Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-131М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни "Математична обробка геодезичних вимірів"
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання.

ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол №12 від 20.02.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Зрівноважування вимірів корелатним способом. [Електронне видання] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2024. – 38 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст

ВСТУП

Зрівноважування результатів вимірів – це задача сумісної обробки сукупності результатів вимірів багатьох величин, які зв'язані поміж собою математичними умовами, з метою знаходження найбільш надійних значень та оцінки точності цих величин і їх функцій. Розв'язок задачі досягається виправленням результатів вимірів величин поправками v_i, які обчислюють під умовою принципу найменших квадратів $[pv^2] = \min$. З математичної точки зору – це задача знаходження умовного екстремуму: необхідно виразити мінімум функції $[pv^2]$, якщо поправки v_i зв'язані поміж собою незалежними умовними рівняннями. Така задача може бути розв'язана шляхом виконання різних математичних дій. На практиці це зводиться до використання різних способів зрівноважування, зокрема, параметричного, корелатного або видозмін чи комбінацій цих способів. Незважаючи на відмінності закладених у них алгоритмів, усі способи еквівалентні, тобто забезпечують однакові у межах заданої точності кінцеві результати зрівноважування. Корелатний спосіб зрівноважування під умовою принципу найменших квадратів – це спосіб знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ методом Лагранжа із застосуванням допоміжних множників незалежних умовних рівнянь. Викладемо черговість дій та методичні рекомендації під час зрівноважування вимірів, опираючись на загальну теорію способу.

1. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ УМОВНИХ РІВНЯНЬ ПОПРАВОК

Нехай проведено виміри n величин X_i $(i = \overrightarrow{1,n})$ і одержано результати вимірів x_i з вагами p_i. Допустимо, величини зв'язані між собою незалежними умовними рівняннями загального вигляду

$$\varphi_j(X_1,...,X_n) = 0 . \qquad (1)$$

Кількість незалежних умовних рівнянь $j=\overrightarrow{1,r}$; r – це кількість надлишкових виміряних величин.

Результати вимірів завжди обтяжені похибками. Це спричинює порушення умов рівнянь (1), якщо їх скласти з результатами вимірів x_i:

$$\varphi_j(x_1,...,x_n)=W_j\,. \tag{2}$$

Величини W_j називають нев’язками умовних рівнянь. Нев’язки W_j виражають істинні похибки рівнянь і є наслідком впливу на результати похибок вимірів. У ході зрівноважування необхідно позбутись нев’язок. З цією метою потрібно виправити результати вимірів x_i відповідними поправками v_i таким чином, щоб зрівноважені значення $\tilde{x}_i = x_i + v_i$ задовольняли умовам (1):

$$\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0\,. \tag{3}$$

В геодезичній практиці умовні рівняння можуть мати нелінійний вигляд. З метою уніфікації розв’язку і забезпечення однозначного алгоритму, всі математичні умови, задані нелінійними формами, перетворюють до лінійного вигляду. Лінеаризацію нелінійних умов можна здійснити шляхом розкладу функцій (3) в ряд Тейлора. Враховуючи, що поправки v_i завжди малі порівняно з величинами x_i, без втрати точності розв’язку задачі у членах ряду достатньо брати до уваги лише перші похідні та перші степені поправок. Членами ряду другого і вище порядків, які виражають нелінійну складову, можна нехтувати. Отже, одержимо наступне:

$$\varphi_j(x_1+v_1,...,x_n+v_n)=\varphi_j(x_1,...,x_n)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\circ} v_i\,; \tag{4}$$

$$a_{j1}v_1+...+a_{jn}v_n+W_j=0\,; \tag{5}$$

$$[a_j v]+W_j=0\,, \tag{6}$$

де введено позначення коефіцієнтів

$$a_{ji}=\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{\circ}\,. \tag{7}$$

Однорідні лінійні рівняння (6) називають умовними рівняннями поправок. Система таких рівнянь у матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdots \\ W_r \end{pmatrix} = 0\,; \tag{8}$$

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0\,. \tag{9}$$

Формування системи умовних рівнянь поправок передбачає виконання наступних дій:

1) вираження зв'язків між виміряними величинами незалежними умовними рівняннями (1);
2) обчислення значень частинних похідних (7) і формування матриці $\underset{r\times n}{A}$ з коефіцієнтами a_{ji};
3) обчислення нев'язок умовних рівнянь (2);
4) складання умовних рівнянь поправок у лінійному вигляді (5), (6) чи (9).

Умовні рівняння поправок – це однорідні лінійні рівняння, які навіть для різних за фізичним змістом виміряних величин різняться лише їх кількістю, яку визначає кількість надлишкових виміряних величин, а також значеннями коефіцієнтів a_{ji} та вільних членів W_j, що залежить від початкових умов (1). Якщо умови (1) виражаються лінійними рівняннями, то диференціювання (7) зумовлює значення коефіцієнтів $a_{ji} = \pm 1$. Тому лінійні умовні рівняння поправок можна складати відразу навіть за схемою мережі.

Класифікація видів умовних рівнянь поправок залежно від фізичного змісту вимірюваних величин та форми зв'язку між ними у геодезичних мережах показана на рис. 1.

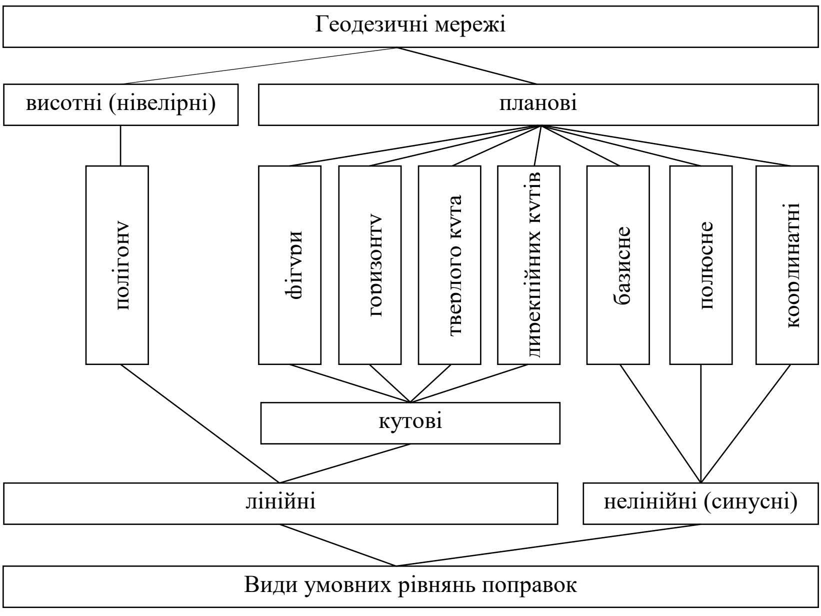

Рис. 1. Види умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах

1. Умовні рівняння полігонів. Рівняння полігонів складають для r незалежних замкнених чи розімкнених полігонів нівелірних мереж. Незалежними вважають такі полігони, серед яких жоден не був би комбінацією інших. Умовне рівняння полігону має загальний вигляд $\sum\limits_{i \in j} \pm v_i + W_j = 0$, де $\sum\limits_{i \in j} v_i$ – це сума поправок до перевищень h_i вздовж тих ходів мережі, які утворюють полігон за номером j . Знак "+" перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак "–" ставлять тоді, коли їх напрями протилежні. Нев'язка рівняння: $W_j = \sum\limits_{i \in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$, де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ – відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. Для замкнених полігонів $H_{поч} = H_{кінц}$. Для нівелірної мережі, яка зображена на рис. 2, умовні рівняння поправок мають, наприклад, наступний вигляд:

$v_1 + v_2 + W_1 = 0$; $\quad W_1 = h_1 + h_2 - (H_B - H_A)$;

$v_4 + v_5 + W_2 = 0$; $\quad W_2 = h_4 + h_5 - (H_D - H_C)$;

$v_1 - v_3 + v_5 + W_3 = 0$; $\quad W_3 = h_1 - h_3 + h_5 - (H_D - H_A)$.

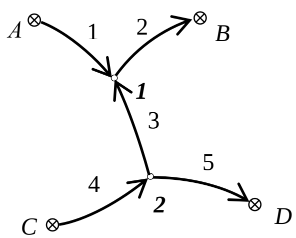

Рис. 2. Схема нівелірної мережі

2. Умовні рівняння фігур. Істинні значення виміряних кутів окремого плоского трикутника (див. рис. 3.а) повинні задовольняти початковому умовному рівнянню зв'язку $X_1 + X_2 + X_3 - 180^\circ = 0$. Йому відповідає умовне рівняння поправок $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$, яке називається умовним рівнянням фігури. Нев'язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - 180^\circ$; x_1, x_2, x_3 – результати вимірів кутів трикутника. Кількість умовних рівнянь фігур для мережі $r_{фігур} = l - m + 1$, де l – кількість усіх сторін, m – кількість усіх пунктів.

3. Умовні рівняння горизонту. Якщо в окремому пункті вимірювались усі кути, які мають спільні прилеглі сторони (точка O на рис. 3.а), то виникає умова $X_2 + X_5 + X_8 - 360^\circ = 0$. Відповідне рівняння поправок вигляду $v_2 + v_5 + v_8 + W = 0$ називають умовним рівнянням горизонту, де нев'язка $W = x_2 + x_5 + x_8 - 360^\circ$. Кількість умовних рівнянь горизонту в мережі дорівнює кількості пунктів, у кожному з яких виміряні усі кути зі спільними прилеглими сторонами.

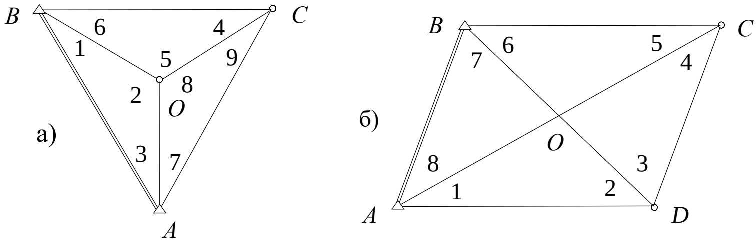

Рис. 3. Планові мережі:
а) замкнений ланцюжок трикутників; б) геодезичний чотирикутник

4. Умовні рівняння твердого кута. В мережах тріангуляції з базисами, які мають спільний пункт, утворюється твердий кут, наприклад, $\angle AOB$ на рис. 4.а. Це є підставою скласти умовне рівняння зв'язку $X_1 + X_2 + X_3 - \angle AOB = 0$. Відповідне рівняння поправок має вигляд $v_1 + v_2 + v_3 + W = 0$ і називається умовним рівнянням твердого кута. Нев'язка $W = x_1 + x_2 + x_3 - \angle AOB$.

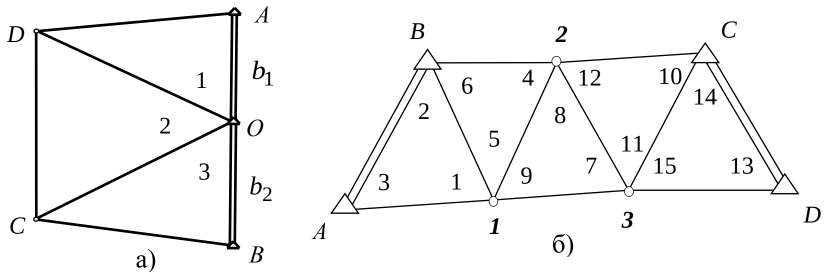

Рис. 4. Планові мережі у формі розімкнених ланцюжків трикутників

5. Умовні рівняння дирекційних кутів. Якщо в мережах відомі дирекційні кути твердих сторін (базисів), які не мають спільних пунктів, то для них можна сформулювати умову наступного змісту: дирекційний кут кінцевої сторони $\alpha_{кінц}$, обчислений за дирекційним кутом початкової сторони $\alpha_{поч}$ та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, повинен дорівнювати його заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають умовним рівнянням дирекційних кутів. Наприклад, вздовж ходової лінії *D-C-2-B-A* для ланцюжка трикутників на рис. 4.б рівняння має вигляд $v_2 + v_4 + v_6 + v_8 + v_{10} + v_{12} + v_{14} + W = 0$. Нев'язка $W = \alpha_{CD} - \alpha_{BA} + x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} - 180^\circ \cdot k$, де k=2 – це кількість невідомих сторін ходової лінії. Вздовж ходової лінії *D-C-3-2-1-B-A* рівняння має вигляд $v_2 + v_8 + v_{14} - v_5 - v_{11} + W = 0$. Знак "+" записано перед поправками до тих кутів, які розташовані ліворуч напряму ходової лінії; перед поправками до кутів, які розташовані праворуч того ж напряму записано знак "–". Нев'язка такого умовного рівняння $W = \alpha_{CD} - \alpha_{BA} + x_2 + x_8 + x_{14} - x_5 - x_{11} - 180^\circ \cdot k$, де кількість невідомих сторін ходової лінії k=4. Отже, для окремої мережі можна вибрати кілька напрямів ходової лінії і скласти відповідні умовні рівняння. З метою зменшення обсягу роботи на подальших етапах зрівноважування, потрібно вибрати такий варіант рівняння, до якого залучено меншу кількість кутів. Загальна кількість рівнянь дирекційних кутів мережі дорівнює кількості її твердих сторін, які не мають спільних пунктів, зменшеній на одиницю. Якщо тверді сторони мають спільні пункти, то замість умови дирекційних кутів для кожного з таких пунктів складають умовне рівняння твердого кута.

При зрівноважуванні мереж полігонометрії умовні рівняння дирекційних кутів можна складати як для окремих ходів, так і для замкнених чи розімкнених полігонів, які утворені цими ходами. Здебільшого віддають перевагу рівнянням для окремих ходів. Якщо, наприклад, кути вздовж ходу вимірювались ліворуч, то рівняння дирекційних кутів має вигляд $\delta\alpha_{поч} - \delta\alpha_{кінц} + \sum_{i=1}^{n'} v_i + W = 0$, де $\delta\alpha_{поч}$ та $\delta\alpha_{кінц}$ – це поправки до наближених значень дирекційних кутів початкової та кінцевої сторін ходу між вузловими точками мережі; n' – кількість виміряних кутів ходу; нев'язка $W = \alpha_{поч} - \alpha_{кінц} + \sum_{i=1}^{n'} x_i - 180^\circ \cdot k$. Якщо дирекційні кути $\alpha_{поч}$ чи $\alpha_{кінц}$ відносяться до твердих сторін і відомі безпомилково, то відповідні поправки до них не обчислюють і у рівнянні вони відсутні. Це рівною мірою стосується рівнянь, які складені для замкнених чи розімкнених полігонів між твердими сторонами.

Умовні рівняння фігури, горизонту і твердого кута є частковими випадками умовного рівняння дирекційних кутів. Початкові умови усіх цих рівнянь виражаються лінійними формами. Тому їх називають лінійними кутовими рівняннями.

6. Базисні умовні рівняння. Якщо в мережі тріангуляції визначені довжини двох твердих сторін (базисів), то можна сформулювати таку умову: довжина кінцевої сторони b_2, обчислена за довжиною початкової сторони b_1 та кутами мережі вздовж вибраного напряму ходової лінії, має дорівнювати її заданому значенню. Такій умові відповідає рівняння, яке називають базисним умовним рівнянням. Кількість базисних рівнянь для окремої мережі дорівнює кількості базисів, зменшеній на одиницю. Напрям ходової лінії встановлюють від обраного початкового базису вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до кінцевого базису. Вздовж лінії почергово, розпочинаючи з першого трикутника, за теоремою синусів виражають довжини усіх суміжних сторін, завершуючи кінцевим базисом у останньому трикутнику. Наприклад, у мережі, яка зображена на рис. 4.а, ходова лінія має напрям b_1-*OD*-*OC*-b_2. Сторони трикутників у цьому напрямі розкривають співвідношення $S_{OD} = b_1 \dfrac{\sin X_3}{\sin X_1}$; $S_{OC} = S_{OD} \dfrac{\sin X_6}{\sin X4}$; $b_2 = S_{OC} \dfrac{\sin X_9}{\sin X_7}$. Об'єднавши їх разом, одержимо рівняння $b_2 = b_1 \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7}$, яке зв'язує вимірювані кути умовою $\varphi(X_1,...,X_9) = \dfrac{b_1}{b_2} \dfrac{\sin X_3 \cdot \sin X_6 \cdot \sin X_9}{\sin X_1 \cdot \sin X_4 \cdot \sin X_7} - 1 = 0$ і називається базисним умовним рівнянням. Йому відповідає умовне рівняння поправок загальної форми $\sum\limits_{i=1}^{9} a_i \cdot v_i + W = 0$. Враховуючи вираження коефіцієнтів $a_i = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_{\circ}$, одержимо рівняння вигляду $\sum\limits_{i=3,6,9} ctgx_i \cdot v_i - \sum\limits_{i=1,4,7} ctgx_i \cdot v_i + W = 0$, де нев'язка $W = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{\sin x_3 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_9}{\sin x_1 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_7} - 1$. Остаточно $W'' = W \cdot \rho''$, де $\rho'' = 206265''$.

Узагальнення наведеного прикладу дає змогу сформулювати правило складання базисного умовного рівняння поправок для будь-якої мережі тріангуляції: 1) вибираємо напрям ходової лінії від початкового базису b_1 до кінцевого b_2; 2) почергово у кожному трикутнику помічаємо кути, які розташовані навпроти передньої та задньої сторони вздовж напряму ходової лінії – у рівняння будуть залучені поправки тільки до цих кутів; 3) складаємо рівняння поправок у загальній формі; знак "+" пишемо перед коефіцієнтами $a_i = ctgx_i$ при відповідних поправках v_i до тих кутів, які є передніми вздовж напряму ходової лінії; знак "–" пишемо перед такими ж коефіцієнтами при поправках до задніх кутів; 4) у формулі обчислення нев'язки у чисельнику потрібно розмістити синуси кутів, які є передніми вздовж напряму ходової лінії, а у знаменнику – синуси задніх кутів.

7. Полюсні умовні рівняння. Такого виду умовні рівняння складають для мереж тріангуляції у вигляді замкненого ланцюжка трикутників навколо однієї вершини, яку називають полюсом (рис. 3.а), а також у вигляді геодезичного чотирикутника (рис. 3.б). Полюсне рівняння виражає таку ж умову, як і базисне умовне рівняння. Особливість мереж, у яких складають полюсне рівняння, така, що у них може не фігурувати жодного базису. Умова складається вздовж ходової лінії, яка бере початок від однієї із суміжних сторін замкненого ланцюжка трикутників і закінчується тією ж стороною. Така сторона опирається на точку полюсу. Так от, якщо деяку сторону умовно вважати базисом, то зв'язок вздовж ходової лінії виразиться рівнянням такої ж форми, що й базисне рівняння. Різняться тільки нев'язки рівнянь: оскільки умовний базис ходової лінії є водночас і початковим і кінцевим, то у формулі нев'язки він скорочується і на її величину не впливає. Наприклад, у замкненому ланцюжку трикутників на рис. 3.а вздовж ходової лінії *OA-OB-OC-OA* полюсне рівняння поправок має вигляд $\sum\limits_{i=3,6,9} ctgx_i \cdot v_i - \sum\limits_{i=1,4,7} ctgx_i \cdot v_i + W = 0$; $W = \dfrac{\sin x_3 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_9}{\sin x_1 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_7} - 1$. У рівнянні відсутні поправки до кутів, які вимірювались у полюсі. У геодезичному чотирикутнику (рис. 3.б) неіснуючу насправді точку *O* умовно можна вважати полюсом. Якщо обрати напрям ходової лінії *OA-OB-OC-OD-OA*, то полюсне рівняння поправок набуде вигляду $\sum\limits_{i=2,4,6,8} ctgx_i \cdot v_i - \sum\limits_{i=1,3,5,7} ctgx_i \cdot v_i + W = 0$; $W = \dfrac{\sin x_2 \cdot \sin x_4 \cdot \sin x_6 \cdot \sin x_8}{\sin x_1 \cdot \sin x_3 \cdot \sin x_5 \cdot \sin x_7} - 1$. Кількість полюсних умовних рівнянь для мережі $r_{полюс} = l - 2m + 3$, де l – кількість усіх сторін, m – кількість усіх пунктів мережі.

8. Координатні умовні рівняння (абсцис та ординат) виникають у мережах тріангуляції та полігонометрії, які опираються на ізольовані групи вихідних пунктів. Групу утворюють не менше двох вихідних пунктів мережі, які з'єднані між собою твердими сторонами. Якщо кількість груп дорівнює *t*, то кількість координатних рівнянь $r_{коорд} = 2(t-1)$. Помітивши початкову та кінцеву групи пунктів, координатні умови можна розкрити наступним чином: координати *X* та *Y* одного з пунктів кінцевої групи, обчислені за відповідними координатами одного із пунктів початкової групи та кутами ланцюжка трикутників вздовж обраного напряму ходової лінії, повинні дорівнювати їх заданим значенням. Ходову лінію обирають у напрямі від пункту початкової групи через вершини проміжних кутів вздовж суміжних сторін ланцюжка трикутників до пункту кінцевої групи. Як виняток, кінцева група може містити один пункт. Зв'язок між кутами виражається на основі теореми синусів вздовж ланцюжка трикутників. Усі суміжні сторони трикутників називають зв’язуючими. Відповідно зв’язуючими називають кути трикутників, які розміщені навпроти цих сторін. Якщо зв’язуючий кут у окремому трикутнику знаходиться навпроти сторони, яка є передньою у напрямі ходової лінії, то його називають переднім зв’язуючим кутом. Заднім зв’язуючим кутом того ж трикутника є кут, який розміщений навпроти задньої по ходу сторони. Кути, які розміщені навпроти бічних сторін ланцюжка трикутників, називають проміжними. Ходова лінія повинна проходити тільки через вершини проміжних кутів.

Базисне, полюсне та координатні умовні рівняння в мережах тріангуляції виражаються нелінійними формами, які утворюються на основі теореми синусів. Тому ці рівняння називають синусними умовними рівняннями.

У нівелірних мережах складають тільки умовні рівняння полігонів. Щодо визначення видів та кількості умовних рівнянь, які складають у планових мережах, можна виокремити наступні рекомендації:

1) у мережах тріангуляції складають лінійні кутові та нелінійні синусні умовні рівняння усіх видів;
2) у мережах полігонометрії складають умовні рівняння дирекційних кутів та координатні (абсцис та ординат);
3) у мережах трилатерації умовні рівняння мають складний аналітичний вигляд, тому, як правило, корелатним способом трилатерацію не зрівноважують;
4) кількість лінійних кутових умовних рівнянь поправок $r_1 = n - l$, де n – кількість усіх виміряних кутів мережі; l – кількість невідомих сторін. Наприклад, для мереж тріангуляції на рис. 3.а $r_1 = 4$ (три рівняння фігур і рівняння горизонту), на рис. 3.б $r_1 = 3$ (три рівняння фігур), на рис. 4.а $r_1 = 4$ (три рівняння фігур і рівняння твердого кута), на рис. 4.б $r_1 = 6$ (п’ять рівнянь фігур і рівняння дирекційних кутів); для полігонометричного ходу на рис.5 $r_1 = 1$ (рівняння дирекційних кутів);

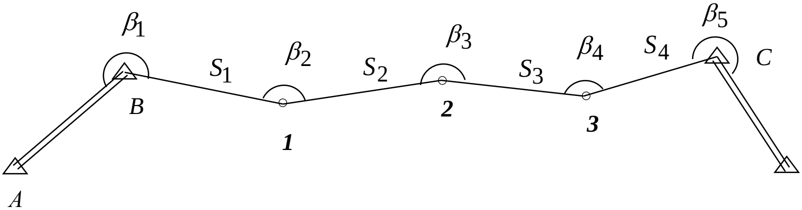

Рис. 5. Схема полігонометричного ходу

5) кількість нелінійних умовних рівнянь поправок $r_2 = r - r_1$ або для тріангуляції $r_2 = l - k$, де k – кількість необхідних виміряних величин. Наприклад, для мереж тріангуляції на рис. 3.а $r_2 = 1$ (полюсне рівняння), на рис. 3.б $r_2 = 1$ (полюсне рівняння), на рис. 4.а $r_2 = 1$ (базисне рівняння), на рис. 4.б $r_2 = 3$ (базисне і два координатні рівняння); для полігонометричного ходу на рис.5 $r_2 = 2$ (два координатні рівняння);
6) якщо трапляються випадки взаємозамінних видів початкових умов, то потрібно обирати комбінації найбільш простих умовних рівнянь.

2. ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОРЕЛАТ

Система умовних рівнянь поправок $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$ містить r рівнянь з n невідомими поправками v_i. Завжди $r < n$, тому така система за жодних умов не може мати прямого аналітичного розв'язку. Однозначний наближений розв'язок можна досягти, якщо на невідомі v_i накласти умову принципу найменших квадратів $\Phi(v_1,...,v_n) = [pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \min$. За такої умови частинні похідні $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_i} = 0$:

$$d\Phi = d[pv^2] = [2pv\ dv] = 0\,; \tag{10}$$

$$d\Phi = d(\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V}) = 2 \cdot \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{dV} = 0\,, \tag{11}$$

де $\underset{n\times 1}{dV}-$ диференціал вектора $\underset{n\times 1}{V}$.

Необхідні вимоги екстремуму функції $\Phi(v_1,...,v_n)$ можна виразити методом Лагранжа:

$$\Phi(v_1,...,v_n) = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} - 2 \cdot \underset{1\times r}{K^T} (\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W}) = \min\,, \tag{12}$$

де $\underset{1\times r}{K^T} = (k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_r)$ – це вектор невідомих множників Лагранжа, які називають корелати. Беручи до уваги умову (11), одержимо наступне:

$$d\Phi = 2 \cdot \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{dV} - 2 \cdot \underset{1\times r}{K^T} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{dV} = 2 \cdot (\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} - \underset{1\times r}{K^T} \cdot \underset{r\times n}{A}) \cdot \underset{n\times 1}{dV} = 0\,;$$

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} - \underset{1\times r}{K^T} \cdot \underset{r\times n}{A} = 0\,;$$

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} = \underset{1\times r}{K^T} \cdot \underset{r\times n}{A}\,;$$

$$\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K};$$

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{P^{-1}}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}.$$

$\underset{n\times n}{P^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \frac{1}{p_2} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{p_n}\end{pmatrix}$ – це діагональна матриця обернених ваг результатів вимірів. Якщо її елементи позначити $\frac{1}{p_i}=q_i$ та відповідно $\underset{n\times n}{P^{-1}}=\underset{n\times n}{q}$, то одержимо рівняння

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}. \tag{13}$$

У розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{l}v_1=q_1(a_{11}k_1+a_{21}k_2+\ldots+a_{r1}k_r)\\ v_2=q_2(a_{12}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{r2}k_r)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n=q_n(a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\ldots+a_{rn}k_r)\end{array}\right\} \tag{14}$$

або узагальнено для окремого рівняння такої системи

$$v_i=q_i(a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\ldots+a_{ri}k_r). \tag{15}$$

Рівняння (13)-(15) називають корелатними рівняннями поправок. Система корелатних рівнянь поправок виражає лінійне перетворення сукупності величин k_j $(j=\overrightarrow{1,r})$ у сукупність величин v_i $(i=\overrightarrow{1,n})$. Для виконання такого перетворення передусім потрібно визначити вектор корелат $\underset{r\times 1}{K}$.

Помістимо вектор (13) до умовного рівняння поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$:

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0. \tag{16}$$

Рівняння (16) називають нормальним рівнянням корелат. У розгорнутому вигляді маємо систему нормальних рівнянь корелат наступного вигляду:

$$\left.\begin{array}{l}[qa_1a_1]k_1+[qa_1a_2]k_2+\ldots+[qa_1a_r]k_r+W_1=0\\ [qa_2a_1]k_1+[qa_2a_2]k_2+\ldots+[qa_2a_r]k_r+W_2=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [qa_ra_1]k_1+[qa_ra_2]k_2+\ldots+[qa_ra_r]k_r+W_r=0\end{array}\right\}. \tag{17}$$

Утворена система містить *r* лінійних рівнянь з *r* невідомими корелатами k_j.

Добуток $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{r1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$

дає квадратну симетричну матрицю порядку r з коефіцієнтами $N_{js}=[qa_j a_s]=q_1 a_{j1}a_{s1}+q_2 a_{j2}a_{s2}+\ldots+q_n a_{jn}a_{sn}$:

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}=\underset{r\times r}{N}=\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1r} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{r1} & N_{r2} & \dots & N_{rr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [qa_1a_1] & [qa_1a_2] & \dots & [qa_1a_r] \\ [qa_2a_1] & [qa_2a_2] & \dots & [qa_2a_r] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [qa_ra_1] & [qa_ra_2] & \dots & [qa_ra_r] \end{pmatrix}.$$

Звертаємо увагу на те, що коефіцієнтам властива ознака симетричності $N_{js}=N_{sj}$: коефіцієнти, розміщені симетрично відносно головної діагоналі, попарно рівні між собою. Отже, одержимо нормальне рівняння корелат

$$\underset{r\times r}{N}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0. \qquad (18)$$

У розгорнутому вигляді маємо систему нормальних рівнянь корелат наступного вигляду:

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}k_1+N_{12}k_2+\ldots+N_{1r}k_r+W_1=0 \\ N_{21}k_1+N_{22}k_2+\ldots+N_{2r}k_r+W_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_{r1}k_1+N_{r2}k_2+\ldots+N_{rr}k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (19)$$

Вільними членами нормальних рівнянь корелат є нев'язки W_j, як і в умовних рівняннях поправок (9).

Якщо зрівноважуванню підлягають рівноточні виміри, то $p_i=q_i=1$ і вагова матриця перетворюється в одиничну матрицю $\underset{n\times n}{P}=\underset{n\times n}{q}=\underset{n\times n}{E}$, а нормальне рівняння корелат набуває вигляду

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0; \qquad (20)$$

$$\left.\begin{array}{l} [a_1a_1]k_1+[a_1a_2]k_2+\ldots+[a_1a_r]k_r+W_1=0 \\ [a_2a_1]k_1+[a_2a_2]k_2+\ldots+[a_2a_r]k_r+W_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_ra_1]k_1+[a_ra_2]k_2+\ldots+[a_ra_r]k_r+W_r=0 \end{array}\right\}. \qquad (21)$$

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОРЕЛАТ

Розв'язування нормального рівняння корелат (18) полягає у визначенні вектора $\underset{r\times 1}{K}$, елементами якого є корені рівнянь k_j ($j=\overrightarrow{1,r}$) – корелати:

$$\underset{r\times 1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times 1}{W}. \qquad (23)$$

$\underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{N}^{-1}$ – це обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N} = \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T}$.

Матриця $\underset{r\times r}{Q}$ має такі ж властивості, що і матриця коефіцієнтів $\underset{r\times r}{N}$. Серед них визначальною є властивість симетричності не квадратичних коефіцієнтів відносно головної діагоналі: $\underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q^T}$. Завдання побудови оберненої матриці полягає у розв'язуванні рівняння

$$\underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{E} \tag{24}$$

відносно $\underset{r\times r}{Q}$, де $\underset{r\times r}{E}$ – одинична матриця.

Рівняння (23) виражає розв'язок системи нормальних рівнянь корелат. Рівняння (24) можна використати для перевірки правильності побудови оберненої матриці. Перевірку розв'язування системи нормальних рівнянь корелат можна виконати підстановкою вектора корелат k_j у рівняння $\underset{r\times r}{N} \cdot \underset{r\times 1}{K} + \underset{r\times 1}{W} = 0$: умова рівняння повинна задовольнятись.

4. ОБЧИСЛЕННЯ ЗРІВНОВАЖЕНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ

Зрівноважені результати вимірів $\tilde{x}_i$ виражаються рівняннями $\tilde{x}_i = x_i + v_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ або $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \underset{n\times 1}{x} + \underset{n\times 1}{V}$, де $\underset{n\times 1}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – результати вимірів; $\underset{n\times 1}{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ – їх зрівноважені значення; $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ – поправки до результатів вимірів.

Поправки v_i до результатів вимірів розкривають корелатні рівняння поправок (13): $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$. Контроль обчислення поправок v_i можна виконати за значенням $[pv^2]$, виходячи з наступних міркувань.

Помножимо рівняння $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}$ на величину $\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P}$:

$$\underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times 1}{K}.$$

Беручи до уваги, що $\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times n}{q}=\underset{n\times n}{E}$ – це одинична матриця, одержимо:

$$\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}\ .$$

З іншого боку, з умовного рівняння поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$ слідує:

$$\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}=-\underset{r\times 1}{W}\ ;$$

$$\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times r}{A^T}=-\underset{1\times r}{W^T}$$

і остаточно

$$\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}=-\underset{1\times r}{W^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}=[pv^2]\,. \qquad (25)$$

Отже, значення $[pv^2]=-\underset{1\times r}{W^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$ дає змогу виконати контроль обчислення поправок v_i шляхом його співставлення із значенням $[pv^2]=\underset{1\times n}{V^T}\cdot\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times 1}{V}$.

Розкриттям числових значень $\tilde{x}_i$ $(i=\overrightarrow{1,n})$ завершується етап основних зрівноважувальних обчислень. Заключний контроль зрівноважування виконується перевіркою істинності умов, які виражають незалежні умовні рівняння (3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0$: умовні рівняння, складені зі зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, повинні дорівнювати нулю. Логічним наслідком зазначеної вимоги є ще наступна: $W_j=\varphi_j(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)=0$, тобто нев'язки умовних рівнянь, які обчислені за зрівноваженими результатами вимірів $\tilde{x}_i$, повинні дорівнювати нулю.

5. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ

Під оцінкою точності за результатами зрівноважування корелатним способом розуміють обчислення середніх квадратичних похибок зрівноважених результатів вимірів та їх функцій.

Оцінка точності потрібної величини – незмінна задача, вирішення якої полягає у обчисленні середньої квадратичної похибки величини за формулою $M=\mu\sqrt{\frac{1}{P}}$ або $M=m\sqrt{\frac{1}{P}}$ за умови оцінювання відповідно нерівноточних або рівноточних вимірів. Тут μ – середня квадратична похибка одиниці ваги; m – середня квадратична похибка рівноточних вимірів; P – вага оцінюваної величини.

Значення похибок μ чи m можна обчислити за формулами Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}$ чи $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}$. Можна також скористатись формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_W W^2]}{r}}\,, \tag{26}$$

де W_j – нев'язки умовних рівнянь; P_{W_j} – ваги нев'язок; $j = \overrightarrow{1,r}$; r – кількість надлишкових виміряних величин. Ваги нев'язок виражає формула теорії похибок вимірів для ваги функції незалежних виміряних величин

$$\frac{1}{P_{W_j}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}^2 \frac{1}{p_i}\,. \tag{27}$$

Формула (26) є різновидом формули Гаусса, позаяк нев'язки W_j – це істинні похибки незалежних умовних рівнянь φ_j.

Вагу P оцінюваної величини визначають як вагу функції $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ результатів вимірів x_i за формулою теорії похибок

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\circ^2 \frac{1}{p_i}\,. \tag{28}$$

Однак за результатами зрівноважування оцінюванню підлягають зрівноважені результати вимірів або їх функції, але не безпосередні результати вимірів. Тому пряме застосування формули ваги функції результатів вимірів у вигляді (28) неприпустиме. Для вирішення задачі оцінки точності за результатами зрівноважування насамперед потрібно виразити і врахувати зв'язки результатів вимірів x_i із зрівноваженими значеннями $\tilde{x}_i$ чи їх функціями.

5.1. Оцінка точності зрівноважених вимірів

Зрівноважені значення $\tilde{x}_i$ виражаються функціями результатів вимірів x_i вигляду $\tilde{x}_i = F_i(x_i) = x_i + v_i$ $(i = \overrightarrow{1,n})$ або у матричній формі $\underset{n\times1}{\tilde{x}} = \underset{n\times1}{x} + \underset{n\times1}{V}$.

За умовою завдання зрівноважування, сукупність поправок v_i повинна враховувати істинні похибки вимірів $\theta_i = -v_i$ і ліквідовувати нев'язки $W_j = \varphi_j(x_1, ..., x_n)$, які зумовлені похибками θ_i. Масиви поправок $\underset{n\times1}{V}$ та нев'язок $\underset{r\times1}{W}$ зв'язані умовними рівняннями поправок $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times1}{V} + \underset{r\times1}{W} = 0$.

Помістимо в умовні рівняння поправок $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$ вираз поправок $\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times 1}{\tilde{x}}-\underset{n\times 1}{x}$: $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=\underset{r\times n}{A}\cdot(\underset{n\times 1}{\tilde{x}}-\underset{n\times 1}{x})+\underset{r\times 1}{W}=\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{\tilde{x}}-\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}+\underset{r\times 1}{W}=0$. Враховуючи умовні рівняння (3) $\varphi_j(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)=0$ або, що рівносильне, $\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{\tilde{x}}=0$, одержимо:

$$\underset{r\times 1}{W}=\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}\ . \tag{29}$$

В ході зрівноважування поправки $\underset{n\times 1}{V}$ виражаються через корелати $\underset{r\times 1}{K}$ корелатними рівняннями поправок $\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}$, а масив корелат $\underset{r\times 1}{K}$ формується за результатом розв’язання системи нормальних рівнянь корелат: $\underset{r\times 1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times 1}{W}$. На цій основі, враховуючи вираження нев’язок (29), для сукупності поправок $\underset{n\times 1}{V}$ одержимо:

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times 1}{K}=\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot(-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times 1}{W})=-\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}\ . \tag{30}$$

Підстановка одержаного виразу в рівняння $\underset{n\times 1}{\tilde{x}}=\underset{n\times 1}{x}+\underset{n\times 1}{V}$ забезпечує такий кінцевий результат:

$$\underset{n\times 1}{\tilde{x}}=\underset{n\times 1}{x}-\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}\ . \tag{31}$$

Рівняння (31) виражає зв’язок результатів вимірів x_i із зрівноваженими значеннями $\tilde{x}_i$. Величина $\underset{n\times n}{q}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}=const$ у межах окремої задачі.

Беручи за основу рівняння зв’язку (31) і формули теорії похибок $m_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2}m_i^2}$ та $\frac{1}{P_F}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2}\frac{1}{p_i}$, виразимо тепер середні квадратичні похибки та ваги корелат k_j, поправок v_i і зрівноважених значень $\tilde{x}_i$ як функцій результатів вимірів.

Оцінюючи точність масиву корелат $\underset{r\times 1}{K}=-\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times 1}{x}$, одержимо:

$$\underset{r\times r}{M_K^2}=\underset{r\times r}{Q}\cdot\underset{r\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{M^2}\cdot\underset{n\times r}{A^T}\cdot\underset{r\times r}{Q}\ ; \tag{32}$$

$$\underset{r\times r}{Q_K} = \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times r}{N}\cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times r}{E} = \underset{r\times r}{Q}, \tag{33}$$

де $\underset{n\times n}{M^2}$ – матриця квадратів середніх квадратичних похибок результатів вимірів; $\underset{r\times r}{M_K^2}$ і $\underset{r\times r}{Q_K}$ – кореляційна і вагова матриці, на головних діагоналях яких розташовані відповідно квадрати середніх квадратичних похибок та обернені ваги корелат.

Точність масиву поправок $\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times 1}{K}$ з урахуванням (32) і (33) розкривають відповідні формули для кореляційної і вагової матриць вигляду

$$\underset{n\times n}{M_V^2} = \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{M_K^2}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}, \tag{34}$$

$$\underset{n\times n}{Q_V} = \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}. \tag{35}$$

Оцінюючи точність масиву зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$, на основі рівняння зв'язку (31) для кореляційної $\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2}$ та вагової $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}$ матриць одержимо наступне:

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \underset{n\times n}{M^2} - \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{M^2}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}; \tag{36}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}.$$

Враховуючи, що $\underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T} = \underset{r\times r}{N}$ та $\underset{r\times r}{N}\cdot \underset{r\times r}{Q} = \underset{r\times r}{E}$,

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}. \tag{37}$$

Якщо взяти до уваги кореляційну матрицю результатів вимірів $\underset{n\times n}{M^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{q}$,

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 (\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q});$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 (\underset{n\times n}{q} - \underset{n\times n}{q}\cdot \underset{n\times r}{A^T}\cdot \underset{r\times r}{Q}\cdot \underset{r\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{q});$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = \mu^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}. \tag{38}$$

За умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів, які обтяжені похибкою m, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$ і формули оцінки точності зрівноважених результатів $\tilde{x}_i$ спрощуються до вигляду

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 (\underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}); \tag{39}$$

$$\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \underset{n\times n}{E} - \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A}; \tag{40}$$

$$\underset{n\times n}{M_{\tilde{x}}^2} = m^2 \underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}}. \tag{41}$$

На головній діагоналі вагової матриці $\underset{n\times n}{Q_{\tilde{x}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P_{\tilde{x}_1}} & Q_{\tilde{x}_{12}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{1n}} \\ Q_{\tilde{x}_{21}} & \frac{1}{P_{\tilde{x}_2}} & \dots & Q_{\tilde{x}_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{\tilde{x}_{n1}} & Q_{\tilde{x}_{n2}} & \dots & \frac{1}{P_{\tilde{x}_n}} \end{pmatrix}$ розташовані обернені ваги $\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}}$ зрівноважених результатів вимірів $\tilde{x}_i$. Інші елементи матриці називаються кореляційними моментами. Вони виражають тісноту залежності між зрівноваженими вимірами коефіцієнтами кореляції

$$r_{\tilde{x}_i \tilde{x}_j} = \frac{Q_{\tilde{x}_{ij}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{\tilde{x}_i}} \cdot \frac{1}{P_{\tilde{x}_j}}}}. \tag{42}$$

5.2. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів

Нехай за результатами зрівноважування потрібно оцінити точність деякої величини F, яка виражається функцією $F = F(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n)$. Якщо така функція має нелінійний вигляд, то традиційно, з метою уніфікації алгоритму вирішення завдання, її лінеаризують розкладенням у ряд Тейлора:

$$F = F(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\circ} v_i + R.$$

З огляду на точність розв'язку завдання, сумою всіх нелінійних членів розкладу R можна нехтувати. З врахуванням позначень частинних похідних

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)_{\circ} = F_i, \tag{43}$$

$$F = F(x) + \sum_{i=1}^{n} F_i v_i \,; \qquad (44)$$

$$F = F(x) + \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times 1}{V} \,, \qquad (45)$$

де матриця $\underset{1\times n}{F} = (F_1 \quad F_2 \quad \ldots \quad F_n)$ формується частинними похідними (43). Лінеаризовану форму (44) або (45) функції $F = F(\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n)$ називають ваговою функцією.

Залежність масивів поправок $\underset{n\times 1}{V}$ та результатів вимірів $\underset{n\times 1}{x}$ виражає доведене раніше рівняння (30): $\underset{n\times 1}{V} = -\underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x}$. Підстановка його до вагової функції (45) дає рівняння, яке виражає оцінювану величину F як функцію результатів вимірів x_i:

$$F = F(x) - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} \,. \qquad (46)$$

Точність величини F на основі функції (46) дають змогу виразити відомі формули теорії похибок $m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} m_i^2}$ і $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\circ}^{2} \frac{1}{p_i}$:

$$M_F^2 = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} \,, \qquad (47)$$

де $\underset{n\times n}{M^2}$ – кореляційна матриця похибок m_i результатів вимірів x_i;

$$\frac{1}{P_F} = \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} - \underset{1\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times 1}{F^T} \,. \qquad (48)$$

Величини M_F^2 та $\frac{1}{P_F}$ виражають квадрат середньої квадратичної похибки (дисперсію) та обернену вагу оцінюваної величини F. Їх пов’язує залежність

$$M_F^2 = \mu^2 \frac{1}{P_F} \,. \qquad (49)$$

Якщо потрібно оцінювати відразу декілька функцій, наприклад s, то матрицю $\underset{1\times n}{F}$ будуть утворювати s рядків: $\underset{s\times n}{F}$. Рядки формуються окремо для кожної оцінюваної функції елементами $F_{ji} = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_{\circ}$ $(j = \overrightarrow{1,s};\ i = \overrightarrow{1,n})$.

Тоді $\underset{s\times n}{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{s1} & F_{s2} & \dots & F_{sn} \end{pmatrix}$, а формули оцінки точності (47)-(49) узагальнюються до вигляду

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{M^2} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \quad (50)$$

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times n}{q} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \quad (51)$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \quad (52)$$

Кореляційна $\underset{s\times s}{M_F^2}$ і вагова $\underset{s\times s}{Q_F}$ матриці на головних діагоналях містять квадрати середніх квадратичних похибок $M_{F_j}^2$ і обернені ваги $\dfrac{1}{P_{F_j}}$ оцінюваних функції. Недіагональні елементи $Q_{F_{ij}}$ симетричної матриці $\underset{s\times s}{Q_F}$ називають кореляційними моментами. Вони виражають залежності між оцінюваними функціями. Тісноту залежності між функціями за номерами *i* та *j* виражає коефіцієнт кореляції $r_{F_iF_j} = \dfrac{Q_{F_{ij}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{F_i}} \cdot \dfrac{1}{P_{F_j}}}}$.

За умови зрівноважування рівноточних результатів вимірів, які обтяжені похибкою *m*, беремо до уваги, що $\underset{n\times n}{q} = \underset{n\times n}{E}$. Тоді

$$\underset{s\times s}{Q_F} = \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times s}{F^T} - \underset{s\times n}{F} \cdot \underset{n\times r}{A^T} \cdot \underset{r\times r}{Q} \cdot \underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times s}{F^T}; \quad (53)$$

$$\underset{s\times s}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{s\times s}{Q_F}. \quad (54)$$

Порівняння формул оцінки точності зрівноважених результатів вимірів та функцій зрівноважених вимірів показує, що останні можна розглядати як загальні для обох випадків. Дійсно, якщо допустити, що $s = n$, а оцінюваними функціями вважати зрівноважені виміри $F_j = F_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) = \tilde{x}_j$, то тоді матриця $\underset{s\times n}{F}$ перетворюється в одиничну матрицю: $\underset{s\times n}{F} = \underset{n\times n}{F} = \underset{n\times n}{E}$. Її підстановка до формул (51) і (53) дає у підсумку формули оцінки точності зрівноважених вимірів (37) і (40).

6. ПРИКЛАДИ ЗРІВНОВАЖУВАННЯ ВИМІРІВ КОРЕЛАТНИМ СПОСОБОМ

Завдання 1. У нівелірній мережі з трьома вузловими реперами *D, E, F* виміряні перевищення *h* у шести ходах різної довжини *S*. Мережа опирається на три вихідних репери *A, B, C* з відомими відмітками $H_A = 183{,}496$ *м*, $H_B = 192{,}353$ *м*, $H_C = 191{,}890$ *м*. Схема мережі зображена на рис. 6. Необхідно визначити зрівноважені значення виміряних перевищень, оцінити точність зрівноваженого перевищення та відмітки вузлового репера.

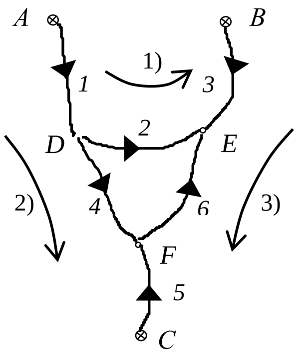

Рис. 6. Схема нівелірної мережі

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 1.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні результати вимірів перевищень та довжини ходів:

№ ходу	1	2	3	4	5	6
Перевищення *h* (*м*)	6,125	8,320	5,580	1,368	-0,905	6,944
Довжина *S* (*км*)	12,6	16,4	14,1	10,0	12,0	13,2

Для заданої мережі загальна кількість вимірів $n = 6$, кількість необхідних вимірів $k = 3$, кількість надлишкових вимірів $r = 3$.

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

Загальна кількість умовних рівнянь поправок дорівнює кількості надлишкових вимірів r=3. В нівелірних мережах виникають умовні рівняння полігонів. Їх складають для вибраних у мережі r незалежних розімкнених чи замкнених полігонів. З усіх можливих варіантів незалежними є такі полігони, серед яких ні один не був би комбінацією інших. Умовне рівняння полігону має загальний вигляд $\sum_{i\in j} \pm v_i + W_j = 0$. При складанні рівняння за номером $j = \overrightarrow{1,r}$ беруть до уваги поправки v_i до перевищень h_i тих ходів, які входять до полігону за тим же номером *j*. Знак "+" перед поправкою ставлять тоді, коли напрями ходу і полігону співпадають; знак "–" ставлять, якщо їх напрями протилежні. Нев'язка W_j умовного рівняння обчислюється за формулою $W_j = \sum_{i\in j} \pm h_i - (H_{кінц} - H_{поч})$, де $H_{поч}$ та $H_{кінц}$ – відмітки початкового та кінцевого реперів полігону. Умовні рівняння поправок складаємо в трьох розімкнених полігонах, як їх показано на схемі рис. 6:

1) полігон *ADEB*: $W_1 = h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 8(мм)$; $v_1 + v_2 - v_3 + 8 = 0$;
2) полігон *ADFC*: $W_2 = h_1 + h_4 - h_5 - (H_C - H_A) = 4(мм)$; $v_1 + v_4 - v_5 + 4 = 0$;
3) полігон *BEFC*: $W_3 = h_3 - h_5 - h_6 - (H_C - H_B) = 4(мм)$; $v_3 - v_5 - v_6 + 4 = 0$.

Матрична форма запису системи умовних рівнянь поправок має вигляд $\underset{r\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0$. З урахуванням складених рівнянь система має наступний вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 - v_3 + 8 = 0 \\ v_1 + v_4 - v_5 + 4 = 0 \\ v_3 - v_5 - v_6 + 4 = 0 \end{array}\right\} = \underset{3\times 6}{A} \cdot \underset{6\times 1}{V} + \underset{3\times 1}{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система нормальних рівнянь корелат має вигляд

$$\left.\begin{array}{l} N_{11}k_1 + N_{12}k_2 + N_{13}k_3 + W_1 = 0 \\ N_{21}k_1 + N_{22}k_2 + N_{23}k_3 + W_2 = 0 \\ N_{31}k_1 + N_{32}k_2 + N_{33}k_3 + W_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{або} \quad \underset{3\times 3}{N} \cdot \underset{3\times 1}{K} + \underset{3\times 1}{W} = 0.$$

Матрицю вільних членів $\underset{3\times 1}{W}$ формують нев'язки умовних рівнянь. Матрицю коефіцієнтів $\underset{3\times 3}{N}$ розкриває добуток $\underset{3\times 3}{N} = \underset{3\times 6}{A} \cdot \underset{6\times 6}{q} \cdot \underset{6\times 3}{A^T}$, де $\underset{6\times 6}{q}$ – матриця обернених ваг результатів вимірів $q_i = \frac{S_i}{10}$ (S_i – довжини ходів).

$$\underset{6\times 6}{q} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 \end{pmatrix}; \qquad \underset{3\times 3}{N} = \begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 & -1.4 \\ 1.3 & 3.5 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 3.9 \end{pmatrix}.$$

Тож маємо систему нормальних рівнянь корелат

$$\begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 & -1.4 \\ 1.3 & 3.5 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 3.9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 .$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Розв'язування системи полягає у вираженні невідомих елементів матриці $\underset{3\times1}{K}$ за формулою $\underset{3\times1}{K} = -\underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times1}{W}$, де $\underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{N}^{-1}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{3\times3}{N}$.

$$\underset{3\times3}{Q} = \begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix} .$$

Контроль побудови оберненої матриці: $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{E}$, де $\underset{3\times3}{E}$ – одинична матриця:

$$\begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 & -1.4 \\ 1.3 & 3.5 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 3.9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\underset{3\times1}{K} = -\begin{pmatrix} 0.3520 & -0.1946 & 0.1863 \\ -0.1946 & 0.4270 & -0.2012 \\ 0.1863 & -0.2012 & 0.3852 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7828 \\ 0.6539 \\ -2.2258 \end{pmatrix} .$$

Контроль розв'язування системи підстановкою обчислених корелат у рівняння $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times1}{K} + \underset{3\times1}{W} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4.3 & 1.3 & -1.4 \\ 1.3 & 3.5 & 1.2 \\ -1.4 & 1.2 & 3.9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2.7828 \\ 0.6539 \\ -2.2258 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

4. Обчислення зрівноважених перевищень

4.1) обчислення поправок v_i до виміряних перевищень за корелатними рівняннями поправок $\underset{6\times1}{V} = \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times1}{K}$:

$$\underset{6\times1}{V} = \begin{pmatrix} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2.7828 \\ 0.6539 \\ -2.2258 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.7646 \\ -4.4525 \\ 0.7798 \\ 0.6539 \\ 1.8863 \\ 2.8936 \end{pmatrix} .$$

4.2) обчислення зрівноважених перевищень $\underset{6\times1}{\tilde{h}} = \underset{6\times1}{h} + \underset{6\times1}{V}$, де $\underset{6\times1}{h}$ – матриця результатів вимірів перевищень:

$$\underset{6\times 1}{\tilde{h}} = \begin{pmatrix} 6125 \\ 8320 \\ 5580 \\ 1368 \\ -905 \\ 6944 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.8 \\ -4.5 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 1.9 \\ 2.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6122.2 \\ 8315.5 \\ 5580.8 \\ 1368.7 \\ -903.1 \\ 6946.9 \end{pmatrix}.$$

4.3) контроль зрівноважування перевищень: нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими результатами вимірів, повинні дорівнювати нулю:

$$W_1 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 - (H_B - H_A) = 0;$$
$$W_2 = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_4 - \tilde{h}_5 - (H_C - H_A) = 0;$$
$$W_3 = \tilde{h}_3 - \tilde{h}_5 - \tilde{h}_6 - (H_C - H_B) = 0.$$

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\dfrac{[pv^2]}{n-k}}$, де $[pv^2] = \underset{1\times 6}{V^T} \cdot \underset{6\times 6}{P} \cdot \underset{6\times 1}{V} = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} = 28{,}5503$: $\mu = \pm\, 3{,}08\,мм.$

5.2) складання вагових функцій. Ваговою називають функцію зрівноважених результатів вимірів, яка виражає за ними потрібну оцінювану величину: $F = F(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$. За кожною складеною функцією виражають значення частинних похідних $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)_\circ = F_i$ і ними формують матрицю коефіцієнтів $\underset{1\times n}{F} = (F_1 \quad F_2 \quad ... \quad F_n)$. Наприклад, вагова функція для відмітки репера D $F_H = F(\tilde{h}_1,...,\tilde{h}_6) = H_D = H_A + \tilde{h}_1$; частинні похідні $\left(\dfrac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_1}\right)_0 = F_1 = 1$; $\left(\dfrac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_2}\right)_0 = F_2 = ... = \left(\dfrac{\partial F_H}{\partial \tilde{h}_6}\right)_0 = F_6 = 0$; $\underset{1\times 6}{F} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. Вагова функція для зрівноваженого перевищення $\tilde{h}_{DE}$: $F_h = F(\tilde{h}_1,...,\tilde{h}_6) = \tilde{h}_2$; частинні похідні $\left(\dfrac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_1}\right)_0 = F_1 = 0$; $\left(\dfrac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_2}\right)_0 = F_2 = 1$; $\left(\dfrac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_3}\right)_0 = F_3 = ... = \left(\dfrac{\partial F_h}{\partial \tilde{h}_6}\right)_0 = F_6 = 0$; $\underset{1\times 6}{F} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

5.3) оцінювання точності відмітки репера D і зрівноваженого перевищення $\tilde{h}_{DE}$ можна виконати одночасно, якщо значеннями частинних похідних відповідних їм вагових функцій сформувати матрицю $\underset{2\times6}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Перший рядок матриці містить значення частинних похідних функції, яка виражає відмітку репера D, другий – теж саме для перевищення $\tilde{h}_{DE}$. Тоді вагову матрицю оцінюваних величин виражає формула

$$\underset{2\times2}{Q_F} = \underset{2\times6}{F} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times2}{F^T} - \underset{2\times6}{F} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times6}{A} \cdot \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times2}{F^T} = \begin{pmatrix} 0.6412 & -0.3274 \\ -0.3274 & 0.6988 \end{pmatrix}.$$

Відповідна кореляційна матриця $\underset{2\times2}{M_F^2} = \mu^2 \cdot \underset{2\times2}{Q_F} = \begin{pmatrix} 6.1024 & -3.1161 \\ -3.1161 & 6.6502 \end{pmatrix}$ на головній діагоналі містить квадрати середніх квадратичних похибок (дисперсії) оцінюваних величин. Точність оцінюваних величин виражають середні квадратичні похибки

$$M_{H_D} = \pm\, 2{,}47\ \text{мм}; \qquad M_{\tilde{h}} = \pm\, 2{,}58\ \text{мм}.$$

5.4) оцінювання точності всіх зрівноважених перевищень. У такій постановці задачі матриця частинних похідних всіх шести вагових функцій, які складено почергово для всіх зрівноважених перевищень, перетворюється у одиничну матрицю: $\underset{6\times6}{F} = \underset{6\times6}{E}$, а формули оцінки точності набувають наступного вигляду:

$$\underset{6\times6}{Q_{\tilde{h}}} = \underset{6\times6}{q} - \underset{6\times6}{q} \cdot \underset{6\times3}{A^T} \cdot \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times6}{A} \cdot \underset{6\times6}{q} = \begin{pmatrix} 0.6412 & -0.3274 & 0.3138 & -0.3021 & 0.3391 & -0.0253 \\ -0.3274 & 0.6988 & 0.3714 & 0.3114 & -0.0161 & 0.3874 \\ 0.3138 & 0.3714 & 0.6851 & 0.0093 & 0.3231 & 0.3621 \\ -0.3021 & 0.3114 & 0.0093 & 0.5730 & 0.2709 & -0.2616 \\ 0.3391 & -0.0161 & 0.3231 & 0.2709 & 0.6100 & -0.2870 \\ -0.0253 & 0.3874 & 0.3621 & -0.2616 & -0.2870 & 0.6490 \end{pmatrix};$$

$$\underset{6\times6}{M_{\tilde{h}}^2} = \mu^2 \underset{6\times6}{Q_{\tilde{h}}} = \begin{pmatrix} 6.1024 & -3.1161 & 2.9863 & -2.8750 & 3.2274 & -0.2411 \\ -3.1161 & 6.6502 & 3.5341 & 2.9634 & -0.1528 & 3.6869 \\ 2.9863 & 3.5341 & 6.5204 & 0.0884 & 3.0747 & 3.4457 \\ -2.8750 & 2.9634 & 0.0884 & 5.4531 & 2.5781 & -2.4898 \\ 3.2274 & -0.1528 & 3.0747 & 2.5781 & 5.8056 & -2.7309 \\ -0.2411 & 3.6869 & 3.4457 & -2.4898 & -2.7309 & 6.1766 \end{pmatrix}.$$

На головних діагоналях вагової $\underset{6\times6}{Q_{\tilde{h}}}$ і кореляційної $\underset{6\times6}{M_{\tilde{h}}^2}$ матриць містяться обернені ваги і дисперсії всіх зрівноважених перевищень. Недіагональні елементи вагової матриці забезпечують оцінку залежності зрівноважених перевищень. Наприклад, залежність $\tilde{h}_1$ та $\tilde{h}_2$ виражає коефіцієнт кореляції $r_{\tilde{h}_1\tilde{h}_2} = \dfrac{Q_{\tilde{h}_{12}}}{\sqrt{\dfrac{1}{P_{\tilde{h}_1}} \cdot \dfrac{1}{P_{\tilde{h}_2}}}} = \dfrac{-0.3274}{\sqrt{0.6412 \times 0.6988}} = -0.49$.

Завдання 2. В результаті рівноточних вимірів отримали n=9 кутів β_i мережі мікротріангуляції (див. рис. 7). Необхідно визначити зрівноважені значення виміряних кутів, оцінити точність зрівноважених кутів і довжини сторони *DC*.

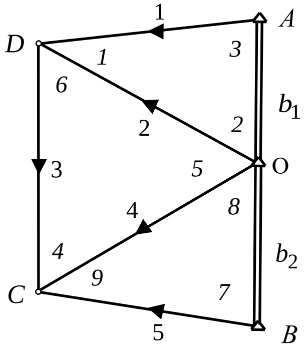

Рис. 7. Схема мережі мікротріангуляції

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 2.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні результати вимірів кутів:

№	β_i	№	β_i	№	β_i
1	64°36′00,9″	4	55°19′45,2″	7	33°44′19,4″
2	65°53′45,2″	5	55°12′15,1″	8	103°13′43,4″
3	49°30′19,3″	6	69°27′52,6″	9	43°02′01,7″

Для заданої мережі загальна кількість вимірів $n = 9$, кількість необхідних вимірів $k = 4$, кількість надлишкових вимірів $r = 5$.

1. Формування системи умовних рівнянь поправок

У мережі потрібно складати п'ять умовних рівнянь, у тому числі чотири кутових (три рівняння фігур і рівняння твердого кута) і одне базисне умовне рівняння.

1.1) умовні рівняння фігур складаємо для кожного трикутника мережі:

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовні рівняння поправок
1	64° 36′ 00.9″	
2	65° 53′ 45.2″	
3	49° 30′ 19.3″	$v_1 + v_2 + v_3 + 5.4'' = 0$
$\sum$	180° 00′ 05.4″	
W_1	5.4″	

4 5 6	55° 19′ 45.2″ 55° 12′ 15.1″ 69° 27′ 52.6″	$v_4 + v_5 + v_6 - 7.1'' = 0$
Σ W_2	179° 59′ 52.9″ -7.1″	
7 8 9	33° 44′ 19.4″ 103° 13′ 43.4″ 43° 02′ 01.7″	$v_7 + v_8 + v_9 + 4.5'' = 0$
Σ W_3	180° 00′ 04.5″ 4.5″	

1.2) умовне рівняння твердого кута складаємо для суми кутів, вставлених між вихідними сторонами *OA* і *OB*. Значення твердого кута $\angle AOB$ виражає різниця дирекційних кутів вихідних сторін, які обчислюємо з розв'язання оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	Результати вимірів кутів	Умовне рівняння поправок
2 5 8	65° 53′ 45.2″ 55° 12′ 15.1″ 103° 13′ 43.4″	$v_2 + v_5 + v_8 + 3.2'' = 0$
Σ $\angle AOB$ W_4	224° 19′ 43.7″ 224° 19′ 40.5″ 3.2″	

1.3) базисне умовне рівняння для напряму ходової лінії b_1-*OD*-*OC*-b_2 :

$$a_3 v_3 + a_6 v_6 + a_9 v_9 - a_1 v_1 - a_4 v_4 - a_7 v_7 + W_5 = 0\,,$$

де коефіцієнти $a_i = ctg\beta_i$, нев'язка $W_5 = \dfrac{b_1}{b_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_3 \cdot \sin\beta_6 \cdot \sin\beta_9}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_4 \cdot \sin\beta_7} - 1$.

Довжини базисів b_1 і b_2 обчислюємо з розв'язання оберненої геодезичної задачі за координатами вихідних пунктів.

№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i	№ кутів	β_i	$\sin\beta_i$	a_i
3 6 9	49°30′19.3″ 69°27′52.6″ 43°02′01.7″	0.76046673 0.93645570 0.68242975	0.85 0.37 1.07	1 4 7	64°36′00.9″ 55°19′45.2″ 33°44′19.4″	0.90333716 0.82243428 0.55540656	0.47 0.69 1.50
b_1 $b_1 \sin\beta_3 \sin\beta_6 \sin\beta_9$		1813.119 881.154		b_2 $b_2 \sin\beta_1 \sin\beta_4 \sin\beta_7$		2135.504 881.176	
$W_5 \cdot \rho'' = -5.1''$							

Отже, базисне умовне рівняння поправок має вигляд

$$0.85 \cdot v_3 + 0.37 \cdot v_6 + 1.07 \cdot v_9 - 0.47 \cdot v_1 - 0.69 \cdot v_4 - 1.50 \cdot v_7 - 5.1'' = 0 .$$

Система складених умовних рівнянь поправок має наступний вигляд:

$$\left.\begin{array}{llllllllll} v_1 & +v_2 & +v_3 & & & & & & & +5.4=0 \\ & & & v_4 & +v_5 & +v_6 & & & & -7.1=0 \\ & & & & & & v_7 & +v_8 & +v_9 & +4.5=0 \\ & v_2 & & & +v_5 & & & +v_8 & & +3.2=0 \\ -0.47 \cdot v_1 & & +0.85 \cdot v_3 & -0.69 \cdot v_4 & & +0.37 \cdot v_6 & -1.50 \cdot v_7 & & +1.07 \cdot v_9 & -5.1=0 \end{array}\right\} =$$

$$= \underset{5\times9}{A} \cdot \underset{9\times1}{V} + \underset{5\times1}{W} = 0$$

Матриці $\underset{5\times9}{A}$ та $\underset{5\times1}{W}$ формуємо коефіцієнтами та нев'язками рівнянь:

$$\underset{5\times9}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.47 & 0 & 0.85 & -0.69 & 0 & 0.37 & -1.50 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}; \quad \underset{5\times1}{W} = \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix}.$$

2. Формування системи нормальних рівнянь корелат

Система нормальних рівнянь корелат за умови зрівноважування рівноточних вимірів має вигляд $\underset{5\times5}{N} \cdot \underset{5\times1}{K} + \underset{5\times1}{W} = \underset{5\times9}{A} \cdot \underset{9\times5}{A^T} \cdot \underset{5\times1}{K} + \underset{5\times1}{W} = 0$.

Враховуючи добуток матриць $\underset{5\times9}{A}$ та $\underset{9\times5}{A^T}$ одержимо:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0.38 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -0.32 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -0.43 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0.38 & -0.32 & -0.43 & 0 & 4.9513 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.4 \\ -7.1 \\ 4.5 \\ 3.2 \\ -5.1 \end{pmatrix} = 0 \cdot$$

В розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{array}{llllll} 3 \cdot k_1 & & & +k_4 & +0.38 \cdot k_5 & +5.4=0 \\ & 3 \cdot k_2 & & +k_4 & -0.32 \cdot k_5 & -7.1=0 \\ & & 3 \cdot k_3 & +k_4 & -0.43 \cdot k_5 & +4.5=0 \\ k_1 & +k_2 & +k_3 & +3 \cdot k_4 & & +3.2=0 \\ 0.38 \cdot k_1 & -0.32 \cdot k_2 & -0.43 \cdot k_3 & & +4.9513 \cdot k_5 & -5.1=0 \end{array}\right\} \cdot$$

3. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат

Невідомі корелати k_j виражає формула $\underset{5\times1}{K} = -\underset{5\times5}{Q} \cdot \underset{5\times1}{W}$. Обернена матриця

$$\underset{5\times5}{Q} = \underset{5\times5}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.39123 & 0.05274 & 0.05193 & -0.16530 & -0.02211 \\ 0.05274 & 0.39226 & 0.05990 & -0.16830 & 0.02651 \\ 0.05193 & 0.05990 & 0.39448 & -0.16877 & 0.03414 \\ -0.16530 & -0.16830 & -0.16877 & 0.50079 & -0.01285 \\ -0.02211 & 0.02651 & 0.03414 & -0.01285 & 0.20834 \end{pmatrix} \cdot$$

Контроль побудови оберненої матриці: $\underset{5\times5}{N}\cdot\underset{5\times5}{Q}=\underset{5\times5}{E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Результат розв'язування системи нормальних рівнянь корелат: $\underset{5\times1}{K}=-\underset{5\times5}{Q}\cdot\underset{5\times1}{W}=\begin{pmatrix}-1,55567\\2,90444\\-0,91612\\-1,21088\\1,25758\end{pmatrix}$. Контроль розв'язку: $\underset{5\times5}{N}\cdot\underset{5\times1}{K}+\underset{5\times1}{W}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

4. Обчислення зрівноважених кутів

4.1) обчислення поправок до виміряних кутів за корелатними рівняннями поправок $\underset{9\times1}{V}=\underset{9\times5}{A^T}\cdot\underset{5\times1}{K}$:

$$\underset{9\times1}{V}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&-0.47\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0.85\\0&1&0&0&-0.69\\0&1&0&1&0\\0&1&0&0&0.37\\0&0&1&0&-1.50\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1.07\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1,55567\\2,90444\\-0,91612\\-1,21088\\1,25758\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2.1\\-2.8\\-0.5\\2.0\\1.7\\3.4\\-2.8\\-2.1\\0.4\end{pmatrix}.$$

4.2) обчислення зрівноважених значень виміряних кутів $\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\underset{9\times1}{\beta}+\underset{9\times1}{V}$:

$$\underset{9\times1}{\tilde{\beta}}=\begin{pmatrix}64^\circ36'00.9''\\65^\circ53'45.2''\\49^\circ30'19.3''\\55^\circ19'45.2''\\55^\circ12'15.1''\\69^\circ27'52.6''\\33^\circ44'19.4''\\103^\circ13'43.4''\\43^\circ02'01.7''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2.1''\\-2.8''\\-0.5''\\2.0''\\1.7''\\3.4''\\-2.8''\\-2.1''\\0.4''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64^\circ35'58.8''\\65^\circ53'42.4''\\49^\circ30'18.8''\\55^\circ19'47.2''\\55^\circ12'16.8''\\69^\circ27'56.0''\\33^\circ44'16.6''\\103^\circ13'41.3''\\43^\circ02'02.1''\end{pmatrix}.$$

4.3) контроль зрівноважування. Нев'язки умовних рівнянь, обчислені за зрівноваженими кутами, повинні дорівнювати нулю:

$W_1=\tilde{\beta}_1+\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_3-180^\circ=0;$ $\quad W_2=\tilde{\beta}_4+\tilde{\beta}_5+\tilde{\beta}_6-180^\circ=0;$

$W_3=\tilde{\beta}_7+\tilde{\beta}_8+\tilde{\beta}_9-180^\circ=0;$ $\quad W_4=\tilde{\beta}_2+\tilde{\beta}_5+\tilde{\beta}_8-\angle AOB=0;$

$$W_5=\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{\sin\tilde{\beta}_3\cdot\sin\tilde{\beta}_6\cdot\sin\tilde{\beta}_9}{\sin\tilde{\beta}_1\cdot\sin\tilde{\beta}_4\cdot\sin\tilde{\beta}_7}-1=0.$$

5. Оцінка точності за результатами зрівноважування

5.1) обчислення середньої квадратичної похибки вимірів кутів за формулою Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times 9}{V^T} \cdot \underset{9\times 1}{V} = -\underset{1\times r}{W^T} \cdot \underset{r\times 1}{K} = 43{,}4331$:

$$m = \pm\, 2{,}9''.$$

5.2) складання вагової функції для оцінювання точності довжини сторони *DC*. Довжина сторони *DC* виражається через кути мережі функцією $F = s_{DC} = b_1 \dfrac{\sin\tilde{\beta}_3 \cdot \sin\tilde{\beta}_5}{\sin\tilde{\beta}_1 \cdot \sin\tilde{\beta}_4}$. Лінеаризована форма функції має вигляд $F = F_0 + F_3 v_3 + F_5 v_5 - F_1 v_1 - F_4 v_4$, де $F_0 = b_1 \dfrac{\sin\beta_3 \cdot \sin\beta_5}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_4}$. Частинні похідні $F_i = \left(\dfrac{\partial F}{\partial \beta_i}\right)_{\circ}$ набувають наступних значень:

$$F_1 = -F_0 \cdot ctg\beta_1 = \text{-}720м; \qquad F_3 = F_0 \cdot ctg\beta_3 = 1300м;$$
$$F_4 = -F_0 \cdot ctg\beta_4 = \text{-}1050м; \quad F_5 = F_0 \cdot ctg\beta_5 = 1060м;$$
$$F_2 = F_6 = F_7 = F_8 = F_9 = 0.$$

Отже, вагова функція має вигляд

$$F = F_0 + (1.30 \cdot v_3 + 1.06 \cdot v_5 - 0.72 \cdot v_1 - 1.05 \cdot v_4) \times 10^3.$$

Значеннями похідних F_i формуємо матрицю $\underset{1\times 9}{F} = (-720 \quad 0 \quad 1300 \quad -1050 \quad 1060 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

5.3) вагові функції для оцінювання точності зрівноважених кутів мають вигляд $F_j(\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n) = \tilde{\beta}_j$. Значення частинних похідних $F_{ji} = \left(\dfrac{\partial F_j}{\partial \beta_i}\right)_{\circ}$ формують одиничну матрицю $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$, де номер рядка j такої матриці дорівнює номеру оцінюваного кута.

5.4) оцінку точності зрівноважених кутів $\tilde{\beta}_i$ зручно виконувати разом з оцінкою точності довжини s_{DC}, якщо елементами матриць $\underset{9\times 9}{F} = \underset{9\times 9}{E}$ для вагових функцій зрівноважених кутів і $\underset{1\times 9}{F} = (-720 \quad 0 \quad 1300 \quad -1050 \quad 1060 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ для вагової функції довжини s_{DC} сформувати об'єднану матрицю $\underset{10\times 9}{F}$ значень частинних похідних усіх оцінюваних функцій наступного вигляду:

$$\underset{10\times 9}{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -720 & 0 & 1300 & -1050 & 1060 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вагову матрицю сукупності всіх оцінюваних величин виражає формула

$$\underset{10\times 10}{Q_F} = \underset{10\times 9}{F} \cdot \underset{9\times 10}{F^T} - \underset{10\times 9}{F} \cdot \underset{9\times 5}{A^T} \cdot \underset{5\times 5}{Q} \cdot \underset{5\times 9}{A} \cdot \underset{9\times 10}{F^T} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.542 & -0.242 & -0.300 & -0.123 & 0.119 & 0.004 & -0.216 & 0.123 & 0.093 & -524.315 \\ -0.242 & 0.439 & -0.196 & 0.091 & -0.220 & 0.128 & 0.064 & -0.219 & 0.154 & -409.723 \\ -0.300 & -0.196 & 0.496 & 0.032 & 0.101 & -0.133 & 0.152 & 0.095 & -0.247 & 934.039 \\ -0.123 & 0.091 & 0.032 & 0.545 & -0.215 & -0.331 & -0.212 & 0.123 & 0.089 & -669.989 \\ 0.119 & -0.220 & 0.101 & -0.215 & 0.444 & -0.229 & 0.129 & -0.224 & 0.094 & 740.996 \\ 0.004 & 0.128 & -0.133 & -0.331 & -0.229 & 0.560 & 0.083 & 0.101 & -0.183 & -71.007 \\ -0.216 & 0.064 & 0.152 & -0.212 & 0.129 & 0.083 & 0.239 & -0.194 & -0.045 & 712.390 \\ 0.123 & -0.219 & 0.095 & 0.123 & -0.224 & 0.101 & -0.194 & 0.442 & -0.249 & -331.272 \\ 0.093 & 0.154 & -0.247 & 0.089 & 0.094 & -0.183 & -0.045 & -0.249 & 0.294 & -381.118 \\ -524.315 & -409.723 & 934.039 & -669.989 & 740.996 & -71.007 & 712.390 & -331.272 & -381.118 & 3080700.889 \end{pmatrix}$$

Точність оцінюваних величин розкриває кореляційна матриця $\underset{10\times 10}{M_F^2} = m^2 \cdot \underset{10\times 10}{Q_F}$: на головній діагоналі матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок (дисперсії) оцінюваних величин відповідно розташуванню частинних похідних їх вагових функцій у матриці $\underset{10\times 9}{F}$.

Беручи до уваги, що на головній діагоналі вагової матриці $\underset{10\times 10}{Q_F}$ розташовані обернені ваги $\dfrac{1}{P_{F_j}}$, середні квадратичні похибки оцінюваних величин можна також виражати окремо, наприклад,

$$M_{\tilde{\beta}_1} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}}} = 2.9''\sqrt{0.542} = \pm 2.2''; \quad M_{\tilde{\beta}_2} = m\sqrt{\frac{1}{P_{F_2}}} = 2.9''\sqrt{0.439} = \pm 2.0'';$$

$$M_S = \frac{m}{\rho''}\sqrt{\frac{1}{P_{F_{10}}}} = \frac{2.9''}{206265''}\sqrt{3080700.889} = \pm 0.025\,(м).$$

Тісноту залежності між оцінюваними величинами виражає коефіцієнт кореляції, як наприклад, для перших двох зрівноважених кутів

$$r_{\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2} = \frac{Q_{F_{12}}}{\sqrt{\frac{1}{P_{F_1}} \cdot \frac{1}{P_{F_2}}}} = \frac{-0.242}{\sqrt{0.542 \times 0.439}} = -0.5. \cdot$$

Питання для самоконтролю

1. Який зміст завдання зрівноважування вимірів корелатним способом?
2. Що називають умовними рівняннями поправок?
3. Що називають нев'язкою умовного рівняння?
4. За якими правилами формують систему умовних рівнянь поправок?
5. Види і правила складання умовних рівнянь поправок у геодезичних мережах.
6. Що називають корелатами?
7. Що називають корелатними рівняннями поправок?
8. Правила формування і властивості системи нормальних рівнянь корелат.
9. Розв'язування системи нормальних рівнянь корелат.
10. Як проконтролювати розв'язування системи нормальних рівнянь корелат?
11. Як обчислити зрівноважені значення результатів вимірів?
12. Як виконати заключний контроль зрівноважування корелатним способом?
13. Зміст завдання оцінки точності за результатами зрівноважування корелатним способом.
14. Обчислення середніх квадратичних похибок одиниці ваги та результатів вимірів.
15. Загальний принцип вираження ваг оцінюваних величин за результатами зрівноважування корелатним способом.
16. Оцінка точності зрівноважених результатів вимірів.
17. Оцінка точності функцій зрівноважених вимірів.

Література

1. Бугай П. Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів : підручник. Львів : ЛДУ, 1960. 366 с.
2. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2005. 236 с.
3. Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник. Львів : Растр-7, 2007. 408 с.

Додаток 1

Вхідні дані для виконання завдання 1

№ варіанту	№ ходів						Оцінити точність	
	1	2	3	4	5	6	перевищення h	відмітка вузлового репера
	Виміряні перевищення h_i *(м)*							
	6.125	8.320	5.580	1.368	-0.905	6.944		
	Довжини ходів S_i *(км)*							
1	8,4	13,1	22,8	5,9	5,5	11,1	1	D
2	8,5	13,1	22,6	5,9	6,5	11,1	2	E
3	8,6	13,1	22,4	5,9	7,5	11,1	3	F
4	8,7	13,1	22,2	5,9	8,5	11,1	4	E
5	8,8	13,1	22,0	5,9	9,5	11,1	5	F
6	8,9	13,1	21,8	5,9	10,5	11,1	6	D
7	9,0	13,1	21,6	5,9	11,5	11,1	1	F
8	9,1	13,1	21,4	5,9	12,5	11,1	2	D
9	9,2	13,1	21,2	5,9	13,5	11,1	3	E
10	9,3	13,1	21,0	5,9	14,5	11,1	4	D
11	9,4	13,1	20,8	5,9	15,5	11,1	5	E
12	9,5	13,1	20,6	5,9	16,5	11,1	6	F
13	9,6	13,1	20,4	5,9	17,5	11,1	1	E
14	9,7	13,1	20,2	5,9	18,5	11,1	2	F
15	9,8	13,1	20,0	5,9	19,5	11,1	3	D
16	9,9	13,1	19,8	5,9	20,5	11,1	4	F
17	10,0	13,1	19,6	5,9	19,0	11,1	5	D
18	10,1	13,1	19,4	5,9	18,0	11,1	6	E
19	10,2	13,1	19,2	5,9	17,0	11,1	1	D
20	10,3	13,1	19,0	5,9	16,0	11,1	2	E
21	10,4	13,1	18,8	5,9	15,0	11,1	3	F
22	10,5	13,1	18,6	5,9	14,0	11,1	4	E
23	10,6	13,1	18,4	5,9	13,0	11,1	5	F
24	10,7	13,1	18,2	5,9	12,0	11,1	6	D
25	10,8	13,1	18,0	5,9	11,0	11,1	1	F
26	10,9	13,1	17,8	5,9	10,0	11,1	2	D
27	11,0	13,1	17,6	5,9	9,0	11,1	3	E

28	11,1	13,1	17,4	5,9	8,0	11,1	4	D
29	11,2	13,1	17,2	5,9	7,0	11,1	5	E
30	11,3	13,1	17,0	5,9	6,0	11,1	6	F
31	11,4	13,1	16,8	5,9	5,0	11,1	1	E
32	11,5	13,1	16,6	5,9	5,2	11,1	2	F
33	11,6	13,1	16,4	5,9	5,4	11,1	3	D
34	11,7	13,1	16,2	5,9	5,6	11,1	4	F
35	11,8	13,1	16,0	5,9	5,8	11,1	5	D
36	11,9	13,1	15,8	5,9	6,0	11,1	6	E
37	12,0	13,1	15,6	5,9	6,2	11,1	1	D
38	12,1	13,1	15,4	5,9	6,4	11,1	2	E
39	12,2	13,1	15,2	5,9	6,6	11,1	3	F
40	12,3	13,1	15,0	5,9	6,8	11,1	4	E
41	12,4	13,1	14,8	5,9	7,0	11,1	5	F
42	12,5	13,1	14,6	5,9	7,2	11,1	6	D
43	12,6	13,1	14,4	5,9	7,4	11,1	1	F
44	12,7	13,1	14,2	5,9	7,6	11,1	2	D
45	12,8	13,1	14,0	5,9	7,8	11,1	3	E
46	12,9	13,1	13,8	5,9	8,0	11,1	4	D
47	13,0	13,1	13,6	5,9	8,2	11,1	5	E
48	13,1	13,1	13,4	5,9	8,4	11,1	6	F
49	13,2	13,1	13,2	5,9	8,6	11,1	1	E
50	13,3	13,1	13,0	5,9	8,8	11,1	2	F
51	13,4	13,1	12,8	5,9	9,0	11,1	3	D
52	13,5	13,1	12,6	5,9	9,2	11,1	4	F
53	13,6	13,1	12,4	5,9	9,4	11,1	5	D
54	13,7	13,1	12,2	5,9	9,6	11,1	6	E
55	13,8	13,1	12,0	5,9	9,8	11,1	1	D
56	13,9	13,1	11,8	5,9	10,0	11,1	2	E
57	14,0	13,1	11,6	5,9	10,4	11,1	3	F
58	14,1	13,1	11,4	5,9	10,8	11,1	4	E
59	14,2	13,1	11,2	5,9	11,2	11,1	5	F
60	14,3	13,1	11,0	5,9	11,6	11,1	6	D

Додаток 2

Вхідні дані для виконання завдання 2

Таблиця 1.

Координати пунктів	X (*м*)	Y (*м*)
A	1813,119	0
O	0	0
B	-1527,638	1492,213
Наближені координати пунктів	X° (*м*)	Y° (*м*)
D	623,360	-1393,272
C	-897,701	-1488,183

Таблиця 2.

№ варіанту	Результати вимірів кутів								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	64°36′	65°53′	49°30′	55°19′	55°12′	69°27′	33°44′	103°13′	43°02′
1	02,0 ″	45,2 ″	19,3 ″	45,2 ″	15,1 ″	52,6 ″	19,4 ″	43,4 ″	00,5 ″
2	00,9	43,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
3	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
4	01,5	45,2	19,3	47,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
5	00,9	46,1	19,3	45,2	17,6	52,6	19,4	43,4	01,7
6	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	54,3	19,4	43,4	01,7
7	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
8	00,9	44,8	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,0	01,7
9	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,1
10	00,1	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	18,8	43,4	01,7
11	00,9	44,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
12	00,9	45,2	20,0	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
13	03,0	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,6	01,7
14	00,9	47,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	00,1
15	00,9	46,8	18,7	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,1
16	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
17	00,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,0
18	00,9	45,0	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,0	01,7
19	00,9	45,2	16,3	45,2	15,1	52,6	21,3	43,4	01,7
20	02,5	45,2	19,3	44,6	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
21	00,9	43,5	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,4	01,7
22	00,9	45,2	17,7	45,2	15,1	53,5	19,4	43,4	01,7
23	01,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,6	43,4	01,7
24	00,9	44,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,6	01,7

25	00,9	45,2	19,8	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	01,2
26	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,5	43,4	01,7
27	00,9	42,1	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,2	01,7
28	00,9	45,2	18,6	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	03,5
29	03,5	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,0	01,7
30	00,9	46,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,3
31	01,4	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,8
32	00,9	44,5	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	44,8	01,7
33	00,9	45,2	17,3	45,2	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
34	00,9	46,8	19,3	50,0	15,1	52,6	19,4	43,4	01,7
35	03,5	45,2	19,3	45,2	18,6	52,6	19,4	43,4	01,7
36	00,9	45,2	19,0	45,2	15,1	52,2	19,4	43,4	01,7
37	00,7	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	20,8	43,4	01,7
38	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	45,0	01,7
39	00,9	45,2	20,4	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	02,1
40	03,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	22,9	43,4	01,7
41	00,9	43,6	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	42,8	01,7
42	00,9	45,2	21,1	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	04,0
43	02,6	45,2	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	46,0	01,7
44	00,9	47,3	19,3	45,2	15,1	52,6	19,4	43,4	05,0
45	00,1	45,2	19,3	44,5	15,1	52,6	20,0	43,4	01,7
46	00,9	44,0	19,3	45,2	16,8	52,6	19,4	43,9	01,7
47	00,9	45,2	18,8	45,2	15,1	54,0	19,4	43,4	03,5
48	02,3	45,2	19,3	46,8	15,1	52,6	17,8	43,4	01,7
49	00,9	47,5	19,3	45,2	18,0	52,6	19,4	40,8	01,7
50	00,9	45,2	22,0	45,2	15,1	56,4	19,4	43,4	00,2
51	00,2	45,2	19,3	48,0	15,1	52,6	22,0	43,4	01,7
52	00,9	39,5	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	42,1	01,7
53	00,9	45,2	15,8	45,2	15,1	50,1	19,4	43,4	04,0
54	01,9	45,2	19,3	49,1	15,1	52,6	18,0	43,4	01,7
55	00,9	46,8	19,3	45,2	16,9	52,6	19,4	40,2	01,7
56	00,9	45,2	20,8	45,2	15,1	54,1	19,4	43,4	00,5
57	00,6	45,2	19,3	44,1	15,1	52,6	17,5	43,4	01,7
58	00,9	43,0	19,3	45,2	14,1	52,6	19,4	40,9	01,7
59	00,9	45,2	18,1	45,2	15,1	51,6	19,4	43,4	01,1
60	03,8	45,2	19,3	50,1	15,1	52,6	22,6	43,4	01,7