

**Серілко Л. С., к.т.н., доцент** (l.s.serilko@nuwm.edu.ua), **Сасюк З. К., к.с.-г.н., доцент** (z.k.sasiuk@nuwm.edu.ua), **Серілко Д. Л., к.т.н., доцент** (d.l.serilko@nuwm.edu.ua) (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Часов Д. П., к.т.н., доцент** (Дніпровський державний технічний університет)

### **ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ СИПКОГО МАТЕРІАЛУ НА КРИВОЛІНІЙНУ ПОВЕРХНЮ**

В цій роботі проведено дослідження розподілу тиску сипкого матеріалу у циліндричному горизонтальному жолобі. Проблема розподілу тиску сипкого середовища, яке знаходиться в ємності, є актуальною. Її розробка та експериментальне підтвердження потребують проведення глибоких теоретичних і експериментальних досліджень. Авторами побудовано математичну модель із врахуванням форми поперечного перерізу ємнісної конструкції, осьового та бокового тисків, насипної щільності матеріалу та коефіцієнта тертя. Прийнято, що величина бокового тиску прямо пропорційна величині осьового тиску стінок жолоба. Розроблена математична модель має вигляд лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку. Передбачено, що така модель здатна описувати поведінку широкого класу сипучих матеріалів в ємнісних конструкціях і може використовуватися при проектуванні транспортних систем у промисловості та сільському господарстві.

**Ключові слова:** тиск сипкого матеріалу; сипуче середовище; математична модель; диференціальне рівняння; конвеєри.

**Вступ.** В багатьох сферах сучасної промисловості та сільського господарства широкого використання набули сипкі матеріали. Їх добування, транспортування та переробка здійснюються низкою різноманітних конструкцій, машин та механізмів. Тому надійна і довговічна робота таких механізмів є важливим пріоритетом будь-якого підприємства.

Поведінка сипкого середовища в різних практичних умовах має базові відмінності і на сьогоднішній день не існує єдиної теоретичної

концепції в цьому питанні. Науковцями та практиками розроблено велику кількість теоретичних моделей сипких матеріалів, однак вони не завжди є узгодженими між собою. Через використання застарілих підходів при проектуванні машинобудівних та будівельних ємнісних конструкцій, невірне визначення навантаження від сипучого матеріалу на елементи конструкції, відбуваються різноманітні аварійні ситуації в конвеєрах, жолобах, транспортерах та швидке зношування їх складових елементів.

**Аналіз існуючих досліджень.** При визначенні швидкості транспортування сипких матеріалів виникає питання розподілу тиску по криволінійних поверхнях. Найбільш широке застосування для визначення тиску сипкого середовища на стінки вертикального бункера циліндричної форми має формула Янсена [1].

$$P_B = \frac{\rho \cdot g \cdot S}{f \cdot L} \left[ 1 - e^{-\frac{C \cdot L \cdot x}{S}} \right]; \quad P = \frac{\rho \cdot g \cdot S}{C \cdot L} \left[ 1 - e^{-\frac{C \cdot L \cdot x}{S}} \right],$$

де  $P$  – осьовий тиск сипкого матеріалу всередині труби на глибині  $x$ , Па;  $P_B$  – боковий тиск сипкого матеріалу всередині труби на глибині  $x$ , Па;  $\rho$  – щільність сипкого матеріалу, кг/м<sup>3</sup>;  $g$  – прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;  $S$  – площа поперечного перерізу ємності, м<sup>2</sup>;  $L$  – периметр поперечного перерізу ємності, м;  $C$  – безрозмірний коефіцієнт пропорційності.

Незважаючи на те, що вона була запропонована ще у 1895 році, її і сьогодні використовують в різних стандартах [2; 3]. Різноманітні варіанти використання цієї формули наведено в дослідженнях Баннікова Д.О. [4; 5; 6]. При цьому вважається постійною залежність між боковим та осьовим тисками, яка характеризується коефіцієнтом бокового тиску. В таблиці наведено залежності коефіцієнта бокового тиску [7].

Таблиця

Визначення коефіцієнта бокового тиску сипкої речовини

Автор формули	Формула	Значення коефіцієнту $K$ при $\psi$		
		15°	25°	35°
В. Ренкін	$K = \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi}$	0,59	0,41	0,27
М. Жакі	$K = 1 - \sin \psi$	0,74	0,58	0,43
Дж. Біарез	$K = \frac{1 - \sin \psi}{\cos \psi}$	0,77	0,64	0,52
Г.І. Покровський	$K = 1 - 0,74 \tan \psi$	0,80	0,66	0,48

Л.В. Гячев	$K = \frac{1,5}{2 - 1,75 \tan \psi}$	0,61	0,53	0,47
------------	--------------------------------------	------	------	------

В роботі [8] наведено результати чисельного дослідження тиску сипкого матеріалу на дно та стінки циліндра методом дискретних елементів у тривимірній системі координат. Встановлено, що розподіл тиску на стінки і дно циліндра залежить не тільки від фізико-механічних властивостей матеріалу, але також і від процесу наповнення циліндра до глибини, яка не перевищує чотирьох діаметрів циліндра. При цьому розподіл напруг практично підтверджує теорію Янсена.

Модель Янсена розвинута в роботах [9; 10], де висунуто припущення, що радіальна напруга пропорційна вертикальній тільки на осі симетрії.

В роботі [11] наведено результати експериментальної перевірки формули Янсена. В якості сипкого матеріалу використовувалися скляні кульки діаметром 3 мм, які розміщувалися в циліндрі діаметром  $D=0,1$  м і висотою  $H=0,44$  м. За допомогою електронної ваги визначали тиск сипкого матеріалу на рухоме дно. Результати експериментальних досліджень були перевірені за допомогою методу моделювання (Discrete Element Modelling) [12–15].

**Розробка моделі.** Розглянемо сипкий матеріал, який знаходиться в жолобі довжиною  $l$ , поперечний переріз якого, в загальному випадку, задається рівнянням  $y = f(x)$  (рис. 1).

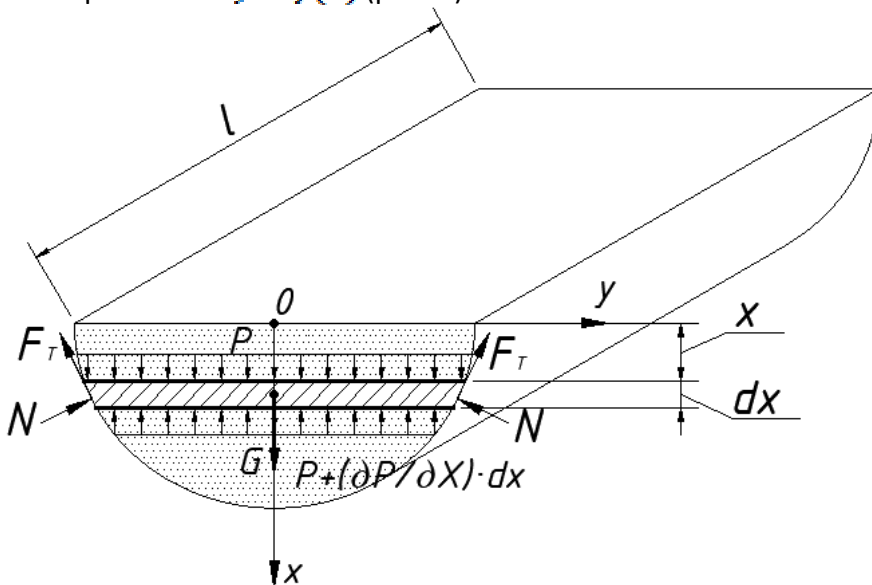


Рис. 1. Модель сипкого матеріалу, який знаходиться в жолобі

Виділимо на відстані  $x$  від поверхні сипкого матеріалу елементарний шар сипкого матеріалу товщиною  $dx$ . На нього зверху діє тиск  $P$ , знизу діє тиск  $P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$  та сила тяжіння –  $G$ . З боку стінок жолоба діє реакція, яку можна розкласти на дві складових – нормальну  $N$  та силу тертя  $F_T$ .

Сила тяжіння буде рівна:

$$G = \rho \cdot g \cdot l \cdot 2y dx, \quad (1)$$

де  $\rho$  – насипна щільність сипкого матеріалу;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Запишемо рівняння рівноваги для виділеного елемента:

$$P \cdot A - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \cdot \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} dx \right) - 2F_T \cos \alpha - 2N \sin \alpha + G = 0, \quad (2)$$

де  $A = l \cdot 2y$  – площа поперечного перерізу жолоба на відстані  $x$ ,  $\alpha$  – кут нахилу стінки до вертикалі в довільній точці, який є функцією від форми стінок жолоба.

Для визначення реакції поверхні жолоба розглянемо рівновагу сил, які діють на нескінченно малу ділянку поверхні жолоба довжиною  $dS$  (рис. 2).

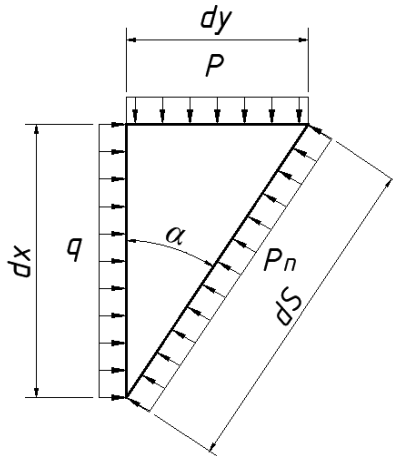


Рис. 2. Визначення реакції поверхні жолоба

Спроектуємо ці сили на нормаль проведену до твірної жолоба

$$P_n \cdot dS = P \cdot dy \sin \alpha + q \cdot dx \cos \alpha, \quad (3)$$

де  $q$  – боковий тиск.

Враховуючи, що  $dx = dS \cos \alpha$ ,  $dy = dS \sin \alpha$ , після перетворень отримаємо

$$P_n = (P \cdot \sin^2 \alpha + q \cdot \cos^2 \alpha). \quad (4)$$

Тоді складові реакції поверхні жолоба будуть рівні:

$$N = P_n \cdot dS \cdot l = (P \cdot \sin^2 \alpha + q \cdot \cos^2 \alpha) \cdot \frac{dx}{\cos \alpha} \cdot l. \quad (5)$$

$$F_T = f \cdot N = f(P \cdot \sin^2 \alpha + q \cdot \cos^2 \alpha) \cdot \frac{dx}{\cos \alpha} \cdot l. \quad (6)$$

Підставляючи отримані значення в рівняння (2) та нехтуючи величинами другого порядку малості, отримуємо рівняння:

$$-A \frac{\partial P}{\partial x} dx - P \frac{\partial A}{\partial x} dx - 2(P \sin^2 \alpha + q \cos^2 \alpha) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + f) l dx + \rho g l 2 y dx = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 2 \cdot l \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (8)$$

Оскільки функція тиску сипкого матеріалу залежить тільки від змінної  $x$ , то достатньо виправданим буде перехід від частинної похідної до повної, тобто

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}. \quad (9)$$

Якщо врахувати, що величина бокового тиску прямо пропорційна величині осевого тиску  $q = K \cdot P$ , де  $K$  – коефіцієнт бокового тиску, то рівняння (7) після перетворень матиме вигляд

$$-\frac{dP}{dx} \cdot y - P \cdot \operatorname{tg} \alpha - P(\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + f) + \rho g y = 0. \quad (10)$$

Введемо позначення:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + (\sin^2 \alpha + K \cos^2 \alpha) \cdot (\operatorname{tg} \alpha + f)}{y} = \varphi(x). \quad (11)$$

Тоді рівняння (10) матиме вигляд

$$\frac{dP}{dx} + P \cdot \varphi(x) - \rho \cdot g = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Його загальний розв'язок матиме вигляд

$$P = \exp\left(-\int \varphi(x) \cdot dx\right) \left(y \cdot g \cdot \int \exp \varphi(x) dx + C\right), \quad (13)$$

де  $C$  – стала інтегрування, яка визначається з початкових умов  $P/x = 0 = 0$ .

Розглянемо випадок, коли жолоб має циліндричну форму, тобто

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (14)$$

де  $R$  – радіус циліндра.

Тоді  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dy}{dx}$ .

Продиференціювавши рівняння (14), отримаємо:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}, \quad (15)$$

де  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ .

Рівняння (12) проінтегруємо чисельним методом, враховуючи, що координата  $y$  не може перевищувати розмір діаметра частинки сипкого матеріалу. На рис. 3 наведено залежності осьового  $P$  та нормального  $P_n$  тисків на поверхню жолоба циліндричної форми при таких параметрах: радіус жолоба  $R=0,2\ldots 0,4$  м, густина сипкого матеріалу  $\rho=800$  кг/м<sup>3</sup>, коефіцієнт тертя  $f=0,4\ldots 0,6$ , коефіцієнт бокового тиску  $k=0,3\ldots 0,4$ . Результати інтегрування наведено на рисунку 3.

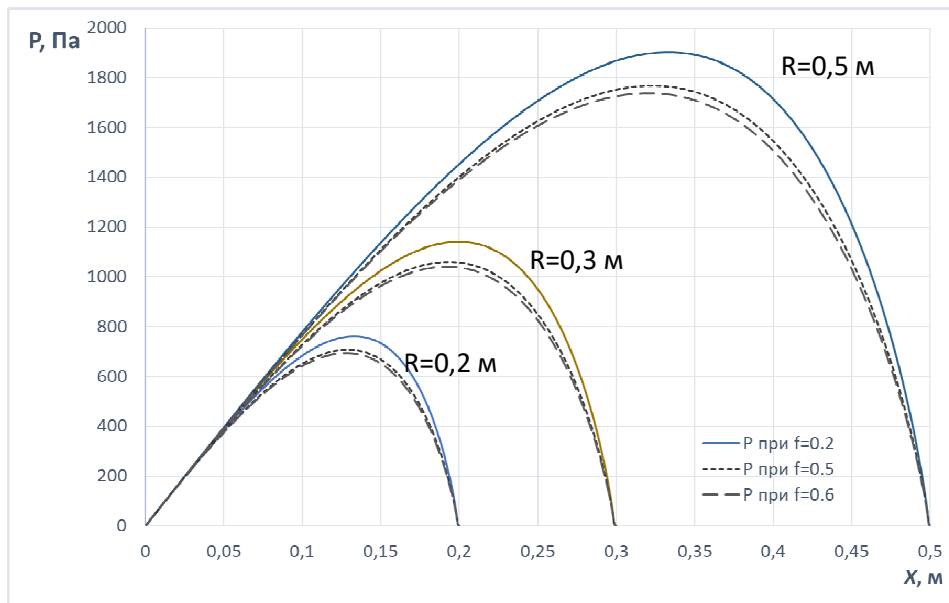


Рис. 3. Порівняльний графік залежностей  $P=f(x)$  при  $R=0,2$  м,  $0,3$  м,  $0,5$  м

Як видно з наведених графіків, максимальне значення осьового і бокового тиску на стінки жолоба циліндричної форми спостерігається на глибині, яка становить 0,63–0,67 від радіуса жолоба.

**Висновки.** Авторами побудовано математичну модель розподілу тиску сипкого матеріалу із врахуванням форми поперечного перерізу жолоба циліндричної форми, осьового та бокового тисків, насипної щільності матеріалу та коефіцієнта тертя. Прийнято, що величина бокового тиску прямо пропорційна величині осьового тиску і не залежить від внутрішнього зчеплення частинок матеріалу. При цьому матеріал в жолобі розглядається як ідеальне сипке середовище і його властивості однакові у будь якій точці об'єму. Диференціальне рівняння, інтегруванням якого можна визначити розподіл тиску на стінки жолоба, виведено з умови рівноваги елементарного об'єму. Передбачено, що така модель здатна описувати поведінку широкого класу сипучих матеріалів в ємнісних конструкціях і може використовуватися при проектуванні транспортних систем у промисловості та сільському господарстві.

1. Janssen H. A. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen. *Vereines deutscher Ingenieure*. 1895. Vol. 39. № 35. P. 1045–1049. 2. ДБН В.2.2-8-98. Підприємства, будівлі і споруди по зберіганню та переробці зерна. К. : Мінбуд України, 1998. 39 с. 3. ДСТУ-Н Б EN 1991-4:2012. Єврокод 1. Дії на конструкції. *Бункери і резервуари*. К. : Мінбуд України, 2012. Ч. 4. 168 с. 4. Банніков Д. О. Сипучий матеріал в ємнісній конструкції. Дніпропетровськ, 2009. 172 с. 5. Качуренко В. В., Банніков Д. О. Конструктивні рішення сталевих ємкостей для сипучих матеріалів. Днепропетровск, 2016. 168 с. 6. Качуренко В. В., Банніков Д. О. Особливості моделювання тиску сипучого матеріалу на гофровані сталеві елементи. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди* : зб. наук. праць. 2014. Вип. 28. С. 367–376. 7. Банніков Д. О., Тютюкін О. Л. Перспективні напрями розвитку механіки сипучого середовища. *Nauka innov*. 2020. № 2. Т. 16. С. 45–54. 8. González-Montellano C., Gallego E., Ramírez-Gómez Á., Ayuga. F. Three dimensional discrete element models for simulating the filling and emptying of silos: Analysis of numerical results. *Computers and Chemical Engineering*. 2012. Vol. 40. P. 22–32. 9. Kazantsev A. A., Klishin S. V., Revuzhenko A. F. On the pressure of loose material on the bottom and walls of a drum. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 682. P. 375–379. 10. Kobyłka R., Horabik J., Molenda M. Development of a rarefaction wave at discharge initiation in a storagesilo-DEM simulations. *Particuology*. 2018. Vol. 36. P. 37–49. 11. Žurovec D., Hlosta J., Nečas J., Zegzulka J. Monitoring bulk material pressure on bottom of storage using DEM. *Open Eng*. 2019. Vol. 9. Pp. 623–630. 12. Kobyłka R., Molenda

M., Horabik J. Loads on grain silo insert discs, cones, and cylinders: Experiment and DEM analysis. *Powder Technology*. 2019. Vol. 343. P. 521–532. **13.** Ji S., Wang S., Peng Z. Influence of external pressure on granular flow in a cylindrical silo based on discrete element method. *Powder Technology*. 2019. Vol. 356. P. 702–714. **14.** Gallego E., Fuentes J. M., Wiącek J., Villar J. R., Ayuga F. DEM analysis of the flow and friction of spherical particles in steel silos with corrugated walls. *Powder Technology*. 2019. Vol. 355. P. 425–437. **15.** Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B. Discrete particle simulation of particulate systems: A review of major applications and findings. *Chemical Engineering Science*. 2008. Vol. 63 (23). P. 5728–5770.

## REFERENCES:

**1.** Janssen H. A. Versuche uber Getreidedruck in Silozellen. *Vereines deutscher Ingenieure*. 1895. Vol. 39. № 35. P. 1045–1049. **2.** DBN V.2.2-8-98. Pidpriumstva, budivli i sporudy po zberihanniu ta pererobtsi zerna. K. : Minbud Ukrainy, 1998. 39 s. **3.** DSTU-N B EN 1991-4:2012. Yevrokod 1. Dii na konstruksii. Bunkery i rezervuary. K. : Minbud Ukrainy, 2012. Ch. 4. 168 s. **4.** Bannikov D. O. Sypuchyi material v yemnisnii konstruksii. Dnipropetrovsk, 2009. 172 s. **5.** Kachurenko V. V., Bannykov D. O. Konstruktivnye resheniia stalnykh emkosteii dlia sypuchikh materialov. Dnepropetrovsk, 2016. 168 s. **6.** Kachurenko V. V., Bannikov D. O. Osoblyvosti modeliuvannia tysku sypuchoho materialu na hofrovani stalevi elementy. *Resursoekonomni materialy, konstruksii, budivli ta sporudy* : zb. nauk. prats. 2014. Vyp. 28. S. 367–376. **7.** Bannikov D. O., Tiutkin O. L. Perspektyvni napriamy rozvytku mekhaniky sypuchoho seredovyscha. *Nauka innov*. 2020. № 2. T. 16. S. 45–54. **8.** González-Montellano C., Gallego E., Ramírez-Gómez Á., Ayuga F. Three dimensional discrete element models for simulating the filling and emptying of silos: Analysis of numerical results. *Computers and Chemical Engineering*. 2012. Vol. 40. P. 22–32. **9.** Kazantsev A. A., Klishin S. V., Revuzhenko A. F. On the pressure of loose material on the bottom and walls of a drum. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 682. P. 375–379. **10.** Kobyłka R., Horabik J., Molenda M. Development of a rarefaction wave at discharge initiation in a storagesilo-DEM simulations. *Particuology*. 2018. Vol. 36. P. 37–49. **11.** Žurovec D., Hlosta J., Nečas J., Zegzulka J. Monitoring bulk material pressure on bottom of storage using DEM. *Open Eng*. 2019. Vol. 9. Pp. 623–630. **12.** Kobyłka R., Molenda M., Horabik J. Loads on grain silo insert discs, cones, and cylinders: Experiment and DEM analysis. *Powder Technology*. 2019. Vol. 343. P. 521–532. **13.** Ji S., Wang S., Peng Z. Influence of external pressure on granular flow in a cylindrical silo based on discrete element method. *Powder Technology*. 2019. Vol. 356. P. 702–714. **14.** Gallego E., Fuentes J. M., Wiącek J., Villar J. R., Ayuga F. DEM analysis of the flow and friction of spherical particles in steel silos with corrugated walls. *Powder Technology*. 2019. Vol. 355. P. 425–437. **15.** Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B.



Discrete particle simulation of particulate systems: A review of major applications and findings. *Chemical Engineering Science*. 2008. Vol. 63 (23). P. 5728–5770.

---

**Serilko L. S., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor, Sasiuk Z. K., Candidate of Agricultural Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Serilko D. L., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), Chasov D. P., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor (Dnipro State Technical University)**

### **DETERMINATION OF THE PRESSURE OF A BULK MATERIAL ON A CURVLINED SURFACE**

**In this article, a study of the pressure distribution of bulk material in a cylindrical horizontal chute is carried out. The problem of fluid pressure distribution in the container is relevant. Its development and experimental confirmation require deep theoretical and experimental research. The authors built a mathematical model taking into account the cross-sectional shape of the container structure, axial and lateral pressure, volume density of the material and coefficient of friction. It is believed that the magnitude of the lateral pressure is directly proportional to the magnitude of the axial pressure of the chute walls. The developed mathematical model has the form of a linear inhomogeneous differential equation of the first order. The used equations are described in the article. It is assumed that such a model is capable of describing the behavior of a wide class of bulk materials in container structures and can be used to optimize existing transport systems in industry and agriculture.**

***Keywords:* pressure of bulk material; bulk medium; mathematical model; differential equation; conveyors.**

---