ = 183^\circ 34' 13.8''$; $s_3^\circ = 1524.019\,м$):

$$\overline{\alpha}_3 = arctg\,\frac{Y_C - Y_D}{X_C - X_D} = arctg\,\frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1};$$

$$v_{\alpha_3} = \frac{\rho}{s_3^\circ}(\sin\alpha_3^\circ \cdot \tau_1 - \cos\alpha_3^\circ \cdot \tau_2 - \sin\alpha_3^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_3^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_3} =$$

$$= -8 \cdot \tau_1 + 135 \cdot \tau_2 + 8 \cdot \tau_3 - 135 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_3}.$$

✓ сторона OC ($\alpha_4^\circ = 238^\circ 54' 02.9''$; $s_4^\circ = 1737.975\,м$):

$$\overline{\alpha}_4 = arctg\,\frac{Y_C - Y_O}{X_C - X_O} = arctg\,\frac{t_4 - Y_O}{t_3 - X_O};$$

$$v_{\alpha_4} = \frac{\rho}{s_4^\circ}(-\sin\alpha_4^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_4^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_4} = 102 \cdot \tau_3 - 61 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_4}.$$

✓ сторона BC ($\alpha_5^\circ = 281^\circ 56' 03.8''$; $s_5^\circ = 3046.240\ м$):

$$\overline{\alpha}_5 = arctg\,\frac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} = arctg\,\frac{t_4 - Y_B}{t_3 - X_B}\ ;$$

$$v_{\alpha_5} = \frac{\rho}{s_5^\circ}(-\sin\alpha_5^\circ \cdot \tau_3 + \cos\alpha_5^\circ \cdot \tau_4) + l_{\alpha_5} = 66 \cdot \tau_3 + 14 \cdot \tau_4 + l_{\alpha_5}\ .$$

1.2.2) складання параметричних рівнянь поправок до виміряних кутів мережі. Поправка до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини: $v = v_{\alpha_{прав}} - v_{\alpha_{лів}}$. Тому рівняння поправки до результату виміру кута дорівнює різниці рівнянь поправок до дирекційних кутів відповідних сторін. Коефіцієнти при невідомих τ_j у рівняннях обчислюються як різниці коефіцієнтів при однойменних невідомих у рівняннях поправок до дирекційних кутів. Таким чином:

$v_1 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_1} = 37 \cdot \tau_1 + 128 \cdot \tau_2 + l_1$;

$v_2 = -v_{\alpha_2} = -123 \cdot \tau_1 - 55 \cdot \tau_2 + l_2$; $v_3 = v_{\alpha_1} = 86 \cdot \tau_1 - 73 \cdot \tau_2 + l_3$;

$v_4 = v_{\alpha_4} - v_{\alpha_3} = 8 \cdot \tau_1 - 135 \cdot \tau_2 + 94 \cdot \tau_3 + 74 \cdot \tau_4 + l_4$;

$v_5 = v_{\alpha_2} - v_{\alpha_4} = 123 \cdot \tau_1 + 55 \cdot \tau_2 - 102 \cdot \tau_3 + 61 \cdot \tau_4 + l_5$;

$v_6 = v_{\alpha_3} - v_{\alpha_2} = -131 \cdot \tau_1 + 80 \cdot \tau_2 + 8 \cdot \tau_3 - 135 \cdot \tau_4 + l_6$;

$v_7 = -v_{\alpha_5} = -66 \cdot \tau_3 - 14 \cdot \tau_4 + l_7$; $v_8 = v_{\alpha_4} = 102 \cdot \tau_3 - 61 \cdot \tau_4 + l_8$;

$v_9 = v_{\alpha_5} - v_{\alpha_4} = -36 \cdot \tau_3 + 75 \cdot \tau_4 + l_9$.

1.3) обчислення вільних членів параметричних рівнянь поправок до виміряних кутів. Вільний член рівняння поправки до результату виміру кута на пункті дорівнює різниці вільних членів рівнянь поправок до дирекційних кутів напрямів (сторін), які виходять з його вершини:

$$l = l_{\alpha_{прав}} - l_{\alpha_{лів}} = \alpha_{прав}^\circ - \alpha_{прав} - (\alpha_{лів}^\circ - \alpha_{лів}) = \alpha_{прав}^\circ - \alpha_{лів}^\circ - \beta\ .$$

$$l_1 = \alpha_2^\circ - \alpha_1^\circ - \beta_1 = -4{,}0''\ ;$$

$l_2 = \alpha_{OA} - \alpha_2^\circ - \beta_2 = 0{,}1''$; $l_3 = \alpha_1^\circ - \alpha_{AO} - \beta_3 = -1{,}5''$;

$l_4 = \alpha_4^\circ - \alpha_3^\circ - \beta_4 = 3{,}9''$; $l_5 = \alpha_2^\circ - \alpha_4^\circ - \beta_5 = -3{,}3''$;

$l_6 = \alpha_3^\circ - (\alpha_2^\circ \pm 180^\circ) - \beta_6 = 6{,}5''$; $l_7 = \alpha_{BO} - \alpha_5^\circ - \beta_7 = -3{,}7''$;

$l_8 = \alpha_4^\circ - \alpha_{OB} - \beta_8 = 0$; $l_9 = \alpha_5^\circ - \alpha_4^\circ - \beta_9 = -0{,}8''$.

Дирекційні кути базисів OA і OB: $\alpha_{OA} = 0^\circ$, $\alpha_{OB} = 135^\circ 40' 19.5''$.

На підставі одержаних результатів тепер формуємо матриці коефіцієнтів A (п.1.2.2) та вільних членів l (п.1.3) системи параметричних рівнянь поправок $\underset{9\times1}{V} = \underset{9\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{9\times1}{l}$:

$$\underset{9\times4}{A} = \begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix}; \quad \underset{9\times1}{l} = \begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь поправок

Система нормальних рівнянь поправок має вигляд

$$\left.\begin{aligned} N_{11}\tau_1 + N_{12}\tau_2 + N_{13}\tau_3 + N_{14}\tau_4 + L_1 = 0 \\ N_{21}\tau_1 + N_{22}\tau_2 + N_{23}\tau_3 + N_{24}\tau_4 + L_2 = 0 \\ N_{31}\tau_1 + N_{32}\tau_2 + N_{33}\tau_3 + N_{34}\tau_4 + L_3 = 0 \\ N_{41}\tau_1 + N_{42}\tau_2 + N_{43}\tau_3 + N_{44}\tau_4 + L_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{4\times4}{N} \cdot \underset{4\times1}{\tau} + \underset{4\times1}{L} = 0 .$$

Матриці коефіцієнтів та вільних членів рівнянь розкривають добутки:

$$\underset{4\times4}{N} = \underset{4\times9}{A^T} \cdot \underset{9\times4}{A} = \begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix}; \quad \underset{4\times1}{L} = \underset{4\times9}{A^T} \cdot \underset{9\times1}{l} = \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix}.$$

Система нормальних рівнянь поправок має вигляд

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix} = 0 .$$

3. Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок

Розв’язування системи нормальних рівнянь поправок здійснюємо за формулою $\underset{4\times1}{\tau} = -\underset{4\times4}{Q} \cdot \underset{4\times1}{L}$, де $\underset{4\times4}{Q} = \underset{4\times4}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7}$:

$$\underset{4\times1}{\tau} = -\begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} \times \begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}.$$

Контроль розв’язку: 1) $\underset{4\times4}{N} \cdot \underset{4\times4}{Q} = \underset{4\times4}{E}$:

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times1}{\tau}+\underset{4\times1}{L}=0$:

$$\begin{pmatrix} 56248 & 428 & -12842 & 25780 \\ 428 & 52388 & -17660 & -17435 \\ -12842 & -17660 & 35360 & -8344 \\ 25780 & -17435 & -8344 & 36964 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1515.5 \\ -596.0 \\ 1028.2 \\ -798.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.023234 \\ -0.024308 \\ 0.004396 \\ 0.018134 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислення зрівноважених кутів та координат пунктів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів.

$$\underset{9\times1}{V}=\underset{9\times4}{A}\cdot\underset{4\times1}{\tau}+\underset{9\times1}{l}\ :$$

$$\underset{9\times1}{V}=\begin{pmatrix} 37 & 128 & 0 & 0 \\ -123 & -55 & 0 & 0 \\ 86 & -73 & 0 & 0 \\ 8 & -135 & 94 & 74 \\ 123 & 55 & -102 & 61 \\ -131 & 80 & 8 & -135 \\ 0 & 0 & -66 & -14 \\ 0 & 0 & 102 & -61 \\ 0 & 0 & -36 & 75 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0.019262 \\ 0.008942 \\ -0.015521 \\ 0.008880 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4.0 \\ 0.1 \\ -1.5 \\ 3.9 \\ -3.3 \\ 6.5 \\ -3.7 \\ 0 \\ -0.8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2.1427 \\ -2.7610 \\ -0.4963 \\ 2.0450 \\ 1.6858 \\ 3.3692 \\ -2.7999 \\ -2.1248 \\ 0.4248 \end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів.

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\underset{9\times1}{\beta}+\underset{9\times1}{V}\ :$$

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\begin{pmatrix} 64^\circ36'00.9'' \\ 65^\circ53'45.2'' \\ 49^\circ30'19.3'' \\ 55^\circ19'45.2'' \\ 55^\circ12'15.1'' \\ 69^\circ27'52.6'' \\ 33^\circ44'19.4'' \\ 103^\circ13'43.4'' \\ 43^\circ02'01.7'' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2.1'' \\ -2.8'' \\ -0.5'' \\ 2.0'' \\ 1.7'' \\ 3.4'' \\ -2.8'' \\ -2.1'' \\ 0.4'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64^\circ35'58.8'' \\ 65^\circ53'42.4'' \\ 49^\circ30'18.8'' \\ 55^\circ19'47.2'' \\ 55^\circ12'16.8'' \\ 69^\circ27'56.0'' \\ 33^\circ44'16.6'' \\ 103^\circ13'41.3'' \\ 43^\circ02'02.1'' \end{pmatrix}.$$

4.3) обчислення зрівноважених значень параметрів (координат пунктів).

$$\underset{4\times1}{t}=\underset{4\times1}{t^\circ}+\underset{4\times1}{\tau}\ :$$

$$\underset{4\times1}{t}=\begin{pmatrix} 623.360 \\ -1393.272 \\ -897.701 \\ -1488.183 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0.0193 \\ 0.0089 \\ -0.0155 \\ 0.0089 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 623.3793 \\ -1393.2631 \\ -897.7165 \\ -1488.1741 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ X_C \\ Y_C \end{pmatrix}.$$

4.4) завершальний контроль зрівноважування кутів та координат виконуємо в два етапи:

4.4.1) за зрівноваженими координатами обчислюємо дирекційні кути сторін мережі на основі параметричних рівнянь зв’язку

$$\tilde{\alpha} = arctg\,\frac{Y_{кінц} - Y_{поч}}{X_{кінц} - X_{поч}}: \quad \tilde{\alpha}_1 = 229^\circ 30' 18.8''; \qquad \tilde{\alpha}_2 = 294^\circ 06' 17.6'';$$

$$\tilde{\alpha}_3 = 183^\circ 34' 13.6''; \qquad \tilde{\alpha}_4 = 238^\circ 54' 00.8''; \qquad \tilde{\alpha}_5 = 281^\circ 56' 02.9'';$$

4.4.2) за дирекційними кутами сторін обчислюємо зрівноважені кути. Виражені таким чином кути повинні дорівнювати їх значенням, які обчислено за поправками v_i у п.4.2:

$$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1 = 64°35'58{,}8''; \qquad \tilde{\beta}_2 = \alpha_{OA} - \tilde{\alpha}_2 = 65°53'42{,}4'';$$

$$\tilde{\beta}_3 = \tilde{\alpha}_1 - \alpha_{AO} = 49°30'18{,}8''; \qquad \tilde{\beta}_4 = \tilde{\alpha}_4 - \tilde{\alpha}_3 = 55°19'47{,}2'';$$

$$\tilde{\beta}_5 = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_4 = 55°12'16{,}8''; \qquad \tilde{\beta}_6 = \tilde{\alpha}_3 - (\tilde{\alpha}_2 \pm 180^\circ) = 69°27'56{,}0'';$$

$$\tilde{\beta}_7 = \alpha_{BO} - \tilde{\alpha}_5 = 33°44'16{,}6''; \qquad \tilde{\beta}_8 = \tilde{\alpha}_4 - \alpha_{OB} = 103°13'41{,}3'';$$

$$\tilde{\beta}_9 = \tilde{\alpha}_5 - \tilde{\alpha}_4 = 43°02'02{,}1''.$$

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки виміру кута за формулою Бесселя $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times 9}{V^T} \cdot \underset{9\times 1}{V} = 43{,}3708$: $\qquad m = \pm\, 2{,}9\,''$.

5.2) **оцінка точності параметрів** (зрівноважених координат). Середня квадратична похибка будь-якої оцінюваної величини за результатами зрівноважування рівноточних вимірів виражається похибкою результатів вимірів m та вагою оцінюваної величини. Обернені ваги параметрів дорівнюють діагональним елементам вагової матриці $\underset{k\times k}{Q}$ з відповідними індексами j. Інші елементи матриці виражають залежність між зрівноваженими значеннями параметрів. Результатом оцінки точності параметрів є визначення кореляційної матриці $\underset{k\times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q}$:

$$\underset{4\times 4}{M^2} = 8.6742 \times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2.50 & -0.67 & 0.09 & -2.04 \\ -0.67 & 3.05 & 1.83 & 2.31 \\ 0.09 & 1.83 & 3.79 & 1.65 \\ -2.04 & 2.31 & 1.65 & 5.23 \end{pmatrix} \times 10^{-4}.$$

На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок параметрів з відповідними індексами:

$$M_{t_1} = M_{X_D} = \pm 0{,}0158\ м; \qquad M_{t_2} = M_{Y_D} = \pm 0{,}0175\ м;$$

$$M_{t_3} = M_{X_C} = \pm 0{,}0195\ м; \qquad M_{t_4} = M_{Y_C} = \pm 0{,}0229\ м.$$

5.3) **оцінка точності функції параметрів** (довжини сторони *DC*). Обернену вагу функції параметрів $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \sqrt{(t_3 - t_1)^2 + (t_4 - t_2)^2} = \tilde{S}_{DC}$ виражає формула $\frac{1}{P_F} = \underset{1\times4}{F} \cdot \underset{4\times4}{Q} \cdot \underset{4\times1}{F^T}$, де матриця $\underset{1\times4}{F} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix}$ формується значеннями частинних похідних $F_j = \left(\frac{\partial F}{\partial t_j}\right)_{\circ}$, зокрема

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\right)_{\circ} = F_1 = -\cos\alpha_3^{\circ} = 0{,}998059; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial t_2}\right)_{\circ} = F_2 = -\sin\alpha_3^{\circ} = 0{,}062277;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t_3}\right)_{\circ} = F_3 = \cos\alpha_3^{\circ} = \text{-}0{,}998059; \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial t_4}\right)_{\circ} = F_4 = \sin\alpha_3^{\circ} = \text{-}0{,}062277.$$

$$\frac{1}{P_F} = \begin{pmatrix} 0.998059 & 0.062277 & -0.998059 & -0.062277 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 289 & -77 & 11 & -235 \\ -77 & 351 & 210 & 267 \\ 11 & 210 & 437 & 190 \\ -235 & 267 & 190 & 603 \end{pmatrix} \times 10^{-7} \times \begin{pmatrix} 0.998059 \\ 0.062277 \\ -0.998059 \\ -0.062277 \end{pmatrix} = 0.000072\,.$$

Середня квадратична похибка функції $M_F = m\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 0{,}025$ (*м*) і остаточно $\tilde{S}_{DC} = 1524{,}054 \pm 0{,}025$ (*м*).

Питання для самоконтролю

1. Які виміри називають необхідними та надлишковими?
2. Який зміст завдання сумісної обробки результатів вимірів багатьох величин?
3. В чому полягає принцип найменших квадратів?
4. Які причини виникнення завдання зрівноважування?
5. Які умови виникнення завдання зрівноважування?
6. Який зміст завдання зрівноважування вимірів параметричним способом?
7. Які величини призначають параметрами?
8. Що називають параметричним рівнянням зв’язку?
9. Що називають параметричним рівнянням поправок?
10. Які правила складання параметричного рівняння поправок?

11. Види параметричних рівнянь поправок.
12. Черговість дій при формуванні системи параметричних рівнянь поправок.
13. Що називають нормальним рівнянням поправок?
14. Правила формування і властивості системи нормальних рівнянь поправок.
15. Які властивості мають коефіцієнти системи нормальних рівнянь поправок?
16. Який алгоритм розв’язування системи нормальних рівнянь поправок?
17. Способи контролю розв’язування системи нормальних рівнянь поправок.
18. Як обчислити поправки до результатів вимірів?
19. Як обчислити зрівноважені виміри і параметри?
20. Який зміст заключного контролю зрівноважування?
21. Як виконати заключний контроль зрівноважування?
22. Зміст завдання оцінки точності за результатами зрівноважування параметричним способом.
23. Як обчислити середні квадратичні похибки одиниці ваги та результатів вимірів?
24. Загальний принцип вираження ваг оцінюваних величин за результатами зрівноважування параметричним способом.
25. Обчислення ваг та оцінка точності параметрів.
26. Що називають ваговими коефіцієнтами?
27. Обчислення ваг та оцінка точності функцій параметрів.
28. Обчислення ваг та оцінка точності зрівноважених значень результатів вимірів.

Література

1. Бугай П.Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів : підручник. Львів : ЛДУ, 1960. 366 с.
2. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2005. 236 с.
3. Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник. Львів : Растр-7, 2007. 408 с.

Додаток 1

Вхідні дані для виконання завдання 1

<table>
<tr><td rowspan="5">№ варі анту</td><td colspan="6">№ ходів</td><td colspan="2" rowspan="2">Оцінити точність</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виміряні перевищення h_i (м)</td><td rowspan="3">переви щення h</td><td rowspan="3">відмітка вузлового репера</td></tr>
<tr><td>6.125</td><td>8.320</td><td>5.580</td><td>1.368</td><td>-0.905</td><td>6.944</td></tr>
<tr><td colspan="6">Довжини ходів S_i (км)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>8,4</td><td>13,1</td><td>22,8</td><td>5,9</td><td>5,5</td><td>11,1</td><td>1</td><td>D</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8,5</td><td>13,1</td><td>22,6</td><td>5,9</td><td>6,5</td><td>11,1</td><td>2</td><td>E</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8,6</td><td>13,1</td><td>22,4</td><td>5,9</td><td>7,5</td><td>11,1</td><td>3</td><td>F</td></tr>
<tr><td>4</td><td>8,7</td><td>13,1</td><td>22,2</td><td>5,9</td><td>8,5</td><td>11,1</td><td>4</td><td>E</td></tr>
<tr><td>5</td><td>8,8</td><td>13,1</td><td>22,0</td><td>5,9</td><td>9,5</td><td>11,1</td><td>5</td><td>F</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8,9</td><td>13,1</td><td>21,8</td><td>5,9</td><td>10,5</td><td>11,1</td><td>6</td><td>D</td></tr>
<tr><td>7</td><td>9,0</td><td>13,1</td><td>21,6</td><td>5,9</td><td>11,5</td><td>11,1</td><td>1</td><td>F</td></tr>
<tr><td>8</td><td>9,1</td><td>13,1</td><td>21,4</td><td>5,9</td><td>12,5</td><td>11,1</td><td>2</td><td>D</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9,2</td><td>13,1</td><td>21,2</td><td>5,9</td><td>13,5</td><td>11,1</td><td>3</td><td>E</td></tr>
<tr><td>10</td><td>9,3</td><td>13,1</td><td>21,0</td><td>5,9</td><td>14,5</td><td>11,1</td><td>4</td><td>D</td></tr>
<tr><td>11</td><td>9,4</td><td>13,1</td><td>20,8</td><td>5,9</td><td>15,5</td><td>11,1</td><td>5</td><td>E</td></tr>
<tr><td>12</td><td>9,5</td><td>13,1</td><td>20,6</td><td>5,9</td><td>16,5</td><td>11,1</td><td>6</td><td>F</td></tr>
<tr><td>13</td><td>9,6</td><td>13,1</td><td>20,4</td><td>5,9</td><td>17,5</td><td>11,1</td><td>1</td><td>E</td></tr>
<tr><td>14</td><td>9,7</td><td>13,1</td><td>20,2</td><td>5,9</td><td>18,5</td><td>11,1</td><td>2</td><td>F</td></tr>
<tr><td>15</td><td>9,8</td><td>13,1</td><td>20,0</td><td>5,9</td><td>19,5</td><td>11,1</td><td>3</td><td>D</td></tr>
<tr><td>16</td><td>9,9</td><td>13,1</td><td>19,8</td><td>5,9</td><td>20,5</td><td>11,1</td><td>4</td><td>F</td></tr>
<tr><td>17</td><td>10,0</td><td>13,1</td><td>19,6</td><td>5,9</td><td>19,0</td><td>11,1</td><td>5</td><td>D</td></tr>
<tr><td>18</td><td>10,1</td><td>13,1</td><td>19,4</td><td>5,9</td><td>18,0</td><td>11,1</td><td>6</td><td>E</td></tr>
<tr><td>19</td><td>10,2</td><td>13,1</td><td>19,2</td><td>5,9</td><td>17,0</td><td>11,1</td><td>1</td><td>D</td></tr>
<tr><td>20</td><td>10,3</td><td>13,1</td><td>19,0</td><td>5,9</td><td>16,0</td><td>11,1</td><td>2</td><td>E</td></tr>
<tr><td>21</td><td>10,4</td><td>13,1</td><td>18,8</td><td>5,9</td><td>15,0</td><td>11,1</td><td>3</td><td>F</td></tr>
<tr><td>22</td><td>10,5</td><td>13,1</td><td>18,6</td><td>5,9</td><td>14,0</td><td>11,1</td><td>4</td><td>E</td></tr>
<tr><td>23</td><td>10,6</td><td>13,1</td><td>18,4</td><td>5,9</td><td>13,0</td><td>11,1</td><td>5</td><td>F</td></tr>
<tr><td>24</td><td>10,7</td><td>13,1</td><td>18,2</td><td>5,9</td><td>12,0</td><td>11,1</td><td>6</td><td>D</td></tr>
<tr><td>25</td><td>10,8</td><td>13,1</td><td>18,0</td><td>5,9</td><td>11,0</td><td>11,1</td><td>1</td><td>F</td></tr>
<tr><td>26</td><td>10,9</td><td>13,1</td><td>17,8</td><td>5,9</td><td>10,0</td><td>11,1</td><td>2</td><td>D</td></tr>
<tr><td>27</td><td>11,0</td><td>13,1</td><td>17,6</td><td>5,9</td><td>9,0</td><td>11,1</td><td>3</td><td>E</td></tr>
</table>

28	11,1	13,1	17,4	5,9	8,0	11,1	4	D
29	11,2	13,1	17,2	5,9	7,0	11,1	5	E
30	11,3	13,1	17,0	5,9	6,0	11,1	6	F
31	11,4	13,1	16,8	5,9	5,0	11,1	1	E
32	11,5	13,1	16,6	5,9	5,2	11,1	2	F
33	11,6	13,1	16,4	5,9	5,4	11,1	3	D
34	11,7	13,1	16,2	5,9	5,6	11,1	4	F
35	11,8	13,1	16,0	5,9	5,8	11,1	5	D
36	11,9	13,1	15,8	5,9	6,0	11,1	6	E
37	12,0	13,1	15,6	5,9	6,2	11,1	1	D
38	12,1	13,1	15,4	5,9	6,4	11,1	2	E
39	12,2	13,1	15,2	5,9	6,6	11,1	3	F
40	12,3	13,1	15,0	5,9	6,8	11,1	4	E
41	12,4	13,1	14,8	5,9	7,0	11,1	5	F
42	12,5	13,1	14,6	5,9	7,2	11,1	6	D
43	12,6	13,1	14,4	5,9	7,4	11,1	1	F
44	12,7	13,1	14,2	5,9	7,6	11,1	2	D
45	12,8	13,1	14,0	5,9	7,8	11,1	3	E
46	12,9	13,1	13,8	5,9	8,0	11,1	4	D
47	13,0	13,1	13,6	5,9	8,2	11,1	5	E
48	13,1	13,1	13,4	5,9	8,4	11,1	6	F
49	13,2	13,1	13,2	5,9	8,6	11,1	1	E
50	13,3	13,1	13,0	5,9	8,8	11,1	2	F
51	13,4	13,1	12,8	5,9	9,0	11,1	3	D
52	13,5	13,1	12,6	5,9	9,2	11,1	4	F
53	13,6	13,1	12,4	5,9	9,4	11,1	5	D
54	13,7	13,1	12,2	5,9	9,6	11,1	6	E
55	13,8	13,1	12,0	5,9	9,8	11,1	1	D
56	13,9	13,1	11,8	5,9	10,0	11,1	2	E
57	14,0	13,1	11,6	5,9	10,4	11,1	3	F
58	14,1	13,1	11,4	5,9	10,8	11,1	4	E
59	14,2	13,1	11,2	5,9	11,2	11,1	5	F
60	14,3	13,1	11,0	5,9	11,6	11,1	6	D

Додаток 2

Вхідні дані для виконання завдання 2

Таблиця 1.

Координати пунктів	X (*м*)	Y (*м*)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
Наближені координати пунктів	X° (*м*)	Y° (*м*)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Таблиця 2.

№ варіанту	Результати вимірів кутів								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	64°36′	65°53′	49°30′	55°19′	55°12′	69°27′	33°44′	103°13′	43°02′
1	02,0 ″	45,2 ″	19,3 ″	45,2 ″	15,1 ″	52,6 ″	19,4 ″	43,4 ″	00,5 ″
2	00,9	43,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
3	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
4	01,5	45,2	19,3	47,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
5	00,9	46,1	19,3	45,2	17,6	52,6	19,4	43,4	01,7
6	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	54,3	19,4	43,4	01,7
7	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
8	00,9	44,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,0	01,7
9	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,1
10	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,8	43,4	01,7
11	00,9	44,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
12	00,9	45,2	20,0	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
13	03,0	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,6	01,7
14	00,9	47,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,1
15	00,9	46,8	18,7	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,1
16	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
17	00,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
18	00,9	45,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,0	01,7
19	00,9	45,2	16,3	45,2	15,1	52,6	21,3	43,4	01,7
20	02,5	45,2	19,3	44,6	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
21	00,9	43,5	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,4	01,7
22	00,9	45,2	17,7	45,2	15,1	53,5	19,4	43,4	01,7
23	01,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,6	43,4	01,7
24	00,9	44,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,6	01,7

25	00,9	45,2	19,8	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	01,2
26	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
27	00,9	42,1	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,7
28	00,9	45,2	18,6	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,5
29	03,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,0	01,7
30	00,9	46,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,3
31	01,4	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,8
32	00,9	44,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,8	01,7
33	00,9	45,2	17,3	45,2	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
34	00,9	46,8	19,3	50,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
35	03,5	45,2	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	43,4	01,7
36	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	52,2	19,4	43,4	01,7
37	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,8	43,4	01,7
38	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
39	00,9	45,2	20,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,1
40	03,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	22,9	43,4	01,7
41	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,8	01,7
42	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,0
43	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
44	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
45	00,1	45,2	19,3	44,5	15,1	52,6	20,0	43,4	01,7
46	00,9	44,0	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,9	01,7
47	00,9	45,2	18,8	45,2	15,1	54,0	19,4	43,4	03,5
48	02,3	45,2	19,3	46,8	15,1	52,6	17,8	43,4	01,7
49	00,9	47,5	19,3	45,2	18,0	52,6	19,4	40,8	01,7
50	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	56,4	19,4	43,4	00,2
51	00,2	45,2	19,3	48,0	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
52	00,9	39,5	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	42,1	01,7
53	00,9	45,2	15,8	45,2	15,1	50,1	19,4	43,4	04,0
54	01,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
55	00,9	46,8	19,3	45,2	16,9	52,6	19,4	40,2	01,7
56	00,9	45,2	20,8	45,2	15,1	54,1	19,4	43,4	00,5
57	00,6	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	17,5	43,4	01,7
58	00,9	43,0	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	40,9	01,7
59	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	51,6	19,4	43,4	01,1
60	03,8	45,2	19,3	50,1	15,1	52,6	22,6	43,4	01,7