Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії

05-04-132М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання.

ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол №12 від 20.02.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів. [Електронне видання] / Тадєєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2024. – 27 с.

Укладач: Тадєєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст

1. Постановка задачі…..3
2. Апроксимація функцій за результатами вимірів ……………………………5
2.1. Імовірнісне обґрунтування вирішення задачі ……………………...5
2.2. Вираження залежності у загальному вигляді ………………………..6
2.3. Визначення параметрів емпіричної формули ………………..………8
2.4. Лінійна емпірична формула і рівняння регресії……………………....9
3. Оцінка точності за результатами апроксимації……………………………..12
3.1. Оцінка точності прямих результатів експерименту ……………......13
3.2. Оцінка точності параметрів емпіричних формул ……………………...14
3.3. Оцінка точності результатів інтерполяції та екстраполяції………….....14
4. Приклади побудови емпіричних формул…………………..……………..16
4.1. Апроксимація лінійної функції…………………………………………16
4.2. Визначення оптимальної емпіричної формули……………………..19
Література..25
Додатки…………………………...………………………………………26

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Важливим завданням геодезії та наук про Землю загалом є описування законів природних явищ. Засобом для цього є накопичення результатів спостережень та вираження за ними закономірностей перебігу явищ. Таке завдання важливе з огляду на те, що встановлення законів зміни природних явищ дозволяє передбачати їх перебіг на визначену перспективу.

Геодезична галузь знань тісно пов’язана з дослідженнями Землі, які спрямовані на моделювання різних природних процесів. Результатом моделювання є стандартні формули, які виражають загальні закономірності явищ та процесів. Виведені формули можуть містити відомі константи, які залишаються сталими, а також змінні параметри, які сталі лише в умовах перебігу того чи іншого експерименту. Одні й другі підлягають визначенню шляхом моделювання деякої дискретної кількості значень n результатів вимірів чи спостережень x_i та y_i ($i = \overrightarrow{1,n}$) деяких величин X та Y.

В природі не існує простих зв’язків тільки між двома величинами. Як правило, кожна величина залежить від низки інших величин. Задача пошуку зв’язку двох величин виникає за умов, що впливом на величину Y якихось інших величин крім X можна нехтувати, або вони зберігають сталі (хоча б приблизно) значення під час експерименту. Перша умова означає, що сумарна похибка впливу знехтуваних величин несуттєва порівняно з точністю результатів спостережень і не позначається на точності функції. Друга умова передбачає, що інші аргументи входять до функціональної залежності як сталі параметри.

Допустимо, що величина Y залежить від величини X і потрібно за результатами x_i та y_i знайти функцію $Y = F(X)$, яка описувала б їх залежність. Така задача надзвичайно складна. Теоретично складно побудувати однозначну формулу залежності величин *X* та *Y*. Тому задача описування результатів спостережень величин розглядається як задача складання табличної функції, яку згодом потрібно апроксимувати деякою функціональною залежністю у тій чи іншій аналітичній формі. Задача апроксимації функціональної залежності на табличних значеннях має на меті побудову емпіричних формул, які відповідають тій чи іншій аналітичній структурі. Емпіричною формулою називають всяку функцію, яка наближує табличну функцію, отриману з результатів спостережень. Побудована емпірична формула буде діяти лише для тих значень аргументу, які містяться у таблиці.

Задача побудови емпіричних формул вимагає дотримання двох умов. По-перше, потрібно вибрати аналітичну структуру функції, якою буде виконано наближення табличної функції. По-друге, потрібно визначитись з критерієм оптимальності описування результатів експерименту функціями різної аналітичної структури.

У всіх випадках, коли потрібно побудувати емпіричну формулу, попередньо викреслюють в прямокутній системі координат графік табличної функції у формі точкової діаграми. Точкам на графіку завжди буде властиве певне розсіювання. Випадкові відхилення від явної чи припустимої закономірності розташування точок обумовлені похибками вимірів чи спостережень, якими завжди обтяжені дослідження. Порівняння виявленої закономірності розташування точок діаграми з різними кривими, рівняння яких відомі, дає підстави сформувати загальні уявлення про можливий тип емпіричної формули. Загалом закономірності перебігу природних явищ характеризуються однією з трьох основних залежностей: степеневою, показниковою, гармонічною.

Загальна формула степеневої функції має вигляд $y-k=m(x-h)^n$. Якщо $n=1$, то формула відповідає прямій лінії $y=mx+b$. Якщо $n>0$, то рівняння належить до параболічного типу з вершиною в точці (*h*, *k*). Сюди відносять часткові формули $y=mx^n+b$ та поліноми різного степеню *n* $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$. Якщо $n<0$, то формула належить до гіперболічного типу $y-k=m(x-h)^{-n}$ з центром у точці (*h*, *k*). До цього типу відносяться часткові формули $y=\frac{a}{x^n}+b$, а також $xy=bx+ay$, яка перетворюється до вигляду $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$.

Показникова залежність загалом виражається формулою $y=ab^{kx}$.

Гармонічній залежності відповідає, наприклад, формула $y=a\sin(nx+B)$.

У найпростішому випадку розташування геометричного місця точок на графіку табличної функції може показати лінійну залежність. Тоді типом емпіричної формули потрібно обрати рівняння прямої. Якщо розташування точок показує більш складну залежність, то доцільно обрати поліноміальний тип функції. Теоретично вважається, що через будь-яку кількість точок з координатами x_i , y_i $(i=\overrightarrow{1,n})$ завжди можна провести криву, яка аналітично виражається поліномом степені n–1. Така крива буде проходити через кожну із сукупності точок. Однак вона не виражатиме закономірності їх розташування і такий підхід не забезпечить досягнення поставленої мети. Адже випадкове розташування точок на графіку віддзеркалює статистичний розподіл результатів експерименту. Згладити випадкові відхилення, виразити загальний характер залежності y від x, а також визначити оптимальний степінь полінома чи апроксимувати функцію іншої аналітичної структури можна під умовою принципу найменших квадратів.

Результат побудови емпіричної формули не є самоціллю з огляду лише на визначення закономірностей у межах табличної функції. Крім того, він має наступні практичні застосування, які називають задачами інтерполяції та екстраполяції. Зокрема, якщо на основі емпіричної формули потрібно визначити приблизні значення функції за значеннями аргументів, які відсутні у таблиці, але не виходять за межі табуляції, то розв’язується задача інтерполяції. Визначення значень емпіричної формули поза межами табуляції аргументів функції називають екстраполяцією. Для використання емпіричної формули на усьому проміжку перебігу процесу відносно значень аргументу, які знаходяться поза межами експерименту, формальних підстав не існує. Тому екстраполяція може спричинити хибні висновки. Однак практика застосування емпіричних формул поза межами експерименту часто показує достатню значимість і забезпечує вагомі результати.

2. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ВИМІРІВ

Нехай за результатами експерименту фізичні величини X та Y набули значень $(x_i; y_i)$; $i=\overrightarrow{1,n}$; n – кількість вимірів чи спостережень. Точність результатів y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Необхідно виконати апроксимацію емпіричних даних і визначити оптимальну емпіричну формулу.

2.1. Імовірнісне обґрунтування вирішення задачі

Допустимо, істинну залежність Y від X виражає формула

$$Y = F(X), \tag{1}$$

а похибки вимірів m_i і результати y_i підпорядковані нормальному законові розподілу. Якщо виміри рівноточні, то $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$. Тоді для функції щільності нормально розподіленої величини Y одержимо:

$$f_i(y_i)=\frac{1}{m\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y_i-F(x_i)]^2}{2m^2}}. \qquad (2)$$

У окресленій постановці задачі похибки m_i – це середні квадратичні відхилення (стандарти), а $F(x_i)$ – математичні сподівання результатів y_i. Щоб забезпечити істинність умови (1), ймовірність сукупності результатів y_i повинна бути найбільшою. Для цього абсолютне значення показника степені у функції щільності (2) повинно бути найменшим. У межах проведеного експерименту $\frac{1}{2m^2}=const$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-F(x_i)\right)^2=\left[\theta^2\right]=\min. \qquad (3)$$

Для нерівноточних результатів y_i з урахуванням зв'язку середніх квадратичних похибок і ваг одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\left(y_i-F(x_i)\right)^2=\left[p\theta^2\right]=\min. \qquad (4)$$

Різниці $y_i-F(x_i)=\theta_i$ виражають істинні похибки результатів y_i. Тому вирішення поставленої задачі зводиться до визначення поправок

$$v_i=F(x_i)-y_i, \qquad (5)$$

які повинні ліквідовувати допущені похибки. З іншого боку, відхилення v_i посвідчують розбіжності результатів експерименту y_i і відповідних значень функції (1). Отже, з використанням того чи іншого числового критерію відхилення v_i можуть забезпечити визначення оптимальної аналітичної структури функції (1), котра відповідає набору емпіричних значень $(x_i;y_i)$. Таким чином, умови (3) та (4) набувають вигляду

$$[v^2]=\min; \qquad (6)$$

$$[pv^2]=\min. \qquad (7)$$

Формули (6) і (7) є математичним вираженням принципу найменших квадратів, який може забезпечити вирішення поставленого завдання.

2.2. Вираження залежності у загальному вигляді

Будь-яка функція (1) містить сукупність постійних параметрів (коефіцієнтів) c_j ($j=\overrightarrow{1,k}$), значення яких апріорі невідомі, тому її можна деталізувати до вигляду

$$Y=F(X;c_1,...,c_k). \qquad (8)$$

Співвідношення змінної X з параметрами c_j визначають характер аналітичного вираження залежності Y від X. Якщо значеннями параметрів c_j сформувати матрицю $\underset{k\times 1}{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_k \end{pmatrix}$, а результати вимірів y_i звести до матриці $\underset{n\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то залежність (8) набуває вигляду

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c}. \tag{9}$$

Тут $\underset{n\times k}{A}$ – це матриця коефіцієнтів, які є наслідком аналітичного вираження залежності (8) і значень змінної X. Елементи матриці $\underset{n\times k}{A}$ – це значення частинних похідних $a_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial c_j}$ функції (8). Наприклад, якщо попередньо встановлено, що залежність (8) виражається лінійною функцією $Y = c_1 X + c_2$, то $\underset{n\times 2}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. При параболічній залежності загального вигляду $Y = c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_{k-1} X^{k-1} + c_k$, $\underset{n\times k}{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1} & 1 \\ x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{k-1} & 1 \end{pmatrix}$.

У кожному конкретному випадку потрібно брати до уваги зв'язок кількості параметрів c_j і степені полінома m: $k = m + 1$.

Якщо є підстави для вираження залежності (8) тими чи іншими нелінійними рівняннями, то їх можна перетворити у лінійні і представити у формі (9), якщо скористатись різними системами координат з функціональними шкалами на осях. Так, рівняння $Y = c_1 X^2 + c_2$ заміною змінної $U = X^2$ перетворюють до лінійного вигляду $Y = c_1 U + c_2$. Такого ж вигляду набуває рівняння $Y = \dfrac{c_1}{X} + c_2$ після заміни $U = \dfrac{1}{X}$. Рівняння

$XY = c_1X + c_2Y$ діленням на XY і заміною змінних $U = \dfrac{1}{X}$ та $V = \dfrac{1}{Y}$ перетворюють до вигляду $1 = c_1V + c_2U$. Часто такого типу перетворення виконують шляхом логарифмування нелінійних функцій. Наприклад, рівняння $Y - k = m(X - h)^n$ після логарифмування $\lg(Y - k) = \lg m + n\lg(X - h)$ та підстановки $V = \lg(Y - k)$ та $U = \lg(X - h)$ перетворюють до лінійного вигляду $V = nU + \lg m$; за такою ж аналогією показникову функція $Y = ab^{kX}$ перетворюють до лінійного вигляду $\lg Y = kX\lg b + \lg a$.

2.3. Визначення параметрів емпіричної формули

Враховуючи (8), рівняння поправок (5) набувають вигляду

$$v_i = F(x_i; c_1, \ldots, c_k) - y_i, \tag{10}$$

а завдання визначення невідомих параметрів c_j під умовою принципу найменших квадратів зводиться до розв'язування системи рівнянь

$$\left[pv\frac{\partial v}{\partial c_j} \right] = 0. \tag{11}$$

Числові значення частинних похідних

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial c_j} \right)_0 = a_{ij} \tag{12}$$

можна визначити за результатами експерименту x_i. Диференціювання рівнянь поправок (10) показує, що значення a_{ij} – це елементи матриці коефіцієнтів $\underset{n\times k}{A}$ рівняння (9). Тому система рівнянь (11) набуває вигляду

$$[pa_jv] = 0 \tag{13}$$

або у матричній формі

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V} = 0. \tag{14}$$

Тут $\underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ – матриця поправок; $\underset{n\times n}{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ – діагональна вагова матриця, яка формується за середніми квадратичними похибками m_i. Якщо вимоги (13) або (14) будуть дотримані, тим самим буде забезпечена умова мінімуму (7), що відповідає принципу найменших квадратів.

Складемо рівняння поправок (10) у матричній формі з урахуванням залежності *Y* від *X* у формі (9):

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{n\times 1}{Y}\,. \qquad (15)$$

Підстановка рівняння поправок (15) у (14) видозмінює останнє до наступного вигляду:

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0\,. \qquad (16)$$

В теорії методу найменших квадратів такого типу рівняння називають нормальними рівняннями з коефіцієнтами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і вільними членами $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$. Якщо результати експерименту y_i рівноточні, то їх ваги $p_i = 1$, і вагова матриця перетворюється в одиничну: $\underset{n\times n}{P} = \underset{n\times n}{E}$.

Тоді нормальне рівняння має вигляд

$$\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = 0\,, \qquad (17)$$

де $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times k}{A} = \underset{k\times k}{N}$ і $\underset{k\times n}{A^T} \cdot \underset{n\times 1}{Y} = \underset{k\times 1}{L}$.

Таким чином, незалежно від умов експерименту з точки зору точності його результатів маємо нормальне рівняння загального вигляду

$$\underset{k\times k}{N} \cdot \underset{k\times 1}{c} - \underset{k\times 1}{L} = 0\,. \qquad (18)$$

Розв’язок нормального рівняння виражає формула

$$\underset{k\times 1}{c} = \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{L}\,, \qquad (19)$$

де $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$ – обернена матриця до матриці коефіцієнтів $\underset{k\times k}{N}$.

Розв’язок (19) є однозначним з точки зору принципу найменших квадратів. В умовах проведеного експерименту він забезпечує оптимальні значення параметрів c_j для емпіричної формули заданої аналітичної структури. Досягнення розв’язку можливе виключно за умови

$$k < n\,, \qquad (20)$$

тобто кількість невідомих параметрів c_j повинна бути меншою кількості результатів експерименту *n*.

2.4. Лінійна емпірична формула і рівняння регресії

Допустимо, залежність *Y* від *X* виражає лінійна функція

$$Y = c_1 X + c_2 \qquad (21)$$

з матрицею коефіцієнтів $\underset{n\times 2}{A}=\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$. Нехай результати y_i вимірів величини Y рівноточні. За таких умов нормальне рівняння (17) у розгорнутому вигляді має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} [x^2] & [x] \\ [x] & n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [xy] \\ [y] \end{pmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} [x^2]\cdot c_1+[x]\cdot c_2 &= [xy] \\ [x]\cdot c_1+n\cdot c_2 &= [y] \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Розділимо рівняння (22) на n:

$$\left.\begin{aligned} \frac{[x^2]}{n}c_1+\frac{[x]}{n}c_2 &= \frac{[xy]}{n} \\ \frac{[x]}{n}c_1+c_2 &= \frac{[y]}{n} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Беручи до уваги, що величини $\frac{[x]}{n}=\tilde{X}=\alpha_1^*[X]$, $\frac{[y]}{n}=\tilde{Y}=\alpha_1^*[Y]$, $\frac{[x^2]}{n}=\alpha_2^*[X]$, $\frac{[xy]}{n}=\alpha_{1,1}^*[XY]$ – це початкові статистичні моменти розподілу величин X та Y, рівняння (23) набувають вигляду

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2^*[X]\cdot c_1+\tilde{X}\cdot c_2 &= \alpha_{1,1}^*[XY] \\ \tilde{X}\cdot c_1+c_2 &= \tilde{Y} \end{aligned}\right\}, \tag{24}$$

З другого рівняння утвореної системи виражаємо невідомий параметр c_2:

$$c_2=\tilde{Y}-\tilde{X}\cdot c_1. \tag{25}$$

Підставляємо вираз (25) до першого рівняння: $\alpha_2^*[X]\cdot c_1+\tilde{X}(\tilde{Y}-\tilde{X}\cdot c_1)=\alpha_{1,1}^*[XY]$, звідки

$$c_1=\frac{\alpha_{1,1}^*[XY]-\tilde{X}\cdot\tilde{Y}}{\alpha_2^*[X]-\tilde{X}^2}. \tag{26}$$

Рівняння (25) та (26) забезпечують однозначний розв’язок завдання апроксимації експериментальних даних, яке є найбільш оптимальним з точки зору принципу найменших квадратів для лінійної залежності (21).

В задачах математичної статистики використовують співвідношення, які виражають зв’язки початкових і центральних моментів. Серед них, зокрема $\alpha_{1,1}^*[XY]-\alpha_1^*[X]\cdot\alpha_1^*[Y]=\mu_{1,1}^*[XY]$, де $\mu_{1,1}^*[XY]$ – це другий змішаний центральний момент, який називають кореляційним моментом $\mu_{1,1}^*[XY]=K_{x,y}^*=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{X})(y_i-\tilde{Y})}{n}$, а також $\alpha_2^*[X]-(\alpha_1^*[X])^2=\mu_2^*[X]$, де $\mu_2^*[X]=D_x^*=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{X})^2}{n}$ – це другий центральний момент, який виражає дисперсію величини X. Так само для дисперсії величини Y: $\mu_2^*[Y]=D_y^*=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\tilde{Y})^2}{n}$. Означені центральні моменти використовують для вираження статистичного коефіцієнта кореляції $r_{x,y}^*=\dfrac{K_{x,y}^*}{\sqrt{D_x^*\cdot D_y^*}}$.

Беручи до уваги рівняння (26) і наведені тут статистичні співвідношення, невідомий параметр c_1 можна розкрити наступним чином:

$$c_1=\frac{K_{x,y}^*}{D_x^*}=r_{x,y}^*\frac{\sqrt{D_y^*}}{\sqrt{D_x^*}}. \tag{27}$$

У математичній статистиці формула (27) виражає коефіцієнт $\rho_{y/x}$ регресії Y на X. Отже, $\rho_{y/x}=c_1$. Враховуючи формулу (25), лінійна залежність (21) тепер виразиться рівнянням $Y=\rho_{y/x}X+\tilde{Y}-\rho_{y/x}\tilde{X}$ або

$$Y-\tilde{Y}=\rho_{y/x}(X-\tilde{X}). \tag{28}$$

Рівняння (28) називають рівняння регресії Y на X. Відношення

$$\frac{Y-\tilde{Y}}{X-\tilde{X}}=\rho_{y/x}=tg\varphi \tag{29}$$

виражає кутовий коефіцієнт прямої, яка відповідає рівнянням (21) чи (28). Таким чином, завдання побудови лінійної емпіричної формули методом найменших квадратів математично тотожне завданню побудови статистичного лінійного рівняння регресії.

Зі статистичної точки зору, рівняння регресії виражає форму лінійної імовірнісної (кореляційної) залежності між величинами *X* та *Y*. Сутність імовірнісної залежності полягає в тому, що при збільшенні чи зменшенні однієї величини друга має лише тенденцію збільшуватись чи зменшуватись з лінійною закономірністю. Така тенденція гранично наближається до строгої функціональної залежності, обов'язковою умовою наявності якої є значення коефіцієнта кореляції $r^*_{x,y} = \pm 1$. Ця гранична умова в задачах статистичної обробки експериментальних даних є практично недосяжною навіть з тієї причини, що результати вимірів завжди обтяжені похибками. Отже, визнавати функціональним зв'язок, який за результатами експерименту виражає емпірична формула, немає підстав Тому апроксимація експериментальних даних методом найменших квадратів забезпечує хоча й однозначне, проте наближене розв'язання завдання вираження закономірності перебігу експерименту заданим типом функціональної залежності.

Метод найменших квадратів придатний для розв'язання систем лінійних вхідних рівнянь. Тому його пряме застосування в задачі апроксимації так, як це розкрито вище, можливе тільки для вираження лінійних залежностей і залежностей параболічного типу у вигляді поліномів. При апроксимації нелінійних функцій (крім поліномів) їх потрібно перетворювати до лінійного вигляду. Задачу перетворення нелінійних рівнянь до лінійного вигляду називають лінеаризацією. На практиці використовують два способи лінеаризації нелінійних рівнянь.

Перший спосіб, самий простий, полягає в такій заміні змінних, щоб після відповідних підстановок функції набували лінійної форми відносно нових змінних. Перетворення нелінійних функцій таким способом дозволяє виразити їх лінійною формою (9). Розв'язок системи лінійних рівнянь методом найменших квадратів забезпечує визначення новоутворених змінних. За ними потім виражають невідомі параметри нелінійної функції відповідно до проведеної на початку заміни змінних. До цього способу також відносять лінеаризацію шляхом логарифмування нелінійних функцій. Однак практично застосувати такий простий спосіб лінеаризації вдається не завжди. Тоді використовують другий спосіб, загальний, який підходить для функцій будь-якого типу. Цей спосіб зводиться до лінеаризації нелінійної функції шляхом розкладання у ряд Тейлора. Обидва означених способи апроксимації нелінійних функцій не є предметом вивчення у межах цієї теми.

3. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ АПРОКСИМАЦІЇ

Алгоритм розв'язання задачі побудови емпіричних формул аналогічний алгоритму розв'язання задачі зрівноважування вимірів параметричним способом. Відповідно залишається аналогічною група формул оцінки точності за результатами розв'язання задачі.

3.1. Оцінка точності прямих результатів експерименту

Точність результатів експерименту y_i характеризують середні квадратичні похибки m_i. Їх емпіричні значення можуть бути визначені шляхом аналізу умов проведення експерименту з урахуванням інструментальних, методичних, зовнішніх та особистих чинників виникнення похибок. Такий підхід оцінювання точності результатів експерименту досить трудомісткий і не завжди спроможний забезпечити об'єктивні результати.

На практиці оцінювання точності прямих результатів експерименту часто виконують за результатами встановлення закономірностей його перебігу з використанням емпіричних формул. У цьому випадку похибки m_i обчислюють за сукупністю результатів y_i, взявши за основу їх відхилення v_i від відповідних значень побудованої емпіричної формули. Відхилення v_i виражає рівняння поправок (15) або його загальна форма (10). За відхиленнями v_i, відповідно до умови мінімуму принципу найменших квадратів, обчислюють значення $[pv^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times n}{P} \cdot \underset{n\times 1}{V}$ і середню квадратичну похибку одиниці ваги μ за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\dfrac{[pv^2]}{n-k}}$. На такій основі похибки результатів y_i забезпечує формула $m_i = \dfrac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. Ваги p_i для результатів y_i визначають шляхом аналізу умов проведення експерименту. Якщо результати експерименту рівноточні, то їх похибку обчислюють за формулою Бесселя $m = \sqrt{\dfrac{[v^2]}{n-k}}$, де $[v^2] = \underset{1\times n}{V^T} \cdot \underset{n\times 1}{V}$. Обчислені таким чином середні квадратичні похибки m_i або m виражають точність прямих результатів експерименту.

Середню квадратичну похибку μ (або m за умови рівноточних результатів експерименту) використовують як критерій вираження закономірностей перебігу експерименту побудованою емпіричною формулою. З усіх типів функцій, які застосовувались для побудови відповідних їм емпіричних формул, найбільш оптимальною буде та, якій відповідає найменше значення μ (або m для рівноточних результатів експерименту). З цієї причини середні квадратичні похибки μ та m у задачі апроксимації функцій методом найменших квадратів називають середніми квадратичними похибками апроксимації.

3.2. Оцінка точності параметрів емпіричних формул

Згідно загальної теорії параметричного способу, точність розв’язання задачі зрівноважування визначає матриця вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$. Це матриця, обернена до матриці коефіцієнтів системи нормальних рівнянь: $\underset{k\times k}{Q} = \underset{k\times k}{N}^{-1}$. В задачі апроксимації матриця $\underset{k\times k}{Q}$ визначає точність обчислення параметрів емпіричних формул c_j.

Обернені ваги $\frac{1}{P_j}$ параметрів c_j, які є елементами матриці $\underset{k\times 1}{c}$ системи нормальних рівнянь (18), дорівнюють ваговим коефіцієнтам Q_{jj} матриці $\underset{k\times k}{Q}$ з відповідними індексами: $\frac{1}{P_j} = Q_{jj}$. Середні квадратичні похибки M_j параметрів c_j виражає формула

$$M_j = \mu\sqrt{Q_{jj}} \,. \tag{30}$$

Значення квадратів похибок M_j розміщені на головній діагоналі кореляційної матриці

$$\underset{k\times k}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{k\times k}{Q} \,. \tag{31}$$

Якщо побудову емпіричної формули виконано за рівноточними результатами експерименту, то формули (30) і (31) видозмінюються:

$$M_j = m\sqrt{Q_{jj}} \,; \tag{32}$$

$$\underset{k\times k}{M^2} = m^2 \cdot \underset{k\times k}{Q} \,. \tag{33}$$

Елементи матриці вагових коефіцієнтів $\underset{k\times k}{Q}$ дають також змогу оцінити залежність між параметрами емпіричної формули. Тісноту залежності між параметрами c_i та c_j виражає коефіцієнт кореляції

$$r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}} \,. \tag{34}$$

3.3. Оцінка точності результатів інтерполяції та екстраполяції

Задачі інтерполяції та екстраполяції – це задачі визначення значень величини Y за значеннями змінної величини X, які відсутні у табличній функції і не брали участі у побудові емпіричної формули. За змістом ці задачі аналогічні задачі визначення функцій параметрів за результатами зрівноважування параметричним способом. Тому при оцінюванні точності результатів інтерполяції та екстраполяції використовують відповідну групу формул параметричного способу зрівноважування.

Допустимо, що за емпіричною формулою, яка побудована методом найменших квадратів апроксимацією функції деякої аналітичної структури за табличною функцією $(x_i; y_i)$, для r значень змінної X обчислено відповідні значення Y: $y_l = F_l(x_l; c_1,...,c_k)$; $l = \overrightarrow{1,r}$. Проведені обчислення можуть складати зміст задач інтерполяції чи, рівною мірою, екстраполяції.

Згідно теорії параметричного способу зрівноважування, обернену вагу $\frac{1}{P_F}$ функції параметрів $F = F(t_1,...,t_k)$ виражає формула

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{j=1}^{k} F_j F_j Q_{jj} + 2\sum_{i<j} F_i F_j Q_{ij}$$

чи у матричній формі

$$\frac{1}{P_F} = (F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_k) \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1k} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{k1} & Q_{k2} & \dots & Q_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_k \end{pmatrix} = \underset{1\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times 1}{F^T},$$

де $F_j = \left(\frac{\partial F}{\partial t_j}\right)_0$ – значення частинних похідних функції за параметрами t_j.

Для r значень емпіричної формули, які є результатом інтерполяції та (або) екстраполяції, остання формула набуває вигляду

$$\underset{r\times r}{Q_F} = \underset{r\times k}{F} \cdot \underset{k\times k}{Q} \cdot \underset{k\times r}{F^T}. \tag{35}$$

Вона виражає вагову матрицю $\underset{r\times r}{Q_F}$ для r результатів інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Матриця $\underset{r\times k}{F}$ формується значеннями частинних похідних емпіричної формули за її параметрами c_j:

$$F_{lj} = \left(\frac{\partial F_l}{\partial c_j}\right)_0. \tag{36}$$

Частинні похідні F_{lj} враховують аналітичну структуру емпіричної формули і значення x_l змінної X. На головній діагоналі вагової матриці $\underset{r\times r}{Q_F}$ розташовані обернені ваги $\frac{1}{P_{y_l}}$ значень функції y_l, які є результатами інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Дисперсії результатів y_l визначає кореляційна матриця

$$\underset{r\times r}{M^2} = \mu^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} \,. \tag{37}$$

Якщо побудову емпіричної формули виконано за рівноточними результатами експерименту, то кореляційну матрицю виражає формула

$$\underset{r\times r}{M^2} = m^2 \cdot \underset{r\times r}{Q_F} \,. \tag{38}$$

На головній діагоналі матриці $\underset{r\times r}{M^2}$ розташовані квадрати середніх квадратичних похибок результатів інтерполяції та (або) екстраполяції за емпіричною формулою. Їх абсолютні значення розкривають формули

$$M_l = \mu\sqrt{Q_{ll}} \tag{39}$$

або

$$M_l = m\sqrt{Q_{ll}} \,. \tag{40}$$

Останні формули середніми квадратичними похибками апроксимації μ або m враховують умови нерівноточності (або рівноточності) вхідних результатів експерименту.

4. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ЕМПІРИЧНИХ ФОРМУЛ

4.1. Апроксимація лінійної функції

Завдання 1. В результаті польових вимірів довжин сторін трилатерації одержано значення D довжин і відповідні їм похибки Δ. Виконати апроксимацію лінійної функції $Y = c_1 X + c_2$ на емпіричних значеннях довжин D і похибок їх вимірів Δ; за одержаною емпіричною формулою виконати інтерполяцію та екстраполяцію похибок вимірів довжин.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 1. З таблиці необхідно вибрати підряд n=20 значень величин D і Δ, розпочинаючи з номера варіанта N.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні пари значень величин D і Δ:

№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$
1	8.7	7.0	6	6.1	4.0	11	5.7	6.0	16	2.0	2.0
2	3.7	3.0	7	2.7	3.0	12	4.9	5.0	17	4.0	2.0
3	6.0	4.0	8	4.9	4.0	13	5.6	3.0	18	6.5	5.0
4	3.3	3.0	9	3.1	4.0	14	7.6	4.0	19	7.2	6.0
5	5.1	4.0	10	3.7	2.0	15	4.2	3.0	20	2.7	2.0

Нехай $X = D$ ($x_i -$ це результати вимірів довжин ліній D_i), $Y = \Delta$ ($y_i -$ це похибки вимірів довжин Δ_i). Допустимо, що емпіричні дані одержано за сталого комплексу умов і результати вимірів є рівноточними. За умовою завдання, кількість результатів експерименту $n = 20$, кількість невідомих параметрів лінійної емпіричної формули $k = 2$.

1. Формуємо матриці коефіцієнтів $\underset{20\times2}{A}$ та вільних членів $\underset{20\times1}{Y}$ рівнянь поправок (15) $\underset{20\times1}{V} = \underset{20\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{20\times1}{Y}$:

$$\underset{20\times2}{A} = \begin{pmatrix} 8.7 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 6.0 & 1 \\ 3.3 & 1 \\ 5.1 & 1 \\ 6.1 & 1 \\ 2.7 & 1 \\ 4.9 & 1 \\ 3.1 & 1 \\ 3.7 & 1 \\ 5.7 & 1 \\ 4.9 & 1 \\ 5.6 & 1 \\ 7.6 & 1 \\ 4.2 & 1 \\ 2.0 & 1 \\ 4.0 & 1 \\ 6.5 & 1 \\ 7.2 & 1 \\ 2.7 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \underset{20\times1}{Y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Складаємо нормальне рівняння (18) $\underset{2\times2}{N} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times1}{L} = 0$, де $\underset{2\times2}{N} = \underset{2\times20}{A}^T \cdot \underset{20\times2}{A}$, $\underset{2\times1}{L} = \underset{2\times20}{A}^T \cdot \underset{20\times1}{Y}$:

$$\begin{pmatrix} 538.73 & 97.7 \\ 97.7 & 20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 409.8 \\ 76 \end{pmatrix} = 0 .$$

3. З метою розв’язування нормального рівняння визначаємо обернену матрицю $\underset{2\times2}{Q} = \underset{2\times2}{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.016269 & -0.079475 \\ -0.079475 & 0.438238 \end{pmatrix}$. Розв’язок нормального рівняння розкриває формула (19):

$$\underset{2\times1}{c} = \underset{2\times2}{Q} \cdot \underset{2\times1}{L} = \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.74 \end{pmatrix}. .$$

Отже, лінійна емпірична формула, яка виражає залежність похибок вимірів від довжин ліній за даного комплексу умов, має вигляд

$\Delta = 0.63D + 0.74$ або у загальних позначеннях $Y = 0.63X + 0.74$. Результати апроксимації представлено графічно на рис. 1.

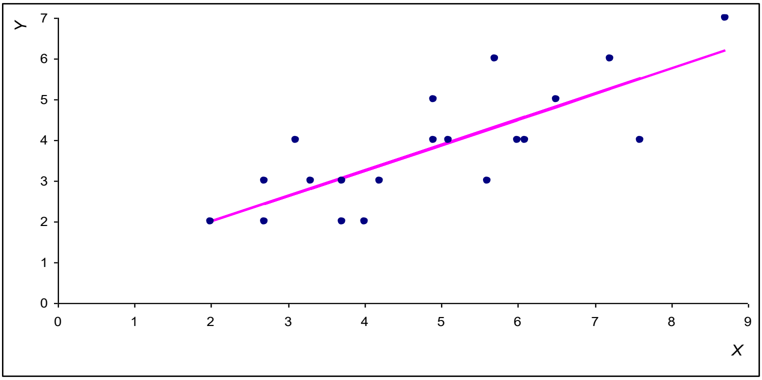

Рис. 1. Результати лінійної апроксимації емпіричних даних

4. З рівняння $\underset{20\times1}{V} = \underset{20\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{20\times1}{Y}$ виражаємо матрицю поправок $\underset{20\times1}{V}$ і обчислюємо середню квадратичну похибку апроксимації m за формулою Бесселя $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}}$, беручи до уваги, що $[v^2] = \underset{1\times20}{V}^T \cdot \underset{20\times1}{V}$. Отже, $m = \sqrt{\frac{15.0347}{20-2}} = \pm 0.91$.

5. За формулою (33) визначаємо кореляційну матрицю $\underset{2\times2}{M}^2 = m^2 \cdot \underset{2\times2}{Q} = \begin{pmatrix} 0.0136 & -0.0664 \\ -0.0664 & 0.3660 \end{pmatrix}$. На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок M_{c_1} і M_{c_2} параметрів емпіричної формули c_1 і c_2. Зазначені похибки можна також виразити за формулою (32) $M_j = m\sqrt{Q_{jj}}$: $M_{c_1} = \pm 0.12$, $M_{c_2} = \pm 0.61$. Отже, остаточно $c_1 = 0.63 \pm 0.12$, $c_2 = 0.74 \pm 0.61$. Залежність параметрів c_1 та c_2 виражаємо коефіцієнтом кореляції r_{12} за формулою (34) $r_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}}$:

$$r_{12} = \frac{-0.0795}{\sqrt{0.0163 \times 0.4382}} = -0.94.$$

6. Інтерполяція та екстраполяція з використанням емпіричної формули $\Delta = 0.63D + 0.74$. Для прикладу беремо два довільних значення змінної $X = D$. Для інтерполяції беремо значення, яке знаходяться всередині табуляції функції, але не брало участі у побудові емпіричної формули, наприклад, $x_{інт} = D = 3$ км, для екстраполяції – значення, яке знаходиться поза межами табуляції функції, наприклад, $x_{екст} = D = 10$ км. Результати інтерполяції та екстраполяції набувають значень $y_{інт} = \Delta = 2{,}6$ см та $y_{екст} = \Delta = 7{,}0$ см. Точність одержаних результатів визначають вагова матриця (35) $\underset{2\times2}{Q_F} = \underset{2\times2}{F} \cdot \underset{2\times2}{Q} \cdot \underset{2\times2}{F^T}$, де $\underset{2\times2}{F} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, $\underset{2\times2}{Q_F} = \begin{pmatrix} 0{,}146424 & 0{,}488079 \\ 0{,}488079 & 1{,}626929 \end{pmatrix}$ і кореляційна матриця (38) $\underset{2\times2}{M^2} = m^2 \cdot \underset{2\times2}{Q_F} = \begin{pmatrix} 0{,}1223 & 0{,}4077 \\ 0{,}4077 & 1{,}3589 \end{pmatrix}$. На головній діагоналі кореляційної матриці розташовані квадрати середніх квадратичних похибок $M_{інт}$ і $M_{екст}$ результатів інтерполяцій та екстраполяції. Зазначені похибки можна також виразити за формулою (40) $M_l = m\sqrt{Q_{ll}}$: $M_{інт} = \pm 0{,}4$ см, $M_{екст} = \pm 1{,}2$ см. Отже, результат інтерполяції $y_{інт} = \Delta = 2{,}6 \pm 0{,}4$ (см), результат екстраполяції $y_{екст} = \Delta = 7{,}0 \pm 1{,}2$ (см).

Зіставлення одержаних результатів із розв'язками завдання математичної статистики «Визначення тісноти і форми кореляційного зв'язку в системі двох випадкових величин» посвідчує наступне: 1) лінійна емпірична формула, побудована методом найменших квадратів, тотожна лінійному рівнянню регресії, яке визначене шляхом кореляційного аналізу заданих емпіричних даних; 2) кутовий коефіцієнт лінійної емпіричної формули c_1 дорівнює коефіцієнту регресії $\rho_{\Delta/D}$; 3) розбіжності абсолютних значень параметрів обох формул не перевищують значення похибок їх обчислення. Отже, одержані числові результати підтверджують сформульоване вище теоретичне обґрунтування тотожності завдань визначення параметрів емпіричних формул і побудови рівняння регресії.

4.2. Визначення оптимальної емпіричної формули

Завдання 2. Визначити оптимальну емпіричну формулу за сукупністю заданих рівноточних результатів експерименту $(x_i; y_i)$.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 2. З таблиці необхідно вибрати підряд n=8 результатів експерименту $(x_i; y_i)$, розпочинаючи з номера варіанта *N*.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано наступні пари значень величин $(x_i; y_i)$:

№ вимірів	x_i	y_i
1	273	32,6
2	283	33,7
3	288	34,8
4	293	36,5
5	313	44,6
6	333	55,2
7	353	65,9
8	373	78,3

З метою визначення оптимальної емпіричної формули, яка відповідає заданим n=8 результатам експерименту, виконаємо апроксимацію поліномів різної степені.

1. Апроксимація лінійної функції $Y = c_1 X + c_2$. Кількість невідомих параметрів лінійної емпіричної формули $k = 2$.

Сформувавши матрицю коефіцієнтів $\underset{8\times2}{A}$ та вільних членів $\underset{8\times1}{Y}$ рівнянь поправок (15) $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$, складаємо нормальне рівняння (17) $\underset{2\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times1}{Y} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 273 & 1 \\ 283 & 1 \\ 288 & 1 \\ 293 & 1 \\ 313 & 1 \\ 333 & 1 \\ 353 & 1 \\ 373 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 32.6 \\ 33.7 \\ 34.8 \\ 36.5 \\ 44.6 \\ 55.2 \\ 65.9 \\ 78.3 \end{pmatrix} = 0$$

З урахуванням добутків матриць нормальне рівняння перетворюється до вигляду (18) $\underset{2\times2}{N} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{2\times1}{L} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 796007 & 2509 \\ 2509 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 381.6 \end{pmatrix} = 0.$$

Беручи до уваги обернену матрицю $\underset{2\times2}{Q} = \underset{2\times2}{N^{-1}} = \begin{pmatrix} 0.000110 & 0.034382 \\ 0.034382 & 10.907941 \end{pmatrix}$, одержуємо розв'язок нормального рівняння

$$\underset{2\times1}{c} = \underset{2\times2}{Q} \cdot \underset{2\times1}{L} = \begin{pmatrix} 0.000110 & 0.034382 \\ 0.034382 & 10.907941 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 381.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.47 \\ -100 \end{pmatrix}.$$

Отже, лінійна емпірична формула має вигляд $Y = 0.47X - 100$ (див. рис. 2). З рівняння $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times2}{A} \cdot \underset{2\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$ виражаємо матрицю поправок $\underset{8\times1}{V}$ і з урахуванням значення $[v^2] = \underset{1\times8}{V^T} \cdot \underset{8\times1}{V} = 36.9113$ за формулою Бесселя обчислюємо середню квадратичну похибку апроксимації: $m = \sqrt{\dfrac{36.9113}{8-2}} = \pm 2.48$. Точність параметрів емпіричної формули c_1 і c_2 характеризують середні квадратичні похибки $M_{c_1} = m\sqrt{Q_{11}} = \pm 0.03$ і $M_{c_2} = m\sqrt{Q_{22}} = \pm 8$.

2. Апроксимація поліному $Y = c_1X + c_2X^2 + c_3$. Кількість невідомих параметрів емпіричної формули $k = 3$.

Матриця $\underset{8\times3}{A}$ коефіцієнтів рівнянь поправок (15) $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$ формується елементами $a_{ij} = \left(\dfrac{\partial v_i}{\partial c_j}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial y_i}{\partial c_j}\right)_0$ ($i = \overrightarrow{1,8}$, $j = \overrightarrow{1,3}$). Нормальне рівняння має вигляд $\underset{3\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{3\times8}{A^T} \cdot \underset{8\times1}{Y} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 74529 & 80089 & 82944 & 85849 & 97969 & 110889 & 124609 & 139129 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 273 & 74529 & 1 \\ 283 & 80089 & 1 \\ 288 & 82944 & 1 \\ 293 & 85849 & 1 \\ 313 & 97969 & 1 \\ 333 & 110889 & 1 \\ 353 & 124609 & 1 \\ 373 & 139129 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 273 & 283 & 288 & 293 & 313 & 333 & 353 & 373 \\ 74529 & 80089 & 82944 & 85849 & 97969 & 110889 & 124609 & 139129 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 32.6 \\ 33.7 \\ 34.8 \\ 36.5 \\ 44.6 \\ 55.2 \\ 65.9 \\ 78.3 \end{pmatrix} = 0$$

З урахуванням добутків матриць нормальне рівняння перетворюється до вигляду (18) $\underset{3\times3}{N} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{3\times1}{L} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 796007 & 255525661 & 2509 \\ 255525661 & 8299715450\,3 & 796007 \\ 2509 & 796007 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 381.6 \end{pmatrix} = 0.$$

За оберненою матрицею $\underset{3\times3}{Q} = \underset{3\times3}{N^{-1}} = \begin{pmatrix} 0.0680639 & -0.0001055 & -10.8535083 \\ -0.0001055 & 0.0000002 & 0.0167899 \\ -10.8535083 & 0.0167899 & 1733.442291 \end{pmatrix}$

виражаємо невідомі параметри c_1, c_2 і c_3 поліному $Y = c_1X + c_2X^2 + c_3$:

$$\underset{3\times1}{c} = \underset{3\times3}{Q} \cdot \underset{3\times1}{L} = \begin{pmatrix} 0.0680639 & -0.0001055 & -10.8535083 \\ -0.0001055 & 0.0000002 & 0.0167899 \\ -10.8535083 & 0.0167899 & 1733.442291 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 381.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.0 \\ 0.0023 \\ 139 \end{pmatrix}.$$

Отже, одержали емпіричну формулу $Y = -X + 0.0023X^2 + 139$ (див. рис. 3). З рівняння $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times3}{A} \cdot \underset{3\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$ виражаємо матрицю поправок $\underset{8\times1}{V}$ і з урахуванням значення $[v^2] = \underset{1\times8}{V^T} \cdot \underset{8\times1}{V} = 3.8056$ за формулою Бесселя обчислюємо середню квадратичну похибку апроксимації: $m = \sqrt{\frac{3.8056}{8-3}} = \pm 0.87$. За результатами апроксимації середні квадратичні похибки параметрів c_1, c_2 і c_3 емпіричної формули $Y = -X + 0.0023X^2 + 139$ набувають наступних значень: $M_{c_1} = m\sqrt{Q_{11}} = \pm 0.2$; $M_{c_2} = m\sqrt{Q_{22}} = \pm 0.0004$; $M_{c_3} = m\sqrt{Q_{33}} = \pm 36$.

3. Апроксимація поліному $Y = c_1X + c_2X^2 + c_3X^3 + c_4$. Кількість невідомих параметрів емпіричної формули $k = 4$.

Беручи до уваги правило $a_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial c_j}\right)_0 = \left(\frac{\partial y_i}{\partial c_j}\right)_0$ ($i = \overrightarrow{1,8}$, $j = \overrightarrow{1,4}$), формуємо матрицю $\underset{8\times4}{A}$ коефіцієнтів рівнянь поправок $\underset{8\times1}{V} = \underset{8\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{c} - \underset{8\times1}{Y}$:

$$\underset{8\times4}{A} = \begin{pmatrix} 273 & 74529 & 20346417 & 1 \\ 283 & 80089 & 22665187 & 1 \\ 288 & 82944 & 23887872 & 1 \\ 293 & 85849 & 25153757 & 1 \\ 313 & 97969 & 30664297 & 1 \\ 333 & 110889 & 36926037 & 1 \\ 353 & 124609 & 43986977 & 1 \\ 373 & 139129 & 51895117 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням добутків $\underset{4\times8}{A^T}\cdot\underset{8\times4}{A}=\underset{4\times4}{N}$ і $\underset{4\times8}{A^T}\cdot\underset{8\times1}{Y}=\underset{4\times1}{L}$ складаємо нормальне рівняння (18) $\underset{4\times4}{N}\cdot\underset{4\times1}{c}-\underset{4\times1}{L}=0$:

$$\begin{pmatrix} 796007 & 255525661 & 82997154503 & 2509 \\ 255525661 & 82997154503 & 2.72725\times10^{13} & 796007 \\ 82997154503 & 2.72725\times10^{13} & 9.06282\times10^{15} & 255525661 \\ 2509 & 796007 & 255525661 & 8 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 13544594406 \\ 381.6 \end{pmatrix}=0.$$

За оберненою матрицею $\underset{4\times4}{Q}=\underset{4\times4}{N^{-1}}$ одержуємо розв'язок рівняння

$$\underset{4\times1}{c}=\underset{4\times4}{Q}\cdot\underset{4\times1}{L}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20.34466 & -0.0632170 & 0.0000651 & -2169.301 \\ -0.0632170 & 0.0001966 & -0.0000002 & 6.735023 \\ 0.0000651 & -0.0000002 & 2\times10^{-10} & -0.0069283 \\ -2169.301 & 6.735023 & -0.0069283 & 231500.5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 123963.8 \\ 40744608.4 \\ 13544594406 \\ 381.6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 0.027 \\ -0.000025 \\ 983 \end{pmatrix}.$$

Емпірична формула, побудована апроксимацією кубічного поліному, має вигляд $Y=-9X+0.027X^2-0.000025X^3+983$ (див. рис. 4). З рівняння $\underset{8\times1}{V}=\underset{8\times4}{A}\cdot\underset{4\times1}{c}-\underset{8\times1}{Y}$ виражаємо матрицю поправок $\underset{8\times1}{V}$, обчислюємо значення $[v^2]=\underset{1\times8}{V^T}\cdot\underset{8\times1}{V}=$ 0,7033 і середню квадратичну похибку апроксимації $m=\sqrt{\frac{0.7033}{8-4}}=\pm0.42$. Точність параметрів c_1, c_2, c_3 і c_4 одержаної емпіричної формули виражають середні квадратичні похибки $M_{c_1}=\pm2$, $M_{c_2}=\pm0.006$, $M_{c_3}=\pm0.000006$, $M_{c_4}=\pm201$.

Висновок. З точки зору точності результати розв'язків показали значення середніх квадратичних похибок апроксимації ±2.48, ±0.87 і ±0.42 функцій відповідно $Y=c_1X+c_2$, $Y=c_1X+c_2X^2+c_3$ і $Y=c_1X+c_2X^2+c_3X^3+c_4$. Порівняння похибок показує, що найвища точність апроксимації досягнута з використанням поліному $Y=c_1X+c_2X^2+c_3X^3+c_4$. Отже, відповідну цій функції емпіричну формулу $Y=-9X+0.027X^2-0.000025X^3+983$ слід визнати найбільш оптимальною для вираження залежності у межах заданих результатів експерименту. Такий висновок підтверджує порівняння графічних інтерпретацій результатів апроксимації на рис. 2, 3 і 4: на останньому рисунку крива емпіричної формули найкраще описує точкову діаграму табличної функції.

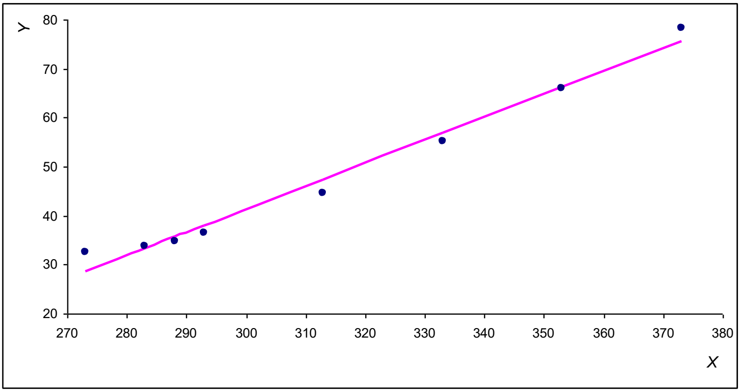

Рис. 2. Результати апроксимації функції $Y = c_1 X + c_2$

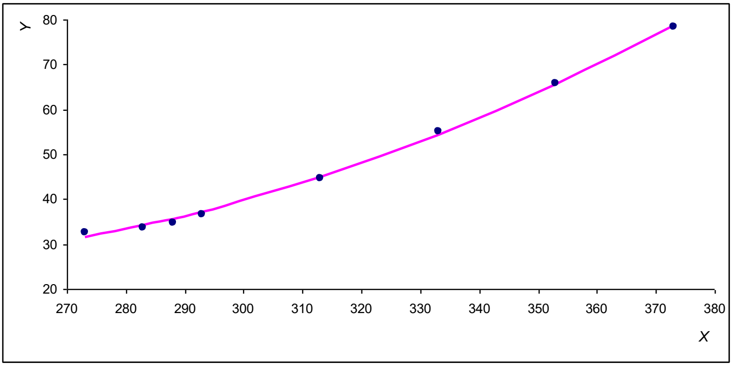

Рис. 3. Результати апроксимації функції $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3$

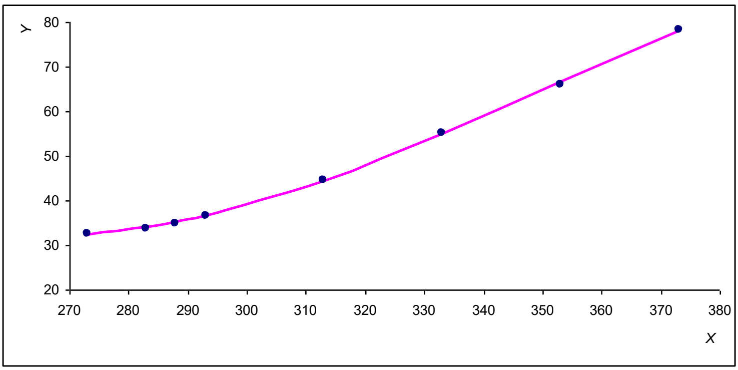

Рис. 4. Результати апроксимації функції $Y = c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4$

Питання для самоконтролю

1. Що таке таблична функція?
2. Що таке емпірична формула?
3. Який зміст задачі побудови емпіричних формул?
4. Який зміст задачі інтерполяції?
5. Який зміст задачі екстраполяції?
6. Як пов'язані лінійна емпірична формула і рівняння регресії?
7. Якого виду залежність здатна передавати емпірична формула?
8. Черговість розв'язання задачі апроксимації функцій за результатами вимірів.
9. Як визначити невідомі параметри емпіричної формули?
10. Як оцінити точність результатів апроксимації функції?
11. Що таке середня квадратична похибка апроксимації?
12. Який критерій визначення оптимальної емпіричної формули?
13. Як оцінити точність визначення параметрів емпіричної формули?
14. Як оцінити точність результатів інтерполяції та екстраполяції?

Література

1. Бугай П. Т. Теорія помилок і спосіб найменших квадратів : підручник. Львів : ЛДУ, 1960. 366 с.
2. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Метод найменших квадратів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2005. 236 с.
3. Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник. Львів : Растр-7, 2007. 408 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Вхідні дані для виконання завдання 1

№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$	№	$D_{(км)}$	$\Delta_{(см)}$
1	8.7	7	16	8.4	7	31	6.3	5	46	3.8	3
2	5.4	3	17	2.7	3	32	4.7	4	47	7.2	6
3	3.7	3	18	3.2	3	33	3.5	3	48	5.6	5
4	6.8	4	19	4.9	4	34	5.6	3	49	5.1	4
5	7.7	5	20	4.6	3	35	7.6	4	50	2.7	2
6	6.0	4	21	3.1	4	36	3.9	4	51	8.1	6
7	3.2	4	22	2.7	2	37	4.2	3	52	5.6	4
8	2.5	3	23	4.1	3	38	6.6	5	53	3.8	3
9	3.3	3	24	3.7	2	39	3.7	3	54	6.8	5
10	6.5	4	25	3.9	3	40	2.0	2	55	7.7	6
11	5.1	4	26	7.4	6	41	4.1	3	56	6.1	5
12	5.8	4	27	5.7	6	42	8.3	7	57	3.7	4
13	7.9	6	28	5.0	4	43	4.0	2	58	2.7	3
14	6.1	4	29	8.9	7	44	7.8	6	59	3.1	3
15	7.2	6	30	4.9	5	45	6.5	5	60	6.8	5

Додаток 2

Вхідні дані для виконання завдання 2

№	x_i	y_i	№	x_i	y_i	№	x_i	y_i	№	x_i	y_i
1	271	27,4	16	373	74,9	31	365	72,3	46	274	29,9
2	280	33,1	17	279	30,3	32	378	76,8	47	284	33,5
3	286	31,8	18	286	36,7	33	273	32,0	48	289	35,0
4	291	37,2	19	298	40,6	34	281	32,7	49	295	36,9
5	311	40,5	20	307	42,4	35	288	35,0	50	316	45,1
6	325	52,2	21	325	50,1	36	292	35,9	51	334	56,3
7	356	64,9	22	343	59,0	37	314	44,9	52	355	66,1
8	375	75,0	23	360	67,2	38	335	57,1	53	376	77,7
9	273	28,0	24	377	71,8	39	363	70,9	54	275	30,0
10	288	35,1	25	272	25,6	40	371	76,2	55	280	32,3
11	303	41,9	26	284	34,0	41	277	29,6	56	290	34,8
12	322	50,8	27	295	37,5	42	284	35,5	57	302	40,1
13	333	56,2	28	309	45,1	43	296	38,9	58	315	44,9
14	353	65,7	29	338	57,2	44	305	41,3	59	322	51,2
15	362	69,0	30	352	65,5	45	323	50,1	60	359	68,0