

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Каштан С. С., к.т.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, a.ya.bomba@nuwm.edu.ua, s.s.kashtan@nuwm.edu.ua)

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ КРИВИХ РОЗДІЛУ СИЛЬНО КОНТРАСТНИХ
НЕОДНОРІДНО АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ МЕТОДАМИ
КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ**

При моделюванні процесів масопереносу, наприклад фільтрації, в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від відповідних досліджуваних частин деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв'язування задачі. На основі числових методів конформних відображень нами запропоновано підхід до ідентифікації такої кривої розділу середовищ. У цій роботі розглядається стаціонарний процес руху рідини в неоднорідно анізотропному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема шуканою кривою теоретичного водопору та горизонтальною віссю, на якій відома локальна швидкість руху. Побудований алгоритм модифіковано для розв'язування нелінійних обернених крайових задач на квазіконформні відображення криволінійних многокутних областей, обмежених невизначеними лініями течії та екіпотенціальними лініями. Запропонований підхід, окрім ідентифікації кривих розділу сильно проникних шарів, забезпечує можливість одночасно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату, будувати в заданій області гідродинамічну сітку руху та розрахувати поле швидкості фільтрації.

Ключові слова: квазіконформні відображення; обернені задачі; неоднорідно анізотропне середовище; моделювання; ідентифікація; числові методи; аналіз даних.

Вступ. При моделюванні, наприклад, процесів масопереносу

(фільтрації) в пористих середовищах можливі випадки існування сильно проникних шарів, які відокремлюються від досліджуваної його частини деякими кривими, які потрібно знайти (ідентифікувати) в процесі розв'язування задачі. При побудові математичної моделі відповідного фізичного процесу вважатимемо сильно проникне середовище «ідеально (теоретично нескінченно) проникним». У цьому випадку шукану криву можна вважати еквіпотенціальною лінією.

У цій роботі йдеться про застосування методу квазіконформних відображень до ідентифікації кривої розділу пористих неоднорідно анізотропних середовищ.

Аналіз останніх досліджень. Ефективним методом математичного моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями є розроблений нами у попередніх роботах [1–8] підхід на основі комплексного аналізу з використанням числових методів квазіконформних відображень. В роботах [5–8] побудовані алгоритми чисельного обернення розв'язків нелінійних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення в одно- та багатозв'язних областях, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок і т. ін. в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах. Зокрема, у роботах [6–8] розв'язані задачі моделювання відповідних процесів у середовищах, схильних до деформацій, де компоненти тензора провідності (зокрема фільтрації) приймалися залежними не лише від координат біжучої точки області, але й від шуканих функцій течії та потенціалу. Запропонований підхід дозволяє паралельно знаходити характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату і поле швидкостей та побудувати динамічну сітку. Так, у роботі [9] цей підхід застосовано при ідентифікації кривих розділу сильно контрастних однорідних ізотропних середовищ.

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарний процес руху рідини в неоднорідно анізотропному горизонтальному нескінченно великих розмірів пласті – ґрунтовому масиві, що обмежений нескінченними ділянками кривих, зокрема – нижньою кривою теоретичного водоупору $y = -a(x)$ ($a(x) \geq a_0 > 0$, $a(x)$ – неперервно диференційована функція) та віссю Ox – горизонтом (див. рис. 1, a), на якому відома локальна швидкість руху $v(x)$.

Задачу на ідентифікацію (відшукування) функції теоретичного

водоупору $y = -a(x)$ та відшукування комплексно спряжених функцій квазіпотенціалу $\varphi = \varphi(x, y)$ і течії $\psi = \psi(x, y)$ у розглядуваній фізичній області $G_z (z = x + iy)$ – внутрішності $\partial G_z = AOB$ (площині поперечного перерізу ґрунтового неоднорідного анізотропного пласта з тензором провідності $\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$) – однозв'язній криволінійній смугі, обмеженій лінією горизонту $AOB = \{z : y = 0, -\infty < x < +\infty\}$ та невідомою лінією теоретичного водоупору $BA = \{z : y = -a(x), -\infty < x < +\infty\}$, запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \kappa_{11}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\
 \kappa_{21}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22}(x, y, \varphi, \psi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x},
 \end{aligned}
 \quad (x, y) \in G_z, \quad (1)$$

$$\varphi|_{y=0} = 0, \quad \varphi|_{y=-a(x)} = 1, \quad \frac{d\varphi}{dn} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = v(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

де $(\kappa_{rs})_{r,s=1,2} = \kappa_{rs}(x, y, \varphi, \psi)$ – обмежені неперервно-диференційовані в області G_z функції, що характеризують провідність середовища, його анізотропію та схильність до деформацій, n – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі області ∂G_z , що, у цьому випадку, співпадає з напрямом осі Oy , $v(x)$ – локальна швидкість на горизонті,

$$\text{причому } \psi(x, 0) = \int_0^x v(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Як відомо [5; 10], ця задача зводиться до квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ фізичної області G_z (з невідомою ділянкою $y = -a(x)$), яка ідентифікується на основі аналізу даних, отриманих в процесі розв'язання задачі) на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega : 0 < \varphi < 1, -\infty < \psi < +\infty\}$ (див. рис. 1, б).

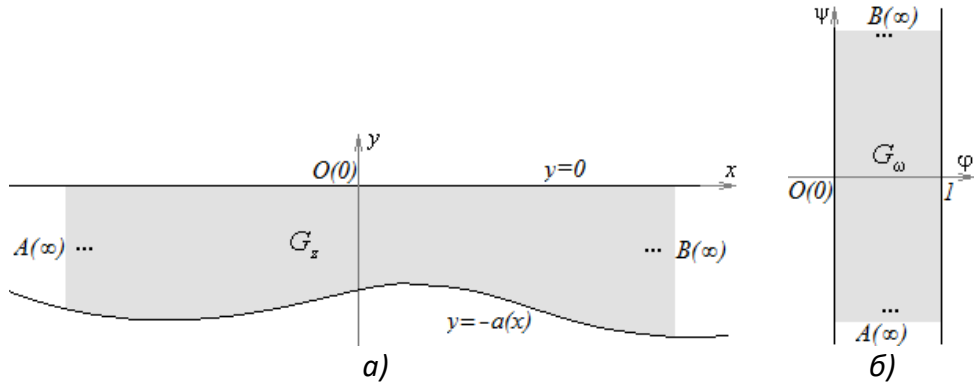


Рис. 1. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а) та області комплексного квазіпотенціалу (б)

Як і в [5–8], обернена крайова задача на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z з невідомою функцією $y = -a(x)$ запишеться у вигляді:

$$\kappa_{11} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \kappa_{22} \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3)$$

$$y(0, \psi) = 0, \quad y(1, \psi) = -a(x(1, \psi)), \quad \frac{\partial x(0, \psi)}{\partial \psi} = -J(0, \psi) \nu(x(0, \psi)), \quad (4)$$

$$-\infty < \psi < +\infty,$$

де $J(\varphi, \psi) = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ – якобіан відображення.

Оскільки функції $x = x(\varphi, \psi)$ та $y = y(\varphi, \psi)$ задовольняють узагальненій умові Коші – Рімана (3), то кожна із них є квазігармонічною в області G_ω , що дозволяє звести цю задачу до розв’язування в G_ω рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left((\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa_{12} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{21} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left((\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\kappa_{21} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_{12} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

при заданих крайових умовах (4) та узагальнених умовах Коші – Рімана (3) на шуканій границі ∂G_ω області G_ω , які в деяких випадках зручно замінити на умови квазіортогональності ліній течії та екіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області. Зауважимо, що система рівнянь (5) є системою еліптичного типу при виконанні умов

$(\kappa_{12} + \kappa_{21})^2 - 4\kappa_{11}\kappa_{22} < 0$, $\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21} > 0$. Крім цього, вимагатимемо «однорідно-ізотропного» виродження компонент тензора провідності $\kappa_{ij}(x, y, \varphi, \psi)$ вздовж граничних еквіпотенціалей, а саме, щоб при $y=0$ та при $y=-a(x)$ виконувалися умови: $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$.

У випадку, якщо область G_z обмежується ще й двома лініями течії, то з метою забезпечення гладкості відповідного квазіконформного відображення вважатимемо, що дотичні до граничних ліній течії повинні настільки відхилитись від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, наскільки анізотропія відхиляє вектор швидкості від цих нормалей. Врахувавши при цьому, що косинус кута $\tilde{\Theta}$ відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнту потенціалу $grad \varphi$ у довільній точці $z = x + iy$ обчислюється за формулою

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{\kappa_{11} \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}}{\sqrt{\frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}} \sqrt{\left(\kappa_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\kappa_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}},$$

приходимо до умов квазіортогональності (відповідних аналогів умов ортогональності однорідних ізотропних середовищ) в околах ділянок границі області G_z у вигляді:

– для лінії горизонту AOB

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial y^2}{\partial \varphi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_1},$$

де $\cos \Theta_1 = \frac{\kappa_{22}}{\sqrt{\kappa_{12}^2 + \kappa_{22}^2}}$;

– для лінії теоретичного водопору BA

$$-\frac{\partial a(x)}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial a(x)}{\partial x} \sqrt{\frac{\partial x^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial y^2}{\partial \varphi}} \sqrt{1 - \cos^2 \Theta_3},$$

де $\cos \Theta_3 = \frac{\kappa_{11} \frac{\partial a(x)^2}{\partial x} + (\kappa_{12} + \kappa_{21}) \frac{\partial a(x)}{\partial x} + \kappa_{22}}{\sqrt{\frac{\partial a(x)^2}{\partial x} + 1} \sqrt{\left(\kappa_{11} \frac{\partial a(x)}{\partial x} + \kappa_{12}\right)^2 + \left(\kappa_{21} \frac{\partial a(x)}{\partial x} + \kappa_{22}\right)^2}}$.

Таким чином, маємо нелінійну задачу, де, на відміну від ізотропних середовищ, у сітковій області G_z^γ фігурують «малі паралелограми» (замість «малих прямокутників»).

Різницєва задача. Для числової побудови відображення області G_ω на фізичну область G_z запишемо різницєвий аналог задачі (5), (4) у рівномірній сітковій області (квазіортогональній сітці) $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:

$$\varphi_i = \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{-\infty, +\infty}; \quad \Delta\varphi = \frac{1}{m+1}, \quad \Delta\psi = \Delta\varphi,$$

$m, n \in \mathbb{N}$, де $\Delta\varphi, \Delta\psi$ – кроки сітки відповідно по φ та ψ , рівні між собою (квазіконформний інваріант [5] $\gamma = 1$).

З метою точнішого врахування геометрії області G_z для апроксимації рівнянь (5) використаємо шаблон «ящик» – дев'ятиточкову різницєву симетричну схему з ваговими коефіцієнтами [11]. Тоді рівняння (5) для функцій $x(\varphi, \psi)$ та $y(\varphi, \psi)$ апроксимуємо такими різницєвими рівняннями:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma(x_{i+1,j+1} - 2x_{i,j+1} + x_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + \\ & + \sigma(x_{i+1,j-1} - 2x_{i,j-1} + x_{i-1,j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j})x_{i+1,j} + b_{i+1,j}x_{i+1,j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(b_{i,j+1}x_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j})x_{i,j} + b_{i,j}x_{i,j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i-1,j+1}x_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j})x_{i-1,j} + b_{i-1,j}x_{i-1,j-1}) + \\ & + (c_{i+1,j}(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1}) - c_{i-1,j}(x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1})) - \\ & - d_{i,j+1}(x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1}) + d_{i,j-1}(x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}) \Big) / 4 = 0, \\ & \sigma(y_{i+1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1}) + (1-2\sigma)(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) + \\ & + \sigma(y_{i+1,j-1} - 2y_{i,j-1} + y_{i-1,j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i+1,j+1}y_{i+1,j+1} - (b_{i+1,j+1} + b_{i+1,j})y_{i+1,j} + b_{i+1,j}y_{i+1,j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(b_{i,j+1}y_{i,j+1} - (b_{i,j+1} + b_{i,j})y_{i,j} + b_{i,j}y_{i,j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i-1,j+1}y_{i-1,j+1} - (b_{i-1,j+1} + b_{i-1,j})y_{i-1,j} + b_{i-1,j}y_{i-1,j-1}) + \\ & + (-d_{i+1,j}(y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j-1}) + d_{i-1,j}(y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1})) + \\ & + c_{i,j+1}(y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}) - c_{i,j-1}(y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}) \Big) / 4 = 0, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{-\infty, +\infty},$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $b_{i,j} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{21}\kappa_{12}$, $c_{i,j} = \kappa_{12}$,

$d_{i,j} = \kappa_{21}$, $\sigma \in [0; 0.5]$ – ваговий коефіцієнт, від вибору якого залежить стійкість, точність та швидкість збіжності різницевої схеми [11].

Крайові умови (4) апроксимуємо точково-різницевими рівняннями

$$y_{0,j} = 0, \quad y_{m+1,j} = -a(x_{m+1,j}), \quad x_{0,j+1} - x_{0,j-1} = -\frac{J_{0,j}}{\Delta\varphi} v_{0,j}, \quad (7)$$

$$j = \overline{-\infty, +\infty},$$

де $J_{0,j} = (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})$.

Узагальнені умови Коші – Рімана (3) на шуканій границі $y = -a(x)$ області G_ω апроксимуємо у вигляді (див., напр., [5; 11])

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j}) - \kappa_{12}(x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j}) &= x_{m+1,j} - x_{m,j}, \\ \kappa_{21}(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j}) - \kappa_{22}(x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j}) &= y_{m+1,j} - y_{m,j}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$j = \overline{-\infty, +\infty}.$$

Тут, у різницевій задачі елементи тензора провідності $(\kappa_{rs})_{r,s=1,2} = \kappa_{rs}(x_{i,j}, y_{i,j}, \varphi_i, \psi_j)$.

Алгоритм числового розв'язання різницевої задачі полягає у поетапній параметризації граничних і внутрішніх вузлів сіткової області G_z^γ , передбачає використання ідей методів блочної ітерації [12] і Зейделя та будується аналогічно до [5–8]. А саме, задавши початкове наближення координат вузлів обмеженої частини смуги, проводимо з допомогою одного кроку ітераційного методу Зейделя уточнення координат внутрішніх вузлів за формулами, отриманими шляхом розв'язання системи (6) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Шляхом розв'язання системи рівнянь, сформованої із (7), (8), визначаємо значення координат граничних вузлів на горизонті та шуканій кривій теоретичного водоупору. Далі знаходимо розрахункову величину локальної швидкості на горизонті – у граничних вузлах сітки при $i = 0$ – напр., за формулою [5]

$$v_{0,j}^{(k+1)} = \frac{2\Delta\psi}{J_{0,j}} \sqrt{(x_{1,j}^{(k+1)} - x_{0,j}^{(k+1)})^2 + (y_{1,j}^{(k+1)} - y_{0,j}^{(k+1)})^2}.$$

Залежно від отриманої нев'язки вибираємо наступне наближення координат внутрішніх і граничних вузлів та величину локальної

швидкості на горизонті, і т.д. Серед умов закінчення ітераційного процесу може бути нерівність $\|v_{0,j}^{(k+1)} - v_{0,j}\| < \varepsilon$.

Запропонована методика, окрім ідентифікації кривих, дозволяє одночасно знаходити характеристичну функцію течії, комплексний квазіпотенціал, повну витрату, будувати в заданій області динамічну сітку та розрахувати поле швидкості фільтрації, а також розраховувати обчислювальні (ітераційні) характеристики та досліджувати і аналізувати процеси їх збіжності і стійкості.

З метою перевірки алгоритму на точність, числові розрахунки проведено для однорідного горизонтального пласта ($\kappa_{11} = \kappa_{22} = 1$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$) – ґрунтового масиву, що обмежений ділянками кривих – шуканою кривою теоретичного водоупору та горизонтальною віссю, на якій задана локальна швидкість руху

$$v(x) = -\frac{800}{\pi(x^2 + 100)} \quad (\text{див. рис. 2}).$$

В результаті проведених обчислень розраховано значення координат вузлів на нижній кривій теоретичного водоупору $y = -a(x)$, які з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ співпали з відповідними результатами, поданими у таблиці 1 роботи [9] (як і в [9], відповідну криву одержано шляхом побудови інтерполяційного многочлена Лагранжа або многочлена середньоквадратичного наближення).

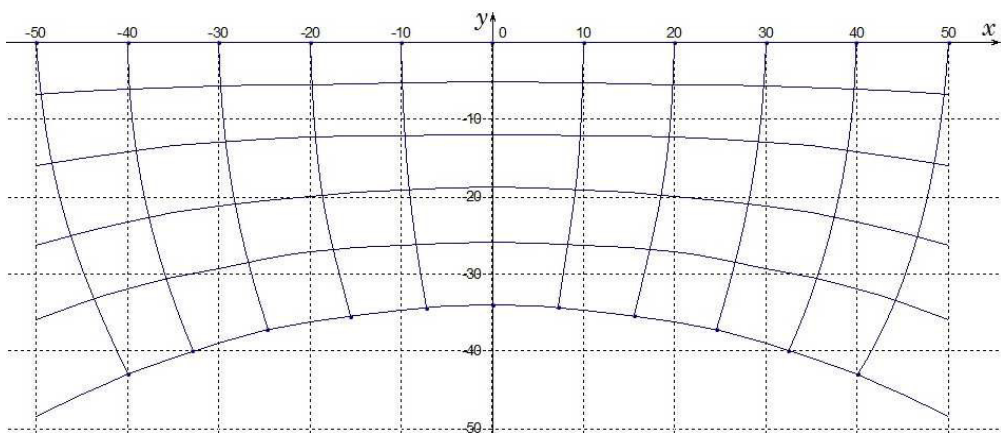


Рис. 2. Розрахункова гідродинамічна сітка та ідентифіковані вузли на нижній кривій теоретичного водоупору

Висновки. Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє розраховувати координати вузлів гідродинамічної сітки, обчислювати фільтраційні витрати, величини швидкості руху та інші параметри досліджуваних процесів, а також ідентифікувати криві розділу сильно проникних шарів. Розв'язок задачі отримується шляхом поетапного фіксування характеристик середовища та процесу і врахування механізму їх взаємовпливу. Результати проведених нами у цій роботі досліджень дозволяють враховувати явища зворотного впливу, що призводить до необхідності перегляду методик, пов'язаних із розрахунками характеристик середовища та процесу, з метою уточнення останніх (при проектуванні дренажних споруд, оптимізації теплосистем, з ідентифікацією параметрів і керуванням процесами у нафтогазових пластах).

У перспективі – моделювання та прогнозування роботи слабопровідних (близьких до сланцевих) пластів в умовах гідророзриву, а також до побудови ліній розділу різнокольорових рідин при прогнозуванні квазіідеальної течії у водоймах, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями.

1. Бомба А. Я., Бойчура М. В., Мічута О. Р. Ідентифікація параметрів структури ґрунтових криволінійних масивів числовими методами комплексного аналізу. *Геофізичний журнал*. 2022. № 2. Том 44. С. 53–67. 2. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Ідентифікація структури ґрунтових масивів числовими методами квазіконформних відображень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Вип. 57 (6). С. 94–105. 3. Бомба А. Я., Бойчура М. В., Сидорчук Б. П. Узагальнення числових методів квазіконформних відображень для задач геології. *Східно-Європейський журнал передових технологій*. 2020. № 4 (107). Том 5. С. 45–54. 4. Бомба А. Я., Бойчура М. В. Методи комплексного аналізу в задачах ідентифікації. Рівне : НУВГП, 2020. 188 с. 5. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. Методи комплексного аналізу. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с. 6. Bomba A. Y., Kashtan S. S. On One Method for Constructing a Dynamical Mesh of Nonlinear Quasiperfect Processes in Deformable Anisotropic Media. *Journal of Applied Computer Science*. 2005. Vol. 12, № 2. P. 7–21. 7. Каштан С. С. Про моделювання поля швидкості фільтрації за умов взаємовпливу градієнта потенціалу і характеристик анізотропного середовища. *Волинський математичний вісник*. 2002. Вип. 9. С. 32–40. 8. Бомба А. Я., Каштан С. С. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах. *Вісник Київського університету. Сер. Фізико-математичні науки*. 2001. № 4. С. 182–195. 9. Бомба А. Я., Каштан С. С. Ідентифікація кривих розділу сильно контрастних середовищ методами

комплексного аналізу. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ».* Сер. Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2023. № 1. С. 17–22. **10.** Положий Г. Н. Численное решения двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Киев : Изд-во КГУ, 1962. 161 с. **11.** Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1977. 656 с. **12.** Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва : Мир, 1975. 558 с.

REFERENCES:

1. Bomba A. Ya., Boichura M. V., Michuta O. R. Identyfikatsiia parametriv struktury gruntovykh kryvoliniinykh masyviv chyslovymy metodamy kompleksnoho analizu. *Heofizychnyi zhurnal*. 2022. № 2. Tom 44. S. 53–67. **2.** Bomba A. Ya., Boichura M. V. Identyfikatsiia struktury gruntovykh masyviv chyslovymy metodamy kvazikonformnykh vidobrazhen. *Kibernetyka ta systemnyi analiz*. 2021. Vyp. 57 (6). S. 94–105. **3.** Bomba A. Ya., Boichura M. V., Sydorчук B. P. Uzahalnennia chyslovykh metodiv kvazikonformnykh vidobrazhen dlia zadach heolohii. *Skhidno-Yevropeyskyi zhurnal peredovykh tekhnolohii*. 2020. № 4 (107). Tom 5. S. 45–54. **4.** Bomba A. Ya., Boichura M. V. Metody kompleksnoho analizu v zadachakh identyfikatsii. Rivne : NUVHP, 2020. 188 s. **5.** Bomba A. Ya., Kashtan S. S., Pryhornytskyi D. O., Yaroshchak S. V. Metody kompleksnoho analizu. Rivne : NUVHP, 2013. 415 s. **6.** Bomba A. Y., Kashtan S. S. On One Method for Constructing a Dynamical Mesh of Nonlinear Quasiperfect Processes in Deformable Anisotropic Media. *Journal of Applied Computer Science*. 2005. Vol. 12, № 2. P. 7–21. **7.** Kashtan S. S. Pro modeliuvannia polia shvydkosti filtratsii za umov vzaiemovplyvu hradiienta potentsialu i kharakterystyk anizotropnoho seredovyshcha. *Volynskyi matematychnyi visnyk*. 2002. Vyp. 9. С. 32–40. **8.** Bomba A. Ya., Kashtan S. S. Neliniini obernennia kraiovykh zadach na kvazikonformni vidobrazhennia v anizotropnykh seredovyshchakh. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Ser. Fyzyko-matematychni nauky*. 2001. № 4. S. 182–195. **9.** Bomba A. Ya., Kashtan S. S. Identyfikatsiia kryvykh rozdilil sylno kontrastnykh seredovyshch metodamy kompleksnoho analizu. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI».* Ser. Matematychnе моделювання в техніці та технологіях. 2023. № 1. С. 17–22. **10.** Polozhyi H. N. Chislennoe resheniia dvumernykh i trekhmernykh kraevykh zadach matematicheskoi fiziki i funktsii diskretnoho arhumenta. Kyev : Izd-vo KHU, 1962. 161 s. **11.** Samarskyi A. A. Teoryia raznostnykh skhem. Moskva : Nauka, 1977. 656 s. **12.** Orteha D., Reinboldt V. Iteratsionnye metody resheniia nelineinykh sistem uravnenii so mnohimi neizvestnyimi. Moskva : Mir, 1975. 558 s.

Bomba A. Y., Doctor of Engineering, Professor, Kashtan S. S., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

IDENTIFICATION OF SEPARATION CURVES OF STRONGLY CONTRAST HETEROGENEOUS ANISOTROPIC ENVIRONMENTS BY METHODS OF COMPLEX ANALYSIS

When modelling mass transfer processes (for example, filtration) in porous environments, there may be cases of the existence of highly permeable layers, which are separated from the corresponding studied parts by some curves that must be found (identified) in the process of solving the problem. On the basis of numerical methods of conformal mappings, we have proposed an approach to the identification of such a dividing curve of environments. This work considers the stationary process of fluid movement in a heterogeneously anisotropic horizontal layer of infinitely large dimensions – a soil massif, which is limited by infinite sections of curves, in particular – the desired curve of theoretical water resistance and the horizontal axis, on that the known local speed of movement. The constructed algorithm is modified for solving nonlinear inverse boundary value problems on quasi-conformal mappings of curvilinear polygonal areas bounded by uncertain flow lines and equipotential lines. The solution of the boundary value problem is obtained by stage-by-stage fixing the characteristics of the environment and the process and taking into account the mechanism of their mutual influence.

The proposed approach, in addition to the identification of interface curves of strongly permeable layers, provides an opportunity to simultaneously find the characteristic flow function, quasi-complex potential, total flow rate, build a hydrodynamic movement grid and the filtration velocity field in the given areas, as well as calculate iterative characteristics and investigate and analyze the processes of their convergence and stability. The results of the research carried out by us in this work allow us to take into account the phenomena of reverse influence, which leads to the need to revise the methods associated with the calculations of the characteristics of the environment and the process, in order to clarify the latter (when designing drying/humidifying drainage structures, optimizing thermal systems, with the identification of

parameters and management of processes in oil and gas reservoirs). Also, it is possible to model and predict the operation of weakly conductive (close to shale) formations under hydraulic fracturing conditions, to construct dividing lines of multi-colored liquids when predicting a quasi-ideal flow in water bodies limited by flow lines and equipotential lines.

***Keywords:* quasiconformal mappings; inverse problems; heterogeneous anisotropic environment; modelling; identification; numerical methods; data analysis.**
