

УДК 622.7

<https://doi.org/10.31713/vt3202319>

Олійник Т. А., д.т.н., професор, Вільгельм М. М., аспірант
(Криворізький національний університет, м. Кривий Ріг)

АНАЛІЗ ЯВИЩ КОАГУЛЯЦІЇ ТА СЕДИМЕНТАЦІЇ ПІННОГО ПРОДУКТУ З МЕТОЮ СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ МАГНІТНО- ФЛОТАЦІЙНОГО ЗБАГАЧЕННЯ

Важливим аспектом в галузі збагачення залізних руд є проблема поділу пінного продукту у магнітно-флотаційних схемах. Пінний продукт є дисперсною системою з різними характеристиками. З метою створення моделі, виконаний математичний аналіз дисперсності системи, який враховує стійкість цих систем під час флотації. Робота розкриває важливі аспекти укрупнення часток та їх вплив на стійкість системи та ефективність збагачення. Проведений аналіз процесу магнітно-флотаційного збагачення зосереджений на математичному моделюванні. Визначено ключові аспекти, які варто враховувати при моделюванні, зокрема необхідність брати до уваги явища коагуляції і седиментації. Досліджено залежність константи швидкості швидкої коагуляції від температури та в'язкості дисперсійного середовища. Визначено, що ця константа не залежить від розміру частинок дисперсної фази. Застосування математичного аналізу магнітно-флотаційного процесу, з урахуванням коагуляції і седиментації, дозволило синтезувати математичну модель. Ця модель має велику потенціальну корисність, оскільки дозволяє перевірити збіжність впливу параметрів стану дисперсної системи на рівні 95%.

Ключові слова: флотація; пінний продукт; коагуляція; седиментація; математична модель.

В умовах сьогодення, одним із перспективних напрямів отримання додаткової товарної продукції та зменшення втрат при магнітно-флотаційному збагаченні залізних руд є вирішення проблеми поділу пінного продукту [1; 2].

Слід зазначити, що пінний продукт магнітно-флотаційної схеми

збагачення є складним об'єктом дослідження. В процесі флотації використовуються флотаційні реагенти, які адсорбуються на поверхні пінного продукту разом із бульбашками повітря, що робить продукт складним для поділу [3]. Також для пінного продукту притаманні явища коагуляції, флокуляції та седиментації, які також ускладнюють використання простих методів для його поділу [4]. Одним із шляхів для вирішення цієї проблеми є використання математичного моделювання технології поділу пінного продукту.

Враховуючи складність об'єкту дослідження перед початком математичного моделювання необхідно визначити його основні важливі риси:

- 1) Стохастичність поведінки. Ця риса характеризується зв'язком об'єкта з різними другорядними процесами, які впливають на його складність.
- 2) Відсутність математичної моделі та обов'язкова необхідність її створення.
- 3) Нестационарність об'єкта та невідтворюваність експериментів – небажана зміна показників об'єкта, коли всі вхідні параметри залишаються незмінними тощо.

Ці риси мають неформальний характер, проте дозволяють охарактеризувати складний об'єкт [5; 6].

Тому питання розробки математичної моделі та її перевірки на основі експериментальних даних є актуальним. Математична модель дозволить спрогнозувати технологічні показники при доведенні пінного продукту в промислових умовах, з урахуванням всіх задіяних параметрів.

Дотепер невирішеними питаннями є вплив та можливості керування коагуляцією і седиментацією дисперсних систем.

Математичний аналіз дисперсності системи з точки зору коагуляції і седиментації дозволив за допомогою відповідних формул, наведених нижче, синтезувати математичну модель дисперсної системи.

Найважливішою властивістю дисперсних систем при флотації є їхня стійкість – сталість їх властивостей (насамперед дисперсності, розподілу частинок дисперсної фази за обсягом дисперсійного середовища та характеру міжчасткових взаємодій) у часі [7].

Розрізняють агрегативну та седиментаційну стійкість дисперсних систем. При седиментаційній стійкості дисперсні системи зберігають рівномірний і постійний у часі розподіл частинок дисперсної фази по

всьому обсягу дисперсійного середовища. Втрата седиментаційної стійкості призводить до осідання або спливу частинок дисперсної фази. Здатність дисперсної системи зберігати постійну у часі дисперсність та індивідуальність частинок дисперсної фази називається агрегативною стійкістю.

Укрупнення часток може йти двома способами: ізотермічною перегонкою та коагуляцією. Найбільш характерним для дисперсних систем способом укрупнення частинок є коагуляція, в результаті якої окремі частинки дисперсної фази злипаються (зливаються). В результаті коагуляції у загальному випадку просторового поділу фаз немає; разом з тим, у деяких випадках, коагуляція призводить до втрати системою седиментаційної стійкості і, як наслідок, до розшарування (поділу фаз).

Коагуляція характеризується швидкістю (\mathcal{G}), тобто зміною часткової концентрації дисперсної фази (v) за одиницю часу

$$\mathcal{G} = -\frac{dv}{dt} . \quad (1)$$

Часткова концентрація дисперсної фази обчислюється по формулі

$$v = \frac{3\omega}{4\pi r^3 \rho} , \quad (2)$$

де ω – масова концентрація, $кг \cdot м^{-3}$;

r – радіус сферичної частинки дисперсної фази, $м$;

ρ – щільність частинки дисперсної фази, $кг \cdot м^{-3}$.

Водночас на швидкість коагуляції також впливає природа дисперсної фази та дисперсійного середовища, концентрація частинок дисперсної фази та температура.

Слід зазначити, що нині набула розповсюдження теорія швидкої коагуляції. За цією теорією будь-яке зіткнення частинок дисперсної фази призводить до коагуляції та в підрахунок ідуть лише парні зіткнення частинок дисперсної фази.

Тобто кінетику швидкої коагуляції можна описувати як реакцію другого порядку: швидкість коагуляції пропорційна квадрату часткової концентрації частинок дисперсної фази відповідно до рівняння

$$\mathcal{G} = k \cdot v^2 , \quad (3)$$

де k – константа швидкості швидкої коагуляції, $м^3 сек^{-1}$.

Константа швидкості швидкої коагуляції залежить від природи дисперсної фази, дисперсійного середовища та температури і не залежить від часткової концентрації. Підставивши формулу (3) в (1),

отримаємо рівняння для кінетики швидкої коагуляції у диференційній формі

$$\frac{dv}{dt} = -k \cdot v^2. \quad (4)$$

Рівняння (4) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними [8]. Для його розв'язання приведемо його до вигляду, розділивши змінні

$$\frac{dv}{v^2} = -k \cdot dt. \quad (5)$$

Проінтегруємо рівняння (5)

$$\int \frac{dv}{v^2} = -k \cdot \int dt, \\ -\frac{1}{v} = -k \cdot t + C, \quad (6)$$

де C – довільна постійна.

Для знаходження довільної постійної скористаємось початковою умовою

$$v(t=0) = v_0, \quad (7)$$

тобто в початковий момент часу часткова концентрація частинок дисперсної фази дорівнює v_0 . Підставляючи (7) в загальний розв'язок (6), знаходимо

$$C = -\frac{1}{v_0}. \quad (8)$$

З урахуванням (8) формула (6) набуде вигляду

$$\frac{1}{v} = k \cdot t + \frac{1}{v_0},$$

або, розв'язуючи її відносно v , знаходимо

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 \cdot k \cdot t}. \quad (9)$$

При описі кінетики швидкої коагуляції виявляється зручним використовувати час, за який концентрація часток дисперсної фази зменшується вдвічі або час половинної коагуляції ($\tau_{0.5}$). З початковою концентрацією частинок дисперсної фази (v_0) час половинної коагуляції пов'язане співвідношенням

$$\tau_{0.5} = \frac{1}{v_0 \cdot k} . \quad (10)$$

Підставивши (10) в формулу (9), отримаємо рівняння Гельмгольца – Смолуховського для швидкої коагуляції

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{t}{\tau_{0.5}}} . \quad (11)$$

Відповідно до теорії Смолуховського, константа швидкості швидкої коагуляції залежить від коефіцієнта дифузії частинок дисперсної фази та відстані між ними при коагуляції

$$k = 4\pi hD = 8\pi rD . \quad (12)$$

де D – коефіцієнта дифузії частинок дисперсної фази, $m^2 \cdot \text{сек}^{-1}$;
 r – радіус частинок дисперсної фази, m .

Підставивши у формулу (12) рівняння Стокса – Ейнштейна

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta N_A r} ,$$

де R – універсальна газова постійна, $m^2 \text{ кг } c^{-2} K^{-1} \text{ Моль}^{-1}$;

T – абсолютна температура, K ;

N_A – число Авогадро, Моль^{-1} ;

η – в'язкість дисперсійного середовища, $\text{кг} \cdot m^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$,

отримаємо вираз

$$k = \frac{4RT}{3\eta N_A} , \quad (13)$$

з якого випливає, що константа швидкості швидкої коагуляції залежить тільки від температури та в'язкості дисперсійного середовища та не залежить від розміру частинок дисперсної фази.

Отримана розрахунковим шляхом із рівняння (13) константа характеризує швидку коагуляцію. Якщо знайдене експериментально значення константи менше від теоретичного, значить, у системі має місце повільна коагуляція.

Після коагуляції внаслідок укрупнення частинок дискретної фази може мати місце седиментація [9]. Седиментація – процес осідання або спливання частинок дисперсної фази у дисперсних системах, обумовлений відмінностями у щільності частинок дисперсної фази та дисперсійного середовища. Осідання частинок дисперсної фази (при

щільності дисперсної фази більше щільності дисперсного середовища) називається прямою седиментацією, а спливання (при щільності дисперсної фази менше щільності дисперсного середовища) – зворотною седиментацією. На частинку дисперсної фази, що покоїться, в дисперсійному середовищі діє дві сили: сила Архімеда (F_A) та сила тяжіння (F_g)

$$F_A = V \cdot \rho_1 \cdot g, \quad (14)$$

$$F_g = V \cdot \rho_2 \cdot g, \quad (15)$$

де V – об'єм частки, m^3 ;

ρ_1 , ρ_2 – щільність дисперсійного середовища та частинок дисперсної фази, відповідно, $kg \cdot m^{-3}$;

g – прискорення вільного падіння, $m \cdot sek^{-2}$.

Різниця цих сил є силою седиментації

$$F_{sed} = F_A - F_g,$$

або, з урахуванням (14) і (15),

$$F_{sed} = V \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g. \quad (16)$$

Пряма седиментація відбувається за умови, що $F_{sed} > 0$ ($F_g > F_A$), а зворотна – $F_{sed} < 0$ ($F_g < F_A$).

При ламінарному русі частинок дисперсної фази в дисперсійному середовищі виникає сила опору (тертя), що уповільнює їх рух

$$F_T = B \cdot \vartheta, \quad (17)$$

де B – коефіцієнт тертя, $kg \cdot sek^{-1}$;

ϑ – швидкість седиментації частинок дисперсної фази, $m \cdot sek^{-1}$.

Таким чином, діюча на седиментуючі (осідаючі або спливаючі) частки сила визначається виразом

$$F = F_{sed} - F_T,$$

або, з урахуванням (16) і (17),

$$F = V \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g - B \cdot \vartheta. \quad (18)$$

У початковий момент руху швидкість седиментації частинки мала і частка рухається прискорено; при збільшенні швидкості седиментації зростає сила тертя і настає момент, коли сила тертя дорівнюватиме силі седиментації, що рівнодіюча цих сил дорівнює нулю ($F = 0$), швидкість седиментації частки стає постійною і рівною

$$g = \frac{V \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g}{B} \quad (19)$$

Для сферичних частинок коефіцієнт тертя можна виразити із закону Стокса

$$B = 6\pi\eta r, \quad (20)$$

де η – в'язкість рідини, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$;

r – радіус частинок, м .

Тоді з огляду на те, що для сферичних частинок

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad (21)$$

вираз для швидкості седиментації набуде вигляду

$$g = \frac{2 \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g \cdot r^2}{9\eta} \quad (22)$$

Таким чином, постійна швидкість руху частки при її седиментації пропорційна квадрату радіусу частки, різниці щільностей речовин дисперсної фази та дисперсійного середовища і обернено пропорційна в'язкості дисперсійного середовища.

Седиментації частинок у дисперсних системах повинна протидіяти їх дифузія. У загальному випадку треба враховувати наявність у системі двох потоків: седиментаційного, в результаті якого відбувається поступовий поділ дисперсної системи на окремі фази (дисперсну фазу та дисперсійне середовище), та дифузійного, що призводить до вирівнювання концентрації частинок дисперсійної фази по всьому обсягу дисперсійного середовища

$$I_{\text{сед}} = \frac{V \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g \cdot v}{B}, \quad (23)$$

$$I_{\text{диф}} = -\frac{kT}{B} \frac{dv}{dh}, \quad (24)$$

де k – постійна Больцмана, $\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}$;

T – абсолютна температура, К ;

v – часткова концентрація;

h – висота дисперсної системи, м .

У грубодисперсних (макрогетерогенних) системах інтенсивність седиментаційного потоку більше інтенсивності дифузійного потоку ($I_{\text{сед}} > I_{\text{диф}}$), тому для них характерна седиментація, а не дифузія; з часом усі частинки дисперсної фази таких систем концентруються в одній

області дисперсної системи. Внаслідок чого рано чи пізно відбувається просторовий поділ фаз.

В ультрамікрогетерогенних (високодисперсних) системах інтенсивність седиментаційного потоку менше інтенсивності дифузійного потоку ($I_{сед} < I_{диф}$), тому для них не характерна седиментація, а характерна дифузія; у таких системах за рахунок дифузії частинки дифузійної фази рівномірно розподіляються по всьому обсягу дисперсійного середовища.

У мікрогетерогенних (і деяких ультрамікрогетерогенних) системах інтенсивність седиментації та дифузії близькі, внаслідок чого з часом у таких системах відбувається вирівнювання інтенсивностей седиментаційного та дифузійного потоків

$$I_{сед} = I_{диф},$$

або, згідно (23) і (24),

$$\frac{V(\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр})g}{B} \cdot v = -\frac{kT}{B} \frac{dv}{dh}. \quad (25)$$

Рівняння (25) є диференціальним рівнянням першого порядку з змінними, що розділяються. Розділяючи змінні, отримуємо загальне рішення даного рівняння

$$\frac{dv}{v} = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} dh, \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} \int dh,$$

$$\ln v = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} h + C, \quad (26)$$

де C – довільна постійна.

Для знаходження довільної постійної скористаємося початковою умовою

$$v(h=0) = v_0. \quad (27)$$

Підставляючи (28) у (27), знаходимо

$$C = \ln v_0. \quad (28)$$

З урахуванням (28) послідовно отримуємо часткове рішення рівняння (25)

$$\ln v = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} h + \ln v_0, \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} h,$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} h,$$

$$v = v_0 e^{-\frac{V \cdot (\rho_{ДФ} - \rho_{ДСр}) \cdot g}{k \cdot T} h}. \quad (29)$$

Рівняння (25) характеризує седиментаційно-дифузійну рівновагу, а рішення (29) описує гісометричний закон Лапласа.

Як видно, концентрація частинок дисперсної фази експоненційно зменшується зі збільшенням відстані від дна дисперсної системи.

Стійкість дисперсних систем до осадження (седиментаційна стійкість) може забезпечуватись різними факторами. Мірою кінетичної седиментаційної стійкості дисперсних систем до осідання є величина, обернена до константи седиментації

$$KCC = \frac{1}{S_{сед}} = \frac{B}{V \cdot (\rho_1 - \rho_2)}. \quad (30)$$

Якщо частинки дисперсної фази мають сферичну форму, то КСС такої дисперсної системи з урахуванням (20) і (21) виражається наступним рівнянням

$$KCC = \frac{9 \cdot \eta}{2 \cdot r^2 \cdot (\rho_1 - \rho_2)}. \quad (31)$$

Як видно із співвідношення (31), КСС дисперсної системи зростає при збільшенні в'язкості дисперсійного середовища, зменшенні розміру частинок та різниці між щільностями речовин дисперсної фази та дисперсійного середовища.

Термодинамічна седиментаційна стійкість (ТСС) дисперсних систем обумовлена статистичними законами дифузії та безпосередньо пов'язана з седиментаційно-дифузійною рівновагою. Мірою ТСС є гісометрична висота, тобто висота, на якій концентрація частинок дисперсної фази знижується в e раз

$$TCC = h_e = \frac{k \cdot T}{V \cdot (\rho_1 - \rho_2) \cdot g}. \quad (32)$$

Як видно з рівняння (32), в'язкість не впливає на ТСС дисперсних систем, а підвищення температури сприяє їхній стійкості, оскільки при цьому зростає інтенсивність теплового руху молекул дисперсійного середовища.

В результаті аналізу процесу магнітно-флотаційного збагачення, з позиції математичного моделювання, визначено:

- необхідність врахування коагуляції і седиментації при математичному моделюванні процесу;
- константа швидкості швидкої коагуляції залежить тільки від температури та в'язкості дисперсійного середовища та не залежить від розміру частинок дисперсної фази;
- в'язкість пульпи не впливає на седиментаційну стійкість дисперсної системи;
- аналіз магнітно-флотаційного процесу, з точки зору коагуляції і седиментації, за допомогою формул, наведених вище, дозволив синтезувати математичну модель, яка дає змогу перевірити збіжність впливу параметрів стану дисперсної системи на рівні 95%. Отримані експериментальні параметри, в подальшому, дозволять перевірити математичну модель, а також визначити в числовій формі залежність стану дисперсної системи від параметрів, які входять до її складу.

1. Олійник Т. А., Вільгельм М. М. Передумови підвищення селективності розділення рудної та нерудної складової пінного продукту флотації. *Гірничий вісник*. Кривий Ріг, 2021. Вип. 109. С. 73–79. **2.** High-energy ultrasound to improve the quality of purifying the particles of iron ore in the process of its enrichment / V. Morkun, G. Gubin, T. Oliinyk, V. Lotous, V. Ravinskaia, V. Tron, N. Morkun, M. Oliinyk. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2017. № 6(12). С. 35–40. doi:10.15587/1729-4061.2017.118448. **3.** Смирнов В. О., Білецький В. С. Флотаційні методи збагачення корисних копалин. Донецьк : Східний видавничий дім, 2010. 492 с. **4.** Олійник Т. А., Вільгельм М. М. Особливості коагуляції частинок та адсорбція реагентів на поверхні пінного продукту флотації. *Вісник Криворізького національного університету*. Кривий Ріг, 2023. Вип. 57. С. 70–77. **5.** Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник : у 2-ох ч. К. : Либідь, 1993. Ч. 1. 320 с. **6.** Грицюк П. М., Джоші О. І., Гладка О. М. Основи теорії систем і управління : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2021. 272 с. **7.** Великонська Н. М., Надточій А. А. Поверхневі явища та дисперсні системи : навч. посіб. Дніпро : НМетАУ, 2018. 78 с. **8.** Габрусев Г. В., Самборська О. М. Звичайні диференціальні рівняння : навч. посіб. для студентів, які навчаються за напрямом автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Тернопіль : ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с. **9.** Іваніна А. В. Седиментологія : навч.-метод. посіб. Львів : Видав. центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. 144 с.

REFERENCES:

1. Oliinyk T. A., Vilhelm M. M. Peredumovy pidvyshchennia selektyvnosti rozdilennia rudnoi ta nerudnoi skladovoi pinnoho produktu flotatsii. *Hirnychyi Visnyk*. Kryvyi Rih, 2021. Vyp. 109. S. 73–79.
 2. High-energy ultrasound to improve the quality of purifying the particles of iron ore in the process of its enrichment / V. Morkun, G. Gubin, T. Oliinyk, V. Lotous, V. Ravinskaia, V. Tron, N. Morkun, M. Oliinyk. *Vostochno-Evropeiskii zhurnal peredovykh tekhnolohii*. 2017. № 6(12). S. 35–40. doi:10.15587/1729-4061.2017.118448.
 3. Smyrnov V. O., Biletskyi V. S. Flotatsiini metody zbahachennia korysnykh kopalyn. Donetsk : Skhidnyi vydavnychiy dim, 2010. 492 s.
 4. Oliinyk T. A., Vilhelm M. M. Osoblyvosti koahuliatsii chastynok ta adsorbtsiia reahentiv na poverkhni pinnoho produktu flotatsii. *Visnyk Kryvorizkoho natsionalnoho universytetu*. Kryvyi Rih, 2023. Vyp. 57. S. 70–77.
 5. Dorohovtsev A. Ya. Matematychnyi analiz : pidruchnyk : u 2-okh ch. K. : Lybid, 1993. Ch. 1. 320 s.
 6. Hrytsiuk P. M., Dzhoshi O. I., Hladka O. M. Osnovy teorii system i upravlinnia : navch. posib. Rivne : NUVHP, 2021. 272 s.
 7. Velykonska N. M., Nadochii A. A. Poverkhnevi yavyscha ta dyspersni systemy : navch. posib. Dnipro : NMetAU, 2018. 78 s.
 8. Habrusiev H. V., Samborska O. M. Zvychnai dyferentsialni rivniannia : navch. posib. dlia studentiv, yaki navchaiutsia za napriamom avtomatyzatsiia ta kompiuterno-intehrovani tekhnolohii. Ternopil : TNTU imeni Ivana Puliuia, 2014. 172 s.
 9. Ivanina A. V. Sedymetolohiia : navch.-metod. posib. Lviv : Vydav. tsentr LNU im. Ivana Franka, 2008. 144 s.
-

**Oliinyk T. A., Doctor of Engineering, Professor, Vilhelm M. N.,
Post-graduate Student (Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih)**

ANALYSIS OF THE PHENOMENA OF COAGULATION AND SEDIMENTATION OF THE FROTH PRODUCT IN ORDER TO CREATE A MATHEMATICAL MODEL OF THE MAGNETIC FLOTATION BENEFICIATION PROCESS

An important aspect of iron ore beneficiation is the problem of separation of the froth product in magnetic flotation circuits. The froth product is a dispersed system with different characteristics. In order to create a model, a mathematical analysis of the dispersion of the system was performed, which takes into account the stability of these systems during flotation. The work reveals important aspects of particle enlargement and their impact on system stability and beneficiation efficiency. An analysis of the magnetic flotation beneficiation process, focused on mathematical modeling, is carried out. The key aspects that should be taken into account in modeling are identified, in particular, the need to take into account the phenomena of coagulation and

sedimentation. The dependence of the rate constant of rapid coagulation on the temperature and viscosity of the dispersion medium is investigated. It was found that this constant does not depend on the particle size of the dispersed phase. The application of mathematical analysis of the magnetic flotation beneficiation process, taking into account coagulation and sedimentation, allowed us to synthesize a mathematical model. This model is of great potential utility, as it allows us to verify the convergence of the influence of the parameters of the state of the dispersed system at the level of 95%.

***Keywords:* flotation; froth product; coagulation; sedimentation; mathematical model.**
