

624.07

С-37

Акад. К.К.Симинский

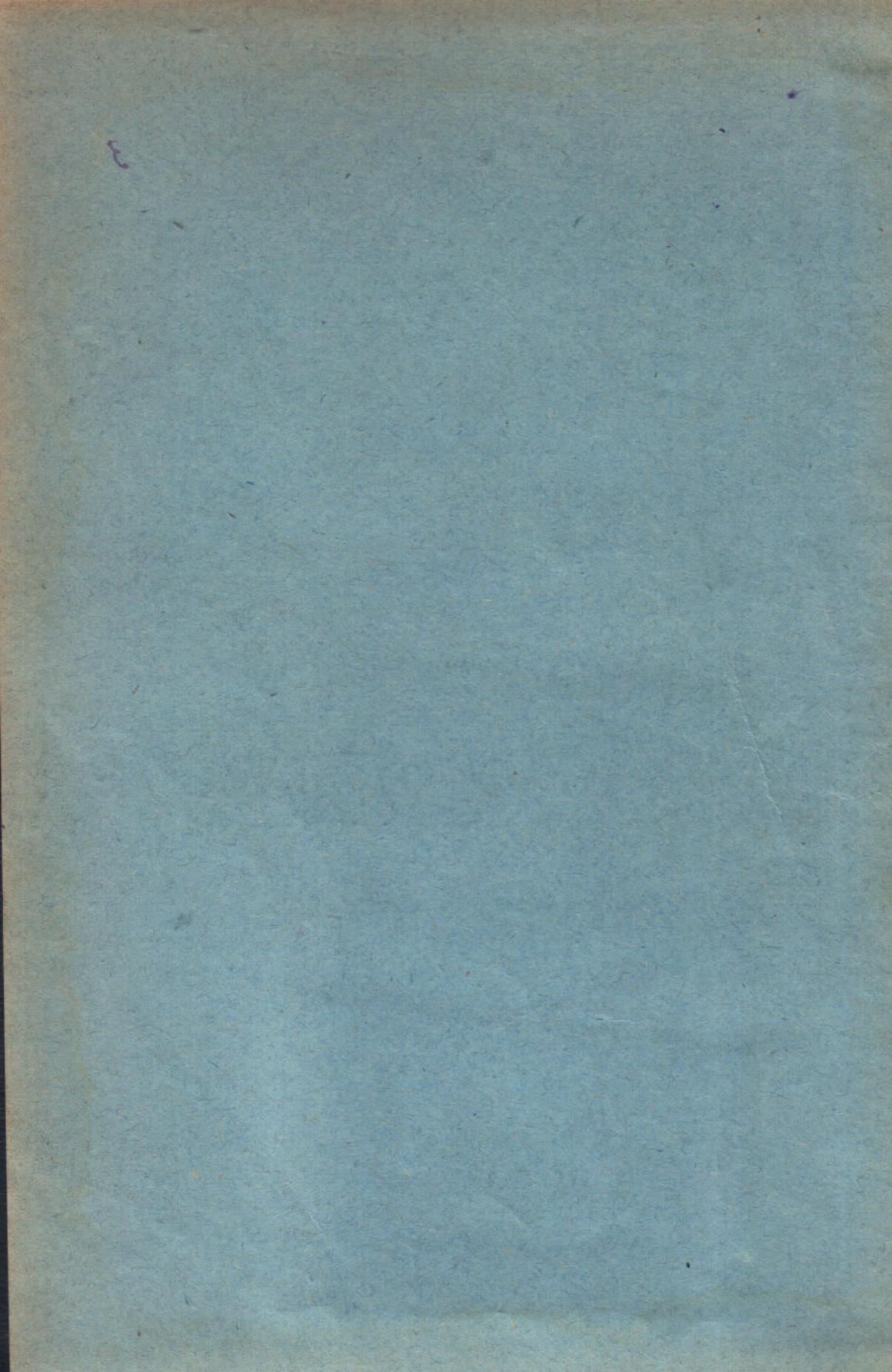
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ



2357

v



К. СИМИНСКИЙ

Профессор Киевского Политехнического Института и
Института Инженеров Путей Сообщения

У
624.04
0-37

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ

Арт.

9357
Политехнический
Институт в Киеве

ср

проверено
1966 г.

Политехнический
Институт в Киеве

И О

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАССЫ ВЗАИМОПОМОЩИ СТУДЕНТОВ
КИЕВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
КИЕВ ☆ 1930

Библиографическое описание этого
издания помещено в „Литературно-
Учебно-Методическом Друкѣ“, Каталогной
репертуарѣ и других указателях
Украинской Книжной Палаты.

Киевский Окрит № 2154.
Гострест „Киев-Печать“,
1-я фото-лито-типография,
Киев, Сенная площадь, № 14.
Зак. № 309 — 4000 — 18 $\frac{1}{2}$ п. л.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Этот выпуск Строительной механики посвящается специальному отделу курса статически неопределимых систем, а именно, — балкам с лишними опорными закреплениями; поэтому здесь принят и иной характер изложения: мы останавливаемся, главным образом, на технике расчета балок, на конкретных задачах и практических указаниях, приводим также справочный материал, необходимый, как для студенческих работ, так и в текущей практике инженера.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с общим курсом Строительной механики, так как является продолжением наших „Систем без лишних стержней“ и „Систем с лишними неизвестными“, но изложение в книге принято независимое, так что, ее можно рассматривать и как отдельный самостоятельный курс.

Приношу глубокую благодарность инженеру Н. В. Карнаухову, проверившему большую часть рукописи и сделавшему много ценных указаний.

Первоначальный текст книги составлен еще в 1926 г., но к сожалению сначала затруднения по осуществлению издания, а затем — недоразумения с издательством „Кубуч“, печатавшим предыдущий выпуск, задержали издание до 1929 г. Теперь, после ликвидации Кубуча, организовалось издательство Кассы взаимопомощи студентов К. П. И., возобновившее со мной нормальные взаимоотношения и тем создавшее благоприятные условия для продолжения прерванного издания подготовленной мною серии книг. Я надеюсь, что с помощью нового издательства мне удастся в ближайшее время выпустить в свет давно уже обещанные курсы.

Киев, май 1929 г.

К. Симинский.

ГЛАВНЕЙШИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ¹⁾.

$A_1, A_2 \dots A_n$ и $B_1, B_2 \dots B_n$ — левые, и, соответственно — правые по порядку реакции, вычисляемые для отдельных пролетов неразрезной балки: для первого пролета $l_1 — A_1$ и B_1 , для второго пролета $l_2 — A_2$ и B_2 и т. д.

A и B — левая и правая опорные реакции простой разрезной балки AB .

A^0 и B^0 — в теории статически неопределимых балок левая и правая опорные реакции одного пролета, вычисляемые после освобождения балки от лишних опорных моментов, т. е., как для простой разрезной балки, находящейся под действием одной только местной нагрузки пролета.

A^m и B^m — соответствующие опорные реакции, но вызванные действием одних только опорных моментов данного пролета.

Полная реакция неразрезной балки от действия нагрузки и опорных моментов выражается суммой: для крайней опоры $A^0 + A^m$ и обозначается буквою R с индексом опоры O либо n , т. е. $A^0 + A^m = R_0$ либо $B^0 + B^m = R_n$; для промежуточной опоры n , находящейся между пролетами l_m и l_{m+1} реакция $B_m + A_{m+1}$ обозначается R_m .

Опоры многопролетной балки нумеруются $0, 1, 2 \dots n$.

Пролеты — $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$, так что, — номер пролета повторяется на его правой опоре, а левая опора имеет номер, единицею меньший.

A' и B' и, соответственно, — $R'_m = B'_m + A'_{m+1}$ — фиктивные реакции, вычисляемые при действии эпюры моментов, как грузовой площади.

a и b — расстояния груза P , находящегося на пролете AB , до его опор A и B ; они выражаются иногда в частях ξ пролета l , где ξ называется относительным расстоянием груза:

$$\xi = \frac{a}{l}.$$

a_0 и b_0 — расстояния левого фокуса f пролета AB соответственно до его опор A и B .

a'_0 и b'_0 — то же для правого фокуса f'

a_m и b_m — расстояния наибольших ординат линии влияния u_{max} соответственно до опор A и B .

α и β — углы изгиба по концам балки AB , т. е. углы отклонения концевых касательных упругой линии от первоначально прямой оси балки AB . В более общем случае поворота осевой линии бруска те же углы обозначаются τ ;

s и s' — расстояния от центра тяжести C площади ω эпюры моментов для нагрузки одного пролета до концов пролета, причем s — до левого, а s' — до правого конца.

d — длина панели балки или фермы, измеренная в плане, т. е., горизонтальная проекция наклонной панели d' , а также — диаметр круга, цилиндра.

δ — вообще малое перемещение или приращение. Если δ снабжено подстрочными индексами, то первый из них обозначает ту точку, которая получает перемещение δ , а второй — причину, вызвавшую перемещение в этой точке, третий — указывает на число лишних неизвестных в системе, получающей перемещение δ .

D — усилие диагонального стержня фермы (раскоса).

e — относительное удлинение, равно λ/l , где λ — абсолютное удлинение, или $e = \delta l/l$.

e — эксцентриситет силы по отношению к центру тяжести сечения.

E — коэффициент упругости, модуль упругости.

ε — коэффициент температурного линейного расширения.

f_n и f'_n — левый и правый фокусы пролета l_n неразрезной балки. Левый фокус, или нулевая точка f_n в любом пролете это точка на оси, в которой получается нулевой момент,

¹⁾ Для тех случаев, когда нет специальных указаний или обозначений на соответствующих чертежах и формулах.

если непрерывный ряд последовательных пролетов, начиная с крайнего левого и кончая рассматриваемым l_n , остается незагруженным, имея крайний правый опорный момент ряда M_n . Соответственно правая нулевая точка получается при действии опорного момента M_{n-1} слева рассматриваемого пролета l_n и при отсутствии нагрузки, как на этом пролете, так и на всех последующих вправо.

f — прогиб балки или фермы, иногда стрелка подъема дуги или арки.

F — площадь поперечного сечения бруса.

φ — угол поворота сечений или узлов; для жесткого соединения; прямого (балка) или под углом (узел рамы) — это полный поворот касательной к упругой линии. Этот поворот может складываться из поворота оси бруса ψ и отклонения τ касательной к упругой линии от этой оси вследствие искривления бруса при изгибе. Очевидно $\varphi = \tau + \psi$.

ϕ — полные упругие грузы, называемые иначе „упругие веса“ или „фиктивные грузы“, прикладывая которые к узлам упругой системы, мы получаем ее прогибы непосредственно из вероючного многоугольника. Эти грузы учитывают и изменение углов между элементами системы и изменение длины элементов, т. е. $\delta\theta$ и δl .

Φ — те же грузы, но умноженные на E , так что: $\Phi = E\phi$.

J — жесткость в обобщенном смысле: при изгибе — это EJ , при растяжении — EF , при кручении GJ_p , при сдвиге GF .

$ж$ — погонная жесткость, т. е. $ж = \frac{EJ}{l}$.

G — коэффициент упругости при сдвиге, модуль сдвига.

g — относительный сдвиг.

g — ускорение силы тяжести.

Γ или γ — гибкость бруса, т. е., прогиб, вызываемый единицей силы или единицей изгибающего момента. В первом случае $\gamma = \frac{l^3}{kEJ}$, а во втором — $\gamma = \frac{l^2}{k'EJ}$, где k и k' — коэффициент прогиба, определяемый родом нагрузки и способом закрепления стержня. По аналогии r или p — растяжимость бруса (см. знак r).

Γ^1 — гибкость сечения, т. е. величина, обратная жесткости: $\frac{1}{EJ}$ или $\frac{1}{J}$. По аналогии:

$r^1 = \frac{1}{EF}$ или $r^1 = \frac{1}{F}$ — растяжимость сечения.

γ — удельный или погонный вес, иногда — угол наклона,

h — высоты, вертикальные проекции наклонных линий.

H — горизонтальная составляющая опорной реакции, распор, отпор и нормальный луч силового многоугольника.

J — момент инерции.

i — плечо или радиус инерции, иногда отношение моментов инерции: по середине и на краю пролета $i = \frac{J_m}{J_A}$.

$j = \int CC_1 dx$ и $j_1 = \int C_1^2 dx$ — интегралы, определяющие координату деформации упругой системы, при этом C_1 — это обобщенная сила, деформирующая элемент системы dx при единичной обобщенной нагрузке, соответствующей искомой координате, а C — такая же обобщенная сила, но от заданной нагрузки системы.

j — в теории балок переменного сечения относительное приращение момента инерции по середине пролета: $j = \frac{J_m - J_A}{J_A} = \frac{J_m}{J_A} - 1 = i - 1$.

K — обобщенная координата.

k — различные коэффициенты и отношения.

$k_1, k_2, k_3 \dots k'_1, k'_2, k'_3$, — для неразрезной балки это отношение между двумя концевыми (опорными) моментами ненагруженного пролета, например:

$$k_2 = M_2 : M_1 = -2 \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \right) = b_{02} : a_{02}; \quad k'_2 = \frac{a'_{02}}{b'_{02}} = -2 \left(1 + \frac{l_3}{l_2} \right) = M'_1 : M'_2.$$

Для брусьев разного сечения в разных пролетах k — это отношение погонных жесткостей

$$k = \frac{EJ_1}{l_1} : \frac{EJ_2}{l_2} = \frac{J_1 l_2}{J_2 l_1} \text{ и т. д.}$$

l, L — пролеты, длина брусьев.

$l_n = l \frac{J_0}{J_n}$ — приведенная длина пролета, иначе сказать: гибкая длина брусков, получившаяся путем деления длины l на жесткость EJ .

λ — удлинение абсолютное δl , e — относительное $\frac{\lambda}{l} = \frac{\delta l}{l}$.

M — изгибающий момент.

M_f и M_f^1 — фокальные моменты, т. е. изгибающие моменты, получающиеся для фокальных сечений при данной нагрузке пролета.

M_A и M_B — реактивные опорные моменты заделанных концов пролета AB .

M^0 — изгибающий момент простой (основной) балки AB , освобожденной от лишних связей, вычисляемый при местной нагрузке пролета AB и вызванных ею реакциях.

M^u — изгибающий момент, вызванный в данном пролете исключительно только концевыми моментами (опорными) этого пролета.

M_n — статический момент исключительно только от нагрузки, не считая реакций.

M_k — крутящий момент.

aM — активный момент, т. е. момент, являющийся нагрузкой в данном сечении бруска, например; момент эксцентрично приложенной к балке продольной силы: ($aM = Pe$, где e — эксцентриситет), груз, приложенный на конце консоли консольной балки ($aM = Pk$, где k — длина консоли).

zM — заземляющий момент, т. е. момент, возникающий в плоскости заземления однопролетной балки при местной нагрузке этого пролета.

m — относительная абсцисса сечения балки, т. е. отношение расстояния x назначенного сечения в пролете к длине пролета l : $m = \frac{x}{l}$ или $x = ml$.

μ — коэффициент распределения активного момента, действующего на данный узел (жесткий), между брусками, воспринимающими этот момент. Если узел из двух брусков 1 и 2 и на каждый из них приходится M_1 и M_2 из общего момента M . то: $M_1 + M_2 = M$ при условии, что $M_1 = \mu_1 M$ и $M_2 = \mu_2 M$ или: $\mu_1 M + \mu_2 M = M$, или $\mu_1 + \mu_2 = 1$.

ρ , τ , η — коэффициенты, выражающие момент, поперечную силу и прогиб в сложных случаях изгиба, например, при сплошном основании или упругих опорах, через момент простой балки: $M = M^0 \rho$, $Q = Q^0 \tau$, $y = y^0 \eta$ и т. д.

n — нормальное напряжение, растягивающее или сжимающее.

n^0 — допускаемое нормальное напряжение.

0, 1, 2... ($n-1$), n , ($n+1$) — номера опор многопролетной балки, пролеты которой, по порядку, обозначаются: $l_1, l_2, l_3 \dots$

N — нормальная составляющая усилия.

O — усилие верхнего пояса фермы из стержней, начало координат.

ω — площадь эпюры моментов и площадь линии влияния.

P — грузы, p — плечи моментов этих грузов, а также погонная интенсивность постоянной равномерно распределенной нагрузки.

P — потенциальная энергия: P_n — от нормальной силы, P_c — от сдвига P_m — от изгиба моментами, P_k — от касательных напряжений при изгибе.

q — погонная интенсивность временной равномерно распределенной нагрузки.

Q — поперечная сила, называемая нередко срезывающей, перерезывающей или касательной силой.

Q^0 — та же сила только для простой балки, освобожденной от лишних связей, вызванная исключительно только нагрузкой.

Q^u — та же, вызванная исключительно только опорными моментами.

R_m — реакция m -ой опоры неразрезной балки, исчисляемая, как сумма реакций, получающихся от действия нагрузки и лишних реактивных опорных моментов:

$$R_m = B_m^0 + B_m^u + A_{m+1}^0 + A_{m+1}^u$$

R'_m — фиктивная реакция той же опоры, исчисляемая от действия эпюры моментов, как от грузовой площади. $\delta R'$ обозначается r .

r — радиус кривизны осевой линии бруска, линия центров, геометрической оси.

ρ — радиус кривизны нейтральной линии изгибаемого бруска, а также перемещение конца бруска при повороте его оси: $\psi = \frac{\rho}{l}$ или $\rho = \psi l$.

ρ или ρ — растяжимость бруска, т. е. его удлинение, получающееся при действии единицы силы: $\rho = \frac{1 \cdot l}{EF}$.

ρ' — растяжимость сечения $\frac{1}{EF}$, т. е. удлинение единицы длины, вызванное единицей силы.

S — статический момент площади поперечного сечения, либо части этой площади а также — усилие в стержнях фермы.

S^0 — усилие только от нагрузки с соответствующими ей опорными реакциями (в основной ферме без лишних связей).

S_1 — усилие в основной ферме от единицы вместо лишнего стержня.

s — длина дуги, s' — гибкая или приведенная длина дуги. т. е. $s' = \frac{s}{EJ}$ или $s' = \frac{s}{J} J_0$.

σ — пуассоново отношение.

T — работа деформации.

t — температура.

t — касательное (тангенциальное) напряжение.

t^0 — допускаемое напряжение на срезывание.

θ — углы между элементами упругой системы.

$\delta\theta$ — изменение этих углов.

V — усилие нижнего пояса стержневой фермы; в этом случае: O — усилие верхнего пояса, D — усилие диагонали или раскоса. Усилие вообще — S .

V — вертикальная составляющая опорной реакции или — усилие вертикальной стойки стержневой фермы.

W — момент сопротивления поперечного сечения.

x_0 — абсцисса нулевой точки, где $Q=0$ и M — максимальное.

x и x' — расстояния сечения балки AB , соответственно, до опор A и B ; они выражаются иногда в частях m пролета $x = ml$ и $x' = m'l$, где m — называется относительной абсциссой сечения.

x_x и x_y — перемещения точки, соответствующей силе X , вызванные единичной силой X или Y , как указывает подстрочный индекс. Точно также y_y и y_x — перемещения соответствующие Y и вызваны либо $Y=1$ либо $X=1$.

X, Y, Z — оси координат. При исследовании балок X — всегда продольная ось, Y — вертикальная ось поперечного сечения, Z — горизонтальная ось того же сечения, обычно совпадающая с нейтральной осью. При этом уравнение упругой линии всегда будет: $y = f(x)$, момент инерции для формулы напряжения: $J_x = kbh^3$.

η — расстояние воаокна до нейтральной оси Z .

X, Y, Z — лишние неизвестные статически неопределимых систем.

$\xi = \frac{a}{l}$ и $\xi' = \frac{b}{l}$ — относительные расстояния груза в пролете, считая ξ от левой и ξ' — от правой опоры пролета.

$\varsigma = \frac{1 \cdot l^3}{3EJ}$ — упругая податливость плоскости заделки бруска; она определяется, как поворот плоскости, происходящий от действия единичного момента.

$\frac{1}{\varsigma}$ — называется степенью заделки.

$z' = \frac{M}{M^0}$ — коэффициент заделки, выражающий отношение между моментом в плоскости заделки и моментом простой балки при той же нагрузке.

Балки с лишними закреплениями.

В в е д е н и е.

Расчет поперечного сечения балки производится без затруднений, по основным формулам теории изгиба:

$$n = \frac{M\eta}{J}, \quad t = \frac{QS}{J \cdot b}, \quad y = f(x),$$

если построены эпюры:

моментов M , поперечных сил Q , прогибов y ;
при подвижной нагрузке необходимо иметь линии влияния.

$$M, \quad Q, \quad y.$$

В настоящем отделе книги определяются основные величины расчета M , Q и y для известных типов балок с лишними опорными закреплениями. Обыкновенно мы получаем эти величины после предварительного разыскания лишних неизвестных, пользуясь выражениями для деформации балки; поэтому здесь прежде всего приводятся таблицы этих выражений.

Когда определены лишние неизвестные, мы их действие на простую балку алгебраически складываем с действием нагрузки; результат сложения будет искомой расчетной величиной.

Таким образом, начальной задачей расчета является определение лишних неизвестных.

Обыкновенно условиями закрепления балки предоставляется некоторая свобода в выборе неизвестных: мы можем посчитать за лишнее то или иное закрепление, лишь бы только после его отбрасывания получилась неизменяемая система. Однако удачное назначение лишних связей может облегчить, как определение самого лишнего неизвестного, так и дальнейшее разыскание расчетных величин M , Q , y . Поэтому при практических расчетах выбору лишних неизвестных следует уделять надлежащее внимание, в особенности при большом числе неизвестных.

Положим, например, что определяется линия влияния для изгибающего момента в третьем пролете пятипролетной балки. Если за лишние принять реакции средних опор, то, во первых, самое определение их по уравнениям упругой линии сложнее и грубее, чем определение опорных моментов по теореме о трех моментах, а во вторых, в выражение изгибающего момента войдут, кроме нагрузки, три реактивные силы, расположенные с одной стороны сечения; очевидно, при построении линии влияния момента, придется складывать линию простой балки с линиями влияния для трех опорных реакций неразрезной балки. Если же за лишние

Справочные таблицы по деформации балок.

Таблица I: консоли.

<p style="text-align: center;">$A=0, Q_x=0.$</p>	<p style="text-align: center;">$A=P, Q_x=P.$</p>	<p style="text-align: center;">$A=ql, Q_x=q(l-x).$</p>	<p style="text-align: center;">$A=P, Q_x=P(1-\frac{x}{l}).$</p>
<p style="text-align: center;">$M_x=M_0.$</p>	<p style="text-align: center;">$M_x=-P(l-x).$</p>	<p style="text-align: center;">$M_x=-\frac{q}{2}(l-x)^2.$</p>	<p style="text-align: center;">$M_x=-\frac{P}{3}(1-\frac{x}{l})^3.$</p>
<p style="text-align: center;">$y=\frac{M_0x^2}{2EI}$</p>	<p style="text-align: center;">$y=-\frac{Pl^2}{6EI}x^2(3-\frac{x}{l}).$</p>	<p style="text-align: center;">$y=\frac{ql^4}{24EI}(6\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}).$</p>	<p style="text-align: center;">$y=-\frac{P}{30EI}[(1-\frac{x}{l})^5+5\frac{x}{l}-1].$</p>
<p>$\alpha=0, \beta=\frac{M_0l}{EI}.$</p> <p>$y_{\max.}=\frac{M_0l^2}{2EI}.$</p>	<p>$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{2EI}.$</p> <p>$y_{\max.}=-\frac{Pl^3}{3EI}.$</p>	<p>$\alpha=0, \beta=-\frac{ql^3}{6EI}.$</p> <p>$y_{\max.}=-\frac{ql^4}{8EI}.$</p>	<p>$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{12EI}.$</p> <p>$y_{\max.}=-\frac{Pl^3}{15EI}.$</p>

Таблица II: консоли:

<p style="text-align: center;">$A=P, Q_x=P(1-\frac{x}{l^2}).$</p>	<p style="text-align: center;">$A=P, Q_1=P, Q_2=P(1-\frac{x}{a}+\frac{x}{b})(1-\frac{x}{l}).$</p>	<p style="text-align: center;">$A=qb, Q_1=qb, Q_2=q(1-x_2).$</p>	<p style="text-align: center;">$A=qa, Q_1=q(a-x), Q_2=0.$</p>
<p style="text-align: center;">$M_x=-\frac{P}{3}(1-\frac{x}{l})^2(2+l).$</p>	<p style="text-align: center;">$M_1=-P(\alpha-x+\frac{2}{3}b), M_2=\frac{1}{3}Pa(2\frac{b}{l}-1+\frac{x}{a})(1-\frac{x}{l}).$</p>	<p style="text-align: center;">$M_1=-qb^2(a+\frac{1}{2}b-x), M_2=-\frac{1}{2}ql^2(1-\frac{x}{l})^2.$</p>	<p style="text-align: center;">$M_2=0.$</p>
<p style="text-align: center;">$y=-\frac{Pl^3}{60EI}(20\frac{x^2}{l^2}-10\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^5}{l^5})$</p>	<p style="text-align: center;">$y_1=-\frac{1}{60EI}x^3(3+2\frac{b}{a}-\frac{x}{a}), y_2=-\frac{1}{60EI}Pb^2[\frac{1}{8}x^5-5\frac{b}{8}x^4-10\frac{1}{8}(\frac{1}{b}-\frac{a}{b})x^3+10\frac{1}{8}x^2(2-\frac{a}{b})x-\frac{x^2}{8}+5\frac{a^2}{8}x-\frac{a^5}{8}].$</p>	<p style="text-align: center;">$y_1=-\frac{qb^2}{12EI}(6l-3b-2x), y_2=-\frac{1}{24}ql^4(\frac{6x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+6\frac{x^5}{l^5}-4\frac{x^6}{l^6}+\frac{x^7}{l^7}).$</p>	<p style="text-align: center;">$y_1=\frac{qa^4}{24EI}(\frac{6x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}), y_2=\frac{qa^4}{24EI}(1-4\frac{x}{a}).$</p>
<p>$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{4EI}.$</p> <p>$y_{\max.}=-\frac{11}{60}\frac{Pl^3}{EI}.$</p>	<p>$\alpha=0,$</p> <p>$\beta_a=-\frac{Pa^2}{6EI}(3+4\frac{b}{a}),$</p> <p>$\beta_l=-\frac{Pb^2}{12EI}(1-4\frac{b}{l}+6\frac{b^2}{l^2}).$</p> <p>$y_a=-\frac{Pa^3}{3EI},$</p> <p>$y_l=-\frac{1}{60}\frac{Pl^3}{EI}(20-10\frac{b}{l}+\frac{b^3}{l^3}).$</p>	<p>$\alpha=0, \beta_a=-\frac{qa^2l}{2EI}.$</p> <p>$\beta_l=-\frac{1}{6}ql^3(1-\frac{a^3}{l^3})$</p> <p>$y_a=\frac{qa^2}{12EI}(4l-b).$</p> <p>$y_l=-\frac{1}{24}\frac{ql^4}{EI}(3-4\frac{a^2}{l^2}+\frac{a^4}{l^4}).$</p>	<p>$\alpha=0, \beta_a=-\frac{1}{12}qa^3,$</p> <p>$\beta=-\frac{1}{12}qa^3=Const.$</p> <p>$y_a=-\frac{1}{12}qa^3,$</p> <p>$y_{\max.}=\frac{qa^4}{24EI}(1-4\frac{b}{a}).$</p>

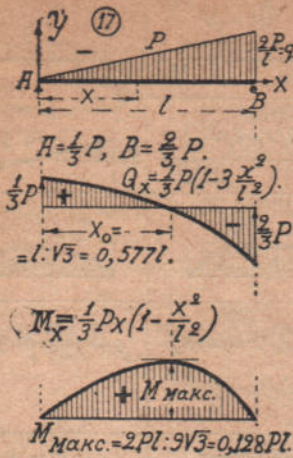
Таблица III: чистый изгиб и балки с грузами.

$A=0, Q_x=0.$	$Q_1 = \frac{P\beta}{l}, Q_2 = -\frac{P\alpha}{l}$	$A=P, Q_1=P, Q_2=0.$	$A=B=\frac{1}{2}ql, Q_x = \frac{1}{2}q(l-2x).$
$M_x = M = \text{const.}$	$M_1 = \frac{P\beta}{l}x_1, M_2 = \frac{P\alpha}{l}(l-x_2)$	$M_1 = P\alpha, M_2 = P\alpha$	$M_x = \frac{1}{2}qlx(1-\frac{x}{l}).$
$y = -\frac{1}{2} \frac{Mx}{EI} (l-x).$	$y_1 = -\frac{P\beta l}{6EI} (1-\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2})x,$ $y_a = -\frac{P\alpha\beta^2}{3EI}, y_{1/2} = -\frac{P\beta l^2}{48EI} (3-4\frac{x^2}{l^2})$ $y_{\text{манс.}} = -\frac{P\beta l^2}{9EI} (1-\frac{x^2}{l^2}) \sqrt{\frac{1-x^2}{l^2}}$ при $x = l\sqrt{\frac{1}{3}(1-\frac{\alpha}{\beta})}$.	$y_1 = -\frac{P}{6EI} [3\alpha(l-\alpha)x - x^3],$ $y_2 = -\frac{P\alpha}{6EI} [3(lx-x^2) - \alpha^2].$	$y = -\frac{ql^4}{24EI} (\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}).$
$\alpha = \beta = -\frac{Ml}{2EI}.$ $y_{\text{манс.}} = -\frac{Ml^2}{8EI}.$	$\alpha = -\frac{P\beta l}{6EI} (1-\frac{x^2}{l^2}), \beta = \frac{P\alpha l}{6EI} (1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}).$ При $\alpha = \frac{1}{2}l: \alpha = -\frac{Pl}{16EI},$ $y_{\text{манс.}} = -\frac{Pl^2}{48EI}.$	$\alpha = \beta = -\frac{P\alpha}{6EI} (l-\alpha).$ $y_a = -\frac{P\alpha^2}{6EI} (3l-4\alpha).$ $y_{\text{манс.}} = -\frac{P\alpha^3}{24EI} (3\frac{l^2}{\alpha^2} - 4).$	$\alpha = -\beta = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}.$ $y_{\text{манс.}} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$

Таблица IV: балки с моментами.

$A = +\frac{M_B}{2} = -B,$ $Q_x = A = \frac{M_B}{l}$	$A = \frac{M_B - M_A}{l} = -B, \frac{M_B - M_A}{l}$ $Q_x = A = \frac{1}{l} (M_B - M_A)$	$A = -\frac{M_B + M_A}{l} = -B.$	$A = \frac{M_0}{l}, B = -\frac{M_0}{l}.$
$M_x = \frac{M_B}{l}x; (M_x = \frac{l-x}{l} M_A, M_x = \frac{x}{l} M_B)$	$M_x = \frac{x}{l} M_B + \frac{l-x}{l} M_A$	$M_x = \frac{l-x}{l} M_A - \frac{x}{l} M_B$	$M_x = M_0 \frac{x}{l}, M_x = -M_0 (1-\frac{x^2}{l^2}).$
$y = -\frac{M_B l}{6EI} x (1-\frac{x^2}{l^2}).$ при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI}$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI}, \beta = \frac{M_B l}{3EI}$ $y_{\text{манс.}} = -0,064 \frac{M_B l^2}{EI}$ при $x = l\sqrt{3} = 0,577l.$	$y = -\frac{M_B l}{6EI} x [2 + \frac{M_B}{M_A} - 3\frac{x}{l} - \frac{(M_B - 1)x^2}{l^2}].$ при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI} (1 + \frac{M_B}{M_A}).$ $y_{\text{манс.}} \text{ при } x = l \cdot [1 - \sqrt{\frac{1}{3} \frac{M_B + M_A}{M_A}}] \cdot (1 - \frac{M_B}{M_A}).$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI} (2 + \frac{M_B}{M_A}).$ $\beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 + 2 \frac{M_B}{M_A}).$	$y = -\frac{M_B l}{6EI} x (2 - \frac{M_B}{M_A} - 3\frac{x}{l} + \frac{(M_B + 1)x^2}{l^2}).$ при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI} (1 - \frac{M_B}{M_A}).$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI} (2 - \frac{M_B}{M_A}).$ $\beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 - 2 \frac{M_B}{M_A}).$	$y_1 = \frac{M_0 l}{6EI} x (2 - 6\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}).$ $y_2 = \frac{M_0 l^2}{6EI} (\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x}{l} + 3\frac{\alpha^2}{l^2} \frac{x}{l} - 3\frac{\alpha^2}{l^2}).$ $y_{1/2} = \frac{3}{16} \frac{M_0 l^2}{EI} + \frac{M_0 \alpha^2}{4EI} (1 - 2\frac{\alpha}{l}).$ $y_c = \frac{M_0 \alpha}{3EI} (l-\alpha)(2\alpha-l).$ $y_{\text{манс.}} \text{ при } x = l\sqrt{\frac{2\alpha}{l} - \frac{\alpha^2}{l^2}}.$
$y = \frac{M_B l}{6EI} x (2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}).$	$\alpha = -\frac{M_B l}{6EI} (2 + \frac{M_B}{M_A}).$ $\beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 + 2 \frac{M_B}{M_A}).$	$\beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 - 2 \frac{M_B}{M_A}).$	$\alpha = -\frac{M_0 \alpha}{6EI} (6 - 2\frac{\alpha}{l} - 3\frac{\alpha}{l}),$ $\beta = -\frac{M_0 b}{6EI} (6 - 2\frac{l}{b} - 3\frac{\alpha}{l}).$

Таблица V: балки с треугольной нагрузкой.



$$y = -\frac{Pl^3}{180EJ} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right).$$

$$\alpha = -\frac{7Pl^2}{180EJ}, \quad \beta = \frac{8Pl^2}{18EJ}.$$

$$y_{\text{макс.}} = -0,01304 \frac{Pl^3}{EJ}$$

при $x = l\sqrt{1 - \sqrt{8/15}} = 0,5193l.$

При $x = 1/2l;$

$$y = -\frac{5Pl^3}{384EJ}.$$

К столбцу 18.

Углы поворота при треугольной нагрузке, не доходящей до опоры B

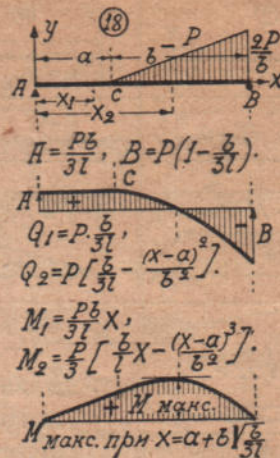
$$\alpha = \frac{qc}{72lEJ} \left[6x(l-x)(2l-x) - c^2(l-x + \frac{2}{45}c) \right]$$

$$\beta = \frac{qc}{72lEJ} \left[6x(l-x)(l+x) - c^2(x - \frac{2}{45}c) \right]$$

где: x — расстояние центра тяжести нагрузки до A,

q — максимальная интенсивность нагрузки,

c — длина грузовой площади (вместо b).



$$y_1 = \frac{Pbl}{180EJ} x \left(10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{b^2}{l^2} - 10 \right).$$

$$y_2 = \frac{Pbl}{180EJ} \left[10 \frac{x^3}{l^2} + 3 \frac{b^2}{l^2} x - 10x - \sqrt{-3} \frac{(x-\alpha)^5}{lb^3} \right]$$

$$y_c = -\frac{Pabl}{180EJ} \left(20 \frac{b}{l} - 13 \frac{b^2}{l^2} \right).$$

$$\alpha = -\frac{Pbl}{180EJ} \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right),$$

$$\beta = \frac{Pbl}{180EJ} \left(20 + 3 \frac{b^2}{l^2} - 15 \frac{b}{l} \right).$$

Частный случай: $a = b = 1/2l.$

$$A = 1/6 P, B = 5/6 P.$$

$$Q_1 = 1/6 P, Q_2 = P \left[\frac{1}{6} - \frac{(2x-l)^2}{l^2} \right].$$

$$M_1 = 1/6 Px, M_2 = 1/6 P \left[x - \frac{(2x-l)^3}{l^2} \right].$$

$$M_{\text{макс.}} = 1/12 Pl \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{9} \right) = 0,106Pl$$

при $x = 1/2l \left(1 + \sqrt{1/6} = 0,704l, \right.$

$M = 1/12 Pl$ при $x = 1/2l.$

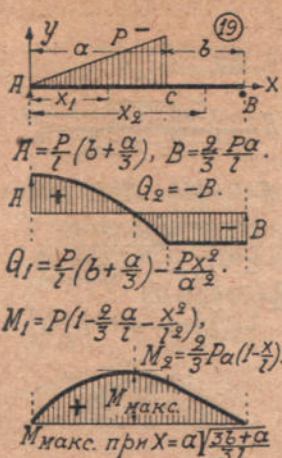
$$y_1 = \frac{Pl^2}{360EJ} x \left(10 \frac{x^2}{l^2} - 9,25 \right),$$

$$y_2 = \frac{Pl^3}{360EJ} \left[10 \frac{x^3}{l^3} - \frac{3}{4} \frac{(2x-l)^5}{l^5} - 9,25 \frac{x}{l} \right],$$

$$y = -\frac{3Pl^3}{320EJ} \text{ при } x = 1/2l.$$

$$\alpha = -\frac{37Pl^2}{1440EJ}, \quad \beta = \frac{53Pl^2}{1440EJ}.$$

Таблица VI: балки с треугольной нагрузкой.



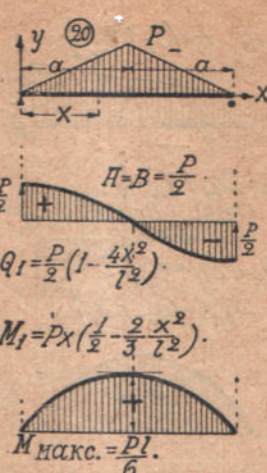
$$A = \frac{P}{l} \left(b + \frac{\alpha}{3} \right), \quad B = \frac{2}{3} \frac{P\alpha}{l}$$

$$Q_1 = \frac{P}{l} \left(b + \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{Px}{\alpha^2}$$

$$M_1 = P \left(l - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$M_2 = \frac{2}{3} P\alpha \left(l - \frac{x}{l} \right)$$

$$M_{\text{макс.}} \text{ при } X = \alpha \sqrt{\frac{3b+\alpha}{3l}}$$



$$A = B = \frac{P}{2}$$

$$Q_1 = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)$$

$$M_1 = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$M_{\text{макс.}} = \frac{Pl}{6}$$

а) Горка.

$$y_1 = - \frac{Pl^3}{12EJ} \left(\frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right)$$

$$-\alpha = +\beta = \frac{5}{96} \frac{Pl^2}{EJ}$$

$$y_{\text{макс.}} = - \frac{Pl^3}{60EJ}$$

б) Седло.

Если симметрично расположить два треугольника столбца 18-го, то по середине пролета будет впадина, а по краям — максимальные ординаты q .

Для этого случая

$$\alpha = \beta = \frac{ql^3}{64EJ} = \frac{Pl^2}{32EJ}$$

В общих случаях буквою P обозначен весь груз, лежащий на балке:

$$P = \frac{1}{2} ql$$

где q — максимальная интенсивность нагрузки,

l — весь пролет балки.

$$y_1 = - \frac{Pa^2x}{180EJ} \left[3 \frac{x^4}{a^4} + 10 \left(2 \frac{a}{l} - 3 \right) \frac{x^2}{a^2} - 3 \left(15 - 4 \frac{a}{l} \right) + 40 \frac{l}{a} \right]$$

$$y_2 = - \frac{Pa^2}{45EJ} \left[5 \frac{x^3}{l^3} - 15 \frac{x^2}{l^2} + \left(3 \frac{a^2}{l^2} + 10 \right) \frac{x}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} \right]$$

$$y_c = - \frac{2}{45} \frac{Pa^2l}{EJ} \left(5 - 9 \frac{a}{l} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$\alpha = - \frac{Pal}{180EJ} \left(12 \frac{a^2}{l^2} - 45 \frac{a}{l} + 40 \right)$$

$$\beta = \frac{Pal}{45EJ} \left(5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right)$$

Частный случай: $a = b = \frac{1}{2}l$.

$$A = \frac{2}{3}P, \quad B = \frac{1}{3}P$$

$$Q_1 = 2P \left(\frac{1}{3} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad Q_2 = - \frac{1}{3}P$$

$$M_1 = \frac{2}{3}P \left(x - 2 \frac{x^3}{l^2} \right), \quad M_2 = \frac{1}{3}P(l - x)$$

$$M_{\text{макс.}} = \frac{2}{9}Pl \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,1815Pl$$

$$\text{при } x = \frac{1}{2}l \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,408l$$

$$M = \frac{1}{6}Pl \text{ при } x = \frac{1}{2}l$$

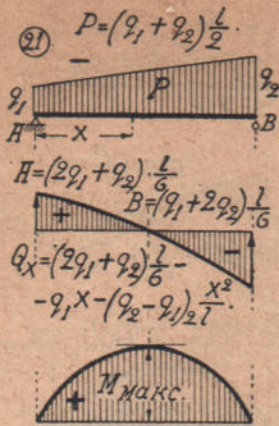
$$y_1 = - \frac{Pl^3}{720EJ} \left(48 \frac{x^5}{l^5} - 80 \frac{x^3}{l^3} + 41 \frac{x}{l} \right)$$

$$y_2 = - \frac{Pl^3}{360EJ} \left(20 \frac{x^3}{l^3} - 60 \frac{x^2}{l^2} + 43 \frac{x}{l} - 3 \right)$$

$$y = - \frac{Pl^3}{60EJ} \text{ при } x = \frac{1}{2}l$$

$$\alpha = - \frac{41}{720} \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \beta = \frac{17}{360} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Таблица VII: трапециодальная и местная нагрузка.



$$M_x = (2q_1 + q_2) \frac{lx}{6} - q_1 \frac{x^2}{2} - (q_2 - q_1) \frac{x^3}{6l}$$

$M_{\text{макс. при}}$

$$x = \frac{l}{q_2 - q_1} \left[\sqrt{\frac{1}{3} (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2)} - q_1 \right]$$

$$y = -\frac{l^4}{360EJ} \left[3 (q_2 - q_1) \frac{x^5}{l^5} + 15q_1 \frac{x^4}{l^4} - 10 (2q_1 + q_2) \frac{x^3}{l^3} + (8q_1 + 7q_2) \frac{x}{l} \right]$$

$$\alpha = -\frac{(8q_1 + 7q_2)l^3}{360EJ}; \quad \beta = \frac{(7q_1 + 8q_2)l^3}{360EJ}$$

При $x = 1/2 l$: $y = -\frac{5(q_1 + q_2)l^4}{768EJ} = -\frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$

К столбцу 22 углы поворота.

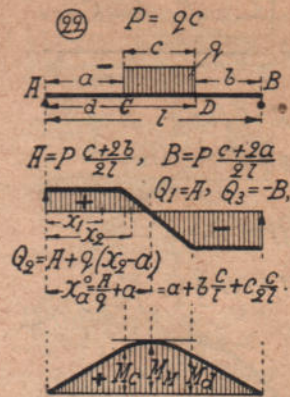
При $a \geq b$:

$$\alpha = \frac{qc(b + 1/2c)}{6lEJ} [(a + 1/2c)(l + b + 1/2c) - 1/4c^2]$$

$$\beta = \frac{qc(a + 1/2c)}{6lEJ} [(b + 1/2c)(l + a + 1/2c) - 1/4c^2]$$

При $a = b$:

$$\alpha = \beta = \frac{qc}{48EJ} (3l^2 - c^2)$$



$$M_1 = Ax_1, \quad M_2 = Ax_2 - \frac{1}{2} q (x_2 - a)^2 =$$

$$= P \left[\frac{c + 2b}{2l} x - \frac{(x - a)^2}{2c} \right],$$

$$M_3 = P \frac{c + 2b}{2l} (l - x).$$

$$M_{\text{макс.}} = \frac{A}{q} - \frac{1}{2} (A - qa)^2 \text{ при } x^0 a = \frac{A}{q} +$$

$$+ a = P \frac{c + 2b}{8l^2} (c^2 + 2bc + 4al).$$

$$M_c = \frac{Pa(c + 2l)}{2l}, \quad M_d = \frac{Pb(c + 2a)}{2l}$$

Частный случай: $a = b$.

$$A = B = 1/2 P = 1/2 qc$$

$$Q_1 = 1/2 P, \quad Q_2 = 1/2 q(l - 2x).$$

$$M_1 = 1/2 P x, \quad M_2 = 1/2 P \left[x - \frac{1}{c} (x - a)^2 \right].$$

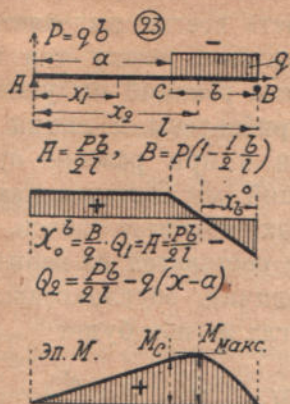
$$M_c = M_d = 1/2 Pa.$$

$$y_1 = -\frac{Pl^3}{48EJ} \left[\left(3 - \frac{c^2}{l^2} \right) \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right]$$

$$y_a = -\frac{Pal^2}{24EJ} \left(1 + \frac{c}{l} - \frac{c^2}{l^2} \right)$$

$$y_2 = -\frac{P}{48EJ} \left[\frac{2}{c} (x - a)^4 - 4x^3 + l^2 \left(3 - \frac{c^2}{l^2} \right) x \right]$$

Таблица VIII: местная нагрузка.



$$M_1 = \frac{1}{2} Pb \frac{x}{l}, \quad M_c = \frac{1}{2} Pb \frac{a}{l},$$

$$M_2 = \frac{1}{2} Pb \left[\frac{x}{l} - \frac{(x-a)^2}{b^2} \right]$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8} Pb \left(4 \frac{a}{l} + \frac{b^2}{l^2} \right) \text{ при } x_0 = \frac{B}{q}$$

$$y_1 = -\frac{Pblx}{24EJ} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$y_c = -\frac{Pab^2}{24EJ} \left(4 - 3 \frac{b}{l} \right)$$

$$y_2 = -\frac{Pbl^2}{24EJ} \left[\frac{(x-a)^4}{b^2 l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} - \frac{b^2 x}{l^2} + 2 \frac{x}{l} \right]$$

$$\alpha = -\frac{Pbl}{24EJ} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} \right), \quad \beta = \frac{Pbl}{24EJ} \left(2 - \frac{b}{l} \right)^2$$

Частный случай: $a = b = \frac{1}{2} l$.

$$A = \frac{1}{4} P, \quad B = \frac{3}{4} P, \quad M_1 = \frac{1}{4} Px.$$

$$M_2 = \frac{1}{4} Pl \left(5 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^2}{l^2} - 1 \right).$$

$$M_{1/2} = \frac{1}{8} Pl, \quad M_{\max} = \frac{9}{64} Pl$$

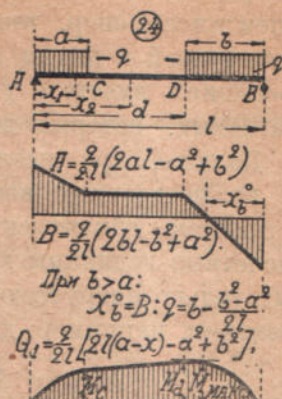
$$y_1 = -\frac{Pl^3}{192EJ} \left(7 \frac{x}{l} - 8 \frac{x^3}{l^3} \right).$$

$$y^2 = -\frac{Pl^3}{192EJ} \left[7 \frac{x}{l} - 8 \frac{x^3}{l^3} + \left(2 \frac{x}{l} - 1 \right)^4 \right]$$

$$y_{1/2} = -\frac{5 Pl^3}{384 EJ}$$

$$q_{\max} = -0,01313 \frac{Pl^3}{EJ} \text{ при } x = 0,54l.$$

$$\alpha = -\frac{7 Pl^2}{192 EJ}, \quad \beta = \frac{9 Pl^2}{192 EJ}.$$



$$M_1 = \frac{q}{2l} (2al - a^2 + b^2) x - q \frac{x^2}{2},$$

$$M_2 = \frac{q}{2l} (2al - a^2 + b^2) x - q \frac{a}{2} (2x - a).$$

$$M_3 = \frac{q}{2l} (2bl - b^2 + a^2) (l - x) - \frac{q}{2} (l - x)^2.$$

$$\alpha = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(2 \frac{b^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} + 4 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right).$$

$$\beta = \frac{ql^3}{24EJ} \left(2 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} + 4 \frac{b^2}{l^2} + \frac{b^4}{l^4} - 4 \frac{b^3}{l^3} \right).$$

$$y_{c1} = -\frac{qal^3}{24EJ} \left(2 \frac{b^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{l^4} + 4 \frac{a^2}{l^2} - \right.$$

$$\left. - 7 \frac{a^3}{l^3} + 3 \frac{a^4}{l^4} \right)$$

$$y_d = -\frac{qbl^3}{24EJ} \left(2 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{l^4} + 4 \frac{b^2}{l^2} - \right.$$

$$\left. - 7 \frac{b^3}{l^3} + 3 \frac{b^4}{l^4} \right)$$

Частный случай: $a = b$.

$$\alpha = -\beta = -\frac{qa^2 l}{12EJ} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right),$$

$$y_c = y_d = -\frac{qa^3 l}{24EJ} \left(6 - 7 \frac{a}{l} \right)$$

$$y_{\max} = -\frac{qa^2 l^2}{48EJ} \left(3 - 2 \frac{a}{l^2} \right).$$

неизвестные в той же пятипролетной балке принять опорные моменты, то придется к линии простой балки прибавить только две линии: левого и правого опорных моментов. Это число, сложений остается постоянным и при большем числе опор, так как при расчете всегда выделяется один пролет с нагрузкой и двумя опорными моментами, между тем как, при лишней реакции, вместе с увеличением числа реакций мы увеличиваем число слагаемых, которые должны быть прибавлены к линии влияния нагрузки. Дальше, при исследовании балок и при разборе отдельных примеров, из нескольких возможных решений мы останавливаемся на наиболее простом, обыкновенно, — на опорных моментах балок. В этом случае расчетные величины каждого пролета составятся из величин, обусловленных только нагрузкою пролета, и величин, обусловленных опорными моментами, например: для концевго угла изгиба будет:

$$\alpha = \frac{\omega \cdot c'}{l EJ} + \frac{M_A l}{3 EJ} + \frac{M_B l}{6 EJ} = \frac{l}{6 EJ} \left(2M_A + M_B + 6\omega \frac{c'}{l^2} \right), \dots (a).$$

где ω — площадь эпюры моментов, обусловленной только нагрузкой. В виду важности этого случая для приложений, преобразуем выражение и приведем формулы для часто встречающихся видов нагрузки. Обозначим момент, вызванный нагрузкой посередине пролета, буквою M_C , а отношение $\frac{6\omega c'}{l^2} : M_C$ — буквою a_α ; тогда $6\omega \frac{c'}{l^2} = M_C a_\alpha$, следовательно:

$$\alpha = \frac{l}{6 EJ} \left(2M_A + M_B + a_\alpha M_C \right), \dots (b).$$

Таким же образом, для правого угла получим:

$$\beta = \frac{l}{6 EJ} \left(2M_B + M_A + b_\beta M_C \right), \dots (c).$$

где $b_\beta = \frac{6c}{l^2} \cdot \frac{\omega}{M_C}$. Следовательно, концевые углы изгиба одного пролета выражаются через концевые моменты и момент по середине. Называя

$$EJ : l — \dots (d).$$

„погонною“ жесткостью и обозначая буквою j , выразим эти углы формулами:

$$6j\alpha = 2M_A + M_B + a_\alpha M_C$$

$$6j\beta = 2M_B + M_A + b_\beta M_C, \dots (e)$$

в которых коэффициенты углов a_α и b_β определяются исключительно только нагрузкою пролета и вычисляются предварительно по формулам:

$$a_\alpha = 6\omega c' : M_C l^2 \text{ и } b_\beta = 6\omega c : M_C l^2 \dots (f).$$

Аналогичную формулу можно составить и для стрелки прогиба:

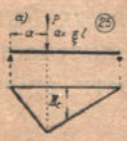
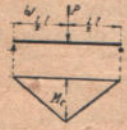
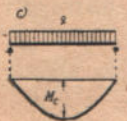
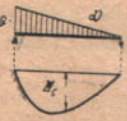
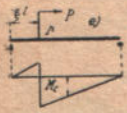
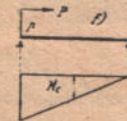
$$16j\delta = (M_A + M_B + c_1 M_C) l, \dots (g).$$

где коэффициент прогиба c_1 определяется для каждого случая нагрузки.

Приводим таблицу коэффициентов упругой линии для наиболее употребительных случаев загрузки, выражая расстояние точки приложения груза до опор в частях пролета l :

$$a = \xi l \text{ и } b = \xi' l. \dots \dots \dots (h)$$

ТАБЛИЦА IX.

Столбец 25	Случай нагрузки по столбцу 25	M_c	a_α	b_β	c
	Сосредоточенный груз по фиг. а)	$\frac{1}{2} P \xi l$	$4 - 6\xi + 2\xi^2$	$2 - 2\xi^2$	$2 - \frac{8}{3}\xi^2$
	Сосредоточенный груз по середине пролета по фиг. б)	$\frac{1}{4} Pl$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
	Равномерная нагрузка по фиг. с)	$\frac{1}{8} ql^2$	2	2	$\frac{5}{3}$
	Треугольная нагрузка по фиг. д)	$\frac{1}{16} ql^2$	$\frac{32}{15}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{5}{3}$
	Активный момент $aM = Pr$ по фиг. е)	$\frac{1}{2} aM$	$4 - 6\xi + 3\xi^2$	$2 - 6\xi^2$	$2 - 8\xi^2$
	Концевой активный момент по фиг. ф)	$\frac{1}{2} aM$	4	2	2

2357

«Исследования»
Институт в Киев

Примечание: При нескольких сосредоточенных грузах можно пользоваться первой строкой по принципу сложения действий. При большом числе грузов, например 5 и более, можно пользоваться третьей строкой, так как эпюра моментов становится близкой к параболе и еще менее отличаются упругие линии, построенные для параболической и фактической эпюры.

В последующем часто придется сослаться на способ закрепления балки; поэтому условимся в терминах. Будем отличать защемленные концы балки от опертых концов, называя защемлением или глухой опорой такую опорную связь, которая способна проявить реактивный момент, совершенно лишаящий конец балки свободы вращения. Под опиранием подразумевается шарнирная связь балки с опорой, при чем отличают фиксированный, или неподвижный шарнир, и подвижный шарнир, способный перемещаться по опорной линии. Для простоты, первый назовем шарниром, а второй — катком. В действительности абсолютное защемление неосуществимо благодаря большей или меньшей податливости материала опор, и обыкновенно приходится иметь дело с заделанными концами балки, допускающими в плоскости заделки некоторое отклонение своей первоначальной оси. Тем не менее для простоты расчета обыкновенных балок с глухими концами, считают последние защемленными. Конечно, получается приближенное решение, более или менее вероятное в зависимости от степени заделки (см. ниже).

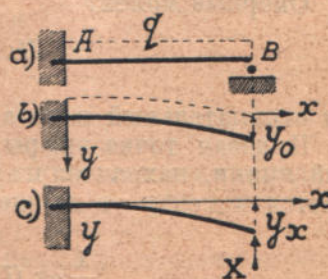
ОДНОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ.

§ 1. Один конец балки зашеченный, другой — на катке (фиг. 1).
 I. Равномерно распределенная нагрузка. а) Реакции опор. Проще всего получить опорные реакции путем уравнивания прогибов конца консоли, получающейся при освобождении балки от катка; при этом один раз прогиб вычисляется от данной нагрузки, другой раз — от лишней неизвестной реактивной силы:

$$\frac{ql^4}{8EJ} = \frac{R_B l^3}{3EJ}, \text{ откуда } R_B = \frac{3}{8} ql \dots (1).$$

Реакция зашеченного конца должна быть

$$R_A = ql - \frac{3}{8} ql = \frac{5}{8} ql \dots (2).$$



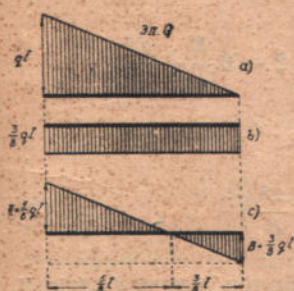
Фиг. 1.

Оказывается, что нагрузка неравномерно распределяется между опорами: зашеченный конец воспринимает на $\frac{1}{4}$ нагрузки больше, чем каток.

Реактивный момент плоскости зашечения

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{8} ql^2 = \frac{1}{8} ql^2 \dots (3).$$

б) Эпюра поперечных сил Q составляется из двух частей: 1) из треугольника для консоли с наибольшей ординатой ql в плоскости за-



Фиг. 2.

шечения и 2) из прямоугольника с высотой $\frac{3}{8} ql$ по формуле (1). Алгебраическая сумма этих эпюр, представленная на фиг. 2—с) штрихами, определяется реакциями

$$R_B = \frac{3}{8} ql \text{ и } R_A = \frac{5}{8} ql \dots (4).$$

Нулевая точка эпюры, определяющая опасное сечение с максимальным изгибающим моментом, находится на расстоянии $\frac{5}{8} l$ от плоскости зашечения.

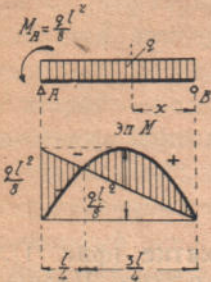
с) Эпюра изгибающих моментов M составляется из параболической эпюры простой балки, освобожденной от реактивного момента, и из треугольной эпюры той же балки, нагруженной реактивным моментом. Наибольшая ордината первой эпюры

$$M = \frac{1}{8} ql^2 \text{ находится по середине,}$$

наибольшая ордината второй—

$$M_A = \frac{1}{8} ql^2 \text{ приходится в плоскости защемления (фиг. 3).}$$

Алгебраическая сумма эпюр на фиг. 3 заштрихована. Выражение для изгибающего момента в каком-нибудь сечении, отстоящем на x от правой опоры (от катка):



$$M_x = \frac{1}{2} qx(l-x) - M_A \frac{x}{l} = \frac{1}{8} qx(3l-4x) \dots (5).$$

Как указывалось в предыдущем разделе, максимальный положительный изгибающий момент приходится на расстоянии $x = \frac{3}{8} l$ от катка. Величина этого момента будет:

$$M_{\frac{3}{8}l} = \frac{9}{128} ql^2 = \frac{1}{14,25} ql^2 = \approx 0,07025 ql^2.$$

Опорный момент

$$M_A = -\frac{1}{8} ql^2 = -0,125 ql^2; \dots (6).$$

он отрицательный и по абс. величине больше положительного на 78%.

Нулевая точка эпюры моментов, определяющая точку перегиба упругой линии, находится из условия, что момент от нагрузки q численно равен моменту от лишней реактивной силы $M_A : l$, т. е. из выражения:

$$\frac{1}{2} qx(l-x) = \frac{x}{l} M_A, \text{ откуда } x = \frac{3}{4} l \dots (7).$$

Точка перегиба упругой линии находится на $1/4$ пролета, считая от защемленного конца.

д) Упругая линия получается путем сложения прогибов простой балки в двух предположениях: а) при действии нагрузки q и б) при действии опорного реактивного момента. Если абсциссы отсчитывать от защемленного конца, то получим:

а) первое уравнение *) $y_1 = -\frac{ql^4}{24EJ} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$

б) второе " $y_2 = +\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l^2}{6EJ} \cdot \frac{x}{l} \left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right),$

так что, результирующее уравнение оказывается:

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{ql^4}{48EJ} \cdot \frac{x^2}{l^2} \left(3 - 5\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right) \dots (8).$$

Это выражение дает не только величину, но и знак прогиба при условии, что ось Y идет против нагрузки q , т. е. вверх.

При отсчитывании абсцисс от катка в сторону защемления для второго уравнения б) получим соответственно:

$$y'_2 = +\frac{ql^4}{48EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

*) См. таблицы „Введения“.

Следовательно, результирующее уравнение будет:

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{ql^4}{48EJ} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right) \dots \dots \dots (9).$$

Прогиб по середине пролета: (10).

$$y_{1/2l} = \frac{ql^4}{192EJ};$$

в простой балке: $y_{1/2l} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$, т. е. в 2,5 раза больше.

Опасное сечение (по прогибу) определяется из условия $dy/dx = 0$. Дифференцируем (8):

$$3 \cdot 2x - \frac{5 \cdot 3x^2}{l} + \frac{2 \cdot 4x^3}{l^2} \text{ и приравниваем нулю;}$$

тогда из уравнения $x^2 - \frac{15}{8}lx + \frac{3}{4}l^2 = 0$,

найдем $x = \frac{1}{16}l(15 - \sqrt{33}) = 0,579l$ (11).

Следовательно, место максимального прогиба сдвигается от середины пролета в сторону катка на величину:

$$0,579l - 0,500l = 0,079l, \text{ т. е. } \infty \text{ на } \frac{1}{13}l^*$$

Максимальный прогиб получим, подставляя (11) в (8):

$$y_{\text{макс.}} = \frac{1}{185} \frac{ql^4}{EJ} \dots \dots \dots (12).$$

В простой балке в 2,41 раза больше.

2. Другие случаи сплошной нагрузки. Таким же образом, при другом законе распределения нагрузки найдем:

а) При треугольной нагрузке фиг. 4.

$$R_A = \frac{1}{10}ql; R_B = \frac{2}{5}ql$$

$$M_x = \frac{1}{10}qlx - \frac{1}{6} \frac{q}{l} x^3.$$

$$+ M_{\text{макс.}} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}} = \infty \frac{ql^2}{33,5} \text{ при } x = \frac{l}{\sqrt{5}} = 0,447l.$$

Нулевая точка эпюры моментов определяется абсциссой

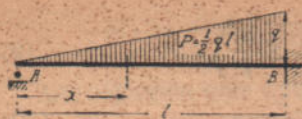
$$x_0 = l \sqrt{0,6} = \infty 0,775l$$

$$M_B = -\frac{1}{15}ql^2.$$

*) Обращаем внимание на то, что сечения с максимальным изгибающим моментом и максимальным прогибом, вообще говоря, не совпадают; в данном случае расстояние между этими сечениями

$$0,421l - 0,375l = 0,046l, \text{ т. е. } \infty \frac{1}{20}l.$$

б) Обратная треугольная нагрузка фиг. 5.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

$$R_A = \frac{11}{40} ql, R_B = \frac{9}{40} ql.$$

$$M_x = \frac{11}{40} qlx - \frac{1}{2} qx^2 + \frac{1}{6l} qx^3$$

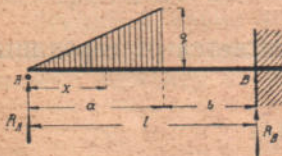
$$+ M_{\max} = \left(\frac{9}{40\sqrt{5}} - \frac{7}{120} \right) ql^2 = \approx \frac{ql^2}{23,7} \text{ при } x = \left(1 - \frac{3}{2\sqrt{5}} \right) l = 0,329 l.$$

Абсцисса нулевой точки $x_0 = \approx 0,725 l$

$$M_B = -\frac{7}{120} ql^2 = \approx -q \frac{l^2}{17,1}.$$

с) Местная треугольная нагрузка, по типу фиг. 4, но не достигающая до плоскости защемления на расстояние b : длина нагрузки a , максимальная интенсивность q (фиг. 6-а);

$$R_A = \frac{qa}{10l^3} (a^3 + 5l^2b), \quad R_B = \frac{qa^2}{10l^3} (5l^2 - a^2)$$



Фиг. 6-а.



Фиг. 6-б.



Фиг. 6-с.

Изгибающий момент в каком-нибудь сечении в пределах нагрузки:

$$M_x = R_A \cdot x - q \frac{x^3}{6a}$$

Момент под концом нагрузки, т. е. для $x = a$:

$$M_a = \frac{qa^2}{30l^3} (10l^3 - 15l^2a + 3a^3).$$

Наибольший момент получается для $x = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{a^3}{5l} + bl}$

$$\text{Опорный момент } M_B = -\frac{qa^2}{30l^2} (5l^2 - 3a^2).$$

д) Нагрузка того же типа, но начинающаяся на расстоянии a от опертого конца балки A и достигающая до плоскости защемления; протяжение нагрузки b (фиг. 6-б):

$$R_A = \frac{qb^2}{40l^3} (5l - b), \quad R_B = \frac{qb}{2} - R_A.$$

Момент под началом нагрузки $M_a = R_A \cdot a$.

Момент на протяжении нагрузки (для $x > a$):

$$M_x = R_A \cdot x - \frac{q(x-a)^3}{6b}$$

Наибольший момент (положительный) получается для

$$x = a + \frac{6^2}{2l} \sqrt{1 - \frac{b}{5l}}.$$

$$\text{Опорный момент } M_B = -\frac{qb^2}{120l^2} (8l^2 + 9la + 3a^2).$$

е) Обратная треугольная местная нагрузка, по типу фиг. 5, но не доходящая до опоры B на расстояние b ; протяжение нагрузки a (фиг. 6-с).

$$R_A = \frac{q}{40al^3} [l^4 (11l - 15b) + b^4 (5l - b)], \quad R_B = \frac{qa}{2} - R_A.$$

Изгибающий момент для сечения в пределах нагрузки на расстоянии x от плоскости защемления:

$$M_x = R_B x + M_B - \frac{q(x-b)^3}{6a}.$$

Момент под концом нагрузки:

$$M_a = R_A \cdot a - \frac{qa^2}{3}.$$

Опорный момент

$$\begin{aligned} M_B &= R_A \cdot l - \frac{qa}{6} (3b + 2a) = \\ &= \frac{q}{40al^2} \left[l^4 (11l - 15b) + b^4 (5l - b) - 20a^2 l^2 \left(b + \frac{2a}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

ф) Треугольная нагрузка для консольной балки (фиг. 7).

$$R_A = \frac{q}{40lL} (10kL^2 + 5l^2L - l^3), \quad R_B = \frac{qL}{2} - R_A.$$

Момент в сечении x , считая от конца консоли 0.

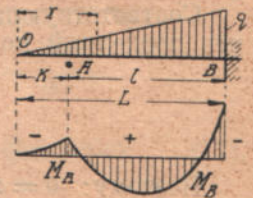
$$\text{При } x < k: \quad M_x = -\frac{qx^3}{6L}$$

$$\text{При } x = k: \text{ опорный момент } M_A = -\frac{qk^3}{6L}$$

$$\text{При } x > k: \quad M_x = R_A(x-k) - \frac{qx^3}{6L}.$$

Если $k < 1,836l$, то наибольший момент получается для

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10kL^2 + 5Ll^2 - l^3}{5l}}.$$



Фиг. 7.

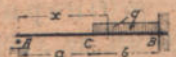
При $k > 1,836l$ численно больший момент получается в плоскости

$$\text{защемления } M_B = -\frac{q}{120L} (8l^3 + 15kl^2 - 10l^3).$$

г) Равномерная нагрузка у защемленного конца (фиг. 8-а).

$$R_A = \frac{qb^2}{8l^3} (4a + 3b); \quad R_B = qb - A.$$

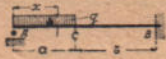
$$M_C = R_A \cdot a; \quad M_x = R_A x - \frac{1}{2} q(x-a)^2.$$



Фиг. 8-а.

$$M_B = -\frac{qb^2}{8l^2} (l+a)^2$$

h) Равномерная нагрузка у опертого конца (фиг. 8-b).



Фиг. 8-b.

$$R_A = \frac{qa}{8l^3} [a^3 + 2l^2(l + 3b)]; R_B = qa - A.$$

$$M_x = R_A x - \frac{1}{2} qx^2;$$

$$M_c = R_A a - \frac{1}{2} qa^2 = \frac{qa^2}{8l^3} [a^3 + 2l^2(3b - l)].$$

$$M_B = -q \frac{a^2}{8l^2} (2l^2 - a^2).$$

i) Прямоугольная нагрузка (фиг. 9).



Фиг. 9.

$$R_A = \frac{q}{8l^3} \left\{ (a+c)^4 - a^4 + 2l^2c[l + 3(b-a)] \right\}.$$

$$R_B = qc - R_A.$$

$$M_A = R_A a; M_x = R_A x - \frac{1}{2} q(x-a)^2,$$

$$M_c = R_A(a+c) - \frac{1}{2} qc^2,$$

$$M_B = R_A l - \frac{1}{2} qc(2b+c) = -\frac{1}{8} \frac{q}{l^2} [a^4 - (a+c)^4 + 2l^2c(2a+c)].$$

3. Сосредоточенные грузы. (фиг. 10). а) Реактивный момент заземления принимаем за лишнюю неизвестную. Освободившись от момента, получаем простую балку, для которой угол наклона концевой касательной,

$$\alpha_0 = -\frac{Pbl}{6EJ} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right).$$

Соответствующий наклон от лишнего момента M_A , в предположении: что последний положителен, т. е. вращает по часовой стрелке, будет:

$$\alpha_m = -\frac{M_A l}{3EJ}.$$

Поэтому: $0 = \alpha_0 + \alpha_m = -\frac{Pbl}{6EJ} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) - \frac{M_A l}{3EJ},$

откуда $M_A = -\frac{1}{2} Pb \left(1 - \frac{l^2}{l^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Fab}{l^2} (b+l) \dots \dots \dots (13-a).$

Наибольшее численное значение принимает момент при

$$b = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577l \text{ и составляет}$$

$$M_{A \text{ мин.}}^* = -\frac{Pl}{3\sqrt{3}} = -0,192Pl \dots \dots \dots (13-b).$$

б) Опорную реакцию B_m от одного только опорного момента определим из уравнения моментов относительно A , т. е. из условия: $\Sigma M_A = 0:$

$$B_m = \frac{M_A}{l}$$

*) Определения „мин. и макс.“ употребляются в математическом смысле.

Реакция $A_M = -B_M$.

Истинные опорные реакции получаются путем суммирования реакций от нагрузки с реакциями от опорного момента:

$$R_A = \frac{Pb}{l} + \frac{1}{2} \frac{Pb}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) = \frac{1}{2} P \frac{b}{l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (14).$$

$$R_B = P \frac{a}{l} - P \frac{(l-a)}{2l^3} [l^2 - (l-a)^2] = \frac{1}{2} P \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) \dots \dots \dots (15).$$

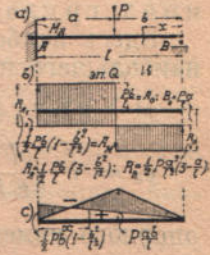
Когда груз P по середине пролета, то:

$$R_A = \frac{11}{16} P \text{ и } R_B = \frac{5}{16} P,$$

так что, груз неравномерно передается на опоры: на защемленную приходится с избытком вдвое больше, чем на каток.

с) Эпюра Q определяется выше найденными реакциями; она представлена на фиг. 10б).

д) Эпюра M от груза P представляет треугольник с высотой $P \frac{a'}{l}$ под грузом; эпюра от реактивного момента — треугольник с высотой $\frac{1}{2} Pb \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)$ в плоскости защемления балки. Алгебраическая сумма эпюр представлена штрихами на фиг. 10—с).



Фиг. 10.

Изгибающий момент для какого-нибудь сечения, взятого между опертым концом и грузом, при условии, что буквой x обозначено расстояние сечений до опертого конца, будет: (применительно к фиг. 10-а).

$$M_x = R_B \cdot x = \frac{1}{2} P x \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) \dots \dots \dots (16)$$

Если же x отсчитывать от защемленного конца, то для сечения между защемленным концом и грузом P :

$$\begin{aligned} M_x &= R_A \cdot x - M_A = \frac{1}{2} P x \frac{b}{l} \left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right) - \frac{1}{2} Pb \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} Pb \left[\left(3 \frac{x}{l} - 1\right) - \left(\frac{x}{l} - 1\right) \frac{b^2}{l^2} \right] \text{ (применительно к фиг. 10-с) } \dots \dots (17). \end{aligned}$$

Момент под грузом P , т. е. при $x = b$ на фиг. 10—а):

$$M_P = \frac{1}{2} Pb \frac{a^2}{l^2} \left(3 - \frac{a}{l}\right) = \frac{1}{2} P \frac{a^2}{l^2} \frac{b}{l} (2l + b) \dots \dots \dots (18)$$

Сравним опорный момент M_A и момент под грузом M_P в частном случае, когда груз P находится посередине пролета. Полагая в вышеприведенных формулах $x = a = b$, получаем:

$$M_A = -\frac{3}{16} Pl = \frac{6}{8} \left(\frac{Pl}{4}\right) \text{ и } M_P = \frac{5}{32} Pl = \frac{5}{8} \left(\frac{Pl}{4}\right) \dots \dots \dots (19).$$

Оказывается, что опорный момент больше, чем момент под грузом, на $1/8$ момента простой балки.

Нулевая точка эпюры моментов (точка перегиба упругой линии) находится, применительно к фиг. 10-с) на расстоянии

$$x = l \cdot \frac{l^2 - b^2}{3l^2 - b^2}, \text{ что при } b = \frac{1}{2} l \text{ дает } x = \frac{3}{11} l.$$

Наибольшее значение, которое может получить изгибающий момент под грузом, определится обычным приемом: дифференцируем (18) по b , приравняем нулю и полученное значение b подставляем в выражение для момента. Получится:

$$(l - b)(2b^2 + 2bl - l^2) = 0, \text{ откуда } b = \frac{1}{2} l (\sqrt{3} - 1) = 0,366l^*).$$

После подстановки в M имеем:

$$M_{\text{макс.}} = \frac{3}{8} (2\sqrt{3} - 3) Pl = 0,174Pl \dots \dots \dots (20).$$

Сравнивая это значение с наибольшим возможным опорным моментом:

$$M_A = -0,192Pl,$$

находим, что опасным сечением балки при всех положениях груза является плоскость защемления.

Здесь наибольший момент на $(0,192 - 0,174) 100:0,174 = 10,3\%$ больше наибольшего положительного момента балки.

е) Упругая линия составляется из линии простой балки:

$$y_0 = P \frac{bl}{6EJ} x \left(\frac{x^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} - 1 \right) \text{ (см. табл. III, столбец 10) и линии для}$$

опорного момента:

$$y_m = \frac{l}{6EJ} \frac{Pb}{2} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) x \left(2 - 3 \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ (см. табл. IV, столб. 13).}$$

Так что, применительно к фиг. 10 — е), упругая линия будет:

$$y = y_0 + y_m = P \frac{b}{4EJ} \frac{x^2}{l^2} \left[\frac{1}{3} \frac{x}{l} (3l^2 - b^2) - (l^2 - b) \right] \dots \dots \dots (21),$$

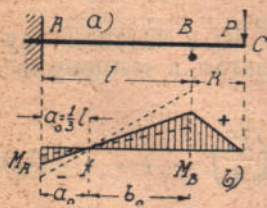
причем прогиб в принятой системе координат (ось Y идет вверх, против груза P) получается с соответствующим знаком.

Прогиб по середине при грузе по середине

$$y = -\frac{7}{16} \frac{Pl^3}{48EJ} \dots \dots \dots (22),$$

т. е. он не достигает половины прогиба простой балки при том же грузе.

4. Консольная балка (фиг. 11) а) Предварительно рассмотрим балку, подвижной конец которой нагружен активным моментом по фиг. 12.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Приравнивая нулю суммарный угол поворота касательной к упругой линии в плоскости защемления, в предположении, что оба момента гнут выпуклостью вниз:

$$\frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} = 0,$$

найдем:

$$M_A = \frac{1}{2} M_B \dots \dots \dots (23-a).$$

*) Из двух корней только этот имеет реальный смысл.

Поэтому нулевая точка будет на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от плоскости защемления балки. Опорные реакции:

$$R_A = -R_B = \frac{M_B - M_A}{l} = 1,5 \frac{M_B}{l} \dots \dots \dots (23-b).$$

б) Консольная балка находится в таких же условиях, так как груз P , приложенный на конце консоли длиной k , создает для опорного сечения B фиг. 11 такой же момент, как M_B на фиг. 12. Следовательно, расчетные данные для консольной балки будут:

$$M_B = -Pk; M_A = -\frac{1}{2} M_B = \frac{1}{2} Pk \text{ и } a_0 = \frac{1}{3} l.$$

$$R_A = -\frac{3}{2} \frac{Pk}{l}; R_B = \frac{1}{2} \frac{P}{l} (2l + 3k) \dots \dots \dots (24).$$

Следует обратить внимание на то, что нулевая точка занимает в пролете постоянное место. Так как в плоскости защемления реактивный момент всегда составляет половину того, который приложен на шарнирной опоре, то отношение между расстояниями a_0 и b_0 нулевой точки до опор всегда равно $\frac{1}{2}$, т.е. a_0 всегда составляет $\frac{1}{3}l$, независимо от величины действующего момента (см. пунктирные наклонные на фиг. 11-б) и от пролета, иначе сказать: все линии эпюры опорных моментов пересекаются в одной точке f , как в фокусе. Это будет всегда, если на рассматриваемом пролете нет нагрузки, а лишь опорные моменты: один — активный, а другой — реактивный плоскости защемления.

5. Произвольная нагрузка балки. При большом числе грузов или при сложном законе распределения нагрузки целесообразно пользоваться графическим приемом. Рассмотрим его применительно к случаю нескольких сосредоточенных грузов, но имея в виду, что способ остается общим и при всякой другой нагрузке а также и при сочетании сосредоточенных и сплошных грузов.

Если бы на фиг. 13 не было опоры B , то брусек AB изгибался бы от действия данных грузов таким же образом, как консоль на фиг. 1. Эпюры моментов и упругая линия получились бы такие же, как для консоли; они начерчены на фиг. c и e . Прогиб конца консоли оказался бы $b''b'$. В действительности же конец бруска B не прогибается. Очевидно в опоре B возникает сила, которая возвращает конец бруска в его первоначальное положение. Эта сила действует на конец консоли и одна дает тот же прогиб бруска $b'b''$. Подберем такую величину силы B , чтобы вызываемый ею прогиб конца B был равен $b'b''$. Тогда, присоединяя эту силу к данным грузам изогнутой консоли, мы получим действительный изгиб бруска.

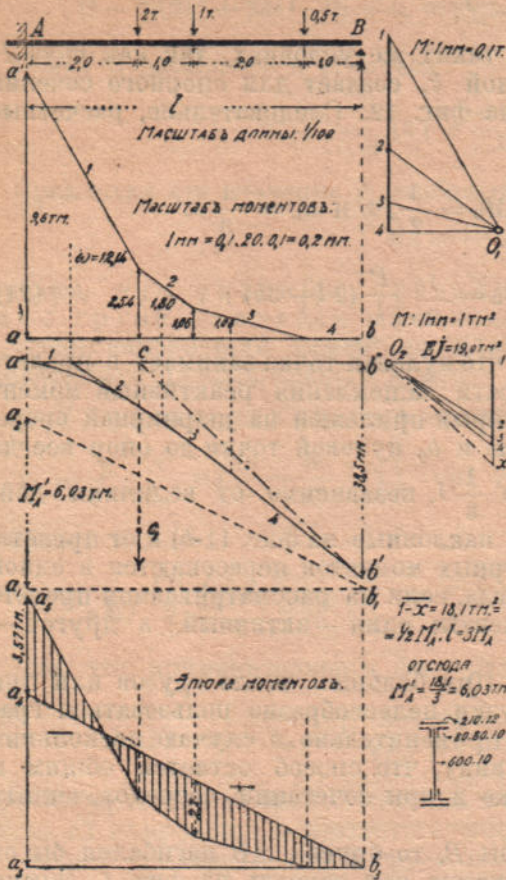
Какова бы ни была сила B , прогиб при ее действии получается, если сначала построить эпюру моментов, затем принять ее за грузовую площадь и построить упругую линию. В результате построения должно оказаться, что ордината упругой линии под концом бруска B равна $b'b''$.

Следовательно, здесь мы уже знаем результат построения веревочной кривой. По этому результату мы подбираем соответствующую ему площадь эпюры моментов.

Эпюра моментов консоли при одной силе есть треугольник $a_1 b_1 a_2$ (фигуры f). Следовательно нам надо подобрать такую площадь треугольника, которая дает прогиб $b'b''$. При построении линии прогибов мы не будем разбивать эпюры на части, ибо нас интересует не вся упругая линия, а только ордината ее на конце бруска, и достаточно заменить треугольную эпюру одной силой, сосредоточенной в центре тяжести c_1 .

Таким образом, мы свели задачу к разысканию такой силы, приложенной на одной трети пролета l , которая дает прогиб $b'b'$.

Если мы строим упругую линию для этой силы, то первую ее сторону проводим горизонтально до силы; например, если бы мы делали



Фиг. 13.

гольной эпюры моментов (фиг. f). Длина площади l , а наибольшая ордината пусть будет M'_A . Ясно, что

$$\frac{1}{2} \cdot M'_A \cdot l = 1 - x \text{ тм.}^2, \text{ откуда } M'_A = \frac{2 \cdot 1 - x}{l} \quad (25).$$

При построении получилось $1 - x = 18,1 \text{ тм.}^2$, поэтому

$$M'_A = \frac{2 \cdot 18,1}{6} = 6,03 \text{ тм.}$$

Итак, опорный момент, который возникает при действии силы B , есть $6,03 \text{ тм.}$, и эпюра опорных моментов представится треугольником $a_1b_1a_2$, (фиг. f) с ординатой $a_1a_2 = M'_A = 6,03 \text{ тм.}$ Действительный изгиб бруска получится, если мы вычтем ординаты эпюры опорных моментов из ординат эпюры, построенной для консоли; разности ординат представят действительные изгибающие моменты. На фиг. g сделано вычитание ординат и разности отмечены штрихами. Наибольший момент получается на опоре A : он отрицателен и равен $3,57 \text{ тм.}$ Наибольший положительный момент $2,2 \text{ тм.}$ получается на середине пролета.

построение на фиг. e и совместили бы первую сторону линии с прямой $a''1$, то провели бы горизонтальную прямую $a''c$ до точки c на направлении силы. Другую сторону веревочного многоугольника мы начинаем от точки c . Кроме того, он должен дать прогиб $b''b'$, т.е. пройти через точку b' . Этим определяется направление второй стороны веревочного многоугольника. Итак, две стороны веревочного многоугольника $a''c$ и $b''c$ уравновешивают силу c_1 (фиг. e и f). Очевидно, величина этой силы найдется путем построения силового треугольника, для которого направление двух сторон известно.

Обратим внимание на то, что этот треугольник служит для построения упругой линии того же бруска, для которого уже был построен силовой многоугольник $O_2-1-2-3-4$. Поэтому его луч EJ одинаков с лучом построенного уже силового многоугольника. Очевидно, если совместить первые лучи искомого силового треугольника и построенного уже силового многоугольника, а затем провести луч O_2x , параллельный cb' , то мы получим отрезок $1-x$, равный искомой силе c_1 . Этот отрезок есть площадь треу-

Описанное построение сводится к построению эпюры моментов и упругой линии для консоли и к определению моментного отрезка $a_1 a_2$ фигуры f ; последний же вычисляется по формуле (25), если точку c первой стороны упругой линии, взятую на $1/3$ пролета l , соединить с концом b' упругой линии фиг. e и провести луч $O_2 - x$, параллельный соединительной прямой cb' *).

6. Выражение расчетных величин через момент простой балки. Если не требуется детальный анализ деформации балки, а нужны лишь основные расчетные величины, то наиболее простое решение получается при использовании графоаналитического способа в такой форме. Составим выражение концевого угла изгиба под влиянием нагрузки и заземляющего момента. Если обозначить площадь эпюры моментов от одной только нагрузки пролета через ω , расстояние ее центра тяжести до опор c и c' , то получится:

$$\alpha = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{\omega c'}{lEJ},$$

а так как, при заземлении, $\alpha = 0$, то:

$$M_A = 3\omega \frac{c'}{l^2} \dots \dots \dots (26-a).$$

Сравним этот момент с характерным моментом простой балки, например, с моментом по середине, или под грузом и т. п., — получим коэффициент, которым наиболее удобно определять моменты заземления, так: при равномерно-распределенной нагрузке момент простой балки, по середине,

$$M_C = \frac{1}{8} ql^2, \text{ а } M_A = 3\omega \frac{c'}{l^2} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} ql^2 \cdot \frac{1}{2l} = \frac{1}{8} ql^2 = M_C; \dots (26-b),$$

следовательно отношение моментов равно единице. При сосредоточенном грузе P , находящемся на расстоянии от левой опоры $a = \xi l$, момент под грузом

$$M_P = P \frac{ab}{l} = P \xi l (1 - \xi);$$

с другой стороны момент заземления

$$M_A = 3 \cdot \frac{1}{2} l \frac{Pab}{l} \cdot \frac{1}{3} \frac{(b+l)}{l^2} = \frac{1}{2} Pab \frac{(b+l)}{l^2};$$

следовательно отношение

$$M_A : M_P = \frac{1}{2} \frac{b+l}{l} = \left(1 - \frac{1}{2} \xi\right),$$

или

$$M_A = \left(1 - \frac{1}{2} \xi\right) M_P \dots \dots \dots (26-c).$$

Таким же образом определяются и другие величины, приведенные в следующей таблице XXVI (см. стр. 30).





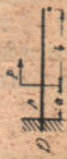
7. Построение линий влияния основывается на использовании уже полученных выражений для соответствующих величин.

а) Линия влияния для реактивного момента M_A получится из выражения (13), если принять груз P равным единице и перемещать его вдоль балки, т. е. изменять b от 0 до l :

$$M_A = \frac{1}{2} b \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (27)$$

*) Этот прием предложен впервые в наших „Лекциях по Статике сооружений. Изгиб.“ 1912. Стр. 66.

Таблица XXVI.

Случай нагрузки фиг. 14	Момент принятый за единицу сравнения		Опорные реакции		Защемляющий момент M_A	Максимальный момент $M_{\max. +}$	Точка перегиба при $a_0 =$	Концевой угол изгиба $EJ\tau$
	R_A	R_B	R_A	R_B				
 <p>а) $M_P = P \frac{ab}{l} = \xi P l (1 - \xi)$</p> <p>б)</p>	$P - R_B$	$\frac{1}{2} \xi^2 (3 - \xi) P$	$-\left(1 - \frac{1}{2} \xi\right) M_P$	$\frac{1}{2} \xi (3 - \xi) M_c$	$\frac{\xi(2 - \xi)}{2 + (2 - \xi)\xi} l$	$-\frac{1}{4} M_c \alpha$		
 <p>в) $M_c = \frac{1}{4} P l$</p>	$\frac{11}{16} P$	$\frac{5}{16} P$	$-\frac{3}{4} M_c$	$\frac{5}{8} M_c$	$\frac{3}{11} l$	$-\frac{1}{8} M_c l$		
 <p>г) $M_c = \frac{1}{8} q l^2$</p>	$\frac{5}{8} q l$	$\frac{3}{8} q l$	$-M_c$	$\frac{9}{16} M_c$	$\frac{1}{4} l$	$-\frac{1}{6} M_c l$		
 <p>д) $M_c = \frac{1}{16} q l^2$</p>	$\frac{4}{10} q l$	$\frac{1}{10} q l$	$-\frac{16}{15} M_c$	$0,478 M_c$	$\frac{9}{40} l$	$-\frac{28}{15} M_c l$		
 <p>е) $P_p = M_c$</p>	$\frac{9}{40} q l$	$\frac{11}{40} q l$	$-\frac{14}{15} M_c$	$0,676 M_c$	$\frac{11}{40} l$	$-\frac{1}{5} M_c l$		
	$\frac{-1}{+2} \frac{M_c \alpha}{l}$	$\frac{b^2}{1 + 3 \frac{b^2}{l^2}}$	$\frac{1}{2} \frac{M_c \alpha}{l} \left(\frac{b^2}{3 l^2} - 1 \right)$	$\frac{1}{2} M_c b \left(\frac{b^2}{3 l^2} - 1 \right)$	$\frac{3 b^2 - l^2}{3 b^2 + l^2} \cdot l$	$-\frac{1}{4} \left(\frac{b}{3 l} - 1 \right) M_c \alpha$		

Обыкновенно разбивают пролет на 10 частей и в каждой точке деления помещают груз. Формула (27) дает ординату для каждой из этих точек. Соответственно отношениям

$$\xi' = \frac{b}{l} = \frac{1}{10} \quad \left| \quad \frac{2}{10} \dots \quad \right| \quad \frac{3}{10} \dots \dots$$

получаем в скобках отвлеченные числа ξ' :

$$1 - \frac{1}{100} = 0,99 \quad \left| \quad 1 - \frac{4}{100} = 0,96 \quad \right| \quad 1 - \frac{9}{100} = 0,91 \dots \dots$$

Следовательно, для построения линий влияния приходится половину расстояния b умножать на эти числа ξ' и откладывать над соответствующими точками деления пролета. Таким путем получим линию фиг. 15-а, имеющую уравнение:

$$y = \frac{1}{2} x' \left(1 - \frac{x'^2}{l^2} \right), \text{ где } x' \text{ измеряется от катка в сторону защемления.}$$

Из производной по x' :

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3x'^2}{l^2} \right) = 0$$

определим $x' = l \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577l$, абсциссу, соответствующую тому положению груза, которое вызывает численно наибольший реактивный момент. Оказывается, что численно наибольший реактивный момент получается при грузе, стоящем на расстоянии

$$x = 0,423l$$

от плоскости защемления. Подставивши

$$x' = l\sqrt{\frac{1}{3}}$$

в (27), получим $M_{\text{мин.}*}) = l \cdot 3 \sqrt{\frac{1}{3}} = l \cdot 5,2 = 0,192l \dots \dots \dots (28)$

Следовательно, наибольший отрицательный момент, который можно получить от груза P при всех его положениях в пролете:

$$M_A = 0,192Pl.$$

б) Линия влияния для реакции R_B получается на основании форм. (15), если сделать $P=1$ и изменять a от 0 до l . Эта линия



Фиг. 15-а и 15-б.

$$y = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{x}{l} \right) \frac{x^2}{l^2} \dots \dots \dots (29).$$

изображена на фигуре 15-б) нижней дугой.

с) Линия влияния для поперечной силы Q . Положим, что груз $P=1$ находится левее намеченного сечения m фиг. 15-б), и условимся считать поперечной силой сумму сил, действующих правее этого сечения. Тогда будет:

$$Q_m = -R_B^*)$$

Очевидно, надо воспользоваться линией реакции R_B ; следовательно, для всякого левого груза надо брать заштрихованные ординаты нижней дуги на фиг. 15-б)

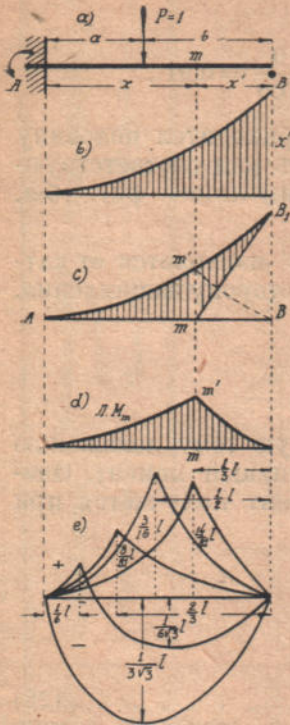
*) Минимальный момент в алгебраическом смысле.

*) Отрицательный знак поставлен в соответствии с условно принятым правилом знаков: Q считать положительной, если в левой части балки она идет вверх, а в правой—вниз. В данном случае в правой части балки она идет вверх.

Когда груз $P=1$ станет на правый участок балки, то поперечная сила будет

$$Q_m = -R_B + 1,$$

и надо к прежним ординатам нижней дуги прибавлять одну и ту же величину, единицу, другими словами: надо провести равноудаленную верхнюю дугу и использовать ее ординаты для правых грузов. Таким образом, опорные ординаты, как и у простой балки: 1 и 0. Отличие от простой балки заключается в некоторой искривленности ветвей;



Фиг. 16.

д) Линия влияния для изгибающего момента. Для любого сечения m изгибающий момент получает простое выражение, если взять груз $P=1$ по одну сторону от сечения и рассматривать момент сил с другой стороны, например, если взять на (фиг. 16) груз слева и искать момент правых сил. Из выражения (15) получается

$$M_m = R_B \cdot x' = \frac{1}{2} x' \left(3 - \frac{a}{l} \right) \frac{a^2}{l^2},$$

где a отсчитывается от заземленного конца балки.

Ординаты линии момента отличаются от линии реакции R_B только постоянным множителем x' .

После перехода груза направо от сечения m выражение для момента правых сил станет:

$$M_m = R_B \cdot x' - 1\xi,$$

где ξ — расстояние груза до сечения;

так что, из ординат прежней линии придется вычитать ординаты $\eta = 1 \cdot \xi$, возрастающие по линейному закону при удалении груза P от сечения m . На фиг. 16-с) вычитание осуществлено построением треугольника $m B_1 B$; лучше однако фигуру $mm' B_1$, получившуюся в результате вычитания, перенести

от горизонтальной оси, как показано пунктиром $m' B$. Окончательный вид эпюры представлен на фигуре d). Конечно, правую ветвь мы могли бы получить и непосредственно если бы воспользовались моментом левых сил и формулой (14).

Линия влияния изгибающего момента для заземленной балки отличается от соответствующей линии простой балки некоторым искривлением ветвей.

На фиг. 16-е) построены линии для нескольких сечений балки, а именно для $x = \frac{1}{6} l, \frac{1}{3} l, \frac{1}{2} l, \text{ и } \frac{2}{3} l$, считая от заземленного конца. На линиях показано наибольшее значение ординат.

Для сравнения внизу построена линия влияния опорного момента — все ее ординаты отрицательны. Следующая линия для ближайшего из показанных сечений $x = \frac{1}{6} l$ имеет небольшой положительный и значительный отрицательный участок, приближаясь по характеру к линии опорного момента.

Дальнейшие линии целиком располагаются в положительной области и напоминают линии влияния изгибающего момента для простой балки. Приводим таблицу главнейших ординат линий, построенных на фиг. 16-е).

ТАБЛИЦА. (30-а).

№ линии влияния	Абсцисса x для максим. ординаты	Максим. ордината	Абсцисса x' для наиб. отрицательн. ординаты	Наибольшая отрицат. ордината.
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} l$	$\frac{1}{3\sqrt{3}} l$
2	$\frac{1}{6} l$	$\frac{2}{61} l$	$\frac{1}{\sqrt{5}} l$	$\frac{1}{6\sqrt{3}} l$
3	$\frac{1}{3} l$	$\frac{8}{81} l$	—	—
4	$\frac{1}{2} l$	$\frac{3}{16} l$	—	—
5	$\frac{2}{3} l$	$\frac{14}{81} l$	—	—

е) Линия влияния для прогиба в каком-нибудь сечении балки может быть получена из упругой линии, вызванной сосредоточенным грузом. Для этой цели в уравнении (21) надо положить $P=1$ и задаться абсциссой x , соответствующей сечению, для которого разыскивается прогиб:

$$EJy = \frac{1}{4} b x^2 \left[\frac{x}{l} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b^2}{l^2} \right) - \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) \right] \dots \dots \dots (30-c).$$

Получилась линия влияния для прогиба в сечении x . Формула пригодна для построения линии в каком угодно сечении, но для каждого данного сечения она строится отдельно: намечают сечение, задаваясь определенным x , т. е. считая x постоянным; изменяют b , давая ему значения $\frac{1}{10} l, \frac{2}{10} l \dots$, вычисляют y и откладывают в виде ординат для соответствующих b .

8. Влияние понижения опоры и изменения температуры. Положим, что правая опорная точка B фиг. 16, по устройству, оказалась ниже на δ . Тогда по правилу уравнивания деформаций*), прогиб балки от нагрузки и реактивной силы X придется приравнять δ :

$$\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Xl^3}{3EJ} = \delta \dots \dots \dots (31-a)$$

и определять X по формуле:

$$X = \frac{3}{8} ql - \frac{3EJ}{l^3} \delta \dots \dots \dots (31-b)$$

Оказывается, что реакция X тем меньше, чем больше понижение опоры δ : с увеличением δ значение опоры падает и балка приближается к консоли. Чтобы оценить влияние δ при обычных размерах балок, рассмотрим пример балки, высота которой $h = \frac{1}{10} l$ и положим, что понижение опоры δ составляет $\frac{1}{1000} l$ (**).

Сравним опорные моменты при точной и при пониженной опоре.

При точном расположении опоры B реактивный момент левой опорной плоскости

$$M_A = \frac{1}{8} ql^2.$$

*) См. выпуск: „Системы с лишними неизвестными, § 10, з н 4.

***) Это размер допускаемого прогиба мостовых балок.

При пониженной опоре

$$M_A' = \frac{1}{2}ql^2 - \left(\frac{3}{8}ql^2 - \frac{3EJ\delta}{l^2} \right) = \frac{ql^2}{8} \left(1 + \frac{3 \cdot 8 \cdot EJ\delta}{ql^4} \right) = \frac{ql^2}{8} (1 + \Delta).$$

Выразим прибавку Δ через допускаемое напряжение, по которому проектируемая балка в нормальных условиях:

$$1000 = \frac{M}{W} = \frac{ql^2h}{8 \cdot J \cdot 2}, \text{откуда } ql^2 = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot J}{h}$$

Подставляя, получаем:

$$\Delta = \frac{3 \cdot 8 EJ\delta}{ql^4} = \frac{3 \cdot 8 \cdot EJ \cdot \delta \cdot h}{16 \cdot 10^3 \cdot J \cdot l^2} = 3 \cdot 10^3 \frac{\delta}{l} \cdot \frac{h}{l};$$

следовательно, при $\frac{\delta}{l} = \frac{1}{1000}$ и $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ увеличение изгибающего момента

$$\Delta = 0,3, \text{ т.е. } 30\%.$$

Итак, уже понижение опоры $\delta = \frac{1}{100}h$ вызывает 30% добавочных напряжений в плоскости защемления.

Такова же по существу и роль упругих опор: стоек или колонн из дерева, железа и других упругих материалов. Если площадь поперечного сечения стойки F , длина ее h , то при наличии в ней усилия X , получается укорочение

$$\lambda = \frac{Xh}{EF}$$

эта величина и должна быть помещена в уравнение (31-a) вместо δ .

Решая в этом случае уравнение

$$\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Xl^3}{3EJ} = \frac{Xh}{EF}$$

относительно X , получим

$$X = \frac{3ql}{8 \left(1 + 3 \frac{hJ}{Fl^3} \right)} \dots \dots \dots (32-a)$$

Реактивная сила стойки уменьшается при увеличении жесткости балки, т.е. при увеличении J и уменьшении l ; наоборот, она возрастает при увеличении жесткости стойки, т.е. увеличении F и уменьшении h .

Температурное изменение длины балки не влияет ни на реактивные силы, ни на напряжение балки ибо каток свободно перемещается. Но температурное изменение стойки равноценно ее укорочению или удлинению на $\delta = h\epsilon t$; так что, из (31-a) получится

$$X = \frac{3}{8}ql - \frac{3EJ}{l^2} h\epsilon t \dots \dots \dots (32-b).$$

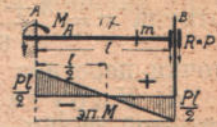
Следовательно, как и при осадке жесткой опоры, понижение температуры уменьшает реактивную силу стойки; очевидно, при повышении температуры будет обратная картина, — реакция возрастет.

9. Задачи. а) Для балки, защемленной концом A , опирающейся в точке B на каток и продолжающейся далее на длину k , построить линию влияния опорного момента M_A , реакции R_A , поперечной силы для сечения, отстоящего на $x = \frac{1}{5}l$ от A , и линию изгибающего момента для того же сечения.

b) Для той же балки построить линию влияния опорного момента M_B и линии M и Q в каком-нибудь сечении консоли k . (Результат будет, как для простой консоли, т.е. — прямая линия, идущая от сечения до конца консоли).

с) Построить линию влияния для прогиба конца консоли k .

d) Конец защемленной слева балки фиг. 17 справа не опирается, а скользит по направляющему вертикальному стержню под давлением вертикальной силы, равномерно-распределенной по окружности муфты, плотно насаженной на направляющий стержень (фиг. 17). Определить реактивный момент, точку перегиба упругой линии и прогиб скользящего конца балки.



Фиг. 17.

Ответ: $M_A = \frac{1}{2} Pl$; $\frac{1}{2} l$; $y = Pl^3 : 12EJ$.

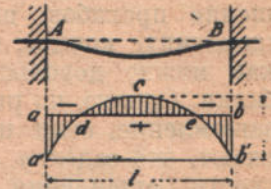
§ 2. Балка с защемленными концами. 1. Равномерно распределенная нагрузка. а). Опорные реакции. Благодаря симметрии на обоих защемленных концах возникают одинаковые моменты (фиг. 18). Не будь их, концы балки повернулись бы на углы

$$\alpha_0 = \beta_0 = ql^3 : 24EJ.$$

Прикладывая реактивные моменты $M_A = M_B$, мы возвращаем концы балки, поворачивая их на углы $\beta_M = \alpha_M = M_A l : 2EJ$. Очевидно должно быть:

$$\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{M_A l}{2EJ} = 0, \text{ откуда } M_A = M_B = -\frac{1}{12} ql^2 \dots \dots \dots (33).$$

Так как реактивные моменты равны и противоположны, то они не дают добавочных реакций, и реакции балки с защемленными концами при равномерно распределенной нагрузке получаются, как у простой балки:



Фиг. 18.

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} ql.$$

b) Эпюра поперечных сил при всякой вообще симметричной нагрузке не отличается от эпюры для простой балки.

с) Эпюра моментов (фиг. 18) составляется из параболы $y = \frac{1}{8} ql^2$ для простой балки и прямоугольника высотой $aa' = \frac{1}{12} ql^2$ для реактивных моментов. Следовательно, наибольший положительный момент

$$M_{\text{макс}} = +\frac{1}{8} ql^2 - \frac{1}{12} ql^2 = \frac{1}{24} ql^2 \dots \dots \dots (34)$$

составляет половину опорного реактивного момента (отрицательного) и третью часть от момента простой разрезной балки при той же нагрузке. Так как опорный момент здесь вдвое больше момента для середины пролета, то балки постоянного сечения рассчитываются по защемленному сечению. При данных размерах балки, безопасная нагрузка защемленной в $1\frac{1}{2}$ раза больше, чем для балки простой и обратно: при данной нагрузке для защемленной балки потребуется в $1\frac{1}{2}$ раза меньший момент сопротивления.

Общее выражение изгибающего момента для какого-нибудь сечения x составляется из суммы выраженной для простой балки, нагруженной q и $M_A = M_B$:

$$M_x = \frac{1}{2} qlx - \frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{12} ql^2.$$

Оно представляет параболу с перемещенной осью X . Приравнявая M_x нулю, найдем точки пересечения параболы с осью: $0 = \frac{1}{12} q[6x(l-x) - l^2]$, откуда $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} l$ или $x = 0,211l$ и $0,789l$. Этим абсциссам соответствуют точки перегиба упругой линии.

д) Упругая линия получится если выражение прогиба для простой балки:

$$y_1 = -\frac{ql^4}{24EJ} \frac{x}{l} \left(1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

сложить с соответствующим выражением

$$y_2 = +\frac{M_A}{2EJ} x(l-x) = \frac{ql^4}{24EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

для балки, нагруженной равными реактивными моментами. После преобразования

$$y = -\frac{ql^4}{24EJ} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - 2\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right) = -\frac{ql^4}{24EJ} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \dots \dots \dots (35).$$

Наибольший прогиб посередине:

$$y_{\max} = -\frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ} \text{ — в 5 раз меньше, чем прогиб простой балки.}$$

Балка с защемленными концами в 5 раз жестче, чем та же балка, свободно лежащая на опорах; поэтому в тех случаях, где требуется уменьшение прогибов, или жесткость перекрытия, следует прибегать к защемлению концов; при этом получается и экономия на материале, так как можно довольствоваться $\frac{2}{3}$ момента сопротивления сечения простой балки. Однако, по разным причинам, в практике не полагаются на полное защемление, если не приняты специальные меры *); обыкновенно допускают, что заделка сопротивляется наполовину, т. е. считают, что в плоскости защемления действует момент среднего значения между нулем простой балки и $\frac{1}{12} ql^2$ для балки вполне защемленной:

$$M_A = M_B = -\frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{12}\right) ql^2 = \frac{1}{24} ql^2;$$

вследствие чего по середине пролета образуется:

$$M_{\max} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) ql^2 = \frac{1}{12} ql^2, \text{ или иначе:}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) ql^2 = \frac{1}{12} ql^2. \dots \dots \dots (36).$$

Таким образом, в полузаделанной балке наибольший положительный момент по середине пролета — такой же, как отрицательный момент защемленной балки, так что, практически, расчетным моментом балок с заделанными концами является всегда $\frac{1}{12} ql^2$.

е) Значение реактивных продольных сил. При изгибе нейтральный слой свободного бруска сохраняет свою длину. В простой балке возможно искривление ее оси с сохранением длины, так как, со стороны катка нет препятствий к такому искривлению. Но при защемленных концах, ось балки при искривлении принуждена растягиваться. Очевидно,

*) См. наприм. раздел 2. пункт f).

в плоскостях заземления возникают горизонтальные реактивные растягивающие силы; назовем их X .

Для определения этих сил воспользуемся общим приемом: отбрасывая X , вычислим сближение δ концов балки от равномерно распределенной нагрузки q ; затем рассчитаем удлинение λ , которое вызывает лишняя сила X . Приравнявая нулю сумму деформаций:

$$\delta + \lambda = 0, \text{ или } \delta - Xl : EF = 0,$$

определим $X = EF\delta : l$. Следовательно, дополнительное напряжение от продольных реактивных сил:

$$n = \frac{X}{F} = E \frac{\delta}{l} \dots \dots \dots (37).$$

Очевидно, задача сводится к определению относительного удлинения оси балки при изгибе под действием нагрузки q и реактивных моментов $M_A = M_B$. Воспользуемся уравнением упругой линии (35) и определим разницу между длиной ее, считая по дуге, и пролетом l , как хордой, соединяющей концы этой дуги.

Удлинение всякой кривой можно найти из следующего элементарного рассмотрения. Длина элемента дуги ds отличается от ее проекции dx на хорду x :

$$ds - dx = ds(1 - \cos \varphi) = 2ds \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

При малых искривлениях можно принять, что $\sin \varphi/2 = tg \varphi/2 = 1/2 y'$ и $dx = ds$; поэтому элементарное удаление концов дуги будет $2ds \cdot \sin^2 \varphi/2 = 2dx(1/2 y')^2 = 1/2(y')^2 dx$, а полное удлинение представится суммой элементарных:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx.$$

Остается вставить сюда выражение для y из (35):

$$y' = -\frac{ql^4}{24EJ} \left(\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)' = \frac{ql^4}{24EJ} \cdot \frac{2x}{l^2} \left(1 - 3 \frac{x}{l} + 2 \frac{x^2}{l^2} \right);$$

$$(y')^2 = \frac{q^2 l^8}{24^2 E^2 J^2} \cdot \frac{4x^2}{l^4} \left(1 - 6 \frac{x}{l} + 13 \frac{x^2}{l^2} - 12 \frac{x^3}{l^3} + 4 \frac{x^4}{l^4} \right).$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1 \cdot q^2 l^8 \cdot 4}{2 \cdot 24^2 \cdot E^2 J^2 l^4} \int_0^l \left(x^2 - 6 \frac{x^3}{l} + 13 \frac{x^4}{l^2} - 12 \frac{x^5}{l^3} + 4 \frac{x^6}{l^4} \right) dx = \\ &= \frac{q^2 l^8 \cdot 4 \cdot l^3}{2 \cdot 24^2 \cdot E^2 J^2 \cdot l^4 \cdot 210}. \end{aligned}$$

Следовательно, напряжение от продольных сил

$$n = E \frac{\delta}{l} = \frac{2q^2 l^6}{24^2 \cdot E \cdot J^2 \cdot 210}.$$

Сравним это напряжение с допускаемым, именно с тем, по которому подбирается сечение балки при расчете на изгиб в плоскости заземления. Из расчетной формулы изгиба:

$\frac{M_A}{W} \leq n_0$, где n_0 — допускаемое напряжение, которое можно принять 1000 кг/см², выразим расчетный момент через n_0 :

$$\frac{M_A}{W} = \frac{ql^2}{12 \cdot J : 1/2 h} = n_0, \text{ или } ql^2 = \frac{2 \cdot 12 \cdot J \cdot n_0}{h}.$$

Тогда продольное напряжение n представится в форме:

$$n = \frac{2 \cdot 24^2 \cdot J^2 n_0^2 \cdot l^2}{24^2 \cdot E \cdot J^2 210 \cdot h^2} = \frac{1}{105} \cdot \frac{n_0^2}{E} \cdot \frac{l^2}{h^2}$$

Если допускаемое напряжение n_0 для железной балки принять 1000 кг./см.² и модуль E считать $2,1 \cdot 10^6$, то получим:

$$n = \frac{1 \cdot 10^6}{105 \cdot 2,1 \cdot 10^6} \cdot \frac{l^2}{h^2},$$

что при обычном отношении $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ дает:

$$n = 0,46 \text{ кг./см.}^2$$

Это напряжение ничтожно по сравнению с допускаемым.

2. Сосредоточенный груз. а) Опорные реактивные моменты определяются способом уравнивания углов поворота у заземленных концов. По таблицам „Введения“, балка, освобожденная от заземляющих моментов, имеет при грузе P :

$$\alpha_0 = -P \frac{bl}{6EJ} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) \text{ и } \beta_0 = -P \frac{al}{6EJ} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right),$$

а при конечных моментах M_A и M_B :

$$\alpha_M = -\frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B) \text{ и } \beta_M = -\frac{l}{6EJ} (M_A + 2M_B).$$

Поэтому из уравнений:

$$\alpha_0 + \alpha_M = 0 \text{ и } \beta_0 + \beta_M = 0$$

получается:

$$M_A = -P \frac{al^2}{l^2} \text{ и } M_B = -P \frac{a^2b}{l^2} \dots \dots \dots (38).$$

Отношение опорных моментов

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{ab^2}{a^2b} = \frac{b}{a}$$

— обратно отношению плеч груза P до опор, как в законе рычага.

Если, кроме того, вспомнить, что момент балки под грузом составляет

$$M_P = P \frac{ab}{l}$$

и распределить его по закону рычага, относя к опоре A

$$M_A = \frac{M_P b}{l} = P \frac{ab}{l} \cdot \frac{b}{l} = P \frac{ab^2}{l^2}$$

и к опоре B :

$$M_B = M_P \frac{a}{l} = P \frac{ab}{l} \cdot \frac{a}{l} = P \frac{a^2b}{l^2},$$

то приходим к выражениям (38). Следовательно, опорные моменты балки с заземленными концами составляются из момента под грузом простой балки так, как опорные реакции составляются из груза.

б) Реакции опор от груза P :

$$A_0 = P \frac{b}{l} \text{ и } B_0 = P \frac{a}{l}.$$

От реактивных моментов:

$$A_M = \frac{M_B - M_A}{l} \text{ и } B_M = \frac{M_A - M_B}{l}$$

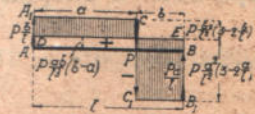
или после подстановки:

$$A_M = P \frac{ab}{l^3} (b - a) \text{ и } B_M = P \frac{ab}{l^3} (a - b).$$

Результирующие реакции для заземленной балки:

$$R_A = A_0 + A_M = P \frac{b^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right) \text{ и } R_B = P \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right) \dots (39).$$

с) Эпюра Q определяется полученными реакциями. На фиг. 19 она представлена для случая, когда груз P расположен ближе к правой опоре B. Эпюра получена, как результат наложения фигуры AA₁CC₁B₁B для сосредоточенного груза простой балки и фигуры ADEB для реактивных моментов.



Фиг. 19.

д) Эпюра M. Составление этой эпюры показано на фиг. 20, где б) представляет эпюру от груза P, д) — эпюру от опорных моментов M_A и M_B, а ф) — результат наложения эпюр б) и д).

Как видно из последней эпюры, наибольшие моменты получаются: под грузом (+) и — на заземленных концах (—). Величина опорного момента зависит от положения груза. Чтобы определить, когда получается наибольшее численное значение момента, приравняем нулю производную; так, дифференцируя M_B по a получим:

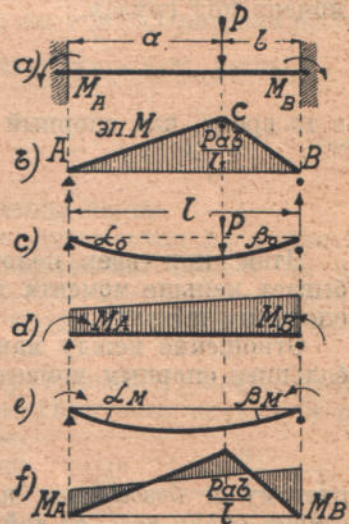
$$\begin{aligned} \frac{dM_B}{da} &= \frac{d}{da} \left(P \frac{a^2 b}{l^2} \right) = \frac{P}{l^2} \frac{d}{da} [a^2 (l - a)] = \\ &= \frac{P}{l^2} (2al - 3a^2) = 0, \end{aligned}$$

откуда: $a = \frac{2}{3} l$, при чем $M_B = \frac{4}{27} Pl$.

Сравнивая с максимальным моментом простой балки, находим:

$$M_B = \frac{4}{27} Pl = \frac{16}{27} \left(\frac{Pl}{4} \right) = \frac{16}{27} M^0_{\text{макс.}}$$

Изгибающий момент в сечениях первого участка (от A до P):



Фиг. 20.

$$\begin{aligned} M_x &= M_0 + R_A \cdot x = -P \frac{ab^2}{l^2} + P \frac{b^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right) x = \\ &= -P \frac{b^2}{l^2} \left[a - \left(1 + 2 \frac{a}{l} \right) x \right] \dots (40). \end{aligned}$$

Соответственно для второго участка (от P до B):

$$\begin{aligned} M_x &= M_0 + R_A \cdot x - P(x - a) = \\ &= -P \frac{l^2}{l^2} \left[a - \left(1 + 2 \frac{a}{l} \right) x \right] - P(x - a). \end{aligned}$$

*) Формулы для реакций написаны в общем виде, в предположении, что оба концевые момента положительные, т. е. изгибают балку выпуклостью вниз.

Наибольший положительный момент под грузом *):

$$M_P = M_P^0 + M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l} = \\ = P \frac{ab}{l} - P \frac{ab^2}{l^2} \frac{b}{l} - \frac{Pa^2b}{l^2} \frac{a}{l} = \frac{2a^2b^2}{l^3} P$$

Он приобретает наибольшее значение, когда груз занимает середину пролета

$$M_{P \text{ макс.}} = \frac{1}{8} Pl;$$

при этом и опорные моменты получают то же значение:

$$M_A = M_B = \frac{1}{8} Pl.$$

Таким образом, как опорные моменты, так и момент под грузом, при расположении последнего по середине пролета, составляют половину того, что при простой балке; очевидно безопасная нагрузка защемленной балки будет вдвое больше, чем у простой.

При максимальном значении опорного момента, т. е. при $a = \frac{2}{3} l$, момент под грузом.

$$M_P = \frac{8}{81} Pl$$

в то время, как опорный момент составляет

$$M_A = \frac{12}{81} Pl.$$

Итак, при всех положениях груза опорный реактивный момент не бывает меньше момента под грузом, и расчет балки надо производить по опорному моменту.

Отношение между максимальным моментом под грузом и численно наибольшим опорным моментом

$$M_P : M_A = \frac{1}{8} : \frac{4}{27} = 0,844;$$

поэтому и безопасная нагрузка, рассчитанная по опорному моменту составит около 85% от той, которая получилась бы при расчете по моменту под грузом.

е) Упругая линия. Ее уравнение можно получить из уравнения для простой балки при грузе P и из уравнения для той же балки, нагруженной концевыми моментами M_A и M_B . Первое уравнение, по III-й таблице (см. столбец 10):

$$y_0 = -P \frac{bl^2}{6EJ} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ — для участка } a.$$

Второе уравнение, по IV-й таблице (см. столбец 14):

$$y_M = -\frac{M_A l^2}{6EJ} \cdot \frac{x}{l} \left[2 + \frac{M_B}{M_A} - 3 \frac{x}{l} - \left(\frac{M_B}{M_A} - 1 \right) \frac{x^2}{l^2} \right].$$

*) См. форм. (149) в § 11, выпуска: Системы с лишними неизвестными.

или, после подстановки $M_A = -\frac{P(l-b)b^2}{l^2}$ и $\frac{M_B}{M_A} = \frac{a}{b}$:

$$y_M = \frac{P}{6EJ} \left(1 + \frac{l}{b} - 3 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{bl} + 2 \frac{x^2}{l^2} \right) \left(b^2 x - \frac{l^3 x}{l} \right).$$

Складывая, получим:

$$y = y_0 + y_M = -\frac{Pl^3}{2EJ} \frac{b^2}{l^2} \frac{x^2}{l^2} \left(1 - \frac{b}{l} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{b}{l} \frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (41).$$

Если измерять расстояние груза P от левой опоры A , то, заменяя $b = l - a$, найдем:

$$y = \frac{Plx^2}{6EJ} \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 \left[3 \frac{a}{l} - \left(1 + 2 \frac{a}{l} \right) \frac{x}{l} \right] \dots \dots \dots (42)$$

Применим первое выражение к середине пролета в предположении что груз P также находится посередине:

$$y = -\frac{Pl^3}{2EJ} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -\frac{Pl^3}{192EJ} = -\frac{1}{4} \left(\frac{Pl^3}{48EJ} \right).$$

Прогиб защемленной балки в 4 раза меньше прогиба простой балки: Продифференцируем выражение прогиба (42) по x и приравняем нулю.

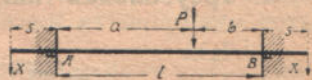
$2al - (2a + l)x = 0$, получим $x = \frac{2al}{2a + l}$, а подставляя в (42), найдем:

$$y_{\text{макс.}} = -\frac{2Pa^3b^2}{3EJ(2a + l)^2} \dots \dots \dots (43).$$

г) Расчет анкерного закрепления конца балки.

Итак, защемление концов балки еще более отражается на гибкости балки, чем на напряжении: в то время, как напряжение падает на половину, прогиб уменьшается вчетверо. Однако эти преимущества получаются только при полном защемлении концов балки, которое может быть обеспечено лишь в исключительных случаях.

Благодаря смятию ребер провета при непосредственной укладке балки на стены, а также благодаря низкому модулю упругости кладки и раствора стены по сравнению с модулем железа, опора оказывается сравнительно податливой. Как выше было показано, это сильно ослабляет ее влияние. Для сохранения преимуществ защемленной балки прибегают к специальной конструкции. Под балку подкладывают твердые подушки A и B (фиг. 21), концы балки впускают на достаточную глубину в стену и снабжают анкерными болтами, рассчитывая их на растяжение.



Фиг. 21.

Берут случай наибольшего опорного момента, т. е. груз на расстоянии

$$a = \frac{2}{3} l.$$

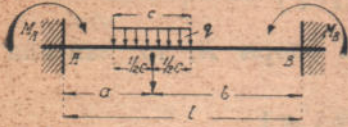
Задаваясь длиной заделки s и обозначая усилие анкера X , получим уравнение:

$$Xs = M_B = \frac{4}{27} Pl.$$

Из него определяется $X = \frac{4Pl}{27s}$.

3. Местная равномерно распределенная нагрузка. Обозначим расстояние середины грузовой площади до опор *A* и *B* буквами *a* и *b*, длину грузовой площади — буквой *c* (фиг. 22). Как известно, концевые углы изгиба простой балки *AB*, освобожденной от опорных реактивных моментов, выражаются формулами *):

$$\alpha_0 = \frac{qcb}{6EJ} \left[a(l+b) - \frac{1}{4}c^2 \right] \text{ и } \beta_0 = \frac{qca}{6EJ} \left[b(l+a) - \frac{1}{4}c^2 \right].$$



Фиг. 22.

Опорные моменты дают дополнительно:

$$\alpha_m = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} \text{ и } \beta_m = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}.$$

Приравнявая суммы $\alpha_0 + \alpha_m$ и $\beta_0 + \beta_m$ порознь нулю, получим уравнения:

$$\frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} + \alpha_0 = 0 \text{ и } \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} + \beta_0 = 0 \quad \dots \quad (44),$$

из которых определяются опорные моменты:

$$M_A = -\frac{qc}{3l^2} \left[2ab(l+b) - ab(a+l) - \frac{1}{2}bc^2 + \frac{1}{4}ac^2 \right] = \\ = -\frac{qc}{l^2} \left[ab^2 - \frac{1}{12}c^2(2b-a) \right] \text{ и } M_B = -\frac{qc}{l^2} \left[ba^2 - \frac{1}{12}c^2(2a-b) \right].$$

Опорные реакции по формулам:

$$R_A = A_0 + \frac{M_B - M_A}{l} \text{ и } R_B = B_0 + \frac{M_A - M_B}{l} \quad \dots \quad (45)$$

будут:

$$R_A = qc \frac{b}{l} + \frac{qc}{l^3} \left[ab(l+b) - \frac{1}{4}bc^2 - ab(l+a) + \frac{1}{4}ac^2 \right] = \\ = \frac{qc}{l^3} \left[b^2(l+2a) - \frac{1}{4}c^2(b-a) \right] \text{ и } R_B = \frac{qc}{l^3} \left[a^2(l+2b) - \frac{1}{4}c^2(a-b) \right].$$

При симметричном расположении нагрузки, когда $a = b = \frac{1}{2}l$:

$$M_A = M_B = -\frac{qc}{24l} (3l^2 - c^2) \text{ и } R_A = R_B = \frac{qc}{2} \quad \dots \quad (46).$$

4. Треугольная нагрузка. а) Если нагрузка занимает весь пролет (фиг. 23-а), то, приравнявая нулю для каждой из опор сумму концевых углов изгиба от нагрузки и от обоих реактивных моментов, получим два уравнения; из них:



Фиг. 23-а.

$$M_A = -\frac{1}{30}ql^2 \text{ и } M_B = -\frac{1}{20}ql^2 \quad \dots \quad (47).$$

Опорные реакции, по предыдущему (см. форм. 45):

$$R_A = \frac{3}{20}ql \text{ и } R_B = \frac{7}{20}ql \quad \dots \quad (48).$$

Изгибающий момент: $M_x = R_a x + M_A - \frac{qx^3}{6l}$,

$$M_{\text{макс.}} = \frac{ql^2}{30} (3\sqrt{0,3} - 1) = \infty q \frac{l^2}{46,6} \text{ (при } x = l\sqrt{3}).$$

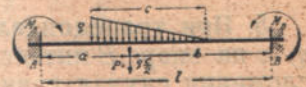
*) См. таблицу VII.

б) Если треугольная нагрузка занимает только часть пролета, как на фиг. 23-б), то по уравнениям (44) найдем:

$$M_A = -P \frac{1}{18l^2} \left[6ab(2l + 2b - l - a) - c^2 \left(2b - \frac{4}{45}c - a - \frac{2}{45}c \right) \right] =$$

$$= -P \frac{1}{18l^2} \left[18ab^2 - c^2(2b - a) + \frac{2}{15}c^3 \right] \dots \dots \dots (49).$$

$$M_B = -P \frac{1}{18l^2} \left[18a^2b - c^2(2a - b) - \frac{2}{15}c^3 \right]$$



Фиг. 23-б.

Опорные реакции по (45):

$$R_A = P \frac{b}{l} + P \frac{1}{6l^3} \left[6ab(b - a) - c^2(b - a) + \frac{4}{45}c^3 \right] \dots \dots \dots (50).$$

$$R_B = P \frac{a}{l} + P \frac{1}{6l^3} \left[6ab(a - b) - c^2(a - b) - \frac{4}{45}c^3 \right].$$

Если нагрузка начинается непосредственно от опоры А, то в тех же формулах будет:

$$a = \frac{1}{3}c \text{ и } b = l - \frac{1}{3}c,$$

и они соответственно упростятся:

$$M_A = -P \frac{c}{3} \left[1 - \frac{c}{l} + 0,3 \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (51).$$

$$M_B = -P \frac{c}{3} \left[0,5 \frac{c}{l} - 0,3 \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right],$$

$$R_A = \frac{1}{3}P \left[3 - 1,5 \left(\frac{c}{l} \right)^2 + 0,6 \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right],$$

$$R_B = \frac{1}{3}P \left[1,5 \left(\frac{c}{l} \right)^2 - 0,6 \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right].$$

в) В случае нагрузки седлом, как на фиг. 24, формулы получаются путем сложения предыдущих, при чем один раз выражения берутся непосредственно, а другой раз — при зеркально повернутой фигуре 23-б).

При симметричной нагрузке проще получить результат непосредственно (см. 44), так как концевой угол изгиба простой балки от нагрузки есть $\alpha_0 = P \frac{l^2}{32EJ}$, а угол от двух равных опорных моментов — $\alpha_M = \frac{M_A l}{2EJ}$. Приравняв нулю сумму, получаем:

$$P \frac{l^2}{32EJ} + M_A \frac{l}{2EJ} = 0, \text{ откуда } M_A = M_B = -P \frac{l}{16} \dots \dots \dots (52).$$



Фиг. 24.

$$\text{Опорные реакции } R_A = R_B = \frac{1}{2}P \dots (53).$$

д) Таким же образом решается задача и в случае нагрузки горкой, показанной на фиг. 24 пунктиром AC_1B :

$$P \cdot \frac{5}{96} \frac{l^2}{EJ} + M_A \frac{l}{2EJ} = 0, \text{ откуда } M_A = M_B = \frac{5}{48}Pl \dots \dots \dots (54).$$

$$\text{Опорные реакции попрежнему } R_A = R_B = \frac{1}{2}P \dots \dots \dots (55).$$

Изгибающий момент в каком-нибудь сечении с абсциссой x :

$$M_x = M_A + \frac{1}{2} Px - \frac{2}{3} \frac{P}{l^2} x^3.$$

Наибольший положительный момент (будет по середине пролета):

$$M_{\max.} = + \frac{1}{16} P \cdot l, \text{ где } P \text{ — весь груз пролета.}$$

5. При трапециoidalной нагрузке, имеющей на опоре A интенсивность q , а на опоре B интенсивность $q + p$, формулы получаются, как результат сложения случая равномерно распределенной и треугольной нагрузки:

$$M_A = - \left(\frac{q}{12} + \frac{p}{30} \right) l^2, \quad M_B = - \left(\frac{q}{12} + \frac{p}{20} \right) l^2.$$

$$R_A = q \frac{l}{2} + \frac{3pl}{20}, \quad R_B = q \frac{l}{2} + \frac{7pl}{20}.$$

Изгибающий момент в любом сечении пролета:

$$M_x = R_A x + M_A - \frac{x^2}{6} \left(3q + \frac{px}{l} \right).$$

Максимальный положительный момент получается при

$$x = \frac{l}{p} \sqrt{q^2 + qp + \frac{3p^2}{10}} - q \frac{l}{p}.$$

6. Нагрузка моментом. Нагрузка активным моментом, действующим на какое-нибудь сечение пролета, применительно к фиг. 16 табл. IV. Выразим концевые углы изгиба простой балки, нагруженной активным моментом ${}_a M$, через пролет и расстояние обремененного сечения до одной из опор *):

$$\alpha_0 = - \frac{{}_a M l}{6 E J} \left(1 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right) \text{ и } \beta_0 = + \frac{{}_a M l}{6 E J} \left(1 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right).$$

Сложим с углами от опорных моментов по (44). Решая полученные уравнения, найдем моменты:

$$M_A = - {}_a M \frac{b}{l} \left(1 - 3 \frac{a}{l} \right) \text{ и } M_B = + {}_a M \frac{a}{l} \left(1 - 3 \frac{b}{l} \right) \dots \dots (56),$$

а по ним и реакции:

$$R_A = - 6 {}_a M \frac{ab}{l^3} \text{ и } R_B = + 6 {}_a M \frac{ab}{l^3} \dots \dots \dots (57)**).$$

7. Произвольная нагрузка. При большом числе сосредоточенных или других грузов пользуются, либо принципом сложения и готовыми формулами справочных таблиц (см. Введение), либо графическим приемом.

а) Выражение расчетных величин через момент простой балки. Такое выражение представляет определенные практические выгоды, ибо моменты простых балок при встречающихся видах нагрузки уже известны. Составим выражение для концевого угла изгиба балки,

*) Это выражение для α_0 получается из предпоследней формулы столбца 16 таблицы IV, если, после умножения на a , подставить вместо a число $l - b$, а выражение β_0 — получается из последней формулы при замене b числом $l - a$.

**) Момент ${}_a M$ подставляется сюда со свойственным ему знаком, например, на фигуре 16-го столбца в таблице IV берут для ${}_a M$ отрицательный знак, так как момент вращает обратно часовой стрелке. При этом условии формула (56) для опорного момента непосредственно дает и знак в общепринятом смысле знаков теории изгиба: положительный момент для изгиба выпуклостью вниз и отрицательный — для изгиба выпуклостью вверх. По формуле (57) положительная реакция соответствует прижиманию балки к опоре.

находящейся под действием нагрузки и концевых моментов. Обозначая площадь эпюры моментов от нагрузки буквою ω , расстояния ее центра до опор A и B буквами c и c' , а наклон касательных к упругой линии соответственно через α и β , найдем в предположении, что все углы (и моменты) положительны, т. е. соответствуют изгибу выпуклостью вниз:

$$EJ\alpha = \frac{\omega c'}{l} + \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} \quad \text{и} \quad EJ\beta = \frac{\omega c}{l} + \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3}.$$

Так как в защемлении углы α и β нулевые, то:

$$\frac{6\omega c'}{l^2} + 2M_A + M_B = 0 \quad \text{и} \quad \frac{6\omega c}{l^2} + M_A + 2M_B = 0.$$

$$\text{Отсюда } M_A = -\frac{2\omega}{l^2}(3c' - l) \quad \text{и} \quad M_B = -\frac{2\omega}{l^2}(3c - l) \dots \dots \dots (58).$$

Составляем полусумму:

$$\frac{M_A + M_B}{2} = -\frac{\omega}{l}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}(M_A + M_B)l = -\omega \dots \dots \dots (59).$$

т. е. трапеция опорных моментов равновелика площади эпюры моментов или: среднее арифметическое из моментов защемления равняется средней интенсивности моментной нагрузки балки. Последние зависимости представляют простой способ определения защемляющих моментов, в особенности при симметричной нагрузке. В этом случае $M_A = M_B = zM$, и $zM = -\frac{\omega}{l}$, т. е. защемляющий момент равняется интенсивности моментной нагрузки (60).

Примеры. 1) При сосредоточенном грузе посередине пролета

$$\omega = \frac{1}{2}l \frac{Pl}{4} = \frac{1}{8}Pl^2 \quad \text{и} \quad \text{потому} \quad zM = \frac{1}{8}Pl.$$

Сравнивая с моментом простой балки посередине пролета

$$M_c = \frac{1}{4}Pl, \quad \text{получим} \quad zM = \frac{1}{2}M_c \dots \dots \dots (61).$$

2) При равномерно распределенной нагрузке q площадь $\omega = \frac{2}{3}l \frac{1}{8}ql^2 = \frac{1}{12}ql^3$. Момент защемления $zM = \frac{1}{12}ql^2$, а так как момент M_c посередине простой балки $M_c = \frac{1}{8}ql^2$, то отношение между ними

$$\frac{zM}{M_c} = \frac{8}{12}, \quad \text{или} \quad zM = \frac{2}{3}M_c \dots \dots \dots (62)$$


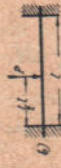



При несимметричной нагрузке, например при сосредоточенном грузе в расстояниях a и b от опор A и B решаем два несложных уравнения.

В этом случае $c = \frac{1}{3}(a + l)$ и $c' = \frac{2l - a}{3}$, момент под грузом $M_P = P \frac{ab}{l}$,

площадь эпюры моментов $\omega = \frac{1}{2}lM_P$.

$$\begin{aligned} \text{Следовательно: } M_A &= -2 \frac{\omega}{l^2}(3c' - l) = -\frac{M_P}{l}(3c' - l) = \\ &= -M_P \frac{l - a}{l} = -P \frac{ab^2}{l^2} \dots \dots \dots (63). \end{aligned}$$

Т а б л и ц а (64).

Случай на- грузки фиг. 25	Единица сравнения	Моменты защемления		Максимальный момент *)
		Левый	Правый	
	$M_P = P \frac{ab}{l}$	$-P \frac{ab^2}{l^2} = -M_P (1 - \xi)$	$-P \frac{a^2 b}{l^2} = -M_P \xi$	$2\xi(1 - \xi)M_P$
	$M_P = \frac{1}{4} Pl$	$-\frac{1}{8} Pl = -\frac{1}{2} M_P$	$-\frac{1}{8} Pl = -\frac{1}{2} M_P$	$+\frac{1}{8} Pl = \frac{1}{2} M_P$
	$M = P_P$	$-\frac{b}{l} \left(1 - 3\frac{a}{l}\right) M =$ $= (1 - \xi)(3\xi - 1) M$	$-\frac{a}{l} \left(2 - 3\frac{a}{l}\right) M =$ $= -\xi(2 - 3\xi) M$	${}_a M \xi [4 - 3\xi(3 - 2\xi)]$ и ${}_a M (-1 + 4\xi - 9\xi^2 + 6\xi^3)$
	$M_c = \frac{1}{8} ql^2$	$-\frac{1}{12} ql^2 = -\frac{2}{3} M_c$	$-\frac{1}{12} ql^2 = -\frac{2}{3} M_c$	$+\frac{1}{24} ql^2 = +\frac{1}{3} M_c$
	$M_c = \frac{1}{16} ql^2$	$-\frac{1}{20} ql^2 = -0,8 M_c$	$-\frac{1}{30} ql^2 = -\frac{8}{15} M_c$	$+\frac{1}{46,6} ql^2$

Стрела прогиба по середине пролета:

в первом случае а) $f_0 = \frac{Pl^3}{48EJ} (1 - \xi)^2 (4\xi - 1)$

в случаях б), d) и е) $f_0 = \frac{M_c l^2}{48 EJ}$

*) В алгебраическом смысле, т. е. положительный.

$M_B = -M_P \frac{a}{l} = -\frac{Pa^2b}{l^2}$ — известные выражения для заземляющих моментов балки. Таким же образом выразятся моменты заземления и при других случаях нагрузки.

Справочная таблица. Приводим таблицу для заземляющих моментов, выражая их через известные моменты для простой балки, свободно лежащей на двух опорах: либо через момент под грузом M_P , либо через момент посередине пролета M_C .

б) Графическое решение. При симметричной нагрузке, на основании зависимости (60) поступают так: строят эпюру для простой балки, находят ее площадь и делят на пролет; частное представляет искомый опорный момент.

Рассмотрим случай несимметричной нагрузки.

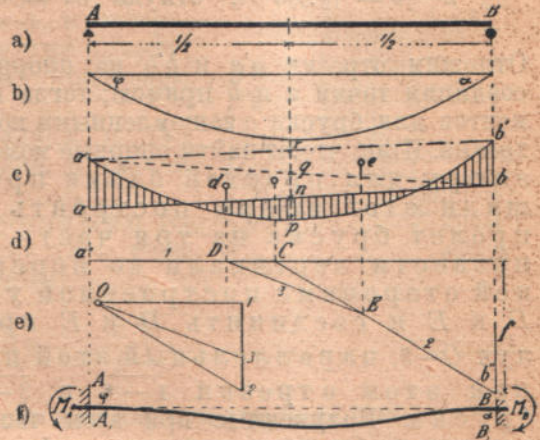
С одной стороны брусок находится под действием заданных грузов, которые дают эпюру моментов $a'pb'$ и реакции A и B ; с другой стороны на него действуют опорные моменты M_A и M_B . Обе эти нагрузки, действуя вместе, не вызывают прогиба опорных точек и при одновременном действии обеих этих нагрузок касательные к упругой линии в опорных точках идут по одной прямой, соединяющей опоры A и B .

Для опорных сечений бруска вращающее действие данной нагрузки и опорных моментов обратны, но равны по величине.

Построим упругую линию от одной только нагрузки т.-е., принимая грузовую площадь $a'pb'$ фиг. с); затем, построим упругую линию от действия одних только опорных моментов. Если мы совместим первые стороны этих линий, т.-е. касательную в опорной точке одной линии с касательной в той же опорной точке другой линии, то последние стороны тоже должны совпасть, так как только при этом условии касательные в другой опорной точке имеют одинаковые углы наклона в обеих упругих линиях.

Пусть $a''C$ и Cb'' фиг. d — первая и последняя стороны линии прогибов при данной нагрузке: их можно получить, заменяя всю грузовую площадь эпюры $a'pb'$ одной силой, откладывая ее на фиг. e) в виде отрезка 1—2 и проводя лучи из полюса O . Очевидно, что эти стороны могут быть в тоже время первою и последнею сторонами линии прогибов от опорных моментов, т.-е. от грузовой площади $a'b'ba$. Но эпюру опорных моментов можно составить из двух треугольников $a'ab$ и $a'b'b$ (фиг. с) и заменить двумя силами dD и eE , приложенными на третях пролета l . При этом многоугольник Вариньона представится тремя сторонами: вершины его будут лежать на силах, именно в точках D и E . Следовательно, направление третьей стороны будет DE .

Итак, направление трех сторон упругой линии от опорных моментов известно. Если эти стороны отнести к тому же силовому многоугольнику (фиг. e), то будут известны и величины опорных моментов. Действительно, если бы мы отложили величины площадей $a'ba$ и $ab'b$, т.-е. силы dD и eE , то получили бы отрезок 1—2, так как площадь трапеции $a'b'ba$ равновелика площади $a'pb'$. Крайние лучи обоих силовых многоугольников совпадают; следовательно, средним лучом для многоугольника Вариньона



Фиг. 26.

$a''DEb''$ будет луч $O-3$, параллельный DE . Этот луч отсекает отрезки $1-3$ и $3-2$, равные площадям треугольников $a'ba$ и $a'b'b$:

$$\overline{1-3} = \frac{1}{2} \cdot aa' \cdot l, \text{ откуда } aa' = \frac{2 \cdot \overline{2-3}}{l} = M_A \dots \dots \dots (65).$$

$$\overline{2-3} = \frac{1}{2} \cdot bb' \cdot l, \text{ откуда } bb' = \frac{2 \cdot \overline{2-3}}{l} = M_B \dots \dots \dots (66).$$

Отложим отрезки $a'a$ и $b'b$ на опорных вертикалях вниз от оси $a'b'$ и соединим точки a и b прямою; тогда получим окончательную эпюру моментов для бруска с заземленными концами. Эта эпюра на (фиг. с) заштрихована. Итак, чтобы найти опорные моменты, надо сначала построить эпюру для простой балки при данной нагрузке; для площади этой эпюры построить упругую линию, разделить пролет бруска на три части, через точки раздела d и e провести вертикали до пересечения с первою и последнею сторонами построенной уже упругой линии в точках D и E и соединить D и E прямою; надо провести затем луч $O-3$, параллельный этой прямой, удвоить полученные при этом отрезки $1-3$ и $3-2$ и разделить на пролет бруска a . Полученные при этом частные и будут искомыми опорными моментами. Опорные моменты по формулам (65—66) можно найти и графически, ограничившись лишь самыми небольшими вычислениями. Вот основания для упрощений.

1. Так как площадь трапеции $a'abb'$ известна и дана высота трапеции l , то этим вполне определяется хорда (средняя линия) трапеции rn : она равна площади эпюры $a'pb'$, разделенной на пролет l .

2. Опорные моменты $b'b$ и $a'a$ пропорциональны rq и qn . Поэтому, если найти точку q , которая делит хорду rn на части, пропорциональные опорным моментам, и провести прямою $a'q$, то опорные моменты определятся сами собою: отрезок $b'b$ отсекается прямою $a'q$, а отрезок aa' получается, если b соединить с концом хорды n и продолжить bn до левой опорной вертикали. Отсюда следует, что для графического определения опорных моментов, надо хорду rn разделить на части, пропорциональные опорным моментам.

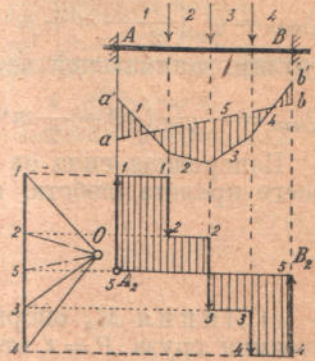
3. Опорные моменты получаются из силового многоугольника (фиг. е); если же нормальный луч $O-1$ и силу $1-2$ взять произвольно, то вместо опорных моментов, мы получим величины $1-3$ и $3-2$, пропорциональные моментам. Пропорционально этим отрезкам и должна быть разделена хорда nr .

На основании этих положений, через концы произвольной вертикали $1-2$ проводят лучи $O-1$ и $O-2$ и строят им параллельные стороны $a'C$ и Cb'' , пересекающиеся на вертикали, проходящей через центр тяжести эпюры $a'pb'$. Точки пересечения D и E сторон с вертикалями, разделяющими пролет на три части, соединяют прямою и проводят ей параллельный луч $O-3$. Делят хорду трапеции rn на части rq и qn , пропорциональные отрезкам $2-3$ и $3-1$, и находят q . Соединяя q с a' , находят опорный момент bb' , а соединяя b с n , находят aa' .

с) Графическое решение для эпюры поперечных сил (фиг. 27). Построением эпюры моментов для всякого статически неопределимого бруска решается вопрос о внешних силах: внешние силы перестают быть неизвестными, и потому легко может быть построена эпюра

Q . Мы найдем ее на основании известной связи между эпюрой M и эпюрой Q^* .

Положим, что для бруска с зашечленными концами мы построили сначала многоугольник Вариньона $a'—1—2—3—4—b'$, как для простой балки, свободно лежащей на двух опорах A и B ; затем нашли ось эпюры моментов ab , как указано было в пункте а). Если теперь мы проведем луч $O—5$, параллельный оси ab , то определятся величины опорных реакций $4—5$ и $5—1$, и построение эпюры Q сведется к известному уже приему; проектируем точку 5 в точку A_2 и определяем таким образом ось эпюры A_2B_2 .



Фиг. 27.

Таким же образом решается задача и для бруска, один конец которого зашечлен, а другой опирается на каток.

8. Линии влияния. а) Линия реакции R_A получается на основании выражения (39), если принять $P=1$ и считать b переменным:

$$R_A = 1 \cdot \frac{b^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{b}{l} \right) \dots \dots \dots (67).$$

Если же расстояние груза считать от левой опоры, то получим:

$$R_A = 1 - \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right) \dots \dots \dots (68).$$

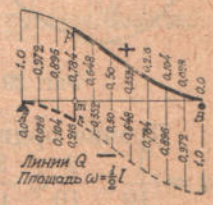
Это — кривая с перегибом, представленная на фиг. 28 вверху. Чтобы определить положение точки перегиба, приравняем нулю вторую производную; получим $b = \frac{1}{2} l$.

Разбивая пролет l на 10 частей и вычисляя R_A для $\frac{b}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots$ будем откладывать R_A в виде ординат для соответствующих b ; получится кривая, изображенная жирной линией.

Линия R_B будет такая же, но повернутая.

б) Линия Q для сечения m (фиг. 28). Пока груз справа, то $Q_m = R_A$, т.е. надо пользоваться линией реакции R_A , уже построенной и обведенной жирнее.

Когда же груз перейдет налево от сечения m , то надо считаться с реакцией R_A и грузом $P=1$: $Q = R_A - 1$, и надо брать пунктирную кривую, равно отстоящую от верхней на расстоянии единицы. Окончательно получим $AnpB$. На фиг. 28 выписаны все ординаты линий и площадь, очерченная одною из ее ветвей на протяжении всего пролета.



Фиг. 28.

Уравнение верхней ветви линии влияния при отсчитывании абсцисс слева — направо:

$$y = 1 - 3 \frac{a^2}{l^2} + 2 \frac{a^3}{l^3}.$$

Нижняя ветвь получается, по тому же уравнению, если абсциссы отсчитывать справа — налево и переменить знаки на обратные:

$$y = -1 + 3 \frac{b^2}{l^2} - 2 \frac{b^3}{l^3}.$$

*) См. например § 23 наших „Систем без лишних стержней“.

Для получения расчетных поперечных сил в данном сечении, обозначим расстояние x сечения до опоры в частях пролета l , а именно примем $x = ml$ или $m = \frac{x}{l}$; тогда:

$Q_{\text{макс}} = ql \left(\frac{1}{2} - m + m^3 - \frac{1}{2} m^4 \right)$, где q — интенсивность временной нагрузки, занимающей весь положительный участок линии влияния.

$Q_{\text{мин}} = -ql \left(m^3 - \frac{1}{2} m^4 \right)$ — для q , занимающего весь отрицательный участок.

Поперечная сила от постоянной равномерно распределенной нагрузки всего пролета (собств. вес):

$$Q_P = pl \left(\frac{1}{2} - m \right).$$

с) Линия M_A опорного момента в плоскости заземления A . Если расстояния груза $P=1$ отсчитывать от правой опоры B , обозначая их b , то формулу (38) можно преобразовать в следующее уравнение линии влияния:

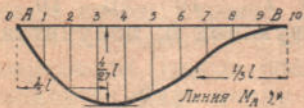
$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2} = -1(l-b) \frac{b^2}{l^2} = -l \left(1 - \frac{b}{l} \right) \frac{b^2}{l^2} \dots (69);$$

если же расстояние груза $P=1$ считать от левой опоры, то получится:

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2} = \frac{-1 \cdot a(l-a)^2}{l^3} = -a \left(1 - 2\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right) \dots (70);$$

или иначе: $M_A = -l \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 = \xi l (1 - \xi)^2$.

На фиг. 29 линия опорного момента M_A построена на основании 11 установок груза, по 11 точкам. Как видно из фигуры, максимальный момент M_A и точка перегиба, помещаются на третях пролета. Максимальная ордината линии



Фиг. 29.

$M_{A \text{ макс}} = \frac{4}{27} l$ — она получается из выражения (69), если вместо b подставить $\frac{2}{3} l$ или из (70) если принять $a = \frac{1}{3} l$.

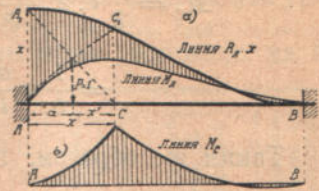
Прочие ординаты линий, вычисленные по формуле (69) для абсцисс $a = \frac{1}{10} l, \frac{2}{10} l, \frac{3}{10} l \dots$ приведены в следующей таблице:

№№ ординат	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение ординат в частях пролета l	0,0	0,081 l	0,128 l	0,147 l	0,144 l	0,125 l	0,096 l	0,063 l	0,032 l	0,009 l	0,0

Площадь линии влияния $\omega = \frac{1}{2} l^2$, так что, опорный момент от постоянной равномерно-распределенной нагрузки P оказывается

$$M_A = p\omega = \frac{1}{12} pl^2.$$

d) Линия изгибающего момента в промежуточном сечении C (фиг. 30). Пока груз находится в правой части балки, изгибающий момент в сечении C представляется моментом реакции R_A , и опорным реактивным моментом M_A . Поэтому правой ветвью линии влияния может служить линия реакции R_A , если ее ординаты увеличить в x раз и численно вычесть из них ординаты M_A . На фиг. 30-a) эта ветвь отмечена буквами BC_1 .



Фиг. 30.

Когда же груз перейдет на левый участок AC , то изгибающий момент

$$M_C = R_A x - 1 x' + M_A \dots \dots \dots (71),$$

и из ординат прежней линии

$$R_A x + M_A$$

придется вычитать

$$1 \cdot x', -$$

т. е. ординаты, возрастающие по линейному закону и достигающие на опоре A наибольшего значения $1 \cdot x$. Это вычитание может быть осуществлено путем откладывания вниз от кривой A, C , ординат вспомогательного треугольника ACA_1 , имеющего опорную ординату x и вершину — в сечении C . В результате получится пунктирная линия AC_1 .

Окончательная форма линии влияния изображена на фиг. 30-b).

Линии влияния статически неопределимых балок обыкновенно приходится строить по точкам, вычисляя ординаты на основании соответствующих формул. Для левой ветви, т. е. при положении груза на левом участке AC , очевидно, придется пользоваться уравнением (71):

$$M_C = R_A - 1 x' + M_A, \text{ или по (68 и 70):}$$

$$M_C = \left[1 - \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right) \right] x - a \left(\frac{x}{a} - 1 \right) - a \left(1 - 2 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right),$$

где вместо x' фигуры 30-a) поставлено $x - a$, при чем расстояние a отсчитывается от левого конца балки до груза $P = 1$. После преобразования это уравнение упрощается:

$$M_C^I = x \left(2 \frac{a}{l} - 3 \right) \frac{a^2}{l^2} + a \frac{a}{l} \left(2 - \frac{a}{l} \right), \text{ или иначе}$$

$$M_C^I = \xi^2 (2l - 3x) + \xi^3 (2x - l) = l [\xi^2 (2 - 3m) + \xi^3 (2m - 1)] \dots \dots (72).$$

Для правой ветви пользуемся выражением $M_C = R_A x + M_A$ и формулами (68) и (70):

$$M_C^II = \left[1 - \frac{a^2}{l^2} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right) \right] x - a \left(1 - 2 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right), \text{ или иначе:}$$

$$\begin{aligned} M_C^II &= x - \xi l + \xi^2 (2l - 3x) + \xi^3 (2x - l) = \\ &= l [m - \xi + \xi^2 (2 - 3m) + \xi^3 (2m - 1)] \dots \dots \dots (73). \end{aligned}$$

где $m = \frac{x}{l}$, а $\xi = \frac{a}{l}$, считая x — расстояние опоры A до сечения, а a — расстояние той же опоры до груза $P = 1$.

Применим эти общие выражения к построению линии влияния для какого-нибудь определенного сечения балки, например, для находящегося на $0,4l$ от левой опоры A .

Здесь $x = \frac{2}{5}l$; поэтому левая ветвь линии влияния, по (72):

$$M_C^{\pi} = \frac{2}{5} l \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{l^3} - \frac{2}{5} l \cdot 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} + 2 \frac{a^2}{l} - \frac{a^3}{l^2} = \frac{a^2(4l - a)}{5l^2} = \frac{1}{5} a \frac{a}{l} \left(4 - \frac{a}{l}\right) = l \xi^2 (0,8 - 0,2 \xi) \dots \dots \dots (74).$$

Таким же образом, правая ветвь, по (73):

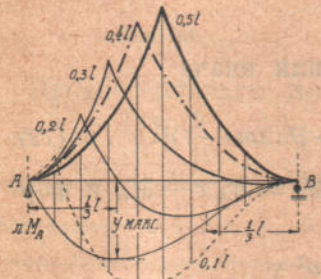
$$M_C^{\pi} = \frac{2}{5} l - \frac{2}{5} l \cdot 3 \cdot \frac{a^2}{l^2} + \frac{2}{5} l \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{l^3} - a + 2 \frac{a^2}{l} - \frac{a^3}{l^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{2}{5} l^3 - l^2 a + \frac{4}{5} l a^2 - \frac{1}{5} a^3 \right) = \frac{2}{5} l - a \left(1 - \frac{4}{5} \frac{a}{l} + \frac{1}{5} \frac{a^2}{l^2} \right),$$

или $M_C^{\pi} = l(0,4 - \xi + 0,8 \xi^2 - 0,2 \xi^3) \dots \dots \dots (75).$

Остается первое уравнение применить для отношений $\xi = \frac{a}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$ и $\frac{4}{10}$ и отложить ординаты №№ 1, 2, 3 и 4. Применяя второе выражение для M_C к отношениям $\xi = \frac{a}{l} = \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \dots, \frac{9}{10}$, построим правую ветвь линии. На фиг. 31 линия влияния для изгибающего момента в сечении, находящемся на расстоянии $0,4l$, показана штрих—пунктиром.

Таким же образом поступают и с другими сечениями балки: разбивают пролет на 10 частей, назначают сечение на одной из точек деления пролета и, как постоянную величину, вносят его расстояние x в уравнения для ветвей линии влияния (72) и (73). Далее применяют уравнения к соответствующим ветвям, вычисляя ординаты линии для точек деления, определенных отношением $\xi = \frac{a}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \dots$

На фиг. 31. построены линии влияния моментов для ряда сечений балки с заземленными концами; они дают наглядное представление об изменении формы линии при постепенном смещении сечения вдоль балки. Линии отличаются от соответствующих линий простой балки: кроме искривления ветвей, здесь еще встречается два знака ординат: + и - для одной и той же линии. Только для сечений в пределах пятой доли пролета посередине все ординаты линии однозначны и общий характер линий напоминает простую балку: моменты же в крайних двух пятых пролета — переменного знака. Грузы находящиеся в стороне, противоположной сечению, вызывают в сечении отрицательный изгибающий момент и тем



Фиг. 31.

большой, чем ближе сечение к опоре. В последнем случае положительный момент невелик, но он возрастает по мере приближения сечения к середине пролета.

е) Таблицы ординат линий влияния. В ниже следующих таблицах показано значение ординат, соответствующих каждой десятой части пролета. Ординаты написаны в долях пролета: их надо понимать, как численные значения момента, вызванные единичным грузом ($P = 1$); при грузе же P ординаты будут в P раз больше, так что, при расчете момента от системы грузов, надо ординаты из таблиц умножать на стоящие над ними грузы и составлять сумму.

Таблица ординат для линий влияния моментов в разных сечениях, определяемых отношением $m = x/l$, где x — расстояние сечения от левой опоры.

Ординаты написаны по порядку слева направо, применительно к фигуре 31, через десятую долю пролета, т. е. доля $\xi = a/l = 1/10, 2/10, 3/10 \dots$. Они написаны в долях пролета l и потому должны быть умножены на l .

Сечение m	Абсцисса $\frac{a}{l}$										Наибольшая (-) ордината	Перегрузка при абсциссах	Нулевые точки при абсциссах	
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9				1,0
$m=0,0$ $y = -a \left(1 - 2 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$ $-\omega = \frac{1}{12} l^2, +\omega = 0$ $M_A = -\frac{1}{12} pl^2$	0,000	0,081	0,128	0,147	0,144	0,125	0,096	0,063	0,032	0,009	0,000	$\frac{1}{3} l$ при $\frac{1}{3} l$ — $\frac{4}{27}$	$\frac{2l}{3}$	0
$m=0,1$ От 0 до 0,1l: $y = -0,8a \frac{a^2}{l^2} + 1,7a \frac{a}{l}$ От 1,1l до l: $y = -0,8a \frac{a^2}{l^2} + 1,7a \frac{a}{l} - a + 0,1l$ $+\omega = 0,0007l^2$ $-\omega = 0,039l^2$ $M_A = -0,0383pl^2$	0,0000	+ 0,0162	- 0,0384	- 0,0686	- 0,0792	- 0,0750	- 0,0608	- 0,0414	- 0,0216	- 0,0062	0,0000			
$m=0,2$ От 0 до 0,2l: $y = -0,6a \frac{a^2}{l^2} + 1,4a \frac{a}{l}$ От 0,2l до l: $y = -0,6a \frac{a^2}{l^2} + 1,4a \frac{a}{l} - a + 0,2l$ $+\omega = 0,0065l^2, -\omega = 0,0098l^2$ $M_A = -0,0033pl^2$	0,0000	+ 0,0124	+ 0,0512	+ 0,0098	- 0,0144	+ 0,0250	- 0,0256	- 0,0198	- 0,0112	- 0,0034	0,0000	$\frac{5}{9} l$ при $\frac{5}{9} l$ — 0,0263	$\frac{7l}{9}$	$\frac{1}{3} l$
$m=0,3$ От 0 до 0,3l: $y = -0,4a \frac{a^2}{l^2} + 1,1a \frac{a}{l}$ От 0,3l до l: $y = -0,4a \frac{a^2}{l^2} + 1,1a \frac{a}{l} - a + 0,3l$ $+\omega = 0,02184l^2, -\omega = 0,00013l^2$ $M_A = +0,02171pl^2$	0,0000	+ 0,0096	+ 0,0408	+ 0,0882	+ 0,0504	+ 0,0250	+ 0,0096	+ 0,0018	- 0,0008	- 0,0006	0,0000			
$m=0,4$ От 0 до 0,4l: $y = -0,2a \frac{a^2}{l^2} + 0,8a \frac{a}{l}$ От 0,4l до l: $y = -0,2a \frac{a^2}{l^2} + 0,8a \frac{a}{l} - a + 0,4l$ $+\omega = 0,0367l^2, -\omega = 0$ $M_A = +0,0367pl^2$	0,0000	+ 0,0078	+ 0,0304	+ 0,0686	+ 0,1152	+ 0,0750	+ 0,0448	+ 0,0234	+ 0,0096	+ 0,0022	+ 0,0000	—	—	—
$m=0,5$ От 0 до 0,5l: $y = \frac{1}{4} a \frac{a}{l}$ $+\omega = \frac{1}{24} l^2, -\omega = 0$ $M_A = +\frac{1}{24} pl^2$	0,0000	+ 0,005	+ 0,020	+ 0,045	+ 0,080	+ 0,125	+ 0,090	+ 0,045	+ 0,020	+ 0,005	+ 0,000			

Кроме ординат, относящихся к десятым долям пролета, в таблицах приведены характерные координаты: для нулевой точки, для точки перегиба, максимальная ордината.

При равномерно распределенной нагрузке приходится пользоваться площадями линий влияния; поэтому в таблицах выписаны также и площади линий. В тех случаях, когда линия влияния имеет противоположные знаки, то даются площади отдельно для положительного и отдельно для отрицательного участка, а также их алгебраическая сумма с соответствующим знаком.

При наличии таких данных расчет балок сводится к тем простым операциям, которыми обыкновенно пользуются для балок, свободно лежащих на опорах. Так, для нахождения момента от собственного веса строения, сумму площадей линии влияния умножают на погонный собственный вес p . Если надо получить расчетные усилия балки пешеходного моста, то загружают толпой людей отдельно сначала участок того знака, который имеет сумма площадей линии. Погонную интенсивность веса толпы q умножают на площадь загруженного ею участка ω_1 . Прибавляя произведение $q\omega_1$ к постоянному усилию p ($\omega_1 - \omega_2$), получают численно наибольшее расчетное усилие

$$S' = p(\omega_1 - \omega_2) + q\omega_1 \dots \dots \dots (76-a).$$

Загрузивши толпой отдельно площадь обратного знака ω_2 , получают другое расчетное усилие

$$S'' = p(\omega_1 - \omega_2) - q\omega_2, \dots \dots \dots (76-b).$$

численно наименьшее*).

г) Линия влияния для прогиба в каком-нибудь сечении балки. Ее можно получить, на основании принципа взаимности перемещений, как упругую линию той же балки, но нагруженной единицей в данном сечении**. Так, например, для получения линии влияния прогиба по середине балки прикладывают по середине груз $P=1$ и составляют для этого случая уравнение упругой линии. Чтобы получить такое уравнение, воспользуемся выражением (41) или (42),



Фиг. 32.

подставляя вместо $\frac{a}{l} = \frac{b}{l} = \frac{1}{2}$ и вместо $P=1$;

абсциссу x будем считать переменной, чтобы получить прогибы y в разных сечениях балки от 0 до $\frac{1}{2}l$. Тогда окажется:

$$y = -\frac{l^3}{48EJ} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - 4\frac{x}{l} \right) \dots \dots \dots (77).$$

По этой формуле построена линия влияния для прогиба по середине балки, на фиг. 32. На ординатах написаны числа, выражающие прогибы середины балки в долях того прогиба, который имела бы простая балка, нагруженная по середине единицей. Точка перегиба линии находится на $\frac{1}{4}$ пролета.

9. Влияние температуры. а) Равномерное нагревание или охлаждение. Концы заземленной балки не могут перемещаться, и при охлаждении в балке возникают продольные растягивающие напряжения,

*) Здесь мы имеем в виду численные значения усилий и площадей, поэтому подставляем S и ω арифметически, без знака. Ниже расчетные усилия называются максимальным и минимальным в математическом смысле, т. е. максимальным называется большее из двух положительных чисел S' и S'' , или меньшее из двух отрицательных. Положительное число S' или S'' , хотя бы численно и меньше отрицательного, считается максимальным.

**) См., например, в наших Системах с лишними неизвестными, курсив в конце 1-го раздела § 17.

при нагревании — сжимающие. Они определяются элементарно путем умножения относительного удлинения $e = \frac{\varepsilon l t}{l}$ на модуль упругости материала E :

$$n_t = Ee = E\varepsilon t.$$

Если для железных балок приближенно считать

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг./см.}^2, \quad \varepsilon = 12 \cdot 10^{-6},$$

а предел текучести материала — $n = 2400 \text{ кг./см.}^2$, то даже при обеспечении только двойного запаса на простое сжатие, можно допускать нагревание лишь не более, чем на 50°. Действительно:

$$\frac{1}{2} \cdot 2400 = 2 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot t, \text{ откуда } t = 50.$$

Если же примем во внимание неустойчивость сжатия и наличие сжимающих напряжений в волокнах вогнутой стороны балки, изогнутой обычными ее нагрузками, то получим еще меньшую цифру. В этом — недостаток балок, заземленных обоими концами, недостаток ограничивающий их применение в некоторых специальных условиях, несмотря на их жесткость по прогибу и экономичность по изгибающему моменту*).

б) Неравномерное нагревание поперечного сечения. Для простоты положим, что температура изменяется вдоль высоты балки по линейному закону. При этом условия два близких поперечных сечения, взятые на взаимном расстоянии dx , оставаясь плоскими и после нагревания, взаимно поворачиваются на угол: $d\varphi = \varepsilon dx \delta t : h$, где ε — коэффициент расширения материала, а δt — разность температур крайних волокон балки, взаимное расстояние которых h^{**}) (фиг. 33).

Очевидно, относительный поворот двух сечений балки, взятых на конечном расстоянии s , представится выражением:

$$\varphi = \varepsilon \delta t \int_0^s \frac{dx}{h} \dots \dots \dots (78-a),$$

если же высота по всему пролету s постоянна, то

$$\varphi = \frac{\varepsilon \delta t}{h} \int_0^s dx \dots \dots \dots (78-b).$$

Плоскости заземления препятствуют такому повороту балки. Возникающие при этом моменты мы назовем температурными и определим их по общим правилам уравнивания деформаций, а именно, напишем, что сумма углов поворота какого-нибудь заземленного конца балки от действия температуры и от температурных моментов равна фактическому

*) Прогиб в 4—5 раз меньше, чем у простой балки, расчетный момент составляет от $\frac{1}{2}$ до $\frac{2}{3}$.

Следует иметь в виду, что элементарный расчет по принципу сложения действий здесь вообще допускается только при обычных ничтожных деформациях и при обычных размерах балок, т. е. вдали от значений критической силы. Расчет же невысоких профилей и пластинок приходится вести по теории сложного сопротивления, учитывая зависимость между прогибом и сжатием.

**) Сечения остаются плоскими потому, что удлинения волокон одинаковой длины пропорциональны повышению температуры и, если температура возрастает вдоль высоты балки линейно, то таким же образом по высоте балки возрастают и удлинения. Следовательно, если удерживать одно из сечений, то соседнее будет поворачиваться, оставаясь плоским. Если при этом верх балки нагревается, а низ настолько же охлаждается, то по середине высоты окажется нейтральная ось вращения. В случае различного нагревания обоих крайних слоев сечения, оно получает дополнительно еще и поступательное перемещение, рассмотренное в первом разделе.

углу поворота этого конца, имеющему место в данной статически неопределимой балке:*)

$$\frac{M_{At}l}{3EJ} + \frac{M_{Bt}l}{6EJ} + \frac{\varepsilon \delta t}{h} \int_0^s dx = \alpha \dots \dots \dots (79)$$

Например, если левый конец балки совершенно неподатлив благодаря полному заземлению в абсолютно жесткой кладке опоры, то здесь будет нуль: $\alpha = 0$. Если при этом вдоль оси балки нагревание происходит симметрично относительно середины пролета, то оба концевые угла поворота будут одинаковы по отношению к вертикальной оси симметрии и каждый из них будет вычисляться по длине $s = \frac{1}{2}l$. В этом случае уравнение (79) будет:

$$\frac{M_{At}l}{3EJ} + \frac{M_{Bt}l}{6EJ} + \frac{\varepsilon \delta t l}{2h} = 0 = \frac{M_t l}{2EJ} + \frac{\varepsilon \delta t l}{2h},$$

откуда $M_t = -\frac{\varepsilon \delta t EJ}{h} \dots \dots \dots (80).$

Температурный опорный момент при прочих равных условиях зависит от высоты балки.

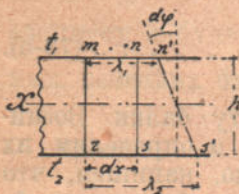
При податливых опорах может случиться, что концы балки *A* и *B* повернутся на разные углы α и β в зависимости от жесткости заделки. Тогда мы будем иметь два уравнения (79):

$$\frac{M_{At}l}{3EJ} + \frac{M_{Bt}l}{6EJ} + \frac{\varepsilon \delta t}{2h} l = \alpha \text{ и } \frac{M_{Bt}l}{3EJ} + \frac{M_{At}l}{6EJ} + \frac{\varepsilon \delta t}{2h} l = \beta$$

для определения двух неизвестных температурных моментов

$$M_{At} \text{ и } M_{Bt} \dots \dots \dots (81).$$

с) Влияние температуры при переменной толщине балки. Если толщина балки изменяется вдоль пролета, то *h* остается под знаком интеграла формулы (78). С другой стороны, углы поворота основной балки от температурных моментов тоже получают иное выражение. Мы определим их, как опорную реакцию от фиктивной нагрузки, представляющей, эпюру моментов разделенную на жесткость**). Полагая, например, что действует один только опорный момент M_A , вызывающий треугольную эпюру моментов, составляем статический момент площади треугольника относительно опоры *B* причем для каждого элемента балки изгибающий момент (ординату треугольника) делим на соответствующую жесткость EJ . Полученный таким путем статический момент делим на пролет *l*. Вынося постоянные M_A и *E* за знак суммирования элементов, получим:



Фиг. 33.

$$\alpha_1 = \frac{M_A}{El^2} \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{J}.$$

Таким же образом при отдельном действии опорного момента M_B :

$$\alpha_2 = \frac{M_B}{El^2} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{J}.$$

*) См. наши Системы с лишними неизвестными, § 11, 3.

**) См. напр., § 3 наших Систем с лишними неизвестными.

Очевидно, результирующий угол поворота конца *A* будет:

$$\alpha = \alpha_t + \alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon \delta t \int_0^{l/2} \frac{dx}{h} + \frac{M_A}{El^2} \int_0^l \frac{(l-x)^2 dx}{J} + \frac{M_B}{El^2} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{J}$$

Соответственно для конца *B*:

$$\beta = \varepsilon \delta t \int_0^{l/2} \frac{dx}{h} + \frac{M_A}{El^2} \int_0^l \frac{x(l-x) dx}{J} + \frac{M_B}{El^2} \int_0^l \frac{x^2 dx}{J} \dots \dots \dots (82)$$

§ 3. Балки с упруго заделанными концами. 1. Податливость опор.

а) Определения и общие замечания. Все вышеприведенные формулы имеют значение только при полном защемлении концов балки, т.е. при условии, что концевые сечения под действием опорных моментов совершенно не поворачиваются. В действительности, благодаря обмятию кромок в опорных площадках балки, благодаря податливости раствора, сравнительно малому коэффициенту упругости кладки и проч.—нет совершенного защемления в плоскостях, ограничивающих видимый пролет балки. Даже при идеальном устройстве опор, защемление обеспечивается лишь на некотором расстоянии вглубь от плоскости заделки и, по существу, следовало бы в расчет вводить пролет, несколько больше видимого пролета балки*). Обыкновенно же довольствуются видимым пролетом, имея в виду большие запасы прочности, принимаемые в расчетах. Однако, в случае, когда концы балки заделываются в упругую среду, их нельзя считать совершенно защемленными даже при обычных приближенных способах расчета. В этом мы имели случай убедиться при расчете козуров и неразрезных балок**). Оказывается, что ничтожный поворот, допускаемый упругой заделкой опоры существенно отражается на реактивных моментах балки.

Будем называть податливостью способность плоскости заделки поворачиваться под действием концевого активного момента балки и будем измерять ее углом ζ , на который поворачивается плоскость заделки под действием момента, равного единице. Угол ζ назовем коэффициентом податливости. Число, обратное т.е. $\frac{1}{\zeta}$ назовем степенью заделки.

Все действительные случаи заделки, в зависимости от жесткости массива опоры, располагаются между полным защемлением конца балки и свободно опертым шарнирным концом. В первом случае $\zeta = 0$ и следовательно $\frac{1}{\zeta} = \infty$. Если к свободно шарнирному концу балки приложить единичный момент, то этот конец будет неограниченно вращаться; здесь $\zeta = \infty$ и $\frac{1}{\zeta} = 0$. Таким образом, в действительности степень заделки бывает от ∞ до 0, приближаясь к тому или иному пределу в зависимости от жесткости массива опоры и качества работы по устройству опор.

Рассмотрим несколько случаев упругой заделки, подчиняющейся закону пропорциональности. Если в такой опоре единичный момент вызывает поворот ζ , то, очевидно момент *M* повернет на угол *Mζ*.

б) Опора, работающая на кручение. Положим, что балка *AB*, фиг. 34, с сосредоточенным грузом *P* по середине, своими концами жестко скреплена с поперечными балками *CD* и *EF*. Последние вполне защемлены по концам. Определим степень заделки концов балки *AB* в



Фиг. 34.

*) В железобетонных перекрытиях для получения расчетного пролета балки принято пролет в свету увеличивать на 5% (см. Залигер. Железо-бетон 1927, стр. 634).

**) См. наши Системы с лишними неизвестными, § 11,5е.

одном частном случае, например, при одинаковых прямоугольных сечениях балок bh и равных пролетах l . Прикладывая к балке CD момент $M_a = 1$ в плоскости AB , мы получим угол закручивания $\zeta = M_k \cdot \frac{1}{2} l \frac{1}{Gkb^3h}$, где при $AC = AD = \frac{1}{2} l$, крутящий момент M_k составляет $\frac{1}{2}$, модуль сдвига для железа $G = 0,85E$ и коэффициент k определяется по таблице Сен-Венана, например, при $b = \frac{1}{2} h$ он составляет 0,25. Следовательно, коэффициент податливости опор у балки AB будет

$$\zeta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \frac{1}{0,85E \cdot 0,25b^3h} = \frac{14l}{EJ_y}$$

И, если обозначить опорный реактивный момент балки AB буквой M_a , то для угла поворота ее конца получится выражение:

$$\alpha = \zeta M_a = \frac{14M_a l}{EJ_y}$$

Таков действительный угол поворота статически неопределимой балки. Приравнявая его углу поворота основной балки от нагрузки P и от лишних моментов M_a и $M_b = M_a$, т.е. углу $\frac{Pl^2}{16EJ_z} - \frac{M_a l}{2EJ_z}$, получим

$$14 \frac{M_a l}{EJ_y} = \frac{Pl^2}{16EJ_z} - \frac{M_a l}{2EJ_z}, \text{ откуда:}$$

$$M_a = \frac{1}{8} Pl \frac{1}{1 + 28 \frac{J_z}{J_y}} = \frac{1}{8} Pl \frac{1}{1 + 28 \left(\frac{h}{b}\right)^2}, \text{ что при } h = 2b \text{ дает:}$$

$M_a = \frac{1}{8} Pl \cdot \frac{1}{113}$, т.е. меньше 10% от реактивного момента, получающегося при полном защемлении.

При исследовании двутавровых и вообще высоких балок в подобных перекрестных системах следовало бы еще рассмотреть упругую устойчивость поперечных балок CD и EF , работающих на изгиб с кручением*). Это привело бы к еще худшим результатам.

Другой пример такого же рода представляет система балок лестничной клетки: балки площадок, скрепленные с косоурами маршей**).

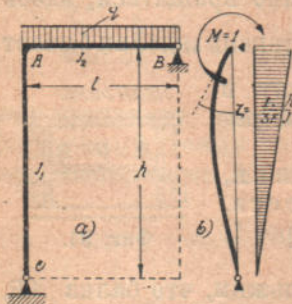
Эти частные примеры свидетельствуют, на какой шаткой почве находятся те, кто предлагает рассчитывать подобные балки на половинную заделку. Эти же примеры говорят, что и мостовые поперечные балки, жестко склепанные с поясами ферм, в особенности одностенчатых, не следует рассчитывать, как вполне защемленные.

с) Опоры, работающие на изгиб. Положим, что опорой A балки AB фигуры 35 служит упругая стойка, жестко скрепленная с балкой. Совершенно очевидно, что балка не будет защемленной, а лишь отчасти заделанной. Податливость заделки $\zeta = \frac{1 \cdot h}{3EJ_1}$, а степень заделки $\frac{1}{\zeta} = \frac{3EJ_1}{h}$, так

что, плоскость заделки под действием приложенного момента M_a повернется на угол $\zeta \cdot M_a$.

*) См. С. П. Тимошенко. Об устойчивости упругих систем. 1910.

**) См. наши Системы с лишними неизвестными § 11,5с.



Фиг. 35.

С другой стороны этот угол совпадает с углом изгиба конца *A* балки *AB*, нагруженной весом *q* и одновременно — опорным моментом *M_A*; поэтому должно быть

$$\zeta M_A = \frac{1 \cdot h \cdot M_A}{3EJ_1} = \frac{ql^3}{24EJ_2} - \frac{M_A l}{3EJ_2}.$$

Отсюда, при $h = l$ и $J_1 = J_2$:

$$M_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8},$$

т. е. реактивный момент составляет половину того, что получается при полном защемлении *).

В случае двухпролетной балки, для части ее *AB* на фиг. 36-б) препятствием к свободному повороту конца *A* служит левый пролет 0—1 фигуры а) с которым жестко связана балка *AB* пролета 1—2. Под давлением нагрузки *q* опорное сечение *A* балки *AB* поворачивается более или менее в зависимости от жесткости пролета 0—1, так

что, поворот последнего $\zeta = \frac{1 \cdot l_1}{3EJ_1}$ будет подавляющею заделкой балки *AB*. Очевидно, действительный момент *M₁* создаст поворот

$$M_1 \zeta = \frac{M_1 l_1}{3EJ_1}.$$



Фиг. 36.

А так как тот же поворот для пролета 1—2 равняется:

$$\frac{ql^3}{24EJ_2} - \frac{M_1 l_2}{3EJ_2}, \text{ то: } \frac{M_1 l_1}{3EJ_1} = \frac{ql^3}{24EJ_2} - \frac{M_1 l_2}{3EJ_2}.$$

Отсюда, при $l_1 = l_2 = l$ и $J_2 = J_1 = J$:

$$M_1 = \frac{1}{16} ql^2.$$

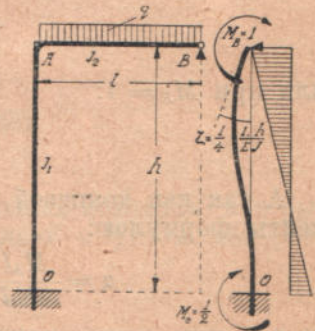
Оказывается, что и здесь левый конец балки второго пролета заделан только наполовину.

Менее податливой опорой оказывается стойка (или балка) в том случае, если ее другой конец защемлен, как например *O*, на фиг. 37. Здесь единичный момент, приложенный к вершине стойки, в основании ее вызывает половинный реактивный момент:

$$M_0 = \frac{1}{2} M_A \dots \dots \dots (83),$$

так что, угол поворота ζ окажется:

$$\zeta = \frac{1 \cdot h}{4EJ_1} \text{ **) } \dots \dots \dots (84).$$



Фиг. 37.

Следовательно, реактивный момент *M_A* определится из выражения:

$$\frac{ql^3}{24EJ_2} - \frac{M_A l}{3EJ_2} = \frac{M_A h}{4EJ_1},$$

которое при $l = h$ и $J_1 = J_2$ дает:

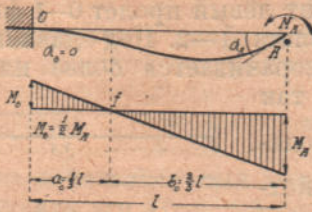
$$M_A = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{8} ql^2.$$

*) См. § 1, 1а.

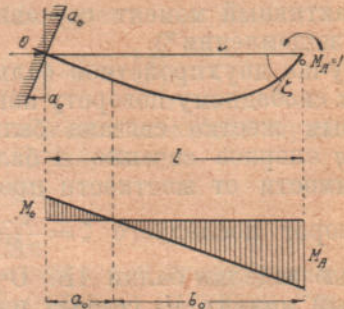
**) См. наши Системы с лишними неизвестными, § 10, 5а.

Таким образом, опоры, работающие на изгиб, представляют более действительную заделку для балки. Степень заделки зависит от относительной гибкости опоры и балки, т. е. от размеров поперечного сечения опоры, ее длины и способа закрепления противоположного конца.

Положим, что противоположный конец упругого бруска, служащего опорой для балки, не вполне зацементирован, представляя в свою очередь податливую опору. При действии на брусок активного момента M_A фиг. 39, в податливой плоскости заделки O будет меньший реактивный момент, чем получился бы по (83) при полном зацементировании, т. е. меньше половины активного момента M_A . Реактивный момент будет тем меньше, чем податливей опора O .



Фиг. 38. Зацементирование.



Фиг. 39. Упругая заделка.

Так как реактивный опорный момент всегда противоположного знака, то эпюра опорных моментов: активного M_A и реактивного M_0 всегда имеет нулевую точку (фокус). При полном зацементировании конца O нулевая точка находится на $1/3$ пролета, так что на фиг. 38:

$$a_0 = \frac{1}{3} l,$$

при податливой заделке фиг. 39:

$$M_0 < \frac{1}{2} M_A \text{ и } a_0 < \frac{1}{3} l.$$

Каково бы ни было соотношение между M_A и M_0 всегда:

$$\frac{M_A}{M_0} = - \frac{l - a_0}{a_0}, \dots \dots \dots (85)$$

или при $M_A = 1$:

$$M_0 = -1 \cdot \frac{a_0}{l - a_0}.$$

А так как концевой угол изгиба балки выражается через концевые моменты формулой:

$$\alpha = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_0 l}{6EJ}, \text{ или } \zeta = \frac{1 \cdot l}{3EJ} + \frac{M_0 l}{6EJ},$$

то для него можно написать:

$$\zeta = \frac{1 \cdot l}{3EJ} - \frac{1 \cdot a_0 \cdot l}{(l - a_0)6EJ} = \frac{1 \cdot l}{6EJ} \left(2 - \frac{a_0}{l - a_0} \right). \dots \dots (86).$$

В частном случае, когда $a_0 = \frac{1}{3} l$, как бывает при полном зацементировании, имеем:

$$\zeta = \frac{l}{6EJ} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1 \cdot l}{4EJ}, \text{ соответственно форм. (84).}$$

Следовательно, если конец балки AB заделывается в конец A бруска AO фиг. 39, то податливость заделки будет: при зацементировании другого

конца бруска O : $\zeta = \frac{1 \cdot l}{4EJ}$, а при упругой заделке другого конца бруска:

$$\zeta = \frac{1 \cdot l}{6EJ} \left(2 - \frac{a_0}{l - a_0} \right).$$

Более сложные примеры заделки рассмотрены в курсе рамных систем.

2. Основные зависимости упруго заделанной балки. а) Зависимость углов и моментов. Под влиянием нагрузки заделанные концы балки, вообще говоря, поворачиваются. Когда этот поворот по своей величине оказывает влияние на результаты расчета, он должен быть учтен. В этом случае картина деформации балки схематически представляется жирной линией фигуры 40—а).

Обозначим поворот концевых касательных к упругой линии, концевые углы изгиба, буквами α и β ; при обеспечении связи между балкой и плоскостью заделки, очевидно таким же будет и поворот опорных плоскостей заделки A и B . Будем считать углы изгиба результатом действия, в отдельности, нагрузки $P_1, P_2, P_3 \dots$ (фиг. 40-б), левого опорного момента M_A (фиг. с) и правого момента M_B (фиг. d). Пусть углы от нагрузки будут:

$$\alpha_0 \text{ и } \beta_0,$$

углы от левого опорного момента $M_A = 1$ (фиг. с) пусть будут:

$$\alpha_a \text{ и } \beta_a,$$

углы от правого единичного момента $M_B = 1$ (фиг. d):

$$\alpha_b \text{ и } \beta_b;$$

тогда углы изгиба действительными моментами M_A и M_B должны выражаться:

$$M_A \cdot \alpha_a \text{ — и } M_A \cdot \beta_a$$

$$M_B \alpha_b \text{ и } M_B \beta_b$$

Результирующий угол изгиба для конца A будет:

$$\alpha' = \alpha_0 + M_A \alpha_a + M_B \alpha_b.$$

Он идет по часовой стрелке при тех положительных моментах, которые приняты на фиг. 40. Так как этот угол совпадает с углом поворота плоскости заделки:

$$\alpha'' = \zeta M_A,$$

то составляется равенство. Следует только иметь в виду, что для плоскости заделки мы пользуемся моментом M_A , противоположным тому, что был для балки, и угол α'' получаем в обратную сторону; поэтому при уравнивании углов α' и α'' у последнего надо принять обратный знак, или считать M_A — отрицательным. Таким образом получится:

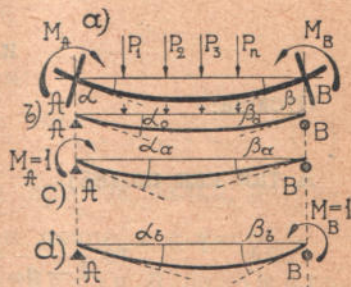
$$\alpha' = -\alpha'', \text{ или } \alpha' + \alpha'' = 0,$$

а после подстановки:

$$\alpha_0 + \alpha_a M_A + \alpha_b M_B + \zeta_a M_A = 0$$

Соответственно для опоры B :

$$\beta_0 + \beta_b M_B + \beta_a M_A + \zeta_b M_B = 0.$$



Фиг. 40.

По принципу взаимности ($\alpha_b = \beta_a^*$); называя его γ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \alpha_0 + M_A(\alpha_a + \zeta_a) + \gamma M_B &= 0 \\ \beta_0 + M_A \gamma + M_B(\beta_b + \zeta_b) &= 0 \dots \dots \dots (87). \end{aligned}$$

б) Нулевые точки упругозаделанной балки.

При отсутствии нагрузки последние равенства освобождаются от первых членов; в результате получаются следующие зависимости опорных моментов и углов:

$$\begin{aligned} M_A(\alpha_a + \zeta_a) + M_B \gamma &= 0 \\ \text{и } M_A \gamma + M_B(\beta_b + \zeta_b) &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда:
$$\frac{M_A}{M_B} = - \frac{\gamma}{\alpha_a + \zeta_a}$$

А так как по (85)
$$\frac{M_A}{M_B} = - \frac{a_0}{l - a_0},$$

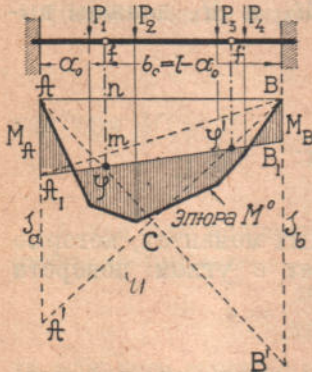
то
$$\frac{a_0}{l - a_0} = \frac{\gamma}{\alpha_a + \zeta_a}, \text{ откуда: } a_0 = l \frac{\gamma}{\alpha_a + \gamma + \zeta_a} \dots \dots \dots (88).$$

Точно также из другого равенства
$$b'_0 = \frac{\gamma}{\beta_b + \gamma + \zeta_b}.$$

Оказывается, что положение нулевой точки эпюры опорных моментов совершенно не зависит от величины самих моментов, а определяется исключительно только углами изгиба и податливостью опор. Отсюда следует, что у балок с заделанными, как и у балок с заземленными концами, имеются нулевые точки, положение которых постоянно и не зависит от величины опорных моментов, возникающих по тем или иным причинам, например, вследствие вращения опоры активным моментом или вследствие температурных влияний. Эти постоянные точки называются фокусами: одна, обуславливаемая правым опорным моментом, лежит ближе к левой опоре и называется левым фокусом, и другая, — определяемая левым опорным моментом, находится ближе к правому концу пролета и называется правым фокусом.

В случае постоянного сечения балки $\alpha_a = \beta_b = 2\gamma$, и формулы упрощаются

$$a_0 = l \frac{1}{3 + \frac{\zeta_a}{\gamma}} \text{ и } b'_0 = l \frac{1}{3 + \frac{\zeta_b}{\gamma}} \dots \dots \dots (89).$$



Фиг. 41.

3. Построение эпюры моментов. а) Общий случай. Эпюра M_0 для грузов строится, независимо от способа заделки концов, как для простой балки; для построения же эпюры опорных моментов AA_1, B, B' достаточно иметь две точки, например, две опорные ординаты M_A и M_B либо

какие-нибудь другие две точки φ и φ' прямой $A_1 B_1$ (фиг. 41).

Простое решение получается, если воспользоваться фокусами.

Проведем через f и f' вертикальные прямые; тогда непосредственно получим:

$$n\varphi = mn + m\varphi = M_A \frac{l - a_0}{l} + M_B \frac{a_0}{l} = \frac{a_0}{l} \cdot \overline{BB'}$$

$$\text{или: } \overline{BB'} = M_A \frac{l - a_0}{a_0} + M_B \dots \dots \dots (90).$$

*) См. системы с лишними неизвестными § 16.

С другой стороны по (88) угол податливости

$$\zeta_a = \gamma \frac{l}{a_0} - \alpha_a - \gamma = \gamma \cdot \frac{l - a_0}{a_0} - \alpha_a;$$

так что, если подставить в (87)

$$\alpha_0 + M_A \left(\alpha_a + \gamma \cdot \frac{l - a_0}{a_0} - \alpha_a \right) + \gamma M_B = 0,$$

то получится:

$$\alpha_0 + \gamma \left(M_A \frac{l - a_0}{a_0} + M_B \right) = 0$$

Так как, по (90), в скобках стоит $\overline{BB'}$, то имеем:

$$\alpha_0 + \gamma \cdot \overline{BB'} = 0, \text{ откуда } \overline{BB'} = -\frac{\alpha_0}{\gamma} \dots \dots \dots (91)$$

где, по (87), $\gamma = \alpha_b = \beta_a$ — концевой угол изгиба простой балки, нагруженной единичным моментом на противоположном конце, т. е. $\gamma = \frac{1 \cdot l}{6EJ}$.

Оказывается, что если на опорной вертикали B отложить противоположный концевой угол изгиба простой балки α_0 , разделенный на постоянное для балки число γ , и соединить A с B' , то на фональной вертикали f получится точка φ для направления замыкающей $A_1 B_1$.

Таким же образом находится и другая точка φ' . Это справедливо для всякой нагрузки балки.

В частных случаях построение упрощается.

б) Равномерно распределенная нагрузка дает одинаковые углы

$$\alpha_0 = \beta_0 = ql^3 : 24EJ.$$

Следовательно опорные отрезки, $AA' = BB'$, должны быть:

$$\frac{\alpha_0}{\gamma} = -\frac{ql^3}{24EJ} \cdot \frac{1 \cdot l}{6EJ} = -\frac{ql^2}{4} \dots \dots \dots (92).$$

А так как при равномерно распределенной нагрузке срединная ордината эпюры моментов составляет $\frac{ql^2}{8}$, т. е. половину, то очевидно, вер-

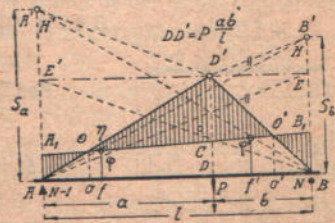
шина параболы лежит по середине каждой из наклонных AB' и BA' (фиг. 41), а потому достаточно соединить с концами пролета A и B вершину C параболической эпюры ACB . Проводя через фокусы f и f' вертикали до пересечения с хордами параболы AC и CB , определим точки φ и φ' — для построения замыкающей $A_1 B_1$.

с) Случай сосредоточенного груза. Как известно, концевой угол изгиба от одного сосредоточенного груза P выражается формулою*):

$$\alpha_0 = \frac{Pbl}{6EJ} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right); \text{ или } \alpha_0 = \frac{Pab}{6lEJ} (l + b).$$

Поэтому опорный отрезок BB' на фиг. 42 должен быть:

$$\overline{BB'} = -\frac{\alpha_0}{\gamma} = -\frac{Pab}{6lEJ} (l + b) : \frac{1 \cdot l}{6EJ} = -P \frac{ab(l + b)}{l^2} \dots \dots \dots (93).$$



Фиг. 42.

*) См. таблицу III Введения.

Его можно получить следующим построением: через вершину D' треугольной эпюры моментов от груза P проводят $D'E \parallel AB$, соединяют E с A и через D'' проводят $D'B' \parallel AE$. Отрезок BB' и будет искомой величиной.

Действительно из подобия треугольников $D'B'E'$ и AEB имеем:

$$\frac{B'E}{EB} = \frac{b}{l}, \text{ а, составляя производную пропорцию получим:}$$

$$\frac{B'E + EB}{EB} = \frac{b + l}{l} \text{ или:}$$

$$BB' = EB \frac{b + l}{l} = D'D \frac{b + l}{l} = \frac{Pab}{l} \cdot \frac{b + l}{l},$$

что совпадает с требованием (93).

Таким же образом получается и левый опорный отрезок AA' .

В частных случаях расположения сосредоточенного груза получаются следующие формулы опорных отрезков для построения перекрестных наклонных;

1) При одном грузе P по середине пролета

$$s_a = s_b = -\frac{3}{8}Pl,$$

2) При двух равных грузах, находящихся на одинаковых расстояниях b от соответствующих опор, например, применительно к фиг. 197 (см § 18).

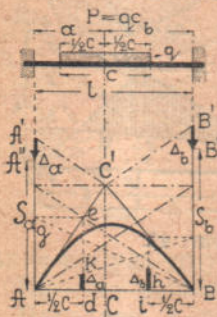
$$s_a = s_b = -3Pb \left(1 - \frac{b}{l}\right).$$

3) При трех равных грузах на равных расстояниях $\frac{1}{4}l$:

$$s_a = s_b = -\frac{15}{16}Pl$$

При каком угодно числе и расположении сосредоточенных грузов задача решается путем сложения: для каждого отдельного груза вычисляют опорный отрезок по форм. (93) и все полученные отрезки складывают. Для построения перекрестных наклонных пользуются найденными суммами s_a и s_b .

d) Равномерно распределенная на грузка на части пролета (фиг. 43). В этом случае концевые углы изгиба



$$\alpha_0 = \frac{qcb}{6lEJ} \left[a(l+b) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] \text{ и}$$

$$\beta_0 = \frac{qca}{6lEJ} \left[b(l+a) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right],$$

разделенные на $\gamma = 1. l : 6EJ$, дают для опорных отрезков $AA'' = s_a$ и $BB'' = s_b$ значения:

$$s_a = \frac{qca}{l^2} \left[b(l+a) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] = q \frac{cab}{l^2} (l+a) - \frac{qca}{l^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$$\text{и } s_b = \frac{qca}{l^2} \left[a(l+b) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \right] = \frac{qcab}{l^2} (l+b) - \frac{qcb}{l^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 \dots \dots (94).$$

Сравнивая их с теми, что были получены для одного сосредоточенного груза, заметим точное совпадение первых членов при условии, что $qc=P$. Следовательно, опорные отрезки s_a и s_b здесь меньше, чем для равного

сосредоточенного груза, и их можно получить, вычитая из отрезков AA' и BB' для сосредоточенного груза величины:

$$qc \frac{a}{l^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 \text{ и } qc \frac{b}{l^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2 \dots \dots \dots (95).$$

Называя эти величины поправками и обозначая Δ_a и Δ_b , имеем:

$$s_a = AA' - \Delta_a \text{ и } s_b = BB' - \Delta_b.$$

Поправки получаются следующим построением: для получения Δ_b откладываем от A длину $\frac{1}{2}c$ и от точки d проводим перпендикуляр до пересечения e с эпюрой $AC'B$ от сосредоточенного груза P ; от e проводим параллельную eg и соединяем g с B .

Поправка Δ_b оказывается отрезком ih перпендикуляра, взятого на расстоянии $\frac{1}{2}c$ от опоры B . Действительно:

Из подобных треугольников ihB и AgB имеем:

$$ih = ag \cdot \frac{\frac{1}{2}c}{l}, \text{ из подобных же треугольников } Ade \text{ и } ACC':$$

$$de = ag = CC' \frac{\frac{1}{2}c}{a};$$

$$\text{следовательно: } ih = CC' \frac{\frac{1}{2}c}{a} \cdot \frac{\frac{1}{2}c}{l}.$$

$$\text{А так как } CC' = \frac{qc \cdot ab}{l}, \text{ то } ih = \frac{qc \cdot ab}{l} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{al} = \frac{qc \cdot b}{l^2} \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

т.е. соответствует (95).

Таким же образом получается и поправка Δ_a . Обе поправки Δ_a и Δ_b на фиг. 43 отмечены жирными отрезками dk и ih и перенесены на опорные ординаты AA' и BB' ; результаты AA'' и BB'' отмечены размерными стрелками s_a и s_b . Остается соединить A с B'' и B с A'' , провести через фокусы f и f' вертикали и определить точки пересечения их φ и φ' с наклонными AB'' и BA'' ; наконец, через φ и φ' — провести замыкающую прямую A_1B_1 опорных моментов по аналогии с фигурой 41 или 42.

е) Более сложные случаи загрузки. Задача разрешается на основании общей формулы (91): для какой угодно нагрузки углы изгиба α_0 и β_0 определяются графически, построением веревочного многоугольника, или графоаналитически путем вычисления реакции соответствующей опоры от моментной нагрузки M^0 . Задача может быть решена также и путем интегрирования общего дифференциального уравнения:

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q_x, \text{ где } q_x \text{ — интенсивность нагрузки для абсциссы } x.$$

Обыкновенно пользуются первыми двумя способами.

Угол γ , входящий знаменателем в формулу (91), не зависит от характера нагрузки: $\gamma = \frac{1 \cdot l}{6EJ}$, и при постоянном сечении EJ вычисляется без всяких затруднений.

г) Порядок расчета балок. Для статически неопределимой балки мы составляем эпюру из двух частей: 1) из эпюры M^0 от нагрузки, взятой

в отдельности от лишних неизвестных и 2) из эпюры от лишних неизвестных. Первая эпюра определяется только нагрузкой и не зависит ни от способа закрепления концов балки, ни от формы ее поперечного сечения; ее строят, как для простой балки. Вторая эпюра для однопролетной балки, всегда трапециoidalная, определяется двумя опорными моментами. Последние зависят, как от степени заделки, так и от жесткости самой балки и определяются следующим образом:

Сначала определяют концевые углы изгиба простой балки от единичного опорного момента: α_a и противоположный $\beta_a = \gamma$, а также β_b . Затем определяют степень податливости опоры, нагружая ее единичным моментом и вычисляя тот угол ζ , на который она при этом поворачивается.

Далее устанавливают положение фокусов, как постоянных точек пролета, не зависящих ни от нагрузки, ни от величины опорных моментов: левый фокус f определяют (в предположении, что к правому концу пролета приложен единичный момент) абсциссою

$$a_0 = l \frac{\gamma}{\alpha_a + \gamma + \zeta_a},$$

а правый фокус f' (в предположении, что к левому концу балки приложен единичный момент) определяют абсциссою

$$b'_0 = l \frac{\gamma}{\beta_b + \gamma + \zeta_b}.$$

Через фокусы проводят вертикальные прямые $f\varphi$ и $f'\varphi'$.

С другой стороны вычислением или построением определяют опорные отрезки $AA' = s_a$ и $BB' = s_b$ — (либо AA'' и BB'' фиг. 43) — и проводят по ним наклонные до противоположных опор B и A .

Наконец, через точки пересечения φ и φ' наклонных линий с фокальными вертикалями проводят искомую замыкающую эпюры опорных моментов. Пересечением замыкающей с опорными вертикалями определяются величины опорных моментов M_A и M_B .

4. Балки переменного сечения. При исследовании положения фокусов не делалось ограничений относительно жесткости балки и формы ее поперечного сечения; поэтому формула (88) имеет общее значение и распространяется на случай балки переменного сечения, — надо только при вычислении концевых углов изгиба принять во внимание непостоянство жесткости EJ вдоль балки. В остальном расчет не отличается от расчета балок постоянного сечения.

а) Определение углов. Концевые углы изгиба:

$$\alpha_a, \beta_a = \alpha_b \text{ и } \beta_b$$

определяются по одному из известных приемов, уже описанных в общем курсе статически неопределимых систем*). Рассмотрим сначала вычислительный способ Мора. Угол α_a — это угол, вызываемый в левом конце балки A единичным моментом $M_a = 1$, приложенным в том же конце. Чтобы по Мору определить этот угол, надо рассмотреть фиктивное состояние балки с единичным моментом вместо искомого угла α_a и приравнять нулю работу сил фиктивного состояния на соответствующих перемещениях действительного состояния. Для сечения на расстоянии x' от правой опоры изгибающий момент фиктивного состояния будет;

$$\frac{1}{l} \cdot x'.$$

В действительном состоянии ему соответствует угол поворота

$$M \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{l} x' \frac{dx}{EJ}.$$

*) См. наши Системы с лишними неизвестными § 2, § 3 и § 19, 10 и 11.

Поэтому работа $\frac{1}{l^2} \int_0^l x'^2 \frac{dx}{EJ}$, и следовательно:

$$\alpha_a = \frac{1}{l^2} \int_0^l x'^2 \frac{dx}{EJ} \dots \dots \dots (96-a).$$

Таким же образом: $\beta_b = \frac{1}{l^2} \int_0^l x^2 \frac{dx}{EJ}, \dots \dots \dots (96-b),$

где x — расстояние сечения до левой опоры балки.

Для угла α_b фиктивное состояние остается тоже, что и в первом случае, в действительном же состоянии момент $M_B = 1$ приложен к правому концу балки, так что, угол поворота:

$$M \frac{dx}{EJ} = \left(1 - \frac{1}{l} x'\right) \frac{dx}{EJ} = \frac{x}{l} \frac{dx}{EJ},$$

а потому

$$\alpha_b = \int_0^l \frac{1}{l} x' \cdot \frac{x}{l} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{l^2} \int_0^l x x' \frac{dx}{EJ} \dots \dots \dots (96-c).$$

Заметим, что $\frac{dx}{EJ}$ есть изменение углов $d\theta$ между элементами изгибаемой балки при $M = 1$, ибо $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$, а $\frac{dx}{\rho} = d\theta = M \frac{dx}{EJ}$ и перепишем выражения для углов заменяя $\frac{dx}{EJ} = d\theta$:

$$\alpha_a = \frac{1}{l^2} \int_0^l x'^2 d\theta, \quad \beta_b = \frac{1}{l^2} \int_0^l x^2 d\theta \quad \text{и} \quad \alpha_b = \frac{1}{l^2} \int x x' d\theta.$$

б) Определение фокусов. Теперь по формуле для абсциссы фокуса (88):

$$a_0 = l \frac{\bar{i}}{\alpha_a + \gamma + \zeta_a} \text{ получим:}$$

$$a_0 = l \int_0^l x x' d\theta : \left(\int_0^l x'^2 d\theta + \int_0^l x x' d\theta + \zeta_a l^2 \right)$$

Делитель упрощается, если заменить $x = l - x'$, сделать приведение:

$$\int_0^l x'^2 d\theta + \int_0^l (l - x') x' d\theta = l \int_0^l x' d\theta$$

и заметить, что статический момент угловых изменений $\int_0^l x' d\theta$ относительно опоры B , при симметричной балке, заменяется выражением $\frac{1}{2} l \int d\theta$. В результате:

$$a_0 = \frac{l \int x x' d\theta}{l \cdot \frac{1}{2} \int d\theta + \zeta_a l^2} = \frac{2 \int x x' d\theta}{l(\zeta_a + \int d\theta)} \dots \dots \dots (96-d).$$

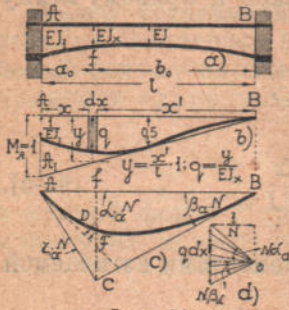
Соответственно для другого фокуса:

$$b'_0 = \frac{2 \int x x' d\theta}{l(2\zeta_b + \int d\theta)} \dots \dots \dots (96-e).$$

Вычисление по этим формулам не представляет затруднений. При графическом решении задачи поступают по общим правилам построения дефор-

мации при переменном сечении балки*): построивши треугольную эпюру моментов для $M_A = 1$, делят ординаты на жесткость EJ в соответствующих сечениях, принимают $M: EJ$ за грузы и строят многоугольник сил и многоугольник Вариньона. Последний представляет обертывающую для упругой линии, а первая его сторона, от опоры A , — дает угол α_a . Конечно, если нормальный луч многоугольника сил, вместо единицы, был принят $\frac{1}{N}$, то угол получится $N \cdot \alpha_a$.

При таком построении одновременно получается и β_a : его дает последняя сторона многоугольника Вариньона, у правой опоры B .



Фиг. 44.

Аналогично находим угол β_b , нагрузивши балку единичным моментом справа.

На фиг. 44 приведен пример построения для железобетонной балки, при этом жесткость EJ по середине пролета принята за единицу, благодаря чему результат деления ординат эпюры моментов b не отразился по середине пролета, а крайнюю ординату 1 пришлось разделить на EJ_1 . Преобразованная грузовая площадь показана жирной линией на фиг. b.

На фиг. d) элементы этой площади qdx отложены в виде сил и назначен полюс O на расстоянии $\frac{1}{N}$; на фиг. c) построена соответствующая

упругая линия ADB и углы α_a и β_a . Эти углы можно было бы подставить в формулу для абсциссы фокуса, но оказывается, что ее можно получить следующим простым построением.

Прибавляют к углу α_a , ζ_a , выражающий податливость опоры A и из пересечения C опускают перпендикуляр на ось балки AB . Основание перпендикуляра будет фокусом f .

Вот основание для такого правила.

Вследствие малости углов мы отождествляем их с тангенсами, а потому высота треугольника фиг. 44-c):

$$fC = Af(\alpha_a + \zeta_a). N = fB \cdot \beta_a N$$

Обозначая Af через a_0 , fB через $l - a_0$ и $B_a = a_b$ через γ , получим

$$a_0(\alpha_a + \zeta_a) = (l - a_0)\gamma, \text{ откуда}$$

$$a_0 = l \frac{\gamma}{\alpha_a + \gamma + \zeta_a}$$

т. е. выражение (88) для абсциссы фокуса f .

с) Построение эпюры моментов требует определения концевых углов изгиба от нагрузки, так как вспомогательные опорные отрезки для эпюры моментов:

$$s_a = -\frac{\beta_0}{\gamma} \text{ и } s_b = -\frac{\alpha_0}{\gamma}, \text{ по форм. (91),}$$

выражаются через углы β_0 и α_0 ,

Как и другие углы, их можно определить графически, построением веревочной кривой, или получить вычислением по Мору. В последнем случае мы получим готовые формулы, если в общее выражение для интегралов¹⁾ $j = \int MM_1 d\theta$ где $d\theta = \frac{dx}{EJ}$ подставим:

*) См. § 2, 5d наших Систем с лишними неизвестными.

1) См. Системы с лишними неизвестными § 19, 9 — 11.

M^0 вместо M и $x' \cdot \frac{1}{l}$ вместо M_1 , так что, будет:

$$\alpha_0 = \frac{1}{l} \int M_0 x' d\theta \text{ и } \beta_0 = \frac{1}{l} \int M_0 x d\theta. \dots \dots \dots (97).$$

Откладывая над опорами вспомогательные отрезки s_a и s_b и проводя наклонные, определим их пересечение φ и φ' с фокальными вертикалями, а через φ и φ' — построим замыкающую эпюры моментов.

Рассмотрим несколько частных случаев нагрузки.

д) Случай равномерно распределенной нагрузки. Если нагрузка интенсивностью q занимает весь пролет, то для форм. (91):

$$\alpha_0 = \frac{1}{l} \int_0^l M_0 x' d\theta = \frac{1}{l} \cdot \frac{l}{2} \int_0^l M_0 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^l M_0 d\theta;$$

а так как изгибающий момент M_0 для любого сечения x : $M_0 = \frac{1}{2} q x x'$, то

$$\alpha_0 = \frac{1}{4} q \int x x' d\theta = \beta_0.$$

По (96-с) угол $\gamma = \frac{1}{l^2} \int x x' d\theta$. Следовательно:

$$s_a = s_b = -\frac{\alpha_0}{\gamma} = -\frac{1}{4} q \int x x' d\theta : \frac{1}{l^2} \int x x' d\theta = q \frac{l^2}{4} \dots \dots \dots (98).$$

Получился такой же результат, как для балки постоянного сечения (сравн. форм. 92); поэтому и здесь соединяем вершину параболической эпюры моментов с концами пролета и отмечаем точки φ и φ' пересечения с ординатами фокусов f и f' ; замыкающую эпюры моментов проводим через φ и φ' .

е) Случай сосредоточенного груза (фиг. 45). Чтобы определить концевые углы изгиба при сосредоточенном грузе, воспользуемся принципом взаимности: поместим на месте искомого угла единичный момент, например $M_A = 1$ (фиг. с); тогда, по § 16,7d систем с лишним неизвестными прогиб y_a численно дает угол изгиба α_0 фигуры б) при $P = 1$. Действительно:

$$P y_a = M_A \alpha_0, \text{ или при } M_A = 1 \text{ и } P = 1:$$

$$\alpha_0 = y_a.$$

Таким же образом: $\beta_0 = y_b$.

Следовательно, концевые углы изгиба грузом P выражаются через прогибы под грузом от концевых моментов.

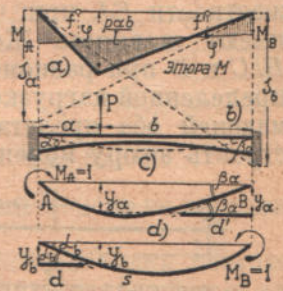
Угол γ формулы для вспомогательных опорных отрезков (91) также выражается через те же прогибы: мы получим его проведя на фиг. с) касательную к упругой линии:

$$\beta_a = \gamma = \frac{y_a}{d'}, \text{ также } \gamma = d_b = \frac{y_b}{d}.$$

$$\text{Поэтому } s_a = -\frac{\beta_0}{\gamma} = -\frac{P y_b}{y_b} d = -P \cdot d$$

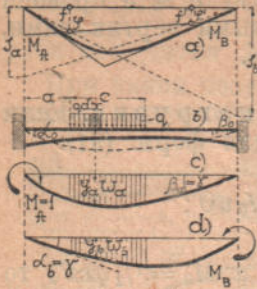
$$s_b = -\frac{\alpha_0}{\gamma} = -\frac{P y_a}{y_a} d' = -P d'. \dots \dots \dots (99).$$

Отсюда вытекает простое правило для определения вспомогательных опорных отрезков s_a и s_b : *нагружают балку концевым единичным момен-*



Фиг. 45.

том и строят упругую линию; на прогибе под грузом, как на катете, и на касательной противоположного конца балки, как на гипотенузе строят прямоугольный треугольник и принимают другой его катет за опорный отрезок от единичного груза. Этот отрезок, умноженный на P , откладывают над тем концом балки, где производилось построение треугольника (над концом, противоположным тому, где приложен единичный момент). Так поступают с обоими концами балки.



Фиг. 46.

ф) Местная равномерная нагрузка (фиг. 46). Как в предыдущем случае, рассмотрим два фиктивных состояния системы c) и d). Составляя выражение принципа взаимности, возьмем в действительном состоянии элементарный груз qdx умножим его на прогиб одного из фиктивных состояний, например, y_a . Суммируя элементарные работы получим:

$$1. \alpha_0 = \int_a^{a+c} q dx \cdot y_a = q \int_a^{a+c} y_a dx = q \omega_a$$

и таким же образом

$$\beta_0 = q \omega_b,$$

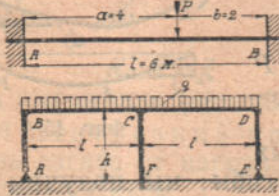
где ω_a и ω_b — площадь эпюры прогибов в пределах расположения нагрузки.

Разделивши углы α_0 и β_0 на γ , получаем необходимые вспомогательные отрезки:

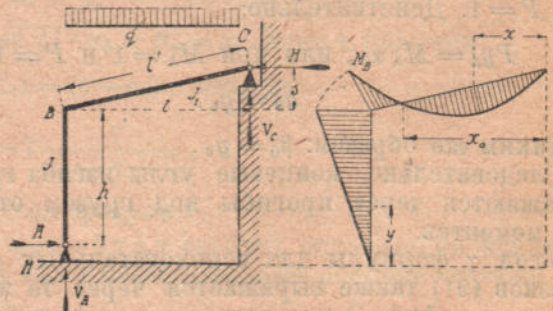
$$s_a = -q \frac{\omega_b}{\gamma} \text{ и } s_b = -q \frac{\omega_a}{\gamma} \dots \dots \dots (100)$$

5. Задачи. 1) Железная балка I № 30 заделана двумя концами в стены из кирпичной кладки на воздушном растворе (фиг. 47). Построить эпюру моментов, если податливость опор A и B известна: прикладывая к консоли из той же балки в той же стене момент 50 кг. м, наблюдали поворот заделанного конца 10^{-4}).

2) Двухпролетная балка фиг. 48 имеет упругие опоры одинаковой жесткости EJ , при чем средняя опора закреплена в фундаменте, а крайние имеют шарниры. Жесткость балки — EJ . Определить опорные моменты B, C и D при равномерно распределенной нагрузке q , занимающей оба пролета l , и построить эпюру моментов.



Фиг. 47 и 48.



Фиг. 49.

Фиг. 50.

3) Построить линию влияния опорного момента M_A для фиг. 47.

4) Балка BC навеса фиг. 49 жестко скреплена со стойкой AB . Построить эпюру моментов для балки и для стойки при равномерно распределенной нагрузке расположенной только на балке и составляющей q на пог. единицу в плане.

Отв. Эпюра моментов построена на фиг. 50. Выражений для реакций:

$$V_A = \frac{1}{2} ql - \frac{M_B}{l} + \frac{H_s}{l}, \quad V_C = \frac{1}{2} ql + \frac{M_B}{l} - \frac{H_s}{l}$$

Если обозначить k отношение $\frac{h}{l} \cdot \frac{l}{l'}$, то:

$$H = \frac{ql^2}{8h(1+k)} \quad \text{и} \quad M_B = -\frac{ql^2}{8(1+k)}$$

Изгибающий момент в каком-нибудь сечении балки, считая x справа, от опоры C :

$$M_x = \frac{1}{2} ql \cdot x - \frac{1}{2} qx^2 + \frac{M_B}{l} x$$

Изгибающий момент для какого нибудь сечения стойки, считая y снизу, от A :

$$M_y = -H_y.$$

5) Определить расчетные величины для того же навеса, фиг. 49, но при сосредоточенном грузе P , находящемся от концов балки B и C в плане на расстоянии b и c .

Ответ: $V_A = P \frac{c}{l} - \frac{M_B}{l} + \frac{H_s}{l}$, $V_C = P \frac{b}{l} + \frac{M_B}{l} - \frac{H_s}{l}$,

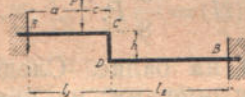
$$H = \frac{Pbc(c+l)}{2hl^2(1+k)}, \quad M_y = -H_y,$$

$$M_B = -\frac{Pbc(c+l)}{2l^2(1+k)} = Hh,$$

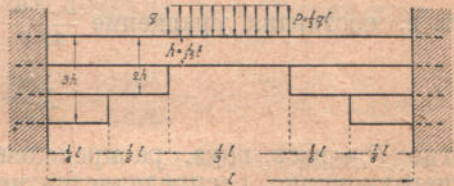
$$M_P = +V_C c + H \frac{c}{l} s = P \frac{cb}{l} + \frac{M_B}{l} c.$$

6) Ступенчатая балка $ACDB$ несет один сосредоточенный груз P (фиг. 51). Построить эпюру моментов, эпюру поперечных сил и определить прогиб сечения D , предполагая, что в плоскостях A и B — полное защемление.

7) Высота h балки постоянной ширины b увеличивается ступенями, как показано на фиг. 52. Для данной симметричной равномерно распределенной местной нагрузки P определить изгибающий момент по середине пролета и опорные моменты.



Фиг. 51.

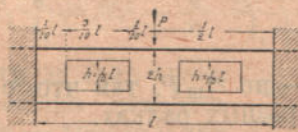


Фиг. 52.

8) Определить прогиб по середине и сравнить с прогибом балки постоянного сечения, подобранной по тому же допускаемому направлению для той же нагрузки.

Сравнить объем материала балок: постоянного сечения и приведенного на фиг. 52 переменного.

8) Построить эпюру моментов и эпюру поперечных сил для балки фиг. 53. Ширина сечения и высота по всему пролету постоянны, но в стенке имеются прямоугольные отверстия того же порядка, что и размеры балки.



Фиг. 53.

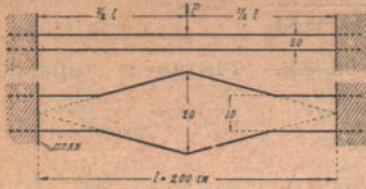


Фиг. 54.

9) Высота балки изменяется по линейному закону, как показано на фиг. 54, в средней части пролета она постоянна. Построить эпюру моментов при равномерно распределенной нагрузке q , занимающей весь пролет.

9) Высота балки изменяется по линейному закону, как показано на фиг. 54, в средней части пролета она постоянна. Построить эпюру моментов при равномерно распределенной нагрузке q , занимающей весь пролет.

10) Балка постоянной высоты имеет в плане форму ромба, переходящего по концам в прямоугольник, указанных на фиг. 55 размеров. Груз P , сосредоточенный по середине пролета, равномерно распределяется вдоль всей ширины сечения. Определить опорные моменты в плоскостях защемления концов балки и прогиб по середине пролета.



Фиг. 55.

11. Сохраняя те же размеры плана, уменьшить высоту балки в 10 раз, т. е. принять ее в 20 мм. и сравнить опорные моменты и прогиб с предыдущими.

12. Для той же балки определить опорные моменты и распор, возникающие при повышении температуры воздуха на t° и, параллельно, — при разнице температур снизу и сверху балки, предполагая, что в теле балки температура падает по линейному закону вдоль толщины.

Глава II.

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ.

§ 4. Двухпролетная балка. 1. Балка на трех опорах. а) Отбрасывая среднюю опору в случае равномерно распределенной нагрузки при равных пролетах, получим для основной балки прогиб по середине:

$$y_0 = \frac{5}{384} q \frac{(2l)^4}{EJ}.$$

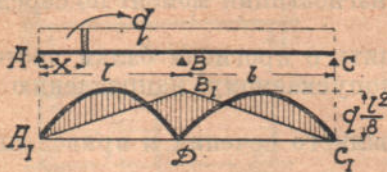
Приравнявая его прогибу от неизвестной реакции средней опоры X :

$$y_x = \frac{X(2l)^3}{48EJ},$$

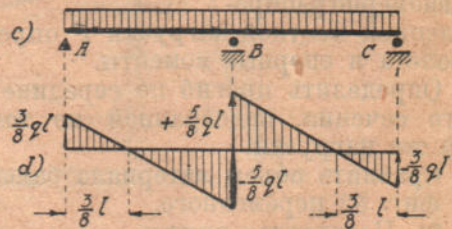
т. е. составляя уравнение $\frac{5 \cdot 16}{384} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{8}{48} \frac{l^3}{EJ} X$, определим

$$X = \frac{5}{8} q(2l) = \frac{5}{8} P, \dots \dots \dots (101),$$

где P — весь груз, распределенный на балке. Следовательно, нагрузка неравномерно распределяется между опорами: на средней опоре прихо-



Фиг. 56-а.



Фиг. 56-б.

дится $\frac{5}{8}P$, а на крайние — по $\frac{3}{16}P$, так что, средняя опора более нагружена, чем при простых разрезных балках.

Опорный момент, непосредственно по теореме о 3 моментах:

$$2lM_B = -3 \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8}$$

оказывается:

$$M_B = -\frac{1}{8} ql^2, \dots \dots \dots (102),$$

т. е. он такой же, как у балки одним концом заземленной и другим опирающейся на каток.

Изгибающий момент в каком-нибудь сечении на расстоянии x от левой опоры A (фиг. 56):

$$M_x = Ax - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{1}{8} ql^2 \cdot \frac{x}{l} \left(3 - 4 \frac{x}{l} \right) \dots \dots (103).$$

Приравнявая нулю, определим положение точки перегиба:

$$x = \frac{3}{4} l \dots \dots \dots (104).$$

Приравнявая нулю производную от момента, получим опасное сечение в пролете. Для удобства отношение $\frac{x}{l}$ обозначим m и будем дифференцировать по m :

$$\frac{dM_x}{dm} = 0 = \frac{d}{dm} [m(3 - 4m)], \text{ или } 3 - 8m = 0,$$

откуда $m = \frac{3}{8} = 0,375$. Следовательно

$$M_{\text{макс.}} = + \frac{1}{8} ql^2 \cdot \frac{3}{8} \left(3 - 4 \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{9}{128} ql^2 \approx \frac{ql^2}{14,2} \dots \dots (105).$$

Этот момент меньше опорного $\frac{1}{8} ql^2$.

При загрузении одного пролета опорный момент $M_1 = -\frac{ql^2}{16}$; момент в произвольном сечении грузенного пролета

$$M = \frac{1}{2} qx(l - x) - \frac{1}{16} ql^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{16} ql^2 m(7 - 8m).$$

Производная $\frac{d}{dm} [m(7 - 8m)] = 7 - 16m = 0$, откуда $m = \frac{7}{16}$, следовательно:

$$M_{\text{макс.}} = \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{7}{16} \left(7 - \frac{7}{2} \right) = \frac{49ql^2}{512} = \frac{ql^2}{10,45} \dots \dots (106).$$

б) При неравных пролетах по теореме о 3 моментах определим опорный момент промежуточной опоры в форме:

$$M_1 = - \frac{3 \text{ сумма площадей эпюр } M_0}{2(l_1 + l_2)} \dots \dots (107).$$

Так как сумма парабол:

$$\frac{1}{12} ql_1^3 + \frac{1}{12} ql_2^3, \text{ то } M_1 = - \frac{q}{8} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2} \dots \dots (108).$$

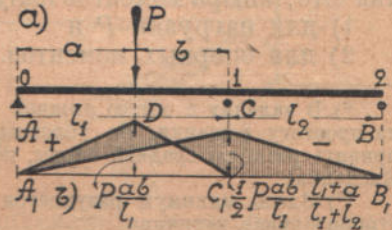
Момент в сечении x :

$$M_x = M_x^0 + M_1 \frac{x}{l_1} = M_x^0 - \frac{q}{8} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2} \cdot \frac{x}{l_1} \dots \dots (109).$$

2. При сосредоточенном грузе P на одном из пролетов, например l_1 , эпюра моментов простой балки этого пролета — треугольник высотой $P \frac{ab}{l_1}$ (фиг. 57).

Площадь эпюры $\omega_1 = P \frac{ab}{l_1} \cdot \frac{l_1}{2} = \frac{1}{2} Pab.$

Площадь эпюры правого пролета $\omega_2 = 0.$



Фиг. 57.

Реакция средней опоры от площадей эпюр:

$$R = P \frac{ab}{2} \cdot \frac{a+l_1}{3l_1}.$$

Поэтому для уравнения трех моментов:

$$\begin{aligned} 3R &= P \frac{1}{2} \frac{a}{l_1} (l_1 - a)(a + l_1) = P \frac{1}{2} (l_1^2 - a^2) \frac{a}{l_1} = \\ &= P \frac{1}{2} l_1^2 \frac{a}{l_1} \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2}\right) = P \frac{1}{2} l_1^2 \xi_1 (1 - \xi_1^2) \dots \dots \dots (110), \end{aligned}$$

где буквой ξ_1 обозначено отношение $\frac{a}{l_1}$ — относительная абсцисса груза P . Следовательно, опорный момент от груза, стоящего в первом пролете l_1 :

$$M_{1,1} = - \frac{Pl_1^2}{2(l_1+l_2)} \xi_1 (1 - \xi_1^2) \dots \dots \dots (111).$$

Таким же образом для груза, находящегося во втором пролете l_2 , получим:

$$M_{1,2} = - \frac{Pl_2^2}{2(l_1+l_2)} \xi'_2 (1 - \xi'^2_2) \dots \dots \dots (112^*),$$

где буквой ξ'_2 обозначено отношение $\frac{h}{l_2}$, т. е. относительная абсцисса груза, считая от правой опоры второго пролета.

Наибольшее численное значение опорного момента получится при условии:

$$\frac{d}{d\xi} [\xi(1 - \xi^2)], \text{ или: } 1 - 3\xi^2 = 0, \text{ или } \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. будет:}$$

$$M_{\text{мин.}} = - \frac{Pl_1^2}{2(l_1+l_2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Pl_1^2}{l_1+l_2} \dots \dots \dots (113^{**}).$$

В частном случае, когда $l_1 = l_2$, получится:

$$M_{\text{мин.}} = - \frac{Pl}{6\sqrt{3}} \approx - \frac{Pl}{10,4} = - 0,0962Pl, \dots \dots \dots (114),$$

т. е. численно вдвое меньше того, что был в балке, защемленной одним концом ***) , а общее выражение для момента будет:

$$M_1 = - P \frac{l}{4} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (115).$$

Изгибающий момент в любом сечении x пролета l_1 :

$$M_x = M_x^0 + M_1 \frac{x}{l} \dots \dots \dots (116),$$

так что, эпюра моментов получается путем алгебраического сложения эпюр:

- 1) для нагрузки P и
- 2) для опорных моментов.

*) В задачах с одной лишней неизвестной, выбор последней обыкновенно мало влияет на простоту решения. Не усложняя выкладок за лишнюю неизвестную можно было бы принять реакцию средней опоры, пользуясь готовыми формулами для прогиба (см. таблицы Введения).

***) Здесь минимум разумеется в математическом смысле, как численно наибольшая отрицательная величина.

****) Сравни. форм. 13-б).

Сложение происходит само собою если участки разных знаков поместить в одну сторону от оси (наложение эпюр). На фиг. 57-b) положительная эпюра нагрузки

$$M_0 = A_1DC_1$$

и отрицательная эпюра опорных моментов

$$M_m = A_1CB_1$$

построены вверх, от общей оси A_1B_1 .

Опорные реакции оказываются:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= P \left[1 - \frac{a}{4l^3} (5l^2 - a^2) \right] = P \left[1 - \frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(5 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right] \dots \\ R_1 &= P \frac{a}{2l^3} (3l^2 - a^2) = \frac{1}{2} P \frac{a}{l} \left(3 - \frac{a^2}{l^2} \right), \dots \dots \dots \\ R_2 &= -P \frac{a}{4l^3} (l^2 - a^2) = -\frac{1}{4} P \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (117).$$

В том случае, когда груз P находится посередине одного из двух равных пролетов, опорный момент

$$M_1 = -Pl \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{3}{32} Pl, \dots \dots \dots (119),$$

а реакции опор:

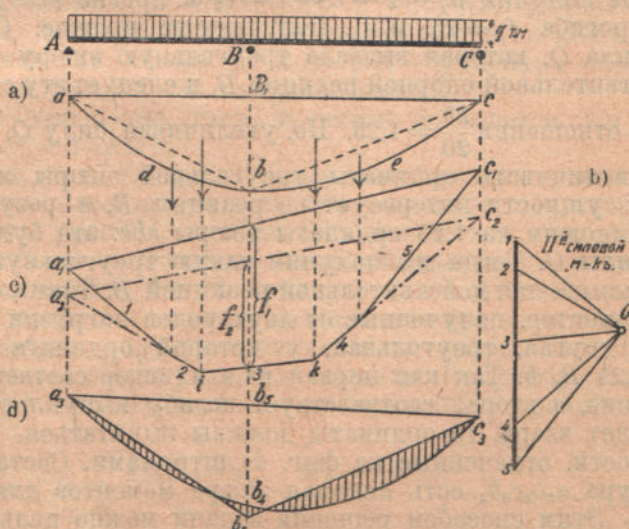
$$R_0 = \frac{13}{32} P, R_1 = \frac{22}{32} P \text{ и } R_2 = -\frac{3}{32} P \dots \dots \dots (118).$$

При нескольких грузах, одновременно находящихся на балке, задача решается путем сложения. Так, если при равных пролетах имеются грузы посередине обоих пролетов, то опорный момент $M_1 = -\frac{3}{16} Pl$,

$$\text{реакции: } R_0 = \frac{5}{16} P, R_1 = \frac{22}{16} P \text{ и } R_2 = \frac{5}{16} P \dots \dots \dots (120).$$

3. Произвольная нагрузка. В этом случае можно воспользоваться графическим приемом. Покажем его на примере фиг. 58,

предполагая, что балка AC нагружена произвольными грузами. Отбрасывая среднюю опору B , построим эпюру моментов $adec$ на фиг. а), как веревочную кривую. Примем ее за грузовую площадь и построим многоугольник сил фиг. б) и — вторую веревочную кривую a_1ikc_1 фиг. с). Она даст возможность измерить прогибы разных точек балки, если провести замыкающую a_1c_1 через нулевые точки балки A и C . Между прочим, мы найдем прогиб f_1 под отброшенной промежуточной опорой балки B .



Фиг. 58.

Так как в действительности точка B не опускается, то подберем такую силу, здесь сосредоточенную, чтобы она уничтожила прогиб f_1 .

Для всякой силы, приложенной в B , мы можем найти прогиб известным построением. Приложим в B какую-нибудь силу Q и найдем от нее прогиб f_2 . Если этот прогиб меньше f_1 , то увеличим Q . Будем увеличивать силу Q до тех пор, пока прогиб f_2 не достигнет значения f_1 . Тогда последнее значение силы Q и будет искомая реакция опоры B .

Для одной и той же балки прогибы пропорциональны нагрузкам. Очевидно, произвольно принятую силу Q нам придется увеличить во столько раз, во сколько f_2 меньше f_1 . Следовательно, реакция опоры B

$$\text{будет } Q \cdot \frac{f_1}{f_2} \dots \dots \dots (121).$$

Итак, для определения реакции средней опоры B надо построить прогиб точки B балки на двух опорах, нагруженной данной действительной нагрузкой; затем, построить прогиб той же балки AC при нагрузке силой Q , приложенной в B ; наконец умножить Q на отношение первого и второго прогибов. Очевидно, что это рассуждение может быть повторено при всякой нагрузке, сосредоточенной или распределенной по любому закону. И всегда мы таким приемом найдем реакцию средней опоры. А если будет найдена реакция средней опоры, то может быть построена и эпюра моментов.

На фиг. 58 приведен один пример такого построения. Здесь эпюра моментов для балки AC представлена линией $adbec$. Площадь эпюры разбита на четыре элемента: два треугольника abB_1 , B_1bc и два сегмента adb , bce , и для них на фиг. б) построен второй силовой многоугольник $O-1-2-3-4-5$ и на фиг. с) построен многоугольник Вариньона $a_1-1-2-3-4-5-c_1$. Из этого многоугольника Вариньона получен прогиб $f_1 = 25$ м.м. Чтобы получить прогиб f_2 от сосредоточенной силы Q , приложенной на средней опоре, здесь воспользовались следующим приемом: вместо того, чтобы строить отдельно эпюру моментов для произвольной силы Q , приложенной в B , здесь предположено, что abc представляет эту эпюру. Очевидно, что во втором силовом многоугольнике

фиг. б) этой эпюре соответствуют силы $2-3$ и $3-4$ и лучи $O-2$, $O-3$ и $O-4$. Построивши для этих сил многоугольник Вариньона на фиг. с), мы получим $a_2-2-3-4-c_2$ и прогиб $f_2 = 20$ м.м. Этот прогиб меньше прогиба $f_1 = 25$ м.м., полученного прежде. Очевидно, та воображаемая сила Q , которая вызвала треугольную эпюру моментов abc , меньше действительной опорной реакции B , и следует эту силу увеличить по форм. (121)

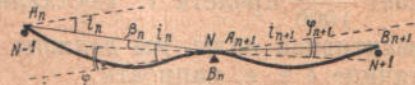
в отношении $\frac{25}{20} = 1,25$. Но, увеличивая силу Q , мы во столько же раз будем увеличивать ординаты треугольной эпюры моментов abc . Так как нас в сущности интересует не реакция B , а результат ее действия, то мы умножим на 1,25 ординаты эпюры abc : это будет равносильно увеличению силы Q . Тогда мы получим такую треугольную эпюру моментов, которая вызывается действительной реакцией B . Таким образом, найдены две эпюры моментов, полученные от двух родов нагрузки балки AC : одна эпюра $adec$ и другая, треугольная, у которой ордината под точкой B составляет 1,25 $B_1 b$. Так как первая из этих эпюр соответствует изгибу выпуклостью вниз, а вторая соответствует изгибу выпуклостью вверх, ибо реакция B идет вверх, то ординаты должны вычитаться. При этом получают разности, отмеченные на фиг. д) штрихами. Составленная таким образом фигура $a_3b_3c_3b_4$ есть искомая эпюра моментов для балки на трех опорах.

Этим способом решения задачи можно пользоваться при произвольных грузах, но всегда в построенной эпюре $adbec$ следует выделять треугольник abc .

Понятно, эпюру $a_3b_3c_3b_4$ фиг. д) можно было бы получить, идя общим путем: действительно приложить в точке B некоторую силу Q , напри-

мер $Q = 1$ т., построить для нее эпюру моментов и упругую линию, найти прогиб f_2 и считать, что реакция B есть $1 \cdot \frac{f_1}{f_2}$. Затем найденную реакцию ввести в число нагрузок бруска и построить силовой многоугольник и эпюру, как для простой балки на двух опорах. Но при этом число построений оказывается больше.

4. Двухпролетная балка на разных уклонах (фиг. 59). а) При расположении балок на разных уклонах вопросы расчета также разрешаются на основании теоремы о 3 моментах. Как и прежде составляем выражения для угла поворота концов B_n и A_{n+1} смежных балок и пишем, что упругая линия над опорой N имеет общую касательную. Например, на фиг. 59, где 2 смежных пролета



Фиг. 59.

наклонены под углами i_n и i_{n+1} , поступаем так: 1) находим угол поворота β_n правого конца n -го пролета по отношению к оси балки:

$$\beta_n = \frac{1}{EJ} \left(B'_n + \frac{M_{n-1}l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} \right);$$

2) выражаем угол наклона касательной к упругой линии с горизонтом:

$$\varphi_n = \beta_n - i_n = \frac{1}{EJ} \left(B'_n + \frac{M_{n-1}l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} \right) - i_n; \dots (122-a).$$

3) точно также для левого конца правого пролета:

$$\varphi_{n+1} = \alpha_{n+1} + i_{n+1} = \frac{1}{EJ} \left(A'_{n+1} + \frac{M_{n+1}l_{n+1}}{6} + \frac{M_n l_{n+1}}{3} \right) + i_{n+1}.$$

4) Сравнивая наклон касательных к горизонту: $\varphi_n = -\varphi_{n+1}$, найдем:

$$\begin{aligned} M_n(l_n + l_{n+1}) = \\ = - \left[\frac{1}{2} (M_{n-1}l_n + M_{n+1}l_{n+1}) + 3R'_n + 3EJ(i_{n+1} - i_n) \right] \dots (122-b). \end{aligned}$$

Величина опорных моментов зависит от расположения опор и жесткости балки: влияние понижения опоры тем больше, чем балка жестче.

Последние два члена уравнения, по отношению к опорным моментам имеют одинаковое значение, но первый из них определяется исключительно нагрузкой двух смежных пролетов, а второй — уклонами этих пролетов, так что нагрузка и уклоны как бы равнозначны.

Первый свободный член уравнения трех моментов называется грузовым членом, второй — угловым,

б). Балка на податливых опорах. Описанным приемом расчета балки на уклонах можно воспользоваться и в том случае, когда опоры сделаны ошибочно на разных уровнях, или садятся вследствие слабости основания, или упруго сжимаются. Оседание какой-нибудь опоры равноценно повороту пролета на $i = \delta/l$, где δ — осадка. Следовательно, для применения формулы (122) надо только иметь возможность предварительно выразить осадку δ . Обыкновенно упругую податливость опоры характеризуют силой, которая вызывает осадку, равную единице. Например, если под давлением силы D опора садится на 1 см., то очевидно под реакцией R_n она должна сесть на $\delta_n : 1 = R_n : D$, т. е. на

$$\delta_n = 1 \cdot \frac{R_n}{D} = \frac{1}{D} \left(A_{n+1} + B_n + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \right) \dots (123)$$

Такие выражения составляются для всех опор. Очевидно, если первоначально опоры были на одном уровне, то теперь они станут на уклонах:

$$i_n = \frac{\delta_n - \delta_{n-1}}{l_n}, \quad i_{n+1} = \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_{n+1}} \text{ и т. д. } \dots (124).$$

Остается вставить эти уклоны в выражение для трех моментов (122). Если осадка опор известна, то из этого выражения определятся моменты по предыдущему.

В частных случаях простой нагрузки задача может быть решена и непосредственно способом уравнивания деформаций.

На простом примере равномерно распределенной нагрузки покажем, каково практическое значение осадки либо пониженного положения средней опоры. Положим, что при одинаковых пролетах осадка δ составляет $\frac{1}{1000}$ пролета l . Составляя уравнение прогибов от нагрузки и от реактивной силы, мы должны приравнять их алгебраическую сумму величине δ т. е. написать:

$$\frac{5q(2l)^4}{384EJ} - \frac{X(2l)^3}{48EJ} = \delta, \text{ где } X \text{ — реакция средней опоры.}$$

Откуда $X = \frac{5}{8}P - \frac{6\delta EJ}{l^3}$, где $P = 2ql$ — весь груз, лежащий на балке (125).

Очевидно, крайние опорные реакции будут каждая по:

$$\frac{1}{2}(P - X) = \frac{3}{16}P + \frac{3\delta EJ}{l^3} = R_A = R_B,$$

а изгибающий момент для средней опоры:

$$\begin{aligned} M &= R_A l - \frac{1}{2}ql^2 = \left(\frac{3}{16}P + \frac{3\delta EJ}{l^3}\right)l - \frac{1}{2}ql^2 = \\ &= -\frac{ql^2}{8}\left(1 - \frac{3 \cdot 8 \cdot \delta EJ}{ql^4}\right) = -q \frac{l^2}{8}(1 - \Delta) \dots \dots \dots (126) \end{aligned}$$

Этот момент меньше, чем при неподатливых опорах; разница тем значительнее, чем больше $\Delta = \frac{24\delta EJ}{ql^4}$.

Если, например, высота железной балки $h = \frac{1}{10}l$,

$E = 2 \cdot 10^6$ кг./см.² и допущено при проектировании напряжение в 1000 кг./см.², т. е. при неподатливых опорах было бы принято:

$$1000 = \frac{ql^2}{8 \cdot W} = \frac{ql^2 \cdot h}{8J \cdot 2}, \text{ или } ql^2 = \frac{16000J}{h},$$

то получилось бы $\Delta = \frac{24\delta EJ \cdot h}{16000Jl^2} = \frac{24E}{16000} \cdot \frac{\delta}{l} \cdot \frac{h}{l} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 10^6}{16000} \cdot \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10} = 0,3$

Понижение опоры на $\frac{1}{1000}$ пролета уменьшает опорный реактивный момент на 30%.

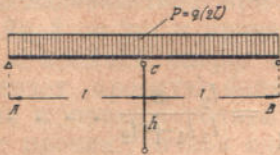
Этот пример говорит о большом значении незыблемости опор в неразрезных балках и правильности их установки по отношению к оси балки. Так как работы по укладке опор производятся с определенной неточностью, кроме того, могут быть различные условия осадки, в особенности в мостовых сооружениях, то нет уверенности в соответствии фактических напряжений в неразрезных балках с расчетными, и приходится, либо понижать допускаемые напряжения, либо принимать специальные меры для обеспечения правильной работы опор. В последнее время производятся опыты измерения опорных реакций в существующих балках посредством гидравлических подъемников (домкратов) с целью искусственно создать расчетные условия их работы.

Следует иметь в виду, что значение осадки опоры уменьшается вместе с увеличением гибкости балки, т. е. с увеличением ее пролета и уменьшением высоты сечения.

Если средняя опора упруго податлива, например, представляет стойку высотой h и сечением F , то при равных пролетах реакция этой опоры оказывается

$$R = \frac{5}{48} P \frac{l^3}{h \frac{J}{F} + \frac{1}{6} l^3} \dots \dots \dots (127),$$

где J — момент инерции балки (фиг. 60).



Фиг. 60.

5. Линии влияния. а) Линия опорного момента получается по выражению для опорного момента (111—112), если принять $P=1$. Приводим таблицу ординат, рассчитанных по первой формуле в предположении, что пролеты равны и разбиты на 10 частей каждый, так что ξ берется

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots \dots \dots$$

Ординаты даются в порядке их следования от крайней левой опоры 0 до промежуточной опоры 1 (см. фиг. 57).

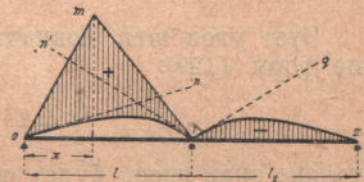
№ ординат (положений груза)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Длина ординат	0,0	0,02475 l	0,48 l	0,06825 l	0,084 l	0,09375 l	0,096 l	0,08925 l	0,072 l	0,04275 l	0,0

В правом пролете по симметрии, те же ординаты идут справа, от крайней правой опоры 2, налево к промежуточной опоре 1.

Максимальная ордината линии приходится на $a_m = l : \sqrt{3}$ (сравн. 113) и составляет 0,096225 l.

Площадь линии влияния составляет $\frac{1}{8} l^2$ (128)

б) Линия момента в промежуточном сечении пролета M_x . По форм. (116) эта линия составляется из линии для простой балки, т. е. из треугольника с вершиной под сечением, и из линии опорного момента с пропорционально уменьшенными ординатами, т. е. из несимметричной кривой.



Фиг. 62.

Исследуем форму результата сложения этих линий. Тангенс угла наклона треугольной эпюры (фиг. 62):

$$t_g \angle m01 = \frac{l_1 - x}{l_1} \text{ и } t_g \angle m10 = \frac{x}{l_1} -$$

это известно из способа построения линии влияния для момента простой балки*).

Тангенс угла наклона линии опорного момента по (111), умноженной на $\frac{x}{l}$ для формулы (116):

$$t_g \angle n01 = \frac{x}{l_1} \left(\frac{dM_{1,1}}{d\xi_1} \right) \text{ при } \xi = \frac{a_1}{l_1} = 0 = \frac{x}{2(l_1+l_2)}.$$

$$t_g \angle n'10 = \frac{x}{l_1} \left(\frac{dM_{1,1}}{d\xi_1} \right) \text{ при } \xi = \frac{a_1}{l_1} = 1 = \frac{x}{l_1+l_2}.$$

Для правого пролета, по (112):

$$t_g \angle q12 = \frac{x}{l_1} \left(\frac{dM_{1,2}}{d\xi_2} \right) \text{ при } \xi' = \frac{b_2}{l_2} = 1 = \frac{l_2}{l_1} \frac{x}{l_1+l_2} \dots \dots \dots (129)$$

при чем абсцисса b_2 — отсчитывается, от опоры 2, справа налево.

Сопоставляя наклон сторон треугольника простой балки и касательных к линии опорных моментов, имеем:

$$\text{Во-первых, } t_g \angle m10 - t_g \angle n'10 = \frac{x}{l_1} - \frac{x}{l_1+l_2} = \frac{x}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_1+l_2} \dots \dots \dots (130)$$

т. е. всегда $\angle m10 > \angle n'10$,

так что, у промежуточной опоры линия опорного момента всегда располагается внутри треугольника простой балки.

$$\text{Во-вторых, } t_g \angle m01 - t_g n01 = \frac{l_1-x}{l_1} - \frac{x}{2(l_1+l_2)} = 1 - \frac{x}{l_1} \cdot \frac{2}{l_1+l_2};$$

поэтому: при $\frac{x}{l_1} < \frac{l_1+l_2}{3}$ будет $\angle m01 > \angle n01$

” ” $\frac{x}{l_1} = \frac{l_1+l_2}{3}$ ” $\angle m01 = \angle n01 \dots \dots \dots (131)$

” ” $\frac{x}{l_1} > \frac{l_1+l_2}{3}$ ” $\angle m01 < \angle n01$.

$$\text{В-третьих, по (130): } t_g \angle m10 - t_g \angle n'10 = \frac{x}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_1+l_2}.$$

Этот угол $m1n'$ совпадает с углом $q12$ правого пролета, определяемым по форм. (129):

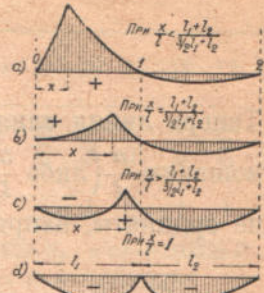
$$t_g \angle q12 = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{x}{l_1+l_2} = \frac{x}{l_1} \cdot \frac{l_2}{l_1+l_2}; \dots \dots \dots (132).$$

только знак здесь будет обратный, так как при нахождении груза $P=1$ в правом пролете изгибающий момент в сечении x левого пролета обусловливается одним только отрицательным опорным моментом, ибо первый член формулы (116) исчезает.

*) См. напр. наши: Системы без лишних стержней, § 48. Здесь, для простоты, мы оперируем с абс. величинами углов наклона.

Следовательно, у промежуточной опоры линия влияния плавно переходит с левого пролета в правый, имея общую касательную, как показано на фиг. 63, где результат сложения эпюр предыдущей фигуры перенесен к горизонтальной оси 0—1—2 с соблюдением для ординат правила знаков.

Кроме того, условия (131) говорят, что в пролете, где назначено сечение, возможны три вида линий влияния изгибающего момента: подъемистая линия с положительным началом (фиг. 63-а), касательная в начале (фиг. б) и линия с отрицательным началом (фиг. в). Все эти формы развиваются одна из другой последовательно при перемещении сечения x от крайней опоры к промежуточной. Чем ближе сечение к крайней опоре, тем более линия влияния напоминает простую балку, наоборот, чем ближе сечение к промежуточной опоре, тем более линия напоминает опорный момент промежуточной опоры (фиг. д).



Фиг. 63.

Покажем для примера вычисление ординат линии влияния изгибающего момента в сечении, взятом на расстоянии $\frac{1}{10}$ пролета от левой опоры 0, при условии, что $l_1 = l_2$.

Пока груз $P=1$ левого пролета находится справа от сечения x , на расстоянии a от опоры 0, то момент левых сил

$$M_x = M^0 + M_1 \frac{x}{l} = \frac{l-a}{l} \cdot x - \frac{a}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \frac{x}{l} = \frac{x}{4} \left(4 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right) \dots (133).$$

Когда же груз станет на левом участке x , то из момента прежних левых сил придется вычесть 1 ($x-a$), так что момент для простой балки будет

$$M^0 = 1 \cdot \frac{l-a}{l} \cdot x - 1(x-a) = \frac{1 \cdot a(l-x)}{l},$$

а момент для неразрезной балки

$$\begin{aligned} M_x + M^0 + M_1 \frac{x}{l} &= \frac{a(l-x)}{l} - \frac{a}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \frac{x}{l} = \\ &= \left(1 - \frac{5}{4} \frac{x}{l} + \frac{xa^2}{4l^2}\right) a \dots \dots \dots (134). \end{aligned}$$

Таковы уравнения для ветвей линии влияния левого пролета вообще. Применяя их к назначенному сечению $x = \frac{1}{10} l$, получим:

для левой ветви, по (134):

$$y^л = \left(1 - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \frac{a^2}{l^2}\right) a = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{40} \frac{a^2}{l^2}\right) a \dots \dots \dots (135)$$

и для правой ветви, по (133):

$$y^п = \frac{l}{40} \left(4 - 5 \frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right) \dots \dots \dots (136).$$

Когда груз находится на правом пролете, то изгибающий момент в назначенном сечении x левого пролета представится моментом одной только реакции A , обусловленной моментом M_1 , т. е. ординаты линии влияния должны быть:

$$M_x = M_1 \frac{x}{l} = -\frac{1}{4} b \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) \frac{x}{l},$$

где b — отсчитывается от правой опоры 2.

Назначая для x длину $\frac{1}{10}l$, получим окончательно:

$$-\frac{1}{40}b\left(1-\frac{b^2}{l^2}\right)=y^n \dots \dots \dots (137).$$

Теперь линия влияния строится по точкам деления пролета: мы даем отношению $\frac{a}{l}$ (либо $\frac{b}{l}$) значение $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots$ и вычисляем соответствующие ординаты, например, для первой точки деления имеем по (135):

$$y_1 = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{100}\right) \frac{1}{10}l = 0,087525l;$$

для второй точки, по 136:

$$y_2 = \frac{1}{40}\left(4 - 5 \cdot \frac{2}{10} + \frac{2^3}{10^3}\right)l = \frac{1}{40}\left(3 + \frac{8}{1000}\right)l = 0,0752l \text{ и т. д.}$$

Для 14-ой ординаты линии, приходящейся в правом пролете на расстоянии $\frac{6}{10}l$ от правой опоры 2, получим по (137):

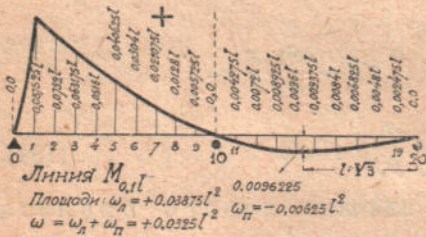
$$y_{14} = -\frac{1}{40} \cdot \frac{6}{10}l\left(1 - \frac{36}{100}\right) = -\frac{6 \cdot 64}{40 \cdot 10 \cdot 100}l = 0,0096l.$$

Таким образом вычисляются все ординаты линии влияния $M_{0,11}$, приведенные на следующей фиг. 64.

Назначая для сечения x новые положения: $x = 0,2l, 0,3l \dots$, мы получим ряд новых линий влияния, изменяющихся согласно схеме фиг. 63.

с) Таблицы ординат для построения линий влияния.

Приводим таблицы ординат для этих линий и площадей, придерживаясь обозначений фиг. 64. В этих таблицах обозначают:



Фиг. 64.

отмечается знаком плюс, после нее всегда помещается отрицательная, отмеченная знаком минус; в том случае, когда имеется два отрицательных участка, на второе место поставлена сумма отрицательных площадей; на третьем месте дается алгебраическая сумма площадей влияния с соответствующим знаком — ею приходится пользоваться при вычислении действия собственного веса пролетного строения.

3) $M_{\text{макс.}}$ и $M_{\text{мин.}}$ — численно наибольшие ординаты линии влияния: первая — наибольшая положительная, вторая — наибольшая отрицательная.

Положение наибольших ординат определяется: в первом пролете сечением x , во втором — абсциссой $b_m = l/\sqrt{3}$; она для всех линий одинакова, так как обуславливается одним только опорным моментом M_1 , одинаково для всех сечений левого пролета балки.

4) a_0 — абсцисса нулевой точки линии влияния, определяющая положение груза, не вызывающего момента в данном сечении.

Таблица для построения линий влияния изгибающего момента¹⁾.

		Сечение $x=0,1l$																				
№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Ординаты y	0	8752,5	7520	6317,5	5160	4062,5	3040	2107,5	1280	572,5	0	427,5	720	892,5	960	937,5	840	682,5	480	247,5	0	
Площади				$\omega_1 = +0,03875 l^2$								$\omega_{II} = -0,00625 l^2$		$\omega = +0,0325 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,08725 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,0096225 l$										
		Сечение $x=0,2l$																				
	0	7505	15040	12635	10320	8125	6080	4215	2560	1145	0	855	1440	1785	1920	1875	1680	1365	960	495	0	
				$\omega_1 = +0,0675 l^2$								$\omega_{II} = -0,0125 l^2$		$\omega = +0,055 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,1504 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,019245 l$										
		Сечение $x=0,3l$																				
	0	6257,5	12560	18952,5	15480	12187,5	9120	6322,5	3840	1717,5	0	1272,5	2160	2677,5	2880	2812,5	2520	2047,5	1440	742,5	0	
				$\omega_1 = +0,08625 l^2$								$\omega_{II} = -0,01875 l^2$		$\omega = +0,0675 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,189525 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,0288675 l$										
		Сечение $x=0,4l$																				
	0	5010	10080	15270	20640	16250	12160	8430	5120	2290	0	1710	2880	3570	3840	3750	3360	2730	1920	990	0	
				$\omega_1 = +0,095 l^2$								$\omega_{II} = -0,025 l^2$		$\omega = +0,07 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,2064 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,03849 l$										
		Сечение $x=0,5l$																				
	0	3762,5	7600	11587,5	15800	20312,5	15200	10537,5	6400	2862,5	0	2137,5	3600	4462,5	4800	4687,5	4200	3412,5	2400	1237,5	0	
				$\omega_1 = +0,9375 l^2$								$\omega_{II} = -0,03125 l^2$		$\omega = +0,0625 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,203125 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,0481125 l$										
		Сечение $x=0,6l$																				
	0	2515	5120	7905	10960	14375	18240	12645	7680	3435	0	2565	4320	5355	5760	5625	5040	4095	2880	1485	0	
				$\omega_1 = +0,0825 l^2$								$\omega_{II} = -0,0375 l^2$		$\omega = +0,045 l^2$								
				$M^I_{\text{макс.}} = +0,1824 l$								$M^{II}_{\text{мин.}} = -0,057735 l$										

¹⁾ Ординаты даны в долях пролета. Они вызваны грузом, равным единице, так что, при грузе P , должны быть увеличены в P раз.
 Так как в таблицах, для простоты набора, написаны числа, увеличенные в $10^5 : l$ раз, то результаты вычислений по таблицам надо разделить на 10^5 и умножить на l .

Сечение $x=0,7l$

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0	1267,5	2640	4222,5	6120	8437,5	11280	14752,5	8960	4007,5	0	2992,5	5040	6247,5	6720	6562,5	5880	4777,5	3360	1732,5	0

$\omega_{\text{л}} = +0,06125 l^2$; $\omega_{\text{п}} = -0,04375 l^2$; $\omega = +0,0175 l^2$
 $M_{\text{л макс.}} = +0,147525 l$; $M_{\text{п мин.}} = -0,0673575 l$

Сечение $x=0,8l$

0	20	160	340	1280	2500	4320	6860	10240	4580	0	3420	5760	7140	7680	7500	6720	5460	3840	1980	0
---	----	-----	-----	------	------	------	------	-------	------	---	------	------	------	------	------	------	------	------	------	---

$\omega_{\text{л}} = +0,03 l^2$; $\omega_{\text{п}} = -0,05 l^2$; $\omega = -0,02 l^2$
 $M_{\text{л макс.}} = +0,1024 l$; $M_{\text{п мин.}} = -0,07698 l$

Сечение $x=0,9l$

0	1227,5	2320	3242,5	3560	3437,5	2640	1082,5	1520	5152,5	0	3847,5	6480	8032,5	8640	8437,5	7560	6142,5	4320	2227,5	0
---	--------	------	--------	------	--------	------	--------	------	--------	---	--------	------	--------	------	--------	------	--------	------	--------	---

$\omega_{\text{л}} = +0,00611 l^2$; $(\omega_{\text{л}} + \omega_{\text{п}}) = -0,07361 l^2$; $\omega = -0,0675 l^2$

$M_{\text{л макс.}} = +0,051525 l$; $M_{\text{п мин.}} = -\frac{1}{12} \sqrt{\frac{5}{27}} l$ на расстоянии $\sqrt{\frac{5}{27}} l$

Нулевая точка: $a_0 = 0,7454 l$.

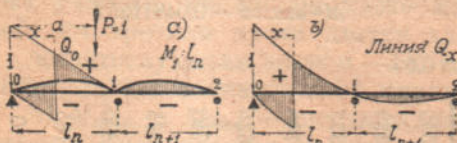
$M_{\text{п}} = -0,0866025 l$

d) Линия влияния для поперечной силы. Выражение для поперечной силы в каком-нибудь сечении x одного из пролетов балки составляется из поперечной силы Q_x^0 простой балки от груза P и из поперечной силы той же балки от опорного момента M_i , т. е. из $\frac{M_i}{l}$;

следовательно, для первого пролета имеем:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_i}{l},$$

для второго . . . $Q_x = Q_x^0 - \frac{M_i}{l}$ (138).



Фиг. 65.

Таким образом, линии влияния получают путем наложения линии опорного момента M_i , с уменьшенными ординатами, на линию поперечной силы простой балки. Результирующая линия должна пройти плавно, без перелома над промежуточной опорой балки 1, так же, как проходила линия

момента M_x , ибо момент представляет поперечную силу, помноженную на соответствующее плечо. На фиг. 65-а) сделано наложение, а результат перестроен от одной общей горизонтальной оси, с соблюдением знаков на фиг. б).

Составим для примера выражение поперечной силы для сечения x в зависимости от переменного расстояния груза a . При расположении груза

$P=1$ на левом пролете и притом правее участка x поперечная сила простой балки: $Q^0 = 1 \left(1 - \frac{a}{l}\right)$; линия момента M_1 ; l , по предыдущему

$$\frac{M_1}{l} = -\frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right); \text{ поэтому, } Q_x = 1 - \frac{a}{l} - \frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) = \\ = 1 - \frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(5 - \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (139).$$

Если груз станет на участок x , то придется вычесть 1:

$$Q_x = -\frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(5 - \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (140).$$

При нахождении груза на правом пролете, левый находится лишь под действием опорного момента M_1 , так что, поперечная сила

$$Q_x = \frac{M_1}{l} = -\frac{1}{4} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (141).$$

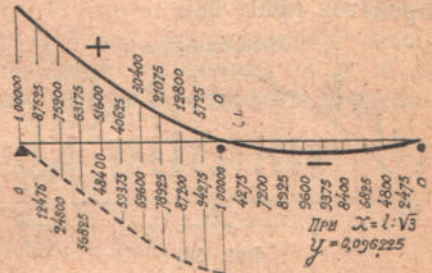
По этим формулам строятся линии влияния поперечной силы для разных сечений балки. Все эти линии выражаются одной диаграммой, приведенной на фиг. 66. Чтобы получить линию Q для какого-нибудь сечения x , надо пойти по нижней пунктирной линии до этого сечения, подняться здесь по вертикали до верхней сплошной линии и пойти по ней до конца балки — получится линия типа b) фиг. 65. Очевидно, крайняя линия, идущая вверх по вертикали непосредственно над нулевой опорой, будет линией влияния для левой опорной реакции.

Положительная площадь последней ли-

нии влияния $\omega_+ = \frac{7}{16} l$;

отрицательная $\omega_- = -\frac{1}{16} l$;

сумма площадей $\omega = \frac{3}{8} l$.



Фиг. 66.

Для получения расчетных поперечных сил в других сечениях обозначим расстояние x сечения до левой опоры левого пролета в частях пролета l , а именно примем:

$$\frac{x}{l} = m;$$

тогда: $Q_{\text{макс.}} = \frac{1}{4} ql \left(\frac{7}{4} - 4m + \frac{5}{2} m^2 - \frac{1}{4} m^4\right) \dots \dots \dots (142).$

$$Q_{\text{мин.}} = -\frac{1}{16} ql (m^4 - 10m^2 - 1)$$

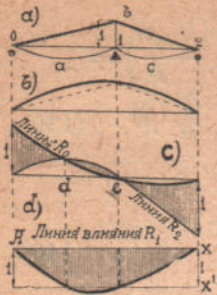
Поперечная сила от постоянной равномерно распределенной нагрузки всего пролета, например, от собственного веса p :

$$Q_p = \frac{1}{8} pl (3 - 8m) \dots \dots \dots (143).$$

е) Линия влияния для реакции средней опоры. Общая формула для этой реактивной силы:

$$R_1 = R^0 - \frac{M_1}{l_1} - \frac{M_2}{l_2} = R^0 - M_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \dots \dots \dots (144),$$

где R^0 — реакция двух смежных пролетов 0—1 и 1—2, как простых балок от нагрузки P ; опорный момент M_1 принимается в алгебраическом смысле, т. е. должен быть подставлен с соответствующим знаком.



Фиг. 67.

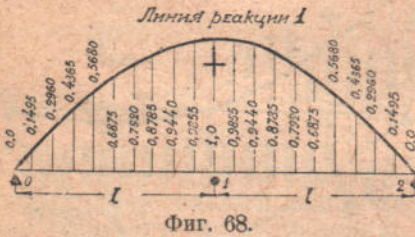
Поэтому линия влияния, для реакции средней опоры может быть получена наложением линий:

- 1) треугольной $Ob2$ для 2-х простых балок и
- 2) двух линий $Oa1$ и $1c2$ опорного момента M_1 .

Так как опорный момент M_1 всегда отрицателен, то ординаты линий всегда арифметически складываются, т. е. приходится оба члена формулы для R_1 строить по разные стороны от оси, как показано на фиг. 67-а. Очевидно, реакция неразрезной балки при всяком положении груза больше, реакции простой балки; только груз над опорой дает тот же результат, единицу.

Не трудно видеть, что максимальная ордината получается не на опоре, а на большем из двух неравных пролетов, при чем она оказывается больше единицы. А так как сумма трех реакций $R_0 + R_1 + R_2 = 1$, то должна быть сумма крайних $R_0 + R_2 < 0$. На этом основании линию влияния для средней опоры можно построить следующим простым приемом: на фиг. c) строят линии крайних опор 0 и 2, в разные стороны от оси, и определяют отрицательный участок de их суммы; на фиг. d) откладываем результирующие заштрихованные ординаты от оси X' . Оказывается, что от оси X сама собою построится линия влияния для средней опоры 1, так как сумма ординат всех трех линий будет постоянно единицей.

Приводим результаты вычислений по формуле (144) для случая равных пролетов (фиг. 68):



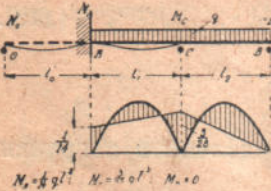
Фиг. 68.

$$R_1 = R^0 - 2 \frac{M_1}{l} = 1 \cdot \frac{a}{l} + \frac{1}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{a}{l} \left(3 - \frac{a^2}{l^2} \right) \dots (145)$$

Площадь линии влияния $\omega = \frac{5}{4} l$.

Таблицы для неравных пролетов и для иных абсцисс можно найти в специальных изданиях *).

6. Балка с зашеченными концами. При зашечении одного и даже двух концов двухпролетной балки число неизвестных невелико: 2 или 3, так что уравнение трех моментов здесь будет также уместным. Составляя это уравнение, мы вообразим балку продолженной за пределы плоскости зашечения влево на некоторую длину l_0 .



Фиг. 69.

Так как, при полном зашечении, касательная к упругой линии в плоскости зашечения при всякой деформации балки остается горизонтальной, то можно представить себе, что с левой стороны от плоскости зашечения полностью повторяется упру-

*) А. Caret L. Portes. Calcul des ponts métalliques par la methode des lignes d'influence.

Хегстром А. П. инж. Графические таблицы интерполирующих инфлюэнтных кривых. Киев, 1908.

Грио Г., инж. Интерполяционные таблицы для быстрого построения инфлюэнтных линий моментов и поперечных сил. Перевод с 3-го издания С. М. Шубина. М. 1928.

гая линия пролета l_1 , только зеркально повернутая, и что $M_0 = M_c$, $l_0 = l_1$ (фиг. 69). При таких условиях уравнение трех моментов будет:

$$-M_A(l_0 + l_1) = \frac{1}{2}(M_0l_0 + M_cl_1) + 3R'_A.$$

С другой стороны полное защемление балки l_1 можно рассматривать, как балку l_0 весьма большой жесткости, совершенно не допускающей концевой поворота A . Выражая это условие формулой $\beta_0 = \frac{M_A l}{kEJ} = 0$, мы можем считать, что защемление получается в пределе пролета l_0 , стремящегося к нулю, и, на этом основании, в уравнении трех моментов принять $l_0 = 0$. Тогда получится: $-2l_1 M_A = M_c l_1 + 3 \cdot 2A$.

При упругой заделке конец балки A сдает, более или менее поворачиваясь в зависимости от податливости плоскости или постели заделки. Этот поворот, по аналогии, можно представить, как несимметричный изгиб над опорой A фиктивно продолженной балки CAO , получающийся благодаря большей или меньшей гибкости фиктивного пролета l_0 .

Мы можем вычислить этот поворот, или податливость, конца фиктивной балки OA , по определению § 3,1, как угол изгиба от единичного момента, и выразить его через длину l_0 :

$$\zeta = \frac{1 \cdot l_0}{3EJ};$$

следовательно, является возможность определить ту фиктивную длину l_0 , которая соответствует данной податливости опоры:

$$l_0 = 3EJ\zeta. \dots \dots \dots (146)$$

Таким образом, упругую заделку балки ACB мы представляем себе, как прикрепление ее к балке, свободно лежащей на опорах O и A и имеющей длину l_0 . Очевидно, что при такой длине фиктивного пролета уравнение трех моментов будет:

$$-M_A(l_0 + l_1) = \frac{1}{2} M_c l_1 + 3R'_A,$$

$$\text{или: } -M_A(l_1 + 3EJ\zeta) = \frac{1}{2} M_c l_1 + 3R'_A.$$

В случае обоих упруго заделанных концов соответственно получим:

$$-M_A(l_1 + 3EJ\zeta_A) = \frac{1}{2} M_c l_1 + 3R'_A,$$

$$-M_c(l_1 + l_2) = \frac{1}{2}(M_A l_1 + M_B l_2) + 3R'_0, \dots \dots \dots (147).$$

$$-M_B(l_2 + 3EJ\zeta_B) = \frac{1}{2} M_c l_2 + 3R'_B$$

7. Влияние неравномерного нагревания. Воспользуемся известными выражениями § 2,9^b для углов поворота балки над средней опорой и приравняем угол β_l левого и угол α_r правого пролетов.

Для первого угла при симметричном нагревании балки постоянного сечения имеем:

$$\beta_1 = \frac{M_0 l}{6EJ} + \frac{M_1 l_1}{3EJ} + \frac{\varepsilon l_1 \delta t}{2h};$$

при $M_0 = 0$ получим: $\beta_1 = \frac{M_1 l_1}{3EJ} + \frac{\varepsilon l_1 \delta t}{2h}.$

Точно также $\alpha_2 = \frac{M_1 l_2}{3EJ} + \frac{\varepsilon l_2 \delta t}{2h}.$

А потому:
$$\frac{M_1 l_1}{3EJ} + \frac{\varepsilon l_1 \delta t}{2h} + \frac{M_1 l_2}{3EJ} + \frac{\varepsilon l_2 \delta t}{2h} = 0,$$

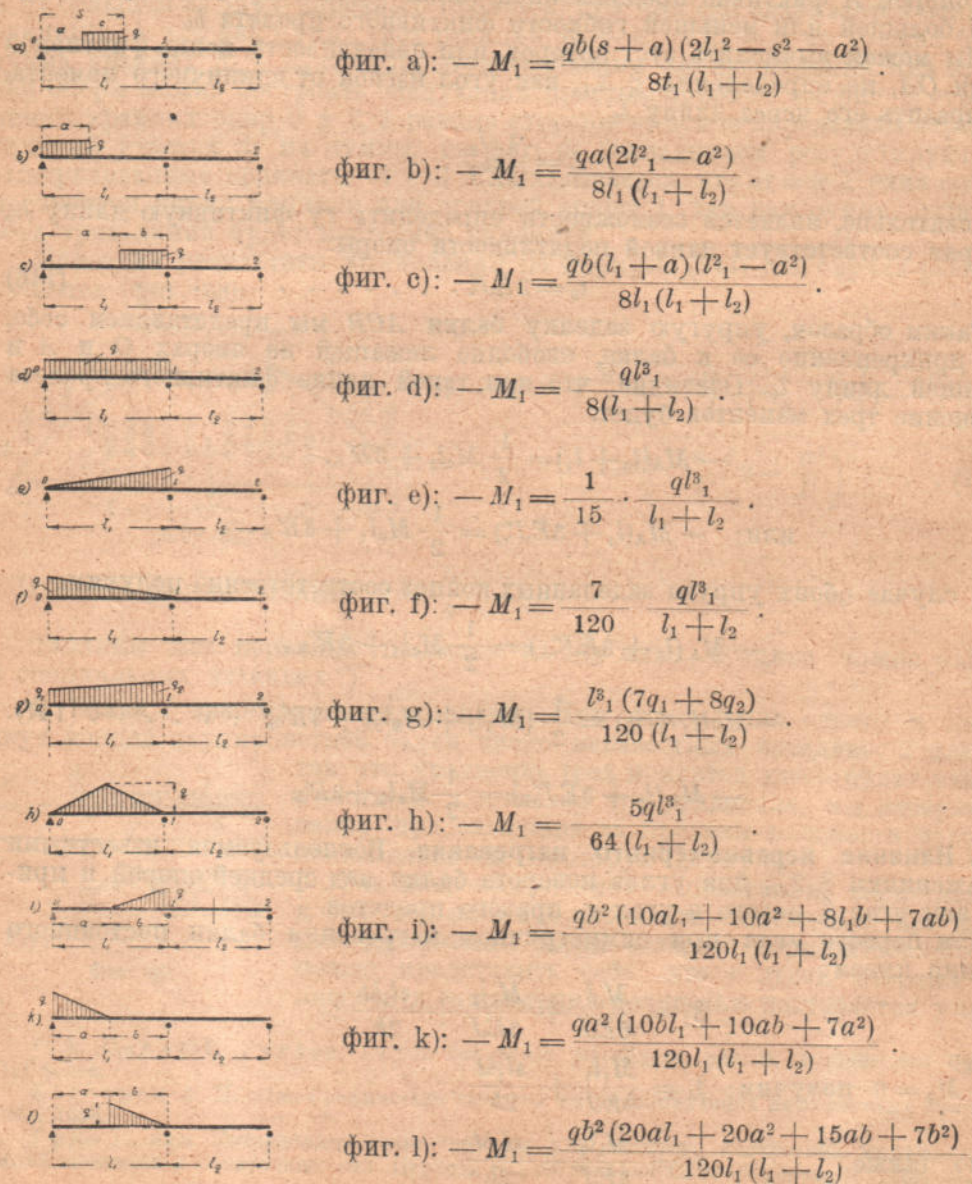
или:
$$M_1(l_1 + l_2) + \frac{3EJ\varepsilon\delta t}{2h}(l_1 + l_2) = 0.$$

Отсюда
$$M_1 = -\frac{3}{2} \frac{J}{h} E\varepsilon\delta t = -\frac{3}{4} WE\varepsilon\delta t, \dots \dots \dots (148)$$

где W — момент сопротивления поперечного сечения.

При равномерном нагревании сечения происходит лишь удлинение балки; ему не препятствуют подвижные опоры, так что, — не возникают и лишние реактивные неизвестные.

8. Справочные таблицы для двухпролетных балок. а) Опорные моменты при местной равномерно распределенной и треугольной нагрузке (фиг. 70).

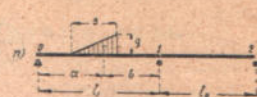


Фиг. 70.

фиг. м): $-M_1 = \frac{qa^2(5bl_1 + 5ab + 2a^2)}{30l_1(l_1 + l_2)}$



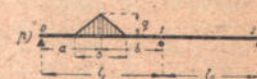
фиг. н): $-M_1 = \frac{qsa \left(l_1^2 - a^2 - s^2 \cdot \frac{45a - 2s}{270a} \right)}{4l_1(l_1 + l_2)}$



фиг. о): $-M_1 = \frac{qsa \left(l_1^2 - a^2 - s^2 \cdot \frac{45a + 2s}{270a} \right)}{4l_1(l_1 + l_2)}$



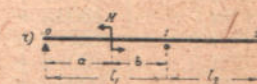
фиг. п): $-M_1 = \frac{qsa(8l_1^2 - 8a^2 - s^2)}{32l_1(l_1 + l_2)}$



фиг. q): $-M_1 = \frac{17ql^3_1}{256(l_1 + l_2)}$

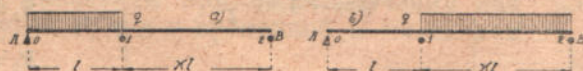


фиг. р): $-M_1 = \frac{M(3a^2 - l^2_1)}{2l_1(l_1 + l_2)}$



Фиг. 70.

б) Таблица опорных моментов при загрузке одного пролета по схеме 71-а) или б) при разных пролетах: l и xl и защемлении концов балки.



Фиг. 71.

Опорные моменты выражены через максимальный момент простой балки $M_0 = ql^2 : 8$.

Опоры	Схема загрузки	Опорный момент
Все опоры шарнирные	а)	$M_1 = -M_0 \frac{1}{z+1}$
	б)	$M_1 = -M_0 \frac{x}{z+1}$
Левая опора защемленная	а)	$M_A = -M_0 \frac{2+4x}{3+4x}, M_1 = -M_0 \frac{2}{3+4x}$
	б)	$M_A = +M_0 \frac{2x}{3+4x}, M_1 = -M_0 \frac{4x}{3+4x}$
Обе крайние опоры защемленные	а)	$M_A = -M_0 \frac{2+3x}{3(1+x)}, M_1 = -M_0 \frac{2}{3(1+x)}, M_B = +M_0 \frac{1}{3(1+3x)}$
	б)	$M_A = +M_0 \frac{x}{3(1+x)}, M_1 = -M_0 \frac{2x}{3(1+x)}, M_B = -M_0 \frac{3+2x}{3(1+x)}$

с) Таблица опорных моментов, реакций и поперечных сил при загрузении концевыми моментами и при равных пролетах (фиг. 72).



Фиг. 72.

Опорные моменты	Поперечные силы	Опорные реакции
-----------------	-----------------	-----------------

Случай а), когда M_0 на левом конце балки.

$$M_1 = 0,25 M_0$$

$$M_2 = 0,0$$

$$Q_1^{*)} = -1,25 \frac{M_0}{l}$$

$$Q_2 = +0,25 \frac{M_0}{l}$$

$$R_0 = -1,25 \frac{M_0}{l}$$

$$R_1 = +1,50 \frac{M_0}{l}$$

$$R_2 = -0,25 \frac{M_0}{l}$$

Случай б), когда M_0 на обоих концах балки.

$$M_1 = 0,50 M_0$$

$$M_2 = 0,0$$

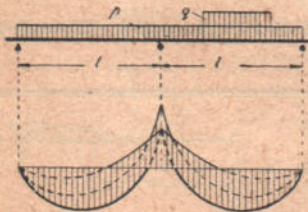
$$Q = -1,50 \frac{M_0}{l}$$

$$Q = +1,50 \frac{M_0}{l}$$

$$R_0 = -1,50 \frac{M_0}{l}$$

$$R_1 = +3,00 \frac{M_0}{l}$$

$$R_2 = -1,50 \frac{M_0}{l}$$



Фиг. 73.

д) Таблица для вычисления расчетных моментов и поперечных сил для двухпролетной балки с равными пролетами (фигура 73 **).

Постоянная равномерно распределенная нагрузка p занимает оба пролета сплошь, временная нагрузка q — поставлена в опасное положение для намеченной искомой величины. При таких условиях для любого сечения балки, взятого на расстоянии x от опоры расчетные величины, вычисляются по формулам:

$$M_{\text{макс.}} = (ap + bq)l^2$$

$$M_{\text{мин.}} = (ap + cq)l^2$$

$$Q_{\text{макс.}} = (ap + \beta q)l$$

$$Q_{\text{мин.}} = (ap + \gamma q)l.$$

*) Q_1 относится к первому пролету
 Q_2 — второму

**) Описание построения эпюры расчетных моментов помещено ниже, в § 9.2. Таблицы для случая неравных пролетов можно видеть, напр., в недавно вышедших „Интерполяционных таблицах для быстрого построения инфлюэнтных линий моментов и поперечных сил. Инж. Г. Гриво. Перев. с 3-го изд. С. М. Тубина. М. 1928. Эти моменты находятся в последних трех столбцах таблиц Гриво.

В таблице приведены коэффициенты a, b, c и α, β, γ для вычисления по этим формулам применительно к абсциссам через $1/10 l$.

Сечение x/l	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
	Действие p	Действие q		Действие p	Действие q	
	a	b	c	α	β	γ
0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,375	+ 0,4375	- 0,0625
0,1	+ 0,0325	+ 0,09875	- 0,00625	+ 0,275	+ 0,3437	- 0,0687
0,2	+ 0,0550	+ 0,06750	- 0,01250	+ 0,175	+ 0,2624	- 0,0874
0,3	+ 0,0675	+ 0,08625	- 0,01875	+ 0,075	+ 0,1932	- 0,1182
0,375	0,0703	+ 0,09375	- 0,02344	—	+ 0,1491	- 0,1491
0,4	+ 0,0700	+ 0,09500	- 0,02500	- 0,025	+ 0,1359	- 0,1609
0,5	+ 0,0625	+ 0,09375	- 0,03125	- 0,125	+ 0,0898	- 0,2148
0,6	+ 0,0450	+ 0,08250	- 0,03750	- 0,225	+ 0,0544	- 0,2794
0,7	+ 0,0175	+ 0,06125	- 0,04375	- 0,325	+ 0,0287	- 0,3537
0,75	—	+ 0,04688	- 0,04688	- 0,375	+ 0,0193	- 0,3943
0,80	- 0,0200	+ 0,03000	- 0,05000	- 0,425	+ 0,0119	- 0,4369
0,85	- 0,0425	+ 0,01523	- 0,05773	- 0,475	+ 0,0064	- 0,4814
0,9	- 0,0675	+ 0,00611	- 0,07361	- 0,525	+ 0,0027	- 0,5277
0,95	- 0,0950	+ 0,00138	- 0,09638	- 0,575	+ 0,0007	- 0,5757
1,00	- 0,1250	+ 0,00000	- 0,12500	- 0,625	+ 0,0000	- 0,6250

е) Таблица для вычисления расчетных моментов и поперечных сил двухпролетной балки с равными пролетами при сосредоточении как постоянной нагрузки P , так и временной G по схемам фиг. 74.

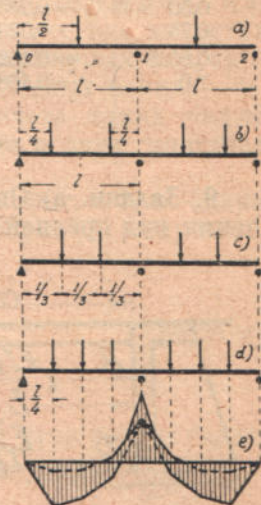
Для всякого сечения, отстоящего на x от опоры, расчетные величины могут быть выражены формулами

$$M_{\text{макс.}} = (aP + bG)l, \quad M_{\text{мин.}} = (aP + cG)l.$$

$$Q_{\text{макс.}} = \alpha P + \beta G, \quad Q_{\text{мин.}} = \alpha P + \gamma G.$$

В таблице приведены коэффициенты a, b, c и α, β, γ для сечений находящихся под грузами и в характерных точках пролета.

При более частом расположении сил, чем на фиг. d), можно считать нагрузку сплошной равномерно распределенной и пользоваться таблицей d).



Фиг. 74.

Загружение по схеме а)

Сечение x/l	Изгибающий момент			Поперечная сила		
	Действие P	Действие G		Действие P	Действие G	
	a	b	c	α	β	γ
0,0	+ 0,0	0,0	0,0	0,3125	+ 0,4063	- 0,0938
0,5	+ 0,1563	+ 0,2031	- 0,0469	1,3750	0,0	- 0,6875
0,842	- 0,0789	0,0	- 0,0789			
1,0	- 0,1875	0,0	- 0,1875			
		Опорная реакция $R_1 =$		- 0,6875	+ 1,3750	0,0

Загружение по схеме б)

0,0	0,0	0,0	0,0	0,7187	+ 0,8594	- 0,1407
0,25	+ 0,1795	+ 0,2148	- 0,0352	- 0,2813	+ 0,1679	- 0,4192
0,75	+ 0,0390	+ 0,1445	- 0,1055			
0,877	- 0,1230	0,0	- 0,1230	1,2813	0,0	- 1,2813
1,0	- 0,2812	0,0	- 0,2812			
Опорная реакция $R_1 =$				2,5625	+ 2,5625	0,0

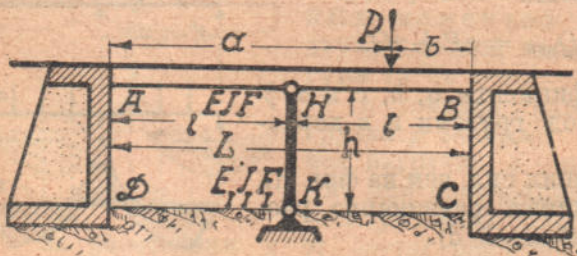
Загружение по схеме с)

0,0	0,0	0,0	0,0	0,6667	+ 0,8333	- 0,1667
0,133	+ 0,2222	+ 0,2778	- 0,0566	- 0,3333	+ 0,2407	- 0,5741
0,667	+ 0,1111	+ 0,2222	- 0,1111			
0,8572	- 0,1430	0,0	- 0,1430	- 1,3333	0,0	- 1,3333
1,0	- 0,3333	0,0	- 0,3333			
Опорная реакция $R_1 =$				2,6667	+ 2,6667	0,0

Загружение по схеме д)

0,0	0,0	0,0	0,0	1,0306	+ 1,2653	- 0,2347
0,25	+ 0,2576	+ 0,3164	- 1,0587	0,0306	+ 0,5749	- 0,5443
0,50	+ 0,2653	+ 0,3826	- 0,1174			
0,75	+ 0,0230	+ 0,1990	- 0,1760	- 0,9694	+ 0,1679	- 1,1373
0,8648	- 0,2025	0,0	- 0,2025	- 1,9694	0,0	- 1,9694
1,0	- 0,4688	0,0	- 0,4688			
Опорная реакция $R_1 =$				3,9388	+ 3,9388	0,0

9. Задачи. а) Определить опорную реакцию и опорный момент для сечения над средней опорой H балки, изображенной на фиг. 75-а), если по



Фиг. 75-а.

середине балка опирается на упругую стойку длины h и жесткости $E_1 J_1 F_1$. Концы балки A и B защемлены. Рассмотреть случай одного сосредоточенного груза P и отдельно — равномерно распределенной нагрузки, занимающей один пролет.

б) При изготовлении колонны HK по фиг. 75-а) заводом допущена ошибка δ :

колонна оказалась меньше расчетной, так что при установке ее на место должен был бы обнаружиться зазор δ . Определить опорную реакцию для этого случая.

$$\text{Ответ: } R = \frac{1}{4} [Pb^2(3l - 2b) - 24EJ\delta] : \left(\frac{6EJh}{E_1 F_1} + l^3 \right).$$

с) Определить опорные моменты, вызываемые разностью температур по обоим сторонам балки $t_1 - t_2$, предполагая, что изменение температуры по высоте балки происходит по линейному закону.

Вдоль оси балки AHB термические условия постоянны.

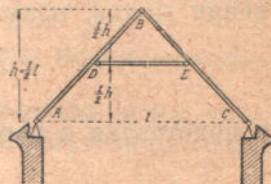
д) Для балки на трех опорах (фиг. 73): 1) построить линию влияния изгибающего момента в сечении, взятом на расстоянии $x = 0,3l$ от левой опоры; 2) определить по этой линии изгибающий момент M_p от собствен-

ного веса балочного перекрытия: p т./м. длины балки, 3) поставить временную равномерно распределенную нагрузку q в опасное положение для положительного момента в сечении x и вычислить значение опасного момента $M_{q \text{ макс.}}$. 4) поставить нагрузку q в опасное положение для отрицательного момента в сечении x и вычислить наибольший отрицательный момент: $M_{q \text{ мин.}}$; 5) Путем откладывания ординат на фиг. 73 в данном сечении x построить расчетные (предельные) моменты:

$$M'_x = M_p + M_{q \text{ макс.}} \text{ и } M''_x = M_p + M_{q \text{ мин.}} \dots \dots \dots (150).$$

Сопоставить полученные расчетные величины моментов с теми которые даются для сечения $x = 0,3l$ по таблице d .

f) Установить предельный „допуск“ (ошибка в размерах) для длины чугунных колонн НК фиг. 75-а) исходя из допустимости 25% отклонения фактических напряжений от расчетных (срав. задачу b).



Фиг. 75-б).

g) Две стропильные ноги связанные в коньке шарниром, опираются на неподвижные точки A и C. Для уменьшения распора и прогиба ноги связаны ригелем DE. Определить усилия ригеля при симметричной и, отдельно, при односторонней равномерно распределенной нагрузке.

h) Построить эпюру моментов для стропильной ноги на фиг. 75 в том случае, если в коньке жесткий угол 90°.

§ 5. Трехпролетная балка. 1. Расчет при неподвижной нагрузке таких балок производится на основании теоремы о трех моментах так как число лишних неизвестных невелико: при шарнирных опорах—два, при одной заземленной—три, а при обоих заземленных концах—четыре*). Покажем на численном примере технику расчета таких балок, параллельно, по теореме о трех моментах и по теореме о двух моментах (способ фокусов).

а) Способ трех моментов. Рассмотрим балку фиг. 76 с одним заземленным концом. Составляя уравнения в общей форме**) получим:

$$\begin{aligned} M_0 l_1 + 2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6R_1' \\ M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6R_2' \dots \dots \dots (151-а). \\ M_2 l_3 + 2M_3 l_3 &= -6R_3' \end{aligned}$$

Но реакция R' от моментной нагрузки есть концевой угол изгиба балки, умноженный на ее жесткость EJ ***; следов., правые части заменяются выражениями:

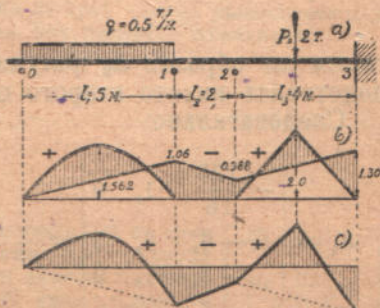
$$\begin{aligned} R_1' &= EJ(\beta_1 + \alpha_2), \\ R_2' &= EJ(\beta_2 + \alpha_3), \quad R_3' = EJ\beta_3 \dots \dots \dots (151-б). \end{aligned}$$

Поэтому после подстановки чисел в правых частях уравнений получим:

$$6R_1' = 6EJ \left(\frac{0,5 \cdot 5^3}{24EJ} + 0 \right) = \frac{125}{8} \text{ мм.}$$

$$6R_2' = 6EJ \left(0 + \frac{2 \cdot 4^2}{16EJ} \right) = 12 \text{ ,,}$$

$$6R_3' = 6EJ \frac{2 \cdot 4^2}{16EJ} = 12 \text{ ,,}$$



Фиг. 76.

*) Не считая продольной силы, которая, обыкновенно, не имеет практического значения.
**) См. напр. наши системы с лишними неизвестными, форм. (157—158).
***) Там же § 3.1 форм. (55).

и вся система уравнений переписывается в форме:

$$7M_1 + M_2 = -\frac{125}{16},$$

$$M_1 + 6M_2 + 2M_3 = -6,$$

$$M_2 + 2M_3 = -3,$$

так как $M_0 = 0$ вследствие шарнирности левой опоры. Покажем решение этих уравнений параллельно двумя способами.

1 Способ: обычное сложение уравнений. Вычитая из второго уравнения третье, получим:

$$M_1 + 5M_2 = -3, \text{ или: } M_1 = -3 - 5M_2;$$

а подставляя в первое, найдем: $7(-3 - 5M_2) + M_2 = -\frac{125}{16}$, или:

$$21 + 34M_2 = +\frac{125}{16}, \text{ откуда } M_2 = \frac{125 - 336}{34 \cdot 16} = -0,388.$$

После этого: $M_1 = -3 + 1,94 = -1,06$ и

$$M_3 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}M_2 = -1,5 + 0,194 = -1,306.$$

2 Способ: определители. Для решения уравнений составляем определитель из коэффициентов при неизвестных M_1, M_2 и M_3 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7, & 1, & 0 \\ 1, & 6, & 2 \\ 0, & 1, & 2 \end{vmatrix} = 7(6 \cdot 2 - 1 \cdot 2) - 1(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0(1 \cdot 2 - 6 \cdot 0) = 68 \quad \dots (152).$$

Неизвестные выражаются дробями:

$$M_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad M_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad M_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_1 получается из Δ путем подстановки свободных членов:

$$-\frac{125}{16}, \quad -6, \quad -3 \dots \dots \dots (153)$$

вместо коэффициентов при M_1 , т. е. вместо:

$$7, \quad 1 \quad 0;$$

таким же образом Δ_2 получается из того же Δ , если свободные члены (153) подставить вместо второго столбца определителя (152), и т. д.

Следовательно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{125}{16}, & 1, & 0 \\ -6, & 6, & 2 \\ -3, & 1, & 2 \end{vmatrix} = -\frac{125}{16}(6 \cdot 2 - 1 \cdot 2) + 6 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -72,13.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7, & -\frac{125}{1625}, & 0 \\ 1, & -6, & 2 \\ 0, & -3, & 2 \end{vmatrix} = -7 \cdot 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{125}{16} \cdot 2 = -26,38.$$

$$\Delta_3^*) = \begin{vmatrix} 7, & 1, & -\frac{125}{16} \\ 1, & 6, & -6 \\ 0, & 1, & -3 \end{vmatrix} = -7 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{125}{16} + 7 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = -88,81$$

А потому:

$$M_1 = -\frac{72,13}{68} = -1,06, \quad M_2 = -\frac{26,38}{68} = -0,39,$$

$$M_3 = -\frac{88,81}{68} = -1,305 \dots \dots \dots (154).$$

По этим моментам построена более тонкая ломанная линия опорных моментов на фиг. 76-b).

Проверкой действий вычисления может служить равенство углов поворота упругой линии слева и справа от каждой промежуточной опоры и — нулевой угол поворота на крайней правой опоре.

б) Способ двух моментов. Покажем, как производится решение той же задачи по теореме о двух моментах **).

Исходим из левой шарнирной опоры, для которой:

$$x_1 = 0, \quad M_{x_1}^0 = 0 \text{ и } M_{x_1} = 0.$$

По этим данным определяем соответствующие: сечение x_2 и момент M_{x_2} для второго пролета. По форм. (169) выпуска „Системы с лишними неизвестными“:

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x_n l_n}{l_n - x_n} - \frac{(l_{n+1} - x_{n+1}) l_{n+1}}{x_{n+1}} = 0 \dots \dots \dots (155)$$

при $l_n = 5\text{ м.}, l_{n+1} = 2\text{ м.}, x_1 = 0$ получим:

$$2x_2(5 + 2) = (2 - x_2)2, \text{ откуда } x_2 = \frac{1}{4} \text{ м.}$$

В таком случае, по форм. (170):

$$\frac{M_{x_n} - M_{x_n}^0}{l_n - x_n} l_n^2 + \frac{M_{x_{n+1}} - M_{x_{n+1}}^0}{x_{n+1}} l_{n+1}^2 = -6EJ(\beta_n + \alpha_{n+1}), \dots (156)$$

*) Проще всего вычислять определитель третьего порядка по Sarrus'у, а именно к определителю

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

приписать внизу первые две его строки в том же порядке, т. е.

написать

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

, а затем составить произведения из трех членов расположенных по трем нисходящим диагоналям, как показано пунктиром;

далее надо составить произведения из трех членов, расположенных по трем восходящим диагоналям, показанным сплошными линиями. Произведения составляются в алгебраическом смысле, т. е. с соблюдением знаков. Наконец, у первых, т. е. нисходящих произведений надо поставить знак „плюс“, а перед последними, восходящими, надо поставить „минус“. Так что, формула для вычисления будет:

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

**) См. Системы с лишними неизвестными § 13.

при отсутствии нагрузки второго пролета, т.е. при $M^0_{x(n+1)} = 0$, найдем:

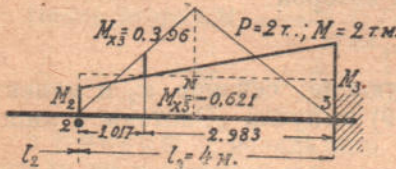
$$\frac{M_{x_2} \cdot 2^2}{1} = -6 \frac{0,5 \cdot 5^3}{24}, \text{ откуда } M_{x_2} = -\frac{125}{128} = -0,977 \text{ тм.}$$

Теперь для третьего пролета, по $x_2 = \frac{1}{4}$ м. и $M_{x_2} = -0,977$ м. из второго пролета, находим: по формуле (155):

$$2(2+4) - \frac{1}{4} \cdot 2 - \frac{(4-x_3)}{x_3} \cdot 4 = 0, \text{ или } x_3 = \frac{56}{55} = 1,017 \text{ м.}$$

и по формуле (156):

$$-\frac{0,977}{7} \cdot 2^2 + \frac{M_{x_3} - 1,017}{1,017} \cdot 4^2 = -6 \cdot \frac{2 \cdot 4^2}{16}, \text{ или } M_{x_3} = 0,396 \text{ тм.}$$



Фиг. 76-d).

Так как в третьем пролете, для $x_3 = 1,017$, изгибающий момент от нагрузки:

$$M^0_{x_3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_3 = 1,017 \text{ т. м.,}$$

то соответствующий момент от одних только опорных моментов:

$$M^M_{x_3} = M_{x_3} - M^0_{x_3} = 0,396 - 1,017 = -0,621 \text{ тм.}$$

Имея этот момент и положение соответствующего ему сечения, намечаем следующим неизвестным момент M_3 в плоскости зацебления 3 и выражаем через M_3 предыдущий опорный момент M_2 из пропорции:

$$\frac{0,621 - M_2}{M_3 - 0,621} = \frac{1,017}{2,983} = 0,341, \text{ откуда: } M_2 = 0,839 - 0,341 M_3.$$

Тогда из условия, что равна нулю сумма углов поворота конца 3 от нагрузки P и от моментов M_2 и M_3 :

$$\frac{2 \cdot 4^2}{16 EJ} - \frac{(0,839 - 0,341 M_3)4}{6 EJ} - \frac{M_3 \cdot 4}{4 EJ} = 0$$

определился величина M_3 :

$$M_3 = \frac{2,161}{1,659} = 1,305.$$

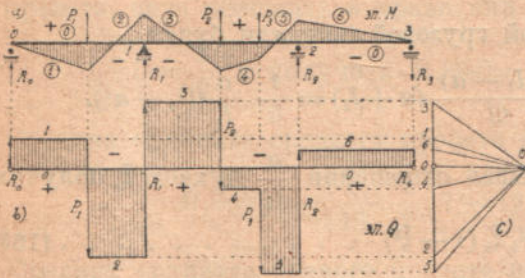
После этого: $M_2 = 0,839 - 0,341 \cdot 1,305 = 0,393$

$$\text{и } M_1 = \frac{8}{7} (0,977 - 0,393) + 0,393 = 1,061.$$

Это в пределах точности вычислений совпадает с результатами, полученными по теореме о трех моментах (см. решения 153).

с) Построение эпюры поперечных сил. Когда построена эпюра моментов, то эпюра поперечных сил проще всего получается графически на основании известной зависимости между многоугольником Вариньона и многоугольником сил. Мы уже пользовались этой зависимостью на фиг. 27 (см. § 2,7); теперь применим ее к неразрезной балке фиг. 77.

Положим, что при двух сосредоточенных грузах во втором пролете эпюра моментов очерчивается ломанной линией 0 1 2 3 4 5 6 0, отмеченной кружками. Принимая ее за многоугольник Вариньона, проводим из полюса *O* фигуры *c*) лучи, параллельные сторонам эпюры, и между прочим — также и горизонтальный луч *O*₀, параллельный жирной замыкающей многоугольника Вариньона. Затем на уровне точки *O* многоугольника сил проводим горизонтальную ось *00* эпюры поперечных сил (фиг. б). Наконец, проектируем вершины многоугольника сил, т.е. точки пересечения его лучей с вертикальной силовой линией 3-5 фигуры *c*), горизонтально, в одинаковые участки многоугольника Вариньона: в первое поле (1) проектируем точку 1 фигуры *c*), во второе поле (2) проектируем точку 2 и т. д. Обединяя горизонтальные проекции ступенчатой линией, получаем искомого эпюру поперечных сил и в то же время — опорные реакции неразрезной балки; последние выражаются высотой уступа фигуры *b*) между полями, размежевываемыми соответствующей опорной вертикалью.



Фиг. 77.

2. Линии влияния. Опорные моменты. В случае шарнирных крайних опор балки мы получим моменты по уравнениям (151), где

$$M_0 = 0 \text{ и } M_3 = 0:$$

$$\begin{aligned} M_1(l_1 + l_2) &= -\frac{1}{2} M_2 l_2 - 3R'_1, \\ M_2(l_2 + l_3) &= -\frac{1}{2} M_1 l_1 - 3R'_2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (157)$$

При построении линий влияния нагрузкой служит $P = 1$, эпюра моментов разрезных пролетов всегда треугольная и всегда находится только на одном пролете; поэтому R' выражается просто через площадь треугольника. Выведем общие выражения для моментов через площади треугольных эпюр.

Для упрощения выражений освободимся от дробей и обозначим $6R'$ — буквою r со значками пролетов, разделяемых опорой, т.е. примем:

$$6R'_1 = r_{12}, \quad 6R'_2 = r_{23} \quad \dots \dots \dots (158)$$

Тогда уравнения трех моментов упростятся:

$$\begin{aligned} 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 &= -r_{12} \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 &= -r_{23} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (159)$$

Разделив на l_2 и вводя обозначение:

$$\frac{2(l_1 + l_2)}{l_2} = k_2 \text{ и } \frac{2(l_2 + l_3)}{l_2} = k'_2 \quad \dots \dots \dots (160)$$

получим:

$$\begin{aligned} k_2 M_1 + M_2 &= -\frac{1}{l_2} r_{12} \\ M_1 + k'_2 M_2 &= -\frac{1}{l_2} r_{23} \end{aligned}$$

Откуда найдем:

$$M_1 = -\frac{1}{l_2} \frac{1}{k_2 k'_2 - 1} (k'_2 r_{12} - r_{23}) \quad \dots \dots \dots (161)$$

$$M_2 = -\frac{1}{l_2} \frac{1}{k_2 k'_2 - 1} (k_2 r_{23} - r_{12}) \quad \dots \dots \dots (162)$$

Теперь рассмотрим положение груза $P = 1$ в разных пролетах. Если груз в первом пролете, то площадь эпюры моментов от груза:

$$\omega_1 = \frac{ab}{2}; \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$$

Реакция правой опоры 1 от этой грузовой площади будет

$$R'_1 = \frac{ab}{2} \left(\frac{a+l_1}{3} \right) \frac{1}{l_1} = \frac{a(l_1-a)}{6l} (a+l_1) = \frac{1}{6} \frac{a}{l_1} (l_1^2 - a^2).$$

Принимая обозначения (158) и называя отношение $\frac{a}{l_1}$ буквою ξ , получим:

$$r_{12} = l_1^2 \xi (1 - \xi^2) \dots \dots \dots (163). \\ r_{23} = 0.$$

Когда груз во втором пролете, то

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{a_2 b_2}{2} \quad \text{и} \quad \omega_3 = 0; \quad \text{поэтому:}$$

$$r_{12} = 6 \cdot \frac{a_2 b_2}{2} \cdot \frac{l_2 + b_2}{3} \cdot \frac{1}{l_2} = l_2^2 \xi_2 (1 - \xi_2) (2 - \xi_2)$$

$$\text{и} \quad r_{23} = 6 \cdot \frac{a_2 b_2}{2} \cdot \frac{l_2 + a_2}{3} \cdot \frac{1}{l_2} = l_2^2 \xi_2 (1 - \xi_2^2) \dots \dots \dots (164).$$

При нахождении груза в третьем пролете

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0 \quad \text{и} \quad \omega_3 = \frac{a_3 b_3}{2}; \quad r_{12} = 0,$$

$$r_{23} = 6 \cdot \frac{a_3 b_3}{2} \cdot \frac{l_3 + b_3}{3} \cdot \frac{1}{l_3} = l_3^2 \xi_3 (1 - \xi_3) (2 - \xi_3) \dots \dots \dots (165).$$

Остается подставить выражения для r в формулы для опорных моментов (162): мы получим значения момента в зависимости от положения груза: $\xi = \frac{a}{l}$, где a — расстояние единичного груза от левой опоры пролета l .

В этих формулах k — постоянные числа, так как зависят только от соотношения пролетов.

Для примера, покажем построение одной из линий влияния в случае равных пролетов.

По (160) находим:

$$k_2 = \frac{2 \cdot 2l}{l} = 4; \quad k'_2 = 4;$$

следовательно: для левого пролета по (161) и (163)

$$M_1 = -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4 - 1} \cdot 4l^2 \xi (1 - \xi^2) = -\frac{4}{15} l \xi (1 - \xi^2) \dots \dots \dots (166).$$

Для среднего пролета по (161) и (164):

$$M_1 = -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{4 \cdot 4 - 1} [4l^2 \xi_2 (1 - \xi_2) (2 - \xi_2) - l^2 \xi_2 (1 - \xi_2^2)] = \\ = -\frac{1}{15} l \xi_2 (7 - 12\xi_2 + 5\xi_2^2) \dots \dots \dots (167)$$

Для ординат правого пролета таким же образом получим:

$$M_1 = + \frac{1}{15} \xi (1 - \xi)(2 - \xi) \dots \dots \dots (168).$$

Например, чтобы получить среднюю (№ 5) ординату линии M_1 для левого пролета, надо положить в уравнении (166):

$$\xi = \frac{1}{2} \text{ и получить } M_{1(0,5)л} = - \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) l = - 0,17.$$

Средняя ордината среднего пролета будет по (167):

$$M_{1(0,5)с} = - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} \left(7 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4}\right) l = - 0,075l.$$

Средняя ордината правого пролета по (168), оказывается:

$$M_{1(0,5)п} = + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(2 - \frac{1}{2}\right) l = \frac{1}{40} l = 0,025l.$$

Остальные ординаты вычисляются таким же образом. По ординатам получается линия фигуры 78, в которой сумма обоих отрицательных площадей составляет $-\frac{7}{60} l^2$, положительная площадь $+\frac{1}{60} l^2$. Линия имеет точку перегиба на расстоянии $0,8l$, считая от опоры № 1 вправо — эта точка отмечена крестиком i .

На чертеже показано положение максимальных ординат и их величина. Значение ординат написано увеличенным в 10^5 раз и притом от груза $P=1$, так что, при нахождении на балке груза P надо взятую под грузом ординату помножить на $10^{-5}P$; если есть несколько грузов, надо составить $\Sigma Py \cdot 10^{-5}$.

3. Изгибающие моменты в промежуточных сечениях балки. Их получают таким же образом, как в двухпролетной балке. В каком-нибудь сечении левого пролета

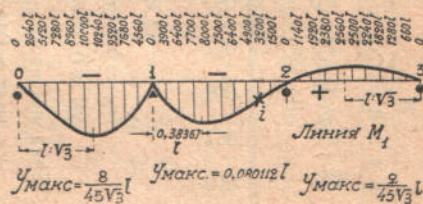
$$M_x = M_x^0 + \frac{x}{l_1} M_1;$$

для сечения среднего пролета

$$M_x = M_x^0 + \frac{l_2 - x}{l_2} M_1 + \frac{x}{l_2} M_2 \dots \dots \dots (169)$$

Очевидно, для получения линии влияния неразрезной балки надо выражение линии момента простой балки для сечения x , сложить с выражениями для линий опорных моментов, подобно тому, как сделано в форм. (133 — 137). Фактически сложение касается лишь того пролета, где находится сечение x и треугольная линия простой балки, в остальных пролетах имеют место только линии опорных моментов, ибо там члены простой балки — нулевые. Мы приводим результаты сложения линий по форм. (169) в виде уравнений, помещенных в нижеследующих таблицах и на чертежах, под соответствующим пролетом.

Если ординаты на чертежах и в таблицах написаны в виде целых чисел, то они увеличены в 10^5 раз и разделены, для простоты, на l , так что, при пользовании таблицами результаты вычислений надо разделить на 10^5 и умножить на l .



Фиг. 78.

Таблица данных для линий влияния изгибающего момента в разных сечениях трехпролетной балки

Сечения первого пролета	О р р.			д и н а				Т ы													
	Левого пролета			Среднего пролета				Правого пролета													
$\xi = \frac{a}{l}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
+																					
<p>Сечение № 1: $x=0,1l$. Тип линии: фиг. 79.</p>																					
0	8736	7488	6272	5104	4000	2976	2048	1232	544	0	390	640	770	800	750	640	490	320	150	0	
<p>Для $a < x=0,1l$: $y^u = -\frac{a}{150} \left(131 + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$ Для $a > x=0,1l$: $y^u = \frac{a}{150} \left(-19 + 4 \frac{a^2}{l^2} + 15 \frac{l}{a} \right)$ $\omega_1 = 0,04l^2$ Точка перегиба i: $a = 0,8l$ $\omega_2 = -0,005l^2$</p>																					
0	8736	7488	6272	5104	4000	2976	2048	1232	544	0	390	640	770	800	750	640	490	320	150	0	
<p>Для $a < x=0,2l$: $y^u = \frac{1}{75} a \left(14 + \frac{a^2}{l^2} \right)$ Для $a > 0,2l$: $y^u = \frac{1}{75} a \left(-19 + 15 \frac{a}{l} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $\omega_1 = 0,07l^2$</p>																					
0	7472	14976	12544	10208	800	5952	4096	2464	1088	0	780	1280	1540	1600	1500	1280	980	640	300	0	
<p>Сечение № 2: $x=0,2l$. Тип линии: фиг. 79.</p>																					
0	7472	14976	12544	10208	800	5952	4096	2464	1088	0	780	1280	1540	1600	1500	1280	980	640	300	0	
<p>Для $a < x=0,3l$: $y^u = \frac{a}{50} \left(31 + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$ Для $a > 0,3l$: $y^u = \frac{a}{50} \left(-19 + 15 \frac{a}{l} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$ $\omega_1 = 0,06l^2$</p>																					
0	6208	12464	18816	15312	12000	8928	6144	3696	1632	0	1170	1920	2310	2400	2250	1920	1470	960	450	0	
<p>Сечение № 3: $x=0,3l$. Тип линии: фиг. 79.</p>																					
0	6208	12464	18816	15312	12000	8928	6144	3696	1632	0	1170	1920	2310	2400	2250	1920	1470	960	450	0	

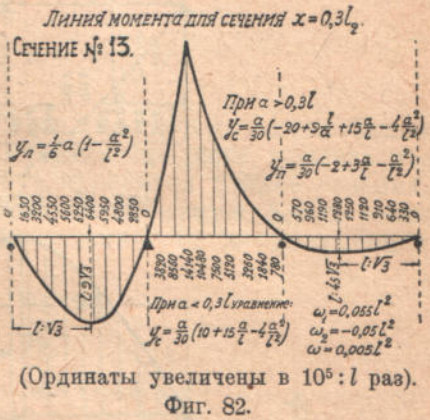
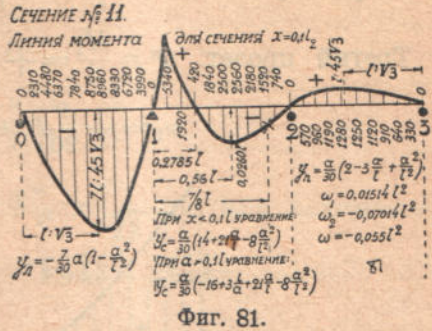
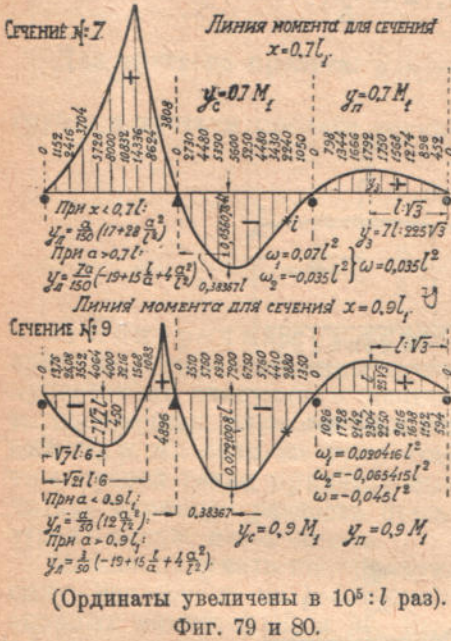
$\omega_2 = -0,015l^2$, $\omega = +0,075l^2$

$\omega_1 = 0,09l^2$

<p>Сечение № 4: $x = 0,4l$. Тип линии фиг. 79.</p>	<p>для $a < 0,4l$: $y_x = \frac{a}{75} \left(37 + 8 \frac{a^2}{l^2} \right)$ для $a > 0,4l$: $y_x = \frac{2a}{75} \left(-19 + 15 \frac{l}{a} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right)$</p>	<p>$y_c = 0,4M_1$ $a_m = 0,38367l$ $y_m = -0,0320448l$ перегиб при $a_1 = 0,8l$ $\omega_1 = +0,1l^2$, $\omega_2 = -0,02l^2$</p>	<p>$y_n = 0,4M_1$ $b_m = l: \sqrt[3]{3}$ $y_m = 4l: 225 \sqrt[3]{3}$ $\omega = +0,063l^2$</p>	<p>0 4914 9952 15088 20416 16000 11904 8192 4928 2176</p>	<p>0 3680 7440 11360 15520 20000 14880 10240 6160 2720</p>	<p>0 3200 3850 4000 4300 3750 3200 2450 1600 750</p>	<p>$y_c = 0,5M_1$ $a_m = 0,38367l$ $y_m = -0,040056l$ перегиб при $a_1 = 0,8l$ $\omega_1 = +0,1l^2$, $\omega_2 = -0,025l^2$</p>	<p>$y_n = 0,5M_1$ $b_m = l: \sqrt[3]{3}$ $y_m = l: 45 \sqrt[3]{3}$ $\omega = +0,075l^2$</p>	<p>0 330 640 910 1120 1250 1280 1190 960 570 0</p>	<p>0 2416 4928 7632 10624 14000 17856 12288 7392 3264</p>	<p>0 4800 4620 4800 4300 3840 2940 1920 900</p>	<p>$y_c = 0,6M_1$ $a_m = 0,38367l$ $y_m = -0,0480672l$ перегиб при $a_1 = 0,8l$ $\omega_1 = 0,09l^2$, $\omega_2 = -0,03l^2$</p>	<p>$y_n = 0,6M_1$ $b_m = l: \sqrt[3]{3}$ $y_m = 2l: 75 \sqrt[3]{3}$ $\omega = 0,06l^2$</p>	<p>0 396 768 1092 1344 1500 1536 1428 1152 684 0</p>	<p>0 112 96 176 +832 +2000 +3808 +6384 +9856 +4852</p>	<p>0 -1200 -2560 -3920 -5120 -6000 -6400 -6160 -5120 -1200</p>	<p>$y_c = 0,8M_1$ $y_m = -0,0640896l$ при $a_m = 0,38367l$; перегиб при $a_1 = 0,8l$ $\omega_1 = 0,0402088l^2$ $\omega_2 = -0,0402088l^2$</p>	<p>$y_n = 0,8M_1$ $y_3 = 8l: 225 \sqrt[3]{3}$ при $b_m = l: \sqrt[3]{3}$ $\omega = 0,0$</p>	<p>0 +528 +1024 +1456 +192 +2000 +2048 +1904 +1536 +912 0</p>	<p>Сечения по $x = 0,7l$ и по $x = 0,9l$ представлены на фиг. 79 и 80.</p>
---	--	---	--	---	--	--	---	--	--	---	---	---	---	--	--	--	--	--	---	--

	О	Р	Д	И	Н	А	Т	Ы	
Сечения среднего пролета	Лового пролета		Среднего пролета					Правого пролета	
Сечение № 12: $x = 0,2l_2$	1980	3840	5460	6720	7500	7680	7140	5760	3420
тип линии: фиг. 81, но с нулевыми ординатами правого пролета	$y_n = -\frac{a}{5} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $y_m = -2l:15\sqrt{3}$ при $a_m = l: \sqrt{3}$		Для $a < 0,2l$ уравнение: $y_c = \frac{a}{5} \left(2 + 3\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$, для $a > 0,2l$ уравнение: $y_c = \frac{a}{5} \left(-3 + \frac{l}{a} + 3\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$					$y_n = 0$ $\omega_1 = 0,03l^2$ $\omega_2 = -0,05l^2$ $\omega = -0,02l^2$	
Сечение № 14: $x = 0,4l_2$	1320	2580	3640	4480	5000	5120	4760	3840	2280
тип линии: фиг. 82	$y_n = -\frac{2}{15} a \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$; $y_m = -4l:45\sqrt{3}$ при $a_m = l: \sqrt{3}$		Для $a < 0,4l$ уравнение: $y_c = \frac{a}{15} \left(4 + 6\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$; для $a > 0,4l$ уравнение: $y_c = \frac{a}{15} \left(-11 + 6\frac{l}{a} + 6\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $\omega_1 = 0,07l^2$					$y_n = -\frac{a}{15} \left(2 - 3\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ $y_m = -2l:45\sqrt{3}$ при $a_m = l: \sqrt{3}$ $\omega_2 = -0,05l^2$ $\omega = 0,02l^2$ <small>* а отсчитывается слева на право</small>	
Сечение № 15: $x = 0,5l_2$	990	1920	2730	3360	3750	3840	3570	2880	1710
тип линии: фиг. 82	$y_n = -\frac{1}{10} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$ $y_m = -l:15\sqrt{3}$ при $a_m = l: \sqrt{3}$		Для $a < 0,5l$ уравнение: $y_c = \frac{1}{10} a \left(2 + 3\frac{a}{l}\right)$; для $a > 0,5l$ уравнение: $y_c = \frac{1}{10} a \left(-8 + 5\frac{a}{l} + 3\frac{a}{l}\right)$					$y_n = -\frac{a}{10} \left(2 - 3\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ $y_m = -l:15\sqrt{3}$ при $a_m = l: \sqrt{3}$ $\omega_1 = 0,075l^2$; $\omega_2 = -0,05l^2$ $\omega = 0,025l^2$	

Как и прежде, индексы „л, с, n“ указывают на принадлежность к левому, среднему или правому пролету балки, a — обозначает расстояние груза $P=1$ от левой опоры того пролета, где стоит груз; максимальные ординаты линии обозначены y с индексом пролета; сумма положительных площадей, очерченных линией, обозначена ω_1 , а сумма отрицательных — ω_2 , алгебраическая сумма всех площадей обозначена ω .



4. Реакции и поперечные силы. а) Реакция R_0 левой опоры левого пролета, составляется из реакции простой разрезной балки 0—1 и реакции той же балки, вызванной опорным моментом M_1 . Поэтому для получения ординат линии влияния первого пролета надо из уравнения реакции простой балки при $P=1$:

$$A_0 = 1 \cdot \frac{l-a}{l} = 1 - \frac{a}{l} \text{ вычесть уравнение } \frac{M_1}{l} \text{ по форм. (162—166).}$$

Очевидно, что на протяжении среднего и правого пролетов линия влияния реакции R_0 имеет те же ординаты, что M_1 (только освобожденные от l), ибо на этих пролетах нет ординат A_0 .

Таким образом получается фиг. 83.

Если из ординат левого пролета вычтем единицу, как показано пунктиром внизу под осью балки, то получим линию влияния поперечных сил для всех сечений левого пролета. На фиг. 83 зигзагом $0ab$ 123 отмечена линия влияния Q для сечения, взятого на расстоянии $0,4l$ от левой опоры.

Все ординаты линии выписаны на чертежах, при чем, для сокращения письма, они умножены на 10^3 , так что, результат вычисления по этим цифрам должен быть разделен на 1000. Только для особенных точек (максим.) приведены натуральные ординаты.

Фиг. 83. Ординаты увеличены в 10^3 раз.

Первый пролет. Уравнение верхней линии

$$y^1 = 1 - \frac{19}{15} \cdot \frac{a}{l} + \frac{4}{15} \cdot \frac{a^3}{l^3}$$

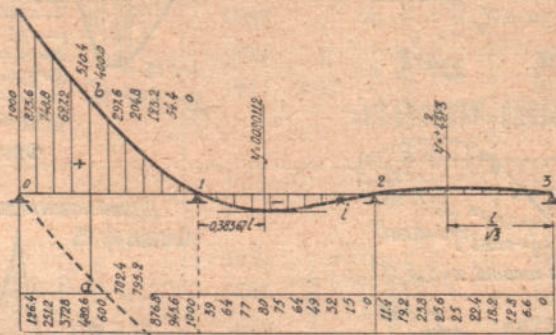
Уравнение нижней ветви:

$$y^a = -\frac{19}{15} \cdot \frac{a}{l} + \frac{4}{15} \cdot \frac{a^3}{l^3}$$

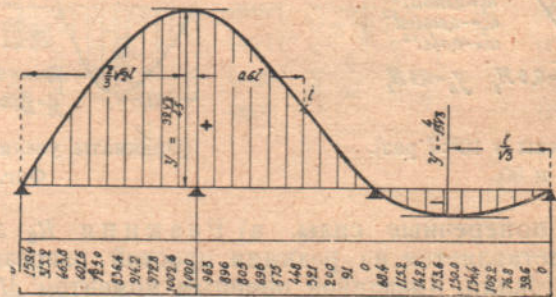
Второй пролет. $y^b = \frac{M_1}{l} = -\frac{1}{15} \cdot \frac{a}{l} \left(7 - 12 \frac{a}{l} + 5 \frac{a^2}{l^2} \right)$

Третий пролет: $y^c = \frac{M_1}{l} = +\frac{1}{15} \cdot \frac{a}{l} \left(2 - 3 \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$

$$\omega_1 = +\frac{9}{20} l, \quad \omega_2 = -\frac{1}{20} l, \quad \omega = \frac{2}{5} l.$$



Фиг. 83. Ординаты увеличены в 10^3 раз.



Фиг. 84. Ординаты увеличены в 10^3 раз.

Расчетные величины поперечной силы для сечения, отстоящего от левой опоры на m -ую долю пролета, т. е. для $x = ml$:

$$Q_{\text{макс.}} = \frac{1}{60} ql (27 - 60m + 38m^2 - 4m^4),$$

$$Q_{\text{мин.}} = \frac{1}{60} ql (4m^4 - 38m^2 - 3) \text{ от врем. нагрузки } q;$$

$$Q = \frac{1}{5} pl (2 - 5m) \text{ от собственного веса } p.$$

б) Для реакции R_1 средней опоры надо воспользоваться общей формулой неразрезной балки:

$$R_1 = R_1^0 + \frac{M_0 - M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} \dots \dots \dots (170^*).$$

Если применить ее к случаю равных пролетов и принять $M_0 = 0$, то получится:

$$R_1 = R_1^0 + \frac{1}{l} (M_2 - 2M_1) \dots \dots \dots (171).$$

*) См., например, наши системы с лишними неизвестными, § 13,6 форм. (162).

Так как линия M_2 при равных пролетах такова же, как линия M_1 , только зеркально повернутая, то все члены этого выражения в нашем распоряжении: получается линия, изображенная на фиг. 84.

Уравнение линии для первого пролета:

$$y = \frac{8}{5} \cdot \frac{a}{l} - \frac{3}{5} \cdot \frac{a^3}{l^3}.$$

Для второго пролета: $y = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{l} - \frac{9}{5} \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3}.$

Для третьего пролета: $y = -\frac{2}{5} \left(2 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} \right)$, ибо при нахождении

грузов в третьем пролете реакция

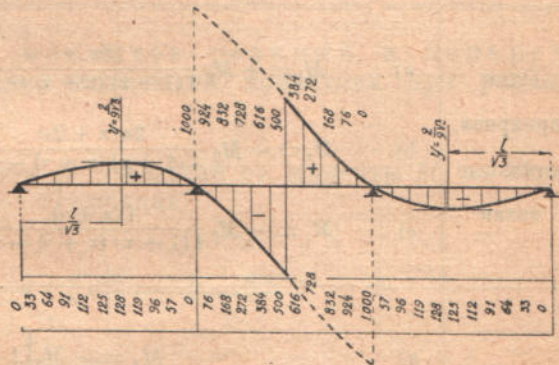
$$R_1 = -\frac{6M_1}{l}.$$

$$\omega_1 = +\frac{6}{5}l, \quad \omega_2 = -\frac{1}{10}l, \quad \omega = +\frac{11}{10}l.$$

с) Поперечная сила в сечениях среднего пролета. Линия влияния поперечной силы в каком-нибудь сечении среднего пролета получается по следующим данным. Когда груз находится правее сечения, то поперечная сила составляется из алгебраической суммы левых реакций R_0 и R_1 ; если же груз станет влево от сечения, то из полученной уже правой ветви придется вычитать единицу: разность представит левую ветвь линии.

Можно получить поперечную силу так же и на основании опорных моментов M_1 и M_2 . Выделим средний пролет с нагрузкой $F=1$ и опорными моментами. До тех пор, пока груз правее сечения, поперечную силой будет

$$Q^0 + \frac{M_2 - M_1}{l} = A^0 + \frac{M_2 - M_1}{l},$$



Фиг. 85. Ординаты увеличены в 10^3 раз.

так что, надо просуммировать

линии опорных моментов с линией левой реакции. Когда груз перейдет налево, — надо из полученной уже суммы вычесть единицу.

На фиг. 85 очерчена жирнее линия влияния поперечной силы для середины среднего пролета. Если от правой ветви переходить к левой по соседним вертикалям, то получится ряд линий для других сечений среднего пролета. Уравнения для участков линии составятся следующим образом:

В первом пролете: $y = -\frac{5}{4} \frac{M_1}{l}.$

Во втором пролете: верхняя ветвь

$$y = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} + \frac{2}{3} \frac{a^3}{l^3},$$

нижняя ветвь:

$$y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} + \frac{2}{3} \frac{a^3}{l^3}.$$

В третьем пролете: $y = -5 \frac{M_1}{l} = + \frac{5}{4} \frac{M_2}{l}$

Расчетные поперечные силы для $x = ml$:

$$Q_{\max.} = \frac{1}{12} ql (7 - 12m + 4m^2 + 4m^3 - 2m^4),$$

$$Q_{\min.} = \frac{1}{12} ql (-1 - 4m^2 - 4m^3 + 2m^4) \text{ — от врем. нагрузки } q;$$

$$Q = \frac{1}{2} pl (1 - 2m) \text{ — от собственного веса } p.$$

5. Справочные и расчетные таблицы. а) Таблица опорных моментов при загрузении одного пролета по одной из следующих схем при неравных пролетах: l , xl и vl .



Фиг. 86.

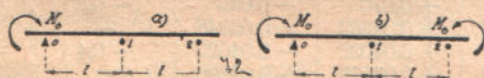
Опоры:	Схема за- грузки	Опорные моменты, выраженные через момент простой балки $M_0 = ql^2/8$.
Одна шарнирная, остальные катки	а)	$M_1 = + M_0 \frac{2x \cdot v}{4(1+x)(x+v) - x^2}, M_2 = - M_0 \frac{2v(x+v)}{4(1+x)(x+v) - x^2}$
	б)	$M_1 = - M_0 \frac{2x(x+2v)}{4(1+x)(x+v) - x^2}, M_2 = - M_0 \frac{2x(2+x)}{4(1+x)(x+v) - x^2}$
	в)	$M_1 = - M_0 \frac{4(x+v)}{4(1+x)(x+v) - x^2}, M_2 = + M_0 \frac{2x}{4(1+x)(x+v) - x^2}$
Левая (0) — Защемлен- ная, осталь- ные — катки.	а)	$M_A = - M_0 \left[1 - \frac{x+v}{(3+4x)(x+v) - x^2} \right]$
		$M_1 = - M_0 \frac{2(x+v)}{(3+4x)(x+v) - x^2}$
		$M_2 = + M_0 \frac{x}{(3+4x)(x+v) - x^2}$
	б)	$M_A = + M_0 \frac{x(x+2v)}{(3+4x)(x+v) - x^2}$
		$M_1 = - M_0 \frac{2x(x+2v)}{(3+4x)(x+v) - x^2}$
		$M_2 = - M_0 \frac{x(3+2x)}{(3+4x)(x+v) - x^2}$
в)	$M_A = - M_0 \frac{xv}{(3+4x)(x+v) - x^2}, M_1 = + M_0 \frac{2xv}{(3+4x)(x+v) - x^2}$	
		$M_2 = - M_0 \frac{v(3+4x)}{(3+4x)(x+v) - x^2}$

Опоры:	Схема загрузки	Опорные моменты, выраженные через момент простой балки $M_0 = ql^2/8$.
Обе крайние опоры (0 и 3) — заземленные, средние — катки	a)	$M_A = -M_0 \left[1 - \frac{\frac{1}{3}(4x+3v)}{4x(1+z+v)+3v} \right], \quad M_1 = -M_0 \frac{\frac{2}{3}(4x+3v)}{4x(1+z+v)+3v},$ $M_2 = +M_0 \frac{\frac{4}{3}z}{4x(1+z+v)+3v}, \quad M_B = -M_0 \frac{\frac{2}{3}z}{4x(1+z+v)+3v}.$
	b)	$M_A = +M_0 \frac{\frac{2}{3}z(2x+3v)}{4x(1+z+v)+3v}, \quad M_1 = -M_0 \frac{\frac{4}{3}z(2x+3v)}{4x(1+z+v)+3v},$ $M_2 = -M_0 \frac{\frac{4}{3}z(3+2x)}{4x(1+z+v)+3v}, \quad M_B = +M_0 \frac{\frac{2}{3}z(3+2x)}{4x(1+z+v)+3v},$
	c)	$M_A = -M_0 \frac{\frac{2}{3}zv}{4x(1+z+v)+3v}, \quad M_1 = +M_0 \frac{\frac{4}{3}zv}{4x(1+z+v)+3v},$ $M_2 = -M_0 \frac{\frac{2}{3}v(3+4x)}{4x(1+z+v)+3v}, \quad M_B = -M_0 \left[1 - \frac{\frac{1}{3}v(3+4x)}{4x(1+z+v)+3v} \right]$

б) Таблица опорных моментов реакций и поперечных сил при загрузении балки концевыми моментами при равных пролетах.

Случай а): Момент M_a на одном конце балки.

Случай б): Моменты M_a на обоих концах.



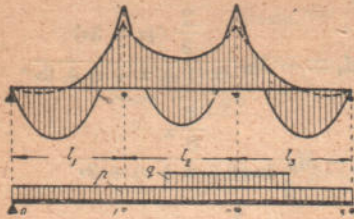
Фиг. 87.

Опорные моменты	$M_1 =$	$M_2 =$	$M_3 =$	
а) в случае если M_a на одном конце балки	-0,2627	+0,0667	0,0	от M_a
б) в случае если M_a на обоих концах.	-0,2000	-0,2000	0,0	
Поперечные силы	$Q_1 =$	$Q_2 =$	$Q_3 =$	
В случае а)	-1,0667	+0,3333	-0,0667	от $\frac{M_a}{l}$
В случае б)	-1,2000	0,0	+1,2000	
Опорные R_0 реакции	R_1	R_2	R_3	
В случае а)	-1,2667	+1,6000	-0,4000	от $\frac{M_a}{l}$
В случае б)	-1,2000	+1,2000	-1,2000	

с) Таблица для вычисления расчетных моментов и поперечных сил трехпролетной балки с равными пролетами.

Постоянная равномерно распределенная нагрузка p занимает сплошь все пролеты балки, временная нагрузка q занимает положение, опасное для намеченной искомой величины.

Для любого сечения балки, отстоящего на x от опоры, расчетные величины могут быть вычислены по формулам:



Фиг. 88.

$$M_{\text{макс.}} = (ap + bq) l^2,$$

$$M_{\text{мин.}} = (ap + cq) l^2,$$

$$Q_{\text{макс.}} = (xp + \beta q) l,$$

$$Q_{\text{мин.}} = (xp + \gamma q) l.$$

В таблице приведены коэффициенты, a , b , c и α , β , γ для вычисления по этим формулам значения M и Q через $\frac{1}{10}$ пролета.

Сечение	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
	Действие p	Действие q		Действие p	Действие q	
$m = \frac{x}{l_1}$	a	b	c	α	β	γ

Первый пролет

0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,4	+ 0,4500	- 0,0500
0,1	+ 0,035	+ 0,040	- 0,005	+ 0,3	+ 0,3560	- 0,0563
0,2	+ 0,060	+ 0,070	- 0,010	+ 0,2	+ 0,2752	- 0,0752
0,3	+ 0,075	+ 0,090	- 0,015	+ 0,1	+ 0,2065	- 0,1065
0,4	+ 0,080	+ 0,100	- 0,020	0	+ 0,1496	- 0,1496
0,5	+ 0,075	+ 0,100	- 0,025	- 0,1	+ 0,1042	- 0,2042
0,6	+ 0,060	+ 0,090	- 0,030	- 0,2	+ 0,0694	- 0,2694
0,7	+ 0,035	+ 0,070	- 0,035	- 0,3	+ 0,0443	- 0,3443
0,7895	+ 0,00414	+ 0,04362	- 0,03948	—	—	—
0,8	0,0	+ 0,04022	- 0,04022	- 0,4	+ 0,0280	- 0,4280
0,85	- 0,02125	+ 0,02773	- 0,04898	—	—	—
0,9	- 0,04500	+ 0,02042	- 0,06542	- 0,5	+ 0,0193	- 0,5193
0,95	- 0,07125	+ 0,01706	- 0,08831	—	—	—
1,0	- 0,10000	+ 0,01667	- 0,11667	- 0,6	+ 0,0167	- 0,6167

Второй пролет

0,0	- 0,10000	+ 0,01667	- 0,11667	+ 0,5	+ 0,5833	- 0,0833
0,05	- 0,07625	+ 0,01408	- 0,09033	—	—	—
0,10	- 0,05500	+ 0,01514	- 0,07014	+ 0,4	+ 0,4870	- 0,0870
0,15	- 0,03625	+ 0,02053	- 0,05678	—	—	—
0,20	- 0,020	+ 0,030	- 0,050	+ 0,3	+ 0,3991	- 0,0991
0,2764	0	+ 0,050	- 0,050	—	—	—
0,3	+ 0,005	+ 0,055	- 0,050	+ 0,2	+ 0,3210	- 0,1210
0,4	+ 0,020	+ 0,070	- 0,050	+ 0,1	+ 0,2537	- 0,1537
0,5	+ 0,025	+ 0,075	- 0,050	0	+ 0,1979	- 0,1979

Опорные реакции: $R_0 \text{ макс.} = (0,40p + 0,45q) l$; $R_0 \text{ мин.} = (0,40p - 0,050q) l$.

$R_1 \text{ „} = (1,10p + 1,20q) l$; $R_1 \text{ „} = (1,10p - 0,10q) l$.

d) Таблица для вычисления расчетных моментов и поперечных сил при нагрузке, сосредоточенной в определенных пунктах, подобно тому, как на фиг. 74.

Случай сосредоточения нагрузки P и G по середине пролета, применительно к схеме 74-а).

Пролет	Сечение $m = \frac{x}{l}$	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
		Действие P	Действие G		Действие P	Действие G^1	
			a	b		c	α
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,3500	+ 0,4250	- 0,0750
	0,5	+ 0,1750	+ 0,2125	- 0,0375	- 0,6500	+ 0,0250	- 0,6750
	0,833	- 0,0416	+ 0,0208	- 0,0625			
	1,0	- 0,1500	+ 0,0250	- 0,1750			
Опорная реакция $R_1 =$					1,1500	+ 1,30000	- 0,1500
2	0,0	- 0,1500	+ 0,0205	- 0,175	0,50000	+ 0,6250	- 0,1250
	0,15	- 0,0750	+ 0,0063	- 0,0813			
	0,20	- 0,0500	+ 0,0250	- 0,0750			
	0,50	+ 0,1000	+ 0,1750	- 0,075			

Случай сосредоточения двух грузов в четвертях пролета (применительно к фиг. 74-б).

1	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,7750	+ 0,8875	- 0,1125
	0,25	+ 0,1938	+ 0,2219	- 0,0281	- 0,2250	+ 0,2000	- 0,4250
	0,75	+ 0,0813	+ 0,1654	- 0,0844	- 1,2250	+ 0,0375	- 1,2625
	0,870	- 0,0655	+ 0,0325	- 0,0980			
	1,00	- 0,2250	+ 0,0375	- 0,2625			
Опорная реакция $R_1 =$					2,2250	+ 2,4500	- 0,2250
2	0,0	- 0,2250	+ 0,0375	- 0,2625	+ 1,0000	+ 1,1875	- 0,1875
	0,1125	- 0,1125	+ 0,0164	- 0,1290			
	0,20	- 0,0250	+ 0,0875	- 0,1125			
	0,25	+ 0,0250	+ 0,1375	- 0,1125			
	0,50	+ 0,0250	+ 0,1375	- 0,1125			
					0,0	+ 0,4050	- 0,4050

Случай сосредоточения двух грузов в третях пролета (применительно к фиг. 74-с).

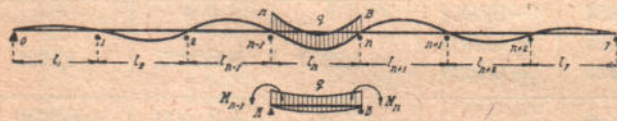
1	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,7333	+ 0,8667	- 0,1333
	0,333	+ 0,2444	+ 0,2889	- 0,0444	- 0,2667	+ 0,2790	- 0,5457
	0,667	+ 0,1555	+ 0,2444	- 0,0889	- 1,2667	+ 0,0444	- 1,3111
	0,849	- 0,0750	+ 0,0377	- 0,1127			
	1,00	- 0,2667	+ 0,0444	- 0,3111			
Опорная реакция $R_1 =$					- 2,2667	+ 2,5333	- 0,2667
2	0,0	- 0,2667	+ 0,0444	- 0,311	+ 1,00000	+ 1,2222	- 0,2222
	0,133	- 0,1333	+ 0,0133	- 0,1467			
	0,20	- 0,0667	+ 0,0667	- 0,1333			
	0,333	+ 0,0667	+ 0,2000	- 0,1333			
	0,500	+ 0,0667	+ 0,2000	- 0,1333			
					0,0	+ 0,5333	- 0,5333

Случай сосредоточения трех грузов в четвертях пролета (примени-тельно к фиг. 74-d).

Пролет	Сечение $m = \frac{x}{l}$	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
		Действие P	Действие G		Действие P	Действие G^1	
			a	b		c	α
1	0,0	0,0	0,0	0,0	+ 1,1250	+ 1,3125	- 0,1875
	0,25	+ 0,2813	+ 0,3281	- 0,0469	+ 0,1250	+ 0,6250	- 0,50000
	0,50	+ 0,3125	+ 0,4062	- 0,0938			
	0,75	+ 0,0938	+ 0,2344	- 0,1406			
	0,837	- 0,1070	+ 0,053	- 0,1605	- 0,8750	+ 0,2250	- 1,10000
	1,00	- 0,3750	+ 0,0625	- 0,4375	- 1,8750	+ 0,0625	- 1,9375
Опорная реакция $R_1 =$					3,3750	+ 3,7500	- 0,3750
2	0,0	0,3750	+ 0,0625	- 0,4375	+ 1,50000	+ 1,8125	- 0,3125
	0,125	- 0,1875	+ 0,0232	- 0,2107			
	0,20	- 0,0750	+ 0,1125	- 0,1875			
	0,25	0,0	+ 0,1875	- 0,1875			
	0,50	- 0,1250	+ 0,3125	- 0,1875			

Подробные таблицы для случаев неравных пролетов приведены в выше-цитированной книге Г. Грио.

§ 6. Многопролетные балки. 1. Загрузка одного пролета. Загрузим только один пролет балки, например n -ый, оставляя прочие без всякой нагрузки. При условии двухсторонней связи балки с опорами *), очевидно,



Фиг. 89.

нагрузка изогнет балку по волнистой кривой. На фигуре 89 представлен вид этой кривой с искажением ординат.

Выделяя нагруженный пролет, мы получаем одно-

пролетную балку с заделанными концами, ибо вследствие непрерывности балки соседние пролеты $(n-1)$ и $(n+1)$ -ый упруго препятствует свободному изгибу пролета n . Поэтому к нагруженному пролету можно применить теорию упруго заделанных балок § 3.

Эпюра моментов однопролетной балки с заделанными концами составляется из двух частей: 1) из эпюры M^0 от нагрузки, — эта эпюра не зависит от способа заделки концов пролета;

2) из эпюры опорных моментов, имеющей форму трапеции с основаниями на опорах, — эти моменты зависят от податливости заделки концов пролета.

Чтобы учесть эту податливость приложим единичный момент к той части неразрезной балки, которая находится слева от нагруженного пролета и которая является для левой опоры пролета упругой заделкой (фиг. 90), и определим угол поворота ζ . Благодаря последнему определится фокальная точка и может быть получена искомая трапеция опорных

*) На практике обыкновенно не допускается отделение балки от опор даже в случае отрицательных опорных реакций, вызываемых временной нагрузкой, так как постоянная нагрузка обыкновенно дает значительно большую положительную реакцию. В том случае, когда все же получается отрицательный результат, принимают специальные меры против поднятия балки над опорой.

моментов. Так как на пролете $(n-1)$ нет нагрузки, а лишь опорные моменты, то

$$\zeta = \frac{M_{n-2}l_{n-1}}{3EJ} + \frac{M_{n-1}l_{n-1}}{6EJ} = \frac{l_{n-1}}{6EJ} (2M_{n-1} + M_{n-2}) \dots (172).$$

Подставляя в форм. (89), а именно в выражение $a_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{\zeta}{\gamma}}$ и пользу-

ясь $\gamma = \frac{1 \cdot l_n}{6EJ}$ получим:

$$a_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l_{n-1}}{6EJ} (2M_{n-1} + M_{n-2}) \frac{6EJ}{1 \cdot l_n}}, \text{ а после выноса } M_{n-1} = 1 \text{ за}$$

скобки и замены отношения опорных моментов $M_{n-2} : M_{n-1}$ равным отношением фокальных расстояний $a_{0(n-1)} : b_{0(n-1)}$:

$$a_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \right)} \dots (173).$$

Таким же образом получится и выражение для b'_0 .

По этой общей формуле определяются фокусы для любого пролета и, конечно, также и для пролета нагруженного. Остается ими воспользоваться для получения эпюры опорных моментов.

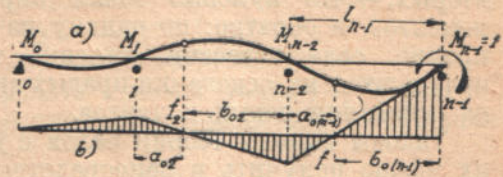
Как указывалось в § 3.3, для графического решения, 1) через фокусы проводят вертикальные прямые, 2) на каждой из опорных вертикалей откладывают угол изгиба противоположного конца простой балки только от нагрузки пролета, разделивши этот угол на $\gamma = 1 \cdot l : 6EJ$, например, откладывают $AA' = \frac{\beta^0}{\gamma}$ и $BB' = \frac{\alpha^0}{\gamma}$, 3) соединяют концы опорных ординат A' и B' с противоположными опорами B и A наклонными прямыми. Точки пересечения φ и φ' этих наклонных с фокальными вертикалями дают направление для замыкающей линии эпюры опорных моментов.

Таким образом, задача расчета неразрезной балки при загрузении одного ее пролета разрешена:

- 1) устанавливают фокусы пролетов, не только загруженного, но и всех предыдущих и последующих (форм. 173),
- 2) определяют опорные моменты загруженного пролета (форм. 91),
- 3) по опорным моментам загруженного пролета определяют опорные моменты свободных пролетов, расположенных слева и справа (фиг. 91). Остановимся на отдельных частях этой программы.

2. Фокусы пролетов. а) Положения фокусов. В каждом пролете балки существуют две постоянные точки, обуславливаемые соотношением конечных моментов пролета — левый и правый фокусы пролета. Эти точки определяются при отсутствии нагрузки пролета, если приложить к одному из его концов активный момент и рассчитать на противоположном конце момент реактивный. Так как реактивный момент обратного знака, то эпюра моментов пересекает пролет, как представлено на фиг. 38 и 39, устанавливая таким образом нулевую точку.

Нагруженный пролет неразрезной балки создает активные опорные моменты для каждого из соседних ненагруженных пролетов, например, слева дает момент M_{n-1} . В таком случае l_{n-1} пролет будет находиться в условиях фиг. 39 и в таких же условиях будет каждый следующий пролет влево. Только в последнем из них, при крайней левой опоре на катках, опорный момент будет нулевой, и фокус совпадает с опорой; при



Фиг. 90 и 91.

полном заземлении левого конца фокус будет на $\frac{1}{3}$ пролета. Это указывает, во-первых, что эпюра моментов ненагруженных пролетов представляет зигзагообразную ломанную линию с нулевыми точками в пролете и, во-вторых, — что нулевые точки определяются по соотношению опорных моментов, и обратно: по одному из опорных моментов определяются все прочие, если известны нулевые точки всех пролетов. Левые фокусы получаются на основании правых активных опорных моментов, а правые — на основании левых моментов.

Таковы выводы теории балок с упруго-заделанными концами. Конечно, их можно получить и непосредственно на основании уравнения трех моментов или уравнения двух моментов. Вообразим неразрезную балку на катках и применим к первым ее двум пролетам слева теорему о трех моментах, придерживаясь фиг. 91. Так как здесь $M_0 = 0$ и нет нагрузки пролета, то получается:

$$M_1(l_1 + l_2) + \frac{1}{2} M_2 l_2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = -2 \frac{l_1 + l_2}{l_2} = -\left(2 + 2 \frac{l_1}{l_2}\right) \dots \dots \dots (174).$$

Отрицательный результат показывает, что соседние опорные моменты M_2 и M_1 — разных знаков и линия эпюры моментов пересекает ось в точке f_2 (фиг. 91). Положение фокуса определяется отношением

$$M_2 : M_1 = -\frac{l_{02}}{a_{02}} = -\left(2 + 2 \frac{l_1}{l_2}\right) = -k_2 \text{ которое зависит от отношения про-$$

летов и для данной балки является постоянным.

Из уравнения трех моментов для опоры № 2:

$$M_2(l_2 + l_3) + \frac{1}{2}(M_1 l_2 + M_3 l_3) = 0,$$

после подстановки из первого уравнения

$$M_1 = -M_2 \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)},$$

получим: $\frac{M_3}{M_2} = -2 \frac{l_2 + l_3}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{l_2}{2(l_1 + l_2)} = -\left[2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] \dots (175-a).$

Это отрицательное число снова указывает на противоположные знаки соседних моментов и наличие фокуса. Обозначим отношение моментов третьего пролета буквой k_3

$$\frac{M_3}{M_2} = -\frac{b_{03}}{a_{03}} = -\left[2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right)\right] = -k_3 \dots \dots \dots (175-b).$$

Вообще $\frac{M_{n-1}}{M_{n-2}} = -\frac{b_{0(n-1)}}{a_{0(n-1)}} = -k_{n-1} = -\left[2 + \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}} \left(2 - \frac{1}{k_{n-2}}\right)\right]$

и далее: $\frac{M_n}{M_{n-1}} = -\frac{b_{0n}}{a_{0n}} = -k_n = -\left[2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}}\right)\right] \dots (175-c).$

По этим отношениям определяется положение фокусов:

$$-\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{b_{0n}}{a_{0n}} = \frac{l_n - a_{0n}}{a_{0n}} = 2 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}}\right),$$

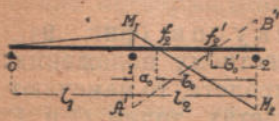
откуда $l_n - a_{0n} = 2a_{0n} + a_{0n} \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}}\right)$, или

$$a_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}}\right)} \dots \dots \dots (176).$$

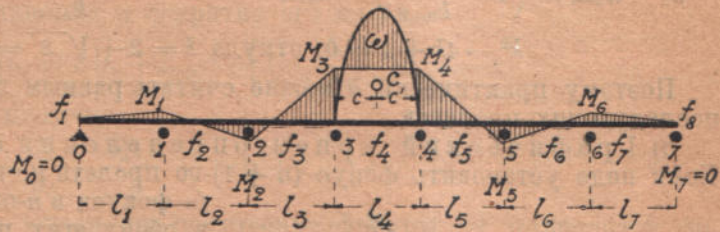
То, что сделано для левой части балки, считая от загруженного пролета, может быть повторено для правой части, начиная от правого конца балки, по направлению к загруженному пролету n , и мы получим ряд правых фокусов f' (фиг. 92); расстояние любого из них определится формулой:

$$l'_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{a'_{0(n+1)}}{a'_{0(n+1)}} \right)} \dots \dots \dots (177)$$

На фиг. 92 левый фокус второго пролета отмечен точкою f_2 пересечения оси балки со сплошной наклонною линией, а правый фокус обозначен точкою f'_2 пересечения с пунктирною наклонною $A'B'$.



Фиг. 92.



Фиг. 93.

Судя по (175), отношение фокальных расстояний одного пролета всегда больше двух:

$$\frac{b_0}{a_0} > 2 \text{ и } \frac{M_2}{M_1} > 2;$$

следовательно, во-первых, фокус всегда лежит в пределах крайней трети пролета и, во-вторых, — возрастание опорных моментов быстрее роста членов геометрической прогрессии со знаменателем 2, и ломанная линия эпюры опорных моментов представляет ряд волн, быстро затухающих по мере удаления от нагруженного пролета (см. фиг. 93). Чтобы получить представление о падении моментов, рассмотрим случай равных пролетов: $l_1 = l_2 = l_3 \dots$: Здесь по (175):

$$\frac{M_2}{M_1} = - (2 + 2) = -4 = -k_2 = \frac{b_{02}}{a_{02}},$$

$$\frac{M_3}{M_2} = - \left(2 + 2 - \frac{1}{4} \right) = -k_3 = -\frac{15}{4} = -\frac{b_{03}}{a_{03}};$$

поэтому: $\frac{M_3}{M_1} = \frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{M_3}{M_2} = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15.$

Второй опорный момент M_2 вчетверо больше первого M_1 , но уже третий момент M_3 превосходит величину первого в 15 раз.

В следующей таблице приведены величины k для ряда пролетов, начиная с первого, при разных отношениях длины последующих пролетов к первому, обозначенному буквою l_1 , в предположении, что все опоры шарнирные (все последующие пролеты, кроме 1-го, одинаковы).

$\frac{l}{l_1}$	k_2	k_3	k_4	k_5
0,9	4,222	3,763	3,734	3,732
1,0	4,000	3,750	3,733	3,732
1,1	3,818	3,738	3,732	3,732
1,2	3,667	3,727	3,732	3,732
1,3	3,588	3,717	3,731	3,732

*) Из принятого для k обозначения следует, что при дальнейших подстановках надо пользоваться числовым его значением, без знака.

Таблица показывает, что изменение k происходит главным образом в первых трех пролетах, что уже у пятого пролета k отличается от четвертого менее, чем на $\frac{1}{3}\%$, и что в пределах практической точности вычислений, начиная с пятого пролета, k можно считать постоянным.

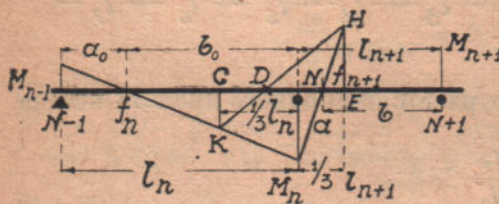
Истинный предел, к которому стремится k , может быть установлен на основании понятия о пределе: если k стремится к пределу, то разность между последующим значением k и предыдущим, в пределе, может достигнуть нуля, т.-е., при большом n , может быть нулем разность:

$$k_n - k_{n-1} = \left(4 - \frac{1}{k_{n-1}}\right) - k_{n-1} = -\frac{k_{n-1}^2 - 4k_{n-1} + 1}{k_{n-1}}, \text{ или иначе:}$$

$$k^2 - 4k + 1 = 0, \text{ откуда } k = 2 + \sqrt{3} = 3,73205.$$

Поэтому практически k можно считать равным 3,732 для пятого и всех последующих пролетов.

б) Графический прием определения фокусов (фиг. 94). Если надо установить фокус $(n+1)$ -го пролета по известному положению



Фиг. 94.

f_n фокуса в n -ом пролете, то намечают в обоих этих пролетах точки C и E ближайших к общей опоре N третьей пролета. Через эти точки проводят вертикали CK и EH , называемые вертикалями третьей смежных пролетов, затем, от C' левого пролета откладывают $CD = \frac{1}{3} l_{n+1} = NE$

правого пролета, как говорят, берут обращенную треть, т.-е. правую на левом пролете, и через D проводят произвольную прямую, пересекающую вертикали третьей в точках K и H . Если теперь фокус f_n левого пролета соединить с K прямою $f_n M_n$, то прямая $M_n H$ пересечет ось балки в искомом фокусе f_{n+1} .

Действительно, пусть неизвестное расстояние искомого фокуса будет a ;

тогда $CE = CN + NE = \frac{1}{3} l_n + \frac{1}{3} l_{n+1}$ и $CD = NE = \frac{1}{3} l_{n+1}$;

так что $ED = CE - CD = \frac{1}{3} l_n + \frac{1}{3} l_{n+1} - \frac{1}{3} l_{n+1} = \frac{1}{3} l_n$.

Отношение $EH : CK = ED : DC = l_n : l_{n+1}$.

Но $CK = NM_n \frac{b_0 - \frac{1}{3} l_n}{b_0} = NM_n \left(1 - \frac{l_n}{3b_0}\right)$;

точно также $EH = NM_n \frac{\frac{1}{3} l_{n+1} - a}{a} = NM_n \left(\frac{l_{n+1}}{3a} - 1\right)$.

Следовательно, предыдущее отношение преобразуется:

$$EH : CK = \left(\frac{l_{n+1}}{3a} - 1\right) : \left(1 - \frac{l_n}{3b_0}\right) = l_n : l_{n+1}.$$

отсюда $\frac{l_{n+1}^2}{3a} - l_{n+1} = l_n - \frac{l_n^2}{3b_0}$,

или $\frac{l_n^2}{b_0} + \frac{l_{n+1}^2}{a} = 3(l_n + l_{n+1}) \dots \dots \dots (178)$

Таким свойством обладают полученные построением расстояния b_0 и a .

С другой стороны, если точки f_n и f_{n+1} — суть фокусы, то, проведя через них линию опорных моментов $M_{n-1}M_nM_{n+1}$, можно написать следующее уравнение трех моментов:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = 0.$$

А так как: $M_{n-1} = -M_n \frac{a_0}{b_0} = -M_n \frac{l_n - b_0}{b_0} = M_n \left(1 - \frac{l_n}{b_0}\right),$

и $M_{n+1} = -M_n \frac{b}{a} = -M_n \frac{l_{n+1} - a}{a} = M_n \left(1 - \frac{l_{n+1}}{a}\right),$

то, подставивши в уравнение и сократив его на M_n

$$\left(1 - \frac{l_n}{b_0}\right)l_n + 2(l_n + l_{n+1}) + \left(1 - \frac{l_{n+1}}{a}\right)l_{n+1} = 0,$$

после преобразования получим:

$$-\frac{l_n^2}{b_0} - \frac{l_{n+1}^2}{a} + 3(l_n + l_{n+1}) = 0,$$

что совпадает со (178). Очевидно, построение фигуры 94 приводит к фокусу f_{n+1} *).

3. Опорные моменты загруженного пролета. а) Графический способ. Проще всего получить эти моменты построением, описанным в § 3,3. Так как загруженный пролет неразрезной балки отождествляется с однопролетной балкой, имеющей упруго заделанные концы, то мы воспользуемся форм. (91) и определим для нее концевые углы изгиба грузами пролета. Если представить углы α^0 и β^0 через реакции от эпюры моментов:

$$\alpha^0 = \frac{A'_n}{EJ} \quad \text{и} \quad \beta^0 = \frac{B'_n}{EJ}$$

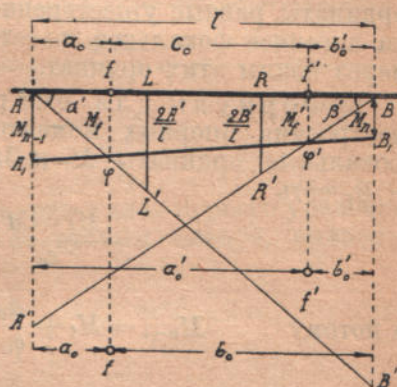
и для γ принять выражение $\gamma = \frac{1 \cdot l_n}{6EJ}$, то на опорных вертикалях A и B фиг. 95 придется отложить:

$$BB' = \frac{\alpha^0}{\gamma} = \frac{A'_n}{EJ} \cdot \frac{1 \cdot l_n}{6EJ} = \frac{6A'_n}{l_n}$$

и соответственно $AA' = \frac{6B'_n}{l} \dots \dots \dots (179).$

Для компактности чертежа вместо этих отрезков лучше принять пропорционально уменьшенные, например, отложить на третях пролета втрое меньшие отрезки LL' и RR' фиг. 95. Разделивши пролет на три части точками L и R , строят ординату

$$LL' = \frac{1}{3}BB' = \frac{1}{3} \frac{6A'_n}{l} = \frac{2A'}{l} \quad \text{и} \quad \text{ординату} \quad RR' = \frac{2B'}{l} \dots (180).$$



Фиг. 95.

*) Графический прием определения фокусов описан Мюллер-Бреслау в „Die Graphische Statik der Baukonstruktionen“, II том 2 изд., а также В. Риттером в „Anwendungen der graphischen Statik“ III часть.

Первое исследование фокусов принадлежит Bresse в „Congrs de mécanique appliquée“ 3 часть, Париж, 1865 и Culmann'у в „Die graphische Statik“ 1866. Из новейших исследований отметим В. Г. Галеркина „Опорные моменты неразрезных балок“ Известия СПб. Политехн. Ин-та 1912.

В последнее время появился прибор для определения нулевых точек; он называется „Nupubest“ и описан в брошюре Rieckhofs „Nupubest“ Experimentelle Lösung statisch unbestimmter Systeme für den Gebrauch in der Praxis“. Darmstadt. Прибор предназначается не только для балок, но и для рам и других статически неопределимых упругих систем.

Остается провести фокальные ординаты до пересечения с наклонными AL' и BB' и точки пересечения φ и φ' соединить прямою A_1B_1 .

Не представляет затруднений вычислить величину фокальных ординат и таким образом построить эпюру опорных моментов непосредственно по этим ординатам.

Из пропорции $f\varphi:LL' = a_0 : \frac{1}{3}l$, или $M_f:LL' = 3a_0:l$, имеем

$$M_f = \frac{2A'}{l} \cdot \frac{3a_0}{l} = \frac{6A'}{l} \cdot \frac{a_0}{l} \text{ и соответственно } M'_f = \frac{6B'}{l} \cdot \frac{b'_0}{l} \dots (181)$$

Условно назовем в последних формулах выражения $\frac{A'}{l}$ и $\frac{B'}{l}$ „погонными моментными реакциями“, а дроби $\frac{a_0}{l}$ и $\frac{b_0}{l}$ — „погонными фокальными расстояниями“; тогда формулы выразят следующие простые правила построения:

Первое правило (форм. 180): делят пролет на 3 части и в точках деления строят ординаты, равные удвоенной погонной моментной реакции, соединяют наклонными прямыми концы ординат с концами пролета и проводят фокальные ординаты до пересечения с этими наклонными; линия опорных моментов проходит через полученные точки пересечения; или —

Второе правило (фиг. 181): определяют фокусы и строят на них ординаты, равные ушестеренной погонной моментной реакции, умноженной на погонное фокальное расстояние; линию опорных моментов проводят через концы этих ординат.

б) Формулы для опорных моментов. Для непосредственного построения опорных моментов M_{n-1} и M_n выразим их через известные фокальные ординаты M_f и M'_f (фиг. 95). Тангенс угла наклона прямой A_1B_1 есть

$$\frac{M_f - M'_f}{c_0}, \text{ где } c_0 = l - a_0 - b'_0 \dots (182)$$

а потому

$$M_{n-1} = M_f + \frac{a_0}{c_0}(M_f - M'_f) = M_f \frac{a_0 + c_0}{c_0} - M'_f \frac{a_0}{c_0} = M_f \frac{a'_0}{c_0} - M'_f \frac{a_0}{c_0}.$$

После подстановки значений M_f и M'_f из (181) это дает:

$$M_{n-1} = \frac{6A'}{l^2} a_0 \frac{a'_0}{c_0} - \frac{6B'}{l^2} b'_0 \frac{a_0}{c_0};$$

если же заменить $A' = \frac{\omega c'}{l}$ и $B' = \frac{\omega c}{l}$, где ω — площадь эпюры моментов, вызванных нагрузкой пролета, а c и c' — расстояния центра тяжести эпюры до концов пролета, то:

$$M_{n-1} = \frac{6\omega c'}{l^3} a_0 \frac{a'_0}{c_0} - \frac{6\omega c}{l^3} b'_0 \frac{a_0}{c_0}.$$

Вынося за скобки общих множителей, а также b'_0 и, по прежнему, обозначая отношение $a'_0:b'_0$ буквой k' , получим

$$M_{n-1} = \frac{6\omega}{l^3} \frac{a_0 b'_0}{c_0} (k'c' - c) \dots (183-a)$$

Таким же образом

$$M_n = M'_1 - \frac{b_0'}{c_0} (M_1 - M'_1) = M'_1 \frac{b_0'}{c_0} - M_1 \frac{b_0'}{c_0} = \frac{6\omega}{l^3} \frac{a_0 b_0'}{c_0} (ck - c') \dots (183-b).$$

Следовательно, опорный момент выражается произведением: 1) ушестеренной площади эпюры моментов, разделенной на куб длины пролета, 2) крайних фокальных расстояний, разделенных на промежуток между ними и 3) коэффициента $(k'c' - c)$ либо $(kc - c')$.

Те же формулы получаются и по теореме о трех моментах: составляют два уравнения трех моментов для одной и для другой опоры нагруженного пролета, соответственно числу неизвестных опорных моментов пролета; затем, пользуясь фокусами, выражают искомые моменты через предыдущие, посредством отношений k , так что, искомые опорные моменты окажутся выраженными через данные концевые. Для примера составим выражения опорных моментов № 3 и № 4 вышеприведенной семипролетной балки фиг. 93.

Обозначим площадь эпюры моментов от одной только нагрузки пролета l_4 буквою ω_4 а расстояние ее центра тяжести до опор 3 и 4 обозначим соответственно c_4 и c'_4 ; тогда реакции опор от моментной нагрузки выразятся формулами:

$$A'_4 = \frac{\omega_4 c'_4}{l_4} = R'_3 \text{ и } B'_4 = \frac{\omega_4 c_4}{l_4} = R'_4,$$

где R'_3 и R'_4 — общий символ полных реакций для опор 3 и 4 от моментной нагрузки обоих прилегающих пролетов. Уравнение трех моментов для опоры 3:

$$M_2 l_3 + 2M_3 (l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6 \frac{\omega_4 c'_4}{l_4},$$

и, для опоры 4:

$$M_3 l_4 + 2M_4 (l_4 + l_5) + M_5 l_5 = -6 \frac{\omega_4 c_4}{l_4}.$$

Представим их в другом виде, для чего первый член первого уравнения умножим и разделим на $M_3 l_4$ и объединим со вторым членом, вынося за скобки $M_3 l_4$; тогда получится:

$$M_4 l_4 + M_3 l_4 \left[2 + \frac{l_3}{l_4} \left(2 + \frac{M_2}{M_3} \right) \right] = -6 \frac{\omega_4 c'_4}{l_4}.$$

Из второго уравнения:

$$M_3 l_4 + M_4 l_4 \left[2 + \frac{l_5}{l_4} \left(2 + \frac{M_5}{M_4} \right) \right] = -6 \frac{\omega_4 c_4}{l_4}.$$

А так как, по (175-b и c): $\frac{M_2}{M_3} = -\frac{1}{k_3}$, $\frac{M_5}{M_4} = -\frac{1}{k'_5}$,

и вообще: $k_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right)$ и $k'_n = 2 + \frac{l_{n+1}}{l_n} \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) \dots (184-a)$

то: $M_4 l_4 + M_3 l_4 k_4 = -\frac{6\omega_4 c'_4}{l_4} = -6A'_4$ и $M_3 l_4 + M_4 l_4 k'_4 = -\frac{6\omega_4 c_4}{l_4} = -6B'_4 \dots (184-b).$

Отсюда $M_3 = \frac{6\omega_4 (c'_4 k'_4 - c_4)}{l^2_4 (1 - k_4 k'_4)}$ и $M_4 = \frac{6\omega_4 (c_4 k_4 - c'_4)}{l^2_4 (1 - k_4 k'_4)} \dots (184-c).$

По аналогии для каких-нибудь опор $n-1$ и n получится:

$$k_n M_{n-1} + M_n = -\frac{6A'_n}{l_n} \text{ и } M_{n-1} + k'_n M_n = -6 \frac{B'_n}{l_n}$$

откуда $M_{n-1} = \frac{6\omega_n(c'_n k'_n - c_n)}{l^2_n(1 - k_n k'_n)}$ и $M_n = \frac{6\omega_n(c_n k_n - c'_n)}{l^2_n(1 - k_n k'_n)}$.

Эти формулы совпадают с (183), так как:

$$k k' - 1 = \frac{l - a_0}{a_0} \cdot \frac{l - b'_0}{b'_0} - 1 = \frac{l^2 - l(a_0 + b'_0) + a_0 b'_0 - a_0 b'_0}{a_0 b'_0} =$$

$$= \frac{l[l - (a_0 + b'_0)]}{a_0 b'_0} = \frac{l c_0}{a_0 b'_0} \dots \dots \dots (185)$$

Отсюда без затруднений получаются и все вышеприведенные правила построения моментов. Представим в (184-b) число k отношением $b_0 : a_0$, умножим обе части уравнения на a_0 и разделим на l^2_4 ; тогда получится:

$$M_3 \frac{b_{04}}{l_4} + M_4 \frac{a_{04}}{l^2_4} = 6A'_4 \frac{a_{04}}{l^2_4} = 6 \frac{A'_4}{l_4} \cdot \frac{a_0}{l_4}$$

В левой части по фиг. 41 стоит фокальный момент и, следовательно, для его построения надо взять ушершенную погонную моментную реакцию, умноженную на погонное фокальное расстояние (сравн. 181).

Теперь из пропорции $\frac{BB'}{M_t} = \frac{l}{a_0}$ по фиг. 95 определяется опорная ордината одной из перекрестных линий моментов:

$$BB' = M_t \frac{l}{a_0} = 6A'_4 \frac{a_{04}}{l^2_4} \cdot \frac{l_4}{a_{04}} = 6 \frac{A'_4}{l_4}$$

или ордината одной трети пролета

$$LL' = \frac{1}{3} BB' = 2 \frac{A'_4}{l_4} \text{ (сравн. 180).}$$

4. Моменты прочих пролетов. а) Определение моментов. Когда получены моменты M_{n-1} и M_n загруженного пролета, то без затруднения вычисляются и все остальные: для всех левых пролетов пользуются левым моментом загруженного пролета M_{n-1} , а для всех пролетов, находящихся вправо от загруженного, пользуются правым опорным моментом последнего. Вычисления ведут по форм. (175):

$$\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} = -\frac{1}{k_{n-1}} \text{ и } \frac{M_{n+1}}{M_n} = -\frac{1}{k'_{n+1}}$$

Еще проще получить моменты графически, как показано на фиг. 93: от известного опорного момента загруженного пролета проводят наклонную через противоположный фокус ближайшего незагруженного пролета; продолжая ее до конца пролета, определяют ближайший опорный момент, от которого ведут наклонную на фокус следующего пролета и т. д. до последнего пролета. Если здесь конец балки опирается на шарнир, то последнюю опорную ординату соединяют с нулевой ординатой на этом конце. Если же здесь полное защемление, то последнюю наклонную эпюры моментов проводят через $1/3$ пролета (см форм. 83 и фиг. 38).

В результате получается ломанная линия, волны которой быстро затухают по мере удаления от нагруженного пролета (фиг. 93). (В разделе 2 указывалось, что уже через два пролета моменты уменьшаются в 15 раз). На этом основании, при приближенных расчетах, можно в все не считаться с опорными моментами удаленных пролетов. Достаточно рассмотреть по два пролета, расположенных справа и слева от загруженного. Действительно, если в предыдущем примере фиг. 93 отбросить моменты M_1 и M_6 , т. е. принять

$$M_1 = M_6 = 0,$$

то для M_3 и M_4 получится значение $-\frac{1}{19} ql^2$, отличающееся от истин-

ного — $\frac{1}{18,9} ql^2$ менее, чем на $1/2\%$. Пренебрегая вторыми моментами M_2 и M_3 , т. е. ограничиваясь только двумя ближайшими пролетами l_3 и l_5 , получим $M_3 = M_4 = -\frac{1}{20} ql^2$, вместо $\frac{1}{18,9} ql^2$, т. е. ошибку в 5% .

б) Пример. Для случая равных пролетов произведем вычисления по вышеуказанной программе, применительно к фиг. 93.

Фокусы. В первом пролете:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = l, \quad k_1 = \infty.$$

Во втором пролете:

$$-k_2 = \frac{M_2}{M_1} = -(2 + 2) = -4 = \frac{b_{02}}{a_{02}}, \quad a_{02} = \frac{1}{5} l_2.$$

В третьем пролете:

$$\frac{M_3}{M_2} = -\left(2 + 2 - \frac{1}{4}\right) = -k_3 = -\frac{b_{03}}{a_{03}} = -\frac{15}{4}, \quad a_{03} = \frac{4}{19} l_3.$$

В четвертом пролете:

$$\frac{M_4}{M_3} = -\left(2 + 2 - \frac{4}{15}\right) = -k_4 = -\frac{b_{04}}{a_{04}} = -\frac{56}{15}; \quad a_{04} = \frac{15}{71} l_4.$$

По симметрии, таковы же будут расстояния b'_0 правых фокусов для пролетов 7, 6, 5 и 4.

Опорные моменты. Благодаря симметрии нагрузки и балки, опорные моменты нагруженного пролета одинаковы, и достаточно вычислить ординату, соответствующую одному из фокусов. Для формулы (181) известно:

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{1}{8} ql^2 = \frac{1}{24} ql^3 \text{ (при равном. нагр. } q\text{);}$$

следовательно:

$$M_1 = -\frac{6A'}{l} \cdot \frac{a_1}{l} = -\frac{6}{l} \cdot \frac{1}{24} ql^3 \cdot \frac{15}{71} = -\frac{15}{284} ql^2.$$

Таковы же будут и моменты M_3 и M_4 :

$$M_3 = M_4 = -\frac{15}{284} ql^2.$$

Моменты незагруженных пролетов:

$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = \frac{15}{284} \cdot \frac{4}{15} ql^2 = \frac{1}{71} ql^2,$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{1}{284} ql^2; \quad M_0 = 0.$$

5. Случай одного сосредоточенного груза. (фиг. 96). Один сосредоточенный груз дает треугольную эпюру моментов, максимальная ордината которой есть

$$P \frac{ab}{l}, \text{ где } a \text{ и } b \text{ — расстояния груза до опор.}$$

Поэтому в формулу (183) надо подставить

$$\omega = \frac{1}{2} l \cdot P \frac{ab}{l} = P \frac{ab}{2}, \quad c = \frac{1}{3} (0 + a + l) \text{ и } c' = \frac{1}{3} (0 + b + l).$$

Результат подстановки будет:

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= -P \frac{ab a_0 b'_0}{l_n^3 c_0} [(b + l_n) k_n - (a + l_n)] \\ M_n &= -P \frac{ab a_0 b'_0}{l_n^3 c_0} [(a + l_n) k_n - (b + l_n)] \end{aligned} \quad (186)$$

$$\begin{aligned} \text{или } M_{n-1} &= -P \frac{ab a_0 b'_0}{l_n^2 c_0} \left[\left(\frac{b}{l_n} + 1 \right) k_n - \left(\frac{a}{l_n} + 1 \right) \right] \\ M_n &= -P \frac{ab a_0 b'_0}{l_n^2 c_0} \left[\left(\frac{a}{l_n} + 1 \right) k_n - \left(\frac{b}{l_n} + 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (187)$$

Удобнее вычислять ординаты линий влияния, исходя не из отношений k и k' , а непосредственно по фокальным расстояниям a_0 и b_0 . Чтобы преобразовать выражения (186), заменим в первом из них a через $l - b$:

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= -P \frac{(l_n - b) b a_0 b'_0}{l_n^3 c_0} \cdot (l_n + b) \left[\frac{(b + l_n) k'_n - a + l_n}{l_n + b} \right] = \\ &= -P \frac{b}{l_n} \frac{a_0 b'_0}{c_0} \frac{l_n^2 - b^2}{l_n^2} \left(k'_n - \frac{a + l_n}{b + l_n} \right) \end{aligned} \quad (188)$$

Раскрывая скобки, получаем во втором члене

$$\frac{b}{l_n} \frac{l_n^2 - b^2}{l_n^2} \frac{a + l_n}{b + l_n} = \frac{l_n - a}{l_n} \frac{l_n - b}{l_n^2} \frac{l_n + a}{1} = \frac{a}{l_n} \frac{l_n^2 - a^2}{l_n^2} = \frac{a}{l_n} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \quad (189)$$

Это выражение определяется исключительно положением груза; оно не зависит от величины пролета, а обуславливается отношением $\frac{a}{l}$ — расстояния груза до опоры A к длине пролета.

Точно также в первом члене выражения (188) будет:

$$-\frac{b}{l_n} \frac{l_n^2 - b^2}{l_n^2} = -\frac{b}{l_n} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) \quad (190)$$

Как независимые от величины пролета и нагрузки, оба выражения (189) и (190) могут быть вычислены предварительно для разных отношений $\xi = \frac{a}{l}$ или $\xi' = \frac{b}{l}$, т. е. для разных положений груза в пролете:

$$\xi = \frac{a}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots$$

Таблица составленная из результатов таких вычислений, может служить для разных случаев расчета балок, независимо от их пролетов. (Таблица помещена в след. § 7).

Обозначим выражения (189) и (190) буквами σ и σ' , т. е. примем

$$\xi(1 - \xi^2) = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = \sigma \quad \text{и} \quad \xi'(1 - \xi'^2) = \frac{b}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2} \right) = \sigma' \quad (191);$$

тогда опорный момент представится формулой:

$$M_{n-1} = -P \frac{a_0 b'_0}{c_0} (k'_n \sigma' - \sigma) \quad \text{и по аналогии:} \quad M_n = -P \frac{a_0 b'_0}{c_0} (k_n \sigma - \sigma'),$$

или:
$$M_{n-1} = -P \frac{a_0 \sigma'}{c_0} k'_n b'_0 + P \frac{a_0 \sigma}{c_0} b'_0.$$

А так как $k'_n = \frac{l_n - b'_0}{b'_0}$ и $k'_n b'_0 = l_n - b'_0$, то:

$$M_{n-1} = -P \frac{a_0}{c_0} (l_n - b'_0) \sigma' + P \frac{a_0 b'_0}{c_0} \sigma = -P \frac{a_0 l_n}{c_0} \sigma' + P \frac{a_0 b'_0}{c_0} (\sigma + \sigma').$$

Сумма $\sigma + \sigma'$ также вычисляется предварительно для разных возможных отношений расстояния груза к пролету; она составляет:

$$\sigma + \sigma' = \sigma + \frac{b}{l} - \frac{b^2}{l^2} = \sigma + \frac{l-a}{l} - \frac{(l-a)^2}{l^2},$$

если же в последних членах вынести $\frac{1}{l^2}$ за скобки и разложить в степенную, то:

$$\begin{aligned} \sigma + \frac{1}{l^2} (l^2 - l^2 a - l^2 + 2l^2 a - 3la^2 + a^3) &= \sigma + 2 \frac{a}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} = \\ &= \sigma + 3 \left(\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2} \right) - \left(\frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3} \right) = \sigma + 3 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = \\ &= 3 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right), \text{ ибо } \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = \sigma. \end{aligned}$$

Следовательно: $\sigma + \sigma' = 3 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right)$; обозначим ее $\sigma_0 \dots \dots \dots$ (192).

Тогда $M_{n-1} = -P \frac{a_0 l_n}{c_0} \sigma' + P \frac{a_0 b'_0}{c_0} \sigma_0$,

или: $M_{n-1} = -P a_0 (l_n \sigma' - b'_0 \sigma_0)$

и по аналогии $M_n = -P \frac{b'_0 l_n}{c_0} \sigma + P \frac{b'_0 a_0}{c_0} \sigma_0$,

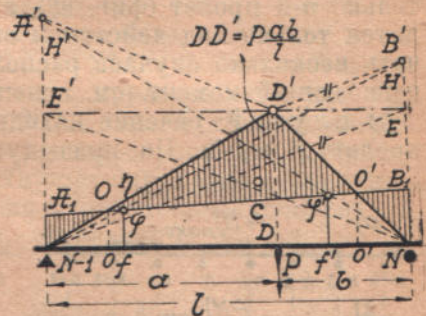
или $M_n = -P \beta'_0 (l_n \sigma - a_0 \sigma_0) \dots (193)$

где буквами α_0 и β'_0 обозначены отношения $a_0 : c_0$ и $b'_0 : c_0$.

Вычисление опорных моментов по этим формулам оказывается особенно простым:

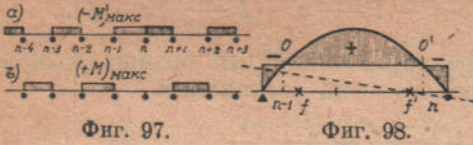
1) находят положение фокусов, т. е. расстояния a_0, b'_0 , расстояние между ними $c_0 = l - (a_0 + b'_0)$ и отношения α_0 и β'_0 ; 2) для любого положения груза P , по предварительно составленной таблице, определяют σ, σ' и σ_0 и 3) подставляют полученные числовые значения в формулы (193).

6. Знаки изгибающих моментов загруженного пролета. Построение замыкающей линии $A_1 B_1$ опорных моментов на фиг. 96 (см. 42) непосредственно говорит, что уклон эпюры $(N-1)D'$ больше уклона гипотенузы $\varphi(N-1)$ треугольника $(N-1)\varphi f$, определяемого ординатой фокуса, и что ордината эпюры $f\eta > \varphi f$, и изгибающий момент $\eta\varphi = \eta f - f\varphi$ в фокусе нагруженного пролета всегда положителен. Опорные моменты, вообще говоря, здесь отрицательны, так что, нулевая точка O и O' , вообще говоря, приходится между фокусом и ближайшей опорой. Положение ее зависит от местонахождения груза P ; в том случае когда P на опоре — нулевая точка попадает на вертикаль противоположного фокуса. В этом легко убедиться, рассматривая предельное положение вершины треугольника D' , приближающейся к вертикали правой опоры N : В пределе, когда груз P на опоре N , нулевая точка O совпадает с φ . Отсюда следует, что при перемещении груза от левой опоры $(N-1)$ до правой N нулевая точка O проходит путь $(N-1)f$, а потому изгибающий момент в каком-нибудь сечении между $(N-1)$ и f переходит от положительного значения к отрицательному. То же можно сказать и про правые фокус f' и нулевую точку O' . Очевидно, также, что, когда груз переходит от $(N-1)$ к N , изгибающий момент в сечении между f' и N будет переходить от $-$ к $+$.



Фиг. 96.

7. Опасное положение подвижной нагрузки. При обычном загрузении одного пролета балки концевые моменты пролета всегда отрицательны, на всех же прочих опорах, как справа, так и слева от загруженного пролета, знаки моментов чередуются. Пользуясь этим, мы уже теперь, не прибегая к линиям влияния можем установить нагрузку в опасное положение. Если нагрузка равномерно распределенная, как например, толпа людей, или эквивалентная нагрузка,



Фиг. 97.



Фиг. 98.

Опасное положение нагрузки для опорного момента M_n Схема эпюры моментов нагруженного пролета

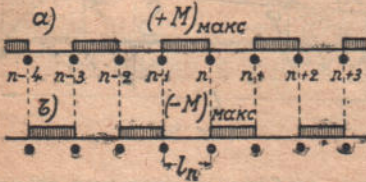
заменяющая поезд, то задача решается на основании следующих схем.

Для наибольшего опорного момента n -ой опоры надо загрузить n -ый и $(n + 1)$ -ый пролеты фигуры 97; остальные пролеты загружаются через один, как показано на фигуре, ибо, во-первых, нагрузка обоих смежных пролетов одинаково вызывает отрицательные опорные моменты на общей для пролетов опоре n , во-вторых знаки дальнейших опорных моментов чередуются, так что нагрузка дальнейших пролетов, через один, будет увеличивать эффект того знака, который уже получился для $-M_n$.

Для наибольшего положительного опорного момента M_n располагают нагрузку по фиг. b).

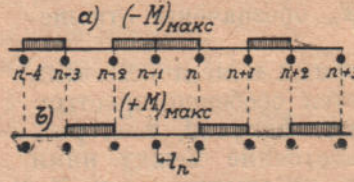
Рассмотрим сечения в пролете между опорами. Положим, что загружен только n -й пролет (фиг. 98), а остальные свободны от нагрузки и находятся только под действием опорных моментов. Здесь приходится различать несколько случаев расположения сечений, для которых определяется изгибающий момент (см. конец предыдущего раздела).

1 случай: сечение находится в промежутке между фокусами n -го пролета f и f' *). По предыдущему, нагрузка пролета дает здесь положительный момент.



Фиг. 99.

Сечение между фокусами



Фиг. 100.

Сечение угловой опоры n -го пролета

загружать соседних пролетов, а расположить нагрузку через один пролет, как сделано на фиг. 99-а). Для получения наибольшего отрицательного момента должно быть обратное расположение нагрузки, как на фиг. 99-б).

2 случай: сечение находится между $(n - 1)$ -ой опорой и точкой O фиг. 98. Хотя эта точка и не фиксирована, а зависит от положения груза, все же есть возможность установить нагрузку в опасное положение с приближением. Как непосредственно свидетельствует фигура 98 или линия влияния фигуры 81, нагрузка n -го пролета вызывает в сечении отрицательный момент, если она расположена от противоположной опоры и не доходит до сечения (небольшой положительный участок имеется только возле сечения). Момент того же знака (отрицательный) дадут в сечении также и нагрузки всех тех пролетов, которые приводят к отрицательному опорному моменту M_{n-1} , т.е. нагрузки соседнего пролета и дальнейших влево, через один. Соседнего пролета справа нагружать не надо, ибо его нагрузка дает для опоры $(n - 1)$ положительный момент. Вообще, для получения наибольшего отрицательного момента надо загрузить: 1) рас-

*) В дальнейшем такие сечения называются средними, сечения 2-го случая — крайними, а 3-го — промежуточными.

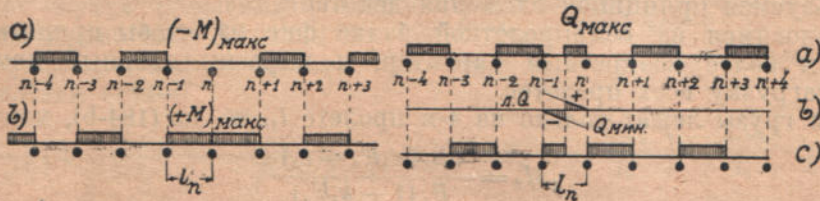
Чтобы сделать его наибольшим, на других пролетах надо располагать нагрузку так, чтобы отрицательные опорные моменты n -го пролета были возможно меньше: очевидно, не надо

сма­три­вае­мый про­лет*), 2) со­сед­ний сле­ва, 3) даль­ней­шие че­рез оди­на, как по­ка­за­но на фиг. 100-а). На­иболь­ше­му по­ло­жи­тель­но­му мо­мен­ту в рас­сма­три­вае­мом се­че­нии со­от­вет­ст­вует на­груз­ка по фиг. 100-б).

3 слу­чай: се­че­ние на­хо­дится ме­жду O и фо­кусом f (фиг. 98). На­груз­ка n -го про­лета да­ет здесь по­ло­жи­тель­ный мо­мент (см. фиг. 96, 101-б и 82). Че­бы по­лу­чить на­иболь­ший от­ри­ца­тель­ный мо­мент, все­гда не на­до за­гру­жать n -го про­лета; дру­гие про­леты дол­жны быть за­гру­жены так, че­бы по­лу­чить на­иболь­ший от­ри­ца­тель­ный опор­ный мо­мент M_{n-1} . На фиг. 101-а) по­ка­за­но та­кое рас­по­ло­же­ние на­груз­ки.

По­пер­еч­ная си­ла. При ус­танов­ке на­груз­ки в опас­ное по­ло­же­ние для по­пер­еч­ной си­лы в ка­ком-ни­будь се­че­нии n -го про­лета ру­ко­вод­ст­вуются фор­му­лой: $Q_x = Q^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \dots \dots \dots (194)$

В са­мом про­лете на­груз­ку по­ме­щают, как для про­стой бал­ки (фиг. 102); это под­ска­зы­вает пер­вый член фор­му­лы. Вто­рой член ее го­ворит, что для



Фиг. 101.

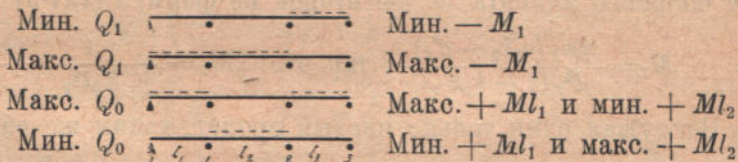
Се­че­ние ме­жду ну­ле­вой точ­кой и фо­кусом

Фиг. 102.

Опас­ное по­ло­же­ние на­груз­ки для по­пер­еч­ной си­лы

по­лу­че­ния Q_{\max} . на­до за­гру­зить те из ос­тав­ших про­летов, ко­торые вы­зы­вают по­ло­жи­тель­ные M_n и от­ри­ца­тель­ные M_{n-1} , т.-е. не дол­жны на­гру­жаться $(n+1)$ -ый про­лет и даль­ней­шие че­рез оди­на сле­ва; наоб­рот, — со­сед­ний $(n-1)$ -ый про­лет и все пре­ды­ду­щие че­рез оди­на — за­гру­жаются, как по­ка­за­но на фиг. 102-а). На­иболь­шая от­ри­ца­тель­ная по­пер­еч­ная си­ла по­лу­ча­ется при за­гру­жении про­летов, ос­тав­лен­ных на фиг. а) без на­груз­ки (см. фиг. б).

Ус­тановив­ши на­груз­ку в опас­ное по­ло­же­ние, мы оп­ре­де­ляем все опор­ные мо­мен­ты от на­груз­ки каж­до­го из про­летов в от­дель­ности и ре­зуль­та­ты от­дель­ных рас­че­тов ал­ге­браи­че­ски сум­ми­руем. По­сле это­го не пред­ставит за­труд­не­ний по­стро­ить э­пю­ру мо­мен­тов или со­став­ить ее урав­не­ние для каж­до­го из про­летов.



Фиг. 103-а.



Фиг. 103-б.

В за­клю­че­ние при­во­дим схе­му опас­но­го по­ло­же­ния на­груз­ки для трех­про­лет­ной (фиг. 103-а) и для че­ты­рех­про­лет­ной бал­ки (фиг. 103-б).

*) Как бы­ло по­ка­за­но в § 5, на­при­мер на фиг. 81, в се­че­ниях, бли­зких к опор­но­му, ли­ния вли­я­ния для мо­мен­та име­ет не­боль­шой по­ло­жи­тель­ный учас­ток, и, разыс­ки­вая на­иболь­ший от­ри­ца­тель­ный мо­мент, сле­до­ва­ло бы в дан­ном про­лете рас­по­ла­гать на­груз­ку, не до­водя ее до се­че­ния, на­при­мер, на та­кое же рас­сто­я­ние, ка­кое оста­ется от се­че­ния до оп­оры. За­ни­мая на­груз­кой весь про­лет, мы не по­лу­чаем точ­но­го, а лишь при­бли­жен­ное ре­ше­ние, но во мно­гих слу­чаях прак­ти­ки вполне удо­в­лет­ви­тель­ное.

8. Общий случай нагрузки многопролетной балки. При большом числе пролетов известное удобство представляют готовые формулы для опорных моментов, шаблон, который определяет порядок расчета. Составим общее решение задачи при загрузении всех пролетов, чтобы формулы решения механически применять к отдельным частным случаям. Для практики расчета достаточно будет составить выражения для опорных моментов двух произвольно взятых соседних опор $n-1$ и n при произвольной нагрузке всех пролетов балки; получение же таких выражений не представляет затруднений, благодаря структурной симметрии выражения для опорного момента при загрузении одного пролета.

а) Общие формулы для опорных моментов. Сначала загрузим один, например, n -ый пролет и найдем общее выражение для n -го опорного момента; затем отдельно загрузим соседний пролет и определим тот же n -ый опорный момент, далее определим n -ый опорный момент от отдельного действия нагрузки следующего пролета и т. д. Наконец, воспользуемся принципом сложения действий.

Остановимся на семипролетной балке фиг. 93, чтобы придать рассуждениям более конкретный характер, и выразим опорный момент M_3 через нагрузку всех пролетов.

Если грузы лежат только на 4-м пролете l_4 , то, по (184-b), момент:

$${}_4M_3 = \frac{6\omega_4(c_4k'_4 - c_4)}{l_4^2(1 - k_4k'_4)},$$

где значок 4 перед буквою M указывает номер загруженного пролета.

Когда нагрузка будет на одном только 3-ем пролете, то опорный момент M_3 напишется по второй из формул (184-b), так как M_3 является правым опорным моментом загруженного пролета *):

$${}_3M_3 = \frac{6\omega_3(c_3k_3 - c'_3)}{l_3^2(1 - k_3k'_3)}.$$

Если загрузить только второй пролет l_2 , то ${}_2M_3 = -M_2 \cdot \frac{1}{k'_3}$, величина же опорного момента M_2 по второй из формул (184-b)

$$M_2 = \frac{6\omega_2(c_2k_2 - c'_2)}{l_2^2(1 - k_2k'_2)}; \text{ так что: } {}_2M_3 = -\frac{1}{k'_3 l_2^2} \frac{6\omega_2(c_2k_2 - c'_2)}{(1 - k_2k'_2)}.$$

Загружая один только первый пролет, таким же образом получим:

$${}_1M_3 = -M_1 \frac{1}{k'_3} = M_1 \frac{1}{k'_2} \frac{1}{k'_3} = \frac{6\omega_1(c_1k'_1 - c'_1)}{l_1^2 k'_2 k'_3 (1 - k_1k'_1)}.$$

Аналогичные формулы для 3-го опорного момента, получим, нагружая отдельно пролеты

$$l_5, l_6 \text{ и } l_7: {}_5M_3 = -M_4 \frac{1}{k_4} = -\frac{6\omega_5}{k_4 l_5^2} \frac{(c'_5 k'_5 - c_5)}{1 - k_5 k'_5};$$

$${}_6M_3 = -M_4 \frac{1}{k_4} = M_5 \frac{1}{k_4} \frac{1}{k_5} = \frac{6\omega}{k_4 k_5 l_6^2} \frac{(c'_6 k'_6 - c_6)}{1 - k_6 k'_6}, \text{ и т. д.}$$

При одновременном загрузении всех пролетов опорный момент M_3 получится, как сумма отдельных его значений, т. е.

$$\begin{aligned} M_3 &= {}_1M_3 + {}_2M_3 + {}_3M_3 + \dots + {}_7M_3 = \\ &= \frac{6\omega_1}{l_1^2} \frac{c_1 k_1 - c'_1}{(1 - k_1 k'_1) k'_2 k'_3} - \frac{6\omega_2}{l_2^2} \frac{c_2 k_2 - c'_2}{(1 - k_2 k'_2) k'_3} + \frac{6\omega_3}{l_3^2} \frac{c_3 k_3 - c'_3}{(1 - k_3 k'_3)} + \end{aligned}$$

*) Советуем на балке фиг. 93 изобразить карандашом нагрузку каждого пролета в отдельности. Тогда приводимые формулы усвоятся без затруднений.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{6\omega_4}{l_4^2} \frac{c'_4 k'_4 - c_4}{(1 - k_4 k'_4)} - \frac{6\omega_5}{l_5^2} \frac{c'_5 k'_5 - c_5}{(1 - k_5 k'_5) k_4} + \\
 & + \frac{6\omega_6}{l_6^2} \frac{(c'_6 k'_6 - c_6)}{(1 - k_6 k'_6) k_4 k_5} - \frac{6\omega_7 (c'_7 k'_7 - c_7)}{l_7^2 (1 - k_7 k'_7) k_4 k_5 k_6} .
 \end{aligned}$$

Здесь ω — площадь эпюры моментов от одной только нагрузки пролета с соответствующим знаком, c и c' — расстояния ее центра до левой и правой опоры пролета. Так как

$$\frac{\omega_3 c_3}{l_3} + \frac{\omega_4 c'_4}{l_4}$$

есть реакция опоры № 3 от моментной нагрузки обоих соседних пролетов то, по прежнему, обозначим ее R'_3 и для ее получения объединим соответствующие 3-ий и 4-ый члены выражения. Объединим также реакции остальных опор путем сложения реакций примыкающих, левого и правого, пролетов. Кроме того, выразим все k и k' через k_3 и k'_3 .

Это удастся сделать потому, что все k и k' связаны между собой зависимостью (184-а)

$$k_n = 2 \left(1 + \frac{l_{n-1}}{l_n} \right) - \frac{l_{n-1}}{l^n} \frac{1}{k_{n-1}} \quad \text{и} \quad k'_n = 2 \left(1 - \frac{l_{n+1}}{l_n} \right) - \frac{l_{n+1}}{l_n} \frac{1}{k'_{n+1}} .$$

Вынося после преобразований за скобки выражение

$$\frac{6k_3}{l_3 (1 - k_3 k'_3)} ,$$

получим окончательно:

$$M_3 = \frac{6k_3}{l_3 (1 - k_3 k'_3)} \left(\frac{R'_1}{k_2 k_3} - \frac{R'_2}{k_3} + R'_3 - \frac{R'_4}{k'_4} + \frac{R'_5}{k'_4 k'_5} - \frac{R'_6}{k'_4 k'_5 k'_6} \right) . \quad (195)$$

Таким же образом, получатся выражения и для других опорных моментов:

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \frac{6k_1}{l_1 (1 - k_1 k'_1)} \left(R'_1 - \frac{R'_2}{k'_2} + \frac{R'_3}{k'_2 k'_3} - \frac{R'_4}{k'_2 k'_3 k'_4} + \right. \\
 & \left. + \frac{R'_5}{k'_2 k'_3 k'_4 k'_5} - \frac{R'_6}{k'_2 k'_3 k'_4 k'_5 k'_6} \dots \dots \dots \right) \quad (196)
 \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{6k_2}{l_2 (1 - k_2 k'_2)} \left(- \frac{R'_1}{k_2} + R_2 - \frac{R'_3}{k'_3} + \frac{R'_4}{k'_3 k'_4} - \frac{R'_5}{k'_3 k'_4 k'_5} + \frac{R'_6}{k'_3 k'_4 k'_5 k'_6} \right)$$

$$M_4 = \frac{6k_4}{l_4 (1 - k_4 k'_4)} \left(- \frac{R'_1}{k_2 k_3 k_4} + \frac{R'_2}{k_3 k_4} - \frac{R'_3}{k_4} + R'_4 - \frac{R'_5}{k'_5} + \frac{R'_6}{k'_5 k'_6} \right)$$

$$M_5 = \frac{6k_5}{l_5 (1 - k_5 k'_5)} \left(\frac{R'_1}{k_2 k_3 k_4 k_5} - \frac{R'_2}{k_3 k_4 k_5} + \frac{R'_3}{k_4 k_5} - \frac{R'_4}{k_5} + R'_5 - \frac{R'_6}{k'_6} \right) \text{ и т. д.}$$

Закон составления этих формул очевиден, поэтому является возможность написать выражение для любого из опорных моментов и при каком угодно числе пролетов p :

$$\begin{aligned}
 M_{n-1} = & \frac{6k_{n-1}}{l_{n-1} (1 - k_{n-1} k'_{n-1})} \left[(-1)^{n-2} \frac{R'_1}{k_2 k_3 \dots k_{n-1}} + \right. \\
 & + (-1)^{n-3} \frac{R'_2}{k_3 k_4 \dots k_{n-1}} + \dots - \frac{R'_{n-2}}{k_{n-1}} + R'_{n-1} - \frac{R'_n}{k'_n} + \\
 & \left. + \dots + (-1)^{p-n+2} \frac{R'_{p-1}}{k'_n k'_{n+1} \dots k'_{p-1}} \right] \text{ и}
 \end{aligned}$$

$$M_n = \frac{6k_n}{l_n(1 - k_n k'_n)} \left[(-1)^{n-1} \frac{R'_1}{k_2 k_3 \dots k_{n-1} k_n} + \right. \\ \left. (-1)^{n-2} \frac{R'_2}{k_3 k_4 \dots k_n} + \dots + \frac{R'_{n-2}}{k_{n-1} k_n} - \frac{R'_{n-1}}{k_n} + R'_n - \frac{R'_{n+1}}{k'_{n+1}} + \right. \\ \left. + \dots + (-1)^{p-n+1} \frac{R'_{n-1}}{k'_{n+1} k'_{n+2} \dots k'_{p-1}} \right] \dots \dots \dots (197).$$

b) Пример. Применим эти формулы к случаю равных пролетов: $l_1 = l_2 = \dots l_6 = l_7$. Прежде всего вычислим k по формулам (175)

$$k_1 = \infty, k_2 = 2 \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \right) = 4; k_3 = 2 \left(1 + \frac{l_2}{l_3} \right) - \frac{l_2}{l_3} \cdot \frac{1}{k_2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4};$$

$$k_4 = 2 \left(1 + \frac{l_3}{l_4} \right) - \frac{l_3}{l_4} \cdot \frac{1}{k_3} = 4 - \frac{4}{15} = \frac{56}{15};$$

$$k_5 = 2 \left(1 + \frac{l_4}{l_5} \right) - \frac{l_4}{l_5} \cdot \frac{1}{k_4} = 4 - \frac{15}{16} = \frac{209}{56};$$

$$k_6 = 2 \left(1 + \frac{l_5}{l_6} \right) - \frac{l_5}{l_6} \cdot \frac{1}{k_5} = 4 - \frac{56}{209} = \frac{780}{209}; k_7 = 4 - \frac{209}{780} = \frac{2911}{780}.$$

Этими данными определяется положение левых фокусов. Таким же образом, идя справа налево, определим и положение правых фокусов:

$$k'_7 = \infty,$$

$$k'_6 = 2 \left(1 + \frac{l_6}{l_5} \right) = 4; k'_5 = 2 \left(1 + \frac{l_5}{l_4} \right) - \frac{l_5}{l_4} \cdot \frac{1}{k'_5} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4};$$

$$k'_4 = 2 \left(1 + \frac{l_4}{l_3} \right) - \frac{l_4}{l_3} \cdot \frac{1}{k'_4} = 4 - \frac{4}{15} = \frac{56}{15};$$

$$k'_3 = 2 \left(1 + \frac{l_3}{l_2} \right) - \frac{l_3}{l_2} \cdot \frac{1}{k'_3} = 4 - \frac{15}{16} = \frac{209}{56} \text{ и}$$

$$k'_2 = 2 \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \right) - \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{1}{k'_2} = 4 - \frac{56}{209} = \frac{780}{209} \text{ и } k'_1 = \frac{2911}{780}.$$

Затем составим коэффициенты перед скобками моментов (196):

$$\frac{6k'_1}{l_1(1 - k_1 k'_1)} = \frac{6}{l \left(\frac{1}{k_1} - k'_1 \right)} = \frac{6}{l \left(0 - \frac{2911}{980} \right)} = - \frac{6 \cdot 780}{2911 l} = - \frac{4680}{2911 l}$$

$$\frac{6k_2}{l_2(1 - k_2 k'_2)} = \frac{6 \cdot 4}{l \left(1 - 4 \cdot \frac{780}{209} \right)} = \frac{24}{l \left(1 - \frac{3120}{209} \right)} =$$

$$= - \frac{24 \cdot 209}{2911 l} = - \frac{5016}{2911 l} \text{ и т. д.}$$

Наконец, из чисел составим формулы моментов:

$$M_1 = - \frac{6 \cdot 780}{2911 l} \left(R'_1 - R'_2 \cdot \frac{209}{780} + R'_3 \cdot \frac{209 \cdot 56}{780 \cdot 209} - R'_4 \cdot \frac{209 \cdot 56 \cdot 15}{780 \cdot 209 \cdot 56} + \right. \\ \left. + R'_5 \cdot \frac{209 \cdot 56 \cdot 15 \cdot 4}{780 \cdot 209 \cdot 56 \cdot 15} - R'_6 \cdot \frac{209 \cdot 56 \cdot 15 \cdot 4}{780 \cdot 209 \cdot 56 \cdot 15 \cdot 4} \right) = \\ = - \frac{6}{2911 l} (780 R'_1 - 209 R'_2 + 56 R'_3 - 15 R'_4 + 4 R'_5 - R'_6).$$

$$M_2 = -\frac{24}{2911l} \left(-\frac{209}{4} R'_1 + 209R'_2 - 56R'_3 + 15R'_4 - 4R'_5 + R'_6 \right) \dots$$

$$M_3 = -\frac{90}{2911l} \left(\frac{56}{15} R'_1 - \frac{224}{15} R'_2 + 56R'_3 - 15R'_4 + 4R'_5 - R'_6 \right) \text{ и т. д.} \dots (198).$$

Остается вставить значение R' — реакций промежуточных опор от моментной нагрузки двух соседних пролетов.

Положим, например, что на балке с пролетами $l = 14$ м. находится по одному грузу сосредоточенному по середине пролетов № 4 и № 6:

груз 4-го пролета составляет 7,35 т.

„ 6-го „ „ 15,67 т.

Определим опорный момент M_1 .

Здесь будут иметь значение только реакции

$$R'_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7,35 \cdot 14}{4} \cdot 14 = 90 \text{ и } R'_4 = 90$$

$$\text{а также } R'_5 = R'_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \frac{15,67 \cdot 14}{4} = 192$$

так как остальные — нули. Поэтому:

$$M_1 = -\frac{6}{2911 \cdot 14} (56 \cdot 90 - 15 \cdot 90 + 4 \cdot 192 - 1 \cdot 192) = -0,716 \text{ тм.}$$

Таким же образом:

$$M_3 = -\frac{90}{2911 \cdot 14} (56 \cdot 90 - 15 \cdot 90 + 4 \cdot 192 - 1 \cdot 192) = 15M_1 = -10,74 \text{ тм.}$$

с) В случае равномерно распределенной нагрузки формулы соответственно упрощаются:

$$M_1 = -\frac{ql^2}{5822} (780 - 209 + 56 - 15 + 4 - 1) = -0,1056ql^2,$$

$$M_2 = -\frac{2ql^2}{2911} \left(-\frac{209}{4} + 209 - 56 + 15 - 4 + 1 \right) = -0,0775ql^2,$$

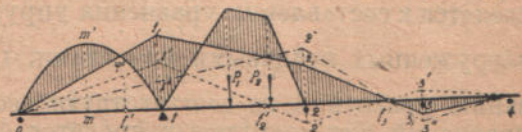
$$M_3 = -\frac{15ql^2}{5822} \left(\frac{56}{15} - \frac{224}{15} + 56 + 15 + 4 - 1 \right) = 0,0841ql^2.$$

Такой же подсчет для шестипролетной балки приводит к моментам:

$$M_1 = -0,1058ql^2, \quad M_2 = -0,077ql^2, \quad M_3 = -0,0865ql^2 \dots (199).$$

Это показывает, что при большом числе пролетов соответствующие опорные моменты разных балок мало отличаются и, во-вторых, что даже при равномерно распределенной нагрузке и равных пролетах опорные моменты не равны между собой.

9. Пример графического решения. Положим, что на четырехпролетной балке нагрузка лежит в двух пролетах: в первом — равномерно распределенная и во втором — два сосредоточенных груза (фиг. 104). Определим сначала опорные моменты от отдельного действия нагрузки первого пролета. Построивши параболу $Om'1$, проводим перекрестную наклонную $m'1$ и фокальную вертикаль f'_1 до пересечения φ' (см. § 3,3-b. Так как левая опора балки шарнирная, то левая фокальная ордината нулевая и проходит через опору. На этом основании линия опорных моментов левого пролета бу-

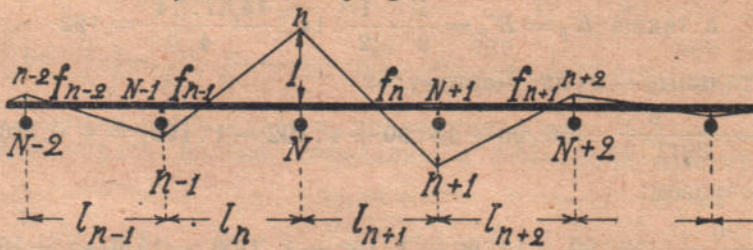


Фиг. 104.

дет $0\varphi'1'$. Получился левый опорный момент второго пролета $11'$. Так как этот и все последующие пролеты не нагружены, то намечаем правые фокусы и проводим через них ломанную штрих-линию $1'1'2'f_3'3'4'$, определяющую все опорные моменты от отдельного действия нагрузки первого пролета. Рассматривая отдельное действие нагрузки второго пролета по § 3, 3_{30} , мы определим опорные моменты $11''$ и $22''$ этого пролета и построим линию $1''2''$. Так как при этом левые пролеты не нагружены, то влево надо ориентироваться на левые фокусы, в данном случае, — на нулевую опору, проводя наклонную $1''0$. Справа от нагруженного пролета, по предыдущему, направляем ломанную линию опорных моментов на правые фокусы и получаем $2''3''4''$, как показано штрих-пунктиром.

При сложении отдельных эпюр опорных моментов, надо принять во внимание знаки, например, принимая за основу первую линию со значками „прим“, надо к ее ординатам либо прибавлять либо вычитать ординаты второй, со значками „секунд“, смотря по знаку последних. В результате получится эпюра 0,1, 2, 3, 4 и заштрихованная площадь.

§ 7. Линии влияния многопролетных балок. 1. Линия влияния для опорного момента. а) Способ упругой линии от единичного



Фиг. 105.

момента. Линию влияния для опорного момента неразрезной балки можно получить, разрезая балку над той опорой, для которой разыскивается момент (фиг. 105), и помещая здесь два равные противоположные единичные момента. По принципу взаимности перемещений линия влияния опорного момента получится, как упругая линия разрезанных частей балки, нагруженных единичными моментами, если разделить ординаты упругой линии на относительный поворот сечений в месте действия единичных моментов*).

Чтобы написать выражение для упругой линии частей балки $O-N$ и $N-(N+4)$ на фиг. 105, предварительно проводят зигзагообразную ломанную линию эпюры опорных моментов, исходя от единицы, как для правой, так и для левой части балки. Ломанную проводят через фокусы пролетов и, в том случае, когда концы балки имеют шарнирные опоры, — заканчивают нулевыми ординатами; если же концы балки заделаны, то здесь откладывают реактивные опорные моменты, которые должны быть определены из предварительных расчетов; при полном защемлении — назначают фокус на расстоянии $\frac{1}{3}l$ от защемленного конца.

Тогда для каждого пролета будут известны опорные моменты, и задача сведется к составлению уравнения упругой линии для ряда разрезных балок, нагруженных концевыми моментами: $1, -\frac{1}{k}, \frac{1}{kk'}$ и т. д., т. е. к выписыванию уравнений из соответствующего справочника**). Общий вид таких уравнений для всех левых пролетов будет:

$$y = -\frac{M_A l}{6EJ} x \left[2 + \frac{M_B}{M_A} - 3 \frac{x}{l} + \left(-\frac{M_B}{M_A} + 1 \right) \frac{x^2}{l^2} \right],$$

*) См. наприм. наши „Системы с лишними неизвестными“ § 17, § 24_{с.б.}

**) См. наприм. таблицу IV, столбец № 15 во „Введении“.

или
$$y = -\frac{M_A l^2 x}{6EJ} \left[2 - k - 3\frac{x}{l} + (1+k)\frac{x^2}{l^2} \right] \dots \dots (200),$$

где для первого пролета l_n , считая влево от опоры N , имеем:

$$M_B = 1, \quad \frac{M_B}{M_A} = -k_n, \text{ что при } M_B = 1 \text{ дает: } M_A = -\frac{1}{k_n}.$$

Для следующего влево пролета l_{n-1} :

$$M_B = -\frac{1}{k_n}, \quad \frac{M_B}{M_A} = -k_{n-1} \text{ и } M_A = \frac{M_B}{-k_{n-1}} = \frac{1}{k_n k_{n-1}}, \text{ и т. д.}$$

Для определения угла изгиба конца балки, нагруженной единичным моментом, составим производную от y по x и применим к $x=l$.

По аналогии получаются уравнения упругой линии и угол изгиба для правых пролетов балки.

Сумма углов изгиба разъединенных разрезом N концов двух частей неразрезной балки представляет относительный их поворот, на который надо разделить уравнения упругой линии, чтобы превратить их в линии влияния для опорного момента*).

б) Пользование готовыми формулами для опорных моментов. Несмотря на сравнительную простоту описанного способа построения линий влияния, практичнее оказывается непосредственное построение линий по готовым формулам опорных моментов. Воспользуемся формулами (193), по которым опорный момент выражается в функции от положения груза:

$$M_{n-1} = -P \left(\frac{a_0 l_n}{c_0} \sigma' - \frac{a_0 b'_0}{c_0} \sigma_0 \right) \text{ и } M_n = -P \left(\frac{b'_0 l_n}{c_0} \sigma - \frac{b'_0 a_0}{c_0} \sigma' \right),$$

где:
$$\sigma = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right), \quad \sigma' = \frac{b}{l} \left(1 - \frac{l^2}{l^2} \right), \quad \sigma_0 = 3 \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \dots \dots (201).$$

Помещая последовательно груз $P=1$ на разных расстояниях от опоры пролета, например, через $0,02l$, мы для каждого положения груза будем иметь отношение его расстояния к пролету $\frac{a}{l}$ или $\frac{b}{l}$ и получим величины σ , σ' и σ_0 , которые не зависят от пролета и могут быть использованы при расчете различных балок. Вычислим значения σ предварительно, имея в виду пользоваться ими в разных случаях расчета, и поместим в ниже-следующую таблицу (см. на 130 стр.).

Для исследуемой балки определим положение фокусов в разных пролетах, т. е. величины:

$$a_0, b'_0 \text{ и } c_0 = l - (a_0 + b'_0).$$

Тогда для разных положений груза $P=1$ в пролете l_n опорные моменты пролета, следовательно, ординаты их линий влияния определяются формулами:

$$M_{n-1} = \frac{a_0}{c_0} (b'_0 \sigma_0 - l_n \sigma') \text{ и } M_n = \frac{b'_0}{c_0} (a_0 \sigma_0 - l_n \sigma) \dots \dots (202),$$

или
$$M_{n-1} = \alpha (b'_0 \sigma_0 - l_n \sigma') \text{ и } M_n = \beta' (a_0 \sigma_0 - l_n \sigma).$$

Эти ординаты относятся только к пролету l_n .

*) Эта задача решена в § 24,8 наших Систем с лишними неизвестными, только там буквой k обозначено обратное отношение моментов.

Таблица коэффициентов σ по формулам (201) для ординат линий влияния опорных моментов.

$\frac{a}{l}$	σ	σ'	σ_0	$\frac{a}{l}$	σ	σ'	σ_0
0.00	0,0000	0,00000	0,0000	0.50	0,37500	0,37500	0,75000
0,02	0,01999	0,03881	0,05880	0,52	0,37938	0,36941	0,74879
0,04	0,03994	0,07526	0,11520	0,54	0,38254	0,36266	0,74520
0,06	0,05978	0,10942	0,16920	0,56	0,38438	0,35482	0,73920
0,08	0,07949	0,14131	0,22080	0,58	0,38489	0,34591	0,73080
0.10	0,09900	0,17100	0,27000	0.60	0,38400	0,33600	0,72000
0,12	0,11827	0,19853	0,31680	0,62	0,38167	0,32513	0,70680
0,14	0,13726	0,22394	0,36120	0,64	0,37786	0,31334	0,69120
0,16	0,15590	0,24730	0,40320	0,66	0,37250	0,30070	0,67320
0,18	0,17417	0,26863	0,44280	0,68	0,36557	0,28723	0,65280
0.20	0,19200	0,28800	0,48000	0.70	0,35700	0,27300	0,63000
0,22	0,20935	0,30545	0,51480	0,72	0,34675	0,25805	0,60480
0,24	0,22618	0,32102	0,54720	0,74	0,33478	0,24242	0,57720
0,26	0,24242	0,33478	0,57720	0,76	0,32102	0,22618	0,54720
0,28	0,25805	0,34675	0,60480	0,78	0,30545	0,20935	0,51480
0.30	0,27300	0,35700	0,63000	0.8	0,28800	0,19200	0,48000
0,32	0,28723	0,36557	0,65280	0,82	0,26863	0,17417	0,44280
0,34	0,30070	0,37250	0,67320	0,84	0,24730	0,15590	0,40320
0,36	0,31334	0,37786	0,69120	0,86	0,22394	0,13726	0,36120
0,38	0,32513	0,38167	0,70680	0,88	0,19853	0,11827	0,31680
0.40	0,33600	0,38400	0,72000	0.90	0,17100	0,09900	0,27000
0,42	0,34591	0,38489	0,73080	0,92	0,14131	0,07949	0,22080
0,44	0,35482	0,38438	0,73920	0,94	0,10942	0,05978	0,16920
0,46	0,36266	0,38254	0,74520	0,96	0,07526	0,03994	0,11520
0,48	0,36941	0,37938	0,74879	0,98	0,03881	0,01999	0,05880
0.50	0,37500	0,37500	0,75000	1.00	0,00000	0,00000	0,00000

Для каждого из рассмотренных положений груза в пролете l_n моментом M_{n-1} определяются все левые опорные моменты M_{n-2} , M_{n-3} и друг., так как зависимость между этими моментами и моментом нагруженного пролета M_{n-1} известна: она устанавливается числами k по форм. (175) или положением фокусов f :

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k_{n-2}} = \frac{M_{n-1}}{k_{n-1}k_{n-2}} \dots$$

$$M_1 = -\frac{M_{i+1}}{k_{i+1}} = \pm \frac{M_{n-1}}{k_{n-1}k_{n-2} \dots k_{i+1}} \dots \dots \dots (203).$$

Пользуясь последними формулами, мы определяем опорные моменты для какой угодно из левых опор непосредственно по левому моменту нагруженного пролета M_{n-1} и постоянным числам k .

Аналогично по числам k' и правому опорному моменту нагруженного пролета M_n определяются опорные моменты правых ненагруженных пролетов.

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}, M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k'_{n+2}} = \frac{M_n}{k'_{n+1}k'_{n+2}} \dots$$

$$M_p = -\frac{M_{p-1}}{k'_p} = \pm \frac{M_n}{k'_{n+1}k'_{n+2} \dots k'_p} \dots \dots \dots (204).$$

Таким образом, получаются ординаты пролета l_n для линий влияния всех опорных моментов. Для каждого из моментов число ординат должно быть такое же, как в n -ом пролете, и все они повторяют ординаты пролета l_n для момента M_{n-1} , либо для M_n , только уменьшенные по форм. (203) либо (204): в $(k_{n-1} \cdot k_{n-2} \dots k_{i+1})$ или в $(k'_{n+1} \cdot k'_{n+2} \dots k'_p)$ раз.

Поместим теперь груз $P=1$ на другом пролете, например $n-1$; тогда по формуле (202) мы получим ординаты этого пролета для опорных мо-

ментов M_{n-2} и M_{n-1} , а по формулам (203 и 204) — ординаты линий влияния других моментов, которые должны быть отложены в том же пролете ($n-1$).

Располагая далее груз $P=1$ в пролете $n-2$ мы таким же образом определим ординаты, относящиеся ко всем линиям влияния в пролете ($n-2$), и т. д.

Таким образом, мы построили линии влияния одновременно для всех опорных моментов многопролетной балки. Общий вид этих линий представлен на фиг. 106, где изображена линия M_4 для семипролетной балки. Линия представляет ряд быстро затухающих волн, плавно, без перегибов проходящих над опорами балки. Уравнения линии в отдельных пролетах получаются из уравнения (202) путем деления на соответствующие числа k ; в пролетах 4 и 5 линия выражается непосредственно формулами (202).



Фиг. 106.

с) Пример. В качестве примера рассмотрим четырехпролетную балку с пролетами разной величины (фиг. 107):

$$l_1 = 10 \text{ м.}, l_2 = 12 \text{ м.}, l_3 = 15 \text{ м.}, l_4 = 9 \text{ м.}$$

Для нее левые фокусы f определяются абсциссами (176):

$$a_{01} = 0, a_{02} = 12 \frac{1}{3 + \frac{10}{12} \cdot 2} = 2,571 \text{ м.},$$

$$a_{03} = 15 \frac{1}{3 + \frac{12}{15} \left(2 - \frac{2,571}{12,0 - 2,571} \right)} = 3,423 \text{ м.},$$

$$a_{04} = 9 \frac{1}{3 + \frac{15}{9} \left(2 - \frac{3,423}{15,0 - 3,423} \right)} = 1,541 \text{ м.},$$

Правые фокусы f' определяются расстояниями:

$$b'_{04} = 0, b'_{03} = 15 \frac{1}{3 + \frac{9}{15} \cdot 2} = 3,571 \text{ м.},$$

$$b'_{02} = 12 \frac{1}{3 + \frac{15}{12} \left(2 - \frac{3,571}{15,0 - 3,571} \right)} = 2,349 \text{ м.},$$

$$b'_{01} = 10 \frac{1}{3 + \frac{12}{10} \left(2 - \frac{2,349}{12,0 - 2,349} \right)} = 1,958 \text{ м.}$$

Расстояния между фокусами в пролетах соответственно будут:

$$c_{01} = 10 - 1,958 = 8,042; c_{02} = 12 - 2,349 - 2,571 = 7,080;$$

$$c_{03} = 15 - 3,571 - 3,423 = 8,006; c_{04} = 9 - 1,541 = 7,459$$

и коэффициенты α и β' в формулах для моментов (202):

$$\alpha_1 = \frac{a_{01}}{c_{01}} = 0, \alpha_2 = \frac{2,571}{7,080}, \alpha_3 = \frac{3,423}{8,006}, \alpha_4 = \frac{1,541}{7,459}$$

$$\beta'_1 = \frac{1,958}{8,042}, \beta'_2 = \frac{2,349}{7,080}, \beta'_3 = \frac{3,571}{8,006}, \beta'_4 = 0.$$

При движении груза $P=1$ в пределах первого пролета имеем $M_0=0$ (всегда).

По второй из формул (202):

$$M_1 = -\beta'_1(l_1\sigma + a_0\sigma_0) = -\beta'_1 \cdot 10\sigma = -2,435\sigma,$$

т. е. ординаты линии первого опорного момента получатся непосредственно из таблицы; надо лишь помножить табличные цифры на постоянное число 2,435.

Теперь по (175 или 204):

$$M_2 = +2,435 \frac{2,349}{12,0 - 2,349} \sigma = +0,593\sigma$$

и

$$M_3 = -0,593 \frac{3,571}{15,0 - 3,571} \sigma = -0,185\sigma$$

M_4 всегда равно нулю.

Получились ординаты первого пролета для всех опорных моментов M_0, M_1, M_2, M_3 и M_4 ибо σ выписывается непосредственно из таблицы 201.

Поместим груз $P=1$ во втором пролете.

По первой из формул (202) имеем:

$$M_1 = -4,358\sigma' + 0,853\sigma_0$$

По второй из тех же формул:

$$M_2 = -3,981\sigma + 0,853\sigma_0$$

и по (175 или 204):

$$M_3 = -\frac{3,571}{15,0 - 3,571} (-3,981\sigma + 0,853\sigma_0) = +1,243\sigma - 0,266\sigma_0.$$

Для ординат третьего пролета:

$$M_2 = -6,413\sigma' + 1,527\sigma_0$$

$$M_3 = -6,691\sigma + 1,527\sigma_0$$

$$M_1 = -\frac{2,571}{12,0 - 2,571} (-6,413\sigma' + 1,527\sigma_0) = +1,749\sigma' - 0,416\sigma_0.$$

Для четвертого пролета:

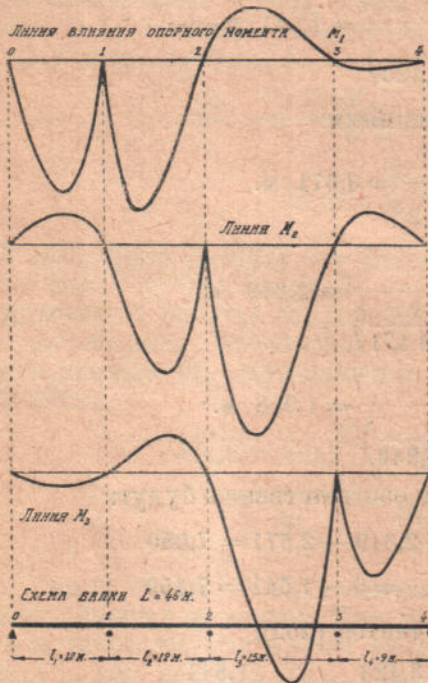
$$M_3 = -1,859\sigma'$$

$$M_2 = +1,859 \frac{3,423}{15,0 - 3,423} \sigma' = +0,550\sigma'$$

$$M_1 = -0,550 \frac{2,571}{12,0 - 2,571} \sigma' = -0,150\sigma'$$

Оказывается, что все ординаты всех линий влияния получают путем умножения табличных цифр σ, σ' и σ_0 на численные коэффициенты, постоянные для данного пролета. Табличные числа σ, σ' и σ_0 — одинаковы для всех пролетов и выписываются для всей балки один раз,

для абсцисс $\frac{a}{l}$, отсчитываемых от левой



Фиг. 107.

опоры того пролета, в пределах которого перемещается груз.

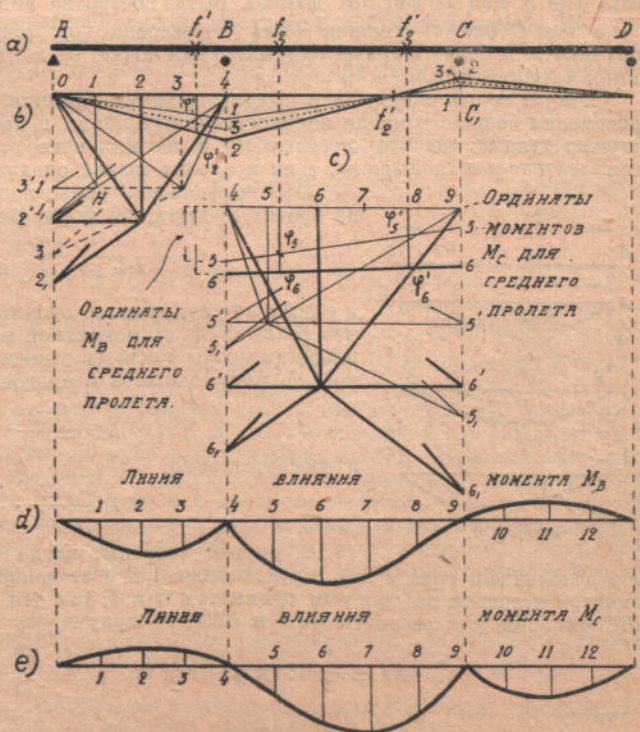
Дальнейшие вычисления расположим в таблицу:

Вычисление ординат для линий влияния опорных моментов.

Отношение $\frac{a}{l}$		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Из пред. таб. (201)	σ	0,00000	0,09900	0,19200	0,27300	0,33600	0,37500	0,38400	0,35700	0,28800	0,17100	0,00000
	σ'	0,00000	0,17100	0,28800	0,35700	0,38400	0,37500	0,33600	0,27300	0,19200	0,09900	0,00000
	σ_0	0,00000	0,27000	0,48000	0,63000	0,72000	0,75000	0,72000	0,63000	0,48000	0,27000	0,00000
1-ый пролет												
$M_1 = -2,435\sigma$		0,000	-0,241	-0,467	-0,665	-0,818	-0,913	-0,935	-0,869	-0,701	-0,416	0,000
$M_2 = +0,593\sigma$		0,000	+0,059	+0,114	+0,162	+0,199	+0,222	+0,228	+0,212	+0,171	+0,101	0,000
$M_3 = -0,185\sigma$		0,000	-0,018	-0,035	-0,050	-0,062	-0,069	-0,071	-0,066	-0,053	-0,032	0,000
2-ой пролет												
$M_1 = -4,358\sigma' + 0,853\sigma_0$		0,000	-0,515	-0,846	-1,018	-1,059	-0,994	-0,850	-0,652	-0,427	-0,201	0,000
$M_2 = -3,981\sigma' + 0,853\sigma_0$		0,000	-0,164	-0,355	-0,549	-0,723	-0,853	-0,914	-0,884	-0,737	-0,450	0,000
$M_3 = 1,243\sigma' - 0,266\sigma_0$		0,000	+0,051	+0,110	+0,171	+0,226	+0,267	+0,286	+0,276	+0,230	+0,141	0,000
3-ий пролет												
$M_1 = 1,749\sigma' - 0,416\sigma_0$		0,000	+0,187	+0,304	+0,362	+0,372	+0,344	+0,288	+0,215	+0,136	+0,061	0,000
$M_2 = -6,413\sigma' + 1,527\sigma_0$		0,000	-0,684	-1,114	-1,327	-1,363	-1,260	-1,055	-0,789	-0,498	-0,223	0,000
$M_3 = -6,691\sigma' + 1,527\sigma_0$		0,000	-0,250	-0,552	-0,865	-1,149	-1,364	-1,470	-1,427	-1,194	-0,732	0,000
4-ый пролет												
$M_1 = -0,150\sigma'$		0,000	-0,026	-0,043	-0,053	-0,058	-0,056	-0,050	-0,041	-0,029	-0,015	0,000
$M_2 = +0,550\sigma'$		0,000	+0,094	+0,158	+0,196	+0,211	+0,206	+0,185	+0,150	+0,106	+0,054	0,000
$M_3 = -1,859\sigma'$		0,000	-0,318	-0,535	-0,664	-0,714	-0,697	-0,625	-0,507	-0,357	-0,184	0,000

Линии влияния для опорных моментов, построенные по цифрам этой таблицы, представлены на фиг. 107. Строки таблицы непосредственно переписываются над ординатами соответствующего пролета.

д) Графический способ. Ординаты линии влияния для опорного момента могут быть получены и графически. Все элементы, необходимых для этого построения, уже разобраны, и здесь можно указать только порядок расчета. Обыкновенно разбивают пролеты балки на равное число частей, например, на 10 — на фиг. 108 левый пролет разбит на 4 части, средний — на 5, чтобы не исчерпать фигуры большим числом линий. В каждом делении по очереди помещают груз $P=1$ и графически определяют опорные моменты, как загруженного пролета так и соседних, незагруженных; полученные моменты строят в виде ординат, откладываемых под рассматриваемым грузом. Так как для данного груза получа-



Фиг. 108.

ются моменты на всех опорах балки, то строят одновременно линии всех опорных моментов, получая одновременно для всех линий по одной ординате.

На фиг. 108 показан один из приемов графического решения задачи.

Прежде всего, по фиг. 94 определены фокусы f'_1 и f'_2 и отмечены на фигуре а). Затем, на фиг. б) в точке 1, соответствующей $\frac{1}{4}$ пролета, помещен груз $P=1$ и построена треугольная эпюра $04H$ тонкими сплошными линиями (высота треугольника)

$$\overline{1-H} = \frac{Pab}{l} = 1 \cdot \frac{1}{4} l \cdot \frac{3}{4} l : l = \frac{3}{16} l$$

(в масштабе 1 см. = 64 мм. составляет 12 мм.). Проводя, в соответствии с фиг. 42, через вершину треугольника H горизонтальную прямую $H1'$ и соединяя точку $1'$ с концом 4 пролета 04 для проведения через вершину треугольника параллельной $H1'$, получим направляющую 1_4 , которая с фокальной вертикалью пересекается в точке φ'_1 . Так как левый фокус первого пролета совпадает с опорной точкой, то замыкающую опорных моментов проводим по направлению $0-\varphi'_1$; продолжая до опорной вертикали B , найдем величину опорного момента $M_B = 4 - 1$. Эта величина построена на фиг. д) под точкой 1.

Соединяя точку 1 опорной вертикали фиг. б) с фокусом f'_2 второго пролета и продолжая до вертикали C , определим величину опорного момента

$$M_C = C_1 - 1,$$

которая должна быть построена над точкой 1 фигуры е).

Далее груз $P=1$ помещается в точке 2 фиг. б) и выполняется построение показанное более жирными линиями, причем высота треугольника принимается $\frac{1}{4} l$. На фокальной вертикали первого пролета получается точка φ'_2 через которую проведена замыкающая $0-\varphi'_2$, определяющая опорный момент

$$M_B = 4 - 2 \text{ и } M_C = C_1 - 2.$$

Эти моменты построены на точках 2 фигуры д) и фигуры е).

Для груза в 3-ей точке деления первого пролета построения показаны пунктиром.

Полученные для первого пролета ординаты двух линий влияния на фиг. д) и е) объединены плавными линиями.

Во втором пролете для примера показано две установки груза $P=1$: в точке 5 и в точке 6. Для груза в точке 5 построения сделаны тонкой линией, причем получены фокальные точки φ_5, φ'_5 , через которые проводится замыкающая эпюра моментов. Опорная ордината $4-5$ над B фиг. с) должна быть построена под точкой 5 фиг. д), а ордината $9-5$ под C фиг. е) должна быть перенесена под точку 5 фиг. е). Таким же образом получают и более жирные ординаты для точки 6, а также и все остальные ординаты линий влияния фиг. д) и е).

Следует иметь в виду, что ординаты линий влияния получаются здесь, как результат проведения большого числа вспомогательных линий и при том пересекающихся часто под острыми углами, так что, оказываются более или менее приближенными. Точность может быть значительно повышена, если воспользоваться следующими указаниями.

При графическом определении опорных моментов по фиг. 95, на трех пролетах, по форм. (180), строят ординаты:

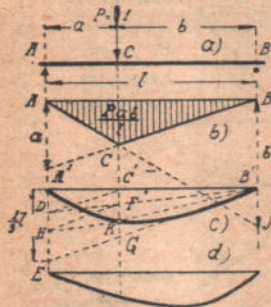
$$LL' = \frac{2A'}{l} \text{ и } RR' = \frac{2B'}{l}$$

и концы их соединяют с опорными точками A и B . Но известно, что реакция A' от моментной нагрузки есть статический момент площади эпюры моментов относительно правой опоры B , разделенной на длину пролета l ; следовательно можно строить . . (205):

$$LL' = \frac{2}{l} \cdot \frac{S_B}{l} = \frac{2S_B}{l^2}$$

и соответственно:

$$RR' = \frac{2}{l} \cdot \frac{S_A}{l} = \frac{2S_A}{l^2}$$



Фиг. 109.

С другой стороны, когда в пролете имеется единственный сосредоточенный груз $P=1$ в расстоянии a и b от концов пролета, то треугольная эпюра моментов строится по опорным ординатам a и b ; так что, если рассматривать треугольник ABC фиг. 109, как разность BAJ и BCJ , то получится:

$$S_B = \frac{1}{2} l b \frac{1}{3} l - \frac{1}{2} b b \frac{1}{3} b = \frac{l^3 b}{6} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right),$$

а потому:

$$LL' = \frac{2S_B}{l^2} = \frac{l}{3} \cdot \frac{b}{l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right).$$

Последние множители уже известны по (191) они обозначены буквой σ' , а в пункте б) раздела I этого параграфа для них составлена таблица (201); поэтому должно быть:

$$LL' = \frac{l}{3} \sigma', \dots \dots \dots (206-a)$$

и соответственно для правой трети пролета

$$RR' = \frac{l}{3} \sigma \dots \dots \dots (206-b).$$

Так как эти ординаты откладываются на третях пролета и образуют на этих третях прямоугольные треугольники

ALL' и BRR' фигуры 95,

то тангенсы углов наклона гипотенуз треугольников, очевидно будут:

$$tg\alpha = \frac{LL'}{LA} = \frac{l}{3} \sigma' : \frac{l}{3} = \sigma'; \quad tg\beta' = \frac{RR'}{RB} = \frac{l}{3} \sigma : \frac{l}{3} = \sigma \dots \dots \dots (207)$$

Таким образом, числа σ' и σ — суть тангенсы углов наклона гипотенуз фокальных треугольников. Так как в нашем распоряжении уже находятся значения σ для разных положений груза в пролете, то имеются и углы наклона α' и β' для всех этих положений груза. Если мы построим углы и проведем фокальную вертикаль, то останется только наметить точки ее

пересечения φ со сторонами углов*). На фиг. 110 приведена схема такого решения: пунктиром для разных $\frac{a}{l}$ построены



Фиг. 110.

углы β' и α' по тангенсам, взятым непосредственно из таблицы для σ и σ' ; проведены фокальные вертикали и отмечены точки пересечения φ ; в левом пролете фиг. а) через опорную точку A и точки φ' проведен ряд замыкающих эпюры моментов и получены опорные моменты B_1, B_2, B_3 . Для среднего пролета на фиг. б) показана только одна замыкающая эпюры опорных моментов $B'C'$ для определения моментов BB' и CC' , но таким же образом получаются и остальные.

Моменты здесь получаются в масштабе балки, так как груз P был единицей. Но в том случае, если при построении углов α' и β' для ординат был принят не тот масштаб, что для абсцисс, то, конечно, полученные опорные моменты должны быть умножены на соответствующее масштабное число**).

На фиг. 109 показан еще один способ решения, а именно, построены линии влияния для ординат LL' и RR' , которые мы откладываем на третях пролета, чтобы получить опорные моменты по фиг. 95.

По формулам (206) ординаты третьей трети пролета выражаются через σ и σ' умноженные на $\frac{1}{3}l$, где σ — кубическая парабола:

$$\sigma = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = \frac{a}{l} - \frac{a^3}{l^3} \quad \text{и} \quad \sigma' = \frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3}.$$

Они могут быть получены следующим построением (фиг. 109-с). Отложим $A'E = \frac{1}{3}l$ и проведем наклонную EB' . Для каждой точки деления пролета C' проводим $CD \parallel B'E$ и соединяем D с B' . Отметивши пересечение F с вертикалью $C'G$ точки деления пролета, снова проводим параллельную к наклонной направляющей $B'E$ и отмечаем на опорной вертикали точку пересечения H . Соединивши H с B' , на вертикальной $C'G$ отмечаем точку пересечения K , — эта точка принадлежит кубической параболе (206). Проведя вертикали $C'G$ через разные точки деления пролета, мы получим таким образом ряд точек параболы, соответствующих положению груза $P=1$ в точках деления; плавная линия, объединяющая эти точки, очевидно, будет линией влияния для ординаты соответствующей трети пролета. Беря эти ординаты непосредственно по чертежу и перенося их на вертикали LL' или RR' , получим ряд наклонных AL' или BR' , которые дадут ряд фокальных точек φ и φ' для замыкающих и опорных моментов.

*) Построение углов по тангенсам производится особенно просто на клетчатой бумаге. если на оси балки взять катет в 100 мм., то по другому катету придется отмечать лишь числа σ из таблицы.

В последнее время появились специальные транспортиры для тангенсов, наугольники с тангенсовым делением для построения углов на неграфленой бумаге.

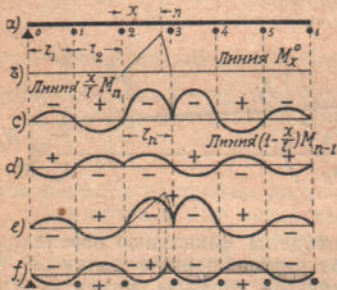
**) К этому иногда приходится прибегать, чтобы сделать чертеж более отчетливым и точным.

2. Линия влияния для изгибающего момента в пролете. а) После определения опорных моментов могут быть определены изгибающие моменты для любого сечения в пролете. Для вычислений служит формула (169):

$$M_x = M_0^x + \left(1 - \frac{x}{l}\right) M_{n-1} + \frac{x}{l} M_n \dots \dots (208),$$

в которой x — есть расстояние назначенного сечения до левой опоры пролета. Очевидно, в качестве первого члена, надо построить линию влияния M_0^x для данного пролета, как для простой разрезной балки, например: для третьего пролета фиг. 111-а) надо построить треугольник фиг. б). Для второго члена выражения ординаты линии влияния опорного момента M_{n-1} надо умножить на дробь $\left(1 - \frac{x}{l}\right)$ и получить фигуру д);

далее ординаты линии момента M_n надо помножить на дробь $\frac{x}{l}$, как показано на фигуре с); наконец, полученные три эпюры б), с) и д) надо алгебраически сложить. Как и прежде, результат получится сам собой при простом наложении эпюр, если у двух складываемых эпюр ординаты одинаковых знаков начертить по разные стороны от оси. На фиг. 111 результат наложения эпюр с) и д) изображен на фиг. е) с отрицательными ординатами, идущими вверх; на той же фигуре е) положительный треугольник третьего пролета фиг. б) также помещен вверх, как показано тонкой линией. Остаток у вершины треугольника представляет положительные моменты, а остаток от параболической площади — отрицательные моменты, вызываемые грузами третьего пролета; в остальных пролетах знаки чередуются, как показано на фиг. ф) где результирующая площадь влияния перечерчена у горизонтальной оси.



Фиг. 111.

Так как линия влияния M_0^x для простой балки ограничивается тем пролетом, где находится сечение, то на остальных пролетах суммируются только линии опорных моментов с) и д), — здесь сохраняется характер линии опорного момента и ее уравнение, особую форму имеет линия влияния только в том пролете, где находится назначенное сечение.

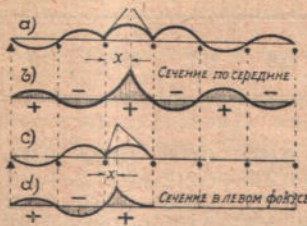
Форма линии влияния изгибающего момента зависит от положения сечения в пролете. Если x близко к l , то линия фигуры 111-ф) мало отличается от линии опорного момента M_n ; это непосредственно усматривается из сопоставления фигур из с) и ф) при смещении сечения до опоры n .

Если $x = \frac{1}{2} l$, то линия влияния для простой балки фиг. б) имеет ординату $\frac{1}{4} l$; ордината линии опорного момента меньше половины этой величины*).

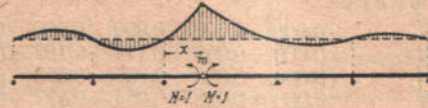
Благодаря этому вся линия опорных моментов располагается внутри треугольника простой балки, как представлено на фиг. 112-а). В результате, в том пролете, где находится сечение, получается криволинейный треугольник и — полуволны в соседних пролетах (фиг. 112-б). Такую форму имеют линии пригибающего момента вообще для всех сечений между фокусами. В этом не трудно убедиться, пользуясь прин-

*) Она была бы $\frac{1}{2} M_0$ при абсолютно защемленных опорах, здесь же мы имеем упругую заделку.

ципом взаимности перемещений. Разрежем балку в назначенном сечении и приложим здесь два равных противоположных момента величиной 1. Как известно, упругая линия, полученная от этих единичных моментов, представляет форму линии влияния для изгибающего момента в назначенном сечении. Форма же упругой линии легко получается, если представить себе отсеченную часть не-



Фиг. 112.



Фиг. 112-е.

разрезной балки, нагруженную моментом на консоли, как показано внизу фиг. 112-е).

Если сечение совпадает с фокусом, например с левым фокусом третьего пролета, то линия влияния имеет только односторонние ординаты.

Уже указывалось, что момент в левом фокусе не зависит от нагрузки правых пролетов балки. Всякий груз, находящийся в одном из правых пролетов: 4, 5, 6 не дает момента в левом фокусе 3 пролета. Очевидно, волны линии двух моментов M_{n-1} и M_n , умноженных на соответствующие коэффициенты форм. (208), равны и противоположны для правых пролетов и уничтожаются; ординаты получаются лишь в n -ом пролете, где назначено сечение, и во всех других, расположенных слева. Конечно, для правого фокуса изображение зеркально повращивается.

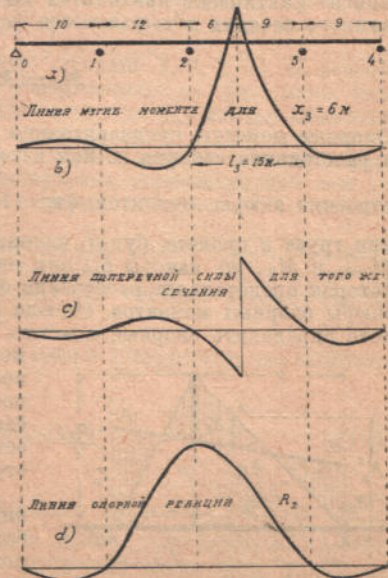
Это заключение имеет общее значение для всех балок (см. напр. таблицу трехпролетной балки для сечения $x = 0,2l$).

б) Численный пример. Приведем детали вычислений для построения линии изгибающего момента в третьем пролете балки фиг. 113. Для этого пролета уже построены линии правого и левого опорных моментов M_2 и M_3 , (фиг. 107) и остается вычислить добавочные ординаты для форм. (208).

Назначим для примера сечение в расстоянии $x = 6$ м. при длине пролета $l_3 = 15$ м.; тогда уравнение линии момента в пределах третьего пролета будет:

$$M_{x3} = M^0 + \frac{15-6}{15} M_2 + \frac{6}{15} M_3 = \\ = M^0 + 0,6M_2 + 0,4M_3.$$

Очевидно, надо построенные уже линии M_2 и M_3 помножить в ординатах на постоянные коэффициенты 0,6 и 0,4 и сложить с линией изгибающего момента простой балки. Производя вычисления в табличной форме, надо цифры для M_2 и M_3 из предыдущей таблицы помножить на 0,6 и соответственно на 0,4, написать ординаты треугольной линии простой балки и результаты сложить. В нижеприведенной таблице ординаты простой балки помещены в первой строке пролета;



Фиг. 113.

для всех пролетов, кроме третьего, они нулевые. Во второй и третьей строке помещены значения M_2 и M_3 из предыдущей таблицы — они должны быть умножены на 0,6 и на 0,4 и сложены с цифрами первой строки. Результат сложения по-

мещается в 4-ой строке и служит ординатами линии влияния для изгибающего момента в сечении $x = 0,4l$ третьего пролета.

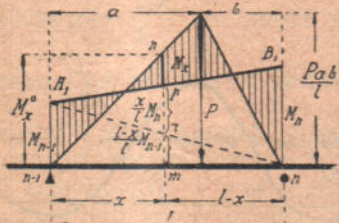
Вычисления ординат линии $M_{0,4l}$ третьего пролета.

$\frac{a}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1-ый пролет											
M_0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
M_2	0,000	+0,059	+0,114	+0,162	+0,199	+0,222	+0,228	+0,212	+0,171	+0,101	0,000
M_3	0,000	-0,018	-0,035	-0,050	-0,062	-0,069	-0,071	-0,066	-0,053	-0,032	0,000
M	0,000	+0,028	+0,054	+0,077	+0,095	+0,106	+0,108	+0,101	+0,081	+0,048	0,000
2-ой пролет											
M_0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
M_2	0,000	-0,164	-0,355	-0,549	-0,723	-0,853	-0,914	-0,884	-0,737	-0,450	0,000
M_3	0,000	+0,051	+0,110	+0,171	+0,226	+0,267	+0,286	+0,276	+0,230	+0,141	0,000
M	0,000	-0,078	-0,169	-0,261	-0,343	-0,405	-0,434	-0,420	-0,350	-0,214	0,000
3-ий пролет											
M_0	0,000	+0,900	+1,800	+2,700	+3,600	+3,000	+2,400	+1,800	+1,200	+0,600	0,000
M_2	0,000	-0,684	-1,114	-1,327	-1,363	-1,260	-1,055	-0,789	-0,498	-0,223	0,000
M_3	0,000	-0,250	-0,552	-0,865	-1,149	-1,364	-1,470	-1,427	-1,194	-0,723	0,000
M	0,000	+0,390	+0,911	+1,558	+2,323	+1,698	+1,179	+0,756	+0,424	+0,177	0,000
4-ый пролет											
M_0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
M_2	0,000	+0,094	+0,158	+0,196	+0,211	+0,206	+0,185	+0,150	+0,106	+0,054	0,000
M_3	0,000	-0,318	-0,535	-0,664	-0,714	-0,697	-0,625	-0,507	-0,357	-0,184	0,000
M_d	0,000	-0,071	-0,119	-0,148	-0,159	-0,155	-0,139	-0,113	-0,079	-0,041	0,000

е) Графический способ. По общему выражению (208) для изгибающего момента в каком-нибудь сечении статически неопределимой балки должны быть сложены: 1) момент простой разрезной балки и 2) момент в том же сечении, вызванный лишними опорными моментами; но так как опорные моменты отрицательны, то обусловленный ими момент фактически приходится вычитать. Поэтому арифметические действия, с моментами данного сечения x выражаются формулою:

$$M_x = M_x^0 - \left(\frac{l-x}{l} M_{n-1} + \frac{x}{l} M_n \right) \dots \dots \dots (209)$$

Опорные моменты предварительно до вычитания, должны быть уменьшены в соответствии с расстоянием сечения x . Как известно, это уменьшение выполняется само собою при построении эпюры моментов, фиг. 114, ибо $pr = \frac{x}{l} M_n$, и $rm = \frac{l-x}{l} M_{n-1}$. При передвижении груза в пролете будет изменяться и момент M_x^0 простой балки и опорные моменты M_{n-1} и M_n , но, каковы бы они ни были, всегда из M_x^0 придется вычитать ординату mp , которая представляет расстояние от центра назначенного сечения x до замыкающей $A_1 B_1$ эпюры опорных моментов. Отсюда следует, что если для каждого положения груза в пролете определить опорные моменты пролета, то соответствующие ординаты mp эпюры моментов представят вычитаемые члены формулы (209) для всех этих положений груза. Если поэтому предварительно построить линию влияния момента в сечении x простой балки, которая дает M_x^0 для всех положений груза, то останется только из ее ординат вычитать соответствующие отрезки mp .



Фиг. 114.

На фиг. 115 приведен пример построения линии влияния для сечения № 2 первого пролета трехпролетной балки, уже имеющей опорные моменты для разных положений груза — они получены на фиг. 108. Прежде всего здесь на фиг. 115-а) построена треугольная линия для простой балки — она показана пунктиром $O_2,4$ и дает ординаты M^0 для всех точек 1, 2, 3, где предполагается последовательная установка груза $P=1$. Затем на вертикали 4 правой опоры первого пролета от горизонтальной оси $O-O$ фиг. б) построены вниз опорные моменты $O-1, O-2$ и $O-3$, получающиеся на правой опоре 4 первого пролета при нахождении груза $P=1$ последовательно в точках 1, 2, 3 — эти моменты взяты с фиг. 108-б). Так как левая опора первого пролета шарнирная, то эпюра опорных моментов имеет здесь нулевую ординату

Проведя теперь через сечение № 2 балки фиг. а) вертикальную прямую, мы отсечем на фигуре б) отрезки 1', 2' и 3', которые должны быть вычтены из ординат треугольной линии влияния 02,4 фигуры а). После вычитания получим сплошную линию из двух слабо вогнутых ветвей 02' и 2'4.

Когда груз $P=1$ находится во втором пролете, то изгибающий момент в сечении № 2 первого пролета выражается через один только опорный момент правой опоры, так как $M^0_x=0$. Величины этого опорного момента уже получены на фиг. 108-с). Если мы по трем по ним фигуру 115-с) и проведем на расстоянии x_2 от левой начальной точки пролета вертикальную прямую, то получим отрезки 2—5', 2—6' ... 2—8', которые должны служить ординатами линии влияния второго пролета и должны быть построены от точек 5, 6 ... 8 вниз на фиг. а).

Когда груз $P=1$ находится в третьем пролете, то опорные моменты первого пролета получаются такие, как были на фиг. 108-а) в третьем пролете при нахождении груза в первом пролете. Поэтому на фигуру 115-d) справа перенесены ординаты из-под опоры С фигуры 108-а), проведены наклонные в полюс О и рассечены вертикалью на расстоянии x_3 ; получились ординаты для третьего пролета фигуры а).

На фиг. 116 построена линия влияния изгибающего момента для сечения, находящегося на расстоянии 0,4l во втором пролете балки. Это сечение обозначено № 6, а соответствующая ему линия влияния простой балки намечена пунктиром 4—6₁—9. Опорные моменты для левой и правой опоры пролета при разных положениях груза 5, 6, 7 и 8 уже были получены на фиг. 108-с), так что, здесь получается засечь их вертикальной линией 6—6' как показано на фиг. 116-d), чтобы получить поправки 6—5', 6—6'—7', и 6—8' к пунктирной треугольной линии 4—6₁—9 фигуры а). После вычитания этих поправок получается сплошная слабо вогнутая линия 4—5'—6'—7'—8' с вершиной 6'.

Когда груз $P=1$ ставится в точки деления первого пролета 1, 2, 3, то во втором пролете одновременно возникают и опорные моменты, изображенные на фиг. 108-б) под опорой В, и моменты на той же фигуре под опорой С. Соответствующие эпюры моментов изображены там тонкой, более жирной и пунктирной линиями. Остается их рассечь вертикаль, проходящей через сечение. На фиг. 116-б) повторен чертеж второго пролета эпюры 108-б) и на расстоянии x_6 , равном 0,4l, взяты отрезки от нулевой горизонтальной оси до наклонных замыкающих эпюры моментов 1', 2' и 3'. Эти отрезки построены под точками 1, 2 и 3 фигуры 116-а).

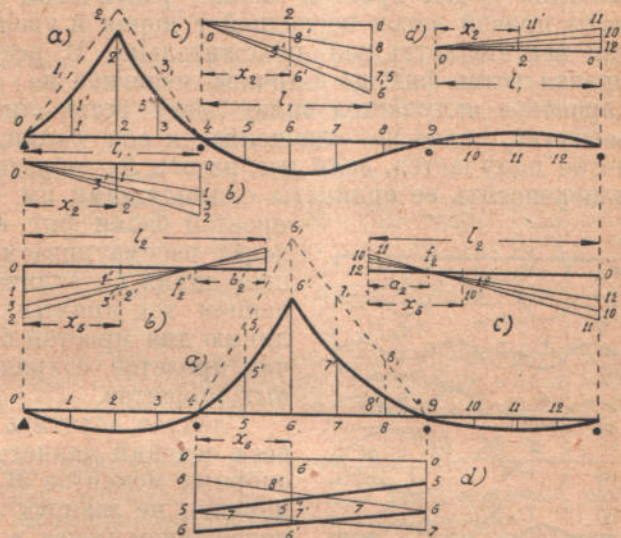
При положениях груза в правом пролете балки замыкающие линии эпюры моментов второго пролета будут пересекаться в левом фокусе, как показано на фиг. 116-с), и засечка их назначенным сечением x_6 приведет к небольшим ординатам, которые откладываются под точками 10, 11 и 12 третьего пролета балки фиг. а).

3. Линия влияния поперечной силы. а) Ее можно построить на основании формулы

$$Q_x = Q^0_x + \frac{M_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n} = Q^0_x + Q^*_x \dots \dots \dots (210),$$

которая составлена в предположении, что опорные моменты M_n и M_{n-1} положительны, т.е. гнут пролет выпуклостью вниз. Здесь приходится составлять разность Q^* линий двух соседних опорных моментов, которые несимметричны относительно середины пролета l_n и в одной из которых л. M_n , вершина отклоняется вправо в то время, как в другой, л. M_{n-1} , — она смещена влево*). Очевидно, разность линий имеет нулевую точку, как показано на фиг. 117-f), где из жирной линии $M_{n-1}:l_n$ вычтена тонкая

*) См. фиг. 108-d и e, или 109.

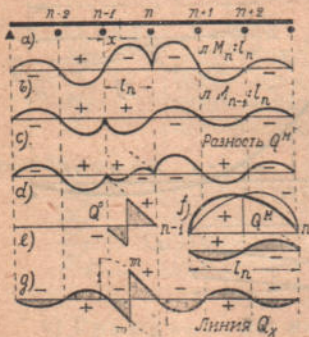


Фиг. 115 и 116.

линия $M_n : l_n$, а общее эс — образное очертание разности показано внизу фигуры f) после приведения к одной горизонтальной оси.

При нахождении груза в пределах пролета l_n оба опорные момента пролета M_{n-1} и M_n — отрицательны, и фактически остаток от члена M_n формулы (210) на фиг. f) всегда будет отрицательным в то время, как остаток члена M_{n-1} — положителен: S — образная площадь влияния моментов Q^m слева имеет плюс, справа — минус.

Складывая S — образную заштрихованную площадь f) с площадью влияния e) для простой балки, фактически мы будем уменьшать ординаты правой ветви последней у корня и увеличивать в вершинной части, так как эта ветвь вся положительна. В результате получится плавная правая ветвь фиг. g) с точкою перегиба по середине пролета. Того же характера получается внизу левая ветвь линии влияния; у корня она вогнутая, далее по отношению к оси балки, она выпуклая. Эта форма легко получается, если изобразить S — образную разность Q^m на фиг. d) и переносить ее ординаты с присущими им знаками к наклонной ветви простой балки фиг. e). Таким образом: 1) в пределах рассматриваемого пролета l_n результирующая линия Q_x отличается только слабым искривлением тех прямых ветвей, которые составляли линию для простой балки, 2) на протяжении прочих пролетов сохраняется характер линии опорных моментов.



Фиг. 117.

Следует обратить внимание на то, 1) что для всех сечений данного пролета l_n линии влияния опорных моментов M_{n-1} и M_n одинаковы, ибо эти моменты не зависят от сечения, а определяются положением груза в пролете и 2) что вычитание S — образной площади Q^m из площади влияния Q^0 простой балки производится одинаково для всех сечений пролета очевидно, для разных сечений

пролета l_n линии влияния поперечной силы будут отличаться только положением переходной вертикали mm' , очертание же ветвей линии для всех сечений пролета одно и то же. Следовательно, для всех сечений данного n -го пролета достаточно построить ветви линии влияния один раз: от опоры до опоры; различные линии получатся простым перемещением переходной вертикали mm' .

б) Численный пример. Построим линию влияния для поперечной силы в сечении третьего пролета четырехпролетной балки фиг. 107, пользуясь уже известными опорными моментами. Для грузов первого, второго и четвертого пролетов достаточно взять разность опорных моментов третьего пролета, так как при отсутствии грузов в третьем пролете, поперечная сила для сечений этого пролета вычисляется по формуле:

$$Q_x = \frac{1}{15} (M_3 - M_2) = 0,0667 (M_3 - M_2).$$

Так как для разных положений груза мы уже имеем значение моментов M_3 и M_2 , то остается их вычитать и умножить на 0,0667. Это выполнено в следующей таблице: для каждой из точек деления пролета на 10 частей выписаны M_2 и M_3 из предыдущей таблицы, а в третьей строке помещен результат вычитания цифр каждого столбца и умножения на 0,0667.

Для третьего пролета поперечная сила

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{1}{15} (M_3 - M_2),$$

и к разности опорных моментов пролета надо прибавлять ординаты линии Q^0 для простой балки. Последние вычисляются по линейной интерполяции и помещены в первых двух строках таблицы третьего пролета.

Таблица вычисления ординат для линии $Q_{0,4l}$ третьего пролета.

$\frac{a}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1-ый пролет											
M_2	0,000	+0,059	+0,114	+0,162	+0,199	+0,222	+0,228	+0,212	+0,171	+0,101	0,000
M_3	0,000	-0,018	-0,035	-0,050	-0,062	-0,069	-0,071	-0,066	-0,053	-0,032	0,000
Q_x	0,000	-0,005	-0,010	-0,014	-0,017	-0,019	-0,020	-0,018	-0,015	-0,009	0,000
2-ой пролет											
M_2	0,000	-0,164	-0,355	-0,549	-0,723	-0,853	-0,914	-0,884	-0,737	-0,450	0,000
M_3	0,000	+0,051	+0,110	+0,171	+0,226	+0,267	+0,286	+0,276	+0,230	+0,141	0,000
Q_x	0,000	+0,014	+0,031	+0,048	+0,063	+0,075	+0,080	+0,077	+0,064	+0,039	0,000
3-ий пролет											
Q_x^0	0,000	-0,100	-0,200	-0,300	-0,400	—	—	—	—	—	—
M_2	0,000	-0,684	-1,114	-1,327	-1,363	+0,500	+0,400	+0,300	+0,200	+0,100	0,000
M_3	0,000	-0,250	-0,552	-0,865	-1,149	-1,364	-1,470	-1,427	-1,194	-0,732	0,000
Q_x	0,000	-0,071	-0,162	-0,269	-0,386	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	+0,614	+0,494	+0,372	+0,257	+0,154	+0,066	0,000
4-ый пролет											
M_2	0,000	+0,094	+0,158	+0,196	+0,211	+0,206	+0,185	+0,150	+0,106	+0,054	0,000
M_3	0,000	-0,318	-0,535	-0,664	-0,714	-0,697	-0,625	-0,507	-0,357	-0,184	0,000
Q_x	0,000	-0,027	-0,046	-0,057	-0,062	-0,060	-0,054	-0,044	-0,031	-0,016	0,000

По данным Q_x этой таблицы получается фигура 113-с).

с) Графический способ. При получении линии влияния для поперечной силы по форм. (210) к линии Q^0 простой балки приходится алгебраически прибавлять

$$\frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} = Q^u.$$

Когда для разных положений груза в пролете получены опорные моменты пролета нетрудно простым геометрическим построением получить и величину Q^u . На основании фиг. 118-г), представляющей эпюру опорных моментов, имеем:

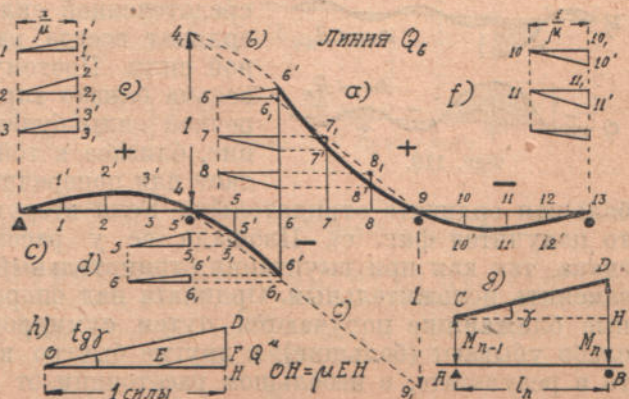
$$Q^u = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} = \frac{DB - CA}{AB} = \frac{DH}{CH} = \text{tg} \gamma \dots \dots \dots (211-a)$$

При этом размерность $\text{tg} \gamma$ есть размерность силовых единиц, ибо ординаты эпюры суть моменты и выражаются произведением длины на силу, так что, для полноты следовало бы написать

(211-b) $\dots \dots \dots Q^u = 1 \cdot \text{tg} \gamma$, где впереди силовая единица.

Очевидно, $\text{tg} \gamma$ — это дробь, которая выражает определенную долю единицы силы, подлежащую вычитанию *) из силовой же дробной ординаты Q^0 простой балки, так что, если на фиг. h) взять тот масштаб сил $OH = 1$, в котором предполагается строить поперечные силы, и провести OD под углом (211), то отрезается $HD = Q^u$ в принятом масштабе сил, ибо получится $Q^u = 1 \cdot \text{tg} \gamma$.

Для получения более точных построений чаще масштаб ординат эпюры моментов фиг. г) увеличивают, **) вследствие чего получают соответственно увеличенные отрезки DH ; они дают искаженную величину Q^u , и чтобы



Фиг. 118.

*) Так как опорные моменты M_n и M_{n-1} вообще говоря отрицательны, то Q^u по форм. 211 фактически приходится вычитать.

**) Обыкновенно раза в 3 — 4. Если замыкающие эпюры моментов строят по коэффициентам ϵ из таблицы раздела 1,5, то уже сразу tangens'ам придают соответствующее искажение.

в этом случае непосредственно по чертежу г) получить истинное Q^m надо уменьшить ординату DH соответственно получившемуся искажению, т.е. уменьшить во столько раз, во сколько масштаб ординат эпюры моментов больше масштаба длины. Это выполняется следующим простым геометрическим построением: делят на фиг. h) единицу силы OH в отношении μ масштабов эпюры моментов — масштаба ординат и масштаба длины, и проводят EF параллельно OD , т.е. параллельно замыкающей эпюры моментов, построенной в масштабе μ . Очевидно отрезок FH будет искома величина Q^m . Итак, при искажении масштаба ординат эпюры моментов в μ раз, поправку Q^m для поперечных сил надо строить не на единице силы, а на ее $\frac{1}{\mu}$ части. Будем называть $\frac{1}{\mu}$ — базой поправок поперечной силы, а FH — поправкой.

На фиг. 148 а-г) по этому примеру выполнено построение линии влияния для сечения 6 второго пролета трехпролетной балки, уже имеющей эпюры опорных моментов на фиг. 108 и 116. Линия влияния Q^0 для простой балки показана пунктиром 9 — 6₁ — 6₂ — 4 на фиг. а) — с). Чтобы получить поправки Q^m от опорных моментов для правой ветви линии 9 — 6₁, намечены точки 6₁, 7₁, 8₁ разных положений груза в пролете и на их уровне на фиг. б)

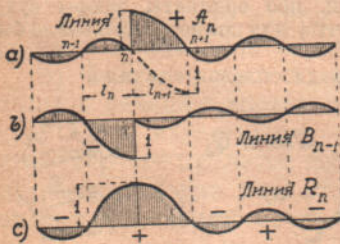
построена горизонтальная база 6,6 длиной в $\frac{1}{\mu}$ единицы силы, показанной над опорой 4. Путем проведения через левые концы баз 6, 7 и 8 наклонных, параллельных соответствующим замыкающим эпюры моментов фиг. 116-д) получены на вертикали 6' — 6' отрезки Q^m , которые и отнесены к соответствующим точкам деления пунктирной наклонной ветви 6₁ — 9 простой балки. Поправки Q^m получились с определенными знаками в зависимости от наклона замыкающей эпюры моментов фиг. 116-д).

Если условиться всегда строить эпюру опорных моментов вниз от оси балки, а начало базы для поправок Q^m считать слева, то подъем вправо всегда выразит положительную поправку, спуск вправо — отрицательную; оба рода поправок при соответствующем горизонтальном переносе с фигуры б) на фиг. а), сами собой алгебраически складываются с ординатами Q^0 . Например, поправка 6,6' прибавляется к ординате 66, а поправка 7,7' из ординаты 77₁ вычитается. При таких условиях остается только провести плавную линию через проекции 6', 7', 8'... концов поправок на соответствующих ординатах линии Q^0 простой балки.

Такое же построение для левой ветви линии влияния на фиг. д) дает положительные поправки Q^m при отрицательных основных ординатах Q^0 , так что результат получается также путем простого горизонтального переноса поправки Q^m . Окончательная форма ветвей показана сплошной линией: 98'76'6'6'54 на фиг. а) — с).

При нахождении груза в крайних пролетах поперечная сила для назначенного сечения 6 среднего пролета выражается только через опорные моменты среднего пролета, так что, построением треугольников Q^m , мы получим окончательные ординаты линии влияния для крайних пролетов. Для левого пролета построение сделано на фиг. е), при чем все наклонные проведены параллельно замыкающим фиг. 116-б). Таким же образом на фиг. 118-г) получены ординаты для правого пролета балки.

4. Линия влияния для опорной реакции. а) Общие формулы для вычисления ординат. Опорную реакцию неразрезной балки можно получить, как разность поперечных сил, которые наблюдаются весьма близко слева и справа от рассматриваемой опоры. Действительно, эпюра поперечных сил всегда делает уступ на сосредоточенной силе, причем разность соседних ординат всегда равна величине сосредоточенной силы. Поэтому возьмем поперечную силу весьма близко вправо от опоры n ; линия поперечной силы будет иметь вид фиг. 119-а). Сечение, близкое к той же опоре, но взятое слева даст для поперечной силы линию фиг. б), — ее большая ордината отрицательна. Если вторую линию вычесть из первой, то получится фиг. с). Площади ее у рассматриваемой опоры — одного знака, так как при вычитании отрицательный знак фигуры б) пришлось заменить положительным. Ордината над опорой n равна единице, остальные ближайšie получаются путем суммирования. Так как одни из них слабо убывают (большие), а другие быстро возрастают от нуля (малые), то в результате, в небольшом расстоянии от опоры n получается больше единиц — максимальная ордината оказывается сдвинутой в сторону от опоры. Отсюда следует, что опорная реакция неразрезной балки может быть больше действующего груза, а при равномерно распределенной нагрузке двух смежных пролетов оно может быть больше, чем для соответствующих двух простых балок.



Фиг. 119.

При вычислении ординат линии влияния воспользуемся общей формулой:

$$R_n = B_n^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + A_{n+1}^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}, \dots \quad (212-a)$$

выражающей сумму реакций, получаемых n -ой опорой от двух простых разрезных балок l_n и l_{n+1} при действии на них нагрузки и опорных моментов (фиг. 120). Объединяя в этой формуле члены, содержащие M_n , получим выражение



Фиг. 120.

$$R_n = B_n^0 + A_{n+1}^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}, \dots \quad (212-b)$$

где уже известные опорные моменты предыдущих таблиц умножаются на постоянные коэффициенты, зависящие только от отношения длины пролетов.

Приведем общие формулы для вычислений, имея в виду реакцию n -ой опоры.

1) Когда груз находится слева, за пределами пролета l_n , прилегающего непосредственно к n -ой опоре, то реакции:

$$B_n^0 = 0, \quad A_{n+1}^0 = 0$$

и
$$R_n = \frac{M_{n-1}}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Но при отсутствии нагрузки пролета, по (175):

$$M_{n-1} = -M_n \frac{l_n - b'_{0n}}{b'_{0n}} \quad \text{и} \quad M_{n+1} = -M_n \frac{b'_{0(n+1)}}{l_{n+1} - b'_{0(n+1)}};$$

поэтому

$$\begin{aligned} R_n &= -M_n \frac{l_n - b'_{0n}}{l_n b'_{0n}} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) - M_n \frac{b'_{0(n+1)}}{l_{n+1}(l_{n+1} - b'_{0(n+1)})} = \\ &= -M_n \left(\frac{1}{b'_{0n}} + \frac{1}{l_{n+1} - b'_{0(n+1)}} \right) \dots \dots \dots \quad (212-c) \end{aligned}$$

2) Когда груз находится в левом из пролетов, непосредственно прилегающих к опоре N , то:

$$A_{n+1} = 0 \quad \text{и} \quad M_{n+1} = -M_n \frac{b'_{0(n+1)}}{l_{n+1} - b'_{0(n+1)}},$$

а потому:

$$\begin{aligned} R_n &= B_n^0 + \frac{M_{n-1}}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) - M_n \frac{b'_{0(n+1)}}{(l_{n+1} - b'_{0(n+1)}) l_{n+1}} = \\ &= B_n^0 + \frac{M_{n-1}}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1} - b'_{0(n+1)}} \right) \dots \dots \dots \quad (213) \end{aligned}$$

3) По аналогии, для ординат правого пролета l_{n+1} получим

$$B_n^0 = 0, \quad M_{n-1} = -M_n \frac{a_{0n}}{l_n - a_{0n}} \quad \text{и}$$

$$R_n = A_{n+1}^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n}{l_n - a_{0n}} =$$

$$A_{n+1}^0 + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} - M_n \left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_n - a_{0n}} \right) \dots \dots \dots \quad (214).$$

4) Если груз правее $(n+1)$ -го пролета то:

$$A_{n+1}^0 = 0, B_n^0 = 0 \text{ и } M_{n+1} = -M_n \frac{l_{n+1} - a_{0(n+1)}}{a_{0(n+1)}}, M_{n-1} = -M_n \frac{a_{0n}}{l_n - a_{0n}},$$

следовательно:
$$R_n = -M_n \left(\frac{1}{l_n - a_{0n}} + \frac{1}{a_{0(n+1)}} \right) \dots \dots \dots (215).$$

б) Численный пример. Применяя эти формулы для вычисления реакции № 2 предыдущего примера фиг. 113, получим:

1) Груз в первом пролете (форм. 212-с):

$$R_2 = -M_2 \left(\frac{1}{b'_{02}} + \frac{1}{l_3 - b'_{03}} \right) = - \left(\frac{1}{2,349} + \frac{1}{15 - 3,571} \right) = -0,513 M_2,$$

так как $b'_{02} = 2,349$ и $b'_{03} = 3,571$.

Ординаты линии R_2 получаются непосредственно из ординат опорного момента, уже имеющих на фиг. 107 и в относящейся к ней таблице.

2) Груз во втором пролете (форм. 213):

$$R_2 = \frac{a}{l_2} + M_1 \cdot \frac{1}{12} - M_2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15 - 3,571} \right) = \frac{a}{l_2} + 0,083 M_1 - 0,171 M_2$$

Ординаты составляются из трех известных ординат: для простой балки и для двух опорных моментов.

3) Груз в третьем пролете (форм. 214):

$$R_2 = \frac{b_3}{l_3} + \frac{M_3}{15} - M_2 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12 - 2,571} \right) = \frac{b_3}{l_3} + 0,067 M_3 - 0,173 M_2$$

4) Груз в четвертом пролете (форм. 215):

$$R_2 = -M_2 \left(\frac{1}{12 - 2,571} + \frac{1}{3,423} \right) = -0,398 M_2.$$

Результаты вычислений помещены в следующей таблице и представлены на фиг. 113-d).

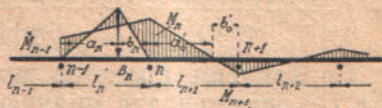
Таблица для вычисления ординат реакции R_2 .

$\frac{a}{l}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1-й пролет											
M_2	0,000	-0,059	-0,114	-0,162	-0,199	-0,222	-0,228	-0,212	-0,171	-0,101	0,000
R_2	0,000	-0,030	-0,058	-0,083	-0,102	-0,114	-0,117	-0,109	-0,088	-0,052	0,000
2-й пролет											
B_3^0	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
M_1	0,000	-0,515	-0,846	1,083	-1,059	-0,994	-0,850	-0,652	-0,427	-0,201	0,000
M_2	0,000	-0,164	-0,355	-0,549	-0,723	-0,853	-0,914	-0,884	-0,737	-0,450	0,000
R_2	0,000	+0,085	+0,190	+0,304	+0,436	+0,563	+0,686	+0,797	+0,890	+0,960	+1,000
3-й пролет											
A_3^0	+1,000	+0,900	+0,800	+0,700	+0,600	+0,500	+0,400	+0,300	+0,200	+0,100	0,000
M_3	0,000	-0,250	-0,552	-0,865	-1,149	-1,364	-1,470	-1,427	-1,194	-0,732	0,000
M_2	0,000	-0,684	-1,114	-1,327	-1,363	-1,260	-1,055	0,789	-0,498	-0,223	0,000
R_2	+1,000	+1,000	+0,956	+0,872	+0,759	+0,627	+0,484	+0,341	+0,206	+0,089	0,000
4-й пролет											
M_2	0,000	+0,094	+0,158	+0,196	+0,211	+0,206	+0,185	+0,150	+0,106	+0,054	0,000
R_2	0,000	-0,037	-0,063	-0,078	-0,084	-0,082	-0,074	-0,060	-0,042	-0,021	0,000

с) Другой прием вычисления.

Вычисления можно вести и другим путем, если влияние опорных моментов учитывать по форм. (193). Для этих моментов уже составлены таблицы, и ими можно непосредственно воспользоваться.

В случае, когда груз $P=1$ находится в левом из пролетов, непосредственно прилегающих к опоре n (фиг. 121), реакция R_n выражается формулой (213):



Фиг. 121.

$$R_n = B_{0n} + \frac{M_{n-1}}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{a'_{0(n+1)}} \right).$$

Но в этом случае, по (193), опорные моменты M_{n-1} и M_n , как моменты гуженного пролета, приходится писать так:

$$M_{n-1} = - \frac{a_{0n} l_n}{c_{0n}} \sigma' + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma_0 \text{ и}$$

$$M_n = - \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n}} \sigma + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma_0;$$

Вследствие чего после подстановки получится:

$$R_n = \frac{a_n}{l_n} - \frac{a_{0n}}{c_{0n}} \sigma' + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} l_n} \sigma_0 + \frac{b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma - \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} l_n} \sigma_0 + \\ + \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \sigma - \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \cdot \sigma_0,$$

или, по замене во втором члене $\sigma' = \sigma_0 - \sigma$ по (192):

$$R_n = \frac{a_n}{l_n} - \frac{a_{0n}}{c_{0n}} (\sigma_0 - \sigma) + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} l_n} \sigma_0 + \frac{b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma - \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} l_n} \sigma_0 + \\ + \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \sigma - \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \cdot \sigma_0 = \frac{a_n}{l_n} + \\ + \left(\frac{a_{0n} + b'_{0n}}{c_{0n}} + \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) \sigma - \left(\frac{a_{0n}}{c_{0n}} + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) \sigma_0 \dots (216).$$

При нахождении груза в правом пролете l_{n+1} (фиг. 122), по (214) реакция

$$R_n = A_{0n+1} + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} - M_n \left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{b_{0n}} \right).$$



Фиг. 122.

Но в этом случае, по фор. (193) опорные моменты будут:

$$M_n = - \frac{a_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)}} \sigma' + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} \sigma_0 \text{ и } M_{n+1} = - \frac{b'_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)}} \sigma + \\ + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} \sigma_0.$$

Поэтому, после подстановки и замены во втором члене σ на $\sigma_0 - \sigma'$, получится:

$$R_n = \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} \cdot (\sigma_0 - \sigma') + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} l_{n+1}} \cdot \sigma_0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} \cdot \sigma' - \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} l_{n+1}} \cdot \sigma_0 + \frac{a_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \cdot \sigma' - \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \cdot \sigma_0 = \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + \\
 & + \left(\frac{a_{0(n+1)} + b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right) \sigma' - \left(\frac{b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right) \sigma_0. \quad (217)
 \end{aligned}$$

По фокусам пролетов мы составляем числовое значение скобок k'_{n+1} и k_{n+1} ; остается для получения ординат линии реакции

$$R_n = \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + k' \sigma' - k \sigma_0 \dots \dots \dots (218-a)$$

выписывать из таблицы числа σ' и σ_0 для разных положений груза, т. е.

для разных
$$\frac{b}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots$$

Таким же образом получается линия реакции

$$R_n = \frac{\sigma_n}{l_n} + k'_n \sigma - k_n \sigma_0 \dots \dots \dots (218-b).$$

для левого пролета l_n .

Преимущество этого способа вычислений состоит в независимости их от опорных моментов; малая точность вычисления последних или случайные в них ошибки не будут поэтому влиять на расчет опорной реакции.

б) Графический способ. Опорную реакцию неразрезной балки можно рассматривать, как сумму реакций двух простых разрезных балок, опирающихся на одну и ту же общую для них опору, надо только принять в расчет и нагрузку пролетов, прилегающих к опоре, и опорные моменты пролетов, — это непосредственно вытекает из форм (212-а). Поэтому и линию влияния для опорной реакции можно получить путем сложения линий для общей опоры. 1) двух смежных простых балок

$$B_n^0 \text{ и } A_{n+1}^0,$$

т. е. двух треугольников с высотой, равной единице над общей опорой, и 2) двух поправочных линий Q^M , зависящих от опорных моментов тех же балок:

$$Q_n^M = \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} \text{ и } Q_{n+1}^M = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} \dots \dots \dots (219).$$

При этом следует иметь в виду, что при каждом положении груза $P=1$ в пролете появляются моменты на всех промежуточных опорах,



Фиг. 123.

ведь вследствие чего для каждого из пролетов, прилегающих к рассматриваемой опоре, придется составлять поправочный член Q^M , как от моментов данного пролета, так одновременно и от моментов соседнего. Например, если на фиг. 123 груз $P=1$ помещается в точке 2 первого пролета трехпролетной балки фиг. 115, то получаются моменты первого пролета 0 и M_B , изображенные наклонной 0—2 на фиг. 115-б), и в то же время моменты M_B и M_C второго пролета,

представленные наклонной 2— f_2 на фиг. 116-б); поэтому, в соответствии с фигурой 118, на базе $\frac{1}{\mu}$ следует построить на фиг. 123-б), две наклонных: 2— $2''$ и 2— $2'$. Так как для форм. (219) момент $M_n = M_B$ отрицательный, то получившаяся поправка $Q_1^M + Q_2^M = 2'' - 2'$ прибавляется к ординате 2— 2_1 пунктирной треугольной линии простой балки 0— 4_1 —4. Таким-же образом суммируются и другие ординаты первого пролета.

Рассмотрим еще для примера ординату 7 второго пролета. Когда в точке 7 находится груз, то возникают опорные моменты:

0 и M_B (—) первого пролета, отмеченные наклонной 0—7 на фиг. 115-с), и M_B (—) и M_C (—) второго пролета, отмеченные линией 7—7 на фиг. 116-d).