

Проведя на фиг. 123-с) от полюса 7 две наклонные, замечаем, что обе они идут вниз; оказывается, что поправка Q_2^M вычитается из Q_1^M и дает небольшой положительный остаток, который должен быть прибавлен к ординате $7 - 7_1$ пунктирного треугольника BC_1 простой балки BC .

При нахождении груза в пределах третьего пролета опорная реакция R_B выражается через одни только опорные моменты, т. е. через Q_1^M и Q_2^M по форм. (219). Очевидно, на фиг. 123-d) надо проводить из полюса наклонные, параллельные замыкающим эпюры моментов в первых двух пролетах, которые будут зеркальным отражением вторых двух пролетов фигуры 108-b).

ГЛАВА III.

РАСЧЕТ БАЛОК ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ.

§ 8. Расчет статически неопределимых балок по линиям влияния. 1. Особенности линий стат. неопредел. балок. Линии влияния таких балок криволинейны, и пользование ими для вычисления расчетных величин M , Q , R затруднительнее, чем в простых балках. Во-первых, при вычислении площадей приходится разбивать их на большое число трапеций, по числу вычисленных ординат, например, на 10-20 частей в каждом пролете; во-вторых, при установке системы сосредоточенных грузов в опасное положение приходится пользоваться критерием в общей форме:

$$\sum R \operatorname{tg} \alpha = 0$$

при значительном числе углов наклона отдельных отрезков линии влияния; а так как критерий служит лишь для проверки пробных положений нагрузки, то его приходится применять по несколько раз, пока не будет найдено опасное положение. Хотя эти вычисления и просты в отдельности, но взятые в совокупности, — они составляют большую вычислительную работу, в особенности при составлении нескольких вариантов расчета, например, при предварительном (эскизном) расчете для выбора системы ферм. С другой стороны при составлении вариантов нет надобности в точных расчетах, так как теоретические преимущества варианта, для его принятия, должны быть совершенно ощутительны, и должны улавливаться при приближенном расчете. Все это говорит в пользу приближенного расчета по готовым линиям влияния и, в частности, в пользу расчета по эквивалентным нагрузкам взамен системы сосредоточенных грузов. В последнее время в практику расчета мостов вошел прием замены разнообразных линий влияния статически неопределимых балок более простыми параболическими. На том пролете, где площадь влияния имеет наибольшее значение, дают ей очертание простой параболы второй степени, равновеликой данной, заменяемой, либо подбирают параболу с такой же максимальной ординатой, как у данной линии влияния. Практический смысл такой замены в том, что уравнение параболы легко интегрируется, и наперед можно установить площади, очерченные параболическими линиями; кроме того, для данной системы сосредоточенных грузов наперед назначается опасное положение и даже может быть рассчитана $\sum Py$, вообще, — могут быть предварительно составлены таблицы поезда, таблицы эквивалентных нагрузок и проч. Весь расчет таким образом значительно упрощается.

2. Параболическая линия влияния для опорного момента неразрезной балки. а) Определим наибольшую ординату линии влияния опорного момента n -го пролета, чтобы установить, какова должна быть стрелка эквивалентной параболической линии. Для этого из общего выражения левого опорного момента (193):

$$M_{n-1} = -\frac{a_0 l_n}{c_0} \sigma' + \frac{a_0 b'_0}{c_0} \sigma_0 = -\frac{a_0 l_n}{c_0} \left(\frac{b}{l_n} - \frac{b^3}{l_n^3} \right) + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \left(\frac{a}{l_n} - \frac{a^2}{l_n^2} \right)$$

на основании производной $\frac{dM}{da} = 0$, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left\{ -\frac{a_0 l_n}{c_0} \left[\frac{l_n - a}{l_n} - \frac{(l_n - a)^3}{l_n^3} \right] + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \left(\frac{a}{l_n} - \frac{a^2}{l_n^2} \right) \right\} = \\ = -\frac{a_0 l_n}{c_0} \left(-\frac{1}{l_n} + 3 \frac{(l_n - a)^2}{l_n^3} \right) + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \left(\frac{1}{l_n} - 2 \frac{a}{l_n^2} \right) = \\ = 1 - 3 \cdot \frac{(l - a)^2}{l^2} + 3 \frac{b'_0}{l} - 6 \frac{a}{l} \frac{b'_0}{l} = 0, \end{aligned}$$

или:
$$\frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} \cdot 2 \left(1 - \frac{b'_0}{l} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{b'_0}{l} \right) = 0$$

определим положение a груза $P=1$, соответствующее максимуму M_{n-1} :

$$\frac{a}{l} = \left(1 - \frac{b'_0}{l} \right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{b'_0}{l} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{b'_0}{l} \right)},$$

или иначе
$$a = a'_0 \pm \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b'_0 a'_0} \dots \dots \dots (220),$$

а подставляя полученное a в выражение для M_{n-1} , найдем и максимальное его значение.

Как указывалось в § 6,2а, величины a_0 и b'_0 близки к $\frac{1}{5} l$ ибо $k = \infty \frac{1}{4}$.

Принимая это приближенное значение $a_0 = b'_0 = \frac{1}{5} l$ и $a'_0 = l - b'_0 = \frac{4}{5} l$,

получим: $a = l \cdot \left(\frac{4}{5} - \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}} \right) = \infty 0,384 l$, следов.. $-b = 0,616 l$,

и наибольшее значение опорного момента

$$\begin{aligned} \text{макс. } M_{n-1} = -\frac{a_0 l_n}{c_0} (0,62 - 0,62^3) + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} (0,38 - 0,38^2) = \\ = -\frac{a_0}{c_0} (0,38 l_n - 0,71 b'_0) \dots \dots \dots (221) \end{aligned}$$

Таким же образом, для правого момента

$$M_n = -\frac{b'_0 l_n}{c_0} \left(\frac{a}{l_n} - \frac{a^3}{l_n^3} \right) + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \left(\frac{a}{l_n} - \frac{a^2}{l_n^2} \right) \dots \dots \dots (222)$$

получим:
$$\begin{aligned} \text{макс. } M_n = -\frac{b'_0 l_n}{c_0} (0,62 - 0,62^3) + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} (0,62 - 0,62^2) = \\ = -\frac{b'_0}{c_0} (0,38 l_n - 0,71 a_0) \dots \dots \dots (223). \end{aligned}$$

Такими должны быть стрелки s эквивалентных парабол. По ним определяется площадь параболы $\omega = \frac{2}{3} s l_n \dots \dots \dots (224)$

и ее уравнение
$$y = \frac{4s}{l^2} x (l_n - x) \dots \dots \dots (225).$$

Этими выражениями пользуются при приближенных расчетах, взамен истинных.

b) По другому приему подбирают параболу, равновеликую истинной площади заключенной между осью абсцисс и линией влияния избранного пролета *).

Определим площадь ω_{n-1} влияния для левого опорного момента M_{n-1} путем интегрирования, т.-е. составим

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} &= \int_0^l M_{n-1} dx = -\frac{a_0 l_n}{c_0} \int_0^{l_n} \left(\frac{b}{l_n} - \frac{b^3}{l_n^3} \right) db + 3 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \int_0^{l_n} \left(\frac{a}{l_n} - \frac{a^2}{l_n^2} \right) da = \\ &= -\frac{1}{4} l_n \left(\frac{a_0 l_n}{c_0} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \right) \dots \dots \dots (226). \end{aligned}$$

Приравнявая площади параболы (224), получим стрелку эквивалентной параболы для приближенного расчета:

$$s_{n-1} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{a_0 l_n}{c_0} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \right) = -\frac{a_0}{c_0} (0,375 l_n - 0,75 b'_0). \dots (227).$$

По аналогии для правого опорного момента того же пролета получим:

$$\omega_n = -\frac{1}{4} l_n \left(\frac{b'_0 l_n}{c_0} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \right) \text{ и } s_n = -\frac{b'_0}{c_0} (0,375 l_n - 0,75 a_0). \dots (228).$$

Эти стрелки мало отличаются от максимальных (221) и (223), они несколько меньше. Приходится пользоваться теми или другими, применяясь к обстоятельствам расчета:

с) Покажем, как по параболической кривой поставить поезд в опасное положение и рассчитать опасный эффект. Положим, что на параболе

$$y = \frac{4s}{l^2} x(l-x)$$



Фиг. 124.

фигуры 124 помещается система связанных грузов $P_1, P_2 \dots P_1 \dots P_n$, равнодействующая которых R ; пусть ординаты под грузами будут $y_1, y_2 \dots y_1 \dots y_n$. Расстояние равнодействующей от левой опоры обозначим x , а расстояния каждого из грузов P до равнодействующей R обозначим $p_1, p_2 \dots$. Тогда эффект, производимый системой грузов будет

$$Y = \Sigma P y = \frac{4s}{l^2} \Sigma P_i x_i (l - x_i).$$

Но по фигуре непосредственно: $x_i = x + p_i$ и $l - x_i = l - x - p_i$; поэтому:

$$Y = \frac{4s}{l^2} \Sigma P_i (x + p_i)(l - x - p_i) = \frac{4s}{l^2} [\Sigma P_i (l - x)x - \Sigma P_i p_i^2],$$

ибо $\Sigma P_i p_i = 0$, как статический момент относительно центра параллельных сил.

Чтобы определить положение, которому соответствует максимальный эффект Y , приравняем нулю производную по x :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{4s}{l^2} (l \Sigma P_i - 2x \Sigma P_i) = 0.$$

Вычисляя отсюда $x = \frac{1}{2} l$, найдем, что равнодействующая всех грузов

*) В дальнейшем, для краткости, эта площадь называется площадью влияния.

системы должна быть посередине пролета. Остается подставить $x = \frac{1}{2}l$ в выражение для Y , чтобы получить его максимум:

$$Y_{\text{макс.}} = \frac{4s}{l^2} \left(\frac{l^2}{4} \Sigma P_1 - \Sigma P_1 p^2_1 \right) = s \left[\Sigma P - \frac{2^2}{l^2} \Sigma P_1 p^2_1 \right] = s \Sigma P_0 \dots (229).$$

Оказывается, что максимальный эффект получается, если стрелку эквивалентной параболы умножить на силу ΣP_0 , которую можно было бы назвать приведенной суммой грузов, помещающихся на балке в действительности. Эта сумма вычисляется предварительно, так как обуславливается исключительно самой системой грузов: на каждом пролете l помещается определенное число осей поезда, установленного техническими нормами расчета мостов, так что, известен вес ΣP , известно положение равнодействующей и расстояния p до каждой из осей. Для каждого пролета, таким образом, можно предварительно установить приведенную сумму сил и составить соответствующую таблицу. Приводим таблицы, составленные Научно-Техническим Комитетом НКПС для современных расчетных мостовых нагрузок. Схема нагрузки со всеми относящимися к ней данными, показана сверху, над таблицей. Число таблиц — три, соответственно трем типам установленной расчетной нагрузки: H — нормальной, Y — усиленной и O — облегченной. (См. стр. 151, 152, 153).

В таблицах, кроме приведенной суммы грузов помещаются также эквивалентные равномерно распределенные нагрузки. Умножая их на площадь линии влияния, получаем необходимый эффект Y .

Имея таблицы параболических кривых, мы сводим расчет по линиям влияния к элементарно простым действиям, например, для получения опорного момента M_{n-1} умножаем стрелку по формуле (221) на приведенную сумму сил ΣP_0 , взятую непосредственно из таблиц:

$$M_{n-1} = - \frac{a_0}{c_0} (0,38l_n - 0,71b'_0) \Sigma P_0$$

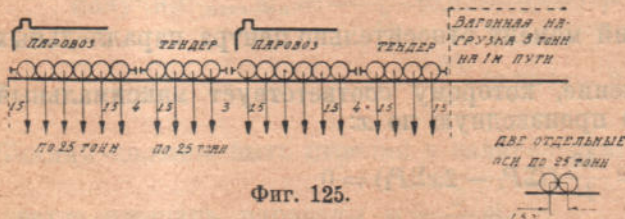
или по форм. (227):

$$M_{n-1} = - \frac{a_0}{c_0} (0,375l_n - 0,75b'_0) \Sigma P_0,$$

или же, — площадь влияния (226) умножаем на эквивалентную нагрузку p_0 из тех же таблиц:

$$M_{n-1} = - \frac{1}{4} p_0 l_n \left(\frac{a_0 l_n}{c_0} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0} \right).$$

д) Примеры. *Первый пример.* Для четырехпролетной балки, рассмотренной на фиг. 107, определим опорный момент M_2 над опорой № 2. Левый и правый пролеты:



Фиг. 125.

$l_2 = 12$ м. и $l_3 = 15$ м.

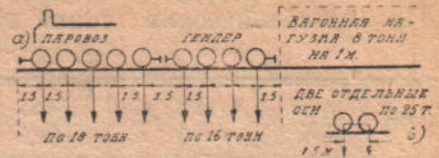
здесь таковы, что на них помещается по одному паровозу. Чтобы получить

наибольший эффект для опорного момента, следует загрузить два соседних пролета: l_2 и l_3 .

Таблица приведенной суммы грузов ΣP_0 и эквивалентных нагрузок p_0 для параболических линий влияния при поезде „Н“ (нормальная нагрузка).

l_m	тонн ΣP_0	т./м. p_0	м. l	тонн ΣP_0	т./м. p_0	м. l	тонн ΣP_0	т./м. p_0	м. l	тонн ΣP_0	т./м. p_0
5	57,00	17,10	36	316,46	13,19	92	634,82	10,35	148	902,99	9,15
6	68,75	17,19	38	334,75	13,21	94	644,33	10,28	150	912,74	9,13
7	79,08	16,95	40	351,71	13,19	96	653,83	10,22	152	922,51	9,10
8	89,84	16,85	42	367,40	13,12	98	663,33	10,15	154	932,25	9,08
9	101,39	16,90	44	382,03	13,02	100	672,80	10,09	156	942,03	9,06
10	110,63	16,59	46	395,79	12,91	102	682,27	10,03	158	951,83	9,04
11	117,46	16,02	48	408,85	12,78	104	691,73	9,98	160	961,63	9,02
12	122,66	15,33	50	421,33	12,64	106	701,25	9,92	162	971,42	9,00
13	128,60	14,84	52	433,33	12,50	108	710,76	9,87	164	981,25	8,98
14	136,29	14,60	54	444,90	12,36	110	720,27	9,82	166	991,11	8,96
15	145,00	14,50	56	456,14	12,22	112	729,78	9,77	168	1000,95	8,94
16	154,69	14,50	58	467,09	12,08	114	739,28	9,73	170	1010,77	8,92
17	165,22	14,58	60	477,80	11,95	116	748,84	9,68	172	1020,67	8,90
18	174,38	14,53	62	488,29	11,81	118	758,39	9,64	174	1030,54	8,88
19	182,13	14,38	64	498,66	11,69	120	767,95	9,60	176	1040,42	8,87
20	188,74	14,16	66	508,87	11,57	122	777,49	9,56	178	1050,31	8,85
21	194,44	13,89	68	518,94	11,45	124	787,10	9,52	180	1060,25	8,84
22	193,38	13,59	70	528,92	11,33	126	796,69	9,48	182	1070,16	8,82
23	205,36	13,59	72	538,80	11,23	128	806,28	9,45	184	1080,07	8,81
24	213,77	13,36	74	548,59	11,12	130	815,90	9,41	186	1090,02	8,79
25	224,45	13,47	76	558,30	11,02	132	825,52	9,38	188	1099,98	8,78
26	233,92	13,50	78	567,96	10,92	134	835,17	9,35	190	1109,93	8,76
27	242,36	13,47	80	577,56	10,83	136	844,83	9,32	192	1119,88	8,75
28	250,29	13,41	82	587,20	10,74	138	854,47	9,29	194	1129,87	8,74
29	260,43	13,47	84	596,79	10,66	140	864,15	9,26	196	1139,87	8,72
30	269,58	13,48	86	606,33	10,58	142	873,86	9,23	198	1149,85	8,71
32	286,26	13,42	88	615,85	10,50	144	883,57	9,20	200	1159,86	8,70
34	301,39	13,30	90	625,35	10,42	146	893,27	9,18			

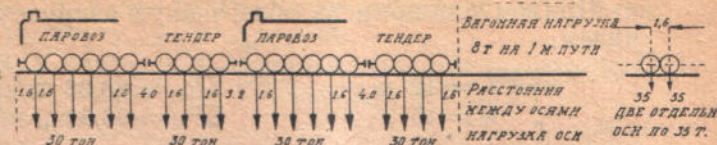
Таблица для поезда „О“
(облегченная нагрузка).



Фиг. 126.

l м.	ΣP_0 тонн	P_0 т./м.	l м.	ΣP_0 тонн	P_0 т./м.							
5	41,04	12,31	36	207,98	8,67	92	499,13	8,14	148	794,89	8,06	
6	49,50	12,38	38	218,15	8,61	94	509,56	8,13	150	805,44	8,05	
7	56,94	12,20	40	228,44	8,57	96	520,07	8,13	152	816,15	8,05	
8	64,69	12,13	42	238,67	8,52	98	530,56	8,12	154	826,73	8,05	
9	70,00	11,67	44	248,87	8,48	100	541,18	8,12	156	837,29	8,05	
10	73,98	11,10	46	259,15	8,45	102	551,72	8,11	158	847,85	8,05	
11	78,85	10,75	48	269,53	8,42	104	562,23	8,11	160	858,60	8,05	
12	83,36	10,42	50	279,88	8,40	106	572,87	8,11	162	869,16	8,05	
13	87,90	10,14	52	290,13	8,37	108	583,27	8,10	164	879,73	8,05	
14	92,56	9,92	54	300,64	8,35	110	593,96	8,10	166	890,33	8,05	
15	96,91	9,69	56	310,93	8,33	112	604,46	8,10	168	900,90	8,04	
16	101,89	9,55	58	321,19	8,31	114	615,04	8,09	170	911,63	8,04	
17	106,59	9,41	60	331,73	8,29	116	625,58	8,09	172	922,23	8,04	
18	112,47	9,37	62	342,11	8,28	118	636,10	8,09	174	932,81	8,04	
19	118,28	9,34	64	352,46	8,26	120	646,75	8,08	176	943,39	8,04	
20	124,10	9,31	66	362,91	8,25	122	657,26	8,08	178	953,99	8,04	
21	129,65	9,26	68	373,36	8,24	124	667,79	8,08	180	964,73	8,04	
22	135,01	9,21	70	383,78	8,22	126	678,45	8,08	182	975,32	8,04	
23	140,52	9,16	72	394,13	8,21	128	688,97	8,07	184	985,93	8,04	
24	145,67	9,10	74	404,64	8,20	130	699,51	8,07	186	996,51	8,04	
25	151,03	9,06	76	415,12	8,19	132	710,19	8,07	188	1007,10	8,04	
26	156,35	9,02	78	425,52	8,18	134	720,72	8,07	190	1017,72	8,03	
27	161,42	8,97	80	436,07	8,18	136	731,27	8,07	192	1028,47	8,03	
28	166,74	8,93	82	446,60	8,17	138	741,96	8,06	194	1039,06	8,03	
29	171,95	8,89	84	457,04	8,16	140	752,50	8,06	196	1049,68	8,03	
30	177,06	8,85	86	467,47	8,15	142	763,07	8,06	198	1060,27	8,03	
32	187,35	8,78	88	478,03	8,15	144	773,77	8,06	200	1070,87	8,03	
34	197,61	8,72	90	488,51	8,14	146	784,31	8,06	—	—	—	

Таблица для поезда „У“
(усиленная нагрузка)



Фиг. 127.

l	ΣP_0	p_0	l	ΣP_0	p_0	l	ΣP_0	p_0	l	ΣP_0	p_0
5	65,42	19,63	36	362,41	15,10	92	706,55	11,52	148	966,14	9,79
6	77,33	19,33	38	381,44	15,06	94	715,91	11,42	150	975,61	9,76
7	88,65	19,00	40	402,42	15,09	96	725,12	11,33	152	985,01	9,72
8	102,00	19,13	42	421,63	15,06	98	734,37	11,24	154	994,43	9,69
9	113,63	18,94	44	439,06	14,97	100	743,67	11,16	156	1003,87	9,65
10	126,24	18,94	46	455,27	14,85	102	752,83	11,07	158	1013,24	9,62
11	135,57	18,49	48	470,46	14,70	104	762,08	10,99	160	1022,80	9,59
12	142,67	17,83	50	484,79	14,54	106	771,24	10,91	162	1032,21	9,56
13	148,19	17,10	52	498,38	14,38	108	780,45	10,84	164	1041,80	9,53
14	155,33	16,64	54	511,34	14,20	110	789,71	10,77	166	1051,25	9,50
15	164,22	16,42	56	523,76	14,03	112	799,00	10,70	168	1060,76	9,47
16	174,10	16,32	58	535,69	13,86	114	808,15	10,63	170	1070,31	9,44
17	185,06	16,33	60	547,20	13,68	116	817,34	10,57	172	1079,88	9,42
18	196,75	16,40	62	558,34	13,51	118	826,67	10,51	174	1089,29	9,39
19	207,33	16,37	64	569,14	13,34	120	835,86	10,45	176	1099,00	9,37
20	216,37	16,23	66	579,87	13,18	122	845,08	10,39	178	1108,51	9,34
21	224,14	16,01	68	590,32	13,02	124	854,34	10,34	180	1118,04	9,32
22	230,88	15,74	70	600,51	12,87	126	863,64	10,28	182	1127,74	9,30
23	236,76	15,44	72	610,69	12,72	128	872,97	10,23	184	1137,30	9,27
24	243,80	15,24	74	620,64	12,58	130	882,18	10,18	186	1146,93	9,25
25	253,72	15,22	76	630,60	12,45	132	891,49	10,13	188	1156,57	9,23
26	265,44	15,31	78	640,15	12,31	134	900,83	10,08	190	1166,22	9,21
27	276,67	15,37	80	649,93	12,19	136	910,02	10,04	192	1175,96	9,19
28	286,73	15,36	82	659,53	12,07	138	919,42	9,99	194	1185,52	9,17
29	295,76	15,30	84	668,96	11,95	140	928,69	9,95	196	1195,27	9,15
30	306,28	15,31	86	678,42	11,83	142	938,06	9,91	198	1204,85	9,13
32	327,32	15,34	88	687,75	11,72	144	947,45	9,87	200	1214,58	9,11
34	345,82	15,26	90	697,23	11,62	146	956,86	9,83	—	—	—

Примем для примера облегченную нагрузку O , для которой по таблице имеем:

при $l_2 = 12$ м.	$\Sigma P_{02} = 83,36$ т.	$p_{02} = 10,42$ т/м.
„ $l_3 = 15$ „	$\Sigma P_{03} = 96,91$ „	$p_{03} = 9,69$ „

Так как по § 7,1с: $a_{02} = 2,571$ м,	$b'_{02} = 2,349$ м.	$c_{02} = 7,080$ м.
$a_{03} = 3,423$ „	$b'_{03} = 3,571$ „	$c_{03} = 8,006$ „

$$\begin{aligned} \text{то } M_2 &= \frac{b'_{02}}{c_{02}} (0,375 \cdot l_2 - 0,75 a_{02}) \Sigma P_{02} + \frac{a_{03}}{c_{03}} (0,375 \cdot l_3 - 0,75 b'_{03}) \Sigma P_{03} = \\ &= \frac{2,349}{7,080} (0,375 \cdot 12 - 0,75 \cdot 2,571) 83,36 + \frac{3,423}{8,006} (0,375 \cdot 15 - 0,75 \cdot 3,571) \cdot 96,91 = \\ &= 0,855 \cdot 83,36 + 1,262 \cdot 96,91 = 193,5 \text{ тм. (отрицат.).} \end{aligned}$$

Мы приняли здесь для стрелки формулу (228) дающую меньший результат, так как оба паровоза соседних пролетов стеснены расстоянием между головами, и стать в опасное положение одновременно на обоих пролетах не могут; таблицы же составлены в предположении, что пролеты разрезные и, нагрузка занимает опасное положение беспрепятственно*).

Второй пример. В качестве второго примера рассмотрим пятипролетный мост с большими пролетами:

$$l_1 = 70 \text{ м.}, l_2 = 80, l_3 = 100, l_4 = 80 \text{ и } l_5 = 70 \text{ м.}$$

Для него по общей формуле фокусов (176):

$$a_{01} = 0, a_{02} = 80 \frac{1}{3 + \frac{70}{80} \cdot 2} = 16,84 \text{ м}$$

$$a_{03} = 100 \frac{1}{3 + \frac{80}{100} \left(2 - \frac{16,84}{80 - 16,84} \right)} = 22,80 \text{ „}$$

$$a_{04} = 80 \frac{1}{3 + \frac{100}{80} \left(2 - \frac{22,80}{100 - 22,80} \right)} = 15,58 \text{ „}$$

$$a_{05} = 70 \frac{1}{3 + \frac{80}{70} \left(2 - \frac{15,58}{80 - 15,58} \right)} = 13,96 \text{ „}$$

По симметрии, идя от крайней правой опоры в сторону левой, получим:

$$b'_{05} = 0, b'_{04} = 16,84, b'_{03} = 22,80, b'_{02} = 15,58 \text{ и } b'_{01} = 13,96.$$

Поэтому:

$$c_{01} = 70 - 13,96 = 56,04 \text{ м.}, c_{02} = 80 - 16,84 - 15,58 = 47,58 \text{ м.}$$

$$c_{03} = 100 - 2 \cdot 22,80 = 54,40 \text{ м.}$$

При определении расчетного опорного момента № 2 (между вторым и третьим пролетами), вызываемого нормальным поездом „Н“, поместим 2 паровоза с тендерами на большем пролете $l_3 = 100$ м., загружая остальное пространство пролета вагонами; левый, меньший пролет $l_2 = 80$ м. за-

*) В этом заключается „то приспособление к обстоятельствам расчета“ о котором говорилось в конце пункта б): пользуясь формулой (228), мы отчасти смягчаем избыточный эффект ΣP_y , который получается при сложении двух максимальных эффектов в соседних пролетах по таблице поезда.

грузим только вагонами, так как по техническим условиям достаточно одновременное нахождение на мосту двух паровозов.

По таблице параболических линий для нагрузки „Н“ при пролете $l_3 = 100$ м. находим приведенную сумму сил $\Sigma P_0 = 672,80$ т. и умножаем на стрелку параболы:

$$s = -\frac{22,80}{54,40} (0,38 \cdot 100 - 0,71 \cdot 22,80) = -9,16;$$

Получается $M'_2 = -672,8 \cdot 9,16 = -6160$ т.м.

Для второго пролета $l_2 = 80$ м., нагруженного вагонами, по фигуре 125 берем эквивалентную нагрузку $p_0 = 800$ т./м. и умножаем на площадь линии влияния по форм. (226):

$$\omega_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{16,84}{47,58} \cdot 80 - 2 \frac{16,84 \cdot 15,58}{47,58} \right) 80 = -345,2,$$

т. е. берем $-345,2 \cdot 8 = -2760$ т.м. = M''_2 .

В результате опорный момент

$$M_2 = M'_2 + M''_2 = -6160 - 2760 = -8920 \text{ т.м.}$$

е) Опорный момент крайнего пролета отличается от промежуточных тем, что в этом пролете $a_0 = 0$ и $M_0 = 0$. При таких условиях, положение груза $P=1$, вызывающего наибольшую ординату линии влияния, по формуле (220-а), определяется абсциссой

$$a = l_1 \sqrt{1/3},$$

а правый опорный момент, по форм. (222) получает выражение:

$$M_1 = -\frac{b'_{01} l_1}{l_1 - b_{01}} \left(\frac{a}{l_1} - \frac{a^3}{l_1^3} \right) = -\frac{b'_{01}}{a'_{01}} a \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right) \dots (230)$$

и площадь линии влияния по (228):

$$\omega_1 = -\frac{1}{4} \frac{b'_{01} l_1^2}{l_1 - b_{01}} = -\frac{1}{4} \frac{b'_{01} l_1^2}{a'_{01}}.$$

Поэтому стрелки эквивалентных парабол будут

$$s = -\frac{b'_{01} l_1}{a'_{01}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3} \frac{b'_{01} l_1}{\sqrt{3} a'_{01}} = -0,385 \frac{b'_{01} l_1}{a'_{01}},$$

или

$${}^{2/3} s l_1 = -1/4 \frac{b'_{01} \cdot l_1^2}{a'_{01}}, \text{ откуда } s = -\frac{3}{8} \frac{b'_{01} l_1}{a'_{01}} = -0,375 \frac{b'_{01} l_1}{a'_{01}}.$$

3. Параболическая линия для момента в пролете. Так как при эскизных расчетах нас интересует из промежуточных сечений каждого пролета лишь то, которое соответствует наибольшему возможному моменту пролета, то рассмотрим сечение, близкое к середине; как известно, в таких сечениях, расположенных между фокусами f и f' , обе ветви линии влияния на протяжении всего пролета положительны (см. § 6,6).

Обозначим расстояние назначенного сечения до левой опоры пролета x , а до правой — x' . Тогда изгибающий момент:

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{x'}{l} + M_n \frac{x}{l}, \dots (231),$$

где M_x^0 — момент в назначенном сечении x для простой балки, M_{n-1} и M_n — левый и правый опорные моменты пролета.

Положим, что p — эквивалентная нагрузка для данной связанной системы сосредоточенных грузов. При положении ее на балке каждый из членов выражения для M_x определяется, как площадь линии влияния, умноженная на интенсивность p_x но для простой балки линия влияния имеет вид треугольника высотой $\frac{xx'}{l}$, так что:

$$M_x^0 = p \frac{xx'}{l} \frac{l}{2} = p \frac{xx'}{2},$$

Вынесем в выражении (231) M_x^0 , т. е. $p \frac{xx'}{2}$ за скобки:

$$M_x = M_x^0 \left(1 + \frac{2M_{n-1}}{pxl} + \frac{2M_n}{px'l} \right)$$

и обозначим площади линий влияния

$$\frac{M_{n-1}}{p} = \omega_{n-1} \text{ и } \frac{M_n}{p} = \omega_n$$

соответствующие только опорным моментам; получим:

$$M_x = M_x^0 \left(1 + \frac{2\omega_{n-1}}{xl} + \frac{2\omega_n}{x'l} \right).$$

Подставим выражения для ω_{n-1} и ω_n по форм. (226) и (228):

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a_0 l}{c_0 x} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0 x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{b_0' l}{c_0 x'} - 2 \frac{a_0 b'_0}{c_0 x'} \right) \right] = \\ &= M_x^0 \left[1 - \frac{1l}{2c_0} \left(\frac{a_0}{x} + \frac{b'_0}{x'} \right) + \frac{a_0 b'_0}{c_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} \right) \right] = \\ &= M_x^0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{l}{c_0} \left(\frac{a_0}{x} + \frac{b'_0}{x'} - 2 \frac{a_0 b'_0}{xx'} \right) \right]. \end{aligned}$$

При этом фокальные расстояния, при приближенных расчетах, в соседних пролетах считаются одинаковыми, т. е. $a_{0n} = a_{0(n+1)}$ и т. д.

Таким образом, наибольшее значение момента в данном сечении пролета неразрезной балки определяется через момент для того же сечения простой балки M_x^0 путем умножения на коэффициент, стоящий в последних квадратных скобках.

Для простой балки площадь линии треугольная $\omega_0 = \frac{1}{2} xx'$.

По таблице эквивалентных нагрузок для принятого в расчете поезда находят величину нагрузки q , соответствующую назначенному сечению x^*). Умножают ω_0 на q :

$$M_x = q\omega_0 = \frac{1}{2} xx'q \dots \dots \dots (232).$$

Остается умножить на коэффициент в скобках, который вычисляется по фокальным расстояниям a_0, b_0 и назначенному сечению x, x' .

Следует заметить, что вычитаемый член скобок несколько преувеличен, и его следует уменьшить, процентов на 5; окончательно:

$$M_x = M_x^0 \left[1 - 0,475 \frac{l}{c_0} \left(\frac{a_0}{x} + \frac{b'_0}{x'} - 2 \frac{a_0 b'_0}{xx'} \right) \right] \dots \dots \dots (233).$$

*) В обычных таблицах эквивалентных нагрузок даются значения, отдельно для сечений, назначенных у опор, и для сечений вблизи середины пролета; в данном случае останавливаются на последних.

Эта формула вполне подтверждается расчетами произведенными на ряде примеров.

Если сечение находится в первом пролете, неразрезной балки, то $a_0 = 0$, и формула для момента упрощается:

$$M_x = M_x^0 \left(1 - 0,475 \frac{l_1 b'_{01}}{c_{01} x'} \right) = M_x^0 \left(1 - 0,475 \frac{l_1}{a'_{01}} \cdot \frac{l_1}{x'} \right) \dots (234),$$

так как $c_{01} = l_1 - a_{01} - b'_{01} = l_1 - b'_{01} = a'_{01}$ и $b'_{01} = l_1 - a'_{01} = l_1$.

4. Линия влияния опорной реакции. По предыдущему, линия влияния опорной реакции для какой-нибудь из промежуточных опор очерчивается двумя несимметричными параболой, сдвинутыми к опоре. Ее также можно заменить параболой второго порядка с равновеликой площадью. Возьмем выражение (216) для опорной реакции R_n в том случае, когда груз $P = 1$

находится на левом прилегающем пролете l_n ; интеграл $\int_0^{l_n} R_n da$

представит площадь линии влияния на протяжении левого пролета. Таким

же образом $\int_0^{l_{n+1}} R_n da$

будет площадью влияния для грузов правого пролета l_{n+1} , если воспользоваться выражением (217) для левой реакции $(n+1)$ -го пролета. Сумма интегралов дает площадь влияния, которую следует приравнять площади $\frac{2}{3} f(l_n + l_{n+1})$ искомой параболической линии. Выполняя эти действия,

имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} s (l_n + l_{n+1}) = \\ & = \int_0^{l_n} \left[\frac{a_n}{l_n} + \left(\frac{a_{0n} + b'_{0n}}{c_{0n}} + \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) \sigma_n - \left(\frac{a_{0n}}{c_{0n}} + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) \sigma_{0n} \right] da + \\ & + \int_0^{l_{n+1}} \left[\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} + \left(\frac{a_{0(n+1)} + b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right) \sigma'_{n+1} - \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right) \sigma_{0(n+1)} \right] dz = \frac{l_n + l_{n+1}}{2} + \\ & + \frac{l_n}{4} \left(\frac{a_{0n} + b'_{0n}}{c_{0n}} + \frac{b'_{0n} l_n}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) - \frac{l_n}{2} \left(\frac{a_{0n}}{c_{0n}} + \frac{a_{0n} b'_{0n}}{c_{0n} a'_{0(n+1)}} \right) + \\ & + \frac{l_{n+1}}{4} \left(\frac{a_{0(n+1)} + b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} l_{n+1}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)}} + \frac{a_{0(n+1)} b'_{0(n+1)}}{c_{0(n+1)} b_{0n}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим $C_n = \frac{l_n}{c_{0n}} \left(b'_{0n} - a_{0n} + \frac{b'_{0n}}{a'_{0(n+1)}} (l_n - 2a_{0n}) \right)$

и $D_{n+1} = \frac{l_{n+1}}{c_{0(n+1)}} \left[a_{0(n+1)} - b'_{0(n+1)} + \frac{a_{0(n+1)}}{b_{0n}} (l_{n+1} - 2b'_{0(n+1)}) \right]$.

Тогда будет $s = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \frac{C_n + D_{n+1}}{l_n + l_{n+1}} \dots \dots \dots (235)$.

Пользуются этой формулой по предыдущему: из таблицы параболической линии выписывают приведенную сумму сил ΣP_0 для пролета $l_n + l_{n+1}$ и умножают на s , предварительно вычисленное по этой формуле.

Для крайней опоры выражение реакции соответственно упрощается; здесь реакция состоит из реакции простой балки R_0^0 , вызванной грузом $P=1$, и реакции от правого опорного момента $M_1: l_1$: $R_0 = R_0^0 + \frac{M_1}{l_1}$, так как слева опора—шарнирная и $M_0 = 0$.

Но по (230):
$$M_1 = -\frac{b'_{01}}{a'_{01}} a \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right),$$

поэтому
$$R_0 = R_0^0 - \frac{b'_{01}}{a'_{01}l_1} a \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2} \right) \dots \dots \dots (236).$$

Второй член, зависящий от опорного момента, меняется по параболическому закону; заменим его равновеликой параболой, составляя по предыдущему уравнение:

$$\frac{2}{3} sl_1 = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{b'_{01}}{l_1 - b'_{01}} \left(a - \frac{a^3}{l^2} \right) da = \frac{b'_{01}}{l_1(l_1 - b'_{01})} + \left(\frac{l_1^2}{2} - \frac{l_1^4}{4l_1^2} \right) = \frac{l_1 b'_{01}}{4a'_{01}},$$

и определяя из него s :
$$s = \frac{3}{8} \frac{b'_{01}}{a'_{01}} \dots \dots \dots (237).$$

Тогда
$$\text{макс. } R_0 = \text{макс. } R_0^0 - \frac{3}{8} \frac{b'_{01}}{a'_{01}} \Sigma P_0,$$

где ΣP_0 — приведенная сумма сил из таблицы параболической линии влияния для расчетного поезда. Следует однако иметь в виду, что в таблице дается ΣF_0 для опасного положения поезда на параболической линии, а так как это положение не является опасным для суммарной реакции, то второй член не следует вводить в расчет полностью. При положении поезда, опасном для реакции R_0 , сумма произведений из грузов на ординаты будет меньше, чем табличная величина ΣP_0 , так как поезд сдвигается к концу параболы. Путем сравнительных подсчетов выяснено, что это уменьшение достигает 20%. Поэтому окончательно расчетную формулу для крайней опорной реакции пишут:

$$\text{макс. } R = \text{макс. } R^0 - 0,3 \frac{b'_0}{a'_0} \Sigma P_0 \dots \dots \dots (238).$$

5. Расчет поперечной силы. Для сечений в промежуточном пролете линия влияния поперечной силы неразрезной балки мало отличается от линии простой балки в пределах пролета, содержащего сечение см. фиг. 117-g); это происходит от слабой искривленности ветвей линии влияния, а также от того, что искривление ветвей на протяжении половинок пролета идет в разные стороны, мало отражаясь на общей величине площади влияния. Поэтому, приближенно, поперечную силу неразрезной балки получают, как для простой балки: $Q_x = Q_x^0$ а именно: по таблицам эквивалентных нагрузок для данного пролета l и для длины загруженной части x' определяют эквивалентную нагрузку q и умножают ее на треугольную площадь влияния:

$$\omega' = \frac{1}{2} x' \cdot \frac{x'}{l} = \frac{1}{2} \frac{x'^2}{l}.$$

Следовательно, здесь приходится пользоваться формулами:

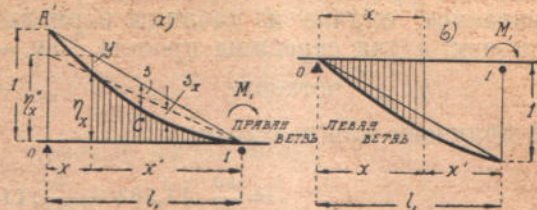
$$\text{макс. } Q_x = \omega_x' q = \frac{1}{2} q \frac{x'^2}{l} \dots \dots \dots (239).$$

и
$$\text{мин. } Q_x = \omega_x q = \frac{1}{2} q \frac{x^2}{l}.$$

В крайних же пролетах неразрезной балки линия поперечной силы, искривлена в одну сторону (фиг. 128), и к линии простой балки приходится вводить поправку. Приближенно можно положить, что

$$\text{макс. } Q_x = \text{макс. } Q_x^0 \frac{\eta_x}{\eta_x^0} - s_x \Sigma P_0,$$

где из ординат треугольной линии простой балки, пропорционально уменьшенных, вычитается площадь параболического отрезка, обусловливаемого влиянием



Фиг. 128.

янием правого опорного момента M_1 . В этой формуле: $\eta_x^0 = 1 \cdot \frac{x'}{l}$, стрелка s по середине параболы $A'C1$, по 237:

$$s = \frac{3}{8} \frac{b'_0}{a'_0}, \text{ и уравнение параболы } y = \frac{4s}{l^2} xx',$$

а потому:

$$\eta_x = \eta_x^0 - y = 1 \cdot \frac{x'}{l} - \frac{4s}{l^2} xx' = \frac{x'}{l} \left(1 - \frac{3b'_0 x}{2a'_0 l} \right)$$

и отношение
$$\frac{\eta_x}{\eta_x^0} = 1 - \frac{3}{2} \frac{b'_0 x}{a'_0 l}.$$

Стрелка s_x по середине расчетного отрезка x' выражается через стрелку середины пролета по свойству параболы второй степени:

$$s_x = s \frac{x'^2}{l^2} = \frac{3}{8} \frac{b'_0}{a'_0} \frac{x'^2}{l^2}.$$

Следовательно, подставивши, получим:

$$\text{макс. } Q_x = \text{макс. } Q_x^0 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{b'_0}{a'_0} \frac{x}{l} \right) - 0,375 \frac{b'_0}{a'_0} \frac{x^2}{l^2} \Sigma P_0.$$

Лучше однако в последнем члене брать 0,3 и пользоваться формулой

$$Q_x = Q_x^0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{b'_0}{a'_0} \frac{x}{l} \right) - 0,3 \frac{b'_0 x^2}{a'_0 l^2} \Sigma P_0 \dots \dots \dots (240).$$

Наибольшее значение отрицательной поперечной силы в том же сечении получится таким же образом, но поправочный член влияния правого опорного момента придется не вычитать, а прибавлять к члену простой балки, так что будет:

$$\text{мин. } Q_x = \text{мин. } Q_x^0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{b'_0}{a'_0} \frac{x}{l} \right) + 0,3 \frac{b'_0 x^2}{a'_0 l^2} \Sigma P_0 \dots \dots \dots (241).$$

Это следует из формы левой ветви линии влияния, приведенной на фиг. 128-b).

6. Примеры вычисления моментов, поперечных сил и реакций. а) Изгибающий момент во втором пролете пятипролетной балки раздела 1-d*) на расстоянии $x = 25$ м от левой опоры. Для этой балки уже вычислены a_0 , b_0 и c_0 , так что, непосредственно применяется формула (233).

Предварительно определяем момент M_x^0 для простой балки. По (232) для этого надо располагать эквивалентной нагрузкой q .

*) См. второй пример.

Обыкновенно в таблице эквивалентных нагрузок помещаются значения q для середины пролета и для четверти, так что, для промежуточных сечений приходится определять q по линейной интерполяции. В рассматриваемом случае из таблицы нормального расчетного поезда „Н“ выпишем: q для середины пролета 80 м. — 11,156 т./м.

q „ четверти „ „ — 11,564 „

и получаем для $x = 25$ м.:

$$= \frac{15}{20} \cdot 11,564 + \frac{5}{20} \cdot 11,156 = 11,462 \text{ т./м.}$$

Расчетный момент простой балки будет:

$$M_x^0 = \frac{1}{2} q_x x x' = \frac{1}{2} \cdot 11,462 \cdot 25 \cdot 55 = 7880 \text{ кг.}$$

Затем вычисляем коэффициент при M_x^0 по форм. (233):

$$1 - 0,475 \cdot \frac{80}{47,58} \left(\frac{16,84}{25} + \frac{15,58}{55} - 2 \cdot \frac{16,84 \cdot 15,58}{25 \cdot 55} \right) = 0,541,$$

В результате $M_x = 7880 \cdot 0,541 = 4260 \text{ т. м.}$

б) Расчет поперечной силы в том же сечении. Максимальная поперечная сила получится при полном загрузении правого положительного участка, т. е. при протяжении нагрузки $x' = 80 - 25 = 55$ м.; при этом длина недогруженной части пролета будет $x = 25$ м. По таблице эквивалентных нагрузок имеем $q = 13,384 \text{ т./м.}$

Считая, что приближенно можно пользоваться площадью влияния для простой балки, находим по форм. (239): $Q_x = 13,384 \cdot \frac{55^2}{2 \cdot 80} = 253 \text{ т.}$

Для наибольшей отрицательной поперечной силы загружаем весь левый, отрицательный участок линии влияния длиной $x = 25$ м., так что, длина недогруженной части пролета будет $80 - 25 = 55 \text{ м.} > 4 \text{ м.}$ По таблице находим эквивалентную нагрузку $q = 15,021 \text{ т./м.}$; следовательно:

$$Q_x = -15,021 \cdot \frac{25^2}{2 \cdot 80} = -58,75 \text{ т.}$$

в) Определение расчетной реакции для опоры № 2. Для формулы (235) определяем:

$$c_2 = \frac{l_2}{c_{02}} \left[b'_{02} - a_{02} + \frac{b'_{02}}{a'_{03}} (l_2 - 2a_{02}) \right] =$$

$$= \frac{80}{47,58} \left[15,58 - 16,84 + \frac{15,58}{100 - 22,80} (80 - 2 \cdot 16,84) \right] = 13,29,$$

$$D_3 = \frac{l_3}{c_{03}} \left[a_{03} - b'_{03} + \frac{a_{03}}{b'_{02}} (l_3 - 2b'_{03}) \right] =$$

$$= \frac{100}{54,40} \left[22,80 - 22,80 + \frac{22,80}{80 - 16,84} (100 - 2 \cdot 22,80) \right] = 36,11;$$

после чего стрелка $s = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \frac{13,29 + 36,11}{80 + 100} = 0,853.$

По таблице для параболической линии при $l_2 + l_3 = 180 \text{ м.}$ находим

$$\Sigma P_0 = 1060,25 \text{ т.}$$

Следовательно, $R_2 = 0,853 \cdot 1060,25 = 905 \text{ т.}$

d) Расчет реакции № 0. Для получения расчетной реакции простой балки R^0 , надо загрузить весь пролет $x' = l_1$; длина недогруженной части $l - x'$ будет нуль. Для $x' = 70$ м. находим по таблице эквивалентных нагрузок поперечной силы: $q = 12,597 \frac{т}{м}$, а потому реакция

$$R^0 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot q = \frac{1}{2} \cdot 12,597 \cdot 70 = 441 \text{ т.}$$

Поправка на влияние опорного момента выражается

$$0,3 \cdot \frac{b'_0}{a'_0} \Sigma P_0 = 0,3 \cdot \frac{13,96}{70 - 13,96} \Sigma P_0 = 0,0747 \Sigma P_0,$$

где, по таблице для параболической линии при пролете 70 м.,

$$\Sigma P_0 \text{ составляет } 528,92 \text{ т.}$$

Окончательно: $R = R^0 - 0,0747 \Sigma P_0 = 441 - 0,0747 \cdot 528,92 = 401,5 \text{ т.}$

7. Общее замечание. Рассматриваемый приближенный расчет по линиям влияния имеет в виду только тот пролет, где находится назначенное сечение для момента или поперечной силы, либо — два соседних пролета для опорного момента или реакции промежуточной опоры. Остальные пролеты таблицами отбрасываются, как погрешность расчета. Влияние их вообще говоря не велико, так как линии влияния для неразрезных балок представляют ряд быстро затухающих волн. Но если бы явилась потребность считаться с соседними пролетами, то их линии тоже надо было бы заменить соответствующими параболой.

§ 9. Расчетные эпюры балок при подвижной нагрузке. 1. Общие замечания. Если, кроме постоянной неподвижной нагрузки, балка подвержена действию движущихся грузов, то в каждом ее сечении к постоянным расчетным величинам момента M и поперечной силы Q присоединяются переменные, зависящие от положения подвижной нагрузки. Эти переменные при движении грузов могут изменять не только величину, но и знак, и при значительной интенсивности грузов могут в результате изменить знак постоянных расчетных величин. При расчете балок необходимо установить те предельные значения, которых достигают в каждом сечении балки полные (суммарные) изгибающие моменты и поперечные силы.

Назовем эти предельные величины расчетными.

Для получения расчетных моментов M и поперечных сил Q , обыкновенно, сначала строят эпюры M и Q при постоянной нагрузке, определяя таким образом M и Q одновременно во всех сечениях балки. Затем разбивают пролет на части и для каждого из делений устанавливают нагрузку в опасное положение для положительных и отдельно — для отрицательных значений искомой величины; при этом пользуются линиями влияния или указаниями § 6,7. Далее определяют значение этих величин, которые будем называть временными: максимумом и минимумом *).

Чтобы получить расчетные величины, к постоянным значениям M или Q прибавляют отдельно временный максимум и отдельно временный минимум. Абсолютно большая сумма называется расчетным максимумом, а абсолютно меньшая — расчетным минимумом.

Отношение между ними влияет на назначение допускаемого напряжения в том случае, если имеет место понижение прочности материала или кон-

*) Здесь слова максимум и минимум употребляются в математическом смысле, отвечая наибольшему положительному и наибольшему отрицательному моментам, либо наибольшему и наименьшему значениям момента одного знака в том случае, если при всех перемещениях нагрузки знак момента в данном сечении сохраняется.

струкции вследствие переменности усилия и это понижение исчисляется в зависимости от интервала усилий, например, по формуле Вейрауха:

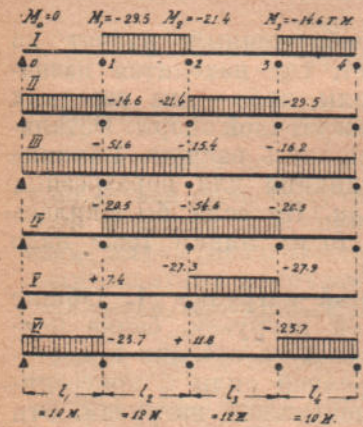
$$n_{\text{пер.}} = \frac{2}{3} n_{\text{пост.}} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{p \cdot \text{мин.}}{p \cdot \text{макс.}} \right) \dots \dots \dots (242).$$

Абсолютные величины расчетных M и Q служат для проверки размеров сечения в разных местах пролета, например по формуле:

$$\frac{M_{\text{р. макс.}}}{W} \leq n_{\text{доп.}} \dots \dots \dots (243).$$

Технику определения расчетных изгибающих моментов и поперечных сил рассмотрим на следующем численном примере.

2. Численный пример расчета четырехпролетной балки. Рассмотрим балку на пяти опорах, при постоянной равномерно распределенной нагрузке $p = 0,9$ тонны на 1 пог. метр (и временной $q = 3,6$ т. на п. м. которая может занимать любое положение. Пролеты балки неодинаковы, но расположены симметрично: крайние — по 10 м., средние — по 12 м. (фиг. 129).



Фиг. 129.

Расчет изгибающих моментов.

а) Определим положение фокусов графически, по указанию фиг. 94. На фиг. 130-а показано определение левых фокусов f , по известному фокусу первого пролета (0 на опоре А): точки деления пролетов на 3 части показаны крестиками и обозначены С и Е, как на фиг. 94; разница между длиной двух соседних третей пролета попала на второй пролет и отмечена отрезком 1 — D. Проводя наклонную через D до пересечения с вертикалями С и Е, а затем соединяя О с К и продолжая до опоры 1, мы получаем направление M_1H , которое пересекает ось балки в фокусе f_2 второго пролета. Так как второй и третий пролеты одинаковы, то при дальнейших построениях наклонную K_2E_2 проводим непосредственно через опорную точку 2, и полученный уже фокус второго пролета соединяем с К, продолжая до M_2 и т. д., как показано легким пунктиром.

Благодаря симметрии балки нет надобности определять отдельно правых фокусов, так как они получаются по имеющимся уже левым путем соответствующего зеркального отражения.

б) Определим опорные моменты для случая отдельного нагружения первого пролета. Когда нагрузка q только на левом пролете балки, то по (§ 6,4-б) реакция от моментной нагрузки будет $B' = \frac{1}{24} ql_1^3$, а потому, по (180),

надо построить $CC' = -\frac{2K'}{l_1} = -\frac{1}{12} ql_1^2 = -\frac{1}{12} \cdot 3,6 \cdot 10^2 = -30$ т. м.

Соединяя C' с 1 и проводя вертикальную через фокус f_1 , получим точку пересечения ψ_1' для проведения замыкающей эпюры опорных моментов $0\psi_1'M_1$. Опорный момент M_1 оказывается

$$M_1 = -22,06 \text{ т.м.}$$

Направляя из M_1 прямую на f_2' получаем $M_2 = +5,92$ т.м., а, соединяя M_2 с f_3' , получаем $M_3 = -1,61$ т.м.

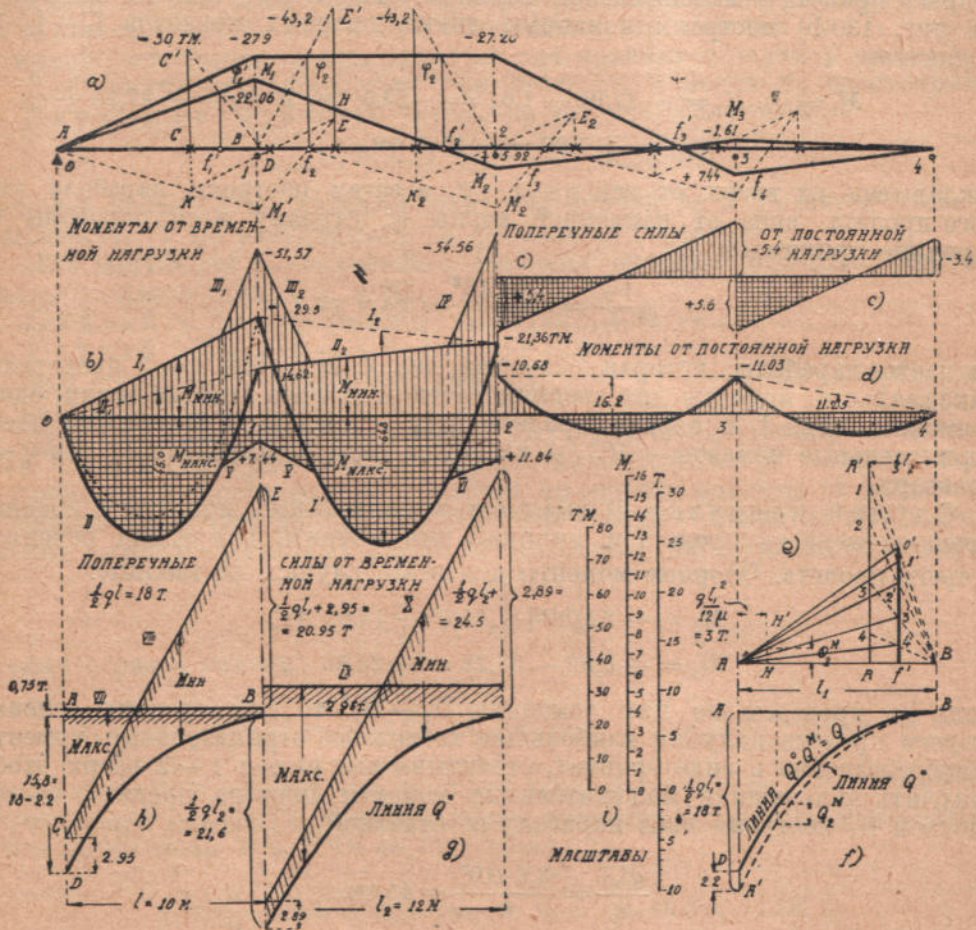
Вся зигзагообразная эпюра опорных моментов показана сплошной линией.

При отдельном загрузении только второго пролета, на третьях пролета, придется строить ординаты $EE' = -\frac{1}{12}ql_2^2 = -\frac{1}{12} \cdot 3,6 \cdot 12^2 = -43,2$ тм.; по ним определяются точки φ_2 и φ'_2 , а также опорные моменты

$$M_1 = -27,9 \text{ тм.}, M_2 = -27,28 \text{ тм.}$$

и далее

$$M_3 = +7,44 \text{ тм.}$$



Фиг. 130.

По этим данным составляются также и моменты для отдельного загрузения третьего и четвертого пролета. Сопоставим их в следующей табличке.

Положение нагрузки	Опорные моменты в тм.		
	M_1	M_2	M_3
В первом пролете	-22,06	+ 5,92	- 1,61
Во втором пролете	-27,90	-27,28	+ 7,44
В третьем пролете	+ 7,44	-27,28	-27,90
В четвертом пролете	- 1,61	+ 5,92	-22,06
Во всех пролетах одновременно	-44,13	-42,72	-44,13

Эта таблица, как и раздел 7 параграфа 6, указывают, каким образом следует разместить подвижную нагрузку, чтобы получить максимальные и минимальные опорные моменты. Пользуясь ею, построим эпюру расчетных моментов.

с) Для разыскания максимальных и минимальных моментов, которые могут появляться в разных сечениях балки при перемещении временной нагрузки q , рассмотрим несколько случаев загрузки отдельных пролетов.

1 случай, представленный на фиг. 129, в соответствии с указаниями раздела 7 параграфа 6, для средних сечений первого пролета *) дает минимальные изгибающие моменты и одновременно для средних сечений второго пролета — максимальные моменты. Чтобы получить их величину, на фиг. 130-б) построим ломанную линию опорных моментов $I_1 - I_2$ по ординатам:

$$M_0 = 0; M_1 = -27,90 - 1,61 = -29,5 \text{ тм. и } M_2 = -27,28 + 5,92 = -21,4 \text{ тм.,}$$

откладывая их вверх от оси 0—1—2, а затем построим параболу второго пролета, вниз от наклонной хорды I_2 ; стрелку этой параболы по середине принимаем

$$q \frac{l_2^2}{8} = \frac{3,6 \cdot 12^2}{8} = 64,8 \text{ тм.}$$

Та часть параболы, которая окажется внизу под осью 1—2 представит максимальные моменты для средних сечений второго пролета балки; одновременно линия I_1 в первом пролете даст наибольшие возможные здесь отрицательные моменты — $M_{\text{мин}}$. — их также надо отсчитывать от оси 0—1, но вверх.

Случай нагрузки II вызывает максимальные моменты в средних сечениях первого пролета и минимальные моменты в средних сечениях второго пролета. Опорные моменты для этого случая, по таблице:

$$M_1 = -22,06 + 7,44 = -14,62 \text{ тм.}$$

$$M_2 = +5,92 - 27,28 = -21,36 \text{ ,,}$$

Если мы проведем по ним ломанную $II_1 - II_2$, то для средних сечений второго пролета получим наибольшие возможные отрицательные моменты непосредственно в виде ординат, отсчитываемых от оси 1—2 вверх; чтобы получить наибольшие положительные моменты первого пролета, от наклонной II_1 построим вниз параболу со стрелкой

$$\frac{q l_1^2}{8} = \frac{3,6 \cdot 10^2}{8} = 45 \text{ тм.}$$

часть параболы, лежащая ниже оси 0—1 представит эти моменты.

Таким образом в результате рассмотрения двух случаев нагрузки I и II получились для средних сечений первого и второго пролета одновременно и максимальные возможные моменты, двояко заштрихованные отсчитываемые вниз от оси 0—1—2, и минимальные моменты, вертикально заштрихованные и отсчитываемые от той же оси 0—1—2 вверх.

Мы не будем здесь рассматривать отдельно промежуточных сечений, так как они занимают незначительный участок пролета, и изменение моментов здесь представляет плавный переход к моментам крайних сечений, а потому практически, обыкновенно, не отражается на подборе сечений балки. Перейдем к крайним сечениям.

*) Терминологию см. в выноске § 6,7.

Как установлено в § 6,7, опасное положение нагрузки для крайних сечений и для соответствующих опорных моментов одинаково. А так как опорные моменты выражают крайнее значение моментов вблизи опор, то определим максимум и минимум, именно, для опорных моментов.

Случай нагрузки III рассматривается для получения наибольшего отрицательного момента опоры № 1:

$$\text{мин. } M_1 = -22,06 - 27,90 - 1,61 = -51,57 \text{ тм.}$$

Взявши эти величины из первого столбца таблицы, откладываем их вверх от оси 0—1—2 над опорой № 1. Если теперь провести от конца ординаты — 51,57 наклонные III₁ и III₂ к местам, где пересекаются линии минимальных моментов I₁ и II₂ с фокальными вертикалями f'_1 и f'_2 , то приблизительно закончится эпюра моментов для крайних сечений у опоры 1.

Для получения наибольшего отрицательного момента M_2 , рассмотрим— Случай нагрузки IV. Здесь, по таблице, получится:

$$\text{мин. } M_2 = -2 \cdot 27,28 = -54,56 \text{ тм.,}$$

который должен быть отложен вверх над опорой № 2. Остается провести наклонную IV по направлению на фокальную вертикаль f'_2 .

Для получения максимального значения опорных моментов загрузим балку согласно схемам V и VI.

Случай V дает по таблице: $\text{макс. } M_1 = +7,44 \text{ тм.}$

Случай VI: $\text{макс. } M_2 = +2 \cdot 5,92 = +11,84 \text{ тм.}$

Эти величины откладываем вниз от оси 0—1—2 на опорах № 1 и № 2 и проводим наклонные V и VI.

d) Моменты от постоянной нагрузки определены на фиг. d). Так как оба рода расчетных нагрузок и постоянная p и временная q , равномерно распределены по пролетам, то опорные моменты от постоянной нагрузки получатся из вышеприведенной таблицы моментов путем умножения нижних суммарных чисел на отношение интенсивностей нагрузки

$$\frac{p}{q} = \frac{0,9}{3,6} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом найдем:

$$M_1 = -\frac{1}{4} \cdot 44,13 = -11,03 \text{ тм., } M_2 = -\frac{1}{4} \cdot 42,72 = -10,68 \text{ тм.}$$

Откладывая эти моменты вверх от оси балки 2—3—4 на фиг. d), построим пунктирную ломанную линию опорных моментов, от которой вниз должны быть направлены параболы со стрелками:

$$s_3 = \frac{1}{4} \cdot 64,8 = 16,2 \text{ тм. и } s_4 = \frac{1}{4} \cdot 45,0 = 11,25 \text{ тм.}$$

e) Расчетные моменты в разных сечениях балки получатся, если соответственно просуммировать эпюры b) и d). Выполнивши сложение эпюр, мы получим те пределы, в которых изменяются моменты во всех сечениях балки *).

*) Подробная таблица ординат для случая равных пролетов приведена в следующем разделе этого параграфа, при фиг. 141 (см. таблицу № 7).

Построение эпюр моментов при наличии таблиц производится по ординатам, но проще, во всех случаях равномерной нагрузки, пользоваться шаблонами. Из ватманской бумаги или тонкого прочного картона вырезают шаблоны параболы, основание которой, примерно, раза в $1\frac{1}{2}$ больше большего из пролетов балки. Надо приготовить два шаблона: один для постоянной нагрузки p , а другой для полной нагрузки $p+q$; в первом стрелку параболы делают $\frac{1}{8}pl^2$, а во втором — $\frac{1}{8}(p+q)l^2$. Масштаб для ординат (стрелок)

Расчет поперечных сил.

f) Поперечные силы Q^0 . Для получения расчетных поперечных сил в разных сечениях пролета приходится загружать часть пролета от сечения до опоры; следовательно, длина загружаемого участка изменяется вместе с перемещением сечения и вместе с этим изменяется и поперечная сила. При этом оказываются непостоянными оба члена общего выражения для поперечной силы неразрезной балки:

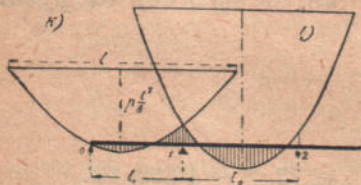
$$Q_n = Q_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \dots \dots \dots (244)$$

и поперечная сила простой балки Q^0 и поперечная сила, вызванная опорными моментами.

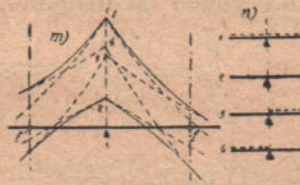
Для простой балки поперечная сила в данном сечении получается путем умножения интенсивности нагрузки на площадь одного заштрихованного треугольника фиг. 117-е) и потому она изменяется пропорционально квадрату длины загруженной части пролета, так что, эпюра изменения максимальной поперечной силы вместе с переходом от сечения к сечению будет параболой. Для ее построения установим две точки: 1) на правом конце B пролета, соответственно моменту вступления нагрузки, надвигающейся справа — мы имеем нуль; 2) на левом конце A пролета, т. е. в момент, когда нагрузка, надвигающаяся справа, займет весь пролет, — имеем ординату $\frac{1}{2}ql$. По этим двум ординатам на фиг. 131-с) внизу построена парабола BA' *). Она показана пунктиром и своими ординатами

называют достаточно крупный для отчетливости чертежей эпюры. Отмечают так же вершину параболы.

Вычисливши опорные моменты от постоянной нагрузки и отдельно от временной нагрузки каждого из пролетов балки в отдельности и, по предыдущему, пользуясь схемой



Фиг. 130-к и л.

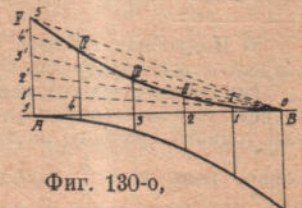


Фиг. 130-м и п.

загрузки, вычисляют расчетные опорные моменты: максимальные и минимальные; откладывают их в принятом масштабе шаблона на соответствующих опорных вертикалях, а затем придвигают шаблон, перемещая его по рейсшине так, чтобы основание все время оставалось горизонтальным,

параллельным оси балки, до тех пор, пока бока шаблона одновременно не пройдут через концы двух уже построенных опорных ординат одного пролета после чего обчерчивают шаблон между этими концами. На фиг. 130-к) показано построение эпюры моментов для постоянной нагрузки, причем шаблон проходит через нулевую точку на левой опоре, так как это первая шарнирная опора неразрезной балки; справа на фиг. л) показано построение эпюры для второго пролета той же балки. Полученными таким образом участками параболы, обыкновенно, пользуются только между фокусами пролета. На протяжении между фокусами и ближайшими к ним опорами, при детальном построении эпюр, вообще говоря, получается по две параболы для максимальных и минимальных моментов соответственно схеме загрузки фиг. n; на фиг. m) они показаны пунктиром. Проводя сплошные плавные линии, обнимаемые этими пунктирными, мы получим то очертание эпюры, которым приходится пользоваться возле опор вместо первых парабол.

*) Напомним способ построения параболы, удобный в таких случаях. Разбивают пролет на равные части, например, на 5 на 10.. и на столько же частей разбивают опорную ординату. От точек деления ординаты проводят наклонные в полюс b на противоположном конце пролета и засекают их ординатами, проходящими через точки деления пролета: первый луч засекает первой ординатой, второй луч — второй ординатой и т. д. Полученные точки пересечения I, II, III... обчерчивают по лекалу. На фиг. 130-о) сверху построена парабола для нагрузки, надвигающейся справа, т. е. для $Q_{\text{макс.}}$, а снизу — парабола для левых грузов соответственно $Q_{\text{мин.}}$



Фиг. 130-о,

дает величину поперечной силы, вызванной односторонней нагрузкой, расположенной от правой опоры B до рассматриваемой ординаты.

г) Поправка от опорных моментов. Второй член выражения (244) обозначим буквой Q^u , т.-е. примем

$$Q^u = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \dots \dots \dots (245).$$

При надвигании нагрузки q , величина Q^u изменяется вместе с изменением обоих опорных моментов M_n и M_{n-1} . Удобнее всего изучить это изменение, пользуясь линиями влияния.

Как известно*), для построения опорных моментов мы на третях пролета строим ординаты:

1) $LL' = \frac{1}{3} l\sigma'$, которую назовем η , и 2) $RR' = \frac{1}{3} l\sigma$, которую назовем η' (246)

Они изменяются вместе с перемещением груза, так как зависят от σ , которые представляют функцию b (см. форм. 191), и дают возможность построить линии влияния для величин η и η' . Однако, в таком построении нет надобности, ибо можно использовать результат и не прибегая к самому построению.

Положим, что равномерно распределенная нагрузка q занимает участок b от правой опоры B (Фиг. 131-б) до намеченного сечения; тогда длина ординат LL' и RR' , откладываемых на третях пролета, должна быть результатом суммирования действия отдельных элементарных грузов qdb , взятых для различных $\frac{b}{l}$ в пределах от нуля до b , т.-е. должно быть:

$$\begin{aligned} LL' &= \int_0^b \eta q db = q \frac{l}{3} \int_0^b \left(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3} \right) db = q \frac{l}{3} \left(\frac{b^2}{2l} - \frac{b^4}{4l^3} \right) = \\ &= q \frac{l^2}{12} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} \right) \frac{b^2}{l^2}. \end{aligned}$$

Обозначая буквой σ_2 выражение:

$$\frac{b^2}{l^2} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} \right),$$

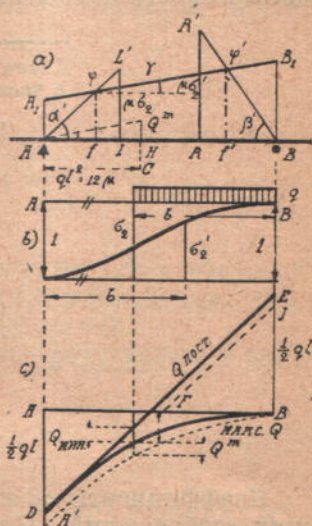
независящее от пролета, и буквою ${}_z M$ — момент защемления балки при сплошной равномерной нагрузке q , получим:

$$LL' = \frac{ql^2}{12} \sigma_2 = {}_z M \sigma_2 \dots \dots \dots (247-a).$$

Соответственно для правой трети пролета получим ординату:

$$RR' = \frac{ql^2}{12} \sigma'_2 = {}_z M \sigma'_2 \dots \dots \dots (247-b).$$

Таким образом, чтобы получить ординаты третьей пролета, надо иметь в распоряжении числа σ_2 и σ'_2 для разных протяжений загрузки, считая



Фиг. 131.

*) См. форм. (206).

от правой и от левой опоры пролета. Эти числа не зависят от длины пролета и могут быть вычислены предварительно.

Приводим таблицу, в которой даны числа σ_2 для протяжений нагрузки отличающихся на 0,1 пролета.

Таблица накопления ординат в третях пролета при надвигании сплошной нагрузки.

Ординаты даются в предположении, что момент защемления пролета при сплошном загрузении равняется единице; поэтому числа таблицы должны быть умножены на ${}_z M = \frac{1}{12} q l^2$.

Длина загрузки-ния в частях пролета $\xi' = \frac{b}{l}$	Ордината σ_2 для левой трети про- лета	Ордината σ'_2 для правой трети пролета
0,0	0,0	0,0
0,1	0,0199	0,0361
0,2	0,0784	0,1296
0,3	0,1719	0,2601
0,4	0,2944	0,4096
0,5	0,4375	0,5625
0,6	0,5904	0,7056
0,7	0,7399	0,8281
0,8	0,8704	0,9216
0,9	0,9639	0,9801
1,0	1,0000	1,0000

Коэффициенты σ'_2 этой таблицы получаются из σ_2 на основании следующих соображений. При $b=l$, т. е. при загрузении всего пролета, число $\sigma_2 = 1$. В этот момент мы можем рассматривать сплошную нагрузку, как составленную из двух частей:

справа от опоры B , — участок b_x ,

и слева от опоры A , — участок $a = l - b_x$;

очевидно, загрузка слева всегда дополняет до единицы величину σ_2 от загрузки справа, а потому, если построить на фиг. 131 — b) вниз от оси AB ординаты σ_2 для разных протяжений нагрузки справа, включая и $b=l$, то влияние загрузки слева определится, как расстояние до нижней, прямой, проведенной параллельно AB на расстоянии единицы. Но, если загрузка справа дает для ординаты левой трети пролета значение σ_2 то такой же длины загрузка слева определяет ординату σ'_2 для правой трети пролета. Поэтому для каждого данного протяжения нагрузки b фиг. 131 — b) справа мы берем под концом нагрузки C ординату σ из верхней части фигуры b) и откладываем в конце левой трети пролета

$$LL' = \sigma_2,$$

затем ту же длину b откладываем внизу фигуры b) слева и в конце ее находим ординату σ'_2 которую надо отложить на правой трети пролета:

$$RR' = \sigma'_2.$$

Построивши на третях пролета такие ординаты, а по ним — наклонные AL' и $R'B$ и отметивши точки φ и φ' пересечения с фокальными вертикалями фиг. 131 — a), мы получим замыкающую эпюры опорных моментов A_1B_1 . Однако на опорных вертикалях она отсекает не истинную величину моментов, а отрезки, разделенные, по (247), на

$${}_z M = \frac{1}{12} q l^2 \text{ — (отвлеченные числа).}$$

Кроме того, при построении ординат приходится пользоваться более крупным масштабом, чем масштаб длины *), например, за единицу принимать μ метров длины балки; поэтому опорные отрезки AA_1 и BB_1 фигуры 131 — а) представляют собою

$$\frac{M_n \mu}{12 ql^2} \text{ и } \frac{M_{n-1} \mu}{12 ql^2} \text{ — (некоторое число метров).}$$

Выразим при таких условиях tangens угла наклона замыкающей линии A_1B_1 :

$$tg \gamma = \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \cdot \frac{12 \gamma}{ql^2}.$$

А так как, по (245), первый множитель есть Q^n , то:

$$tg \gamma = \frac{12 \mu}{ql^2} \cdot Q^n, \text{ или } Q^n = - \frac{ql^2}{12 \mu} \cdot tg \gamma \dots \dots \dots (248).$$

Знак минус употреблен здесь для выражения того, что при обычных условиях, т. е. при отрицательных опорных моментах и в предположении, что $M_n > M_{n-1}$, поперечная сила получается отрицательной.

Как и на фиг. 118, последняя формула может быть представлена в виде треугольника: если на оси балки отложить катет

$$AH = \frac{ql^2}{12 \mu} \dots \dots \dots (249)$$

и провести гипотенузу под углом γ , то другой катет представит величину Q^n . Следовательно, для получения поправки от опорных моментов при разных степенях загрузки пролета, надо построить на третях пролета ординаты σ_2 и σ'_2 , которые выписываются прямо из таблиц, надо провести наклонные от опор к этим ординатам и определить пересечения φ и φ' наклонных линий и фокальных вертикалей и построить замыкающие $\varphi\varphi'$; на оси балки надо отложить, в масштабе сил, базу, равную опорному моменту защемленной балки $\frac{q l^2}{12 \mu}$ и на ней построить ряд прямоугольных треугольников, проводя гипотенузы параллельно замыкающим $\varphi\varphi'$. Вертикальные катеты этих треугольников будут искомыми величинами Q^n . Остается сложить их с Q^0 по форм. (244).

При M_n численно больше, чем M_{n-1} , фактически приходится вычитать.

б) Истинные поперечные силы. Произведя загрузку до разных сечений пролета, по аналогии с фиг. 118, мы получим ряд замыкающих и ряд поправок Q^n , а вычитая их из ординат пунктирной параболы фиг. 131 — с), — построим сплошную, несколько приподнятую параболу BD . Ее ординаты выражают максимальные поперечные силы, вызываемые подвижной нагрузкой q в разных сечениях пролета статически неопределимой балки.

Для получения минимальных поперечных сил, **) как известно, загружается левый участок балки, от левой опоры до сечения; вместе с правым который загружался для получения максимальных сил, создается нагрузка всего пролета полностью. Очевидно, сумма максимальной и минимальной поперечных сил дает поперечную силу при полном нагружении. Но последняя в простой балке дается эпюрой поперечных сил, имеющей вид

*) См. текст., относящийся к фиг. 118.

**) Т. е. наибольших отрицательных.

наклонной прямой, пересекающей пролет по середине и имеющей на опорах ординаты:

$$\frac{1}{2} ql,$$

а здесь, в неразрезной балке, это будет та же наклонная, но сдвинутая на величину поправки Q^* . Она получится, если сначала через середину F фиг. 131 — e) провести наклонную FJ по опорной ординате $BJ = \frac{1}{2} ql$, а затем через конец D приподнятой параболы провести параллельную прямую DE .

Расстояния между осью AB и наклонной DE суть поперечные силы пролета неразрезной балки для полной нагрузки пролета; а так как расстояния до параболы DB суть поперечные силы для загрузки правого участка (Q макс.), то оставшаяся разность, т. е. расстояния между параболой и наклонной — будут поперечными силами для загрузки левого участка (Q мин.).

Итак, построивши параболу DB и наклонную DE , мы имеем:

Q макс., как ординату от горизонтальной оси до параболы,

Q мин. " " " наклонной " " "

и) Эпюра поперечных сил крайнего пролета. Разобьем левый пролет балки фиг. 130 на 5 частей и для точек деления $\frac{b}{l} = 1, 0,8, 0,6, \dots$ из таблицы пункта g) выпишем значения σ'_2 для ординат правой трети пролета:

$$1,0 \quad 0,9216 \quad 0,7056 \quad 0,4096 \quad 0,1296 \quad 0,0.$$

Построим эти ординаты на линии RR' фигуры 130 — e) принимая за единицу 10 метров длины балки, и проведем наклонные $R'B, 1B, 2B \dots$, отмечая их пересечения $0', 1', 2', \dots$, с фокальной вертикалью f' . Так как левый фокус совпадает с левым концом пролета, то все замыкающие для эпюр моментов проводим от нулевой ординаты A до точек пересечения $0', 1', 2' \dots$

Для получения поперечных сил, вызываемых опорными моментами $M_A = 0$ и M_B при разных степенях загрузки $\frac{b}{l}$, построим на пролете AB фигуры 130 — e) базу AH , вычисляя ее по форм. (249) и откладывая в том масштабе, который намечен для ординат эпюры поперечных сил (в масштабе сил), — на фиг. 130 — i) справа показан принятый масштаб для сил; 2 мм = 1 тонне. При действующей временной нагрузке $q = 3,6$ т./м., длина базы будет:

$$AH = \frac{ql_1^2}{12 \cdot \mu} = \frac{3,6 \cdot 10^2}{12 \cdot 10} = 3,0 \text{ тонны, что состав-}$$

ляет в принятом масштабе 6 мм.

Различные поперечные силы Q^* получатся теперь, как отрезки перпендикуляра HN' между базой AH и наклонными, исходящими из A . Одна из таких сил, соответствующая сечению 2, т. е. загрузке $\frac{b}{l} = 0,6$, отмечена на фиг. e) буквою Q_2^* .

Поперечная сила Q_0^* при полном загрузке составляет $Q_0^* = HN' = 2,2$ тонны. Все эти силы должны быть вычтены из соответствующих ординат пунктирной параболы VA' , построенной для разных степеней загрузки простой балки AB на фиг. 130 — f) по максимальной ординате

$$AA' = \frac{1}{2} ql_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 10 = 18 \text{ тонн.}$$

В результате вычитания получится сплошная парабола DB , максимальная ордината которой

$$AD = 18,0 - 2,2 = 15,8 \text{ тонн.}$$

Эта парабола дает максимальные поперечные силы только от нагрузки пролета. С целью получения наибольших возможных поперечных сил в первом пролете неразрезной балки, по § 6,7, придется одновременно с загрузением правой части первого пролета нагружать еще третий пролет, как показано на фиг. 132 — VII.



Фиг. 132.

При этом появляется дополнительный положительный опорный момент M_1 , который по таблице раздела 2 составляет 7,44 тм. Очевидно положительная поперечная сила получит дополнительно

$$\frac{M_1}{l_1} = \frac{7,44}{10} = 0,744 \text{ тонны,}$$

которые должны быть прибавлены к ординатам фигуры 130 — f).

Сложение сделано на фиг. 130 — h) где показано, что максимальные поперечные силы должны измеряться от сплошной нижней параболы DB до верхней горизонтальной прямой AB , отмеченной короткой штриховкой (VII).

Для получения наибольших возможных отрицательных поперечных сил мы загружаем левый участок первого пролета и одновременно — второй и четвертый пролеты (фиг. 132 — VIII), поэтому, кроме тех минимальных поперечных сил, которые на фиг. 131 — c) измерялись от параболы до наклонной оси DE , необходимо принять во внимание еще и силы, вызванные дополнительным моментом M_1 от нагрузки последующих пролетов. Так как по таблице раздела 2:

$$M_1 = -27,90 - 1,61 = -29,51 \text{ т.м.,}$$

то добавочная отрицательная реакция будет

$$\frac{M_1}{l_1} = -\frac{29,51}{10} = -2,95 \text{ тонны.}$$

Поэтому наклонную ось CE фиг. 130 — h) для минимальных сил Q приходится поднять на $DC = 2,95$ т.

Таким образом, в первом пролете максимальные силы Q измеряются от параболы DB до оси VII, а минимальные — от параболы DB до оси VIII.

к) Эпюра поперечных сил среднего пролета. Во втором пролете поперечная сила Q^m от опорных моментов M_1 и M_2 , вызванных нагрузкой пролета, получается ничтожной, так как уклон замыкающих $\varphi\varphi'$ (фиг. 131 — a) незначителен. Поэтому в параболу Q^0 нагрузки промежуточных пролетов обыкновенно не вносят поправок (см. фиг. 130 — g).

Чтобы получить возможные максимальные поперечные силы второго пролета, загружаем правый участок пролета, как показано на фиг. 133 — IX и, кроме того, — пролеты: первый и четвертый. Нагрузка крайних пролетов дает:

$$M_1 = -22,06 - 1,61 = -23,67 \text{ тм.}$$

$$M_2 = + 5,92 + 5,92 = + 11,84 \text{ ,, ,}$$

и дополнительная поперечная сила будет:

$$Q^m = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{11,84 + 23,67}{12} = 2,96 \text{ т.}$$

На фиг. 130 — *g*) она отложена вверх от оси балки и отмечена линией IX с наклонными штрихами.

Для минимальных поперечных сил второго пролета дополнительно загружается третий пролет по фиг. 133 — X.

При этом получается $M_1 = +7,44$ тм. и $M_2 = -27,28$ тм., так что:

$$Q'' = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{27,28 - 7,44}{12} = -2,89 \text{ т.}$$



Фиг. 133.

На эту высоту надо поднять наклонную ось X на фиг. 130 — *g*) от нижней точки параболы Q^0 .

д) Поперечные силы от постоянной нагрузки. В первом пролете по формуле: $Q = Q^0 + \frac{M_1}{l}$

получается:

$$\text{на опоре } A: Q_A = \frac{0,9 \cdot 10}{2} - \frac{11,03}{10} = 3,4 \text{ т.}$$

Соответственно на опоре B: $Q_B = -4,5 - 1,1 = -5,6$ т.

Линия имеет вид фигуры 130 — *c*), но повернутой.

Во втором пролете поправка от опорных моментов

$$Q'' = \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{10,68 + 11,63}{12} = \approx \frac{1}{12} \text{ т.};$$

она незначительна, а потому эпюра поперечных сил принимается, как для простой балки, в виде наклонной, проходящей через середину пролета и имеющей опорные ординаты

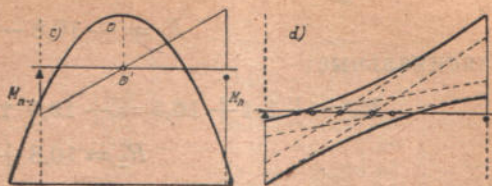
$$\frac{1}{2} q l_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 12 = 5,4 \text{ т. (см. фиг. 130 — c).}$$

м) Расчетные поперечные силы получаются при сложении эпюр от постоянной и от временной нагрузки. Схема сложения для простой балки показана на фиг. 134-а), где тонкою наклонной HC представлена эпюра поперечных сил от постоянной нагрузки, а более жирною кривою JB — построенная от той же оси AB эпюра максимальных поперечных сил от временной нагрузки. Сложение выполнено путем переноса ординат первой эпюры AHO вверх и прибавки к ординатам второй эпюры AJO₁O. Результат суммирования заштрихован. (Конечно, тот же результат получится и при непосредственном построении параболы HO₁C от наклонной оси HC). Очевидно, в нулевом сечении первой эпюры вторая не получает прибавки, так что, ее ордината OO₁ остается без изменения, дальнейшие же ординаты вправо уменьшаются, так как здесь первая эпюра становится отрицательной. Аналогично получается результат внизу, под осью AB, для отрицательных расчетных сил.

В каждом сечении балки для расчета нужны: наибольшая возможная положительная и наибольшая возможная отрицательная поперечная сила; поэтому вправо от точки F пунктирная ветвь FC эпюры теряет значение, ибо на том же участке гораздо большие отрицательные силы Q дает нижняя штриховка. В результате эпюра расчетных поперечных сил оказывается в виде двух ласточкиных хвостов, обращенных к концам пролета.

Фиг. 134-а.

В неразрезной балке нулевая точка эпюры постоянной нагрузки сдвигается с середины пролета, а парабола от временной нагрузки приподымается над опорой; поэтому эпюра расчетных поперечных сил пролетов неразрезной балки, в деталях, более или менее отклоняется от схемы 134—а). На фиг. б) приведено общее очертание эпюры поперечных сил для одного случая неразрезной балки; таблицы ординат и более детальные чертежи приведены ниже *) при фиг. 141.



Фиг. 134-с и д.

н) Опорные реакции. После того, как найдены опорные моменты, реакции опор определяются по общей формуле (212):

$$R_n = R^0 + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}$$

Реакции от постоянной нагрузки p , непосредственно по фиг. 130—с):

$$R_0 = R_4 = 3,4 \text{ т.}, R_1 = R_3 = 5,6 + 5,4 = 11,0 \text{ т.}, R_2 = 2 \cdot 5,4 = 10,8 \text{ т.}$$

Реакции от временной нагрузки q вычисляются, как максимальные и минимальные, в зависимости от положения нагрузки по фиг. 129.

Случай нагрузки I: мин. $R_0 = \frac{M_1}{l} = -\frac{29,5}{10} = -2,95 \text{ т.}$

II: макс. $R_0 = \frac{ql_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = 18,0 - \frac{14,6}{10} = +16,5 \text{ т.}$

III: макс. $R_1 = \frac{ql_1}{2} + \frac{ql_2}{2} - \frac{M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} =$
 $= 18,0 + 21,6 - \frac{51,6}{10} + \frac{-15,4 + 51,6}{12} = +47,8 \text{ т.}$

IV: макс. $R_2 = 2 \left(\frac{ql}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l_2} \right) = 2 \left(21,6 + \right.$
 $\left. + \frac{-20,5 + 54,6}{12} \right) = +48,9 \text{ т.}$

V: мин. $R_1 = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{7,4}{10} +$
 $+\frac{-27,3 + 7,4}{12} = -2,4 \text{ т.}$

VI: мин. $R_2 = 2 \frac{M_1 - M_2}{l_2} = 2 \frac{-23,7 - 11,8}{12} = -5,9 \text{ т.}$

*) При построении эпюр Q большую услугу оказывают вышеописанные параболические шаблоны (см. фиг. 130—к), которыми пользуются, основываясь на известной теории Шведлера о нулевой поперечной силе, соответствующей максимальному моменту $\frac{dM}{dx} = Q$.

Построивши шаблоном для данной нагрузки пролета эпюру моментов, как показано на фиг. 134—с), проектируют вершину шаблона O на ось балки; проекция O' будет нулевой точкой поперечной силы пролета и потому через нее проводят наклонную эпюру поперечных сил для той нагрузки, которую пользовались при установке шаблона. Для каждого пролета, в соответствии с фиг. а), получается четыре наклонных линии поперечной силы соответственно наибольшему и наименьшему ее значению у обоих опор. На фиг. 134—д) нулевые точки этих случаев отмечены кружочками, а наклонные показаны пунктиром. Вписывая параболу через опорные концы крайних пунктирных линий, получим эпюру расчетных поперечных сил.

Расчетные реакции, минимальные возможные будут:

$$R_0 = +3,4 - 2,95 = +0,45 \text{ т.}, \quad R_1 = +11,0 - 2,4 = +8,6 \text{ т.},$$

$$R_2 = +10,8 - 5,9 = +4,9 \text{ т.};$$

максимальные:

$$R_0 = +3,4 + 16,5 = +19,9 \text{ т.}, \quad R_1 = +8,6 + 47,8 = 56,4 \text{ т.},$$

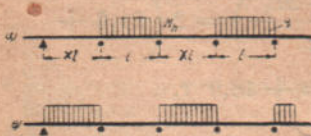
$$R_2 = 10,8 + 48,9 = 59,7.$$

Так как все реакции первой строки положительны, то не требуется двусторонних удерживающих опорных частей.

3. Справочные формулы и расчетные таблицы. Для облегчения вычислительной работы по расчету многопролетных балок приводим ряд справочных таблиц, относящихся к действию постоянной и подвижной временной нагрузки. Нагрузка преимущественно равномерно распределенная, причем постоянная расположена по всей длине балки, а временная — помещена в опасное положение. Кроме того, в таблицах рассмотрено несколько случаев сосредоточенных сил, с которыми приходится иметь дело при расчете междуэтажных перекрытий, при расчете широких шоссе или городских мостов и путепроводов. Главным поперечным балкам таких мостов приходится воспринимать нагрузку вышележащей проезжей части через ряд продольных балок, которые передают эту нагрузку сосредоточенно в определенные сечения поперечных балок; при этом в сечениях сосредоточивается, как постоянная нагрузка проезжей части, так равно и временная. В таблицах приведены данные для случая опасного положения временной нагрузки. Из других случаев нагрузки рассмотрена треугольная и трапециoidalная на протяжении всей неразрезной балки*), а также — действие моментов по концам балки.

Таблица 1 опорных моментов при весьма большом числе неравных пролетов (фиг. 135).

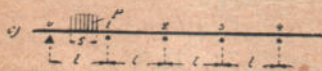
а) Пролеты l и xl чередуются (x — отношение длины соседних пролетов) $M^0 = 1/8ql^2$ — максимальный изгибающий момент простой разрезной балки.



Для фиг. 135 — а): $M_n = -M_0 \frac{2}{3(1+x)}$

” б): $M_n = -M_0 \frac{2x}{3(1+x)}$

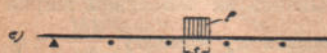
б) Равные пролеты при местной нагрузке. Наибольшие опорные моменты балки соответствуют опорам № 1 или № 2:



По фиг. 135 — в): $M_1 = - (0,103 - 0,038k^2) Pl$,
где $k = sl$.



По фиг. 135 — д): $M_1 = - (0,078 - 0,029k^2) Pl$,
 $M_2 = - (0,086 - 0,035k^2) Pl$.



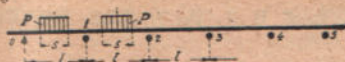
По фиг. 135 — е): $M_2 = - (0,084 - 0,034k^2) Pl$.

Фиг. 135.

Таблица 2 для местной спаренной нагрузки. Таблица относится к двум одинаковым грузам P (фиг. 136), распределенным на некоторой длине s и находящимся в соседних пролетах на взаимном расстоянии a .

*) Случай треугольной нагрузки в пределах отдельных пролетов см.: Wenning Erst. Vereinfachte Berechnung von statisch unbestimmten Tragsystemen mit Dreieckslasten. Der Bauingenieur 1927 Н. 11, S. 185.

Обозначая отношение s/l буквою k и располагая P по обе стороны от опоры 1, получим для различных отношений k следующую таблицу значений опорного момента M_1 .



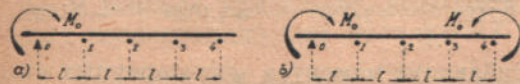
Фиг. 136.

Если же грузы P расположить по сторонам опоры, 2, как на фигуре (137) то получим следующие значения M_2 :



Фиг. 137.

Таблица 3 для четырехпролетной балки, нагруженной концевыми моментами (фиг. 138).



Фиг. 138.

В таблице даны числа, выражающие отношение искомых величин к данным, а именно к моменту M_0 или к поперечной силе $Q_0 = \frac{M_0}{l}$, получающейся от M_0 . Поэтому, при пользовании таблицей, надо числа первых двух строк умножать на M_0 , а во всех прочих строках — умножать на $\frac{M_0}{l}$.

a/l	$-M_1$
0,5	(0,160 — 0,097 k^2) Pl
0,6	(0,173 — 0,089 k^2) "
0,7	0,178 — 0,087 k^2 "
0,8	0,181 — 0,074 k^2 "
0,9	0,179 — 0,066 k^2 "
1,0	0,174 — 0,058 k^2 "
1,1	0,164 — 0,050 k^2 "
1,2	0,153 — 0,042 k^2 "
1,3	0,138 — 0,034 k^2 "
1,4	0,120 — 0,026 k^2 "
1,5	0,104 — 0,018 k^2 "

a/l	$-M_2$
0,5	(0,151 — 0,100 k^2) Pl
0,6	(0,163 — 0,090 k^2) "
0,7	0,168 — 0,081 k^2 "
0,8	0,170 — 0,072 k^2 "
0,9	0,166 — 0,063 k^2 "
1,0	0,158 — 0,054 k^2 "
1,1	0,148 — 0,045 k^2 "
1,2	0,135 — 0,036 k^2 "
1,3	0,119 — 0,027 k^2 "
1,4	0,102 — 0,018 k^2 "
1,5	0,085 — 0,009 k^2 "

Опорные моменты	$\frac{M_1}{M_0} =$	$\frac{M_2}{M_0} =$	$\frac{M_3}{M_0} =$	$\frac{M_4}{M_0} =$	
а) при M_0 с одной стороны	-0,2678	+0,0714	-0,0179	0,0	
б) при M_0 с обеих сторон	-0,2858	+0,1429	-0,2858	0,0	
Поперечные силы	$\frac{Q_1}{Q_0} =$	$\frac{Q_2}{Q_0} =$	$\frac{Q_3}{Q_0} =$	$\frac{Q_4}{Q_0} =$	
а) если M_0 на левом конце балки	-1,2678	+0,3392	-0,0893	0,0179	
б) если M_0 на обоих концах	-1,2858	+0,4286	-0,4286	+1,2858	
Опорные реакции	$\frac{R_0}{Q_0}$	$\frac{R_1}{Q_0}$	$\frac{R_2}{Q_0}$	$\frac{R_3}{Q_0}$	$\frac{R_4}{Q_0}$
в случае а)	-1,2678	+1,6070	-0,4285	+0,1072	-0,0179
в случае б)	-1,2858	+1,7143	-0,8572	+1,7143	-1,2858

Таблица 4 для вычисления наибольшего и наименьшего значений опорных моментов и опорных реакций при весьма большом числе пролетов балки.

Постоянная нагрузка p равномерно распределяется по всем пролетам, временная (подвижная) — q , также равномерно распределенная, помещается

в опасном положении. Расчетные формулы для опорных моментов и опорных реакций могут быть представлены выражениями:

$$M_{\text{макс.}} = (ap + bq) l^2 \quad \text{и} \quad M_{\text{мин.}} = (ap + cq) l^2 \quad \dots \quad (250)$$

$$R_{\text{макс.}} = (ap + \beta q) l \quad \text{и} \quad R_{\text{мин.}} = (ap + \gamma q) l \quad \dots \quad (251)$$

В таблице приводятся коэффициенты a, b, c и α, β, γ для вычисления по этим формулам.

Место, для которого вычисляются	Моменты			Опорные реакции		
	Влияние p	Влияние q		Влияние p	Влияние q	
	a	b	c	α	β	γ
Опоры 0 . . .	0	0	0	+0,3943	+0,4472	-0,0529
пролет 1	+0,0774	+0,0996	-0,0222			
" 1	-0,1057	+0,0141	-0,1198	+1,1340	+1,2189	-0,0849
" 2	+0,0339	+0,0793	-0,0454			
" 2 " 2	-0,0774	+0,0331	-0,1105	+0,9641	+1,1628	-0,1987
" 3	+0,0439	+0,0844	-0,0405			
" 3 " 3	-0,0849	+0,0297	-0,1146	+1,0096	+1,1877	-0,1781
" 4	+0,0411	+0,0830	-0,0419			
" 4 " 4	-0,0829	+0,0307	-0,1136	+0,9974	+1,1817	-0,1843
" 5	+0,0418	+0,0834	-0,0416			
" 5 " 5	-0,0835	+0,0304	-0,1139	+1,0007	+1,1834	-0,1827
" S	+0,0417	+0,0833	-0,0417			
" S " S	-0,0833	+0,0305	-0,1138	+1,0000	+1,1830	-0,1830

Таблица 5 для вычисления изгибающих моментов и поперечных сил для неразрезной балки с равными пролетами при равномерно-распределенной постоянной нагрузке p и временной q , занимающей опасное положение.

Таблица дает коэффициенты, на которые надо умножить выражения:

$$\begin{aligned} & -pl \quad \text{либо} \quad ql, \quad \text{для реакции (в пролете)} \\ & +pl^2 \quad \text{и} \quad +ql^2 \quad \text{для момента: (на опорах),} \\ & \text{и} \quad -pl^2 \quad \text{и} \quad -ql^2 \end{aligned}$$

чтобы получить расчетные величины R и M .

Сечение, которому соответствует наибольший положительный момент в пролете, определяется абсциссой x_0 в долях пролета l .

От постоянной нагрузки p

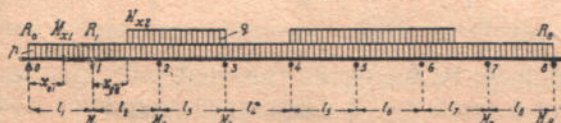
Величины	П р и ч и с л о о п о р						
	3	4	5	6	7	8	
Реакции опор	$R_0: pl$	0,375	0,400	0,393	0,395	0,394	0,394
	R_1 "	1,250	1,100	1,143	1,132	1,135	1,134
	R_2 "	—	—	0,929	0,974	0,962	0,965
	R_3 "	—	—	—	—	1,019	1,007
Опорные моменты	$M_1: pl^2$	0,125	0,100	0,107	0,105	0,106	0,106
	M_2 "	—	—	0,171	0,079	0,077	0,077
	M_3 "	—	—	—	—	0,087	0,085
Моменты в пролете	$M_{x1}: pl^2$	0,070	0,080	0,077	0,078	0,078	0,078
	M_{x2} "	—	0,025	0,036	0,033	0,034	0,034
	M_{x3} "	—	—	—	0,046	0,043	0,044
	M_{x4} "	—	—	—	—	—	0,040
Сечение опасное	$x_{01}: l$	0,375	0,400	0,393	0,395	0,394	0,394
	x_{02} "	—	0,500	0,536	0,526	0,529	0,528
	x_{03} "	—	—	—	0,500	0,490	0,493
	x_{04} "	—	—	—	—	—	0,500

От временной (подвижной) нагрузки q .

Величины	П р и ч и с л е о п о р					
	3	4	5	6	7	8
$R_0: ql$	0,438	0,450	0,446	0,447	0,447	0,447
R_1 „	1,250	1,200	1,223	1,218	1,219	1,219
R_2 „	—	—	1,143	1,167	1,162	1,163
R_3 „	—	—	—	—	1,192	1,186
$M_1: ql^2$	0,125	0,117	0,121	0,120	0,120	0,120
M_2 „	—	—	0,107	0,111	0,110	0,111
M_3 „	—	—	—	—	0,115	0,114
$M_{x1}: ql^2$	0,096	0,101	0,100	0,100	0,100	0,100
M_{x2} „	—	0,075	0,081	0,079	0,079	0,079
M_{x3} „	—	—	—	0,086	0,084	0,085
M_{x4} „	—	—	—	—	—	0,083
$x_{01}: l$	0,438	0,450	0,446	0,447	0,447	0,447
x_{02} „	—	0,500	0,518	0,513	0,514	0,514
x_{03} „	—	—	—	0,500	0,495	0,495
x_{04} „	—	—	—	—	—	0,500

Если число опор больше 8, то для опор, удаленных от концов балки, реакции можно принимать pl , опорные моменты $-0,0833pl^2$, а максимальный положительный момент в пролете $+0,0416pl^2$.

В таблице приведены коэффициенты только до 4-го пролета, так как для последующих они получаются из условия симметрии.



Фиг. 139.

Схема загрузки балки (см. § 6 раздел 7) и фиг. 129.



Фиг. 140.

Таблица 6 для вычисления изгибающих моментов и опорных реакций неразрезной балки с равными пролетами при треугольной нагрузке.

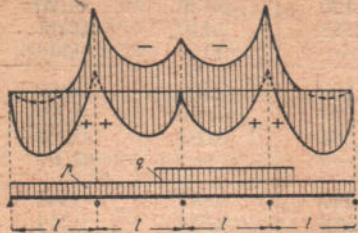
Если средняя интенсивность нагрузки q (максимальная — $2q$), то опорная реакция $R = a \cdot ql$, опорный момент $M = b \cdot ql^2$ (отрицательный), максимальный положительный изгибающий момент всегда получается в крайнем правом пролете, в расстоянии от правой опоры пролета $x'_0 = cl$. В таблице приведены коэффициенты a , b и c .

Искомая величина	П р и ч и с л е п р о л е т о в				
	2	3	4	5	6
$R_0: ql$	0,0417	0,0667	0,0387	0,0341	0,0276
R_1 „	1,2500	0,6000	0,5179	0,3952	0,3346
R_2 „	—	0,7333	1,7678	1,1282	1,0192
R_3 „	—	—	0,7470	1,8679	1,2616
R_4 „	—	—	—	0,7554	1,9346
R_5 „	—	—	—	—	0,7609
$M_0: ql^2$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
M_1 „	1,125	0,0444	0,0446	0,0325	0,0280
M_2 „	0,000	0,1556	0,0714	0,0699	0,0547
M_3 „	—	0,0000	0,1696	0,0880	0,0865
M_4 „	—	—	0,0000	0,1780	0,0992
M_5 „	—	—	—	0,0000	0,1836
M_6 „	—	—	—	—	0,0000
$+ M: ql^2_{\text{макс.}}$	0,1340	0,1405	0,1442	0,1465	0,1480
при $x'_0 = cl$	0,6073	0,6077	0,6072	0,6069	0,6067

Складывая данные этой и соответственно предыдущей таблицы, получим коэффициенты для расчета неразрезной балки при трапециoidalной нагрузке, ибо последнюю всегда можно составить из прямоугольника и треугольника.

Таблица 7 для вычисления ординат эпюры расчетных моментов и ординат эпюры расчетных поперечных сил для четырехпролетной балки с равными пролетами.

Постоянная нагрузка равномерно распределена по всей длине балки, временная, также равномерно распределенная, занимает опасное положение. При таких условиях для любого сечения x , расчетные величины вычисляются по формулам:



Фиг. 141.

$$M_{\text{макс.}} = (ap + bq)l^2, \quad M_{\text{мин.}} = (ap + cq)l^2$$

$$Q_{\text{макс.}} = (ap + \beta q)l, \quad Q_{\text{мин.}} = (ap + \gamma q)l.$$

В таблице даны коэффициенты a, b, c и α, β, γ для абсцисс x , отличающихся на $\frac{1}{10}l$. Рассмотрены только 1-ый и 2-ой пролеты, так как балка симметрична.

$\frac{x}{l}$	Моменты			Поперечные силы		
	Влияние p	Влияние q		Влияние p	Влияние q	
	a	b	c	α	β	γ
П е р в ы й п р о л е т						
0,0	0	0	0	+ 0,3929	+ 0,4464	- 0,0535
0,1	+ 0,03429	+ 0,03964	- 0,00536	+ 0,02929	+ 0,3528	- 0,0599
0,2	+ 0,05857	+ 0,06929	- 0,01071	+ 0,1929	+ 0,2717	- 0,0788
0,3	+ 0,07286	+ 0,08893	- 0,01607	+ 0,0929	+ 0,2029	- 0,1101
0,3929	—	—	—	0	+ 0,1498	- 0,1498
0,4	+ 0,07714	+ 0,09857	- 0,02143	- 0,0071	+ 0,1461	- 0,1533
0,5	+ 0,07143	+ 0,09822	- 0,02679	- 0,1071	+ 0,1007	- 0,2079
0,6	+ 0,05572	+ 0,08786	- 0,03214	- 0,2071	+ 0,0660	- 0,2731
0,7	+ 0,03000	+ 0,06750	- 0,03750	- 0,3071	+ 0,0410	- 0,3481
0,7857	0	+ 0,04209	- 0,04209	—	—	—
0,7887	- 0,00117	+ 0,04108	- 0,04225	—	—	—
0,8	- 0,00571	+ 0,03738	- 0,04309	- 0,4071	+ 0,0247	- 0,4319
0,85	- 0,02732	+ 0,02484	- 0,05216	—	—	—
0,9	- 0,05143	+ 0,01629	- 0,06772	- 0,5071	+ 0,0160	- 0,5231
0,95	- 0,07803	+ 0,01393	- 0,09197	—	—	—
1,00	- 0,10714	+ 0,01340	- 0,12054	- 0,6071	+ 0,0134	- 0,6205
В т о р о й п р о л е т						
0,0	- 0,10714	+ 0,01340	- 0,12054	+ 0,5357	+ 0,6027	- 0,0670
0,5	- 0,08160	+ 0,01163	- 0,09323	—	—	—
0,10	- 0,05857	+ 0,01455	- 0,07212	+ 0,4357	+ 0,5064	- 0,0707
0,15	- 0,03803	+ 0,01980	- 0,05780	—	—	—
0,20	- 0,02000	+ 0,03000	- 0,05000	+ 0,3357	+ 0,4187	- 0,0830
0,2661	0	+ 0,04882	- 0,04882	—	—	—
0,3	+ 0,00857	+ 0,05678	- 0,04821	+ 0,2357	+ 0,3410	- 0,1153
0,4	+ 0,02714	+ 0,07357	- 0,04643	+ 0,1357	+ 0,2742	- 0,1385
0,5	+ 0,03572	+ 0,08036	- 0,04464	+ 0,0357	+ 0,2190	- 0,1833
0,5357	—	—	—	0	+ 0,2028	- 0,2028
0,6	+ 0,03429	+ 0,07715	- 0,04286	- 0,0643	+ 0,1755	- 0,2398
0,7	+ 0,02286	+ 0,06393	- 0,04107	- 0,1643	+ 0,1435	- 0,3078
0,7869	+ 0,00416	+ 0,04363	- 0,03947	—	—	—
0,8	+ 0,00143	+ 0,04170	- 0,04027	- 0,2643	+ 0,1222	- 0,3865
0,8053	0	+ 0,04092	- 0,04092	—	—	—
0,85	- 0,01303	+ 0,03451	- 0,04754	—	—	—
0,90	- 0,03000	+ 0,03105	- 0,06105	0,3643	+ 0,1106	0,4749
0,95	- 0,04947	+ 0,03173	- 0,08120	—	—	—
1,00	- 0,07143	+ 0,03571	- 0,10714	- 0,4643	+ 0,1071	- 0,5714

Опорные реакции:

$$\begin{aligned}
 R_{1 \text{ макс.}} &= (0,3929p + 0,4464q) l, & R_{1 \text{ мин.}} &= (0,3929p - 0,0535q) l. \\
 R_{2 \text{ макс.}} &= (1,1428p + 1,2232q) l, & R_{2 \text{ мин.}} &= (1,1428p - 0,0804q) l. \\
 R_{3 \text{ макс.}} &= (0,9286p + 1,1428q) l, & R_{3 \text{ мин.}} &= (0,9286p - 0,2142q) l.
 \end{aligned}$$

На фиг. 141 эпюра максимальных изгибающих моментов очерчена нижней линией $<$ со знаком $+$, эпюра минимальных моментов — верхней со знаком $-$. Заштрихованные ординаты от оси до сплошной части этих линий (отбрасывая пунктирную часть) представляют наибольшее и наименьшее значение изгибающего момента, имеющего место в разных сечениях балки — расчетные максимум и минимум. (Сравн. фиг. 130).

Таблица 8 для вычисления расчетных моментов и поперечных сил для четырехпролетной балки с равными пролетами (фиг. 142).

Как постоянная, так и временная нагрузка сосредоточивается в назначенных точках балки: либо посередине пролета (фиг. а), либо на расстоянии $\frac{1}{4}$ пролета, считая от опоры (фиг. б),

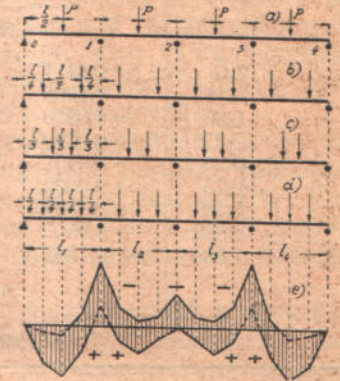
либо на $\frac{1}{3}$ пролета (фиг. с), либо на $\frac{1}{4}$ пролета

по фиг. д). Постоянная нагрузка P приложена одновременно во всех узловых точках, а временная G — только в тех из них, которые надлежит загрузить для получения максимума или минимума. Расчетные величины получаются по формулам:

$$\begin{aligned}
 M_{\text{макс.}} &= (aP + bG) l, & M_{\text{мин.}} &= (aP + cG) l. \\
 Q_{\text{макс.}} &= \alpha P + \beta G, & Q_{\text{мин.}} &= \alpha P + \gamma G.
 \end{aligned}$$

В таблице приведены, необходимые коэффициенты a, b, c и α, β, γ .

Для фиг. а): один сосредоточенный груз.



Фиг. 142.

Сечение $\frac{x}{l}$	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
	Влияние P	Влияние G		Влияние P	Влияние G	
	a	b	c	α	β	γ
Первый пролет	0,0	0,0	0,0	+ 0,3393	+ 0,4196	- 0,0804
	0,5	+ 0,1697	+ 0,2098	- 0,6607	+ 0,0201	- 0,7410
	0,833	- 0,0503	+ 0,0168			
	1,0	- 0,1607	+ 0,0201	- 0,1808		
		Опорная реакция $R_1 =$		1,2143	+ 1,3348	- 0,1205
Второй пролет	0,0	- 0,1607	+ 0,0201	- 0,1808		
	0,147	- 0,0781	+ 0,0048	- 0,0830	+ 0,5536	+ 0,6540
	0,20	- 0,0500	+ 0,0250	- 0,0750		
	0,50	+ 0,1161	+ 0,1830	- 0,0670		
	0,79	- 0,0134	+ 0,0458	- 0,0592	- 0,4464	+ 0,1607
	0,835	- 0,0362	+ 0,0282	- 0,0644		
	1,00	- 0,1072	+ 0,0536	- 0,1607		
		Опорная реакция $R_2 =$		0,8928	+ 1,2142	- 0,3214

Два сосредоточенных груза по фиг. б).

Сечение $\frac{x}{l}$	Изгибающие моменты			Поперечные силы		
	Влияние P	Влияние G		Влияние P	Влияние G	
	a	b	c	α	β	γ
0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,7589	+ 0,8795	- 0,1205
0,25	+ 0,1897	+ 0,2199	- 0,0301	- 0,2411	+ 0,1922	- 0,4333
0,7	+ 0,0592	+ 0,1596	- 0,0904			
0,869	- 0,0785	+ 0,261	- 0,1045	- 1,2411	+ 0,0301	- 1,2712
1,00	- 0,2411	+ 0,0301	- 0,2712			
	Опорная реакция $R_1 =$			2,3215	2,5022	- 0,1808
0,0	- 0,2411	+ 0,0301	- 0,2712			
0,112	- 0,1200	+ 0,0133	- 0,1333	+ 1,0804	+ 1,2310	- 0,1507
0,20	- 0,0250	+ 0,0880	- 0,1130			
0,25	+ 0,0290	+ 0,1395	- 0,1105	+ 0,0804	+ 0,4851	- 0,4047
0,50	+ 0,0491	+ 0,1495	- 0,1005			
0,75	+ 0,0692	+ 0,1596	- 0,0904			
0,79	+ 0,0325	+ 0,1213	- 0,0887	- 0,9196	+ 0,2411	- 1,1607
0,882	- 0,0515	+ 0,0510	- 0,1025			
1,00	- 0,1607	+ 0,0804	- 0,2410			
	Опорная реакция $R_2 =$			1,8392	+ 2,3214	- 0,4822

Два сосредоточенных груза по фиг. с).

0,0	0,0	0,0	0,0	+ 0,7143	+ 0,8571	- 0,1428
0,333	+ 0,2381	+ 0,2857	- 0,0476	- 0,2857	+ 0,2698	- 0,5555
0,667	+ 0,1429	+ 0,2381	- 0,0952			
0,848	- 0,0907	+ 0,0303	- 0,1211	- 1,2857	+ 0,0357	+ 1,3214
1,00	- 0,2857	+ 0,0357	- 0,3214			
	Опорная реакция $R_1 =$			2,3810	+ 2,5952	- 0,2142
0,0	- 0,2857	+ 0,0357	- 0,3214			
0,123	- 0,1400	+ 0,0127	- 0,1528	+ 1,0953	+ 1,2738	- 0,1785
0,20	- 0,0667	+ 0,0667	- 0,1333			
0,333	+ 0,0794	+ 0,2063	- 0,1270	+ 0,0953	+ 0,5874	- 0,4921
0,667	+ 0,1111	+ 0,2222	- 0,1111			
0,79	0,0	+ 0,1053	- 0,1053	- 0,9047	+ 0,2858	- 1,1905
0,858	- 0,0623	+ 0,0547	- 0,1170			
0,00	- 0,1905	+ 0,0952	- 0,2857			
	Опорная реакция $R_2 =$			1,8094	+ 2,3810	- 0,5716

Три сосредоточенных груза по фиг. д).

0,0	0,0	0,0	0,0	1,0982	+ 1,2991	- 0,2009
0,25	+ 0,2746	+ 0,3248	- 0,0503			
0,50	+ 0,2991	+ 0,3996	- 0,1004	0,0982	+ 0,6118	- 0,5137
0,75	+ 0,0736	+ 0,2243	- 0,1506	- 0,9018	+ 0,2123	- 1,1142
0,8567	- 0,1295	+ 0,0431	- 0,1726			
1,0	- 0,4018	+ 0,0503	- 0,4520	- 1,9018	+ 0,0502	- 1,9520
	Опорная реакция $R_1 =$			3,5357	+ 3,8371	- 0,3013
0,0	- 0,4018	+ 0,0503	- 0,4520			
0,124	- 0,1988	+ 0,0192	- 0,2180	+ 1,6339	+ 1,8851	- 0,2511
0,20	- 0,0750	+ 0,1125	- 0,1875			
0,25	+ 0,0067	+ 0,1908	- 0,1842	+ 0,6339	+ 1,1392	- 0,5053
0,50	+ 0,1651	+ 0,3325	- 0,1675	- 0,3661	+ 0,6458	- 1,0120
0,75	+ 0,0736	+ 0,2243	- 0,1507			
0,79	+ 0,0195	+ 0,1670	- 0,1475	- 1,3661	+ 0,4017	- 1,7678
0,8675	- 0,0870	+ 0,0805	- 0,1675			
1,00	- 0,2679	+ 0,1339	- 0,4018			
	Опорная реакция $R_2 =$			2,7322	+ 3,5356	- 0,8034

При четырех и большем числе грузов, равномерно расположенных в пролете, с достаточной точностью считают их сплошной равномерно распределенной нагрузкой и пользуются предыдущей таблицей.

Таблицы для восьмипролетной балки при разных случаях нагрузки см. L. David и W. Seiffert в Bauingenieur 1923, стр. 493:

4. **Практические замечания** о расчете неразрезных балок. Расчет неразрезных балок, в особенности при действии подвижной нагрузки представляет вообще говоря большую вычислительную работу, являясь в то же время лишь контрольным приемом для проверки предварительно уже назначенных размеров. Поэтому обыкновенно стремятся к тому, чтобы предварительно намечаемые размеры балки по возможности соответствовали окончательным и не потребовалось бы повторять сложного расчета. Оказывается, что затрата времени на предварительный приближенный расчет с избытком покрывается экономией времени при последующем окончательном расчете. Следующие замечания могут оказать услугу при таком предварительном эскизном расчете балочных перекрытий.

а) **Расчетные пролеты.** При равномерно распределенной нагрузке, и равенстве пролетов неразрезной балки на шарнирных опорах наибольшие моменты и опорные реакции получаются в первом пролете*). Поэтому, если проектируется балка постоянного сечения по всей своей длине, то для экономии материала следует крайние пролеты назначать короче, чем средние, примерно на 20%.⁰

Во всех случаях расчета балок с концами, заделанными в кладку, учитывается податливость заделки путем эквивалентного увеличения расчетного пролета, обыкновенно, — на 5%, т. е. на каждый заделанный конец — по 2½%. В расчет вводится не расстояние в свету l_0 , а „расчетный пролет“

$$l = 1,05l_0 \text{ — при заделке обоих концов пролета,}$$

$$\text{и } l = 1,025l_0 \text{ — при заделке одного конца.}$$

$$\text{Следовательно: } l_0 = l : 1,05 = 0,95l \text{ или } l_0 = l : 1,025 = 0,975l \dots (252).$$

Если неразрезная балка с заделанными концами опирается на ряд промежуточных опор, то расчетным пролетом по середине считают расстояние между осями поддерживающих балок, а по краям — 1,025 l_0 . Чтобы в таком случае разбить общую длину L балки на n равных пролетов, надо написать:

$$L = 2 \cdot 0,975l + l(n - 2), \text{ откуда } l = \frac{L}{2 \cdot 0,975 + n - 2} \dots (253).$$

Например, разбивая помещение с просветом в 17 м. на 4 равных пролета, получим:

$$l = \frac{17}{1,95 + 2} = 4,3 \text{ м.}$$

б) **Сравнительная величина моментов и реакций.** Максимальный (+) расчетный момент первого пролета получается не по середине, а на расстоянии 0,4 l от концевой шарнирной опоры; в остальных пролетах этот момент приближается к середине по мере удаления пролета от конца неразрезной балки; в том же направлении уменьшаются и опорные реакции.

Из всех неразрезных балок на шарнирных опорах наибольшую реакцию обнаруживает двухпролетная балка; как известно, реакция ее средней опоры составляет

$$\frac{5}{8}(p2l) = 1,25pl,$$

*) Опорная реакция первой опоры многопролетной балки процентов на 20 меньше реакции простой разрезной балки, а на второй опоре — она процентов на 15—20 больше, чем у простой балки.

т. е. на 25% больше, чем у простой разрезной балки. При увеличении числа пролетов реакции уменьшаются и в многопролетных балках можно считать

первую реакцию на 20% меньше, чем у простой разрезной балки,
т. е. 0,80pl,

вторую — на 20% больше, т. е. 1,20pl

последующие, начиная с 5-ой, 1,0pl для

постоянной нагрузки и 1,19ql для
временной нагрузки;

опорные моменты, начиная с 5-го 0,085pl²

для постоянной нагрузки (лучше $\frac{1}{12} pl^2$), т. е. такие, как у простой разрезной балки, и 0,11ql² для временной нагрузки;

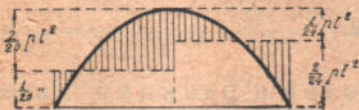
максимальные моменты в пролетах, начиная с 5-го: для постоянной нагрузки — 0,04 (лучше $\frac{1}{24} pl^2$), как в однопролетной балке с защемленными концами, и для временной нагрузки 0,083ql².

Моменты для балок с 5-ю и более пролетами сравнительно слабо отличаются от моментов четырехпролетной балки, так что таблицами последней можно пользоваться так же и для приближенного расчета многопролетных балок. На этом основании, определяя в многопролетной балке опорный момент или момент в пролете, можно ограничиться учетом влияния только двух смежных пролетов с каждой стороны, а остальные — считать нулями (сравн. § 6,4).

При защемлении концов все опорные моменты считаются в $\frac{1}{12} pl^2$, а все расчетные изгибающие моменты в пролетах — $\frac{1}{24} pl^2$, как для однопролетной балки с защемленными концами.

Вышеприведенные таблицы Винклера составлены для случая равных пролетов, но ими можно пользоваться и для неравных пролетов, если разница в длине не превосходит 20%.

В однопролетных железобетонных балках и плитах с заделанными концами, не доверяя заделке, нередко принимают расчетные моменты:



Фиг. 143.

$$+ \frac{1}{10} pl^2 \text{ — по середине пролета (254).}$$

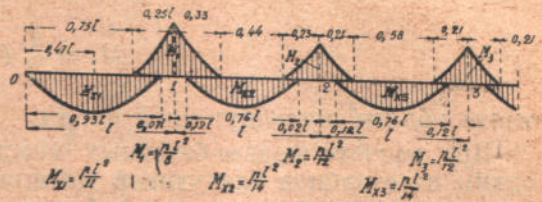
$$- \frac{1}{20} pl^2 \text{ — в плоскости заделки.}$$

Эти цифры отличаются от теоретических $\frac{1}{24}$ и $\frac{1}{12}$ и в сумме дают больше, чем стрелка параболы $\frac{1}{8} pl^2$, но принимаются в виду их простоты и надежности заделки (фиг. 143.)

Фокусы во всех случаях приближенного расчета обыкновенно помещают на расстоянии $\frac{1}{5} l$ от конца пролета.

с) Схематизированные эпюры. В практике расчета определенного типа сооружений обыкновенно даются определенные нормы нагрузки

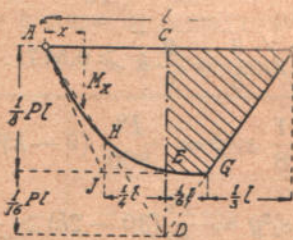
и допускаемых напряжений; ими обуславливается более или менее определенный собственный вес сооружения. Так как соотношение постоянной и временной нагрузки определяет основные размеры эпюры расчетных моментов фигуры 130, то для определенного типа сооружений можно установить своего рода нормальную эпюру, которая с большим или меньшим приближением определяет расчетные моменты для ряда подходящих частных случаев. Если приходится производить много однообразных расчетов, то целесообразно составить такую эпюру либо даже несколько, охватывающих определенные группы случаев расчета, и пользоваться ими для предварительного подбора сечений. На фиг. 144 приведен тип такой нормальной эпюры, составленной для железобетонных междуэтажных покрытий по немецким нормам нагрузок. Столь же целесообразными надо считать и схематизированные эпюры, в которых криволинейное очертание заменено, для простоты, прямолинейным. Построение и в особенности расчет при таких эпюрах значительно проще, а между тем можно так подобрать их очертание, что площади их будут равновелики и основные размеры, по которым подбираются сечения, будут практически достаточно близкими к истинным.



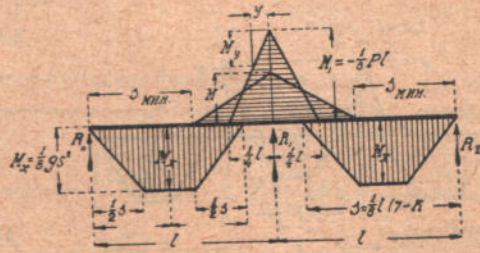
Фиг. 144.

Будем называть такие схематизированные эпюры эквивалентными. Поясним получение эквивалентной эпюры на примере однопролетной балки, равномерно нагруженной (фиг. 145). Истинная эпюра балки, — парабола изображена слева, на протяжении половины пролета. Площадь параболы $\frac{2}{3} lf$. Если на той же высоте параболы f построить трапецию с нижним основанием $\frac{1}{3} l$, то также получится площадь $\frac{2}{3} lf$ и общее очертание трапеции, показанное справа, будет близким к очертанию параболы. Построение эпюры материала (о которой будет речь впереди) по обоим эпю-

рам, как правой, так и левой приводит примерно к одному результату. Таким же путем для двухпролетной балки получается фиг. 146*). Данные для построения эпюры показаны на чертеже, причем обозначает:



Фиг. 145.



Фиг. 146.

p — постоянная нагрузка, погонная,
 q — временная " "
 $g = p + q$ " "

* Эпюры и таблицы заимствованы из „Lösler-Bemessungsverfahren“ 1925.

$$k = p : g, P = gl, M_1 = -\frac{1}{8} Pl = -\frac{1}{8} gl^2,$$

$$s = \frac{1}{8} l(7 - k), M_x = \frac{1}{8} gs^2.$$

$$M_y = \frac{1}{2} Py \text{ — приближенное уменьшение мо-}$$

мента вблизи промежуточной опоры.

При расчете железобетонных междуэтажных перекрытий пользуются одним из столбцов следующей таблицы, в зависимости от системы перекрытия: для свободнолежащих балок и плит без ребер — столбцом *a*, для ребристых перекрытий на колонках — столбцом *b* и для ребристых перекрытий без колонок — столбцом *c*. По данным одного из столбцов мы строим эпюру, которою и пользуемся для расположения материала балки.

Таблица для двухпролетной балки.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
$s_{\text{мин.}}$	$\frac{1}{8} l \frac{7k - 1}{k}$	$\frac{1}{12} l \frac{10k - 1}{k}$	$\frac{1}{16} l \frac{13k - 1}{k}$
M'	$-\frac{1}{16} Pl(1 + k)$	$-\frac{1}{24} Pl(1 + 2k)$	$-\frac{1}{32} Pl(1 + 3k)$

Опорные реакции при полном загрузении всех пролетов

$$R_0 = \frac{3}{8} P = 0,375P, R_1 = 1,25P = \frac{5}{8} P.$$

Для трехпролетной балки фиг. 147 имеем:

$$M_1 = -\frac{Pl}{60} (7 - k), s_1 = \frac{1}{10} l(9 - k),$$

$$s_2 = l \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{2}{5} k} \geq 0,577l.$$

$$M_{12} = \frac{1}{8} s_1^2 g = \frac{Pl}{800} (9 - k)^2$$

$$M_{x2} = \frac{1}{8} s_2^2 g = \frac{Pl}{40} (30 - 2k) \geq \frac{Pl}{24}$$

$$M_y = \frac{1}{2} Py \text{ — приближенное умень-}$$

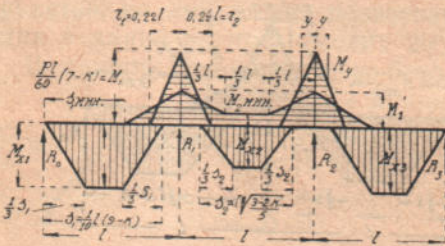
шение момента вблизи промежуточной опоры,

$$r_1 = 0,22l, r_2 = 0,24l.$$

Опорные реакции при полном загрузении всех пролетов

$$R_0 = 0,4P, R_1 = 0,6P + 0,5P = 1,1P.$$

Расстояние $s_{2\text{мин.}}$ между нулевыми точками в среднем пролете имеет реальное значение, когда $M_{2\text{мин.}}$ — положительно.



Фиг. 147.

Таблица для трехпролетной балки.

	a	b	c
$s_{1\text{мин.}}$	$\frac{1}{10} l \frac{9k-1}{k}$	$\frac{1}{16} l \frac{13k-1}{k}$	$\frac{1}{20} l \frac{17k-1}{k}$
$s_{2\text{мин.}}$	$l \sqrt{\frac{3k-2}{5k}}$	$l \sqrt{\frac{7k-4}{15k}}$	$l \sqrt{\frac{2k-1}{5k}}$
$M_{2\text{мин.}}$	$\frac{1}{40} Pl(3k-2)$	$\frac{1}{120} Pl(7k-4)$	$\frac{1}{40} Pl(2k-1)$
M'_1	$-\frac{1}{20} Pl(1+k)$	$-\frac{1}{30} Pl(1+2k)$	$-\frac{1}{40} Pl(1+3k)$

Для четырехпролетной балки имеем фиг. 148, в которой:

$$M_1 = -\frac{Pl}{224} (27 - 3k), \quad M_2 = -\frac{Pl}{28} (3 - k). \quad \dots \quad (255)$$

$$s_1 = l \cdot \frac{25 - 3k}{28};$$

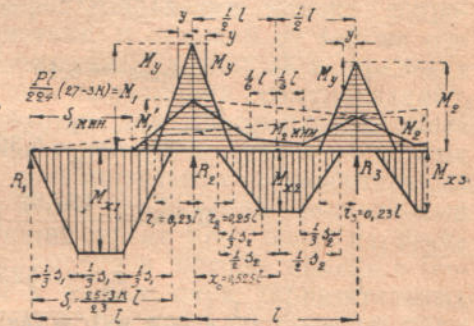
расстояние опасного сечения $x_0 = 0,525l$.

$$\frac{1}{2} s_2 = l \sqrt{0,161 - 0,0886k},$$

$$M_{x1} = \frac{1}{8} s_1^2 g = Pl \frac{(25 - 3k)^2}{6272}$$

$$M_{x2} = Pl (0,0805 - 0,0443k)$$

$$r_1 = 0,23l, \quad r_2 = 0,25l, \quad r_3 = 0,23l.$$



Фиг. 148.

$$M_y = \frac{1}{2} Py - \text{приближенное уменьшение мо-}$$

мента вблизи промежуточной опоры.

Таблица для четырехпролетной балки.

	a	b	c
$s_{1\text{мин.}}$	$\frac{1}{28} l \frac{25k-3}{k}$	$\frac{1}{14} l \frac{12k-1}{k}$	$\frac{1}{56} l \frac{47k-3}{k}$
$M_{2\text{мин.}}$	$\frac{Pl}{112} (9k-5)$	$\frac{Pl}{168} (11k-5)$	$\frac{Pl}{224} (13k-5)$
M'_1	$-\frac{Pl}{56} (3+3k)$	$-\frac{Pl}{28} (1+2k)$	$-\frac{Pl}{112} (3+9k)$
$M'_2 = \frac{2}{3} M'_1$	$-\frac{Pl}{28} (1+k)$	$-\frac{Pl}{42} (1+2k)$	$-\frac{Pl}{56} (1+3k)$

Опорные реакции при полном загрузении всех пролетов

$$R_0 = \frac{11}{28} P, \quad R_1 = \left(\frac{17}{28} + \frac{15}{28} \right) P, \quad R_2 = 2 \cdot \frac{13}{28} P.$$

д) Пример построения эквивалентной эпюры расчетных моментов для четырехпролетной железобетонной ребристой плиты, жестко скрепленной с железобетонными колоннами при условии что:

$$l = 6,40 \text{ м.}, \quad p = 1,56 \text{ т./м.}^2, \quad q = 1,8 \text{ т./м.}^2 \quad g = 3,36 \text{ т./м.}^2$$

Определяем $P = gl = 3,36 \cdot 6,40 = 21,504 \text{ т.}$, $Pl = 21,504 \cdot 6,40 = 137,63 \text{ т./м.}$

$$k = p/g = \frac{1,56}{3,36} = 0,464.$$

Пользуясь форм. (255) и столбцом b последней таблицы, находим:

$$M_1 = - \frac{137,63}{224} (27 - 3 \cdot 0,464) = - 15,734 \text{ т./м.}$$

Момент вблизи второй опоры, например, в расстоянии $y = 0,20 \text{ м.}$

$$M_y = M_1 - M'_y = - 15,734 + \frac{1}{2} \cdot 21,504 \cdot 0,20 = - 13,584 \text{ тм.}$$

$$s_1 = 6,40 \frac{25 - 3 \cdot 0,464}{28} = 5,396 \text{ тм.}$$

$$s_{\text{мин.}} = 6,40 \cdot \frac{12 \cdot 0,464 - 1}{14 \cdot 0,464} = 4,5 \text{ м.}$$

$$M_{x_1} = \frac{1}{8} \cdot 5,396^2 \cdot 3,36 = 12,229 \text{ тм.}$$

$$M_2 = - \frac{137,63}{28} (3 - 0,464) = - 12,465 \text{ тм.}$$

$$x_0 = 0,525 \cdot 6,40 = 3,36 \text{ тм.}$$

$$\frac{1}{2} s_2 = 6,40 \sqrt{0,161 - 0,0886 \cdot 0,464} = 2,217 \text{ м.}$$

$$M_{x_2} = 137,63 (0,0805 - 0,0443 \cdot 0,464) = 8,250 \text{ тм.}$$

$$M_{2\text{мин.}} = - \frac{137,63}{168} (11 \cdot 0,464 - 5) = + 0,0852 \text{ тм.}$$

$$M_1 = - \frac{137,63}{28} (1 + 2 \cdot 0,464) = - 9,476 \text{ тм.}$$

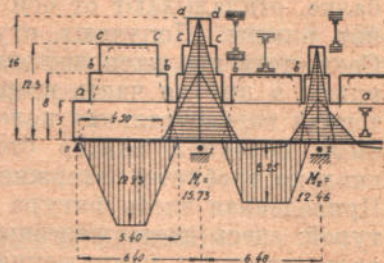
$$M_2 = - \frac{137,63}{42} (1 + 2 \cdot 0,464) = - 6,318 \text{ тм.}$$

По этим данным эпюра строится без затруднений. Форма ее показана на фиг. 149.

е) Эпюра материала. При проектировании балки в каждом ее поперечном сечении надо обеспечить столько материала, сколько требуется, чтобы момент внутренних сил, допускаемый сечением, был не меньше изгибающего момента, показанного эпюрой. Если проектируется железная балка, то момент сопротивления W наибольшего номера профиля, имеющегося по сортаменту, умноженный на допускаемое напряжение n , сравнивают с наибольшим изгибающим моментом эпюры, чтобы решить, требуется ли клепанная балка или можно обойтись готовым прокатным профилем. В последнем случае, обыкновенно, балка сохраняет постоянное сечение по всей длине. Если же расчетные моменты эпюры больше, чем $W \cdot n$, то прибегают к клепанной конструкции, при чем при больших пролетах и значительных нагрузках изменяют сечение вдоль балки в зависимости от изменения ординат эпюры моментов. Обыкновенно стенку,

4 пояных уголка и пару горизонтальных листов протягивают через все пролеты, а недостаточность этого сечения пополняют наклейкой дополнительных горизонтальных листов в тех местах эпюры, где произведение W_n принятого основного сечения из стенки, 4 углов и пары горизонтальных листов меньше, чем ординаты эпюры.

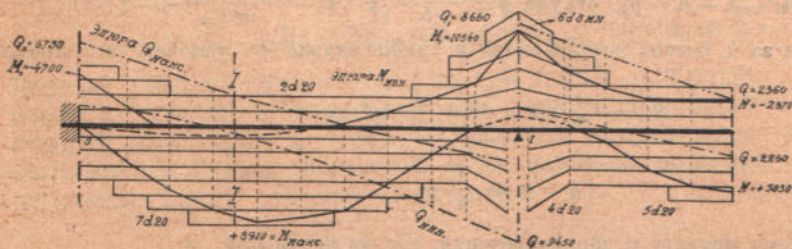
Основное сечение проектируют, руководствуясь, либо областью малых ординат в местах перехода положительных расчетных моментов в отрицательные, т.е. у опор, либо наименьшим из положительных расчетных моментов одного из средних пролетов балки. Величину допускаемого напряжения, умноженного на W проектируемого сечения откладывают здесь в масштабе эпюры моментов и параллельную прямую протягивают вдоль всей балки, как показано сплошной линией на фигуре 149. Назовем эту линию линией основного материала балки.



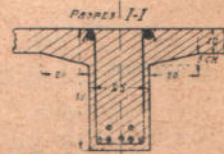
Фиг. 149.

В тех местах, где очертание эпюры расчетных моментов выходит из пределов основной линии, требуются горизонтальные листы. Задавшись одной парой таких листов подходящих размеров, определим момент сопротивления сечения W_n вместе с этими листами и отложим от той же оси эпюры моментов, проводя короткие горизонтальные линии bb в пределах эпюры моментов и продолжая за эти пределы на величину „полунакладки“, т.е. на столько заклепок, сколько требуется для прикрепления листа своим концом. Если и эта линия не покрывает выступов эпюры расчетных моментов, то добавляют вторую пару дополнительных горизонтальных листов, определяют для усиленного сечения наибольший допускаемый момент внутренних сил и по его ординате строят еще более короткие горизонтальные линии cc на протяжении выступов эпюры моментов (конечно, с запасом на полнакладки). Если и вторая пара горизонтальных листов не покрывает выступов эпюры моментов, то добавляют третью пару и т. д. до тех пор, пока не закроются все выступы эпюры моментов, как показано линией dd . Полученная таким путем ступенчатая линия называется эпюрой внутренних моментов или эпюрой материала. По площади, заключенной между эпюрой материала и эпюрой изгибающих моментов можно судить о целесообразности распределения и коэффициенты использования фактически затраченного материала.

При проектировании железобетонных балок обыкновенно полагают, что нормальные растягивающие напряжения, возникающие при изгибе,



Фиг. 150.

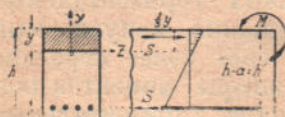


Фиг. 151.

воспринимаются исключительно железной арматурой; поэтому последняя помещается в той части сечения, где находятся растянутые волокна, а именно, либо в нижних частях балки, как это имеет место по середине пролета с положительными изгибающими моментами, либо — в верхних частях, например, — на опорах с отрицательными моментами. В соответ-

ствии с этим предположением здесь приходится вычислять, в разных сечениях, моменты, которые способна выдержать арматура при наибольшем ее допускаемом напряжении: площадь стержней арматуры умножают на допускаемое напряжение для железа, получая таким образом предельную силу, которая может быть передана на арматуру; если эту силу умножить на плечо внутренних сил приведенного сечения*), то получим предельный допустимый в сечении момент внутренних сил, — его, как и в железной балке, откладывают от оси эпюры расчетных моментов в масштабе ординат эпюры. Получают ступенчатую линию, показанную на фиг. 150. Соответственно расположению арматуры, часть этой линии изображается внизу, а другая часть вверху. На представленной здесь фиг. 150 каждая тонкая горизонтальная полоска обозначает предельный момент, допускаемый сечением одного стержня арматуры, — и становится очевидным, сколько требуется стержней для покрытия эпюры расчетных моментов. Приведенная здесь фигура относится к балке, снабженной двойной арматурой; здесь часть железных стержней помещается внизу для восприятия растягивающих напряжений от положительных моментов в средних частях пролета, а другая часть стержней помещается вверху для восприятия растягивающих напряжений, обусловленных отрицательными опорными моментами. Число стержней показано числом горизонтальных полосок, покрывающих эпюру моментов, диаметры стержней индексируются буквою d^{**}), а длина стержней вдоль балки обозначается длиной полосок, так как каждая ступенька соответствует месту обрыва стержня арматуры.

*) Это плечо приближенно считают равным $0,9h'$, где $h' = h - a$ есть полезная высота сечения, т. е. расстояние сжатой поверхности балки до центра арматурного стержня. Более точная длина плеча внутренних сил выражается формулой:



$$h' = \frac{1}{3} y,$$

где y — расстояние нейтральной оси сечения до сжатой поверхности балки.

Как известно, при сохранении плоских поперечных сечений при сжатии и при изгибе напряжения пропорциональны модулям упругости, и усилие элементов сечения можно представить однородно, через один какой-нибудь из модулей, если элементы другого материала пропорционально увеличить.

На этом основании, для определения нейтральной оси в железобетонных балках считают, что статический момент площади сжатой части бетона by , т. е. $\frac{1}{2} by^2$ равняется статическому моменту сечения железной арматуры, увеличенного в отношении $E_{ж} : E_{б} = m = 15$ т. е. моменту $m \cdot F_{ж} (h - y - a)$, где a — расстояние от центра стержней арматуры до растянутой поверхности балки:

$$\frac{1}{2} by^2 = m F_{ж} (h - a - y), \text{ откуда } y = \frac{m F_{ж}}{b} \left(\sqrt{1 + \frac{2b(h-a)}{m F_{ж}}} - 1 \right).$$

Напряжения железа и бетона вычисляются в таком случае из условия, что момент внутренних сил:

$$S_{ж} = F_{ж} \cdot n_{ж} \text{ и } S_{б} = \frac{1}{2} by \cdot n_{б}$$

с плечом

$$\left(h - a - \frac{1}{3} y \right)$$

равняется изгибающему моменту в данном сечении. т. е. из уравнений:

$$M = F_{ж} n_{ж} \left(h' - \frac{1}{3} y \right), \text{ откуда } n_{ж} = \frac{M}{F_{ж} \left(h' - \frac{1}{3} y \right)},$$

$$\text{и } M = \frac{1}{2} by \cdot n_{б} \left(h' - \frac{1}{3} y \right) \text{ откуда } n_{б} = \frac{2M}{by \left(h' - \frac{1}{3} y \right)}$$

**) Наприм., $6 d 8$ обозначает: 6 стержней диаметром 8 миллиметров.

В области опор, где балка имеет утолщение, „вут“, стержни арматуры могут быть удалены от нейтральной оси и воспринимают большой допустимый момент: поэтому на фигуре в области опор изображены наклонные полосы моментов внутренних сил, поднимающиеся от оси по мере отгибания стержней арматуры.

Нижние полосы в области опоры 1 прерываются, так как здесь нет положительных моментов, а отрицательные воспринимаются верхней арматурой.

Подобренные таким образом балки имеют переменное сечение и при окончательной проверке исследуются на основании теории балок переменного сечения, изложенной в следующем параграфе.

ГЛАВА IV.

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ.

§ 10. Уравнение трех моментов. 1. Общий прием. Чтобы получить зависимость между тремя последовательными опорными моментами неразрезной балки, мы приравняем углы поворота упругой линии справа и слева от рассматриваемой опоры*). Эти углы будут равны всегда, если только упругая линия над опорой не испытывает перелома и потому, способом уравнивания углов можно воспользоваться и при переменном сечении балки. По существу здесь не будет разницы в способе вывода теоремы: как при постоянном, так и при переменном сечении углы поворота опорных сечений зависят от жесткости балки, только в первом случае жесткость, как постоянная величина, в обоих частях равенства сокращается, и не участвует в уравнении трех моментов, тогда как при переменном сечении она сохраняется. Несколько сложнее будет самое определение опорных углов изгиба в том случае, если жесткость изменяется в пределах пролета. Принимая во внимание эту разницу в определении углов, рассмотрим отдельно балки, у которых пролеты отличаются моментами инерции, постоянными на протяжении пролета, и отдельно — балки, жесткость которых изменяется в пределах пролета.

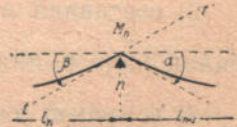
2. Балки разной жесткости в различных пролетах. Принимая для концевых углов изгиба обозначения по § 3,2, можно написать: для правого угла изгиба β_n пролета l_n :

$$\beta_n = \beta_{an} M_{n-1} + \beta_{bn} M_n + \beta_n^0,$$

для левого угла α_{n+1} пролета l_{n+1} :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_{a(n+1)} M_n + \alpha_{b(n+1)} M_{n+1} + \alpha_{n+1}^0, \text{ где } \alpha_b = \beta_a = \gamma \text{ (см. 87).}$$

Первый угол отсчитывается влево, — вниз т.е. против часовой стрелки а второй вправо, — вниз по часовой стрелке (фиг. 153), и чтобы приравнять наклон касательных t и t' надо у второго угла изменить знак на обратный. Таким образом получится:



Фиг. 153.

$$\gamma_n M_{n-1} + \beta_{bn} M_n + \beta_n^0 = -(\alpha_{a(n+1)} M_n + \gamma_{n+1} M_{n+1} + \alpha_{n+1}^0),$$

или
$$M_{n-1} \gamma_n + M_n (\alpha_{a(n+1)} + \beta_{bn}) + M_{n+1} \gamma_{n+1} = -(\alpha_{n+1}^0 + \beta_n^0) \dots (256).$$

Остается записать выражения для углов изгиба α , β , γ от единичного опорного момента и подставить в уравнение.

Будем обозначать момент инерции буквой J со знаком пролета; J_n, J_{n+1} .

*) См. напр. Системы с лишними неизвестн. § 12, фиг. 125.

Для расчетов известное удобство представляет выражение моментов инерции разных пролетов в долях какого-нибудь одного момента, принятого за единицу. Так как этот последний в нашем распоряжении, то мы можем назначить его совершенно произвольно и назвать J_0 . Теперь напишем:

1) $\gamma = \alpha_b = \beta_a = \frac{1 \cdot l}{6EJ}$, так что для пролета l_n должно быть:

$\gamma_n = \frac{1 \cdot l_n}{6EJ_n}$; если же умножим и разделим на J_0 то:

$\gamma_n = \frac{1}{J_0 6E} \left(l_n \frac{J_0}{J_n} \right)$ и таким же образом $\gamma_{n+1} = \frac{1}{6EJ_0} \left(l_{n+1} \frac{J_0}{J_{n+1}} \right)$;

2) $\beta_{bn} = \frac{1 \cdot l_n}{3EJ_n} = \frac{1}{3EJ_0} \left(l_n \frac{J_0}{J_n} \right) = \frac{2}{6EJ_0} \left(l_n \frac{J_0}{J_n} \right)$;

3) $\alpha_{a(n+1)} = \frac{1 \cdot l_{n+1}}{3EJ_{n+1}} = \frac{2}{6EJ_0} \left(l_{n+1} \frac{J_0}{J_{n+1}} \right)$.

В каждом из выражений для углов стоит длина пролета, разделенная на соответствующую жесткость и умноженная на жесткость, принятую за единицу, измененную таким образом длину l называют приведенной длиной и обозначают l' , т-е принимают: $l' = l \cdot \frac{J_0}{J}$, называя множитель $\frac{J_0}{J}$ коэффициентом приведения длины*). При таких условиях выражения для углов будут иметь общую жесткость EJ_0 :

$$\gamma_n = \frac{l'_n}{6EJ_0}, \gamma_{n+1} = \frac{l'_{n+1}}{6EJ_0}, \beta_{bn} = \frac{2l'_n}{6EJ_0}, \alpha_{a(n+1)} = \frac{2l'_{n+1}}{6EJ_0} \dots (257),$$

и уравнение трех моментов переписется в форме:

$$M_{n-1}l'_n + 2M_n(l'_n + l'_{n+1}) + M_{n+1}l'_{n+1} = -6EJ_0(\alpha^0_{n+1} + \beta^0_n) \dots (258),$$

соответствующей случаю постоянной жесткости (см. напр. 151). Таким образом, для применения уравнения трех моментов при разных жесткостях в разных пролетах необходимо:

1) сделать приведение пролетов балки путем умножения на коэффициент приведения $\frac{J_0}{J}$;

2) составляя левую часть уравнения, вместо действительных пролетов балки надо принять приведенные $l'_n = l_n \frac{J_0}{J_n} \dots (259)$;

3) в правой части уравнения надо принять жесткость EJ_0 , общую для всех пролетов балки.

Особенностью расчета здесь служит только предварительное определение приведенных пролетов; в остальном решение не отличается.

3. Балки переменной жесткости в пролете. При вычислении концевых углов изгиба, необходимых для подстановки в формулу трех моментов (256),

*) Так мы поступали уже при построении упругой линии для балки переменного сечения в § 2, в „Систем с лишними неизвестными“. Вводя вместо заданных величин моментов инерции их отношение, мы помимо простоты выводов упрощаем и числа, с которыми приходится оперировать: эти отношения обыкновенно выражаются несколькими единицами в то время, как отдельные числа, либо очень велики, если даны в см., либо очень малы, если в метрах.

нам придется здесь воспользоваться выражениями (96), принимая во внимание изменение жесткости на протяжении пролета. Умножая, как прежде, на $\frac{J_m}{J_x} = 1$, где J_m — момент инерции по середине пролета, получим вместо (96) выражения:

$$a_a = \frac{1}{EJ_m l^2} \int_0^l x'^2 \frac{J_m}{J_x} dx, \quad \beta_b = \frac{1}{EJ_m l^2} \int_0^l x^2 \frac{J_m}{J_x} dx, \\ \gamma = \frac{1}{EJ_m l^2} \int_0^l x x' \frac{J_m}{J_x} dx \dots \dots \dots (260).$$

Их можно заменить простыми выражениями для балок постоянной жесткости:

$$a_a = \frac{1 \cdot l}{3EJ_m} \chi, \quad \beta_b = \frac{1 \cdot l}{3EJ_m} \mu, \quad \gamma = \frac{1 \cdot l}{6EJ_m} \nu \dots \dots \dots (261),$$

если обозначить буквами χ, μ, ν коэффициенты:

$$\frac{3}{l^3} \int_0^l x'^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \chi, \quad \frac{3}{l^3} \int_0^l x^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \mu, \quad \frac{6}{l^3} \int_0^l x x' \frac{J_m}{J_x} dx = \nu \dots (262).$$

Если предварительно вычислим коэффициенты χ, μ и ν , принимая во внимание изменение момента инерции J_x вдоль пролета, то придем к известным формулам для углов (261), а, следовательно, получим такое же уравнение трех моментов, как представленное формулой (258), ибо грузовой член уравнения (правая часть) не зависит от формулы поперечного сечения.

Действительно, подставляя углы (261) в уравнение трех моментов (256), имеем:

$$\frac{1 \cdot l_n}{6EJ_{on}} \nu_n M_{n-1} + \frac{1}{3EJ_{on}} (l_n \mu_n + l_{n+1} \chi_{n+1}) M_n + \frac{1 \cdot l_{n+1}}{6EJ_{on}} \nu_{n+1} M_{n+1} = \\ = -(\alpha_{n+1}^0 + \beta_n^0),$$

а после освобождения от знаменателя $6EJ_{on}$: $\dots \dots \dots (263).$

$$M_{n-1} l_n \nu_n + 2M_n (l_n \mu_n + l_{n+1} \chi_{n+1}) + M_{n+1} l_{n+1} \nu_{n+1} = -6EJ_m (\beta_n^0 + \alpha_{n+1}^0).$$

В этом уравнении только коэффициенты χ, μ и ν зависят от переменного сечения, в остальном нет отличий от обычного уравнения трех моментов. Имея более общее уравнение (263), мы могли бы прежде получить как частный случай, положивши при постоянном сечении $J_x = J_m$, или:

$$\chi = \mu = \nu = 1.$$

Отсюда следует, что для расчета балки переменного сечения прежде всего надлежит вычислить коэффициенты углов χ, μ, ν .

Если закон изменения моментов инерции выражается функцией, которая легко интегрируется, то вычисляют соответствующие интегралы, в противном случае задачу решают графически, как показано на фиг. 154. Разбивают пролет на равные части, например, на 10, для каждой точки

деления вычисляют значение $x^2 \frac{J_m}{J_x}$ и строят ординату mn . Плавная кривая Ab , объединяющая все ординаты, замыкает площадь $AbBA$, равную коэффициенту μ . Действительно: площадь $AnbBA$ равна:

$$\int_0^l mn \cdot dx = \int_0^l x^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \mu.$$

Таким же образом получается ν , как площадь $Aa BA$, а также γ , как площадь $A'_{1} l_{1} B$.

В том случае, когда изменение моментов инерции вдоль пролета ступенчатое или происходит по закону прямой, интегрирование может быть заменено несложными вычислениями на основании следующего истолкования выражений (262).

Вообразим на фиг. 154 построенную линию $\frac{J_m}{J_x}$; тогда элемент площади будет $\frac{J_m}{J_x} dx$, а $\int_0^l \frac{J_m}{J_x} dx \cdot x^2$ — представит момент инерции площади относительно левой опорной вертикали. Таким же образом $\int_0^l \frac{J_m}{J_x} dx \cdot x'^2$ — момент инерции той же площади относительно правой опорной вертикали.

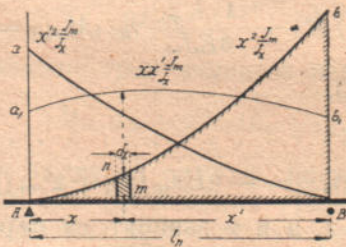
Последнее из выражений (262)

$$\int x x' \frac{J_m}{J_x} dx = \int x(l-x) \frac{J_m}{J_x} dx = l \int x \frac{J_m}{J_x} dx - \int x^2 \frac{J_m}{J_x} dx$$

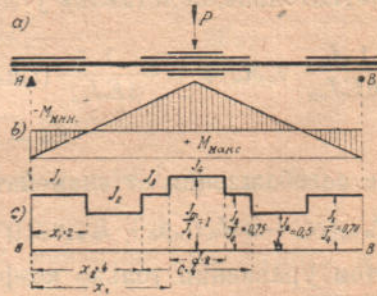
представляет разность между:

- 1) статическим моментом площади $\frac{J_m}{J_x}$, умноженным на длину пролета и
- 2) моментом инерции той же площади.

Итак,
$$\nu = \frac{3}{l^2} l_B, \quad \mu = \frac{3}{l^2} l_A, \quad \gamma = \frac{6}{l^3} (S_A l - J_A) \dots \dots \dots (264).$$



Фиг. 154.



Фиг. 155.

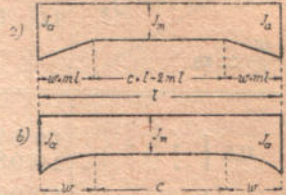
Вычисление по этим формулам производится очень просто, так как статический момент и момент инерции для прямоугольников и треугольников имеют готовые выражения, Положим например, что клепанная железная балка имеет по середине две пары горизонтальных листов, а по краям — по одной паре, как схематически показано на фиг. 155-а). Момент инерции сечения изменяется ступенчато, и если срединный из них l_4 принять за единицу, то остальные выразятся дробями, представленными справа на фиг. с), В этом случае:

$$\frac{J_m}{J_4} = 1, \quad \frac{J_m}{J_3} = \frac{J_4}{J_3} = \frac{4}{3}, \quad \frac{J_m}{J_2} = \frac{J_4}{J_2} = 2, \quad \frac{J_m}{J_1} = \frac{J_4}{J_1} = \frac{10}{7},$$

и угловой коэффициент β вычисляется, как момент инерции семи прямоугольников

$$\frac{J_4}{J_1} \cdot x_1 = \frac{20}{7}, \quad \frac{J_4}{J_2} (x_2 - x_1) = 4, \quad \frac{J_4}{J_3} (x_3 - x_2) = \frac{4}{3} \dots \text{относительно оси } BB.$$

Опорные сечения неразрезных балок обыкновенно больше, чем сечения по середине пролета. В железобетонных конструкциях практикуется плавный переход от срединного сечения к более сильному опорному, либо по прямой, либо по параболе, либо по коробовой кривой, как показано на фиг. 156. Утолщения называются вутами. Для этих случаев коэффициенты углов α , μ и ν могут быть вычислены предварительно, так как очерта-



Фиг. 156.

ние линии момента инерции $\frac{J_m}{J_a}$ задается, и при расчете балок потребуется только выписать соответствующий коэффициент из таблицы. Ниже приводятся таблицы, где коэффициенты углов даются в зависимости от соотношения моментов инерции: по середине пролета и на опоре, а также — в зависимости от длины вут, выраженной в частях пролета.

Таблица 1 угловых коэффициентов при прямолинейном очертании вут (фиг. 156-а).

$\frac{w}{l} = m$	$i = \frac{J_m}{J_a}$											
	1,0	0,6	0,3	0,2	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05		
0,5 {	1,0	0,753	0,519	0,421	0,364	0,326	0,298	0,267	0,233	0,214	= $\mu = \alpha$
	1,0	0,845	0,637	0,548	0,492	0,453	0,424	0,390	0,351	0,328	= ν
0,4 {	1,0	0,792	0,595	0,512	0,463	0,431	0,407	0,381	0,351	0,335	= μ
	1,0	0,881	0,751	0,689	0,650	0,623	0,602	0,578	0,551	0,535	= ν
0,35 {	1,0	0,813	0,635	0,560	0,516	0,486	0,465	0,441	0,414	0,400	= μ
	1,0	0,906	0,803	0,753	0,723	0,701	0,684	0,665	0,643	0,630	= ν
0,30 {	1,0	0,835	0,678	0,611	0,572	0,545	0,526	0,505	0,481	0,468	= μ
	1,0	0,928	0,850	0,813	0,789	0,773	0,760	0,745	0,728	0,719	= ν
0,25 {	1,0	0,858	0,723	0,665	0,631	0,608	0,591	0,573	0,552	0,540	= μ
	1,0	0,949	0,893	0,866	0,849	0,836	0,828	0,817	0,805	0,798	= ν

Таблица 2 угловых коэффициентов при параболическом очертании вут (фиг. 156-б).

$\frac{w}{l} = m$	$i = \frac{J_m}{J_a}$											
	1,0	0,6	0,3	0,2	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05		
0,50 {	1,0	0,820	0,640	0,559	0,510	0,476	0,451	0,422	0,389	0,370	= $\mu = \alpha$
	1,0	0,904	0,790	0,731	0,693	0,665	0,642	0,616	0,585	0,566	= ν
0,40 {	1,0	0,850	0,699	0,631	0,589	0,560	0,539	0,515	0,486	0,470	= μ
	1,0	0,935	0,858	0,818	0,792	0,773	0,757	0,739	0,718	0,704	= ν
0,35 {	1,0	0,866	0,730	0,669	0,631	0,605	0,586	0,564	0,538	0,524	= μ
	1,0	0,949	0,889	0,857	0,837	0,821	0,809	0,795	0,777	0,767	= ν
0,30 {	1,0	0,882	0,763	0,709	0,676	0,653	0,635	0,616	0,593	0,580	= μ
	1,0	0,962	0,916	0,892	0,876	0,865	0,856	0,845	0,832	0,824	= ν
0,25 {	1,0	0,899	0,797	0,751	0,722	0,702	0,687	0,671	0,651	0,639	= μ
	1,0	0,973	0,940	0,923	0,913	0,904	0,897	0,889	0,880	0,874	= ν

Таблица угловых коэффициентов при очертании вут по коробовой кривой (Фиг. 156-б).

$\frac{w}{l} = m$	$i = \frac{J_m}{J_a}$											
	1,0	0,6	0,3	0,2	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05		
0,5 {	1,0	0,775	0,606	0,550	0,522	0,505	0,494	0,483	0,471	0,465	$\mu = \kappa$
	1,0	0,850	0,738	0,700	0,681	0,670	0,663	0,655	0,648	0,644	ν
0,4 {	1,0	0,811	0,670	0,622	0,599	0,585	0,575	0,566	0,556	0,552	μ
	1,0	0,898	0,821	0,795	0,782	0,775	0,770	0,764	0,759	0,757	ν
0,35 {	1,0	0,830	0,703	0,661	0,640	0,627	0,618	0,610	0,601	0,597	μ
	1,0	0,919	0,859	0,838	0,828	0,822	0,818	0,814	0,810	0,808	ν
0,3 {	1,0	0,851	0,739	0,701	0,683	0,671	0,664	0,656	0,649	0,645	μ
	1,0	0,939	0,893	0,878	0,870	0,865	0,862	0,859	0,856	0,855	ν
0,25 {	1,0	0,872	0,776	0,744	0,728	0,718	0,712	0,705	0,699	0,696	μ
	1,0	0,956	0,923	0,913	0,907	0,904	0,902	0,899	0,897	0,896	ν

Первая таблица относится к прямым вутам, вторая — к очерченным по параболу и третья — для коробовой кривой. Так как таблицы относятся к симметричным балкам, то в них приводится один из коэффициентов $\mu = \kappa$.

Если рассматриваемая балка имеет отношение моментов инерции $i = \frac{J_m}{J_a}$ и длину вут $m = w : l$, не помещенные в таблице, то пользуются линейной интерполяцией.

Пример. Применим таблицы к случаю балки, рассмотренной на фиг. 130, но при переменном сечении. В этом примере при данном соотношении нагрузок p и q , крайний пролет сделан меньше с таким расчетом, чтобы уравнивать положительные моменты во всех пролетах *); поэтому моменты инерции поперечного сечения по середине пролетов сохраняются одинаковыми по всей длине балки $J_{m1} = J_{m2} = J_{m3} = J_{m4}$, но утолщение балки к опорам сделано различно: над опорой № 1 момент инерции $J_{b1} = 1,25 J_{m1}$, а над опорой № 2: $J_{a2} = 1,5 J_{m2}$. Очертание вут прямолинейное, причем длина вут составляет $\frac{1}{4}$ пролета.

Отношение моментов инерции по середине и по вуту $\frac{J_{m1}}{J_{a1}} = i = 0,8$ и $i_2 = 0,667$; его нет в таблице и приходится интерполировать между первым и вторым столбцом. Остановившись на нижних строках для $m = 0,25$, находим в первом пролете, т. е. при $i = \frac{J_m}{J_a} = 0,8$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \mu_1 &= \frac{1}{2} (1,0 + 0,858) = 0,929, \\ \nu_1 &= \frac{1}{2} (1,0 + 0,949) = 0,974; \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (265).$$

и во втором пролете, при $i = \frac{J_m}{J_a} = \frac{1}{1,5} = 0,667$:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= 1 \cdot \frac{0,067}{0,400} + 0,858 \frac{0,333}{0,400} = 0,882, \\ \nu_2 &= 1 \cdot \frac{0,067}{0,400} + 0,949 \frac{0,333}{0,400} = 0,907, \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (266)$$

*) В неразрезных балках постоянного сечения с равными пролетами большие положительные моменты получаются в крайних пролетах, и если надо их подравнять с моментами в средних пролетах, то приходится длину крайних пролетов соответственно уменьшать.

Коэффициенты пролетов мало отличаются, и ими можно воспользоваться даже в рассматриваемом случае несимметричных средних пролетов (смотря на то, что таблица относится к симметричному очертанию*). Принимая для средних пролетов среднее арифметическое из коэффициентов (265 и 266), т. е.:

$$\mu = \frac{1}{2} (0,929 + 0,882) = 0,905,$$

$$\nu = \frac{1}{2} (0,974 + 0,907) = 0,940,$$

получим уравнение трех моментов (263) в форме:

$M_1 \cdot 0,940 l_2 + 2M_2 \cdot 0,905 (l_2 + l_3) + M_3 \cdot 0,940 l_3 = -6EJ_m (\beta_2^0 + \alpha_3^0) \dots$ (267) где пролеты l взяты фактической, а не приведенной длины, так как моменты инерции по середине всех пролетов, одинаковы (случай различных жесткостей рассматривается ниже форм. 273).

Как показывают цифры таблиц, очертание вут сравнительно мало отражается на значениях коэффициентов α , μ , ν , в особенности при наиболее часто встречающихся соотношениях i и m . Оказывается, что заменяя общее очертание пролета обычной параболой, касающейся нижнего пояса балки по середине и на опорах, мы получаем коэффициенты, практически пригодные для расчета.



Для крайних пролетов неразрезных балок с шарнирно-опертыми концами, практически допускается замена ломаного очертания несимметричной параболой и даже — наклонною прямою 0—1 (фиг. 157), отмеченной легким пунктиром.

Составим формулы расчета для этих случаев симметричного и несимметричного очертания балки, ибо при таком упрощенном очертании интегралы (262) без затруднений получаются в конечном виде.

§ 11. Приближенный способ расчета. 1. Случай несимметричного пролета. В виду того, что очертание пролета сравнительно мало отражается



Фиг. 158.
Эпюра жесткости левого пролета балки 157.



Фиг. 159.
Эпюра жесткости симметричного пролета

на коэффициентах α , μ и ν , в приближении допускают, что гибкость сечения $\frac{1}{J}$ изменяется по линейному закону. Обозначим, при таком положении, буквой J_m — момент инерции по середине пролета фиг. 158; тогда:

$$\frac{1}{J_m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{J_a} + \frac{1}{J_b} \right), \text{ или } J_m = \frac{2J_a J_b}{J_a + J_b} \dots \dots \dots (268),$$

а в каком-нибудь сечении, удаленном на x от левой опоры пролета, гибкость будет:

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \left(\frac{1}{J_a} - \frac{1}{J_m} \right) = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{J_m - J_a}{J_m J_a} \dots \dots (269).$$

*) Как поступать при несимметричном очертании пролета, — указывается ниже.

В таком случае отношение моментов инерции для форм. (262) будет:

$$\frac{J_m}{J_x} = 1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \frac{J_m - J_a}{J_a}, \text{ или; } \frac{J_m}{J_x} = 1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) j, \dots (270),$$

где
$$j = \frac{J_m - J_a}{J_a} = \frac{J_m}{J_a} - 1 = i - 1,$$

при чем i — отношение моментов инерции (271).

Теперь интегралы (262) составятся в форме:

$$\int x'^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \int (l-x)^2 \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)\right] dx = \frac{l^3}{6} (2+j),$$

$$\int x^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \int x^2 \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)\right] dx = \frac{l^3}{6} (2-j),$$

и
$$\int x x' \frac{J_m}{J_x} dx = \int x (l-x) \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)\right] dx = \frac{l^3}{6},$$

и единичные концевые углы будут по (260):

$$\alpha_a = \frac{l}{6EJ_m} (2+j), \beta_b = \frac{l}{6EJ_m} (2-j), \gamma = \frac{l}{6EJ_m} \dots (272).$$

Если жесткость разных пролетов неразрезной балки неодинакова, то вместо l подставляется приведенная длина l' . Она получается, если выражения (272) умножить на $\frac{J_0}{J_0}$, где J_0 — момент инерции по середине, принятый за единицу сравнения для всех пролетов. Таким образом, при разной жесткости пролетов получим:

$$\alpha_a = \frac{l}{6E} \cdot \frac{J_0}{J_0} \cdot \frac{1}{J_m} (2+j) = \frac{l'}{6EJ_0} (2+j), \beta_b = \frac{l'}{6EJ_0} (2-j),$$

$$\gamma = \frac{l'}{6EJ_0},$$

где $l' = l \frac{J_0}{J_m}$ — приведенная длина пролета,

Следовательно, уравнение трех моментов (256) будет иметь вид:

$$M_{n-1} l'_n + M_n [l'_n (2-j_n) + l'_{n+1} (2+j_n)] + M_{n+1} l'_{n+1} =$$

$$= -6EJ_0 (\alpha_{n+1}^0 + \beta_n^0) \dots (273)$$

2. Случай симметричного очертания в пролете (фиг. 159). Если закон изменения гибкости сечения $\frac{1}{J}$ параболический, как представлено на фиг. 159, то для какого-нибудь сечения на расстоянии x от левой опоры будет:

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{J_a} - \frac{1}{J_m}\right) = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \frac{J_m - J_a}{J_a J_m}; \dots (274-a).$$

а так как по (271): $\frac{J_m - J_a}{J_a} = j$, то:

$$\frac{J_m}{J_x} = 1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 j \dots (274-b)$$

А потому интегралы (262) дадут:

$$\int x^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \int (l-x)^2 \left[1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 j \right] dx = \frac{l^3}{3} \left(1 + \frac{2}{5} j \right),$$

$$\int x^2 \frac{J_m}{J_x} dx = \int x^2 \left[1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 j \right] dx = \frac{l^3}{3} \left(1 + \frac{2}{5} j \right),$$

$$\int x x' \frac{J_m}{J_x} dx = \int x (l-x) \left[1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 j \right] dx = \frac{l^3}{6} \left(1 + \frac{1}{5} j \right);$$

и концевые единичные углы будут:

$$\alpha_a = \beta_b = \frac{l}{3EJ_m} \left(1 + \frac{2}{5} j \right) = \frac{1}{3EJ_0} \left(l \frac{J_0}{J_m} \right) \left(1 + \frac{2}{5} j \right) = \frac{l'}{3EJ_0} \left(1 + \frac{2}{5} j \right);$$

$$\gamma = \frac{l}{6EJ_m} \left(1 + \frac{1}{5} j \right) = \frac{1}{6EJ_0} \left(l \frac{J_0}{J_m} \right) \left(1 + \frac{1}{5} j \right) = \frac{l'}{6EJ_0} \left(1 + \frac{1}{5} j \right).$$

Следовательно, уравнение трех моментов (256) будет:

$$M_{n-1} l'_n \left(1 + \frac{1}{5} j_n \right) + 2M_n \left[l'_n \left(1 + \frac{2}{5} j_n \right) + l'_{n+1} \left(1 + \frac{2}{5} j_{n+1} \right) \right] + \\ + M_{n+1} l'_{n+1} \left(1 + \frac{1}{5} j_{n+1} \right) = -6EJ_0 (\alpha_{n+1}^0 + \beta_n^0) \dots \dots \dots (275)$$

Пример. Применим эти соображения к примеру, приведенному в § 10,3 (см. фиг. 130). Как прежде, здесь $l' = l$. Принимая несимметричный крайний пролет и $J_{b1} = 1,25 J_{a1}$, найдем по (268) $J_{m1} = 1,11 J_a$ и соответственно по (271):

$$j_1 = i_1 - 1 = 1,111 - 1,0 = 0,111;$$

для второго пролета, считая его симметричным, при

$$J_a = J_b = \frac{1}{2} (1,5 + 1,25) J_m = 1,375 J_m,$$

получим:

$$j_2 = \frac{m_2}{1,375 J_{m2}} - 1 = -0,273.$$

Уравнение трех моментов применительно к первым двум пролетам будет:

$$0 + M_1 \left[\frac{l_1}{6EJ_0} (2 - j_1) + \frac{l_2}{3EJ_0} \left(1 + \frac{2}{5} j_2 \right) \right] + M_2 \frac{l_2}{6EJ_0} \left(1 + \frac{1}{5} j_2 \right) = \\ = -(\alpha_2 + \beta^1), \text{ или:}$$

$$M_1 (1,889 l_1 + 1,782 l_2) + M_2 \cdot 0,946 l_2 = -6EJ_0 (\beta_1^0 + \alpha_2^0).$$

Для второго и третьего пролетов получим:

$$M_1 l_2 \left(1 + \frac{1}{5} j_2 \right) + 2M_2 \left[\left(1 + \frac{2}{5} j_2 \right) l_2 + \left(1 + \frac{2}{5} j_3 \right) l_3 \right] + \\ + M_3 l_3 \left(1 + \frac{1}{5} j_3 \right) = -6EJ_0 (\beta_2^0 + \alpha_3^0), \text{ или:}$$

$$M_1 \cdot 0,946 l_2 + 2M_2 \cdot 0,891 (l_2 + l_3) + M_3 \cdot 0,946 l_3 = -6EJ_0 (\beta_2^0 + \alpha_3^0).$$

Это уравнение соответствует прежнему (267). Небольшая разница коэффициентов, помимо приближенности формул, объясняется еще тем, что

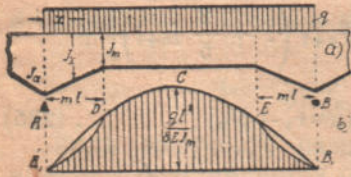
прежде очертание первого пролета считалось симметричным, здесь же оно несимметрично.

3. Грузовой член уравнения трех моментов. Рассмотрим случай нагрузки, равномерно распределенной в пределах пролета при различных формах очертания балок.

а) Если в разных пролетах различные моменты инерции, сохраняющие величину только в пределах пролета, то, при разной интенсивности нагрузки в соседних пролетах, грузовой член, соответствующий опоре n , представится в форме:

$$6EJ_0 (\beta_{0n}^0 + \alpha_{0n+1}^0) = 6EJ_0 \left(\frac{q_n l_n^3}{24EJ_n} + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^3}{24EJ_{n+1}} \right) = \frac{q_n l_n^2}{4} \left(l_n \frac{J_0}{J_n} \right) + \\ + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{4} \left(l_{n+1} \frac{J_0}{J_{n+1}} \right) = q \frac{l_n^2}{4} l'_n + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{4} l'_{n+1} \dots \dots \dots (276).$$

б) Если момент инерции изменяется в пределах пролета, то придется вычислить отдельно угол слева и угол справа от n -ой опоры, принимая во внимание закон изменения жесткости в пределах каждого из двух соседних пролетов l_n и l_{n+1} . При этом проще всего воспользоваться графоаналитическим способом*), по которому концевой угол изгиба выражается реакцией от площади эпюры моментов, разделенной элементарно на соответствующую жесткость (Сделавши такое деление, получим фиг. 160-б) При симметричной нагрузке и симметричном очертании балки, половина этой площади представляет концевой угол изгиба нагруженного пролета.



Фиг. 160.

В этом — общее решение, пригодное для всякого очертания пролета. Для обычной же формы железобетонных балок с прямыми вутами, посредством сравнительно несложных выкладок, могут быть получены готовые формулы.

Рассмотрим здесь приближенные формулы расчета, основанные на предположении, что гибкость сечения $\frac{1}{J_x}$, в пределах вута изменяется по закону параболы. В действительности, если вут очерчен по прямой, то момент инерции изменяется по кубической параболе; однако, заменяя ее квадратичной, мы делаем сравнительно небольшую погрешность, допустимую в практических расчетах. Обозначим, применительно к фиг. 160, момент инерции средней части балки постоянной высоты буквой J_m , момент инерции на опоре — J_a ; тогда в сечении, отстоящем на x от опоры, момент будет

$$J_x = \frac{J_m}{i(1+j'x^2)}, \text{ или } \frac{1}{J_x} = \frac{i(1+j'x^2)}{J_m},$$

$$\text{где } i = \frac{J_m}{J_a}, \quad j' = \frac{J_a - J_m}{J_m (ml)^2} \dots \dots \dots (277).$$

Для получения концевого угла изгиба придется составить два интеграла $\int \frac{M_x dx}{EJ_x}$:

*) См. § 3 наших „Систем с лишними неизвестными“.

один на протяжении вута $w = ml$ и другой — от вута до середины пролета:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \int_0^{ml} \frac{M_x dx}{EJ_x} + \int_{ml}^{1/2l} \frac{M dx}{EJ_m} = \int_0^{ml} \frac{M_x i(1+j'x^2) dx}{EJ_m} + \int_{ml}^{1/2l} \frac{M dx}{EJ_m} = \\ &= \frac{q}{2EJ_m} \left[i \int_0^{ml} x(l-x)(1+j'x^2) dx + \int_{ml}^{1/2l} x(l-x) dx \right] = \\ &= \frac{ql^3}{24EJ_m} [1 - m^2(1-i)(3 - 1,6m)] \dots \dots \dots (278). \end{aligned}$$

При симметрии относительно середины пролета такое же выражение получится и для угла β , так что, грузовой член n -ой опоры будет:

$$\begin{aligned} &\frac{q_n l_n^2 v'_n}{4} [1 - m_n^2(1 - i_n)(3 - 1,6m_n)] + \\ &+ \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2 v'_{n+1}}{4} [1 - m_{n+1}^2(1 - i_{n+1})(3 - 1 - 1,6m_{n+1})] \end{aligned}$$

где $v'_n = l_n \frac{J_0}{J_n}$ и $v'_{n+1} = l_{n+1} \frac{J_0}{J_{n+1}} \dots \dots \dots (279).$

При других формах симметричного очертания пролета обыкновенно пользуются параболическим законом изменения гибкости сечения, представленным на фиг. 159. Как и прежде (см. форм. 274-б):

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right],$$

концевой угол изгиба

$$\begin{aligned} \alpha^0_{n+1} = \beta^0_n &= \frac{q}{4EJ_m} \int_0^l x(l-x) \left[1 + j \left(1 - \frac{2x}{l} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{ql^3}{24EJ_m} \left(1 + \frac{1}{5}j \right) = \frac{ql^2}{24EJ_0} v' \left(1 + \frac{1}{5}j \right), \end{aligned}$$

и грузовой член для опоры номер n :

$$6EJ_0(\beta^0_n + \alpha^0_{n+1}) = \frac{q_n l_n^2 v'_n}{4} \left(1 + \frac{1}{5}j_n \right) + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2 v'_{n+1}}{4} \left(1 + \frac{1}{5}j_{n+1} \right) \dots (280)$$

При несимметричных очертаниях, обыкновенно встречающихся в крайних пролетах неразрезной балки, приближенно принимают линейный закон изменения гибкости сечений пролета, как на фиг. 158 и в формуле (270).

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \right];$$

и левый угол пролета представляют в форме:

$$\alpha^0 = \frac{q}{2EJ_m l} \int_0^l x(l-x)^2 \left[1 + j \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right] dx,$$

выражающей момент всех элементов моментной площади относительно правой опоры пролета, разделенный на длину пролета.

После интегрирования:

$$\alpha^0 = \frac{ql^3}{24EJ_m} \left(1 + \frac{1}{5}j \right) = \frac{ql^2}{24EJ_0} \left(l \frac{J_0}{J_m} \right) \left(1 + \frac{1}{5}j \right) = \frac{ql^2}{24EJ_0} v' \left(1 + \frac{1}{5}j \right).$$

Таким же образом, для угла β получим:

$$\beta^0 = \frac{q}{24EJ_m l} \int_0^l x^2(l-x) \left[1 + j \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \right] dx = \frac{ql^3}{24EJ_m} \left(1 - \frac{1}{5}j \right) = \frac{ql^2}{24EJ_0} \left(l \frac{J_0}{J_m} \right) \left(1 - \frac{1}{5}j \right) = \frac{ql}{24EJ_0} l' \left(1 - \frac{1}{5}j \right).$$

Следовательно, грузовой член при несимметричном очертании пролета, приближенно, будет:

$$6EJ_0(\beta_{0n}^0 + \alpha_{0n+1}^0) = \frac{q_n l_n^2}{4} l'_n \left(1 - \frac{1}{5}j_n \right) + \frac{q_{n+1} l_{n+1}^2}{4} l'_{n+1} \left(1 + \frac{1}{5}j \right) \dots (281)$$

§ 12. Определение фокусов. 1. Случай разных жесткостей в разных пролетах. Уравнение трех моментов для балки с разными жесткостями (258) по существу тождественно с таким же уравнением для балки постоянной жесткости; оно отличается только значками „прим“, которые напоминают, что вместо фактической длины пролета здесь надо пользоваться приведенной длиной. Все соотношения § 6, которыми определяется положение фокусов, получены на основании теоремы о трех моментах, и если бы мы снова стали их разыскивать для случая приведенных длин, то получили бы тот же результат. Поэтому есть основание пользоваться, как формулами (176 и 177) для расстояний a_0 и b_0 фокусов, так и формулами (175) для отношения этих расстояний k ,—необходимо только вместо фактической длины пролета брать приведенную длину. Конечно, рассматривая отдельный пролет неразрезной балки, как балку с упруго заделанными концами и применяя к ней теорию однопролетных балок переменного сечения, мы придем к тем же результатам.

Таким образом, и здесь придется пользоваться формулами:

$$k_n = 2 + \frac{l'_{n-1}}{l'_n} \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) = 2 + \frac{l_{n-1} \cdot J_n}{l_n J_{n-1}} \left(2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) \dots (282)$$

или: $a_{0n} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l'_{n-1}}{l'_n} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \right)} = l_n \frac{1}{3 + \frac{l_{n-1} J_n}{l_n J_{n-1}} \left(2 - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \right)} \dots (283-a)$

а также:

$$b'_{0(n+1)} = l_{n+1} \frac{1}{3 + \frac{l_{n+2} J_{n+1}}{l_{n+1} J_{n+2}} \left(2 - \frac{b'_{0(n+2)0}}{a'_{0(n+2)}} \right)} \dots (283-b)$$

2. Случай переменного сечения в пролете. Каждый пролет неразрезной балки можно рассматривать, как однопролетную балку, но только заделанную по концам теми моментами, которые возникают на ее опорах, вследствие того, что концы жестко скреплены с боковыми пролетами (см. § 6,1). Поэтому и фокусы пролета могут быть определены здесь таким же образом, как для однопролетной балки переменного сечения в § 3,4, т. е. по форм. (96-d и e) или по исходным общим формулам (88):

$$a_0 = l \frac{\gamma}{\alpha_a + \gamma + \zeta_a} \quad \text{и} \quad b_0 = l \frac{\gamma}{\beta_b + \gamma + \zeta_b} \dots (284-a).$$

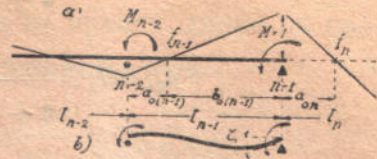
Воспользуемся последними формулами, в которых:

α_a — угол изгиба левого конца пролета, вызванный единичным моментом $M_A = 1$,

γ — угол изгиба того же конца при действии единичного момента, приложенного к правому концу пролета, т. е. при $M_B = 1$,

ζ_a — податливость заделки левого конца пролета, т. е. угол, на который поворачивается при изгибе под влиянием единичного момента $M = 1$ правый конец той части неразрезной балки, которая находится слева от рассматриваемого пролета.

При переменном сечении первые два угла выражаются через известные углы для постоянного сечения, умноженные на коэффициенты κ , μ , ν , а именно:



Фиг. 161.

$$\alpha_a = \frac{1 \cdot l}{3EJ} \kappa, \quad \beta_b = \frac{1 \cdot l}{3EJ} \mu, \quad \gamma = \frac{1 \cdot l}{6EJ} \nu. \quad \dots \quad (284-b)$$

Последний угол ζ_a определяется на основании фиг. 161, как правый угол изгиба балки $(n-2) - (n-1)$, нагруженной двумя моментами:

$$M_{n-1} = 1 \text{ и } M_{n-2} = M_{n-1} \cdot \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} = 1 \cdot \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}}.$$

Этот угол

$$\zeta_a = \frac{1 \cdot l_{n-1} \mu_{n-1}}{3EJ_{n-1}} - 1 \cdot \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \cdot \frac{l_{n-1}}{6EJ_{n-1}} \nu_{n-1} = \mu_{n-1} \beta_{b(n-1)} - \nu_{n-1} \gamma_{n-1} \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \cdot l \quad (284-c)$$

а потому фокальное расстояние (284-a) будет:

$$a_{0n} = l_n \frac{1}{\frac{\alpha_{an}}{\gamma_n} + 1 + \frac{\zeta_{an}}{\gamma_n}} = \frac{1}{1 + 2 \frac{\mu_n}{\nu_n} + \frac{l_{n-1} J_n}{l_n J_{n-1}} \left(2 \frac{\mu_{n-1}}{\nu_n} - \frac{a_{0(n-1)}}{b_{0(n-1)}} \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n} \right)}$$

Таким же образом для правого фокуса f' :

$$b'_{0n} = l_n \frac{1}{1 + 2 \frac{\mu_n}{\nu_n} + \frac{l_{n+1} J_n}{l_n J_{n+1}} \left(2 \frac{\mu_{n+1}}{\nu_n} - \frac{b'_{0(n+1)}}{a'_{0(n+1)}} \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \right)} \quad \dots \quad (285).$$

В частном случае, когда $\mu = \kappa = \nu = 1$, т. е. при постоянной жесткости пролета, выражения превращаются в формулы (283).

3. Примеры а). Определим фокусы для пролетов балки фиг. 93 при равных пролетах, но разных моментах инерции, отношение между которыми выражается строкой:

$$J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = 5 : 4 : 3 : 2;$$

в пределах каждого пролета момент инерции сохраняет постоянную величину.

Принимая J_4 за единицу приведения имеем:

$$\frac{J_0}{J_4} = 1, \quad \frac{J_0}{J_3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{J_0}{J_2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{J_0}{J_1} = \frac{2}{5}.$$

Так как пролеты рассматриваемой балки одинаковы, то отношение приведенных длин пролетов для форм. (283-a) равно обратному отношению моментов инерции:

$$\frac{l'_1}{l'_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{4}{5}, \quad \frac{l'_2}{l'_3} = \frac{J_3}{J_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{l'_3}{l'_4} = \frac{J_4}{J_3} = \frac{2}{3}.$$

Подставляя эти числа в форм. (283), получим:

$$a_{01} = 0, \quad a_{02} = l_2 \cdot \frac{1}{3 + \frac{4}{5} \cdot 2} = \frac{5}{23} l_2 = 0,2172 l_2$$

$$a_{03} = l_3 \cdot \frac{1}{3 + \frac{3}{4} \left(2 - \frac{5}{18} \right)} = \frac{24}{103} l_3 = 0,233 l_3.$$

$$a_{04} = l_4 \cdot \frac{1}{3 + \frac{2}{3} \left(2 - \frac{24}{79} \right)} = \frac{237}{979} l_4 = 0,242 l_4. \quad \dots (286)$$

При равных пролетах, по симметрии, такими же будут и расстояния b'_0 .

Сопоставим результаты с теми, которые получились для случая постоянного сечения в § 6,4-б:

Таблица фокальных расстояний $a_0=(b'_0)$.

В пролетах	1	2	3	4
Одинаковой жесткости .	0	0,27	0,2106l	0,2112l
Разных жесткостей . . .	0	0,2172l	0,233l	0,242l

Как видно, есть существенная разница в фокальных расстояниях, которая должна соответственно отразиться на величине опорных моментов.

б) Для примера определим опорные моменты нагруженного пролета, применяя, уравнение (258) к пролетам 3 и 4.

Свободный (грузовой) член уравнения:

$$6EJ_0(a_0^4 + \beta_0^3) = 6EJ_0 \cdot q \frac{l_4^3}{24EJ_4} = q \frac{l_4^3}{4} \cdot l_4.$$

Отношение между соседними моментами:

$$\frac{M_2}{M_3} = -\frac{a_3}{b_3} = -\frac{24}{79} \text{ и } \frac{M_4}{M_3} = 1.$$

Поэтому уравнение (258) перепишется:

$$\frac{24}{79} M_3 l_3 \frac{J_0}{J_3} + 2M_3 \left(l_3 \frac{J_0}{J_3} + l_4 \frac{J_0}{J_4} \right) + M_3 l_4 \frac{J_0}{J_4} = -\frac{ql^2}{4} \cdot l_4 \frac{J_0}{J_4},$$

$$\text{или: } -\frac{24}{79} \cdot \frac{2}{3} M_3 l + 2 \cdot \frac{5}{3} M_3 l + M_3 l = -q \frac{l^3}{4};$$

$$\text{откуда } M_3 = -\frac{237}{979} \cdot q \frac{l^3}{4} = -0,0605ql^3.$$

При постоянной жесткости было получено

$$M_3 = -\frac{15}{284} ql^3 = -0,0528ql^3 \text{ (см. § 6,4-б);}$$

следовательно, повышая жесткость концевых пролетов, мы увеличили опорные моменты загруженного пролета более, чем на 15% и тем подравняли наибольшие моменты пролета: положительный и отрицательный.

с) Определим фокусы для балки с переменным сечением в пределах пролета. Для той же фиг. 93 примем неравные пролеты:

$$l_1 = 6, l_2 = 8, l_3 = 9, l_4 = 10 \text{ метров}$$

и положим, что прямоугольное поперечное сечение балки имеет ширину

$$b = 30 \text{ см., а высоту:}$$

посередине пролета $h_m = 40$ „
на опорах $h_a = 60$ „

Переход от одной высоты к другой сделан по прямой линии на протяжении $\frac{1}{4}$ пролета. Очертание всех пролетов симметричное.

Момент инерции сечения:

посередине пролета $J_m = \frac{0,30 \cdot 0,40^3}{12}$, на опорах $J_a = \frac{0,30 \cdot 0,60^3}{12}$; отношение между ними $i = \frac{J_m}{J_a} = \frac{0,40^3}{0,60^3} = 0,296 = \approx 0,3$.

При таких данных по 1-ой таблице § 10,3 находим для

$$i = 0,3 \text{ и } m = 0,25:$$

$$\mu = \nu = 0,797 \text{ и } \nu = 0,940.$$

Фокальные расстояния будут:

$$a_{01} = 0, \quad a_{02} = \frac{l_2}{1 + 2 \cdot 0,797 \cdot 0,940 + \frac{6}{8}(2 - 0)} = \frac{l_2}{3,998} = \approx \frac{1}{4} l_2 = 2 \text{ м.}$$

$$a_{03} = \frac{l_3}{1 + 2 \cdot 0,797 \cdot 0,940 + \frac{8}{9}\left(2 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{l_3}{3,98} = \approx \frac{1}{4} l_3 = 2,25 \text{ м.}$$

$$a_{04} = \frac{l_4}{1 + 2 \cdot 0,797 \cdot 0,940 + \frac{9}{10}\left(2 - \frac{1}{3}\right)} = \approx \frac{l_4}{3,998} = \approx \frac{1}{4} l_4 = 2,5 \text{ м.}$$

d) Опорные моменты загруженного пролета определяются из уравнения трех моментов, которое применительно к фиг. 93 будет иметь вид:

$$M_2 l_3 \nu_3 + 2M_3 (l_3 \mu_3 + l_4 \mu) + M_4 l_4 \nu_4 = -6EJ (\beta_3^0 + \alpha_4^0),$$

так как в рассматриваемом примере жесткость балки по середине всех пролетов одинакова.

По симметрии, $M_4 = M_3$, а кроме того:

$$M_2 = -M_3 \frac{a_3}{b_3} = -\frac{1}{3} M_3; \text{ поэтому после подста-}$$

новки получится:

$$-\frac{1}{3} M_3 \cdot 0,940 l_3 + 2M_3 0,794 (l_3 + l_4) + M_3 \cdot 0,940 l_4 = -6EJ_0 (\beta_3^0 + \alpha_4^0),$$

откуда

$$M_3 = -\frac{6EJ_0 (\beta_3^0 + \alpha_4^0)}{1,275 l_3 + 2,528 l_4}.$$

Остается вычислить грузовой член в числителе. Так как рассматривается загрузка только одного пролета, то $\beta_3^0 = 0$, а α_4^0 определится непосредственно по форм. (278). Грузовой член, стоящий в числителе последней дроби, окажется:

$$6EJ_0 \alpha_4^0 = \frac{q l_4^3}{4} \left[1 - \frac{1}{16} (1 - 0,296) (3 - 1,6 \cdot \frac{1}{4}) \right] = \frac{0,885}{4} q l_4^3,$$

а потому

$$M_3 = -\frac{0,885 q l_4^3}{4 (1,275 l_3 + 2,528 l_4)},$$

что после подстановки чисел дает:

$$M_3 = - \frac{0,885 \cdot ql_4^2}{4 \left(1,275 \cdot \frac{9}{10} + 2,528 \right)} = - 0,0602ql_4^2$$

Соотношением длины пролетов и размеров вута здесь также достигнуто равенство положительного и отрицательного изгибающих моментов балки:

$$\frac{1}{8}ql^2 - 0,0602ql^2 = \infty 0,0602ql^2.$$

е) Пример определения фокусов для несимметричной балки (фиг. 161-с). Для общей формулы фокального расстояния (284-а) во втором пролете определяем:

$$\alpha_2 = \frac{1 \cdot l_2}{3EJ_{m2}} x_2, \quad \gamma_2 = \frac{1 \cdot l_2}{6EJ_{m2}} v_2 \text{ и } \zeta_{02} \text{ (первого пролета не}$$

рассматриваем, так как $\alpha_{01} = 0$) по следующим данным:

$$J_{a2} = \frac{25 \cdot 45^3}{12}, \quad J_{m2} = \frac{25 \cdot 30^3}{12}, \quad i_2 = \frac{J_{m2}}{J_{a2}} = \frac{30^3}{45^3} = 0,297 = \infty 0,30 \text{ м}$$

$$m_2 = \frac{1,25}{5,55} = 0,225, \text{ откуда по таблице 1 из}$$

§ 10,3 получаем:

$\mu_3 = x_2 = 0,723$ и $v_2 = 0,893$. Следовательно имеем:

$$\alpha_2 = \frac{1 \cdot l_2}{3EJ_{m2}} \cdot 0,723 \text{ и } \gamma_2 = \frac{1 \cdot l_2}{6EJ_{m2}} \cdot 0,893.$$

Благодаря асимметрии первого пролета ζ_{a2} определяем по форм. (272)

$$\zeta_{a2} = \beta_1 = \frac{1 \cdot l_1}{6EJ_{m1}} (2 - j_1), \text{ где } j_1 = i_1 - 1 = \frac{J_{m1}}{J_{a1}} = \frac{2J_{b1}}{J_a + J_b} - 1 =$$

$$= 1,54 - 1 = 0,54.$$

т. е. пишем:
$$\zeta_{a2} = \frac{1 \cdot l_1}{6EJ_{m1}} (2 - 0,54) = 1,46 \frac{l_1}{6EJ_{m1}}$$

В таком случае по (284-а) получим:

$$a_{02} = l_2 \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} + \frac{\zeta_{a2}}{\gamma_2}} = l_2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,723 \cdot 1 \cdot l_2 \cdot 6EJ_{m2}}{3EJ_{m2} \cdot 1 \cdot l_2 \cdot 0,893} + \frac{1,46 \cdot l_1 \cdot 6EJ_{m2}}{6EJ_{m1} \cdot 1 \cdot l_2 \cdot 0,893}} =$$

$$= l_2 \cdot \frac{1}{1 + 1,622 + 1,076} = 0,27l_2.$$

В третьем пролете постоянного сечения пользуемся упрощенной формулой фокального расстояния

$$a_{03} = l_3 \frac{1}{3 + \frac{\zeta_{a3}}{\gamma_3}}. \text{ Для нее по (284-с) имеем:}$$

$$\zeta_{a3} = \frac{1 \cdot l_2}{3EJ_{m2}} \mu_2 - 1 \cdot \frac{a_{02}}{b_{02}} \frac{1 \cdot l_2}{6EJ_{m2}} v_2. \text{ И, так как } \frac{a_{02}}{b_{02}} = \frac{0,27}{0,73} = 0,37, \text{ то:}$$

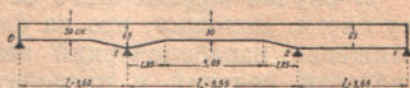
$$\zeta_{a3} = 0,723 \cdot \frac{1 \cdot l_2}{3EJ_{m2}} - 0,37 \frac{1 \cdot l_2}{6EJ_{m2}} \cdot 0,893 = \frac{1 \cdot l_2}{6EJ_m} \cdot 1,116$$

$$\text{и } \frac{\zeta_{a3}}{\gamma_3} = 1,116 \frac{l_2}{l_3} \frac{J_3}{J_2} = 5,94.$$

Следовательно:
$$a_{03} = l_3 \frac{1}{3 + 5,94} = \infty 0,112l_3.$$

Фокус третьего пролета получился вблизи опоры. Это показывает, что слабый соседний пролет мало помогает сильному, которому приходится сопротивляться в условиях, близких к разрезной балке.

Предлагаем читателю определить положение фокусов непосредственно по готовой общей формуле (285).



Фиг. 161-с.

§ 13. Линия влияния для опорного момента. 1. Случай пролетов, отличающихся жесткостью. Поместим груз $P=1$ в пролете l_n на расстояниях a и b соответственно от левой и правой опоры, и составим уравнения трех моментов для опор $n-1$, и $n+1$. Принимая во внимание различные жесткости в пролетах, мы получим такие же уравнения, как для балки постоянного сечения, только, вместо фактической длины пролетов, здесь будут приведенные длины:

$$l'_n = l_n \frac{J_0}{J} \quad (\text{см. форм. 258}).$$

В эти уравнения, кроме M_{n-1} и M_n , попадут еще соседние моменты M_{n-2} и M_{n+2} , но мы освободимся от них точно таким же образом, как в случае балки постоянного сечения § 6,3, а именно, — пользуясь нулевой точкой.

Независимо от того, какой балке принадлежит нулевая точка, она всегда одинаково устанавливает соотношение между соседними моментами:

$$M_{n-2} = M_{n-1} \frac{a_0(n-1)}{b_0(n-1)},$$

а потому одинаковыми должны получиться и выражения для опорных моментов в функции фокальных расстояний a_0 и b_0 , как при одинаковой так и при разной жесткости пролетов. В последнем случае будет только иное положение фокусов и иной способ их определения, но структура формулы для опорных моментов загруженного пролета сохранится. Таким образом, и здесь мы можем пользоваться формулами (192—193):

$$(287-a) \dots M_{n-1} = a_{0n} \frac{b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma_0 - l_n \frac{a_{0n}}{c_{0n}} \sigma' \quad \text{и} \quad M_n = a_{0n} \frac{b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma_0 - l_n \frac{b'_{0n}}{c_{0n}} \sigma \dots (287-b).$$

Так как в формулах коэффициенты σ , σ' и σ_0 определяются исключительно положением груза в пролете, т. е. величиною $\frac{a}{l}$ и не зависят от жесткости, то и здесь можно пользоваться таблицей § 7,1-б. Следовательно, в нашем распоряжении все данные для построения линии влияния опорного момента, например M_n : определяем по форм. (283) фокальные расстояния a_0 и b'_0 ; затем для точек деления пролета l_n : $\frac{a}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots$ выписываем из таблицы § 7,1-б числа σ , σ' , σ_0 и подставляем во вторую из формул (287); полученные 9 значений M_n откладываем, как ординаты

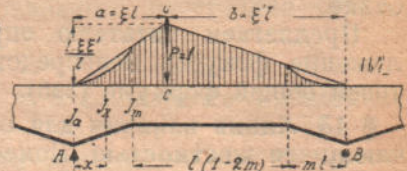
линии влияния, над точками деления: $\frac{1}{10}l, \frac{2}{10}l, \frac{3}{10}l \dots$ и объединяем плавной линией. Далее вообразим, что груз $P=1$ переместился в соседний левый пролет l_{n-1} и таким же образом по той же формуле вычислим ординаты для правого опорного момента, который теперь уже будет M_{n-1} ; если их умножить на отношение $\frac{b'_{0n}}{a'_{0n}}$, то получатся те ординаты, которые должны быть построены в левом пролете l_{n-1} для линии влияния M_n , и т. д., как указывалось в § 7.

2. **Случай переменного сечения в пролете.** а) Балка снабженная вутами. Положим, что на фиг. 162 вуты прямолинейны и примем, приближенно, параболический закон изменения гибкости сечений в пределах вута, как в § 11,3. Тогда при прежних обозначениях (277):

$$i = \frac{J_m}{J_a} \text{ и } j' = \frac{J_a - J_m}{J_m(ml)^2}$$

момент инерции в любом сечении x будет:

$$J_x = \frac{J_m}{i(1+j'x^2)} \dots \dots \dots (288)$$



Фиг. 162.

Треугольная эпюра моментов от груза $P=1$ имеет:

$$\text{ординату } CC' = \frac{Pab}{l} = 1 \cdot \frac{\xi\xi'}{l}, \text{ площадь } \omega = \frac{1}{2} \xi\xi'$$

и расстояние центра тяжести $c = \frac{1}{3}l(1+\xi)$.

Изгибающий момент в каком-нибудь сечении x будет $M_x = \xi'x$, а если сечение правее груза, то $M_x = \xi(l-x)$.

Угол изгиба левого конца пролета, как реакция A' от гибкой эпюры моментов:

$$\alpha^0 = \frac{1}{l} \int M_x^0(l-x) \frac{dx}{EJ_x} = \frac{1}{El} \left[\xi' \int_0^{\xi l} x(l-x) \frac{dx}{J_x} + \xi \int_{\xi l}^l (l-x)^2 \frac{dx}{J_x} \right].$$

Правый концевой угол изгиба, как реакция B' :

$$\beta^0 = \frac{1}{l} \int M_x^0 x \frac{dx}{EJ_x} = \frac{1}{El} \left[\xi' \int_0^{\xi l} x^2 \frac{dx}{J_x} + \xi \int_{\xi l}^l x(l-x) \frac{dx}{J_x} \right].$$

Является возможность составить грузовой член уравнения трех моментов и определить из уравнения требуемый опорный момент.

При составлении интегралов, мы встречаемся с переменной закона изменения момента инерции в пределах от 0 до ξl , если груз находится, за пределами вута; в виду этого надо отдельно рассмотреть 3 случая расположения груза:

Груз в пределах средней части балки. Умножая треугольную эпюру моментов фигуры 162 на $\frac{J_m}{J_x}$, мы получим упругую эпюру в форме заштрихованной площади. Опорные реакции от этой грузовой площади представят соответствующие концевые углы изгиба; их можно определить, как разность от треугольной нагрузки и от незаштрихованных вырезков. Составим выражения для этих реакций.

По (288): $\frac{J_m}{J_x} = i(1 + j'x^2) = i \left[1 + \frac{(1-i)x^2}{i(ml)^2} \right] = i + (1-i) \frac{x^2}{(ml)^2}$;

поэтому ордината эпюры моментов в пределах вута будет:

$$M_x \frac{J_m}{J_x} = \xi' x \left[1 - i - (1-i) \frac{x^2}{(ml)^2} \right] = \xi' x (1-i) \left(1 - \frac{x^2}{(ml)^2} \right),$$

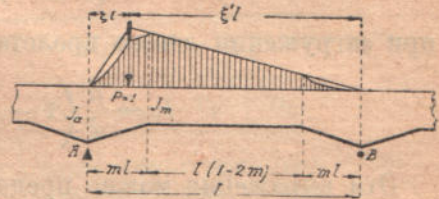
и левый концевой угол изгиба

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \frac{1}{EJ_{ml}} \left[\frac{l^2 \xi \xi' (1 + \xi')}{6} - \xi' (1-i) \int_0^{ml} x(l-x) \left(1 - \frac{x^2}{(ml)^2} \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - \xi (1-i) \int_0^{ml} x^2 \left(1 - \frac{x^2}{(ml)^2} \right) dx \right] = \\ &= \frac{l^2}{6EJ_m} [\xi \xi' (1 + \xi') - m^2 (1-i) \{1,5 \xi' + 0,8m(\xi - \xi')\}] = k_a \frac{l^2}{6EJ_m} \dots (289) \end{aligned}$$

Чтобы получить правый угол β^0 , достаточно взаимно переставить ξ и ξ' :

$$\beta^0 = \frac{l^2}{6EJ_m} [\xi \xi' (1 + \xi) - m^2 (1-i) \{1,5 \xi + 0,8m(\xi' - \xi)\}] = k_b \frac{l^2}{6EJ_m} \dots (290)$$

Груз в пределах левого вута. В этом случае вершина треугольной эпюры моментов приходится в пределах левого вута; поэтому искажение эпюры вследствие разделения ее ординат на момент инерции J_x захватывает две стороны треугольника, как показано на фиг. 163. Левый угол пролета оказывается:



Фиг. 163.

$$\begin{aligned} EJ_{ml} \alpha^0 &= \int_0^{\xi l} \xi' x(l-x) \left[i + (1-i) \frac{x^2}{(ml)^2} \right] dx + \int_{\xi l}^{ml} \xi (l-x)^2 \left[i + (1-i) \frac{x^2}{(ml)^2} \right] dx + \\ &\quad + \xi \frac{l^3 (1-m)^3}{3} - \int_0^{ml} \xi (1-i) x^2 \left(1 - \frac{x^2}{(ml)^2} \right) dx = \\ &= \frac{\xi l^3}{6} \left[2 - i \xi (3 - \xi) - (1-i) \left\{ m(4 - 3m + 1,6m^2) + 0,5 \frac{\xi^3}{m^2} (1 - 0,6\xi) \right\} \right] \dots (291) \end{aligned}$$

Аналогично правый угол:

$$\beta^0 = \frac{\xi l^2}{6EJ_m} \left[1 - i \xi^2 - (1-i) \left\{ m^2 (3 - 1,6m) + 0,3 \frac{\xi^4}{m^2} \right\} \right] \dots (292)$$

Груз в пределах правого вута. Концевые углы изгиба получатся непосредственно из предыдущих выражений, если взаимно поменять местами буквы ξ и ξ' и буквы a и b :

$$\frac{6EJ_m \alpha^0}{\xi l^2} = 1 - i \xi'^2 - (1-i) \left[m^2 (3 - 1,6m) + 0,3 \frac{\xi'^4}{m^2} \right] \dots (293)$$

$$\begin{aligned} \frac{6EJ_m \beta^0}{\xi l^2} &= 2 - i \xi' (3 - \xi') - (1-i) \left[m(4 - 3m + 1,6m^2) + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 \frac{\xi'^3}{m^2} (1 - 0,6\xi') \right] \dots (294) \end{aligned}$$

б) Несимметричный пролет балки. Принимая приближенно линейный закон изменения гибкости сечений, как на фиг. 158, мы имеем для любого сечения на расстоянии x :

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} \left[1 + \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) j \right], \text{ где } j = \frac{J_m - J_a}{J_a},$$

и можем определить концевые углы изгиба по предыдущему, а по ним — грузовой член уравнения трех моментов. Общий вид выражения для этого члена получится, если в формулу $6EJ_0(\beta_n^0 + \alpha_{n+1}^0)$ подставить символические выражения для углов (289-90):

$$6EJ_0(\beta_n^0 + \alpha_{n+1}^0) = k_a \frac{6EJ_0}{6EJ_m} l^2 = k_a l \cdot \left(l \frac{J_0}{J_m} \right) = k_a l', \dots (295).$$

где l' — приведенная длина пролета, нагруженного единицей груза, k_a — функция от положения ξ груза в пролете. Если загрузить правый пролет (по отношению к рассматриваемой опоре n , для которой составляется уравнение трех моментов следовательно, и грузовой член), то, интегрируя по предыдущему, получим:

$$k_a = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \left[\left(2 - \frac{a}{l} \right) + j \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 \right], \dots (296).$$

при загрузении левого пролета:

$$k_b = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \left[1 + \frac{a}{l} - j \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right], \dots (297).$$

Эти выражения можно представить в более простом виде:

для правого пролета $k_a = A_a + B_a j \dots (298)$

„ левого „ $k_b = A_b - B_b j \dots (299)$

Приводим таблицу значений для коэффициентов A и B в зависимости от $\frac{a}{l}$, т. е. для разных положений груза, составленную по формулам (296) и (297):

Таблица угловых коэффициентов для приближенного расчета несимметричных пролетов переменного сечения.

$\frac{a}{l}$	k_a		k_b		$\frac{a}{l}$	k_a		k_b	
	A_a	B_a	A_b	B_b		A_a	B_a	A_b	B_b
0.05	0.0926	0.0429	0.0499	0.0001	0.55	0.3589	0.0501	0.3836	0.0749
0.10	0.1710	0.0729	0.0990	0.0009	0.60	0.3360	0.0384	0.3840	0.0864
0.15	0.2359	0.0921	0.1466	0.0029	0.65	0.3071	0.0279	0.3754	0.0961
0.20	0.2880	0.1024	0.1920	0.0064	0.70	0.2730	0.0189	0.3570	0.1029
0.25	0.3281	0.1055	0.2344	0.0117	0.75	0.2344	0.0117	0.3281	0.1055
0.30	0.3570	0.1029	0.2730	0.0189	0.80	0.1920	0.0064	0.2880	0.1024
0.35	0.3754	0.0961	0.3071	0.0279	0.85	0.1466	0.0029	0.2359	0.0921
0.40	0.3840	0.0864	0.3360	0.0384	0.90	0.0990	0.0009	0.1710	0.0729
0.45	0.3836	0.0749	0.3589	0.0501	0.95	0.0499	0.0001	0.0926	0.0429
0.50	0.3750	0.0625	0.3750	0.0625	1.00	0	0	0	0

с) Симметричный пролет плавного очертания. Обычно при всяком плавном очертании балки приближенно принимают параболический закон изменения гибкости сечений вдоль пролета, как на фиг. 159, т. е. считают, что в любом сечении x имеет место:

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_m} \left[1 + j \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right], \text{ где } j = \frac{J_m - J_a}{J_a}.$$

Как и в предыдущем случае, грузовой член уравнения трех моментов зависит от того, какой из пролетов, разделяемых опорой n , загружается единицей силы. Если нагружен правый пролет, то:

$$k'_a = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \left[\left(2 - \frac{a}{l} \right) \left(1 + \frac{1}{5} j \right) - \frac{2}{5} j \left(1 - \frac{a}{l} \right)^2 \left\{ 2 - 3 \left(1 - \frac{a}{l} \right) \right\} \right] = \\ = C_a + D_a j \dots \dots \dots (300);$$

при нахождении груза $P=1$ на левом пролете:

$$k'_b = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) \left[\left(1 + \frac{a}{l} \right) \left(1 + \frac{1}{5} j \right) - \frac{2}{5} j \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(2 - 3 \frac{a}{l} \right) \right] = \\ = C_b + D_b j \dots \dots \dots (301).$$

Ниже приведена таблица для этих коэффициентов.

Таблица угловых коэффициентов для приближенного расчета симметричных пролетов переменного сечения

$\frac{a}{l}$	k'_a		k'_b		$\frac{a}{l}$	k'_a		k'_b	
	C_a	D_a	C_b	D_b		C_a	D_a	C_b	D_b
0,05	0,0926	0,0331	0,0499	0,0099	0,55	0,03589	0,0587	0,3836	0,0662
0,10	0,1710	0,0546	0,0990	0,0192	0,60	0,3360	0,0540	0,3840	0,0699
0,15	0,2359	0,0674	0,1466	0,0276	0,65	0,3071	0,0508	0,3754	0,0732
0,20	0,2880	0,0740	0,1920	0,0348	0,70	0,2730	0,0463	0,3570	0,0755
0,25	0,3281	0,0782	0,2344	0,0410	0,75	0,2344	0,0410	0,3281	0,0762
0,30	0,3570	0,0755	0,2730	0,0463	0,80	0,1920	0,0348	0,2880	0,0740
0,35	0,3754	0,0732	0,3071	0,0508	0,85	0,1466	0,0276	0,2359	0,0674
0,40	0,3840	0,0699	0,3360	0,0549	0,90	0,0990	0,0192	0,1710	0,0546
0,45	0,3836	0,0662	0,3589	0,0587	0,95	0,0499	0,0099	0,0926	0,0331
0,50	0,3750	0,0625	0,3750	0,0625	1,00	0	0	0	0

3. Примеры построения линий влияния. а) Случай пролетов отличающихся жесткостью. Построим линию влияния опорного момента M_1 над второй опорой семипролетной балки фиг. 93.

Для примера примем те же жесткости, которые заданы в настоящем параграфе 12,3а:

$$J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = 5 : 4 : 3 : 2.$$

Поместим груз $P=1$ в одном из пролетов, непосредственно прилегающих к опоре № 1: либо в левом l_1 , либо в правом l_2 . Опорный момент определится по формуле (287-б) или по (287-а), смотря по тому, где находится груз. Вычисления начинаем с определения фокусов и ведем в следующем порядке:

Фокусы. По формулам (286), расстояния a_0 левых фокусов составляют следующую таблицу:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0,2172l_2, \quad a_3 = 0,233l_3, \quad a_4 = 0,242l_4.$$

Продолжая вычисление по форм. (283), получим далее:

$$a_5 = 0,192l_5, \quad a_6 = 0,187l_6, \quad a_7 = 0,192l_7.$$

По симметрии будет:

$$b'_1 = a_7 = 0,192 l_1; \quad b'_2 = a_6 = 0,187 l_2, \quad b'_3 = a_5 = 0,192 l_3, \quad b'_4 = a_4.$$

Груз в левом пролете. По форм. (287-б) находим:

$$M_1 = a_1 \frac{b'_1}{l_1 - a_1 - b'_1} \sigma_0 - l_1 \frac{b'_1}{l_1 - a_1 - b'_1} \sigma' = -l_1 \frac{0,192 l_1}{l_1 - 0,192 l_1} \sigma = -0,237 l \sigma.$$

Разделим пролет на десять частей и для каждой точки деления, т. е. для $\frac{a}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \dots$ выпишем значение σ из таблицы § 7, 1-б. Умножая числа σ на $0,237 l$, получим ординаты линии влияния на протяжении первого пролета; они помещены в следующей таблице под заголовком: „Левый пролет“ (числа σ помещены в первой строке таблицы).

Вычисление ординат для линии опорного момента M_1 семипролетной балки неодинаковой жесткости.

$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
σ	0,09900	0,19200	0,27300	0,33600	0,37500	0,38400	0,35700	0,28800	0,17100	0,000
σ'	0,17100	0,28800	0,35700	0,38400	0,37500	0,33600	0,27300	0,19200	0,09900	0,000
σ_0	0,27000	0,48000	0,63000	0,72000	0,75000	0,72000	0,63000	0,48000	0,27000	0,000

Л е в ы й п р о л е т: $M_1 = -0,237 \sigma l_1$:

$$-\frac{M_1}{l_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,0235 & 0,0456 & 0,0648 & 0,0797 & 0,0889 & 0,0911 & 0,0847 & 0,0683 & 0,0405 & 0,000 \\ \hline \end{array}$$

В т о р о й п р о л е т: $M_1 = -(0,364 \sigma' - 0,0681 \sigma_0) l_2$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,364 \sigma' & 0,0623 & 0,1050 & 0,1300 & 0,1390 & 0,1360 & 0,1220 & 0,0993 & 0,0700 & 0,0361 & 0,000 \\ 0,0681 \sigma_0 & 0,0184 & 0,0380 & 0,0428 & 0,0490 & 0,0511 & 0,0490 & 0,0428 & 0,0380 & 0,0184 & 0,000 \\ \hline -\frac{M_1}{l_2} = & 0,0439 & 0,0670 & 0,0872 & 0,0900 & 0,0849 & 0,0730 & 0,0565 & 0,0320 & 0,0177 & 0,000 \\ \hline \end{array}$$

Т р е т ь и й п р о л е т: $M_1 = (0,111 \sigma' - 0,0216 \sigma_0) l_3$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0,111 \sigma' = & 0,0190 & 0,0319 & 0,0396 & 0,0426 & 0,0416 & 0,0373 & 0,0303 & 0,0213 & 0,0110 & 0,000 \\ 0,0216 \sigma_0 & 0,0058 & 0,0104 & 0,0136 & 0,0156 & 0,0162 & 0,0156 & 0,0136 & 0,0104 & 0,0058 & 0,000 \\ \hline \frac{M_1}{l_3} = & 0,0132 & 0,0215 & 0,0260 & 0,0270 & 0,0254 & 0,0217 & 0,0167 & 0,0109 & 0,0052 & 0,000 \\ \hline \end{array}$$

Ч е т в е р т ы й п р о л е т.

Общий вид линии первых четырех пролетов, построенной по этим данным, напоминает первую линию фиг. 107. Ординаты остальных пролетов отброшены вследствие их малости.

Груз в правом пролете. По форм. (287-а) имеем:

$$\begin{aligned} M_1 &= a_2 \frac{b'_2}{l_2 - a_2 - b'_2} \sigma_0 - l_2 \frac{a_2}{l_2 - a_2 - b'_2} \sigma' = 0,217 l_2 \frac{0,187 l_2}{0,596 l_2} \sigma_0 - \\ &- l_2 \frac{0,217 l_2}{0,596 l_2} \sigma' = 0,0681 l_2 \sigma_0 - 0,364 l_2 \sigma'. \end{aligned}$$

Выписываем из таблицы § 7, 1-б числа σ_0 и σ' , помещаем во вторую и третью сторону приведенной здесь таблицы; умножаем эти числа на коэффициенты 0,0681 и $-0,364$ и произведения помещаем в первые две строчки второго пролета; вычитая последнюю из первой, получим ординаты линии влияния второго пролета, помещенные в следующей строке.

Груз в третьем пролете. По форм. (287-а), принимая $n=3$, мы найдем опорный момент M_2 :

$$M_2 = a_3 \frac{b'_3}{c_3} \sigma_0 - l_3 \frac{a_3}{c_3} \sigma' = \frac{0,233 \cdot 0,192}{0,575} \sigma_0 l_3 - \frac{0,233}{0,575} \sigma' l_3 = 0,0778 \sigma_0 l_3 - 0,405 \sigma' l_3.$$

Если же это число умножить на $\frac{1}{k_2}$ второго пролета, то получим соответствующие значения M_1 . Так как

$$\frac{1}{k_2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{0,217}{0,783} = 0,277,$$

то ординаты M_1 третьего пролета должны быть:

$$M_1 = -0,277 M_2 = 0,111 l_3 \sigma' - 0,0216 l_3 \sigma_0.$$

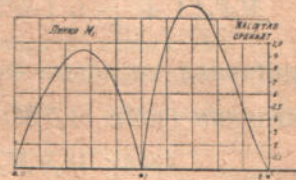
Остается значение σ' и σ_0 из второй и третьей строк таблицы умножить на коэффициенты 0,111 и 0,0216 и результаты повысить, как сделано в последних строках таблицы.

Груз в четвертом пролете. Помещая груз в четвертом пролете, мы по предыдущему определим M_3 , если же умножим на $\frac{1}{k_3} \cdot \frac{1}{k_4}$ то перейдем к M_1 .

Таким же образом получают ординаты линии влияния пятого, шестого и других последующих пролетов; но последние ничтожны и не имеют практического значения.



Фиг. 164-а.



Фиг. 164-б.

б) Случай пролетов переменной жесткости. Для общности рассмотрим балку, имеющую, как симметричные, так и несимметричные пролеты (фиг. 130 и 164). Положим, что отношение между моментами инерции выражается зависимостями:

$$J_{a1} = \frac{1}{2} J_{a2}, \quad J_{m2} = \frac{1}{2} J_{a2} = J_{a1}.$$

Пользуясь приближенным способом расчета, составим средний момент инерции левого пролета (см. форм. 268):

$$J_{m1} = \frac{2J_{a1}J_{a2}}{J_{a1}+J_{a2}} = \frac{4}{3} J_{a1} = 1,333 J_{a1}.$$

Относительное приращение момента инерции:

$$j_1 = \frac{1,333 J_{a1} - J_{a1}}{J_{a1}} = 0,333.$$

Во втором пролете: $j_2 = \frac{J_{m2} - J_{a2}}{J_{a2}} = -0,5.$

По симметрии:

$$j_3 = j_2 = -0,5; \quad j_4 = -j_1 = -0,333.$$

Определим приведенные длины пролетов, принимая за единицу самый малый момент инерции J_{m2} , соответствующий в форм. (259) обозначению J_0 :

$$l'_1 = l_1 \frac{J_0}{J_1} = l_1 \frac{J_{m2}}{J_{m1}} = 0,75 l_1 = 7,5 \text{ м.}, \quad l'_2 = l_2 \frac{J_0}{J_2} = l_2 = 12 \text{ м.}$$

$$l'_3 = l_3 = 12 \text{ м.}, \quad l'_4 = 0,75 l_4 = l'_1 = 7,5 \text{ м.}$$

Чтобы получить выражение опорного момента, составим уравнение трех моментов.

Опора № 1 соединяет несимметричный и симметричный пролеты; поэтому для членов уравнения, относящихся к левому пролету, придется пользоваться форм. (273), а для второго пролета — формулой (275). Так как крайние опоры — шарнирные, то $M_0 = 0$, а потому:

$$M_1 \left[l'_1(2 - j_1) + 2l'_2 \left(1 + \frac{2}{5} j_2 \right) \right] + M_2 l'_2 \left(1 + \frac{1}{5} j_2 \right) = -6EJ_0(\beta_1^0 + \alpha_2^0) = R_1 \dots \dots \dots (302).$$

Опора № 2 по обе стороны имеет симметричные пролеты, и уравнение трех моментов составится из выражений (275):

$$M_1 l'_2 \left(1 + \frac{1}{5} j_2 \right) + 2M_2 \left[l'_2 \left(1 + \frac{2}{5} j_2 \right) + l'_3 \left(1 + \frac{2}{5} j_3 \right) \right] + M_3 l'_3 \left(1 + \frac{1}{5} j_3 \right) = -6EJ_0(\beta_2^0 + \alpha_3^0) = R_2 \dots \dots \dots (303).$$

Для опоры № 3 получим уравнение:

$$M_2 l'_3 \left(1 + \frac{1}{5} j_3 \right) + 2M_3 l'_3 \left(1 + \frac{2}{5} j_3 \right) + M_3 l'_4(2 + j_4) = R_3 \dots \dots (304).$$

Подставляя числовые значения l' и j , получим:

из уравнения (302): $31,7 M_1 + 10,8 M_2 = R_1 \dots \dots \dots (305)$

” ” (303): $10,8 M_1 + 38,4 M_2 + 10,8 M_3 = R_2,$

” ” (304): $10,8 M_2 + 31,7 M_3 = R_3.$

Определитель этой системы уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} 31,7 & 10,8 & 0 \\ 10,8 & 38,4 & 10,8 \\ 0 & 10,8 & 31,7 \end{vmatrix} = 31,7 \cdot 38,4 \cdot 31,7 - 10,8 \cdot 10,8 \cdot 31,7 - 31,7 \cdot 10,8 \cdot 10,8 = 31050.$$

Неизвестное $M_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, где Δ_1 представляет тот же определитель Δ , в котором, вместо столбца коэффициентов при M_1 в уравнениях (305), подставлен столбец свободных членов R_1, R_2, R_3 .

Так как

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} R_1 & 10,8 & 0 \\ R_2 & 38,4 & 10,8 \\ R_3 & 10,8 & 31,7 \end{vmatrix} = R_1 \cdot 38,4 \cdot 31,7 + R_3 \cdot 10,8 \cdot 10,8 - R_1 \cdot 10,8 \cdot 10,8 - R_2 \cdot 10,8 \cdot 31,7 = 1114R_1 - 342R_2 + 120R_3,$$

то $M_1 = \frac{1114R_1 - 342R_2 + 120R_3}{31050} = 0,0359R_1 - 0,0110R_2 + 0,0039R_3.$

Неизвестное $M_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 31,7 & R_1 & 0 \\ 10,8 & R_2 & 10,8 \\ 0 & R_3 & 31,7 \end{vmatrix} = 1006R_2 - 342R_3 - 342R_1,$$

а потому $M_2 = \frac{\Delta_2}{31050} = -0,0110R_1 + 0,0324R_2 - 0,0110R_3.$

Таким же образом $M_3 = 0,0039R_1 - 0,0110R_2 + 0,0359R_3.$

Остается определить грузовые члены R .

При подвижном грузе $P=1$ придется рассмотреть положение его в каждом пролете в отдельности, т. е. для каждого пролета определить значение всех грузовых членов, которые таким образом позволят вычислить одновременно все опорные моменты при положении груза в одном пролете.

Положим сначала, что груз находится в левом пролете; последний несимметричен и при том грузовой член определяется для правой опоры пролета. При таких условиях очевидно, придется пользоваться формулой (299), имея в виду, что по отношению к грузовому члену загружается левый пролет:

$$R_1 = -k_b l_1' l_1 = -(A_b - B_b j_1) l_1 l_1' = -(A_b - B_b \cdot 0,333) l_1^2 \cdot 0,75 = \\ = -75(A_b - 0,333B_b).$$

Так как в то же время $R_2 = 0$ и $R_3 = 0$, то: (306)

$$M_1 = 0,0359R_1 = -0,0359 \cdot 75(A_b - 0,333B_b) = -2,6925(A_b - 0,333B_b).$$

Следовательно, чтобы построить линию влияния, надо иметь величины A и B для разных положений груза. В таблице, относящейся к форм. (298) и (299) они уже приводились для двух типов очертания пролета, и мы теперь можем ими распорядиться. Мы выпишем A и B из предыдущей, поместим в нижеследующую таблицу и осуществим в действиях формулу (306) для M_1 . Последняя строка этого пролета представляет ординаты, по которым построена левая часть формулы 164-б).

Вычисление ординат линии влияния для опорного момента M_1 .

$\frac{a}{l}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Л е в ы й п р о л е т										
A_b	0,0990	0,1920	0,2730	0,3360	0,3750	0,3840	0,3570	0,2880	0,1710	0,0
B_b	0,0009	0,0064	0,0189	0,0384	0,0625	0,0864	0,1029	0,1024	0,0729	0,0
$0,333B_b$	0,0003	0,0021	0,0063	0,0128	0,0208	0,0288	0,0343	0,0341	0,0243	0,0
$A_b - 0,333B_b$	0,0987	0,1899	0,2667	0,3232	0,3542	0,3552	0,3227	0,2539	0,1467	0,0
$-M_1$	0,259	0,499	0,701	0,849	0,930	0,933	0,849	0,667	0,385	0,0
В т о р о й п р о л е т										
C_a	0,1710	0,2880	0,3570	0,3840	0,3750	0,3360	0,2730	0,1920	0,0990	0,0
D_a	0,0546	0,0740	0,0755	0,0699	0,0625	0,0549	0,0463	0,0348	0,0192	0,0
$0,5D_a$	0,0273	0,0370	0,0377	0,0349	0,0312	0,0274	0,0231	0,0174	0,0096	0,0
$C_a - 0,5D_a$	0,1437	0,2510	0,3193	0,3491	0,3438	0,3086	0,2499	0,1746	0,0894	0,0
$5,17(C_a - 0,5D_a)$	0,742	1,297	1,650	1,804	1,776	1,594	1,290	0,902	0,461	0,0
C_b	0,0990	0,1920	0,2730	0,3360	0,3750	0,3840	0,3570	0,2880	0,1710	0,0
D_b	0,0192	0,0348	0,0463	0,0549	0,0625	0,0699	0,0755	0,0740	0,0546	0,0
$0,5D_b$	0,0096	0,0174	0,0231	0,0274	0,0312	0,0349	0,0377	0,0370	0,0273	0,0
$C_b - 0,5D_b$	0,0894	0,1746	0,2499	0,3086	0,3438	0,3491	0,3193	0,2510	0,1437	0,0
$1,584(C_b - 0,5D_b)$	0,142	0,276	0,396	0,489	0,545	0,354	0,506	0,398	0,225	0,0
$-M_1$	0,600	1,021	1,254	1,315	1,231	1,040	0,784	0,504	0,236	0,0

Поставим теперь груз во втором пролете, вызывая одновременно оба грузовых члена: и R_1 и R_2 . Первый из них определим по форм. (300), как при загрузении правого пролета:

$$k'_a = C + D_a \cdot j_2,$$

а второй — по форм. (301), как при загрузении левого пролета:

$$k'_b = C_b + D_b \cdot j_2.$$

В то же время $R_3 = 0$.

Выражение для момента M_1 теперь будет:

$$M_1 = 0,0359 R_1 - 0,0110 R_2 = -0,0359 (C_a + D_a \cdot j_2) l_2 l_2' + \\ + 0,0110 (C_b + D_b \cdot j_2) l_2 l_2' = -5,1696 (C_a - 0,5 D_a) + \\ + 1,584 (C_b - 0,5 D_b) \dots \dots \dots (307)$$

Нам придется выписать из предыдущей таблицы § 13,1с величины C и D и вписать в помещенную здесь таблицу второго пролета, а затем — выполнить действия отдельно для первого члена выражения (307) и отдельно — для второго его члена. Вычитая 10-ую строку таблицы второго пролета из 5-ой, получим значения M_1 , помещенные внизу таблицы, — и по ним построим вторую часть фигуры 164-б).

Таким же образом получаются ординаты третьего пролета.

Ординаты четвертого пролета получаются по образцу первого.

Предлагаем читателю вычислить эти ординаты и закончить построение фиг. 164-б).

§ 14. Случай равных пролетов. 1. Выражение для опорного момента.

а) При равных пролетах и симметричном изменении момента инерции относительно середины пролета, можно получить готовые формулы для расчета опорных моментов и реактивных сил, а также составить таблицы типа вышеприведенных таблиц Винклера (см. § 9).

Уравнение трех моментов при переменном сечении отличается от обычного только коэффициентами χ , μ , ν , учитывающими очертание пролета (форм. 262). При равных пролетах и симметрии, очевидно будет:

$\chi = \mu$ — и при том будет одинаковым во всех пролетах, обозначим его — k ; кроме того, все ν также будут равны. Очевидно, уравнение (263) перепишется в форме:

$$\nu M_{n-1} + 4kM_n + \nu M_{n+1} = \frac{1}{l} R_n,$$

где $R_n = -6EJ_0 (\beta_n^0 + \alpha_{n+1}^0)$; а если разделить на ν , то будет:

$$M_{n-1} + 4 \frac{k}{\nu} M_n + M_{n+1} = \frac{1}{\nu l} R_n, \text{ или } M_{n-1} + 4\pi M_n + M_{n+1} = -\frac{1}{\nu l} R_n = r_n,$$

где $\pi = \frac{k}{\nu}$ и $r_n = \frac{R_n}{\nu l} \dots \dots \dots (308)$

Последняя форма уравнения очень удобна для решения в конечных разностях*).

Вместо данного уравнения $M_{n-1} + 4\pi M_n + M_{n+1} = r_n \dots \dots \dots (309)$ возьмем другое квадратное, содержащее те же коэффициенты при неизвестных, но лишенное свободного члена:

$$z^2 + 4\pi z + 1 = 0 \dots \dots \dots (310)$$

Корни этого характеристического уравнения z_1 и z_2 представляют решение данного уравнения (309) в форме:

$$M^n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + C_3 \dots \dots \dots (311)$$

где C — постоянные коэффициенты, определяемые из постоянных условий задачи. Для вычисления этих коэффициентов подставляем решение (311) в уравнение (309):

$$C_1 z_1^{n-1} + C_2 z_2^{n-1} + C_3 + 4\pi (C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + C_3) + C_1 z_1^{n+1} + C_2 z_2^{n+1} + C_3 = r_n.$$

*) См. наприм.: А. Марков. Исчисление конечных разностей. И. М. Рабинович. Применение теории конечных разностей к исследованию неразрезных балок. М. 1921. Д. Я. Акимов-Перетц. Неразрезные балки на жестких опорах. Л. Г. 1927.

Преобразование дает:

$$C_1 z_1^{n-1} (z_1^2 + 4\pi z_1 + 1) + C_2 z_2^n (z_2^2 + 4\pi z_2 + 1) + 2C_3 + 4\pi C_3 = r_n.$$

А так как в скобках, по (310), стоит нуль, то

$$C_3 = \frac{r_n}{2(1 + 2\pi)}.$$

Применим уравнение (311) к крайней левой шарнирной опоре; т. е. к случаю

$$n = 1 \text{ и } M = 0:$$

$$0 = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3.$$

Если то же сделать для крайней правой опоры s , то будет:

$$0 = C_1 z_1^s + C_2 z_2^s + C_3.$$

Решая последние два уравнения относительно C_1 и C_2 , найдем:

$$C_1 = -C_3 \frac{z_2^s - z_2}{z_1 z_2^s - z_1^s z_2} = -\frac{r_n}{2(1 + 2\pi)} \cdot \frac{z_2^s - z_2}{z_2^{s-1} - z_1^{s-1}}.$$

так как произведение корней квадратного уравнения (310) равно единице,

$$\text{и — } C_2 = -C_3 \frac{z_1 - z_1^s}{z_1 z_2^s - z_1^s z_2} = -\frac{r_n}{2(1 + 2\pi)} \frac{z_1 - z_1^s}{z_2^{s-1} - z_1^{s-1}}.$$

А потому опорный момент будет

$$M_n = -\frac{r_n}{2(1 + 2\pi)} \left(\frac{z_2^{s-n} - z_1^{n-1}}{z_2^{s-1} - z_1^{s-1}} - \frac{z_1^{s-n} - z_2^{n-1}}{z_2^{s-1} - z_1^{s-1}} - 1 \right) \quad \dots (312)$$

б) Пример. Применим эту формулу к случаю балки фиг. 130, предполагая, это все пролеты одинаковы, по 12 м., отношение $i = J_m : J_n = \frac{1}{2}$

и длина вут $w = \frac{1}{4} l = 3$ м.

При таких условиях угловые коэффициенты:

$$\kappa = \frac{2}{3} \cdot 0,858 + \frac{1}{3} \cdot 0,723 \text{ (см. табл. раздела 1-с),}$$

$$\nu = \frac{2}{3} \cdot 0,949 + \frac{1}{3} \cdot 0,893$$

и отношение их

$$\pi = \frac{\kappa}{\nu} = (2 \cdot 0,858 + 0,723) : (2 \cdot 0,949 + 0,893) = 0,786.$$

Для опорного момента второй опоры грузовой член

$$r_n = \frac{R_n}{\nu l} = -2 \cdot \frac{pl^3}{4\nu l} \nu = -\frac{1}{2} pl^2,$$

где p — собств. вес балки плюс постоянная нагрузка, приведенная к единице длины балки (см. форм. 308).

Характеристическое уравнение (310) принимает вид

$$z^2 + 4 \cdot 0,786 z + 1 = 0$$

и дает корни:

$$z_1 = -1,572 + \sqrt{1,572^2 - 1} = -1,572 + 1,211 = -0,361,$$

$$z_2 = -1,572 - 1,211 = -2,783.$$

Так как балка имеет четыре опоры, и мы определяем опорный момент над второй из них, то надо принять:

$$s = 4 \text{ и } n = 2;$$

тогда по (312) будет:

$$M_1 = \frac{pl^2}{2 \cdot 2(1 + 2 \cdot 0,786)} \left(\frac{2,783^2 + 0,361}{-2,783^3 + 0,361^3} - \frac{0,361^2 + 2,783}{-2,783^3 + 0,361^3} - 1 \right) =$$

$$= -0,12 pl^2 = 0,12 \cdot 0,9 \cdot 12^2 = -15,55 \text{ мм.}$$

с) Случай большого числа опор. При большом числе опор, в приближении, можно предположить, что $s = \infty$; тогда для опор, находящихся в средней части балки, получится:

$$M_n = + \frac{r_n}{2(1 + 2\pi)} (1 - z^n) \dots \dots \dots (313),$$

где грузовой член при полном загрузении всех пролетов

$$r_n = \frac{R_n}{nl} = -2 \cdot \frac{pl^3}{4nl} \cdot \gamma = -\frac{1}{2} pl^2.$$

Если нагружены не все пролеты, а через один, то грузовой член становится вдвое меньше.

Подставляя его значение в выражение для опорного момента, получаем:

а) при загрузении сплошь всех пролетов

$$M_n = -pl^2 \frac{1}{4(1 + 2\pi)} (1 - z^n) \dots \dots \dots (314-a)$$

б) при загрузении через один пролет

$$M_n = -pl^2 \frac{1}{8(1 + 2\pi)} (1 - z^n) \dots \dots \dots (314-b).$$

Принимая, по предыдущему, параболический закон изменения гибкости сечений на протяжении пролета, очевидно, мы можем воспользоваться и теми таблицами для угловых коэффициентов, которые приведены в предыдущем параграфе.

2. Таблицы для приближенного расчета балок с равными пролетами. Схематически рассматриваемый способ расчета балок заключается в определении корней характеристического уравнения (310) и в подстановке их для получения опорных моментов в формулы (311) и (314-а

и б). Для обеих частей этой схемы требуется отношение $\pi = \frac{k}{\nu}$, которое должно быть определено предварительно по выражениям (262) или по таблицам § 10,3. Имея π , мы получаем, как корни характеристического уравнения, так и коэффициенты при pl^2 в выражении опорного момента. Поэтому наперед можно составить таблицы, задаваясь различными π , встречающимися на практике; они заменят вышеприведенные таблицы для балок постоянного сечения.

Первая из нижеследующих таблиц содержит отношения π в зависимости, с одной стороны, от отношения моментов инерции: 1) J_m по середине пролета и 2) J_a — по опорному сечению вуты и, с другой стороны, — в зависимости от длины вут. Таблица содержит частные от деления соответствующих чисел k и ν таблицы § 10,3. Последующие таблицы дают опорные моменты и опорные реакции в зависимости от π для разных случаев нагрузки, которая влияет только на грузовой член выражения момента.

1. Коэффициенты $\pi = \frac{x}{\nu}$

$\frac{w}{l} = m$	$i = \frac{J_m}{J_a}$	0,6	0,5	0,4	0,3	0,25	0,20	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06
		0,50	0,891	0,865	0,840	0,815	0,791	0,768	0,740	0,720	0,703	0,684
0,40	0,898	0,862	0,827	0,792	0,767	0,743	0,712	0,692	0,676	0,659	0,637	
0,30	0,900	0,867	0,833	0,798	0,778	0,751	0,725	0,755	0,692	0,678	0,661	
0,25	0,904	0,873	0,842	0,810	0,790	0,768	0,743	0,727	0,714	0,701	0,686	
0,20	0,914	0,886	0,858	0,831	0,814	0,795	0,773	0,760	0,750	—	—	
0,15	0,928	0,904	0,880	0,855	0,842	0,825	0,808	0,794	0,786	—	—	

2. Опорные моменты и реакции для двухпролетной балки при равномерно распределенной нагрузке.

Коэффц. π	Моменты		Реакции		
	$M_1 : pl^2$	$M_x : pl^2$	$R_0 : pl$	$R_1 : pl$	$R_2 : pl$

Нагрузка p заполняет оба пролета

1,00	— 0,125	+ 0,0703	+ 0,375	+ 1,250	+ 0,375
0,90	— 0,139	0,0652	0,361	1,278	0,361
0,85	— 0,147	0,0619	0,353	1,294	0,353
0,80	— 0,156	0,0591	0,344	1,312	0,344
0,75	— 0,167	0,0555	0,333	1,333	0,333
0,70	— 0,179	0,0516	0,321	1,358	0,321

Нагрузка заполняет один только левый пролет

1,00	— 0,0625	+ 0,0957	+ 0,437	+ 0,625	— 0,062
0,90	— 0,0694	0,0927	0,431	0,639	— 0,070
0,85	— 0,0735	0,0910	0,426	0,647	— 0,073
0,80	— 0,0781	0,0890	0,422	0,656	— 0,073
0,75	— 0,0833	0,0868	0,417	0,667	— 0,083
0,70	— 0,0893	0,0843	0,411	0,679	— 0,089

Коэффициенты, приведенные в этой и в следующих таблицах в столбцах моментов, представляют величину момента, разделенную на pl^2 ; поэтому, чтобы получить самый момент, надо коэффициенты этих столбцов умножить на pl^2 соответственно условиям каждого частного задания. На том же основании коэффициенты, помещенные в столбцах реакций, надо умножить на pl , чтобы получить расчетные реакции при данном пролете и данной интенсивности нагрузки p .

3. Опорные моменты и реакции трехпролетной балки при равномерной нагрузке.

π	$\frac{M_1}{pl^2}$	$\frac{M_2}{pl^2}$	$\frac{M_{x_1}}{pl^2}$	$\frac{M_{x_2}}{pl^2}$	$\frac{R_0}{pl}$	$\frac{R_1}{pl}$	$\frac{R_2}{pl}$	$\frac{R_3}{pl}$
-------	--------------------	--------------------	------------------------	------------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

Нагрузка p заполняет все три пролета.

1,00	-0,100	+0,0800	+0,0250	+0,400	+1,100	+0,400		
0,90	-0,109	0,0765	0,0163	0,391	1,109	0,391		
0,85	-0,114	0,0745	0,0114	0,386	1,114	0,386		
0,80	-0,119	0,0726	0,0060	0,381	1,119	0,381		
0,75	-0,125	+0,0703	0,0000	0,375	1,125	0,375		
0,70	-0,132	0,0679	0,0066	0,368	1,132	0,368		

Нагрузка заполняет два пролета слева (правый пролет незагружен).

1,00	-0,117	-0,0333	-	-	+0,383	+1,200	+0,450	-0,033
0,90	-0,130	-0,0334	-	-	0,370	1,226	0,437	-0,033
0,85	-0,137	-0,0331	-	-	0,363	1,242	0,429	-0,033
0,80	-0,147	-0,0324	-	-	0,353	1,261	0,418	-0,032
0,75	-0,156	-0,0312	-	-	0,344	1,281	0,406	-0,031
0,70	-0,169	-0,0292	-	-	0,332	1,308	0,390	-0,029

Нагрузка заполняет один пролет справа (два левых пролета незагружены).

1,0	+0,0167	-0,0667	-	-	+0,017	-0,100	+0,656	0,433
0,90	0,0209	-0,0753	-	-	0,020	-0,117	0,671	0,425
0,85	0,0237	-0,0803	-	-	0,024	-0,128	0,685	0,419
0,80	0,0276	-0,0866	-	-	0,028	-0,142	0,701	0,413
0,75	0,0312	-0,0938	-	-	0,031	-0,156	0,719	0,406
0,70	0,0365	-0,1024	-	-	0,036	-0,175	0,741	0,398

Нагрузка заполняет один только средний пролет (два крайние пролета незагружены).

1,00	-0,0500	-	+0,0750	-0,050	+0,550	-0,050		
0,90	-0,0563	-	0,0717	-0,054	+0,554	-0,054		
0,85	-0,0458	-	0,0682	-0,057	+0,557	-0,057		
0,80	-0,0595	-	0,0655	-0,059	+0,559	-0,059		
0,75	-0,0625	-	0,0625	-0,062	+0,562	-0,062		
0,70	-0,0658	-	0,0592	-0,066	+0,566	-0,066		

Нагрузка заполняет два крайних пролета, оставляя средний незагруженным.

1,00	-0,0500	+0,101	-0,0500	+0,450	+0,550	+0,450		
0,90	-0,0543	0,099	-0,0543	0,446	0,554	0,446		
0,85	-0,0568	0,098	-0,0568	0,443	0,557	0,443		
0,80	-0,0595	0,097	-0,0595	0,440	0,560	0,440		
0,75	-0,0625	0,096	-0,0625	0,437	0,563	0,437		
0,70	-0,0658	0,094	-0,0658	0,434	0,566	0,434		

4. Опорные моменты неразрезной балки при большом числе равных пролетов.

π	Момент крайнего пролета $M_1: p l^2$			Момент среднего пролета $M_n: p l^2$		
	Постоянный (соб. вес)	Временный		Постоянный	Временный	
		Макс.	Мин.		Макс.	Мин.
1,00	-0,106	+0,0141	-0,120	-0,0833	+0,0305	-0,114
0,90	-0,116	0,0176	-0,134	-0,0893	0,0389	-0,128
0,85	-0,123	0,0200	-0,143	-0,0926	0,0446	-0,137
0,80	-0,130	0,0228	-0,153	-0,0961	0,0520	-0,148
0,75	-0,138	0,0264	-0,165	-0,1000	0,0618	-0,162
0,70	-0,148	0,0311	-0,179	-0,1042	0,0755	-0,180

Предельные изгибающие моменты в пролете.

1,00	+0,0777	+0,1000	—	+0,0417	+0,0834	-0,0416
0,90	0,0736	0,0976	—	0,0357	0,0804	-0,0446
0,85	0,0711	0,0962	—	0,0324	0,0787	-0,0463
0,80	0,0684	0,0946	—	0,0289	0,0770	-0,0480
0,75	0,0655	0,0929	—	0,0250	0,0750	-0,0500
0,70	0,0620	0,0907	—	0,0208	0,0729	-0,0521

3. Пример. Определим элементы расчета балки фиг. 130 при равных пролетах $l = 12$ м., пользуясь вышеприведенными таблицами.

По условию: $p = 0,9$ т/м., $q = 3,6$ т/м.

Положим, что $i = J_m : J_a = 0,5$, $m = w : l = 0,25$.

Предварительно определяем π .

По первой таблице, при $i = 0,5$ и $m = 0,25$ имеем:

$$\pi = 0,873.$$

Дальнейший расчет ведется отдельно на действие постоянной нагрузки p и временной q .

а) От постоянной нагрузки. Опорные моменты на второй и третьей опоре (по третьей таблице):

$$M_1 = -0,9 \cdot 12^2 \left(0,109 \frac{0,023}{0,050} + 0,114 \frac{0,027}{0,050} \right) = -14,5 \text{ т.м.};$$

изгибающие моменты в пролетах:

$$M_{x1} = 0,9 \cdot 12^2 \left(0,0765 \frac{23}{50} + 0,0745 \frac{27}{50} \right) = +9,78 \text{ т.м.},$$

$$M_{x2} = 0,9 \cdot 12^2 \left(0,0163 \frac{23}{50} + 0,0114 \frac{27}{50} \right) = +1,79 \text{ „}$$

опорные реакции:

$$R_0 = R_3 = 0,9 \cdot 12 \left(0,391 \cdot \frac{23}{50} + 0,386 \frac{27}{50} \right) = 4,18 \text{ т.}$$

$$R_1 = R_2 = 0,9 \cdot 12 \left(1,109 \cdot \frac{23}{50} + 1,114 \frac{27}{50} \right) = 12,0 \text{ „}$$

б) От временной нагрузки. Опорные моменты: максимальный получается при загрузке одного только крайнего правого пролета

$$M_{\text{макс}} = 3,6 \cdot 12^2 \left(0,0209 \frac{23}{50} + 0,0237 \frac{27}{50} \right) = +11,6 \text{ т.м.},$$

минимальный получается при загрузке двух левых пролетов

$$M_{\text{мин.}} = -3,6 \cdot 12^2 \left(0,130 \cdot \frac{23}{50} + 0,137 \cdot \frac{27}{50} \right) = -69,2 \text{ т.м.}$$

Изгибающие моменты в пролетах:

$$M_{x1}^{\text{макс.}} = + 3,6 \cdot 12^2 \left(0,099 \frac{23}{50} + 0,098 \frac{27}{50} \right) = + 51,1 \text{ тм.}$$

получается при загрузении двух крайних пролетов,

$$M_{x1}^{\text{мин.}} = 0,$$

$$M_{x2}^{\text{макс.}} = 3,6 \cdot 12^2 \left(0,0717 \frac{23}{50} + 0,0682 \frac{27}{50} \right) = + 36,2 \text{ тм.}$$

получается при загрузении одного только среднего пролета,

$$M_{x2}^{\text{мин.}} = - 3,6 \cdot 12^2 \left(0,0543 \frac{23}{50} + 0,0568 \frac{27}{50} \right) = - 28,8 \text{ тм.}$$

получается при загрузении двух крайних пролетов.

Опорные реакции:

$$R_0 = R_3 = 3,6 \cdot 12 \left(0,446 \frac{23}{50} + 0,443 \frac{27}{50} \right) = 19,2 \text{ т.}$$

получается при загрузении двух крайних пролетов,

$$R_0 = R_3 = - 3,6 \cdot 12 \left(0,054 \frac{23}{50} + 0,057 \frac{27}{50} \right) = - 2,40 \text{ т.}$$

получается при загрузении одного только среднего пролета,

$$R_1 = R_2 = 3,6 \cdot 12 \left(1,226 \cdot \frac{23}{50} + 1,242 \cdot \frac{27}{50} \right) = 53,3 \text{ т.}$$

получается при загрузении двух левых пролетов,

$$R_1 = R_2 = - 3,6 \cdot 12 \left(0,117 \cdot \frac{23}{50} + 0,128 \frac{27}{50} \right) = 5,29 \text{ т.}$$

получается при загрузении одного только крайнего правого пролета.

§ 15. Практические замечания. 1. В неразрезных балках переменного сечения опорные моменты зависят и от жесткости поперечных сечений, и от продольного очертания балки; поэтому для определения моментов надо иметь в распоряжении сечения балки и закон их изменения в пролете. Если же они неизвестны, то ими приходится задаваться предварительно, на основании моментов, полученных для балки постоянного сечения. Эту первую пробную балку переменного сечения следует рассчитать по одному из известных способов приближенного расчета. Конечно, истинные моменты для балки окончательной формы, которая получится в результате проектирования, будут не те, что для балки, предварительно намеченной, но разница, обыкновенно, оказывается сравнительно небольшой*), а принятые размеры бывают либо удовлетворительными, либо требующими сравнительно небольших изменений; только в редких случаях приходится прибегать к составлению нового эскиза**).

К переменным сечениям прибегают при больших пролетах и значительных нагрузках с целью сэкономить на материале в тех сечениях, где возникают сравнительно небольшие моменты, либо даже и при обычных нагрузках и небольших пролетах, если для балок предназначается литой или набивной материал, которому без затруднений придается любая форма, например, железо-бетон, чугун. Нередко фермы из стержней, для простоты, рассматриваются, как сплошные полнотенные балки соответствующей

*) Koeschlin. Applications de la statique graphique. 1889, стр. 343.

**) Подробности и примеры см. Suter. Methode der Festpunkte. 1923.

жесткости; при этом моментом инерции их сечений считают момент инерции поясов, пренебрегая решеткой*), так что, при криволинейных поясах получается переменная жесткость даже в том случае, когда пояса фермы имеют постоянное сечение. Точно также получается переменная жесткость и в фермах с параллельными поясами, если сечение пояса изменяется вдоль пролета, как это чаще всего и бывает в мостовых фермах. Во всех этих случаях может применяться вышеописанный способ расчета.

Если балки служат для поддержания перекрытия, то плиту перекрытия стремятся воспользоваться, как элементом сопротивления, вводя часть плиты в расчет сечения балки — активная часть плиты. Обычно, плиту вводят в расчет поддерживающих ее поперечных балок, когда толщина плиты не меньше $\frac{1}{10}$ полной высоты балки, (включая и плиту). Активная часть плиты шириной b считается одним нераздельным телом с поперечной балкой, составляя ее верхний пояс и придавая балке тавровое сечение. Ширину b берут не больше $\frac{1}{3} l$, где l пролет поперечной балки. Обычно расстояние λ между поперечными балками не превосходит $\frac{1}{3} l$, и потому активной шириной b считают расстояние между поперечными балками λ^{**}).

В железо-бетонных перекрытиях высоту неразрезных балок обычно увеличивают к опорам, устраивая вуты фиг. 156. Уклон вута должен быть не более $\frac{1}{3}$, длина вута — не менее $\frac{1}{10}$ пролета, чтобы оказать влияние на сопротивление пролета. Начало вута не должно заходить в зону положительных моментов фиг. 130, так как входящих углов не следует допускать в растянутых частях бетонной балки.

При вычислении отношения $\frac{J_m}{J_a}$ момента инерции посередине пролета и на опоре, необходимого для пользования расчетными таблицами, для простоты, обычно, вводят в расчет только площадь бетона, не считаясь с арматурой.

2. О прогибе балок переменного сечения. Прогиб таких балок может быть определен по общему приему сложения перемещений: составляют выражение прогиба для основной балки пролета при действии одной только нагрузки и складывают с выражением для отдельного действия на тот же пролет опорных моментов. Первый прогиб определяется, как момент от „гибкой эпюры моментов“, вызванной только нагрузкой пролета, и, если выражение для момента от нагрузки легко интегрируется, то определяется по формуле:

$$y = \int_0^x x \frac{M_x dx}{EJ_x}, \text{ если же очертание эпюры не}$$

удовлетворяет этому требованию, то ее заменяют более простой, интегрируемой, или прибегают к графическому приему: разбивают на элементы и приводят ординаты к одной общей жесткости, определяют площади полученных таким образом „гибких элементов“ эпюры, находят фиктивные реактивные силы эпюры и статический момент односторонних сил для того сечения, для которого вычисляется прогиб.

Таким же образом поступают и с эпюрой опорных моментов. Но так как последняя всегда очерчена прямою, то задача упрощается: здесь можно

*) Иногда при определении момента инерции ферм, кроме сечения поясов принимают в расчет и сечение тех элементов решетки, которые попадают в рассматриваемое сечение фермы, но такой прием не имеет оснований, ибо, принимая в расчет момент инерции решетки, мы увеличиваем жесткость системы поясов, между тем как упругая решетка фактически уменьшает эту жесткость.

В наших „Системах с лишними неизвестными“ помещены цифровые данные для нескольких примеров стержневых ферм (см. § 9, 10-й).

***) По нормам Комис. путей сообщения $b \leq 16z$, где z — толщина плиты. Это более ограничительное требование дает большой запас прочности.

воспользоваться указаниями параграфа 10 и получить готовые формулы для очертания балок, чаще всего встречающегося на практике *).

3. **Пример полного расчета балок** одной красильной фабрики (фиг. 165). По производственным условиям трехпролетная балка имеет неравные пролеты: $l_1 = 3,65$ м., $l_2 = 5,55$ м. и $l_3 = 3,65$ м. Кроме собственного веса покрытия: $p_1 = 609$ кг. на 1 пог. м., $p_2 = 390$ и $p_3 = 415$ в пролетах l_1 , l_2 и l_3 , балка несет временную равномерную нагрузку $q_1 = 689$, $q_2 = 345 = q_3$ от скопления рабочих и четыре сосредоточенных груза, представляющих вес машин и силосов, передающийся междуэтажным перекрытием на балку: в первом пролете $P_1 = 375$ кг., во втором — две силы по 1275 кг. и в третьем пролете $P_4 = 9000$ кг., как показано на чертеже. Балка проектируется переменного сечения с вутами, при разных жесткостях в разных пролетах. Предварительно по форм. (285) определяем фокусы.

Чтобы получить расчетные моменты и поперечные силы, рассмотрим отдельное загрузение пролетов разными видами нагрузки. Сначала загружаем собственным весом перекрытия первый пролет. На фиг. б) строим соответствующую параболу, из вершины проводим наклонную, которую засекаем из правого фокуса; через точку пересечения и левую опорную точку проводим наклонную линию эпюры опорных моментов первого пролета и продолжаем до правой опорной вертикали пролета. От опорной вертикали направляемся на правый фокус второго пролета и продолжаем прямую до правой опорной вертикали этого пролета. Наконец ординату 2' соединяем с нулевой точкой конца балки 3. Таким же образом поступаем с нагрузкой второго (фиг. с) и третьего пролета (фиг. d). На фиг. e), f) и g) выполнены такие же построения для временной равномерно распределенной нагрузки q (толпа людей). Действие большого сосредоточенного груза $P_4 = 9$ т. рассмотрено на фиг. б), при чем построена треугольная эпюра моментов $2C3$ и путем известного графического приема получен фокальный момент $f\varphi$, определяющий ломанную линию эпюры опорных моментов 3φ 2, 1, 0. Фигуры h) и i) учитывают действие прочих сосредоточенных грузов.

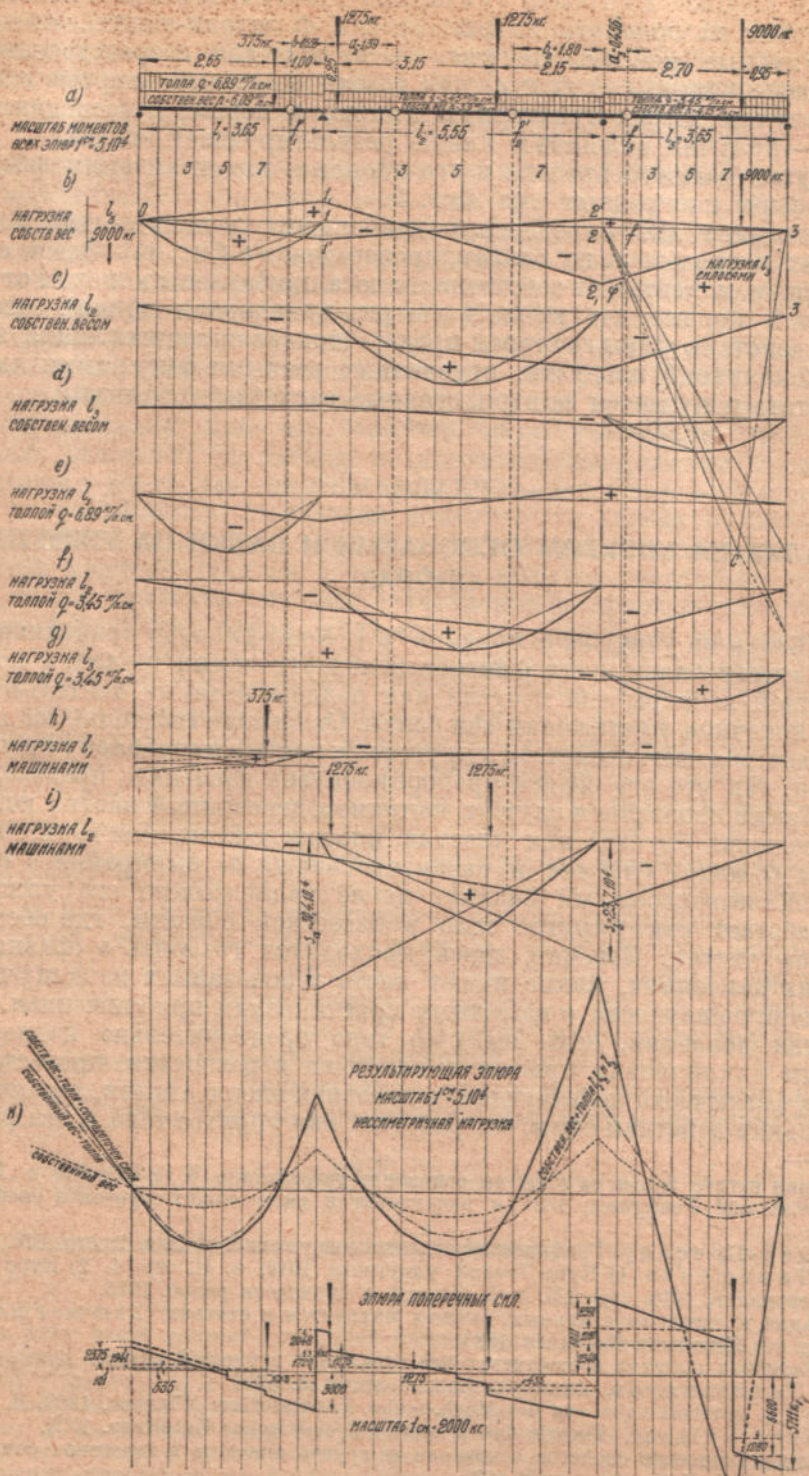
*) Готовые приближенные формулы для прогиба неразрезных балок переменного сечения см.:

Bleich. Theorie der Brücken. 1924.

Кильчинський А., інж. Угин балкових розрізних зв'язнів. Збірник Інституту технічної механіки Всеукраїнської Академії Наук ч. 4 за р. 1929.

Теория неразрезных балок излагается более или менее подробно во многих основных курсах строительной механики и мостов, начиная с сочинений Винклера. Кроме выше цитированных в подстрочных выносках, приведем здесь несколько сочинений и отдельных статей, которые служат основными источниками материала либо представляют интерес для русского читателя.

1. Винклер. Теория внешних сил, действующих на прямые балки. СПб. 1871. Перевод А. А. Недзялковского статьи Винклера, помещенной в „Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins“ 1870, Heft II, V, VI, XI и XII.
2. Weugauch. Theorie d. kontinuierlichen Träger. 1873.
3. Альсидский. Неразрезные балки. 1886.
4. Winkler. Theorie der Brücken. 1886.
5. Levy M. La statique graphique 1887.
6. Fontviolant. Перев. Черкасова. Расчет неразрезных балок 1900.
7. Ritter W. Anwendungen der graphischen Statik. 1900.
8. Vierendeel A. Cours de stabilité des constructions. Т. II, III. 1905.
9. Vlachos. Zeichnerische Behandlung der durchgehenden Träger. 1908.
10. Херстром А. П. Линии влияния неразрезных балок. 1909.
11. Strassner. Die Wirkungen der Vouten. 1911.
12. Башинский. Новый метод расчета балок и жестких рамных систем. 1913.
13. Strassner. Die einfache und durchlaufende Balken. 1921.
14. Pirlet. Compendium der Statik der Baukonstruktionen 1921.
15. Funk. Die linearen Differenzgleichungen 1920.
16. Филоненко-Вородич. Общее решение уравнений неразрезной балки. 1921.
17. Saliger. Der Eisenbeton. 1925.
18. Prager. Einfluss der Vouten. 1926.
19. Акимов-Перетц Д. Я. Статика сооружений. Неразрезные балки на жестких опорах. 1927.



Фиг. 165.
Полный расчет неразрезной балки при сложной нагрузке.

Результирующая эпюра моментов фиг. *k*) получается, если от одной общей оси абсцисс построить суммарные моменты, сначала от собственного веса, выбирая их ординаты из фиг. *b*), *c*) и *d*) (штрих-линия), затем составить суммарные моменты по фиг. *b*), *h*) и *i*) для сосредоточенных сил и суммарные моменты *e*) *f*) и *g*) для толпы. Складывая первые с последними, получим штрих-пунктирную линию, а первые с последними и со вторыми — получим сплошную линию результирующей эпюры.

По грузам каждого пролета и его опорным моментам вычисляются ординаты эпюры поперечных сил фиг. *l*).

Исследование для определения наибольших и наименьших моментов, возможных в пролете и на опорах, произведено на фиг. *m*). Здесь сначала к суммарным моментам от собственного веса прибавлены моменты от толпы, занимающей первые два пролета (штрих-пунктирная линия), затем рассмотрено действие толпы во втором пролете (тонкая сплошная линия) и — ряд других комбинаций нагрузки, отмеченных разными фигурными линиями. В результате получается заштрихованные расчетные ординаты.

ГЛАВА V.

БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ И БАЛКИ НА УПРУГИХ ОПОРАХ.

§ 16. Балки на упругом основании*). 1. Коэффициент основания. Здесь имеются в виду балки, поддерживаемые не в отдельных точках, а лежащие на сплошной непрерывной постели или поддерживаемые постелью на некотором, конечном протяжении оси балки. Основание (постель), на котором лежит балка, обладает свойством упругости и подчиняется закону пропорциональности, так что его осадка пропорциональна давлению, производимому балкой. Таким основанием служит, например, деревянный настил из сплошных деревянных брусьев или пластин, плотнослежавшийся грунт, находящийся на большой глубине и гарантированный от выпираания в стороны и проч. Железнодорожный балласт после надлежащего его уплотнения также работает как упругое тело в известной области, где обеспечено равновесие частиц. Конечно, здесь приходится говорить о сравнительно небольших давлениях, какие имеют место в основаниях из сыпучих тел, и о пропорциональности с известным практическим приближением. В пределах этих давлений, если сыпучее тело предварительно подвергалось повторным циклическим процессам нагрузки и разгрузки, превосходящей давление, фактически действующее в условиях эксплуатации, то, при непродолжительном действии силы, оно работает как упругое тело, и осадку осно-

*) Теория изгиба балок на упругом основании разработана Winkler'ом в „Lehre von der Elastizität und Festigkeit, 1897 и излагается в ряде общих курсов и специальных сочинений:

Мюллер-Бреслау. Графическая статика сооружений, т. II ч. 2. стр. 229.

С. П. Тимошенко 1) Курс Теории упругости 1916, ч. II, стр. 4, 2) Курс Сопротивления материалов, 1918, стр. 225. 3) К вопросу о прочности рельс, 1915.

Ряд задач и экспериментальных данных находится в статьях: Zimmegmann, Die Berechnung des Eisenbahn-oberbaues. 1888.

Этот материал получил соответствующее отражение в русской статье:

Проф. Толстопятов. Циммермановский метод М. 1905

Förpl A. Mittheilungen aus der Mech.-techn. Laboratorium München, 1900, H. 27.

Hayashi Keiichi. Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. 1921.

Физико-механические свойства основания из грунта описаны в известном сочинении:

Terzaghi K. Erdbaumechanik. 1925.

Из русских работ по расчету балок отметим еще:

Тимофеева В. Расчет балок, лежащих на упругом основании с помощью фиктивных грузов. „Зодчий“ 1915, № 15.

Н. П. Пузыревский. Расчет прочности фундаментов, 1923.

Г. Д. Дутов. Расчет балок на упругом основании, 1929.

вания можно считать пропорционально производимому на него давлению. Обозначая буквою k интенсивность давления, вызывающего осадку, равную единице, мы фактическое давление на основание можем считать: . . (315).

$$p = ky, \text{ где } y \text{ — фактическая осадка основания.}$$

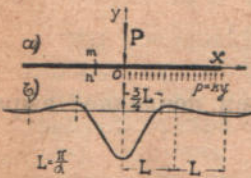
Коэффициент k принято называть коэффициентом основания, например, в железнодорожном деле — коэффициентом балласта.

Величина k мало изучена. Она зависит не только от рода грунта, но и от его состояния. Приводим ряд данных по литературным источникам. По Креутеру для свеженасыпанного грунта $k=6$ кг./см.³, для уплотнившегося — $k=9$ и для совершенно плотной постели $k=16$. По Франциусу для песчаных речных и морских грунтов $k=10$ кг./см.³; по Брөнессе для слежавшегося песка принимается $k=4$. По исследованиям Бастияна для обыкновенных грунтов k бывает от 9 до 20 кг./см.³ в зависимости от площади давления, при чем большие числа получаются при меньших площадях давления. По данным механической лаборатории Киевск. Политехнического Ин-та для десятка ж. д. балластов $k=5-15$ кг./см.³.

Когда коэффициент основания известен, то задача о расчете балки представляется в следующем виде: под влиянием нагрузки балка на сплошной упругой постели изгибается, вызывая реактивные силы основания. Будем полагать, что они двусторонни и препятствуют, как оседанию, так и поднятию балки. Если при этом пренебречь ничтожной деформацией нижней половины балки, расположенной между нейтральной осью и основанием, то окажется что упругая линия балки совпадает с профилем деформированного основания. Так как балка, с одной стороны несет нагрузку, а с другой — находится под действием реактивных усилий основания ky , то предстоит решить задачу об упругой линии, при нагрузке балки и сплошных усилиях постели, интенсивность которых изменяется пропорционально прогибу балки. В такой общей форме задача оказывается сложной. К решению практических вопросов расчета сооружений можно подойти на основании разбора отдельных случаев, когда уравнение упругой линии интегрируется без затруднений.

2. Случай сосредоточенного груза на бесконечно длинной балке (фиг. 166). а) Упругая линия. В этом случае упругая линия симметрична относительно груза, так что, помещая начало координат в O , придется иметь дело только с интенсивностью реактивных сил $p = ky$.

Дифференциальное уравнение напомним, как функцию от интенсивности нагрузки p по формуле:



Фиг. 166.

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = p = -ky \dots \dots \dots (316^*),$$

отмечая знаком минус, что давления основания p идут против перемещений y **.

*) См. напр. наши системы с лишними неизвестными § 2,4 форм. (52-а).

**) Вообще считаем:

Прогиб y сверху — вниз отрицательным, снизу — вверх положительным.

Угол поворота φ по часовой стрелке отрицательным.

Момент M , изгибающий балку выпуклостью вниз, положительным.

Поперечную силу Q действующую снизу вверх слева от сечения — положительной.

Оси координат направляем: ось X слева направо, ось Y снизу вверх.

Положительным направлением силы P (распределенной нагрузки p) считаем направленное снизу вверх, т. е. положительное направление левой поперечной силы или отрицательное направление прогиба.

При вышеупомянутых условиях соблюдаются со знаками известные уравнения:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p}{EJ}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Q}{EJ}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi.$$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{k}{EJ} y = -4\alpha^4 y,$$

обозначая буквой α выражение $\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ (317);

получим каноническую форму линейного дифференциального уравнения 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Общий интеграл такого уравнения может быть представлен в виде:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \text{ *)} . . (318)$$

Так как для длинных стержней осадка y на конце стержня убывает до нуля, то первые два члена должны отсутствовать, ибо только при этом условии y будет нулем при значительном x . Очевидно

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0,$$

так что:

$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

Чтобы определить независимые интегрирования C_3 и C_4 , применим это выражение к началу координат. Здесь касательная к упругой линии горизонтальна вследствие симметрии изгиба, т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$, и поперечная сила известна, ибо сумма всех реактивных сил основания на протяжении половины балки равняется $\frac{1}{2} P$, т. е. при $x = 0$:

$$EJ \frac{d^3y}{dx^3} = Q = -\frac{1}{2} P.$$

Первое равенство:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{-\alpha x} [-C_3 (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + C_4 (\cos \alpha x - \sin \alpha x)] = 0,$$

дает:

$$C_3 = C_4 = C,$$

так что:

$$y = C e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Чтобы применить второе равенство, дифференцируем последнее выражение три раза:

$$\frac{dy}{dx} = -2C\alpha e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2C\alpha^2 e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 4C\alpha^3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$

Тогда при $x = 0$: $EJ \frac{d^3y}{dx^3} = 4EJ C\alpha^3 = -\frac{1}{2} P$, или:

$$C = -P \frac{1}{8EJ\alpha^3}.$$

Следовательно, окончательное уравнение упругой линии будет:

$$y = -P \frac{1}{8EJ\alpha^3} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) (319),$$

*) Проще всего убедиться в этом, путем четырехкратного дифференцирования.

или
$$y = -\frac{Pa}{2k} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax) \dots \dots \dots (320-a),$$

или иначе, после тригонометрических преобразований:

$$y = -\frac{Pa}{k\sqrt{2}} e^{-ax} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \dots \dots \dots (320-b).$$

Наибольший прогиб получится при $x=0$ т. е. под грузом P ; он называется

$$y_{\max.} = -P : 8EJ\alpha^3 = -Pa : 2k \dots \dots \dots (321)$$

Как показывает формула (320), прогибы остальных точек периодически изменяются вместе с возрастанием x , упругая линия имеет волнистую форму. Чтобы определить длину волны, заметим, что фаза повторяется через период в 2π . Так как число 2π прибавляется к углу ax , то длине x соответствует $\frac{2\pi}{a}$. Таким образом, обозначая полуволну буквою L , имеем:

$$2L = 2\pi : a = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}} \dots \dots \dots (322).$$

Высота волны быстро убывает по мере удаления от точки приложения груза, так как она определяется величиною $e^{-ax} = \frac{1}{e^{ax}}$.

Первая нулевая точка находится на расстоянии

$$\frac{3}{4} L \text{ от груза } P.$$

б) Изгибающий момент, поперечная сила и угол поворота определяются на основании известных зависимостей:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{Px}{EJ'} \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{Q_x}{EJ'} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ'} \frac{dy}{dx} = \varphi_x \text{ и } y = f(x) \dots (323^*).$$

Мы воспользуемся имеющейся уже теперь упругой линией (319) и продифференцируем ее уравнение, как того требует третья и вторая из формул (323); получим изгибающий момент и поперечную силу для любого сечения балки:

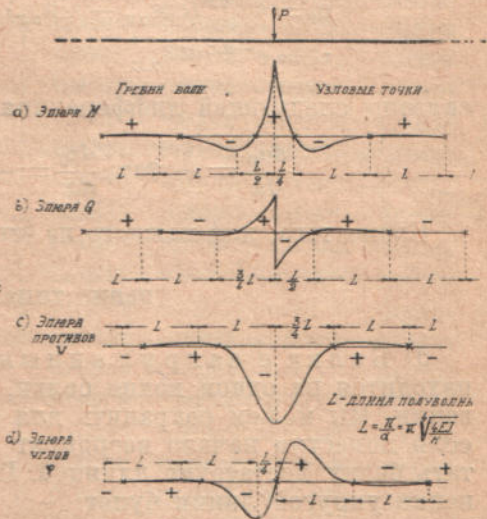
$$M = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot EJ = +\frac{P}{4a} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax) \dots \dots \dots (324-a),$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} EJ = -\frac{P}{2} e^{-ax} \cos ax \dots \dots \dots (325),$$

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = +\frac{Pa^2}{k} e^{-ax} \sin ax \dots \dots \dots (326).$$

После некоторых преобразований формулу для момента можно представить еще в следующем виде:

$$M = \frac{P}{\sqrt{8a}} e^{-ax} \cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \dots \dots \dots (324-b).$$



Фиг. 167.

*) См. напр. наши Системы с лишними неизвестными, форм. (52-a).

Закон изменения величин M , Q , y и φ иллюстрируется черт. 167.

с) Пользование таблицами. В формулах расчета прогиба, изгибающего момента и поперечной силы постоянные величины P , EJ , α , всегда сопровождаются переменными, зависящими от x . Давая x различные встречающиеся значения можно предварительно рассчитать значения переменных и составить из них таблицу. Тогда расчет практически упростится: для построения эпюр придется только выписывать соответствующие цифры из таблицы. Обозначим переменные коэффициенты в формулах: для момента μ , для поперечной силы τ , для прогиба — η . Тогда расчетные формулы примут вид:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{P}{4\alpha} e^{-\alpha x} (-\sin \alpha x + \cos \alpha x) = \frac{P}{4\alpha} \cdot \mu_0, \\ Q &= -\frac{P}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{P}{2} \cdot \tau_0 \\ y &= -\frac{Pa}{2k} e^{-\alpha x} (\cos_{\alpha x} + \sin_{\alpha x}) = -\frac{Pa}{2k} \eta_0 \\ \varphi &= \frac{Pa^2}{k} e^{-\alpha x} \sin_{\alpha x} = \frac{Pa^2}{k} \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots (327)$$

где коэффициенты μ_0 , τ_0 , η_0 и θ_0 получаются из таблицы*).

Вообще эти коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= e^{-\alpha x} (\cos_{\alpha x} - \sin_{\alpha x}) \\ \tau_0 &= e^{-\alpha x} \cos_{\alpha x} \end{aligned} \right| \left. \begin{aligned} \eta_0 &= e^{-\alpha x} (\cos_{\alpha x} + \sin_{\alpha x}) \\ \theta_0 &= e^{-\alpha x} \sin_{\alpha x} \end{aligned} \right\} \dots (328)$$

связаны следующей дифференциальной зависимостью:

$$\frac{d\mu_0}{dx} = -2\alpha\tau_0, \quad \frac{d\tau_0}{dx} = -\alpha\eta_0, \quad \frac{d\eta_0}{dx} = -2\alpha\theta_0, \quad \frac{d\theta_0}{dx} = \alpha\mu_0$$

Кроме того, для каждого из этих коэффициентов можно написать уравнение типа:

$$\frac{d^4\mu_0}{dx^4} = -4\alpha^4\mu_0.$$

д) Балка с нагруженным концом. Пусть сосредоточенный груз находится на одном конце балки, лежащей на сплошном упругом основании. Мы можем сохранить для общего интеграла (318) те же условия, если поместим начало координат в точке приложения груза и будем считать балку достаточно длинной. Величины C_1 и C_2 будут нулевыми и уравнение упругой линии будет:

$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

Условия для определения C_3 и C_4 таковы: изгибающий момент на конце: т.е. при $x = 0$ (под силой P), равен нулю и поперечная сила равна $-P$,

$$y'' = 0 \text{ и } y''' = -P : EJ.$$

$$\text{Отсюда } C_3 = -\frac{P}{2\alpha^3 EJ} = -\frac{2\alpha}{k} P \text{ и } C_4 = 0.$$

$$\text{Следовательно: } y = -\frac{2\alpha P}{k} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{2\alpha P}{k} \tau_0$$

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2\alpha^2 P}{k} e^{-\alpha x} (\cos_{\alpha x} + \sin_{\alpha x}) = \frac{2\alpha^2 P}{k} \eta_0$$

*) Таблица позаимствована у Zimmermann'a в: Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, 1888.

Таблица (329) функций μ_0, τ_0, η_0 и θ_0

αx	μ_0	τ_0	η_0	θ_0	αx	μ_0	τ_0	η_0	θ_0
	$e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x)$	$e^{-\alpha x} \cos \alpha x$	$e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$	$e^{-\alpha x} \sin \alpha x$		$e^{-\alpha x}(\cos \alpha x - \sin \alpha x)$	$e^{-\alpha x} \cos \alpha x$	$e^{-\alpha x}(\cos \alpha x + \sin \alpha x)$	$e^{-\alpha x} \sin \alpha x$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	3,6	-0,01241	-0,02450	-0,03659	-0,01209
0,1	0,8100	0,9003	0,9907	0,0904	3,7	-0,00787	-0,02097	-0,03407	-0,01310
0,2	0,6398	0,8024	0,9651	0,1627	3,8	-0,00401	-0,01770	-0,03138	-0,01368
0,3	0,4888	0,7077	0,9267	0,2190	3,9	-0,00077	-0,01469	-0,02862	-0,01393
0,4	0,3564	0,6174	0,8784	0,2610	5/4π	0,00000	-0,01393	-0,02786	-0,01393
0,5	0,2415	0,5323	0,8231	0,2908	4,0	0,00189	-0,01197	-0,02583	-0,01386
0,6	0,1431	0,4530	0,7628	0,3098	4,1	0,00403	-0,00953	-0,02309	-0,01356
0,7	0,0599	0,3798	0,6997	0,3199	4,2	0,00572	-0,00735	-0,02042	-0,01307
1/4π	0,0000	0,3224	0,6448	0,3224	4,3	0,00699	-0,00544	-0,01787	-0,01243
0,8	-0,0093	0,3131	0,6354	0,3223	4,4	0,00791	-0,00377	-0,01546	-0,01169
0,9	-0,0657	0,2527	0,5712	0,3185	4,5	0,00852	-0,00234	-0,01320	-0,01082
1,0	-0,1108	0,1988	0,5083	0,3095	4,6	0,00886	-0,00113	-0,01112	-0,00999
1,1	-0,1457	0,1510	0,4476	0,2966	4,7	0,00898	-0,00011	-0,00921	-0,00910
1,2	-0,1716	0,1091	0,3899	0,2808	6/4π	0,00898	0,00000	-0,00898	-0,00898
1,3	-0,1897	0,0729	0,3355	0,2626	4,8	0,00892	0,00072	-0,00748	-0,00820
1,4	-0,2011	0,0419	0,2849	0,2430	4,9	0,00870	0,00139	-0,00593	-0,00732
1,5	-0,2068	0,0158	0,2384	0,2226	5,0	0,00837	0,00191	-0,00455	-0,00646
1/2π	-0,2079	0,0000	0,2079	0,2079	5,1	0,00795	0,00230	-0,00334	-0,00564
1,6	-0,2077	-0,0059	0,1959	0,2018	5,2	0,00746	0,00259	-0,00229	-0,00488
1,7	-0,2047	-0,0235	0,1576	0,1811	5,3	0,00692	0,00277	-0,00139	-0,00416
1,8	-0,1985	-0,0376	0,1234	0,1610	5,4	0,00636	0,00287	-0,00063	-0,00350
1,9	-0,1899	-0,0484	0,0932	0,1416	7/4π	0,00579	0,00290	0,00000	-0,00290
2,0	-0,1794	-0,0563	0,0667	0,1230	5,5	0,00578	0,00290	0,00001	-0,00289
2,1	-0,1675	-0,0618	0,0439	0,1057	5,6	0,00520	0,00287	0,00053	-0,00234
2,2	-0,1548	-0,0652	0,0244	0,0896	5,7	0,00464	0,00279	0,00095	-0,00184
2,3	-0,1416	-0,0668	0,0080	0,0748	5,8	0,00409	0,00268	0,00127	-0,00141
3/4π	0,1340	-0,0670	0,0000	0,0670	5,9	0,00356	0,00254	0,00152	-0,00102
2,4	-0,1282	-0,0669	-0,0056	0,0613	6,0	0,00307	0,00238	0,00169	-0,00069
2,5	-0,1149	-0,0658	-0,0166	0,0492	6,1	0,00261	0,00221	0,00180	-0,00041
2,6	-0,1019	-0,0636	-0,0254	0,0382	6,2	0,00219	0,00202	0,00185	-0,00017
2,7	-0,0895	-0,0608	-0,0320	0,0288	8/4π	0,00187	0,00187	0,00187	-0,00000
2,8	-0,0777	-0,0573	-0,0369	0,0204	6,3	0,00181	0,00184	0,00187	-0,00003
2,9	-0,0666	-0,0534	-0,0403	0,0131	6,4	0,00146	0,00165	0,00184	-0,00019
3,0	-0,0563	-0,0493	-0,0423	0,0070	6,5	0,00115	0,00147	0,00179	-0,00032
3,0	-0,05632	-0,04929	-0,04226	0,00703	6,6	0,00087	0,00129	0,00172	-0,00043
3,1	-0,04688	-0,04501	-0,04314	0,00187	6,7	0,00063	0,00113	0,00162	-0,00049
π	-0,04321	-0,04321	-0,04321	0,00000	6,8	0,00042	0,00097	0,00152	-0,00055
3,2	-0,03831	-0,04069	-0,04307	-0,00238	6,9	0,00024	0,00082	0,00141	-0,00059
3,3	-0,03060	-0,03642	-0,04224	-0,00584	7,0	0,00009	0,00069	0,00129	-0,00060
3,4	-0,02374	-0,03227	-0,04079	-0,00852	9/4π	0,00000	0,00060	0,00120	-0,00060
3,5	-0,01769	-0,02828	-0,03887	-0,01059					

$$M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{4\alpha^4} \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P}{\alpha} e^{-\alpha x} \sin \alpha x = -\frac{P}{\alpha} \theta_0$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = -P e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) = -P \cdot \mu_0$$

Наибольший прогиб у нагруженного конца:

$$y_{\text{макс.}} = -2\alpha P : k.$$

Следовательно, прогиб в 4 раза больше, чем при грузе положенном по середине весьма длинной балки.

е) Случай нескольких грузов. Линии влияния для бесконечно-длинной балки. Если крайний из грузов достаточно удален от конца балки, то вышеприведенный вывод сохраняет свое значение применительно к каждому из грузов в отдельности. Пользуясь сложением, мы можем решить задачу об одновременном действии нескольких грузов.

Рассмотрим бесконечно-длинную балку, загруженную рядом сил (по фиг. 168-а), где силы P_1 и P_2 находятся слева от сечения I—I на расстояниях a_1 и a_2 , а сила P_3 справа на расстоянии a_3 от сечения.

Пользуясь формулами (327), получаем для сечения I—I:

$$M_{I-I} = \frac{P_1}{4\alpha} (\mu_0)_{x=a_1} + \frac{P_2}{4\alpha} (\mu_0)_{x=a_2} + \frac{P_3}{4\alpha} (\mu_0)_{x=a_3}$$

$$Q_{I-I} = -\frac{P_1}{2} (\tau_0)_{x=a_1} - \frac{P_2}{2} (\tau_0)_{x=a_2} + \frac{P_3}{2} (\tau_0)_{x=a_3}$$

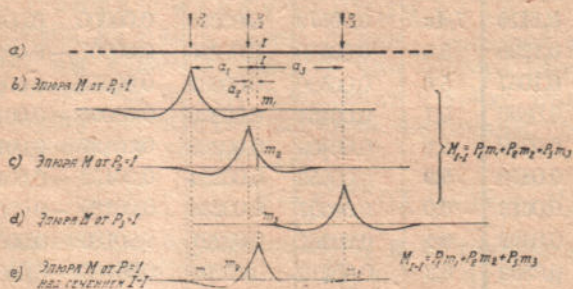
$$y_{I-I} = -\frac{P_1 \alpha}{2k} (\eta_0)_{x=a_1} - \frac{P_2 \alpha}{2k} (\eta_0)_{x=a_2} - \frac{P_3 \alpha}{2k} (\eta_0)_{x=a_3}$$

$$\varphi_{I-I} = \frac{P_1 \alpha^2}{k} e^{-\alpha a_1} \sin \alpha a_1 + \frac{P_2 \alpha^2}{k} e^{-\alpha a_2} \sin \alpha a_2 - \frac{P_3 \alpha^2}{k} e^{-\alpha a_3} \sin \alpha a_3$$

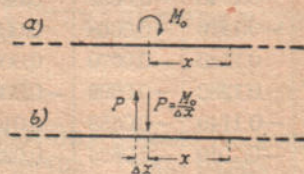
Из рассмотрения этих формул и фигур 167 и 168 не трудно заключить, что эпюра моментов M от груза $P=1$, поставленного в сечении I—I, является линией влияния M для этого сечения.

То же можно сказать и про эпюру прогиба y .

Для превращения же эпюр Q и φ от груза единица в данном сечении в линии влияния Q и φ для данного сечения достаточно переменить их знаки на обратные.



Фиг. 168.



Фиг. 169.

ф) Бесконечно-длинная балка, нагруженная моментом (фиг. 169). Действие момента M_0 можно заменить парой вертикальных сил $P = \frac{M_0}{\Delta x}$ с бесконечно-малым плечом Δx . В дальнейшем для простоты,

вверху справа от буквы прогиба y угла поворота φ , момента M и попер. силы Q будем в виде показателя степени ставить значек внешней силы или момента, их вызывающих, нижним же индексом будем отмечать расстояние от рассматриваемого сечения до точки приложения силы или момента, например, обозначим y_x^M прогиб, вызываемый внешним моментом

M_0 в сечении, находящемся на расстоянии x (справа*) от точки его приложения. Тогда, пользуясь принципом независимости действия сил, можем написать:

$$y_x'' = \frac{M_0}{\Delta x} \frac{y_x^P}{P} - \frac{M_0}{\Delta x} \frac{y_{x+\Delta x}^P}{P} = -\frac{M_0}{P} \frac{y_{x+\Delta x}^P - y_x^P}{\Delta x}$$

т. е. мы в обычную формулу для прогиба от силы P должны подставить вместо P последовательно $\frac{M_0}{\Delta x}$ и $-\frac{M_0}{\Delta x}$ и результаты сложить. Таким образом:

$$y_x'' = -\frac{M_0}{P} \frac{dy^P}{dx} = -\frac{M_0}{P} \varphi_x^P = -\frac{M_0 \alpha^2}{k} e^{-\alpha x} \sin \alpha x = -\frac{M_0 \alpha^2}{k} \theta_0.$$

Аналогично:

$$M_x'' = -\frac{M_0}{P} \frac{dM^P}{dx} = -\frac{M_0}{P} Q_x^P = \frac{M_0}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = \frac{M_0}{2} \tau_0$$

$$Q_x'' = -\frac{M_0}{P} \frac{dQ^P}{dx} = -\frac{M_0}{P} p_x^P = \frac{M_0 k}{P} y_x^P =$$

$$= -\frac{M_0 \alpha}{2} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = -\frac{M_0 \alpha}{2} \eta_0$$

$$\varphi_x'' = -\frac{M_0}{P} \frac{d\varphi^P}{dx} = -\frac{M_0}{P} \frac{d^2 y^P}{dx^2} = -\frac{M_0}{P} \frac{M_x^P}{EJ} =$$

$$= -\frac{M_0}{4\alpha EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) = -\frac{M_0 \alpha^3}{k} \mu_0$$

г) Действие момента на конец балки, лежащей на сплошном упругом основании. Начало координат XOY принимаем на груженном конце балки. Аналогично предыдущему определим значение постоянных интегрирования общего уравнения (318) деформированной оси балки:

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0.$$

Значение же C_3 и C_4 найдем из условия, чтобы изгибающий момент на конце балки ($x=0$) равнялся приложенному M_0 , а поперечная сила была равна нулю: т. е.

$$\text{при } x=0 \quad y'' = \frac{M_0}{EJ} \text{ и } y''' = 0.$$

Отсюда $C_3 = -C_4 = -\frac{M_0}{2EJ\alpha^2} = -\frac{2\alpha^2}{k} M_0.$

Следовательно: $y = \frac{2\alpha^2}{k} M_0 e^{-\alpha x} [\cos \alpha x - \sin \alpha x] = \frac{2\alpha^2}{k} M_0 \mu_0.$

Аналогично: $M = M_0 \eta_0, Q = -2\alpha M_0 \theta_0, \varphi = -\frac{4\alpha^3}{k} M_0 \tau_0.$

Наибольший прогиб у нагруженного конца

$$\text{макс } y = 2\alpha^2 M_0 : k = M_0 : 2\alpha^2 EJ.$$

Тот же результат может быть получен по готовым формулам для сосредоточенной силы (327). Возьмем на балке фиг. 166 точку, соответствующую $x = \frac{\pi}{2\alpha}$, тогда по среднему из уравнений (327) Q превратится в нуль.

*) Положение слева отмечается индексом „-“.

В этом сечении будет только изгибающий момент и притом максимальный; мы получим его, полагая в первом уравнении $\alpha x = \frac{1}{2} \pi$:

$$M = -\frac{P}{4\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Если теперь в третьей из формул (327) примем величину $-\frac{P}{4\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}}$ за действующий момент M_0 и перейдем к новым координатным осям $X_1 O Y_1$, с началом координат в вышеуказанном сечении, то $x_1 = x - \frac{\pi}{2\alpha}$

и
$$y_1 = \frac{2\alpha^2}{k} M_0 e^{-\alpha x_1} [\cos \alpha x_1 - \sin \alpha x_1],$$

что и требовалось получить.

h) Затухание волн. В формулах 320, 324, 325 и 326 величины M , Q , y и φ представляют произведение показательной функции $e^{-\alpha x}$ на тригонометрические: $\sin_{\alpha x}$ и $\cos_{\alpha x}$.

Значение функции $e^{-\alpha x}$, по мере роста x , быстро убывает; $\sin_{\alpha x}$ и $\cos_{\alpha x}$ — функции периодические:

$$\begin{aligned} \sin [\alpha x + 2n\pi] &= \sin_{\alpha x}; & \cos [\alpha x + 2n\pi] &= \cos_{\alpha x} \\ \sin [\alpha x + (2n + 1)\pi] &= -\sin_{\alpha x}; & \cos [\alpha x + (2n + 1)\pi] &= -\cos_{\alpha x}, \end{aligned}$$

причем период для x (длина волны) есть $2L = \frac{2\pi}{\alpha}$.

При изменении же на длину полуволны $L = \frac{\pi}{\alpha}$, $\sin_{\alpha x}$ и $\cos_{\alpha x}$ сохраняют свою величину, только меняют знак на обратный. Очевидно, произведение $e^{-\alpha x}$ на синус и косинус дает функции волнообразного вида быстро затухающие и с той же длиной волны $2L = \frac{2\pi}{\alpha}$.

Отсюда следует, что если при данном значении x одна из функций M , Q , y или φ будет иметь значение $\Phi(x)$, то при изменении x на длину полуволны $L = \frac{\pi}{\alpha}$, она будет иметь следующее значение:

$$\Phi\left(x + \frac{\pi}{\alpha}\right) = -e^{-\pi} \Phi(x) = -0,0432 \Phi(x)$$

При изменении же x , на длину волны будет:

$$\Phi\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = +e^{-2\pi} \Phi(x) = +0,00187 \Phi(x)$$

На полторы волны соответственно:

$$\Phi\left(x + \frac{3\pi}{\alpha}\right) = -e^{-3\pi} \Phi(x) = -0,0000808 \Phi(x)$$

на две волны:

$$\Phi\left(x + \frac{4\pi}{\alpha}\right) = +e^{-4\pi} \Phi(x) = +0,00000349 \Phi(x).$$

Из рассмотрения этих формул и фиг. 168 следует:

1) Влияние сосредоточенных сил *) и внешних моментов, приложенных к балке на расстоянии, большем длины одной волны от рассматриваемого

*) а следовательно и распределенной нагрузки.

сечения, практически невелико и ими можно пренебречь, а потому при определении y , M , Q и φ для данного сечения балки принять во внимание только те силы и моменты, которые приложены на длине одной (или даже $\frac{3}{4}$) волны справа, или слева от рассматриваемого сечения.

2) Влиянием концов балки, находящихся от рассматриваемого сечения на расстоянии большем, чем длина волны, можно пренебречь и, к балке конечной длины можно применять формулы для весьма длинной балки, если расстояние от рассматриваемого сечения до концов балки будет не менее длины волны. При меньшей длине балку надо рассчитывать, как короткую.

3. Местная распределенная нагрузка. Мы можем получить здесь прогиб, рассматривая явление элементарно, как для сосредоточенного груза qdx и производя суммирование в пределах расположения нагрузки. Чтобы определить, например, прогиб в какой-нибудь точке A (фиг. 170), расположенной на расстоянии a и b от концов нагрузки ql , поместим начало координат в A и составим сумму, пользуясь выражением (319):



Фиг. 170.

$$y = - \int_0^a \frac{qdx}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) + \int_0^b \frac{qdx}{8\alpha^3 EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) =$$

$$= - \frac{q}{2k} (2 - e^{-\alpha a} \cos \alpha a - e^{-\alpha b} \cos \alpha b) = - \frac{q}{2k} [2 - (\tau_0)_a - (\tau_0)_b] \dots (330).$$

Если длины a и b велики, то второй и третий члены в скобках можно отбросить, и, приближенно, написать:

$$y = -q : k, \text{ или } q = -ky.$$

Это показывает, что вдали от концов загруженного участка нагрузка балки q как бы непосредственно передается основанию, а сама балка не изгибается. Наоборот, если $a=0$ и b — велико, то $y = -q : 2k$, т. е. прогиб концевой точки нагрузки вдвое меньше, чем прогиб точек удаленных от концов.

Для получения формул φ , M и Q , в согласии с новым определением сечения расстояниями a и $b = l - a$ от концов распределенной нагрузки q , надо брать производные по a , или по $(-b)$:

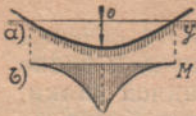
$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{dy}{da} = - \frac{dy}{db} = - \frac{q\alpha}{2k} [(\tau_0)_a - (\tau_0)_b] \\ M &= \frac{k}{4\alpha^4} \frac{d^2y}{da^2} = \frac{q}{4\alpha^2} [(\theta_0)_a + (\theta_0)_b] \\ Q &= \frac{dM}{da} = \frac{q}{4\alpha} [(\mu_0)_a - (\mu_0)_b] \end{aligned} \right\} \dots (331)$$

Само собою разумеется, что при ничтожно малой длине загруженного участка балки мы получим исходные формулы для сосредоточенного груза $P = ql$, например:

$$y = -ql\alpha : 2k \text{ (сравн. 321).}$$

4. Короткие балки. Если сосредоточенный груз находится по середине короткой балки, фиг. 171, то он вызывает местное погружение балки в основание, причем давление может передаваться также и через край балки; последний также более или менее погружается и, вообще говоря, прогиб на концах балки не будет нулем.

В таких условиях находятся опорные подушки или подферменники мостов, расположенные на каменной кладке, фундаментные плиты машин или колонны, распределяющих давление на грунт, бетонные основания и пр.



Фиг. 171.

Независимые интегрирования C определим из следующих условий: 1) изгибающий момент и 2) поперечная сила на конце балки равны нулю, 3) в точке приложения груза, посередине балки касательная к упругой линии горизонтальна и 4) поперечная сила для той же точки равна половине груза. Таким образом, и здесь в нашем распоряжении 4 условия для определения 4-х независимых интегрирования C :

$$1) \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ при } x = \frac{1}{2}l; \quad 2) \frac{d^1y}{dx^3} = 0 \text{ при } x = \frac{1}{2}l.$$

$$3) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } 4) \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P}{2EJ} \text{ при } x = 0,$$

где l — длина балки.

Взяв производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^3y}{dx^3}$ по уравнению (318) которое мы применим для правой половины балки:

$$y = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax,$$

после надлежащей подстановки, преобразуем эти четыре условия в следующие:

$$1) -C_1 e^{\frac{al}{2}} \sin \frac{al}{2} + C_2 e^{\frac{al}{2}} \cos \frac{al}{2} + C_3 e^{-\frac{al}{2}} \sin \frac{al}{2} - C_4 e^{-\frac{al}{2}} \cos \frac{al}{2} = 0$$

$$2) -C_1 e^{\frac{al}{2}} \left(\sin \frac{al}{2} + \cos \frac{al}{2} \right) + C_2 e^{\frac{al}{2}} \left(\cos \frac{al}{2} - \sin \frac{al}{2} \right) - C_3 e^{-\frac{al}{2}} \left(\sin \frac{al}{2} - \cos \frac{al}{2} \right) + C_4 e^{-\frac{al}{2}} \left(\sin \frac{al}{2} + \cos \frac{al}{2} \right) = 0$$

$$3) C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0$$

$$4) -C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = -\frac{P}{4a^3 EJ}$$

Решим уравнения; тогда после некоторых преобразований, получится:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{Pa}{4k} \left(-1 + \frac{2 + ch_{al} + cs_{al}}{sh_{al} + sn_{al}} \right) \\ C_3 &= -\frac{Pa}{2k} + C_1 = -\frac{Pa}{4k} \left(1 + \frac{2 + ch_{al} + cs_{al}}{sh_{al} + sn_{al}} \right) \\ C_2 &= -\frac{Pa}{4k} \left(1 - \frac{ch_{al} - cs_{al}}{sh_{al} + sn_{al}} \right) \\ C_4 &= -\frac{Pa}{2k} - C_3 = -\frac{Pa}{4k} \left(1 + \frac{ch_{al} - cs_{al}}{sh_{al} + sn_{al}} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (332)$$

В этих выражениях для облегчения расчетов введены гиперболические синус и косинус *), таблица числовых значений которых приводится ниже (см. табл. 335):

$$sh_{ax} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) \text{ и } ch_{ax} = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}).$$

Максимальное значение прогиба y будет под грузом P , т. е. при $x = 0$:

$$\text{макс. } y = C_1 + C_3 = -\frac{Pa}{2k} \frac{2 + ch_{al} + cs_{al}}{sh_{al} + sn_{al}} \dots \dots \dots (333)$$

так как при $ax = 0$ получается $e^{ax} = e^{-ax} = 1$, $ch_{ax} = 1$ и $sh_{ax} = 0$.

Путем разложения в ряд выражения для C приводятся к более удобной форме:

$$C_1 = -\frac{P}{2lk} \left[1 - \frac{al}{2} + \frac{(al)^4}{80} - \frac{49(al)^8}{518400} + \dots \right] \dots \dots \dots (334).$$

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= -\frac{P}{2lk} \left[1 + \frac{al}{2} + \frac{(al)^4}{80} - \frac{49(al)^8}{518400} + \dots \right] \\ C_2 &= -\frac{Pa}{4k} \left[1 - \frac{al}{2} + \frac{(al)^5}{360} - \frac{(al)^9}{45360} \dots \dots \right] \\ C_4 &= -\frac{Pa}{4k} \left[1 + \frac{al}{2} - \frac{(al)^5}{360} + \frac{(al)^9}{45360} \dots \dots \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (337).$$

Если величиной $(al)^4$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{2lk} \left(1 - \frac{al}{2} \right) & C_2 &= \frac{al}{2} C_1 = -\frac{Pa}{4k} \left(1 - \frac{al}{2} \right) \\ C_3 &= -\frac{P}{2lk} \left(1 + \frac{al}{2} \right) & C_4 &= \frac{al}{2} C_3 = -\frac{Pa}{4k} \left(1 + \frac{al}{2} \right) \end{aligned}$$

и уравнение упругой линии балки примет следующий вид:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{P}{2lk} \left[\left(1 - \frac{al}{2} \right) e^{ax} + \left(1 + \frac{al}{2} \right) e^{-ax} \right] \left(\cos_{ax} + \frac{al}{2} \sin_{ax} \right) = \\ &= -\frac{P}{lk} \left(ch_{ax} - \frac{al}{2} sh_{ax} \right) \left(\cos_{ax} + \frac{al}{2} \sin_{ax} \right), \end{aligned}$$

После разложения в ряд получим прогиб на концах балки, при $x = \pm \frac{a}{2}$

$$\text{мин. } y = -\frac{P}{lk} \left[1 - \frac{(al)^4}{192} \dots \right] \infty - \frac{P}{lk} \dots \dots \dots (338).$$

Прогиб же посередине балки, под грузом (для $x = 0$), будет:

$$\text{макс. } y = C_1 + C_3 = -\frac{P}{lk} \left[1 + \frac{(al)^4}{80} - \frac{49(al)^8}{518400} + \dots \right] \infty - \frac{P}{lk} \dots \dots (339).$$

Эти выражения показывают, что, если величина $(al)^4 = \frac{kl^4}{4EJ}$ ничтожно мала по сравнению с единицей, то реакция упругого основания равномерно распределена по длине.

*) О гиперболических функциях смотри дальше § 16,3.

Таблицы гиперболических функций. (335)

Гиперболическая функция $\text{Sinh } \varphi = \frac{1}{2} (e^\varphi - e^{-\varphi})$ для $\varphi = 0$ до 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0.0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1.0	1,1752	1907	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	116
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	2,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2.0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4117	454
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9009	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1098*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	5112	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3.0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3111	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6201	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4023*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0919*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	186
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,439	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4.0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,861	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5.0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

Гиперболическая функция $\text{Cosh } \varphi = \frac{1}{2}(e^{-\varphi} + e^{\varphi})$ для $\varphi = 0$ до 5,09.

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0.0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	90
0.1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0.2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0.3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0.4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0.5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0.6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0.7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0.8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0.9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1.0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1.1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7956	151
1.2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1.3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320	189
1.4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1.5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1.6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1.7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1.8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1.9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2.0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2.1	4,1443	1847	2256	2668	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2.2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2.3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2.4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2.5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2.6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2.7	7,4735	5479	6231	6990	7758	8533	9136	0106*	0905*	1712*	815
2.8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2.9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	998
3.0	10,0678	1683	2700	3728	4765	5813	6872	7942	9022	0113*	1102
3.1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3.2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4401*	1347
3.3	13,5748	7108	8482	9871	1273*	2689*	4120*	5565*	7024*	8498*	1489
3.4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3.5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	182
3.6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3.7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	222
3.8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3.9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4.0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4.1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4.2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4.3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4.4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4.5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4.6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4.7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4.8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4.9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5.0	74,201	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

(336) . . . Таблицы круговых функций . . . (336)

Град.	S i n u s							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199	0,03490	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	0,05234	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	0,06976	86
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426	0,08716	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164	0,10453	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898	0,12187	83
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629	0,13917	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356	0,15643	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	0,17365	80
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795	0,19081	79
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507	0,20791	78
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212	0,22495	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	0,24192	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	0,25882	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	0,27564	74
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959	0,29237	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	0,30902	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282	0,32557	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	0,34202	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	0,35837	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	0,37461	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805	0,39073	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408	0,40674	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	0,42262	65
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	0,43837	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140	0,45399	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	0,46947	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	0,48481	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	0,50000	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	0,51504	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	0,52992	58
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	0,54464	57
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	0,55919	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119	0,57358	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	0,58779	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	0,60182	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	0,61566	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	0,62932	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	0,64279	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	0,65606	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	0,66913	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	0,68200	47
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	0,69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	C o s i n u s							

Град.	C o s i n u s							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	1,00000	1,00000	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989	0,99985	89
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949	0,99939	88
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878	0,99863	87
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776	0,99756	86
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644	0,99619	85
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482	0,99452	84
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290	0,99255	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	0,99027	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	0,98769	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	0,98481	80
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	0,98163	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	0,97815	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502	0,97437	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100	0,97030	76
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	0,96593	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	0,96126	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	0,95630	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	0,95106	72
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646	0,94552	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	0,93969	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	0,93358	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	0,92718	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	0,92050	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472	0,91355	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	0,90631	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	0,89879	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	0,89101	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	0,88295	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	0,87462	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	0,86603	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	0,85717	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	0,84805	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	0,83867	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	0,82904	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	0,81915	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	0,80902	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	0,79864	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980	0,78801	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	0,77715	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	0,76604	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	0,75471	49
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	0,74314	48
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333	0,73135	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	0,71934	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	0,70711	45

60' 50' 40' 30' 20' 10' 0'

S i n u s

Γ παρ.	T a n g e n s							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201	0,03492	88
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949	0,05241	87
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700	0,06993	86
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456	0,08749	85
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216	0,10510	84
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983	0,12278	83
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758	0,14054	82
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540	0,15838	81
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333	0,17633	80
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136	0,19438	79
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952	0,21256	78
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781	0,23087	77
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624	0,24933	76
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483	0,26795	75
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360	0,28675	74
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255	0,30573	73
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171	0,32492	72
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108	0,34433	71
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068	0,36397	70
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053	0,38386	69
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065	0,40403	68
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105	0,42447	67
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175	0,44523	66
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277	0,46631	65
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414	0,48773	64
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587	0,50953	63
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798	0,53171	62
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051	0,55431	61
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348	0,57735	60
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691	0,60086	59
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083	0,62487	58
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528	0,64941	57
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028	0,67451	56
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588	0,70021	55
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211	0,72654	54
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900	0,75355	53
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661	0,78129	52
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498	0,80978	51
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415	0,83910	50
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419	0,86929	49
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515	0,90040	48
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709	0,93252	47
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	
	C o t a n g e n s							

Град.	C o t a n g e n s							
	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	S	343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009	57,28996	89
1	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,36777	31,24158	28,63625	88
2	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47040	20,20555	19,08114	87
3	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442	14,30067	86
4	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617	11,43005	85
5	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817	9,51436	84
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496	8,14435	83
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873	7,11537	82
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484	6,31375	81
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937	5,67128	80
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566	5,14455	79
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286	4,70463	78
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969	4,33148	77
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107	4,01078	76
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595	3,73205	75
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609	3,48741	74
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521	3,27085	73
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842	3,07768	72
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98869	2,96004	2,93189	2,90421	71
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254	2,74748	70
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791	2,60509	69
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597	2,47509	68
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504	2,35585	67
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374	2,24604	66
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090	2,14451	65
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553	2,05030	64
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680	1,96261	63
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400	1,88073	62
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649	1,80405	61
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375	1,73205	60
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530	1,66428	59
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074	1,60033	58
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972	1,53987	57
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190	1,48256	56
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703	1,42815	55
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484	1,37638	54
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511	1,32704	53
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764	1,27994	52
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227	1,23490	51
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882	1,19175	50
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715	1,15037	49
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713	1,11061	48
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864	1,07237	47
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158	1,03553	46
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583	1,00000	45
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	

T a n g e n s

Величину изгибающего момента получим по формуле:

$$M = EJ \cdot y'' = 2\alpha^2 EJ \left[C_1 e^{\alpha x} \sin \alpha x - C_2 e^{\alpha x} \cos \alpha x - C_3 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \cos \alpha x \right]$$

Максимальное значение изгиб. момента под грузом ($x=0$):

$$\begin{aligned} \text{макс. } M &= 2\alpha^2 EJ(C_4 - C_2) = \frac{1}{4\alpha} \frac{ch \alpha l - cs \alpha l}{sh \alpha l + sn \alpha l} P = \\ &= -\frac{Pl}{8} \left[1 - \frac{(\alpha l)^4}{180} + \frac{(\alpha l)^8}{22680} \dots \right] \dots \dots \dots (340). \end{aligned}$$

Если величиной $(\alpha l)^4$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то:

$$\text{макс. } M = -\frac{Pl}{8},$$

что соответствует равномерному восприятию упругим основанием груза P по длине балки.

С другой стороны, по мере увеличения длины балки, a , следовательно, и величины αl , неравномерность распределения давления на упругое основание увеличивается и при достижении длины $l = \frac{\pi}{\alpha}$ давление и прогиб у концов балки обращаются в нуль.

Действительно, если $l = \frac{\pi}{\alpha}$, то $\cos \alpha l = -1$ и $\sin \alpha l = 0$, а при $x = \frac{l}{2}$:

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} \text{ и по форм. (318):}$$

$$\begin{aligned} y &= C_2 e^{\frac{\pi}{2}} + C_4 e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{Pa}{4k} \left[\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}} \right) - \frac{ch \pi + 1}{sh \pi} \left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \right] = \\ &= \frac{Pa}{2k} \left[ch \frac{\pi}{2} - \frac{ch \pi + 1}{sh \pi} sh \frac{\pi}{2} \right] = \frac{Pa}{2k} \left[\cos \frac{\pi i}{2} - \frac{\cos \pi i + 1}{i \sin \pi i} i \sin \frac{\pi i}{2} \right] = \\ &= \frac{Pa}{2k} \frac{\sin \left(\pi i - \frac{\pi i}{2} \right) - \sin \frac{\pi i}{2}}{\sin \pi i} = 0 \end{aligned}$$

Максимальный же прогиб, при $l = \frac{\pi}{\alpha}$, будет:

$$\begin{aligned} \text{макс. } y &= C_1 + C_3 = \frac{Pa}{2k} \frac{2 + ch \pi + \cos \pi}{sh \pi + \sin \pi} = \frac{Pa}{2k} \frac{2 + 11,592 - 1}{11,549 + 0} = \\ &= 1,0903 \frac{Pa}{2k} \dots \dots \dots (341). \end{aligned}$$

При этом максимальное значение изгибающего момента получим:

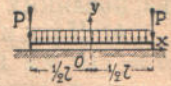
$$\text{макс. } M = -\frac{1}{4\alpha} \frac{ch \pi - \cos \pi}{sh \pi + \sin \pi} \cdot P = -\frac{1}{4\alpha} \frac{11,592 + 1}{11,549 + 0} \cdot P = -1,0903 \frac{P}{4\alpha}$$

или:
$$\text{макс. } M = -\frac{Pl}{11,52}, \dots \dots \dots (342),$$

т. е. на 9% больше, чем для бесконечно длинной балки, имеющей макс. $M = -\frac{P}{4\alpha}$ по форм. 327, и всего около 70% значения момента макс. $M = -\frac{Pl}{8}$ для очень короткой или очень жесткой балки.

5а) Балка при равномерной нагрузке q , нагруженная по концам двумя сосредоточенными силами P (фиг. 172).

Такой случай представляют балки фундаментных рост-верков, сплошная фундаментная плита под зданием, болт, запущенный в деревянный брус, если к концам болта приложены перпендикулярные силы и проч. Интенсивность p , под давлением которой находится здесь балка, составляет $-q - ky$; поэтому дифференциальное уравнение 4-го порядка придется написать в форме:



Фиг. 172.

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -q - ky$$

а общий интеграл его,—или по типу уравнения (318):

$$y = -\frac{q}{k} + C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x,$$

или, применяя гиперболические функции¹⁾:

$$y = -\frac{q}{k} + A_1 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + A_2 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + A_3 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + A_4 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \quad (343).$$

Новые независимые интегрирования будут связаны со старыми следующими условиями:

$$A_1 = C_1 + C_3, \quad A_2 = C_2 - C_4, \quad A_3 = C_1 - C_3 \quad \text{и} \quad A_4 = C_2 + C_4.$$

Принимая начало координат посредине балки, определим независимые интегрирования из следующих условий:

Во первых: упругая ось балки должна быть симметричной относительно оси OY , а так как третий и четвертый члены нарушают симметрию, изменяя знак y при перемене знака x , то должно быть:

$$A_3 = 0 \quad \text{и} \quad A_4 = 0,$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{q}{k} + A_1 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + A_2 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x \\ \varphi &= y' = \alpha(A_1 + A_2) \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + \alpha(A_2 - A_1) \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \\ M: EJ = y'' &= 2\alpha^2 A_2 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x - 2\alpha^2 A_1 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x \\ Q: EJ = y''' &= 2\alpha^3(A_2 - A_1) \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x - 2\alpha^3(A_1 + A_2) \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x \end{aligned} \right\} \dots \quad (344).$$

Коэффициенты же A_1 и A_2 определим из следующих условий: на конце балки $(x = \frac{1}{2}l)$ изгибающий момент равен нулю и поперечная сила равна $+P$. Приравняв в уравнениях (344)

$$y'' = 0 \quad \text{и} \quad y''' = -P: EJ = -4\alpha^4 P : k,$$

после решения этих двух уравнений, получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{4\alpha}{k} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{hs} \alpha l + \operatorname{sn} \alpha l} \cdot P \\ A_2 &= -\frac{4\alpha}{k} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2} \operatorname{sn} \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{sh} \alpha l + \operatorname{sn} \alpha l} \cdot P \end{aligned} \right\} \dots \quad (345).$$

¹⁾ О гиперболических функциях см. § 16.

Эти выражения совершенно не зависят от q , ибо последнее дает равномерную осадку основания, не вызывая в балке ни поперечных сил, ни изгибающих моментов.

б) Пример. Железная балка длиной 2 метра, с шириной постели $b = 110$ мм и моментом инерции $J = 3344$ см⁴ нагружена сверху равномерно-распределенной нагрузкой $q = 1$ т./м., а по концам сосредоточенными грузами $P = 5$ тонн. Коэффициент основания $k' = 24,3 \frac{\text{кг.}}{\text{см}^3}$. Так как ширина постели балки b , то на погонную ее единицу приходится $k'b$; обозначая это число буквой k , имеем:

$$k = k'b = 24,3 \cdot 11 = 267,3 \text{ кг/см}^2 \text{ и}$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{267,3}{267,5 \cdot 10^8}} = \approx \frac{1}{100} \frac{1}{\text{см}}, \text{ так что: } \frac{al}{2} = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1.$$

Берем из таблиц 335 и 336 значение круговых и гиперболических функций

$$\text{sh } \frac{al}{2} = \text{sh } 1 = 1,1752$$

$$\text{sn } \frac{al}{2} = \text{sn } 1 = \text{sn } 57^\circ 17,75' = 0,8415$$

$$\text{ch } \frac{al}{2} = \text{ch } 1 = 1,5432$$

$$\text{cs } \frac{al}{2} = \text{cs } 1 = \text{cs } 57^\circ 17,75' = 0,5403$$

$$\text{sh } al = \text{sh } 2 = 3,6269$$

$$\text{sn } al = \text{sn } 2 = \text{sn } 114^\circ 35,5' = 0,9093.$$

Подставляя эти числа в уравнения (345), последовательно получим:

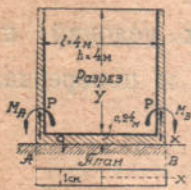
$$A_1 = - \frac{4 \cdot 0,01}{267,3} \cdot \frac{1,5431 \cdot 0,5403}{(3,6269 + 0,9093)} P = - 0,0000276P$$

$$A_2 = - \frac{4 \cdot 0,01}{267,3} \cdot \frac{1,1752 \cdot 0,8415}{3,6269 + 0,9093} P = - 0,0000326P$$

Величина максимального изгибающего момента по середине пролета

$$M_{\text{макс}} = + 2a^2 EJ A_2 = - 2 \cdot (0,01)^2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3344 \cdot 0,0000326P = - 43,6P = - 43,6 \cdot 5000 \text{ кг. см.} = - 2,18 \text{ т. м.}$$

с) Задача. Железобетонный жолоб для воды (фиг. 173) построен непосредственно на песчаном грунте, без специального фундамента.



Фиг. 173.

Определить изгибающий момент в опасном сечении дна и наибольшее давление на грунт, если коэффициент песчаного основания $k = 40 \frac{\text{кг.}}{\text{см}^3}$, вес 1 пог. метра стенки бассейна 2,6 т., объемный вес железо-бетона 2,5, модуль упругости $E_c = 2 \cdot 10^5$ кг/см² *).

Вырежем из дна полосу шириной в 1 см., как показано в плане, и будем рассматривать ее, как балку, нагруженную:

- 1) равномерной нагрузкой q по всей длине $l = 4$ м, состоящей из веса воды, высотой слоя 4 м., и собственного веса дна;
- 2) сосредоточенными силами P , равными весу стенки без веса равного ей по объему количества воды, вошедшего в распределенную нагрузку q ;
- 3) отрицательными моментами $M_A = M_B$, создаваемыми в основании стенок боковыми давлениями воды: $M_A = M_B = \frac{1}{6} \gamma h^3$.

* При расчете можно принимать, что перпендикулярно к плоскости чертежа жолоб значительной длины.

Формулы для одновременного действия нагрузок 1) и 2) уже получены в разделе 5.

Рассмотрим отдельное действие двух равных моментов $M_A = M_B$. Уравнение упругой линии дна аналогично уравнению (344), будет:

$$y = C_1 ch ax cs ax + C_2 sh ax sn ax.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определим из условий:

при $x = \frac{l}{2}$, $y'' = -M_A : EJ$; $y''' = 0$, тогда

$$C_1 = - \frac{-ch \frac{al}{2} sn \frac{al}{2} + sh \frac{al}{2} cs \frac{al}{2}}{sh al ch al + sn al cs al} \cdot \frac{4a^2}{k} M_A$$

$$C_2 = - \frac{sh u cs u + ch u sn u}{sh 2u + sn 2u} \cdot \frac{4a^2}{k} M_A, \text{ где } u = \frac{al}{2}$$

$$M = \frac{k}{2a^2} [C_2 ch ax cs ax - C_1 sh ax sn ax].$$

Остается воспользоваться принципом сложения сил:

$$q = 0,001(400 + 2,5 \cdot 24) = 0,46 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}}, \quad P = \frac{2,5 - 1,0}{2,5} \frac{2600}{100} = 15,6 \text{ кг.},$$

$$M_A = M_B = \frac{1}{6} \gamma h^3 = \frac{1}{6} \cdot 0,001 \cdot 400^3 = 10667 \text{ кг.см.}; \quad k = 40 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad J = \frac{1 \cdot 24^3}{12} = 1152 \text{ см}^4; \quad a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = 0,01445 \frac{1}{\text{см.}};$$

$al = 2u = 5,780$, что соответствует $331^\circ 10'$; $\frac{al}{2} = u = 2,890$, что соответствует $165^\circ 35'$; $sn 2x = -0,482$; $sh 2n = 161,7$; $sn u = +0,24898$; $sh u = 8,9689$; $cs u = -0,96851$; $ch u = 9,0244$.

$$A_1 = - \frac{4a}{k} \frac{ch u \cdot cs u}{sh 2u + sn 2u} \cdot P = +0,00122 \text{ см.};$$

$$A_2 = - \frac{4a}{k} \frac{sh u \cdot sn u}{sh 2u + sn u} \cdot P = -0,000312 \text{ см.}$$

$$C_1 = - \frac{4a^2}{k} \frac{sh u cs u - ch u sn u}{sh 2u + sn 2u} M_A = +72,4a^2 = +0,01512 \text{ см.};$$

$$C_2 = - \frac{4a^2}{k} \frac{sh u cs u + ch u sn u}{sh 2u + sn 2u} M_A = +42,7a^2 = +0,00891 \text{ см.}$$

Уравнение упругой линии будет:

$y = -\frac{q}{k} + (A_1 + C_1) ch ax cs ax + (A_2 + C_2) sh ax sn ax$, или после подстановки численных значений коэффициентов:

$$y = -0,0115 + 0,01634 ch ax cs ax + 0,00860 sh ax sn ax$$

А потому $M = \frac{k}{2a^2} [(A_2 + C_2) ch ax cs ax - (A_1 + C_1) sh ax sn ax] =$
 $= +822,5 ch ax cs ax - 1564 sh ax sn ax;$

$$Q = \frac{k}{2a} [(A_2 + C_2 - A_1 - C_1) sh ax cs ax - (A_1 + A_2 + C_1 + C_2) ch ax sn ax] =$$

 $= -10,72 sh ax cs ax - 34,47 ch ax sn ax.$

При $x = 0$: $y_0 = + 0,0048$ см, давление на грунт равно: $-ky = - 0,192 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2}$

$$M_0 = + 822,5 \text{ кг.см. и } Q = 0.$$

На расстоянии четверти волны от середины балки:

$$x = \frac{1}{2} L = \frac{\pi}{2\alpha} = 108,7 \text{ см.}; y = - 0,0115 + 0,00860 \text{ sh } \frac{\pi}{2} = + 0,0083 \text{ см.};$$

$$-ky = - 0,332 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2}; M = - 3600 \text{ кг. см.}; Q = - 86,5 \text{ кг.}$$

На конце балки: $x = \frac{1}{2} l = 200$ см. макс. $y = - 0,1349$ см., макс. $(-ky) = + 5,40 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2}$.

$$M_{\frac{1}{2}l} = - 10667 \text{ кг.см.} = - M_B \quad Q_{\frac{1}{2}l} = + 15,6 \text{ кг.} = + P.$$

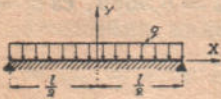
Знак $+$ у поперечной силы Q показывает, что отрицательный изгиб. момент M изменяется, подходя к концу в сторону положительных значений,—следовательно, значение момента на конце не будет максимальным. Максимальное же значение будет в сечении, для которого:

$$Q = - 10,72 \text{ sh } \alpha x \text{ cs } \alpha x - 34,47 \text{ ch } \alpha x \text{ sn } \alpha x = 0, \text{ или}$$

$$\text{tg } \alpha x : \text{tgh } \alpha x = - \frac{10,72}{34,47} = - 0,3110. \text{ Зная, что } \text{tgh } \alpha x \text{ вообще весьма близок}$$

к единице, заключаем, что значение $\text{tg } \alpha x$ должно быть близко к $- 0,311$. Последовательным подбором находим значение $x = 196,66$ см, для которого $Q = 0$ и $M = \text{макс. } M = - 10670$ кг. см.

6. Балка на двух опорах и сплошном упругом основании. а) Балка фиг. 174, нагружена равномерно распределенной нагрузкой q . Такой случай может представлять полая балка нижнего этажа, уложенная концами на стены фундамента и опирающаяся постелью на плотно подбитый грунт.



Фиг. 174.

Аналогично предыдущему случаю получаем уравнение изогнутой оси в форме (344):

$$y = - \frac{q}{k} + A_1 \text{ ch } \alpha x \text{ cs } \alpha x + A_2 \text{ sh } \alpha x \text{ sn } \alpha x.$$

Постоянные интегрирования A_1 и A_2 найдем из следующих условий: прогиб и изгибающий моменты на опоре равны нулю, т. е. при $x = \frac{l}{2}$

$$1) y = 0 \text{ и } 2) y'' = 0, \text{ или}$$

$$1) \quad - \frac{q}{k} + A_1 \text{ ch } \frac{\alpha l}{2} \text{ cs } \frac{\alpha l}{2} + A_2 \text{ sh } \frac{\alpha l}{2} \text{ sn } \frac{\alpha l}{2} = 0$$

$$2) \quad A_1 \text{ sh } \frac{\alpha l}{2} \text{ sn } \frac{\alpha l}{2} - A_2 \text{ ch } \frac{\alpha l}{2} \text{ cs } \frac{\alpha l}{2} = 0$$

Откуда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = + \frac{2q}{k} \frac{\text{ch } \frac{\alpha l}{2} \text{ cs } \frac{\alpha l}{2}}{\text{ch } \alpha l + \text{cs } \alpha l} \\ A_2 = + \frac{2q}{k} \frac{\text{sh } \frac{\alpha l}{2} + \text{sn } \frac{\alpha l}{2}}{\text{ch } \alpha l + \text{cs } \alpha l} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (346)$$

Если эти величины вставить в выражение для общего интеграла (344), вынести общий множитель $\frac{q}{k}$ за скобки, заменить k по формуле $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ через $k = 4EJ \cdot \alpha^4$, и, кроме того, для краткости письма ввести обозначение:

$$\frac{1}{2} \alpha l = u, \text{ то получится:}$$

$$y = \frac{ql^4}{64EJ\alpha^4} \left(1 - \frac{2 \sin u \operatorname{Sh} u}{\cos 2u + \operatorname{Ch} 2u} \sin \alpha x \operatorname{Sh} \alpha x - \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\cos 2u + \operatorname{Ch} 2u} \cos \alpha x \operatorname{Ch} \alpha x \right)$$

Прогиб по середине, т. е. при $x = 0$:

$$y_0 = -\frac{ql^4}{64EJ\alpha^4} \left(1 - \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\cos 2u + \operatorname{Ch} 2u} \right) \dots \dots \dots (347).$$

Сопоставляя с прогибом простой балки $f = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$, можно написать:

$$y_0 = \frac{6}{5} \frac{f}{u^4} (1 - \eta) = -\frac{q}{k} (1 - \eta) \dots \dots \dots (348)$$

$$\text{где } \eta = \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\cos 2u + \operatorname{Ch} 2u}.$$

Дифференцируя по x и применяя результат $\alpha = -\frac{1}{2} l$, получим угол поворота конца балки:

$$y' \text{ при } \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{64EJ} \frac{2 \operatorname{Sh} 2u - \sin 2u}{u^2 \operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} = -\frac{ql^3}{24EJ} \theta \dots \dots \dots (349),$$

где для простоты буквою θ обозначен множитель

$$\theta = \frac{3}{4} \frac{1}{u^3} \frac{\operatorname{Sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u}, \text{ а } -\frac{ql^3}{24EJ}$$

это угол поворота простой балки.

Для определения изгибающего момента составляем вторую производную:

$$M = EJy'' = \frac{ql^2}{4} \frac{1}{u^2} \left(\frac{\operatorname{Sh} u \cdot \sin u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} \operatorname{Ch} \alpha x \cos \alpha x - \frac{\operatorname{Ch} u \cos u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} \operatorname{Sh} \alpha x \sin \alpha x \right).$$

Момент посредине пролета, т. е. при $x = 0$:

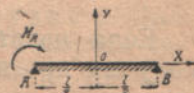
$$M_0 = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{Sh} u \sin u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} = \frac{ql^2}{8} \mu,$$

где

$$\mu = \frac{2}{u^2} \frac{\operatorname{Sh} u \sin u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} \dots \dots \dots (350).$$

Численные значения коэффициентов η , θ и μ могут быть взяты из готовой таблицы, предварительно составленной для встречающихся значений u (см. ниже).

б) Балка нагружена опорным моментом M_A по фиг. 175.



Фиг. 175.

В виду отсутствия симметрии нагрузки задача значительно усложняется по сравнению с предыдущими, и приходится определять все 4 коэффициента уравнения изогнутой оси балки:

$$y = A_1 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x + A_2 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + A_3 \operatorname{cs} \alpha x \operatorname{sh} \alpha x + A_4 \operatorname{sn} \alpha x \operatorname{ch} \alpha x$$

Таблица коэффициентов для балок на сплошном упругом основании *) (351).

$\frac{\alpha l}{2} = u$	η для форм. 348	η_1 для форм. 366	μ для форм. 350	μ_1 для форм. (365)	μ_2 для форм. 356	θ для форм. 349	τ для форм. 353	τ_1 для форм. 354
0.1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0.2	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999
0.3	0,993	0,999	0,995	0,999	0,999	0,995	0,997	0,994
0.4	0,979	0,996	0,983	0,996	0,997	0,983	0,990	0,980
0.5	0,950	0,990	0,959	0,991	0,993	0,961	0,976	0,953
0.6	0,901	0,979	0,919	0,982	0,985	0,923	0,951	0,906
0.7	0,827	0,961	0,859	0,967	0,973	0,866	0,916	0,838
0.8	0,731	0,935	0,781	0,946	0,956	0,791	0,868	0,747
0.9	0,619	0,899	0,689	0,917	0,931	0,702	0,812	0,641
1.0	0,498	0,852	0,591	0,878	0,899	0,609	0,752	0,529
1.1	0,380	0,795	0,494	0,830	0,859	0,517	0,692	0,420
1.2	0,272	0,728	0,405	0,774	0,813	0,431	0,636	0,321
1.3	0,178	0,653	0,327	0,712	0,761	0,357	0,586	0,237
1.4	0,100	0,573	0,262	0,645	0,705	0,294	0,542	0,167
1.5	0,037	0,492	0,208	0,576	0,648	0,242	0,503	0,114
1.6	-0,013	0,411	0,164	0,509	0,591	0,200	0,470	0,073
1.7	-0,052	0,335	0,129	0,444	0,537	0,166	0,442	0,042
1.8	-0,081	0,264	0,101	0,384	0,486	0,138	0,417	0,021
1.9	-0,102	0,201	0,079	0,328	0,439	0,116	0,394	0,006
2.0	-0,117	0,144	0,062	0,279	0,397	0,099	0,375	-0,003
2.2	-0,133	0,054	0,037	0,197	0,325	0,072	—	—
2.4	-0,135	-0,009	0,021	0,136	0,269	0,055	—	—
2.6	-0,127	-0,051	0,011	0,092	0,226	0,043	—	—
2.8	-0,114	-0,074	0,005	0,060	0,193	0,034	—	—
3.0	-0,098	-0,085	0,002	0,038	0,167	0,028	—	—
3.2	-0,081	-0,087	0,000	0,023	0,146	0,023	—	—
3.4	-0,064	-0,082	-0,001	0,012	0,129	0,019	—	—
3.6	-0,049	-0,073	-0,002	0,006	0,115	0,016	—	—
3.8	-0,035	-0,063	-0,002	0,002	0,104	0,014	—	—
4.0	-0,024	-0,052	-0,002	-0,001	0,094	0,012	—	—

При прежнем положении осей имеем следующие 4 условия для определения независимых интегрирования:

При $x = \frac{l}{2}$ должно быть: 1) $y = 0$ и 2) $y'' = 0$

При $x = -\frac{l}{2}$ должно быть: 3) $y = 0$ и 4) $y'' = M_A : EJ$.

Из этих условий, сохраняя обозначение $\alpha l : 2 = u$, найдем:

$$A_1 = -\frac{M_A l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sn} u}{\operatorname{ch} 2u + \operatorname{cs} 2u}, \quad A_2 = \frac{M_A l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{cs} u}{\operatorname{ch} 2u + \operatorname{cs} 2u},$$

$$A_3 = -\frac{M_A l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{cs} u}{\operatorname{ch} 2u - \operatorname{cs} 2u}, \quad A_4 = \frac{M_A l^2}{8EJ} \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{ch} u \operatorname{sn} u}{\operatorname{ch} 2u - \operatorname{cs} 2u}.$$

Если подставить эти A в выражениях для y и подставить $x = 0$, то получим прогиб по середине:

$$y_0 = -\frac{M_A l^2}{8EJ} \mu, \quad \text{где } \mu = \frac{1}{u^2} \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{sn} u}{\operatorname{ch} 2u + \operatorname{cs} 2u} \dots \dots \dots (352)$$

*) Заимствована у С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, 1916 г., стр. 12. Третий и пятый столбцы будут использованы впоследствии (см. форм. 366 и 365).

Из производной получим углы поворота опорных сечений:

$$\varphi_A = -\frac{M_A l}{3EJ} \tau, \text{ где } \tau = \frac{3}{2} \frac{\text{sh } 2u - \sin 2u}{\text{ch } 2u - \cos 2u} \dots \dots \dots (353)$$

$$\varphi_B = +\frac{M_A l}{6EJ} \tau_1, \text{ где } \tau_1 = \frac{6}{u} \frac{\text{ch } u \sin u - \text{sh } u \cos u}{\text{ch } 2u - \cos 2u} \dots \dots \dots (354)$$

Изгибающие моменты дает вторая производная. Для середины пролета получим:

$$M_0 = EJy'' = \frac{1}{2} \cdot M_A \tau, \text{ где } \tau = \frac{2 \text{ch } u \cos u}{\text{ch } 2u + \cos 2u} \dots \dots \dots (355)$$

с) Таблицы. Расчетные величины балки на упругом основании выражаются через известные уже формулы простой балки, но помноженные на выражения, зависящие от α , т. е. от коэффициента основания k жесткости балки. Эти выражения могут быть вычислены предварительно для разных типов основания. Составляя из них таблицу, можно значительно упростить практическую сторону расчета балок. Ниже приводится таблица тех выражений, которые выше встречались и были обозначены буквами η , μ , τ и проч. Пользование таблицей просто: по условиям основания k и балки EJ вычисляют

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \text{ и } \frac{1}{2} \alpha l = u;$$

находят подходящее число в первом столбце таблицы и в строке этого числа выбирают соответствующие по названию коэффициенты η , μ , τ и проч. Остается на выбранный коэффициент умножить значение расчетной величины простой балки, как требуется соответствующей формулой.

7. Неразрезные балки. Вопрос о неразрезных и защемленных балках на упругом основании разрешается таким же образом, как в балках, не поддерживаемых основанием. Мы имеем формулы для тех отдельных влияний, из которых складываются внешние силы защемленной и неразрезной балки, и можем воспользоваться принципом сложения.

а) **Защемленная балка.** Рассмотрим случай балки с защемленными концами при равномерно распределенной нагрузке. Обозначая, по предыдущему, реактивный опорный момент M_A , мы напомним, что угол поворота конца балки, по формулам (349, 353, 354) от равномерной нагрузки и опорных моментов равен нулю:

$$\frac{ql^3}{24EJ} \theta + \frac{M_A l}{3EJ} \tau + \frac{M_B l}{6EJ} \tau_1 = 0, \text{ где по симметрии } M_B = M_A = M.$$

Отсюда определим:

$$M_A = -\frac{ql^2}{4} \frac{\theta}{2\tau + \tau_1} = -\frac{ql^2}{12} \frac{3}{2u^2} \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} = -\frac{ql^2}{12} \mu_2, \\ \text{где } \mu_2 = \frac{3}{2u^2} \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} \dots \dots \dots (356).$$

б) **Неразрезная балка при равномерной нагрузке q .** Для неразрезной балки напомним, что не должно быть взаимного поворота частей балки, разрезанной над какой-нибудь N -ой опорой, иначе сказать, что поворот левой части балки равняется повороту правой. Сохраняя прежние обозначения, имеем для правого конца n -го пролета:

$$\varphi_n = \varphi'_{\text{пр}} \text{ при } x = l_n = -\frac{ql_n^3}{24EJ} \theta_n - \frac{M_{n-1} l_n}{6EJ} \tau_{1n} - \frac{M_n l_n}{3EJ} \tau_n.$$

Точно также для левого конца $(n+1)$ пролета:

$$\sigma_{n+1} = y'_{\text{при } x=0} = \frac{ql_{n+1}^3}{24EJ} \theta_{n+1} + \frac{M_n l_{n+1}}{3EJ} \tau_{n+1} + \frac{M_{n+1} l_{n+1}}{6EJ} \tau_{1(n+1)}.$$

Сравнивая — β_n и α_{n+1} , получим:

$$\begin{aligned} & M_n (l_n \tau_n + l_{n+1} \tau_{n+1}) = \\ & = -\frac{1}{2} (M_{n-1} l_n \tau_{1n} + M_{n+1} l_{n+1} \tau_{1(n+1)}) - \frac{ql_n^3}{8} \theta_n - \frac{ql_{n+1}^3}{8} \theta_{n+1} \dots (357). \end{aligned}$$

Мы пришли к обобщенной формуле для трех моментов. Такие выражения составляются по числу промежуточных опор. Поэтому их всегда будет достаточно для неразрезной балки с концевыми опорами на шарнирах. Если же концы балки зашпелены, то для них по условию зашпеления также составляются два дополнительных уравнения.

8. Гиперболические функции. В предыдущем разделе 4,а были применены гиперболические функции. Пользование этими функциями во многих случаях приводит к упрощениям; поэтому здесь сообщаются о них краткие сведения.

а) Из курсов математического анализа, известны следующие формулы, связывающие тригонометрические функции с основанием натуральных логарифмов, числом e :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{формула Эйлера}) \text{ и}$$

вытекающие из нее: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ и $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, а также разложения $\sin x$ и $\cos x$ в ряды:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots;$$

производные по аргументу $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$; $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.

Гиперболические функции были введены по аналогии с тригонометрическими:

$$\text{sinus hiperbolicus } x, \text{ или } \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ и}$$

$$\text{cosinus hiperbolicus } x, \text{ или } \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Их разложения в ряд:

$$\text{sh } x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Последние равенства показывают, что $\text{sh } x$ — четная, а $\text{ch } x$ — нечетная функции от x , а именно, что:

$$\text{sh}(-x) = -\text{sh } x \text{ и } \text{ch}(-x) = \text{ch}(x).$$

Производные $\frac{d}{dx}(\text{sh } x) = \text{ch } x$ и $\frac{d}{dx}(\text{ch } x) = \text{sh } x$.

Формулы, связывающие гиперболические функции с тригонометрическими:

$$\operatorname{sh} x = -i \operatorname{sn} ix \text{ и } \operatorname{ch} x = \operatorname{cs} ix;$$

откуда

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sn}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x - \operatorname{cs} 2x),$$

$$\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sn}^2 x = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2x + \operatorname{cs} 2x - 2).$$

b) На основании этих зависимостей составляются ряды, служащие для вычисления выражений с гиперболическими функциями, наиболее часто встречающихся в теории балок на упругом основании:

$$\operatorname{sn} x + \operatorname{sh} x = 2 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots \right) = 2x + \frac{x^5}{60} + \frac{x^9}{181440} + \dots,$$

$$\operatorname{sn} x - \operatorname{sh} x = -2 \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{15}}{15!} + \dots \right) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{2520} - \frac{x^{11}}{19958400} - \dots,$$

$$\operatorname{cs} x + \operatorname{ch} x = 2 \left(1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right) = 2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{20160} + \dots,$$

$$\operatorname{cs} x - \operatorname{ch} x = -2 \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \dots \right) = -\frac{x^2}{1} - \frac{x^6}{360} - \frac{x^{10}}{1814400} - \dots;$$

а также для выражений:

$$\operatorname{cs} x \operatorname{ch} x = 1 - \frac{4x^4}{4!} + \frac{16x^8}{8!} - \frac{64x^{12}}{12!} + \dots = 1 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^8}{2520} - \dots$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} (\operatorname{cs} x \operatorname{ch} x) &= \operatorname{sn} x \operatorname{ch} x - \operatorname{cs} x \operatorname{sh} x = \frac{4x^3}{3!} - \frac{16x^7}{7!} + \frac{64x^{11}}{11!} - \dots = \\ &= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^7}{315} + \frac{x^{11}}{623700} - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{sn} x \operatorname{ch} x - \operatorname{cs} x \operatorname{sh} x) &= \operatorname{sn} x \operatorname{sh} x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^6}{6!} + \frac{32x^{10}}{10!} - \dots = x^2 - \frac{x^6}{90} + \\ &+ \frac{x^{10}}{113400} - \dots, \quad \frac{d}{dx} (\operatorname{sn} x \operatorname{sh} x) = \operatorname{sn} x \operatorname{sh} x + \operatorname{cs} x \operatorname{sh} x = \frac{2x}{1!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{32x^9}{9!} - \dots = \\ &= 2x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^9}{11340} - \dots, \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\operatorname{sn} x \operatorname{ch} x + \operatorname{cs} x \operatorname{sh} x) = \operatorname{cs} x \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

В дальнейшем введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= \operatorname{cs} ax \operatorname{ch} ax \\ \mathfrak{B}_x &= \frac{1}{2} (\operatorname{sn} ax \operatorname{ch} ax + \operatorname{cs} ax \operatorname{sh} ax) \\ \mathfrak{C}_x &= \frac{1}{2} \operatorname{sn} x \operatorname{ch} x \\ \mathfrak{D}_x &= \frac{1}{4} (\operatorname{sn} ax \operatorname{ch} ax - \operatorname{cs} ax \operatorname{sh} ax) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (358)$$

Таблицы значений этих гиперболо-тригонометрических функций \mathcal{M}_x , \mathcal{B}_x , \mathcal{C}_x и \mathcal{D}_x в зависимости от значения аргумента αx приводятся в разделе 9*). Функции эти обладают следующим замечательным свойством:

$$\frac{d\mathcal{D}_x}{dx} = \alpha\mathcal{C}_x, \quad \frac{d\mathcal{C}_x}{dx} = \alpha\mathcal{B}_x, \quad \frac{d\mathcal{B}_x}{dx} = \alpha\mathcal{M}_x, \quad \frac{d\mathcal{M}_x}{dx} = -4\alpha\mathcal{D}_x, \quad \dots \quad (359)$$

или
$$\frac{d^4\mathcal{C}_x}{dx^4} = \alpha \frac{d^3\mathcal{C}_x}{dx^3} = \alpha^2 \frac{d^2\mathcal{B}_x}{dx^2} = \alpha^3 \frac{d\mathcal{D}_x}{dx} = -4\alpha^4\mathcal{D}_x.$$

Аналогично:
$$\frac{d^4\mathcal{C}_x}{dx^4} = -4\alpha^4\mathcal{C}_x, \quad \frac{d^4\mathcal{B}_x}{dx^4} = -4\alpha^4\mathcal{B}_x, \quad \frac{d^4\mathcal{M}_x}{dx^4} = -4\alpha^4\mathcal{M}_x$$

с) Общий интеграл дифференциального уравнения изогнутой оси балки на упругом основании:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky, \quad \text{или} \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = -4d^4 y,$$

в согласии с формулами (318 и 343) предыдущего раздела можно написать, руководствуясь обозначениями (358) в форме:

$$y = C_1\mathcal{M}_x + C_2\mathcal{B}_x + C_3\mathcal{C}_x + C_4\mathcal{D}_x.$$

Тогда:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \alpha [C_2\mathcal{M}_x + C_3\mathcal{B}_x + C_4\mathcal{C}_x - 3C_1\mathcal{D}_x],$$

$$M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{4\alpha^4} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{4\alpha^2} [C_3\mathcal{M}_x + C_4\mathcal{B}_x - 4C_1\mathcal{C}_x - 4C_2\mathcal{D}_x], \quad \dots \quad (360)$$

$$Q = EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{k}{4\alpha^4} \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{k}{4\alpha} [C_4\mathcal{M}_x - 4C_1\mathcal{B}_x - 4C_2\mathcal{C}_x - 4C_3\mathcal{D}_x],$$

при чем проверкой правильности интегрирования служат:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{k}{4\alpha^4} \frac{d^4 y}{dx^4} = -k [C_1\mathcal{M}_x + C_2\mathcal{B}_x + C_3\mathcal{C}_x + C_4\mathcal{D}_x] = -ky.$$

9. Таблицы гиперболо-тригонометрических функций. а) Эти таблицы дают величины функций \mathcal{M} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} для значений аргумента αx от 0 и до 9,5 через каждую 0,1 согласно формулам (358). Интерполяционные формулы для нахождения этих функций при значениях аргумента αx , определенных с точностью 0,01, приводятся ниже.

б) Интерполяционные формулы. Если нужно вычислить функции для значения аргумента, определенного с точностью до 0,01, то пользуются следующими интерполяционными формулами: **)

$$\Delta_h \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_{x+\frac{h}{\alpha}} - \mathcal{M}_x = -4h\mathcal{D}_x - 2h^2\mathcal{C}_x - \frac{2}{3} h^3\mathcal{B}_x - \frac{1}{6} h^4\mathcal{M}_x$$

$$\Delta_h \mathcal{B}_x = \mathcal{B}_{x+\frac{h}{\alpha}} - \mathcal{B}_x = h\mathcal{M}_x - 2h^2\mathcal{D}_x - \frac{2}{3} h^3\mathcal{C}_x - \frac{1}{6} h^4\mathcal{B}_x$$

$$\Delta_h \mathcal{C}_x = \mathcal{C}_{x+\frac{h}{\alpha}} - \mathcal{C}_x = h\mathcal{B}_x + \frac{1}{2} h^2\mathcal{M}_x - \frac{2}{3} h^3\mathcal{D}_x - \frac{1}{6} h^4\mathcal{C}_x$$

$$\Delta_h \mathcal{D}_x = \mathcal{D}_{x+\frac{h}{\alpha}} - \mathcal{D}_x = h\mathcal{C}_x + \frac{1}{2} h^2\mathcal{B}_x + \frac{1}{6} h^3\mathcal{M}_x - \frac{1}{6} h^4\mathcal{D}_x.$$

*) См. Zimmermann „Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues 1888; Проф. Толстопятов Циммермановский метод“ 1905. Hayashi Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage 1921 Проф. Н. П. Пузыревский „Расчеты фундаментов“ Выпуск 3. 1923 г. Г. Д. Дутов „Расчет балок на упругом основании 1923 г.

***) При изменении αx на h , x изменяется на $\frac{h}{\alpha}$.

Продолжение табл. коэффициентов.

αx	$\sin \alpha x \cosh \alpha x$	$\frac{\sin \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\sin \alpha x \cosh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \cosh \alpha x}{2}$	αx	$\frac{\sin \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\sin \alpha x \cosh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \cosh \alpha x}{2}$	$\frac{\sin \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\sin \alpha x \cosh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \sinh \alpha x}{2}$	$\frac{\cos \alpha x \cosh \alpha x}{2}$
4.8	5.3164	—	—	—	—	7.2	30.2589	—	—	—	469.4772	31.02805	—	—
4.9	12.5239	—	—	—	—	7.3	32.9814	—	—	—	509.41565	60.0189	—	—
5.0	21.0504	—	—	—	—	7.4	35.57745	—	—	—	546.93425	94.1019	—	—
5.1	30.9997	—	—	—	—	7.5	37.96185	—	—	—	580.67095	133.6506	—	—
5.2	42.4661	—	—	—	—	7.6	40.0350	—	—	—	609.0402	179.00345	—	—
5.3	55.5317	—	—	—	—	7.7	41.68225	—	—	—	630.22945	230.44115	—	—
5.4	70.2637	—	—	—	—	7.8	42.77265	—	—	—	642.1535	288.16805	—	—
$\frac{7\pi}{4}$	86.3223	—	—	—	—	$\frac{5\pi}{2}$	43.1597	—	—	—	643.9927	321.99635	—	—
5.5	86.7044	—	—	—	—	7.9	43.15925	—	—	—	642.58715	352.3123	—	—
5.6	104.8987	—	—	—	—	8.0	42.67745	—	—	—	628.8779	422.8713	—	—
5.7	124.7352	—	—	—	—	8.1	41.14335	—	—	—	598.23435	499.7008	—	—
5.8	146.2448	—	—	—	—	8.2	38.32395	—	—	—	547.5808	582.49745	—	—
5.9	169.2837	—	—	—	—	8.3	34.1198	—	—	—	478.5993	670.7544	—	—
6.0	193.6813	—	—	—	—	8.4	28.2116	—	—	—	372.78655	763.7226	—	—
6.1	219.2004	—	—	—	—	8.5	20.3042	—	—	—	241.41355	860.3917	—	—
6.2	245.5231	—	—	—	—	8.6	10.2356	—	—	—	75.6088	959.44835	—	—
2π	267.7468	—	—	—	—	$\frac{11\pi}{4}$	0	—	—	—	0.0001	998.75525	—	—
6.3	272.2487	—	—	—	—	8.7	2.28885	—	—	—	128.58235	1059.2289	—	—
6.4	298.8909	—	—	—	—	8.8	17.5862	—	—	—	375.1167	1156.18385	—	—
6.5	324.7861	—	—	—	—	8.9	35.77125	—	—	—	667.9794	1252.35606	—	—
6.6	349.2554	—	—	—	—	9.0	57.2528	—	—	—	1010.87995	1340.3007	—	—
6.7	371.4244	—	—	—	—	9.1	82.2255	—	—	—	1407.3690	1418.0930	—	—
6.8	390.2974	—	—	—	—	9.2	110.9937	—	—	—	1860.5865	1481.76105	—	—
6.9	404.7145	—	—	—	—	9.3	143.4927	—	—	—	2372.94855	1526.7884	—	—
7.0	413.3762	—	—	—	—	9.4	180.1191	—	—	—	2946.2708	1548.0229	—	—
$\frac{9\pi}{4}$	415.2447	—	—	—	—	3π	207.62205	—	—	—	3097.91195	1548.9560	—	—
7.1	414.8263	—	—	—	—	9.5	220.87175	—	—	—	3581.47555	1539.7669	—	—
		—	—	—	—			—	—	—			—	—

Для удобства пользования этими формулами запишем их для следующих 5-ти частных случаев:

$$\Delta_{\pm 0,01} \mathcal{M}_x = \mp 0,04 \mathcal{D}_x - 0,0002 \mathcal{C}_x \mp \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{B}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,02} \mathcal{M}_x = \mp 0,08 \mathcal{D}_x - 0,0008 \mathcal{C}_x \mp \frac{16}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{B}_x - \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{M}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,03} \mathcal{M}_x = \mp 0,12 \mathcal{D}_x - 0,0018 \mathcal{C}_x \mp 18 \cdot 10^{-6} \mathcal{B}_x - 13,5 \cdot 10^{-8} \mathcal{M}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,04} \mathcal{M}_x = \mp 0,16 \mathcal{D}_x - 0,0032 \mathcal{C}_x \mp \frac{128}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{B}_x - \frac{128}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{M}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,05} \mathcal{M}_x = \mp 0,20 \mathcal{D}_x - 0,0050 \mathcal{C}_x \mp \frac{250}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{B}_x - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \mathcal{M}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,01} \mathcal{B}_x = \pm 0,01 \mathcal{M}_x - 0,0002 \mathcal{D}_x \mp \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{C}_x -$$

$$\Delta_{\pm 0,02} \mathcal{B}_x = \pm 0,02 \mathcal{M}_x - 0,0008 \mathcal{D}_x \mp \frac{16}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{C}_x - \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{B}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,03} \mathcal{B}_x = \pm 0,03 \mathcal{M}_x - 0,0018 \mathcal{D}_x \mp 18 \cdot 10^{-6} \mathcal{C}_x - 13,5 \cdot 10^{-8} \mathcal{B}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,04} \mathcal{B}_x = \pm 0,04 \mathcal{M}_x - 0,0032 \mathcal{D}_x \mp \frac{128}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{C}_x - \frac{128}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{B}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,05} \mathcal{B}_x = \pm 0,05 \mathcal{M}_x - 0,0050 \mathcal{D}_x \mp \frac{250}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{C}_x - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \mathcal{B}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,01} \mathcal{C}_x = \pm 0,01 \mathcal{B}_x + 0,00005 \mathcal{M}_x \mp \frac{2}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{D}$$

$$\Delta_{\pm 0,02} \mathcal{C}_x = \pm 0,02 \mathcal{B}_x + 0,00020 \mathcal{M}_x \mp \frac{16}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{D}_x - \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{C}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,03} \mathcal{C}_x = \pm 0,03 \mathcal{B}_x + 0,00045 \mathcal{M}_x \mp 18 \cdot 10^{-6} \mathcal{D}_x - 13,5 \cdot 10^{-8} \mathcal{C}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,04} \mathcal{C}_x = \pm 0,04 \mathcal{B}_x + 0,00080 \mathcal{M}_x \mp \frac{128}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{D}_x - \frac{128}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{C}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,05} \mathcal{C}_x = \pm 0,05 \mathcal{B}_x + 0,00125 \mathcal{M}_x \mp \frac{250}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{D}_x - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \mathcal{C}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,01} \mathcal{D}_x = \pm 0,01 \mathcal{C}_x + 0,00005 \mathcal{B}_x \pm \frac{1}{6} \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,02} \mathcal{D}_x = \pm 0,02 \mathcal{C}_x + 0,00020 \mathcal{B}_x \pm \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_x - \frac{8}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{D}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,03} \mathcal{D}_x = \pm 0,03 \mathcal{C}_x + 0,00045 \mathcal{B}_x \pm 4,5 \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_x - 13,5 \cdot 10^{-8} \mathcal{D}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,04} \mathcal{D}_x = \pm 0,04 \mathcal{C}_x + 0,00080 \mathcal{B}_x \pm \frac{32}{3} \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_x - \frac{128}{3} \cdot 10^{-8} \mathcal{D}_x$$

$$\Delta_{\pm 0,05} \mathcal{D}_x = \pm 0,05 \mathcal{C}_x + 0,00125 \mathcal{B}_x \pm \frac{125}{6} \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_x - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \mathcal{D}_x$$

с) Примеры пользования интерполяционными формулами:

1. Найти величины функций \mathcal{M}_x , \mathcal{B}_x , \mathcal{C}_x и \mathcal{D}_x для значения аргумента $ax = 0,95$. Берем из таблиц при $ax_1 = 0,90$: $\mathcal{M}_{x_1} = 0,8908$, $\mathcal{B}_{x_1} = 0,88035$, $\mathcal{C}_{x_1} = 0,40205$ и $\mathcal{D}_{x_1} = 0,1211$. Тогда получим для $ax = 0,95$.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x &= 0,8908 - 0,2 \times 0,1211 - 0,005 \times 0,40205 - \frac{250}{3} \cdot 10^{-6} \cdot 0,88035 - \\ &- \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \cdot 0,8908 = \approx 0,8908 - 0,02422 - 0,00201^*) = 0,8646. \end{aligned}$$

*) Следующие члены по малости отбрасываем.

$$\mathfrak{B}_x = 0,88035 + 0,05 \times 0,8908 - 0,005 \times 0,1211 - \frac{250}{3} \cdot 10^{-6} \times 0,40205 - \\ - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \times 0,88035 = \approx 0,88035 + 0,04454 - 0,00060^*) \approx 0,9243.$$

$$\mathfrak{C}_x = 0,40205 + 0,05 \times 0,88035 + 0,00125 \times 0,8908 - \frac{250}{3} 10^{-6} \times 0,1211 - \\ - \frac{625}{6} \cdot 10^{-8} \times 0,40205 = 0,40205 + 0,044009 + 0,001126 - 0,000008^*) \approx 0,44715.$$

$$\mathfrak{D}_x = 0,1211 + 0,05 \times 0,40205 + 0,00125 \times 0,88035 + \frac{125}{6} 10^{-6} \times 0,8908 - \\ - \frac{625}{6} 10^{-8} \times 0,1211 = \approx 0,1211 + 0,02010 + 0,00110 - 0,00002^*) \approx 0,1423.$$

§ 17. Метод начальных условий. Он состоит в том, что текущие значения прогиба y , угла поворота φ , момента M и поперечной силы Q пишут, как функции частного значения этих величин для одного определенного сечения. При этом достаточно из четырех уравнений (360) определить значения независимых интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 через частные значения y_a, φ_a, M_a и Q_a . Польза такого преобразования уравнений (360) будет ясна на следующем примере:

1. Пример. Дана короткая балка. Моменты и поперечные силы на ее концах имеют обычно или нулевые или, если и отличные от нуля, то вполне определенные значения M_0, Q_0, M_1 и Q_1 . Выбрав за начальное сечение левый конец балки ($x=0$), пишем текущие выражения M, Q, φ и y , как функции от известных M_0 и Q_0 и неизвестных пока φ_0 и y_0 . Переходя к другому концу балки ($x=l$) и написав для него выражения M и Q через φ_0 и y_0 и приравнявая их известным конечным M_1 и Q_1 , получим два линейных уравнения, из которых легко



Фиг. 176.

найдутся φ_0 и y_0 , после чего все текущие выражения для M, Q, φ и y получат вполне определенное значение и вычисление их для любого сечения не представит затруднений. Покажем это на примере балки, нагруженной рядом сосредоточенных сил и моментов (фиг. 176). Определим независимые величины C для первого участка (между P_0 и P_1), поместив начало координат на левый конец балки, в точку O .

Тогда, для $x=0$: $\mathfrak{M}_0 = 1$, а $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{D}_0 = 0$,

откуда: $y_0 = C_1, \varphi_0 = aC_2, M_0 = \frac{k}{4a^2} C_3$ и $Q_0 = -P_0 = \frac{k}{4a} C_4$

или: $C_1 = y_0, C_2 = \frac{1}{a} \varphi_0, C_3 = \frac{4a^2}{k} M_0$ и $C_4 = \frac{4a}{k} Q_0 = -\frac{4a}{k} P_0$.

Таким образом, для первого участка получаем:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 \mathfrak{M}_x + \frac{1}{a} \varphi_0 \mathfrak{B}_x + \frac{4a^2}{k} M_0 \mathfrak{C}_x - \frac{4a}{k} P_0 \mathfrak{D}_x \\ \varphi &= \varphi_0 \mathfrak{M}_x + \frac{4a^3}{k} M_0 \mathfrak{B}_x - \frac{4a^2}{k} P_0 \mathfrak{C}_x - 4ay_0 \mathfrak{D}_x \\ M &= M_0 \mathfrak{M}_x - \frac{1}{a} P_0 \mathfrak{B}_x - \frac{k}{a^2} y_0 \mathfrak{C}_x - \frac{k}{a^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_x \\ Q &= -P_0 \mathfrak{M}_x - \frac{k}{a} y_0 \mathfrak{B}_x - \frac{k}{a^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_x - 4aM_0 \mathfrak{D}_x \end{aligned} \right\} \dots \dots (362)$$

*) Следующие члены по малости отбрасываем.

Рассуждая аналогично, придем к следующим формулам для любого сечения балки:

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 \mathfrak{M}_x + \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{B}_x + \frac{4\alpha^2}{k} \Sigma M \mathfrak{C}_m - \frac{4\alpha}{k} \Sigma P \mathfrak{D}_r \\ \varphi &= \varphi_0 \mathfrak{M}_x + \frac{4\alpha^3}{k} \Sigma M \mathfrak{B}_m - \frac{4\alpha^2}{k} \Sigma P \mathfrak{C}_r - 4\alpha y_0 \mathfrak{D}_x \\ M &= \Sigma M \mathfrak{M}_m - \frac{1}{\alpha} \Sigma P \mathfrak{B}_r - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_x - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_x \\ Q &= -\Sigma P \mathfrak{M}_r - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathfrak{B}_x - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_x - 4\alpha \Sigma M \mathfrak{D}_m \end{aligned} \right\} \dots (364).$$

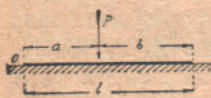
Суммы Σ в этих выражениях взяты для всех внешних сил P и внешних моментов M , лежащих левее данного сечения.

Индексы r и m , поставленные под символами гиперβολо-тригонометрических функций \mathfrak{M} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} и \mathfrak{D} , показывают, что эти функции надо брать для x -ов, равных расстояниям r или m от данного сечения до точек приложения соответствующих сил P или моментов M . Пользуясь формулами (364), нетрудно составить уравнения для нахождения неизвестных начального сечения. Поясним вышесказанное на примерах.

2. Короткая балка, несимметрично нагруженная сосредоточенной силой (фиг. 177). Моменты и перерезыв. силы на концах балки равны нулю:

$$M_0 = 0, Q_0 = 0, M_1 = 0, Q_1 = 0;$$

следовательно по (364):



$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{\alpha} P \mathfrak{B}_b - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_1 - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_1 = 0, \\ Q_1 &= -P \cdot \mathfrak{M}_b - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathfrak{B}_1 - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_1 = 0. \end{aligned} \right\} \dots (365)$$

Фиг. 177.

Решая эти два уравнения, получим неизвестные:

$$-\frac{k}{\alpha} y_0 = P \frac{\mathfrak{B}_b \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{M}_b \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1} \text{ и } -\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 = P \frac{\mathfrak{M}_b \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_b \mathfrak{M}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1}.$$

Пользуясь таблицами гиперβολо-тригонометрических функций \mathfrak{M} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} и \mathfrak{D} (361), находим численные значения начальных коэффициентов:

$-\frac{k}{\alpha} y_0$ и $-\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0$ и подставляем их в формулы (364).

Наибольшего значения M , Q и реакция упругого основания $p = -ky$ достигнут в сечении балки, находящемся под грузом.

Численный пример. Пусть коэффициент основания, жесткость и длина балки имеют такие значения, что $al = 9,00$, $aa = 6,00$ и $ab = 3,00$.

Берем из таблицы 361 (с округлением) соответствующие значения гиперβολо-тригонометрических функций:

$$\mathfrak{M}_{b=3} = -9\,967, \mathfrak{B}_{b=3} = -4,248, \mathfrak{C}_{b=3} = 0,7068 \text{ и } \mathfrak{D}_{b=3} = 2,835$$

$$\mathfrak{M}_{1=9} = -3691,5, \mathfrak{B}_{1=9} = -1010,9, \mathfrak{C}_{1=9} = 834,9 \text{ и } \mathfrak{D}_{1=9} = 1340,3.$$

После чего находим:

$$-\frac{k}{\alpha} y_0 = \frac{-4,248 \cdot 834,9 + 9,967 \cdot 1340,3}{834,9^2 + 1010,9 \cdot 1340,3} P = \frac{-3550 + 13360}{2051000} P = +0,00478 \cdot P$$

$$-\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 = \frac{-9,967 \cdot 834,9 - 4,248 \cdot 1010,9}{2051000} P = -0,00615 P.$$

Для левого участка (ax от 0 до 6,0

$$M = \frac{P}{\alpha} [0,00478 \mathcal{C}_x - 0,00615 \mathcal{D}_x]$$

$$Q = P [0,00478 \mathcal{B}_x - 0,00615 \mathcal{C}_x]$$

$$p = -ky = \alpha P [0,00478 \mathcal{X}_x - 0,00615 \mathcal{B}_x]$$

$$\varphi = \frac{\alpha^2}{k} P [0,01912 \mathcal{D}_x + 0,00615 \mathcal{X}_x]$$

Для правого участка (ax от 6,0 до 9,0 и ax от 0 до 3,0):

$$M = \frac{P}{\alpha} [-\mathcal{B}_r + 0,00478 \mathcal{C}_x - 0,00615 \mathcal{D}_x]$$

$$Q = P [-\mathcal{X}_r + 0,00478 \mathcal{B}_x - 0,00615 \mathcal{C}_x]$$

$$p = -ky = \alpha P [4\mathcal{D}_r + 0,00478 \mathcal{X}_x - 0,00615 \mathcal{B}_x]$$

$$\varphi = \frac{\alpha^2}{k} P [-4\mathcal{C}_r + 0,01912 \mathcal{D}_x + 0,00615 \mathcal{X}_x]$$

Давая x значение a получим расчетные моменты, попер. силы и реакции основания под грузом:

$$aa = 6, \mathcal{C}_6 = 193,68, \mathcal{B}_6 = 68,66,$$

$$\mathcal{C}_6 = -28,21 \text{ и } \mathcal{D}_6 = -62,51$$

$$M_a = 0,2499 \frac{P}{\alpha}; Q_a \text{ левее груза} = 0,5015 P \text{ и}$$

Q_a правее груза = $-0,4985 P$; $p = -ky = 0,503 Pa$, т. е. почти те же значения, что и для бесконечно-длинной балки:

$$\text{макс. } M = \frac{P}{4\alpha}, \text{ макс. } Q = \pm \frac{P}{2},$$

$$\text{макс. } p = \frac{1}{2} Pa.$$

Балку без ощутительной погрешности можно считать бесконечно длинной. На фиг. 178 приводятся эпюры моментов, перерезывающих сил, прогибов и углов поворота для этой балки $al = 9,0$, при положении груза P в одной трети.

3. Короткая балка на упругом основании, шарнирно опертая по концам (фиг. 179). Прогибы и моменты на концах балки равны нулю:

$$M_0 = 0, y_0 = 0, M_1 = 0 \text{ и } y_1 = 0.$$

Поэтому:

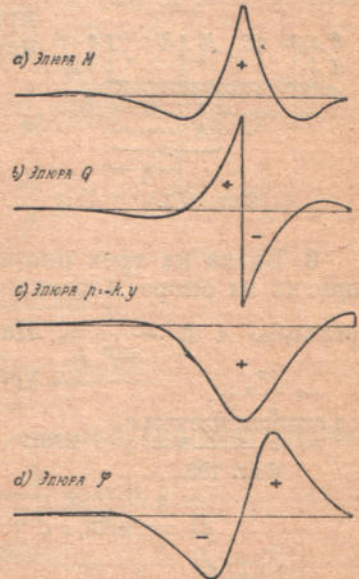
$$M_1 = + \frac{1}{\alpha} A\mathcal{B}_1 - \frac{1}{\alpha} P\mathcal{B}_b - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathcal{D}_1 = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{B}_1 + \frac{4\alpha}{k} A\mathcal{D}_1 - \frac{4\alpha}{k} P\mathcal{D}_b = 0,$$

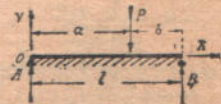
или:

$$A\mathcal{B}_1 - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathcal{D}_1 = P\mathcal{B}_b \text{ и } 4A\mathcal{D}_1 + \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathcal{B}_1 = 4P\mathcal{D}_b,$$

$$\text{откуда реакция } A = \frac{\mathcal{B}_b \mathcal{B}_1 + 4\mathcal{D}_b \mathcal{D}_1}{\mathcal{B}_1^2 + 4\mathcal{D}_1^2} P \text{ и } \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 = \frac{4(\mathcal{D}_b \mathcal{B}_1 - \mathcal{D}_1 \mathcal{B}_b)}{\mathcal{B}_1^2 + 4\mathcal{D}_1^2} P.$$



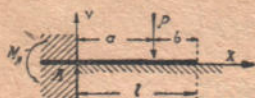
Фиг. 178.



Фиг. 179.

Определив численные значения начальных коэффициентов A и $\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0$, подставляем их в формулы (364).

4. Один конец балки зашпемлен. Прогиб y_0 и угол поворота φ_0 , зашпемленного конца, равны нулю. Начальными неизвестными являются левая опорная реакция A и момент M_A . Найдем их из условия, что момент и поперечная сила на правом конце балки равны нулю:



Фиг. 180.

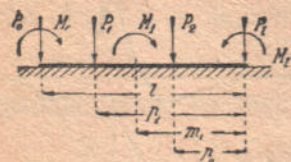
$$M_l = -M_A \mathfrak{M}_l + \frac{1}{\alpha} A \mathfrak{B}_l - \frac{1}{\alpha} P \mathfrak{B}_b = 0,$$

$$Q_l = A \mathfrak{M}_l - P \mathfrak{B}_b + 4\alpha M_A \mathfrak{D}_l = 0,$$

или: $A \mathfrak{B}_l - \alpha M_A \mathfrak{M}_l = P \mathfrak{B}_b$ и $A \mathfrak{M}_l + 4\alpha M_A \mathfrak{D}_l = P \mathfrak{B}_b$;

откуда: $A = \frac{4\mathfrak{B}_b \mathfrak{D}_l + \mathfrak{M}_b \mathfrak{M}_l}{4\mathfrak{B}_l \mathfrak{D}_l + \mathfrak{M}_l^2} P$ и $\alpha M_0 = \frac{\mathfrak{M}_b \mathfrak{B}_l - \mathfrak{M}_l \mathfrak{B}_b}{4\mathfrak{B}_l \mathfrak{D}_l + \mathfrak{M}_l^2} P$

5. На балку действуют грузы и внешние моменты (фиг. 181). Начальные коэффициенты $-\frac{k}{\alpha} y_0$ и $-\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0$ найдем из условия, что на



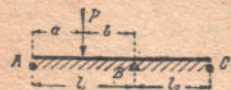
Фиг. 181.

правом конце балки изгиб. момент равен M_l и поперечн. сила $Q_l = P_l$, т. е. из уравнений:

$$M_l = \Sigma M \mathfrak{M}_m - \frac{1}{\alpha} \Sigma P \mathfrak{B}_l - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_l - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_l$$

$$P_l = -\Sigma P \mathfrak{M}_l - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathfrak{B}_l - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_l - 4\alpha \Sigma M \mathfrak{D}_m.$$

6. Балка на трех опорах и упругом основании (фиг. 182). Момент и прогиб на опоре A равны нулю. За начальные коэффициенты принимаем реакцию A и $-\frac{k}{\alpha} \varphi_A$. Находим их, а также лишнюю опорную реакцию B из условий: 1) $y_B = 0$, 2) $y_C = 0$ и 3) $M_C = 0$,



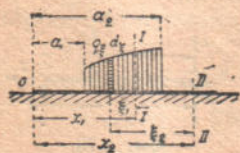
Фиг. 182.

или: 1) $\frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{B}_{l_1} + \frac{4\alpha}{k} A \mathfrak{D}_{l_1} - \frac{4\alpha}{k} P \mathfrak{D}_b = 0$

$$2) \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{B}_{l_1+l_2} + \frac{4\alpha}{k} A \mathfrak{D}_{l_1+l_2} - \frac{4\alpha}{k} P \mathfrak{D}_{b+l_2} + \frac{4\alpha}{k} B \mathfrak{D}_{l_2} = 0$$

$$3) \frac{1}{\alpha} A \mathfrak{B}_{l_1+l_2} - \frac{1}{\alpha} P \mathfrak{B}_{b+l_2} + \frac{1}{\alpha} B \mathfrak{B}_{l_2} - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_{l_1+l_2} = 0.$$

7. На балку действует распределенная нагрузка (фиг. 183). Влияние



Фиг. 183.

распределенной нагрузки можно учесть, как для ряда элементарных сосредоточенных грузов $q_z dz$, расположенных на бесконечно-малых расстояниях dz друг от друга. Тогда при наличии на некотором участке балки распределенной нагрузки получим для этого и следующего участка:

$$y = y_0 \mathfrak{M}_x + \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{B}_x + \frac{4\alpha^2}{k} \Sigma M \mathfrak{C}_m - \frac{4\alpha}{k} \left[\Sigma P \mathfrak{D}_l + \int q_z \mathfrak{D}_z dz \right]$$

$$\varphi = \varphi_0 \mathfrak{M}_x + \frac{4\alpha^3}{k} \Sigma M \mathfrak{B}_m - \frac{4\alpha^2}{k} \left[\Sigma P \mathfrak{C}_r + \int q_z \mathfrak{C}_z dz \right] - 4\alpha y_0 \mathfrak{D}_x$$

$$M = \Sigma M \mathfrak{M}_m - \frac{1}{\alpha} \left[\Sigma P \mathfrak{B}_r + \int q_{\xi} \mathfrak{B}_{\xi} d\xi \right] - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_x - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_x$$

$$Q = - \left[\Sigma P \mathfrak{M}_r + \int q_{\xi} \mathfrak{M}_{\xi} d\xi \right] - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathfrak{B}_x - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_x - 4\alpha \Sigma M \mathfrak{D}_m.$$

Пределы переменной ξ в интегралах надо взять 1) для участка (I—I) под распредел. нагрузкой: верхний $(x_1 - a_1)$ и нижний 0 и 2) для участка (II—II) следующего за нагрузкой: верхний $(x_2 - a_1)$ и нижний $(x_2 - a_2)$.

8. На балку действует равномерно - распределенная нагрузка q (фиг. 184). Так как q имеет постоянное значение, то пользуясь соотношениями (359), легко упростим интегралы:



Фиг. 184.

$$\int_0^{x-a_1} q \mathfrak{D}_{\xi} d\xi = q \int_0^{x-a_1} \mathfrak{D}_{\xi} d\xi = -\frac{q}{4\alpha} (\mathfrak{M}_{x-a_1} - 1), \quad \int_0^{x-a_1} q \mathfrak{C}_{\xi} d\xi = \frac{q}{\alpha} \mathfrak{D}_{x-a_1},$$

$$\int_0^{x-a_1} q \mathfrak{B}_{\xi} d\xi = \frac{q}{\alpha} \mathfrak{C}_{x-a_1}, \quad \int_0^{x-a_1} q \mathfrak{M}_{\xi} d\xi = \frac{q}{\alpha} \mathfrak{B}_{x-a_1}.$$

Если на балке нет никакой другой нагрузки кроме q , то:

$$M_1 = -\frac{q}{\alpha^2} (\mathfrak{C}_{b_1} - \mathfrak{C}_{b_2}) - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_1 - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_1 = 0,$$

$$Q_1 = -\frac{q}{\alpha} (\mathfrak{B}_{b_1} - \mathfrak{B}_{b_2}) - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathfrak{B}_1 - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathfrak{C}_1 = 0,$$

Или:

$$-ky_0 \mathfrak{C}_1 - \frac{k}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{D}_1 = q (\mathfrak{C}_{b_1} - \mathfrak{C}_{b_2}) \quad \text{и} \quad -ky_0 \mathfrak{B}_1 - \frac{k}{\alpha} \varphi_0 \mathfrak{C}_1 = q (\mathfrak{B}_{b_1} - \mathfrak{B}_{b_2}).$$

Решая эти два уравнения, получим:

$$-ky_0 = q \cdot \frac{(\mathfrak{C}_{b_1} - \mathfrak{C}_{b_2}) \mathfrak{C}_1 - (\mathfrak{B}_{b_1} - \mathfrak{B}_{b_2}) \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1}$$

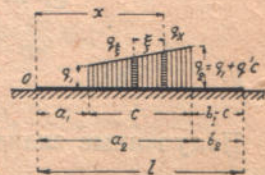
$$\text{и} \quad -\frac{k}{\alpha} \varphi_0 = q \cdot \frac{(\mathfrak{B}_{b_1} - \mathfrak{B}_{b_2}) \mathfrak{C}_1 - (\mathfrak{C}_{b_1} - \mathfrak{C}_{b_2}) \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1}$$

Если под нагрузкой q находится вся балка, то $a_1 = b_2 = 0$ и $a_2 = b_1 = l$

$$\text{и} \quad -ky_0 = q \frac{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1} = q \quad \text{и} \quad -\frac{k}{\alpha} \varphi_0 = 0,$$

т. е. балка, не изгибаясь, равномерно осядет вниз, как было показано в § 16,5.

9. На балку действует нагрузка, распределенная по закону трапеции (фиг. 185). Закон изменения нагрузки:



Фиг. 185.

$$q_x = q_1 + q'(x - a), \quad q_{\xi} = q_1 + q'(x - a - \xi) = q_x - q'\xi.$$

Следовательно интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{x-a_1} q_{\xi} \mathfrak{D}_{\xi} d\xi &= q_x \int_0^{x-a_1} \mathfrak{D}_{\xi} d\xi - q' \int_0^{x-a_1} \xi \mathfrak{D}_{\xi} d\xi = q_x \int_0^{x-a_1} d \left(-\frac{\mathfrak{M}_{\xi}}{4\alpha} \right) - q' \int_0^{x-a_1} \xi d \left(-\frac{\mathfrak{M}_{\xi}}{4\alpha} \right) = \\ &= -\frac{q_x}{4\alpha} (\mathfrak{M}_{x-a_1} - 1) + \frac{q'}{4\alpha} \mathfrak{M}_{x-a_1} (x-a_1) - \frac{q'}{4\alpha} \int_0^{x-a_1} \mathfrak{M}_{\xi} d\xi = \frac{1}{4\alpha} [q_1 + q'(x-a_1)] - \\ &\quad - \frac{q_1}{4\alpha} \mathfrak{M}_{x-a_1} - \frac{q'}{4\alpha^2} \mathfrak{B}_{x-a_1}. \end{aligned}$$

Если на балку действует только трапециoidalная нагрузка, то для сечения под нагрузкой получается:

$$y = y_0 \mathcal{M}_x + \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{B}_x + \frac{q_1}{k} \mathcal{M}_{x-a_1} - \frac{1}{k} [q_1 + q'(x-a_1)] + \frac{q'}{\alpha k} \mathcal{B}_{x-a_1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi = \varphi_0 \mathcal{M}_x - \frac{4\alpha q_1}{k} \mathcal{D}_{x-a_1} + \frac{q'}{k} (\mathcal{M}_{x-a_1} - 1) - 4\alpha y_0 \mathcal{D}_x,$$

$$\frac{k}{4\alpha^4} \frac{d\varphi}{dx} = M = -\frac{q_1}{\alpha^2} \mathcal{C}_{x-a_1} - \frac{q'}{\alpha^3} \mathcal{D}_{x-a_1} - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathcal{C}_x - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathcal{D}_x,$$

$$\frac{dM}{dx} = Q = -\frac{q'}{\alpha^2} \mathcal{C}_{x-a_1} - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathcal{B}_x - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathcal{C}_x - \frac{q_1}{\alpha} \mathcal{B}_{x-a_1},$$

$$\frac{dQ}{dx} = p = -q_x - ky = -ky_0 \mathcal{M}_x - \frac{k}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{B}_x - q_1 \mathcal{M}_{x-a_1} - \frac{q'}{\alpha} \mathcal{B}_{x-a_1}.$$

Выражение для p можно получить и непосредственно из выражения для y по формуле: $p = -q_x - ky$.

Начальные коэффициенты $-ky_0$ и $-\frac{k\varphi_0}{\alpha}$ найдем из уравнений:

$$M_1 = -\frac{q_1}{\alpha^2} (\mathcal{C}_{b_1} - \mathcal{C}_{b_2}) - \frac{q'}{\alpha^3} (\mathcal{D}_{b_1} - \mathcal{D}_{b_2}) - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathcal{C}_1 - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathcal{D}_1 = 0$$

$$Q_1 = -\frac{q_1}{\alpha} (\mathcal{B}_{b_1} - \mathcal{B}_{b_2}) - \frac{q'}{\alpha^2} (\mathcal{C}_{b_1} - \mathcal{C}_{b_2}) - \frac{k}{\alpha} y_0 \mathcal{B}_1 - \frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 \mathcal{C}_1 = 0.$$

Частный случай. Треугольная нагрузка на всей балке:

$$q_1 = 0 \quad a_1 = b_2 = 0 \quad a_2 = b_1 = c = l \quad q' = \frac{q}{l}.$$



Фиг. 186.

Поэтому:

$$-ky_0 \mathcal{C}_1 - \frac{k}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{D}_1 = \frac{q'}{\alpha} \mathcal{D}_1 \quad \text{и} \quad -ky_0 \mathcal{B}_1 - \frac{k}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{C}_1 = \frac{q'}{\alpha} \mathcal{C}_1;$$

откуда:

$$-ky_0 = \frac{\mathcal{D}_1 \mathcal{C}_1 - \mathcal{D}_1 \mathcal{C}_1}{\mathcal{C}_1^2 - \mathcal{B}_1 \mathcal{D}_1} \frac{q'}{\alpha} = 0, \text{ т. е. } y_0 = 0 \text{ и } \varphi_0 = -\frac{q'}{k} = -\frac{q}{kl},$$

$$y_1 = \frac{1}{\alpha} \varphi_0 \mathcal{B}_1 - \frac{q}{k} + \frac{q'}{\alpha k} \mathcal{B}_1 = -\frac{q}{k}, \quad \varphi_1 = \varphi_0 \mathcal{M}_1 + \frac{q'}{k} (\mathcal{M}_1 - 1) = -\frac{q'}{k} = \varphi_0.$$

Полученные значения $\varphi_0 = \varphi_1 = -\frac{q}{kl}$, $y_0 = 0$ и $y_1 = -\frac{q}{k}$ показывает, что под действием нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и расположенной по всей длине балки, последняя, не изгибаясь оседает в грунт тоже по закону треугольника и, что реакция постели в каждой точке соответствует интенсивности нагрузки.



Фиг. 187.

10. Симметричная двухконсольная балка на упругом основании при равномерной нагрузке q (фиг. 187). Найти значение момента посредине пролета и над опорой. Пользуясь симметрией, за начальную точку принимаем середину пролета, где известно: $\varphi_0 = 0$ и $Q_0 = 0$.

Тогда (по форм. разделов 8 и 9) из условий:

$$1) y_c = 0; \quad 2) M_1 = 0 \text{ и } 3) Q_1 = 0,$$

после замены $-q - ky_0 = p_0$, получим:

$$1) \quad +4\alpha M_0 \mathcal{C}_c - \frac{p_0}{\alpha} \mathcal{M}_c = + \frac{q}{\alpha}$$

$$2) \quad R \mathcal{B}_a + \alpha M_0 \mathcal{M}_1 + \frac{p_0}{\alpha} \mathcal{C}_1 = 0$$

$$3) \quad R \mathcal{M}_a - 4\alpha M_0 \mathcal{D}_1 + \frac{p_0}{\alpha} \mathcal{B}_1 = 0.$$

Решаем эти уравнения относительно неизвестных R , αM_0 и $\frac{p_0}{\alpha}$. Для этого прежде всего составим определитель знаменателя Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0, & 4\mathcal{C}_c, & -\mathcal{M}_c \\ \mathcal{B}_a, & \mathcal{M}_1, & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{M}_a, & -4\mathcal{D}_1, & \mathcal{B}_1 \end{vmatrix} = 4\mathcal{M}_a \mathcal{C}_c \mathcal{C}_1 + 4\mathcal{M}_c \mathcal{B}_a \mathcal{D}_1 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_c \mathcal{M}_1 - 4\mathcal{B}_a \mathcal{B}_1 \mathcal{C}_c.$$

$$\text{Тогда } R = \begin{vmatrix} \frac{q}{\alpha}, & 4\mathcal{C}_c, & -\mathcal{M}_c \\ 0, & \mathcal{M}_1, & \mathcal{C}_1 \\ 0, & -4\mathcal{D}_1, & \mathcal{B}_1 \end{vmatrix} : \Delta = \frac{q}{\alpha} \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{B}_1 + 4\mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1}{\Delta}$$

$$\alpha M_0 = \begin{vmatrix} 0, & \frac{q}{\alpha}, & -\mathcal{M}_c \\ \mathcal{B}_a, & 0, & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{M}_a, & 0, & \mathcal{B}_1 \end{vmatrix} : \Delta = \frac{q}{\alpha} \frac{\mathcal{M}_a \mathcal{C}_1 - \mathcal{B}_a \mathcal{B}_1}{\Delta}$$

$$\frac{p_0}{\alpha} = \begin{vmatrix} 0, & 4\mathcal{C}_c, & \frac{q}{\alpha} \\ \mathcal{B}_a, & \mathcal{M}_1, & 0 \\ \mathcal{M}_a, & -4\mathcal{D}_1, & 0 \end{vmatrix} : \Delta = - \frac{q}{\alpha} \frac{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_1 + 4\mathcal{B}_a \mathcal{D}_1}{\Delta},$$

Для того, чтобы найти изгиб. момент M_c над опорой, надо в уравнении

$$M_c = M_0 \mathcal{M}_c - \frac{q}{\alpha^2} \mathcal{C}_c - \frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathcal{C}_c.$$

Заменить $-q - ky_0 = p_0$, тогда $M_c = M_0 \mathcal{M}_c + \frac{p_0}{\alpha^2} \mathcal{C}_c$;

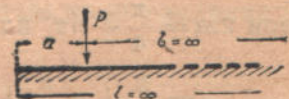
затем надо подставить вместо M_0 и p_0 их значение.

При отсутствии консолей: $a = 0$, $c = l$ и $\mathcal{M}_a = 1$, $\mathcal{B}_a = \mathcal{C}_a = \mathcal{D}_a = 0$; поэтому:

$$\Delta = 4\mathcal{C}_1^2 + \mathcal{M}_1^2 \text{ и } R = \frac{q}{\alpha} \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{B}_1 + 4\mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1}{\mathcal{M}_1^2 + 4\mathcal{C}_1^2}, \quad M_0 = \frac{q}{\alpha^2} \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{M}_1^2 + 4\mathcal{C}_1^2} \text{ и}$$

$$p_0 = -q \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_1^2 + 4\mathcal{C}_1^2}.$$

В другом частном случае, при $c = 0$ и $a = l$, получаем балку на упругом основании с неподвижной опорой посередине, или, что то же консоль на упругом основании, защемленную концом.



Фиг. 188.

11. Один конец балки, нагруженный силой P , уходит в бесконечность (фиг. 188). На этом примере покажем, как перейти от формул для короткой балки, к формулам для балки бесконечно длинной.

Заметим, что при больших значениях x гиперболические

$$\operatorname{sh}_{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \text{ и } \operatorname{ch}_{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}$$

становятся равными друг другу: $\operatorname{sh}_{\alpha x} = \operatorname{ch}_{\alpha x} = \frac{1}{2} e^{\alpha x}$.

Член $e^{-\alpha x} = e^{-\infty}$ пропадает, и вместо функций \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} и \mathfrak{D} можем подставить:

$$\mathfrak{A}_x = \frac{1}{2} e^{\alpha x} \operatorname{cs}_{\alpha x},$$

$$\mathfrak{B}_x = \frac{1}{4} e^{\alpha x} (\operatorname{sn}_{\alpha x} + \operatorname{cs}_{\alpha x}),$$

$$\mathfrak{C}_x = \frac{1}{4} e^{\alpha x} \operatorname{sn}_{\alpha x},$$

$$\mathfrak{D}_x = \frac{1}{8} e^{\alpha x} (\operatorname{sn}_{\alpha x} - \operatorname{cs}_{\alpha x}),$$

После подставки и сокращений этих значений в результаты примера фиг. 177 (см. раздел 10) получится:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{\alpha} y_0 &= P \frac{\mathfrak{B}_b \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{A}_b \mathfrak{D}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1} = P \frac{(\operatorname{sn}ab + \operatorname{cs}ab) \operatorname{sn}al - \operatorname{cs}ab (\operatorname{sn}al - \operatorname{cs}al)}{\operatorname{sn}^2al - \frac{1}{2} (\operatorname{sn}al + \operatorname{cs}al) (\operatorname{sn}al - \operatorname{cs}al)} \frac{e^{\alpha b} \cdot e^{\alpha l}}{e^{2\alpha l}} = \\ &= P \cdot \frac{\operatorname{cs}a(l-b)}{\frac{1}{2} (\operatorname{sn}^2al - \operatorname{cs}^2al)} \cdot \frac{1}{e^{\alpha(l-b)}} = 2e^{-\alpha a} \operatorname{cs}a P = 2[\tau_0]_{x=a} P. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$-\frac{k}{\alpha^2} \varphi_0 = P \frac{\mathfrak{A}_b \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{B}_b \mathfrak{B}_1}{\mathfrak{C}_1^2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}_1} = 2e^{-\alpha a} (\operatorname{sn}a a - \operatorname{cs}a a) P = -2[\mu_0]_{x=a} P.$$

Момент под грузом,

$$\begin{aligned} M_a &= -\frac{k}{\alpha^2} y_0 \mathfrak{C}_a - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathfrak{D}_a = \frac{P}{4\alpha} [1 - e^{-2\alpha a} (\cos 2\alpha a - \operatorname{sn} 2\alpha a)] = \\ &= \frac{P}{4\alpha} \left\{ 1 - [\mu_0]_{x=2a} \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь полученной формулой, исследуем, как изменяется момент под грузом M_a в зависимости от расстояния a груза P от края балки.

Если a дать значение $a = \infty$, то получим

$$M_{\infty} = P : 4\alpha,$$

т. е. формулу, известную из § 16,2_б для момента под грузом посредине бесконечно длинной балки.

Коэффициент $[\mu_0]_{x=2a}$ будет нуль, если $\cos 2\alpha a = \sin 2\alpha a$ или $\operatorname{tg} 2\alpha a = 1$, т. е.

при $2\alpha a = \frac{\pi}{4} + n\pi$, или при значениях

$$a = \frac{\pi}{8\alpha} + n \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{L}{8} + n \frac{L}{2}, \text{ где } L = \frac{\pi}{\alpha} \text{ — длина полуволны.}$$

При этих же значениях a , т. е. при $a = \frac{L}{8}, \frac{5L}{8}, \frac{9L}{8}$ и т. д. момент под грузом будет $M = P : 4\alpha$.

Экстремумы коэффициента $[\mu_0]_{x=2a}$ будут при тех значениях a , при которых его первая производная по a равна нулю;

$$\frac{d}{da} [\mu_0]_{x=2a} = -2\alpha e^{-2\alpha a} \cos 2\alpha a = 0,$$

т. е., когда $\cos 2\alpha a = 0$, или при $2\alpha a = \frac{\pi}{2} + n\pi$, или при $a = \frac{\pi}{4\alpha} + n \frac{\pi}{2\alpha} =$
 $= \frac{L}{4} + n \frac{L}{2}.$

При этих значениях a момент под грузом будет иметь крайние для него отклонения от среднего значения $M = P : 4\alpha$.

В нижеследующей таблице для характерных точек приведены в зависимости от расстояния a груза P до края балки, соответствующее значение изгиб. момента M_a под грузом:

$a : L = a : \frac{\pi}{\alpha}$	○	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$
$M_a : \frac{P}{4\alpha}$	○	1	1,2079	1	0,99102	1	1,000388	1	0,9999832

Как видно момент под грузом имеет наибольшее значение если груз на расстоянии $\frac{2}{8} L \left(\frac{1}{8} \text{ длины волны} \right)$ от края балки:

$$\text{макс. } M_P = 1,2079 \frac{P}{4\alpha}.$$

Начиная же с расстояния $\frac{9}{8} L \left(\frac{9}{16} \text{ длины волны} \right)$, и даже раньше, отклонения момента под грузом от средней величин $M = P : 4\alpha$ не превышают 0,0388^{0/0}, т. е. уже при расстоянии груза $\frac{9}{8} L$ от края практически можно считать, что ветвь балки левее груза также уходит в бесконечность. Полученный результат подтверждает выводы § 16,2h.

12. Метод начальных условий для абсолютно жестких балок.

а) Балками абсолютно жесткими, $(EI \infty)$ называют такие которые под влиянием нагрузки оседают в основание без искривления своей оси. Практически, к числу таких балок относят все балки, для которых деформации изгиба самой балки во много раз меньше деформации основания. К таким балкам можно отнести или весьма мощные фундаменты, или балки весьма короткие (см. § 16,4 про балки, у которых $(\alpha l)^4$ исчезающе мало по сравнению с единицей), или наконец, тела плавающие, погружение которых во много раз превышает их прогиб.

Для таких балок коэффициент $a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ имеет столь малую величину,

что в расчетах его можно принимать за нуль.

При определении функций § 16,9 можно будет ограничиться первыми членами их разложения (см. § 16,8) и пользоваться выражениями $\mathfrak{A} = 1,$

$$\frac{\mathfrak{B}}{a} = x, \quad \frac{\mathfrak{C}}{a^2} = \frac{1}{2} x^2 \quad \text{и} \quad \frac{\mathfrak{D}}{a^3} = \frac{1}{6} x^3.$$

Уравнение (362) § 17,1 примет вид (члены с множителем α пропадут)

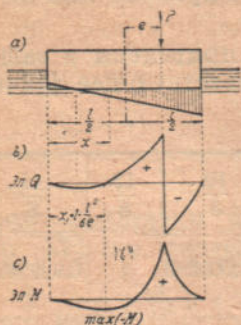
$$y = y_0 + \varphi_0 x, \quad \varphi = \varphi_0$$

$$M = \Sigma M_0 - \Sigma Pr - \frac{1}{2} k y_0 x^2 - \frac{1}{6} k \varphi_0 x^3,$$

$$Q = -\Sigma P - k y_0 x - \frac{1}{2} k \varphi_0 x^2.$$

В формуле для момента r обозначает плечо от рассматриваемого сечения до силы P .

б) Прим. Тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда плавает в жидкости (фиг. 189). Найти крен судна от силы P , приложенной с эксцентриситетом e . Так как $M_0 = M_1 = 0^1$ и $Q_0 = Q_1 = 0$, то:



Фиг. 189.

$$1) M_1 = -P \left(\frac{l}{2} - e \right) - \frac{1}{2} k y_0 l^2 - \frac{1}{6} k \varphi_0 l^3 = 0$$

$$2) Q_1 = -P - k y_0 l - \frac{1}{2} k \varphi_0 l^2 = 0$$

Решая эти уравнения находим:

$$-k y_0 = \frac{P}{l} \frac{6Pe}{l^2} \quad \text{и} \quad -k \varphi_0 = \frac{12Pe}{l^3}.$$

Величина k — интенсивность нагрузки на пог. см. балки, вызывающая ее погружение на 1 см., будет равна $k = B \cdot \gamma$, где B — ширина судна, а γ все куб. см. жидкости.

Тогда

$$y_0 = -\frac{P}{Bl\gamma} \left(1 - \frac{6e}{l} \right), \quad \varphi_0 = -\frac{12Pe}{Bl^3\gamma} \quad \text{и}$$

$$y_l = y_0 + \varphi_0 l = -\frac{P}{Bl\gamma} \left(1 + \frac{6e}{l} \right).$$

Изгибающий момент в сечении левее груза P :

$$M_x = -\frac{1}{2} k y_0 x^2 - \frac{1}{6} k \varphi_0 x^3 = \frac{Px^2}{2l^2} \left(l - 6e + \frac{4x}{l} e \right).$$

Максимальный положительный момент будет под грузом, т. е. при

$$x = \frac{l}{2} + e:$$

$$\text{макс. } (+M) = M_P = \frac{Pl}{8} \left(1 - \frac{4e^2}{l^2} \right)^2.$$

Кроме того, если $e > \frac{1}{6} l$, будет еще наибольший отрицательный момент в сечении, для которого

$$Q_{x_1} = -k y_0 x_1 - \frac{1}{2} k \varphi_0 x_1^2 = 0,$$

т. е. при $x_1 = -\frac{2y_0}{\varphi_0} = l - \frac{l^2}{6e}$. Величина этого момента:

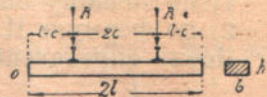
$$\text{мин. } M = -Pe \left(1 - \frac{l}{6e} \right)^3.$$

Отрицательного момента не будет если $e \leq \frac{1}{6} l$, так как при этом $x_1 \leq 0$.

¹⁾ Давлением воды о борты пренебрегаем.

13. Расчет рельсового пути на шпалах (фиг. 190). а) Расчет рельса. Хотя рельс опирается не на сплошное основание, а на шпалы, но последние находятся на достаточно близких взаимных расстояниях, и приближенно можно считать, что рельс является балкой большой длины на сплошном упругом основании, коэффициент которого будет:

$$k = \frac{R}{ay_R} = \frac{D}{a}.$$



Фиг. 190.

Здесь: R — давление рельса на шпалу; y_R — прогиб ее под рельсом, a — расстояние между шпалами в пути, и D — давление рельса на шпалу в кг., вызывающее прогиб $y = 1$ см.

Шпала в свою очередь является короткой балкой на упругом основании (балласте), и поэтому для определения $D = \frac{R}{y_R}$, надо найти прогиб под рельсом. В виду симметрии нагрузки, угол поворота и поперечная сила по середине шпалы равны нулю:

$$\varphi_1 = \varphi_0 \mathcal{M}_1 - \frac{4\alpha_1^2}{k_1} R \mathcal{C}_c - 4\alpha_1 y_0 \mathcal{D}_1 = 0$$

$$Q_1 = -R \mathcal{M}_c - \frac{k_1}{\alpha_1} y_0 \mathcal{B}_1 - \frac{k_1}{\alpha_1^2} \varphi_0 \mathcal{C}_1 = 0.$$

Решая эти уравнения находим:

$$-\frac{k_1 y_0}{\alpha_1} = R \frac{\mathcal{M}_c \mathcal{M}_1 + 4\mathcal{C}_c \mathcal{C}_1}{\mathcal{M}_1 \mathcal{B}_1 + 4\mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1} \quad \text{и} \quad -\frac{k_1 \varphi_0}{\alpha_1^2} = -4R \frac{\mathcal{B}_1 \mathcal{C}_c - \mathcal{M}_c \mathcal{D}_1}{\mathcal{M}_1 \mathcal{D}_1 + 4\mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1}.$$

Зная геометрич. размеры шпалы и коэффициент $k_1 = b \cdot C$, равный произведению ширины шпалы на коэффициент балласта (постели шпалы) C , находим для шпалы и балласта $\alpha_1 = \sqrt[4]{\frac{k_1}{4E_{\text{мн.}} J_{\text{мн.}}}}$ и затем, пользуясь таблицами § 16,9 определяем численные значения начальных коэффициентов y_0 и φ_0 . После этого, прогиб под грузом вычисляем по формуле

$$y_R = y_0 \mathcal{M}_{1-c} + \frac{1}{\alpha_1} \varphi_0 \mathcal{B}_{1-c}.$$

Разделив R на y_R найдем D , а затем и необходимый для расчета рельса коэффициент: $k = \frac{D}{a}$.

В виду некоторой громоздкости такого определения значения k можно его определять также по приближенной формуле (См. приказ Н. К. П. С. от 24/XI 1925 г. за № 7921/Пв) для брусковых шпал и нормальной ширины колеи:

$$D = 0,9 \cdot b l C \quad \text{и} \quad k = 0,9 \frac{b l}{a} C.$$

В этих формулах b — ширина шпалы, l — ее полудлина, C — коэффициент постели шпалы, т. е. интенсивность давления на балласт, при котором происходит его осадка на 1 см.

Величину C принимают: для магистральных линий при щебеночном балласте = 5 кг/см³, при прочих доброкачественных балластах = 4 кг/см³, а при мелкопесчаном балласте и вообще для дорог местного значения равным 3 кг/см³.

Коэффициентом 0,9 в формуле $D = 0,9 b l C$ оценивается эмпирически неравномерность осадки шпалы в виду ее изгиба.

Сравним оба способа определения k на численном примере:

Для шпалы 16×25 см² длиной $2l = 270$ см при ширине колеи $2c = 152,4$ см, модуле упругости дерева $E = 10^6$ и коэффициенте постели $C = 6$ получим

1) по точному способу $D = 1817$ кг.

2) по формуле Н.К.П.С. $D = 1822$ кг.

После определения коэффициента k следует определить коэффициент $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$, где EJ — жесткость рельса, определяемая с учетом степени его износа.

В вышеупомянутом приказе Н.К.П.С. рекомендуется принимать $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и при введении в расчет моментов инерции и сопротивления рельса учитывать износ, так что $J = 0,83 \cdot J_0$ и $W = 0,87 \cdot W_0$.

Типы рельсов	I-а	II-а	III-а	IV-а	$22 \frac{1}{2}$ фунт/фут
J_0 см ⁴	1476	1222	968	751	707
$J = 0,83 \cdot J_0$ см ⁴	1225	1014	803	623	587
W_0 см ³	210	172	147	123	118
$W = 0,87 \cdot W_0$ см ³	183	150	128	107	103

Имея численные значения k и α и пользуясь формулами § 16,2,е и таблицей коэффициентов γ_0 и μ_0 , находим величину M и вертикального давления R , передаваемого рельсам на шпалу от системы грузов P_0, P_1, P_2, \dots , каковыми являются давления осей паровоза или вагона

$$M = \frac{1}{4\alpha} [P_0 + P_1(\mu_0)_{x=a_1} + P_2(\mu_0)_{x=a_2} + \dots]$$

$$R = \Sigma(-kay) = \frac{\alpha a}{2} [P_0 + P_1(\gamma_0)_{x=a_1} + P_2(\gamma_0)_{x=a_2} + \dots].$$

В этих формулах P_0 груз над сечением для которого определяем момент, или над шпалой, a_1, a_2, \dots расстояния от этого сечения до грузов P_1, P_2, \dots .

Прогиб шпалы от давления рельса R : $y = \frac{R}{D}$.

Напряжение грунта: $p = Cy$.

Для проверки динамического напряжения в рельсе в формулу для момента подставляют вместо P динамические реакции колес. Для паровозов эти реакции берутся из соответствующих паровозных паспортов.

Кроме того, учитывают увеличение динамического воздействия колес на рельсы, в связи с наличием неровностей на бандажах и рельсах, умножением момента на коэффициент m , который принимают

для товарных паровозов $m = 1 + \frac{0,8v}{50}$

для пассажирских паровозов $m = 1 + \frac{v}{100}$.

Скорость v в этих формулах берется в $\frac{\text{км.}}{\text{час.}}$. При таких условиях динамическое напряжение рельса

$$n = \frac{mM_2}{W} < 3000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

должно быть меньше допускаемого при таком расчете напряжения $3000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

б) Проверка шпалы. Максимальный момент для шпалы будет под рельсом:

$$M_{1-c} = -\frac{k_1}{\alpha_1^2} y_0 \mathcal{C}_{1-c} - \frac{k}{\alpha^3} \varphi_0 \mathcal{D}_{1-c}.$$

Поперечная сила будет иметь наибольшие значения также в том же сечении под рельсом:

$$1) \text{ снаружи колен } Q = -\frac{k_1}{\alpha_1} y_0 \mathcal{B}_{1-c} - \frac{k_1}{\alpha_1^2} \varphi_0 \mathcal{C}_{1-c},$$

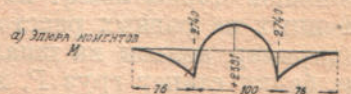
$$2) \text{ внутри колен } Q = -\frac{k_1}{\alpha_1} y_0 \mathcal{B}_{1-c} - \frac{k_1}{\alpha_1^2} \varphi_0 \mathcal{C}_{1-c} - P.$$

Формулы для коэффициентов $\frac{-ky_0}{\alpha_1}$ и $\frac{-k_1\varphi_0}{\alpha_1^2}$ приведены при расчете рельса. При учете динамического воздействия нагрузки допускают на изгиб здоровых шпал до 250 кг/см².

На фиг. 191 приведены эпюры моментов, поперечных сил и реактивного давления грунта для одного частного случая¹⁾. Здесь имеется в виду шпала из сосновой пластины 7-ми вершкового леса; ширина ее $b = 30$ см., толщина $h = 15$ см., длина $2l = 252$ см., расстояние между осями рельсов $2c = 100$ см.

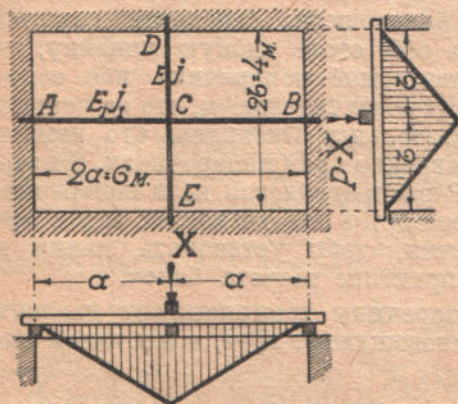
Модуль упругости $E = 1,11 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, коэф-

фициент балласта $C = 2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Давление, передаваемое каждым из рельсов на шпалу $R = 7500$ кг. Значения, выписанные на эпюрах отнесены к полоске шпалы шириною в 1 см.

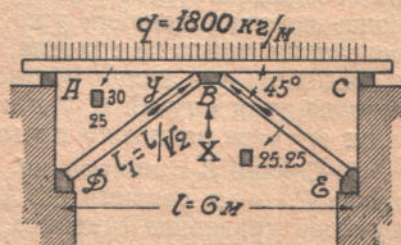


Фиг. 191.

§ 18. Балки на упругих опорах. 1. Такой случай балок нередко встречается. Качающиеся (шарнирные) колонны путей проводов типа фиг. 75-а), поперечная балка, поддерживающая перекрестную продольную, как на фиг. 192, или поддерживаемая подкосами, как на фиг. 193,—это простейшие примеры, уже рассмотренные, но есть ряд других, как рельсы на деревянных поперечинах железнодорожного моста, рельсы на шпалах, поддерживаемых железнодорож-



Фиг. 192.



Фиг. 193.

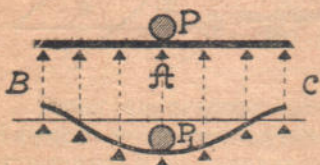
ным балластом при точном их исследовании, продольные балки проезжей части моста, перекрестные балки междуэтажных покрытий, судовых

¹⁾ Численный материал заимствован из «Расчета прочности фундаментов» проф. Н. П. Пузыревского. 1923 г., стр. 317. В этом курсе разобран ряд интересных примеров применения метода начальных условий.

переборок, потолков и проч. Особенностью балок, входящих в состав такой системы является податливость их опор.

Обыкновенно осадка опоры является функцией ее упругих свойств и величины давления на опору. Так, поперечные балки прогибаются тем больше, чем большее давление передается на них от продольной перекрестной; они работают вместе с продольной балкой, как одна упругая система, а силы взаимодействия балок являются лишними неизвестными. Мы будем называть упругими такие опоры, осадка которых пропорциональна испытываемому давлению и восстанавливается по исчезновении последнего. При таких условиях реакции будут пропорциональны осадкам, и задача решается на основании вышеизложенных общих приемов главы I и II. Цель настоящего параграфа — изложение фактического материала для специальных случаев перекрестных балок.

2. Балка, свободно лежащая на упругих опорах. Положим, что балка большой длины лежит на ряде одинаковых поперечных балок, расположенных на равных расстояниях (фиг. 194). В таких условиях находятся, например, рельсы на шпалах или на мостовых поперечных брусках. Если на балку станет груз P , хотя бы и непосредственно над поперечиной, он более или менее изогнет балку; ряд поперечин будет садиться под давлением балки и притом больше вблизи груза и меньше — вдали от него.



Фиг. 194.

На некотором расстоянии балка выпучивается кверху и, если в этих областях B и C она не скреплена с поперечинами, то может от них отделиться, как показано на фиг. 194 внизу. Рассматривая такой случай свободнолежащей балки, мы зададимся целью определить давления P_1, P_2, \dots , передаваемые на поперечины; при этом трудно будет подметить, на сколько поперечин

распределяется давление груза: если реакция N -ой опоры окажется отрицательной, то опора не участвует в работе.

Эта задача в общем виде довольно сложна, и ее обыкновенно разрешают, в простейших случаях.

Очевидно, что число поперечин, участвующих в восприятии груза P , зависит от жесткости продольной балки, воспринимающей этот груз. Если бы она была абсолютно твердой, то погружалась бы параллельно самой себе, не изгибаясь, и все поперечины опускались бы одинаково, неся одинаковые давления. Наоборот, гибкая балка легко сгибается, как чертежная линейка; не трудно представить себе столь гибкую линейку, что едва ли не все давление груза передается одной поперечине, ибо сопротивление линейки изгибу будет настолько незначительным, что ее реакции на соседних поперечинах будут неощутительны. Очевидно, что немного более жесткая линейка уже передаст давление трем поперечинам. На этом основании положим сначала, что груз P распределяется на 3 поперечины и выясним, при каком соотношении жесткостей это возможно; затем проанализируем случай 5, 7 и т. д. поперечин, чтобы установить, каким из этих случаев надлежит пользоваться в практике расчета балок.

3. Случай 3-х поперечин. Если 3 поперечины воспринимают давление груза P , то их реакции R_1, R_2 и R_3 уравнивают груз, и мы имеем следующее уравнение статики:

$$P = R_1 + 2R_2 \dots \dots \dots (366).$$

Добавим сюда уравнение деформации, а именно напишем, что прогиб продольной балки, т. е. разность опусканий ее точек, равняется разности осадок поперечин № 1 и № 2:

$$\delta_1 - \delta_2 = f_2.$$

Упругая линия продольной балки симметрична, и мы можем рассматривать ее, как для балки, заземленной в сечении № 1; тогда прогиб конца 2 определится по известной формуле консоли:

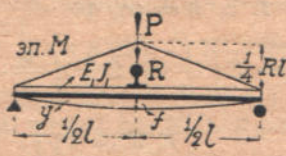
$$f_2 = \frac{R_2 a^3}{3EJ}, \text{ или } f_2 = \gamma R_2, \dots \dots \dots (367)$$

где γ — прогиб балки от единичной силы, т. е. $\gamma = \frac{1 \cdot a^3}{3EJ}$.

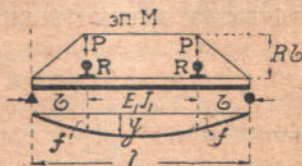
Поперечины прогибаются различно, так как испытывают неодинаковые давления R_1 и R_2 ; их прогибы всегда пропорциональны давлениям, но



Фиг. 195.



Фиг. 196.



Фиг. 197.

выражаются неодинаково в зависимости от условий закрепления поперечины и положения продольной балки на поперечине. В простейшем случае фигуры 196, когда поперечиной является простая балка, воспринимающая давление R_1 посередине от нагруженной продольной балки, прогиб

$$f = \frac{R_1 l^3}{48E_1 J_1} = \gamma_1 R_1.$$

Но чаще поперечина несет два рельса, симметрично расположенны по фиг. 197. Тогда, по третьему столбцу справочной таблицы № III (см. Введение), прогиб под грузом

$$f = R_1 \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1 J_1} = \gamma_1 R_1 \dots \dots \dots (368).$$

Если последнюю формулу один раз возьмем для $R = R_1$ и другой раз — для R_2 , то получим разность осадок поперечин 1 и 2 под рельсом (фиг. 195):

$$f_2 = \delta_1 - \delta_2 = (R_1 - R_2) \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1 J_1} \dots \dots \dots (369).$$

Если приравняем прогибы (367) и (369), то получится

$$R_2 \frac{a^3}{3EJ} = (R_1 - R_2) \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1 J_1} \dots \dots \dots (370).$$

Остается решить уравнения (366) и (370) относительно R_1 и R_2 . Для этого разделим обе части равенства (370) на вторую дробь и обозначим отношение $\frac{a^3}{3EJ} : \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1 J_1} = \gamma : \gamma_1$ в соответствии с формулами (367) и (368) через $2k$, т. е. примем:

$$k = \frac{a^3 E_1 J_1}{b^2(3l - 4b) E J} \dots \dots \dots (371).$$

Тогда окажется: $2kR_2 = R_1 - R_2$, или: $R_2(1 + 2k) = R_1$.

Подставляя в (366), имеем:

$$P = R_2(1 + 2k) + 2R_2, \text{ откуда } R_2 = \frac{1}{3 + 2k} P.$$

$$\text{Следовательно } R_1 = \frac{1 + 2k}{3 + 2k} P \dots \dots \dots (372),$$

т. е. распределение давления груза P между поперечинами R_1 и R_2 зависит от k .

Для всякой балки выражения $\gamma = \frac{1 \cdot a^3}{3EJ}$ или $\gamma_1 = \frac{1 \cdot b^2(3l - 4b)}{6E_1J_1}$ представляют своего рода меру ее гибкости, или прогиб, вызванный единицей груза при данном его частном расположении; следовательно, k выражает отношение гибкостей балки и поперечины.

Если гибкость балки ничтожна, близка к нулю, т. е. если $\gamma = k = 0$, то

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{3} P,$$

т. е. груз P передается поровну на все 3 поперечины. Наоборот, если гибкость балки весьма велика, т. е. $k = \infty$, то

$$R_2 = 0, \text{ а } R_1 = P \left(\frac{1}{k} + 2 \right) : \left(\frac{3}{k} + 2 \right) = P$$



Фиг. 198.

и весь груз передается на одну поперечину. Отрицательного давления здесь быть не может.

1. Случай 5-ти поперечин. При симметричной передаче давления пяти поперечинам составляются выражения для двух прогибов продольной балки: f_2 и f_3 (фиг. 198). С другой стороны, для

каждой из поперечин 1, 2 и 3 мы можем написать выражение осадки δ , вызванной приходящимся на нее давлением R_1, R_2 или R_3 . Прогиб f_2 представляет разность осадок двух соседних поперечин $\delta_1 - \delta_2$. т. е.:

$$f_2 = \delta_1 - \delta_2 \dots \dots \dots (373)$$

Точно также прогиб $f_3 = \delta_1 - \delta_3 \dots \dots \dots (374)$

Кроме того, условие равновесия составляется в форме:

$$P = R_1 + 2R_2 + 2R_3 \dots \dots \dots (375)$$

Этих трех уравнений достаточно для определения R_1, R_2 и R_3 .

В виду симметрии нагрузки, рассматриваем балку как консоль, защемленную в сечении № 1:¹⁾

$$f_2 = \frac{(R_2 + R_3)a^3}{3EJ} + \frac{(R_3a) \cdot a^2}{2EJ} = \frac{a^3}{6EJ} [2R_2 + 5R_3]$$

$$f_3 = \frac{R_3(2a)^3}{3EJ} + \frac{R_2a^3}{3EJ} + \frac{R_2a^2}{2EJ} \cdot a = \frac{a^3}{6EJ} [5R_2 + 16R_3]$$

С другой стороны, аналогично уравнению (369), получаем:

$$\delta_1 - \delta_2 = (R_1 - R_2) \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1J_1} \text{ и}$$

$$\delta_1 - \delta_3 = (R_1 - R_3) \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1J_1}.$$

Приравнивая, по условиям (373), (374), — f_2 и $\delta_1 - \delta_2$, а также f_3 и $\delta_1 - \delta_3$, и сохраняя прежнее обозначение k по формуле (371), получим:

$$\left. \begin{aligned} R_1 - R_2 &= k [2R_2 + 5R_3] \\ R_1 - R_3 &= k [5R_2 + 16R_3] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (376)$$

¹⁾ Напоминаем, что прогиб данного сечения консоли от какого-нибудь груза, находящегося между сечением и плоскостью защемления, определяется, как сумма: 1) прогиба под грузом и 2) произведение угла поворота под грузом на плечо между грузом и данным сечением. Прогиб же сечения между грузом и заделкой определяется от момента и силы, получающихся при переносе груза к сечению.

Решая эти два уравнения совместно с уравнением (375), найдем:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1 + 18k + 7k^2}{5 + 34k + 7k^2} P, \\ R_2 &= \frac{1 + 11k}{5 + 34k + 7k^2} P, \\ R_3 &= \frac{1 - 3k}{5 + 34k + 7k^2} P. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (377)$$

При большой жесткости балки, т. е. когда коэффициент ее гибкости γ близок к нулю, все $R \propto \frac{1}{5}$, и груз P равномерно распределяется на 5 поперечин. При возрастании гибкости балки γ давление R_3 на крайнюю поперечину уменьшается и может сделаться равным нулю, т. е. может быть: $1 - 3k = 0$, если $k = \frac{1}{3}$. При еще большей гибкости балки R_3 становится отрицательным; следовательно, груз P уже не может передаваться на 5 поперечин и распределяется только на 3.

5. Случай 7 поперечин. Защемим, по предыдущему сечению балки № 1 и из ее упругой линии определим прогибы f_2 , f_3 и f_4 , соответствующие поперечинам;

$$f_2 = \frac{(R_2 + R_3 + R_4)a^3}{3EJ} + \frac{(R_3a + 2R_4a)a^2}{2EJ} = \frac{a^3}{6EJ} [2R_2 + 5R_3 + 8R_4]$$

$$f_3 = \frac{R_2a^3}{3EJ} + \frac{R_2a^2}{2EJ} \cdot a + \frac{(R_3 + R_4)(2a)^3}{3EJ} + \frac{R_4a(2a)^2}{2EJ} = \frac{a^3}{6EJ} [5R_2 + 16R_3 + 28R_4]$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{R_2a^3}{3EJ} + \frac{R_2a^2}{2EJ} \cdot 2a + \frac{R_3(2a)^3}{3EJ} + \frac{R_3(2a)^2}{2EJ} \cdot a + \frac{R_4(3a)^3}{3EJ} = \\ &= \frac{a^3}{6EJ} [8R_2 + 28R_3 + 54R_4]. \end{aligned}$$

Сравнение с осадкой поперечин, по аналогии с (376), дает:

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 &= k(2R_2 + 5R_3 + 8R_4), \\ R_1 - R_3 &= k(5R_2 + 16R_3 + 28R_4), \dots \dots \dots (378) \\ R_1 - R_4 &= k(8R_2 + 28R_3 + 54R_4). \end{aligned}$$

Присоединяя уравнение статики:

$$P = R_1 + 2R_2 + 2R_3 + 2R_4 \dots \dots \dots (379).$$

получаем 4 уравнения для определения неизвестных R_1 , R_2 , R_3 и R_4 . Решая их, найдем:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1 + 72k + 131k^2 + 26k^3}{7 + 196k + 193k^2 + 26k^3} \cdot P \\ R_2 &= \frac{1 + 57k + 46k^2}{7 + 196k + 193k^2 + 26k^3} \cdot P \\ R_3 &= \frac{1 + 23k - 18k^2}{7 + 196k + 193k^2 + 26k^3} \cdot P \\ R_4 &= \frac{1 - 18k + 3k^2}{7 + 196k + 193k^2 + 26k^3} \cdot P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (380)$$

Как и прежде, числитель последнего выражения указывает, что при увеличении гибкости балки давление на крайнюю опору R_4 уменьшается и становится равным нулю при

$$k = 0,056.$$

Если $k > 0,056$, то R_4 становится отрицательным и давление P передается только на пять поперечин.

6. Практические указания. На основании полученных значений для k оказывается возможным предварительно, до расчета системы, установить, на какое число поперечин передается давление балки, так как это число зависит только от отношения жесткости балки к жесткости поперечин:

$$k = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{3EJ} \cdot \frac{b^2(3l-4b)}{6E_1J_1} = \frac{a^3}{b^2(3l-4b)} \frac{E_1J_1}{EJ}.$$

Если относительная гибкость балки k больше, чем 0,056, то давление уже не может передаваться на 7 поперечин и распределяется на 5, если же гибкость k , возрастая, становится больше $\frac{1}{3}$, то уже давление не может передаваться на 5 поперечин, а только на 3.

Например, на мостовых деревянных поперечинах 20.25 см², длиной 200 см, помещенных с пролетами, равными ширине поперечины 20 см, рельсы с моментом инерции $J = 736$ см⁴, опирающиеся на расстоянии $b = 21,2$ см от опоры поперечины, распределяют давление только на 3 поперечины по следующему расчету:

$$a = 40 \text{ см}; b = 21,2 \text{ см}; l = 200 \text{ см}.$$

$$E_1J_1 = \frac{0,115 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 25^3}{12} \text{ кгсм}^2 \quad EJ = 2 \cdot 10^6 \cdot 736 \text{ кгсм}^2$$

$$k = \frac{40^3 \cdot 0,115 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 25^3}{12 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 736 \cdot 21,2^2(600 - 4 \cdot 21,2)} = 0,56 > \frac{1}{3}.$$

Наибольшее давление на поперечину придется—

$$R_1 = \frac{1+2k}{3+2k} P = \frac{1+2 \cdot 0,56}{3+2 \cdot 0,56} P = 0,515P.$$

На это давление и следует рассчитывать поперечины.

7. Неразрезная балка на упругих опорах. Под неразрезной балкой здесь обыкновенно подразумевают такую, которая двусторонне связана с поперечинами; последние, таким образом, работают как на положительные, так и на отрицательные реакции. Теория таких балок может быть построена на теореме 3-х моментов. Благодаря равенству пролетов, формула трех моментов упрощается, но ее приходится применять к случаю наклонных пролетов, т. е. пользоваться выражением (122):

$$M_n(l_n + l_{n+1}) = -[1/2(M_{n-1} \cdot l_n + M_{n+1}l_{n+1}) + 3R_n'' + 3EJ(i_{n+1} - i_n)],$$

ибо отдельные пролеты балки приобретают тот или иной наклон к горизонту благодаря неодинаковой осадке поперечин. Выразим уклон пролета i через разность осадок соответствующих опор:

$$i_{n+1} = \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_{n+1}}.$$

А так как осадка δ пропорциональна давлению на поперечину R , то $i_{n+1} = \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{l_{n+1}} = \frac{\gamma_1}{l_{n+1}} (R_{n+1} - R_n)$, где γ_1 — коэффициент пропорциональности, представляющий осадку поперечины, вызываемую единицей давления R . Выше мы назвали этот коэффициент гибкостью поперечины и

показали, что в случае передачи давления посередине поперечины ее осадка $\delta = \frac{Rl^3}{48EJ}$ и гибкость $\gamma_1 = \frac{l^3}{48EJ_1}$, в случае же двух балок на одной поперечине

$$\gamma_1 = \frac{b^2(3l - 4b)}{6E_1J_1}.$$

Соответственно напишем для n -го пролета

$$i_n = \frac{\delta^n - \delta_{n-1}}{l_n} = \frac{\gamma_1}{l_n} (R_n - R_{n-1}).$$

Примем равные пролеты и нагрузим n -ый и $(n+1)$ -ый пролеты сосредоточенными грузами P_n и P_{n+1} , помещая их для общности в расстоянии a и b от соответствующих опор A и B пролета. Тогда реакция R_n^* от нагрузки эпюрой моментов

$$R_n^* = \frac{1}{2} \cdot P_n \frac{a_n b_n}{l} \cdot \frac{l}{3l} (a_n + l) + \frac{1}{2} P_{n+1} \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{l} \cdot \frac{l}{3l} (b_{n+1} + l)$$

и формула трех моментов переписывается в форме:

$$\begin{aligned} M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} + \frac{6EJ}{l^2} \gamma_1 (R_{n-1} - 2R_n + R_{n+1}) = \\ = - \frac{a_n b_n (a_n + l)}{l^2} P_n - \frac{a_{n+1} b_{n+1} (b_{n+1} + l)}{l^2} P_{n+1} \dots \dots \dots (381) \end{aligned}$$

Но в неразрезной балке реакции опор выражаются через моменты по (212):

$$\left. \begin{aligned} R_{n-1} &= R_{n-1}^0 + \frac{1}{l} M_{n-2} - \frac{2}{l} M_{n-1} + \frac{1}{l} M_n \\ R_n &= R_n^0 + \frac{1}{l} M_{n-1} - \frac{2}{l} M_n + \frac{1}{l} M_{n+1} \\ R_{n+1} &= R_{n+1}^0 + \frac{1}{l} M_n - \frac{2}{l} M_{n+1} + \frac{1}{l} M_{n+2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (382)^*$$

Если мы подставим их в выражение (381) для трех моментов, то снова встретимся с выражением $\frac{6EJ}{l^3} - \gamma_1$, которое представляет $\frac{1}{k}$, т. е. относительную гибкость поперечины и балки. Обозначим его k_1 , т. е. примем

$$\frac{1}{k} = k_1 \dots \dots \dots (383);$$

тогда после подстановки и преобразований придем к уравнению:

$$k_1 M_{n-2} + (1 - 4k_1) M_{n-1} + (4 + 6k_1) M_n + (1 - 4k_1) M_{n+1} + k_1 M_{n+2} = C_n.$$

*) В этих формулах R_{n-1}^0 , R_n^0 и R_{n+1}^0 — опорные реакции от нагрузки двух смежных пролетов, вычисляемые, как для простой разрезной балки в каждом из этих пролетов:

$$R_{n-1}^0 = P_n \frac{b_n}{l_n}, R_n^0 = P_n \frac{a_n}{l_n} + P_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \text{ и } R_{n+1}^0 = P_{n+1} \frac{a_{n+1}}{l_{n+1}}.$$

Коэффициент $\frac{2}{l}$ в третьем члене правой части равенств (382) получился, как сумма двух одинаковых слагаемых в скобках формулы (212 — б).

где буквой C_n обозначено выражение, зависящее от положения грузов P_n и P_{n+1} и от геометрических данных простых разрезных балок l :

$$C_n = - \left[\frac{a_n(l^2 - a_n^2)}{l^2} + k_1(l - 3a_n) \right] P_n - \left[\frac{b_{n+1}(l^2 - b_{n+1}^2)}{l^2} + k_1(l - 3b_n) \right] P_{n+1} \dots \dots \dots (385)$$

Применяя общее уравнение (384) к ряду промежуточных опор неразрезной балки, т. е., полагая последовательно $n = 1, 2, 3, \dots, m - 1$, получим столько уравнений, сколько имеется неизвестных опорных моментов:

$$\begin{aligned} (4 + 6k_1) M_1 + (1 - 4k_1) M_2 + k_1 M_3 &= C_1, \dots \dots \dots (386) \\ (1 - 4k_1) M_1 + (4 + 6k_1) M_2 + (1 - 4k_1) M_3 + k_1 M_4 &= C_2, \\ k_1 M_1 + (1 - 4k_1) M_2 + (4 + 6k_1) M_3 + (1 - 4k_1) M_4 + k_1 M_5 &= C_3, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

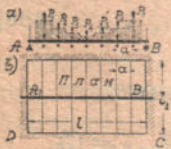
где $C_1 = - \left[\frac{a_1(l^2 - a_1^2)}{l^2} + k_1(l - 3a_1) \right] P_1 - \left[\frac{b_2(l^2 - b_2^2)}{l^2} + k_1(l - 3b_2) \right] P_2,$
 $C_2 = - \left[\frac{a_2(l^2 - a_2^2)}{l^2} + k_1(l - 3a_2) \right] P_2 - \left[\frac{b_3(l^2 - b_3^2)}{l^2} + k_1(l - 3b_3) \right] P_3$ и т. п.

Решение этих уравнений обычное. По определении опорных моментов нетрудно по формулам (382) подсчитать опорные реакции R .

Благодаря тому, что грузы P_n и P_{n+1} были взяты в произвольных местах пролета, является возможность решать задачи о несимметричном изгибе балки, а также о нескольких сосредоточенных грузах и о сплошной нагрузке. В этих случаях надо C составить соответственно для каждого из грузов и просуммировать.

Система (386) представляет решение также и для подвижной нагрузки. Надо рассмотреть несколько положений груза $P = 1$, вычислить для каждого из них рассматриваемую в данном случае неизвестную величину и отложить в виде ординаты под грузом. Полученная таким образом линия влияния решает вопрос, как об опасном положении нагрузки, так и о величине рассматриваемой неизвестной.

§ 19. Расчет перекрестных балок. 1. Опертые балки. а) Случай симметрии. При большом числе поперечин приведенный выше расчет связан со значительной вычислительной работой. В этом случае обыкновенно пользуются приближенным способом проф. Бубнова*). Для ясности положим, что на фиг. 199 ряд поперечин укладывается на ребра прямоугольного контура $ABCD$ и посередине поддерживается продольной балкой AB , показанной в двух проекциях AB и A_1B_1 .



Фиг. 199.

Нагрузка передается непосредственно только поперечинам, продольная же балка служит лишь для поддержки поперечных. Каждая поперечина находится в условиях балки на 3-х опорах, при чем средняя из них, на продольной балке,—податлива, так как балка прогибается. От одного и того же давления поперечины прогиб балки совершается тем легче, чем ближе поперечина к середине пролета балки; поэтому реактивные силы уменьшаются к середине пролета;

*) И. Г. Бубнов. Строительная механика корабля. ч. II, стр. 368.

наибольшая реакция средней опоры поперечины оказывается вблизи опор продольной балки *A* и *B*.

Если бы продольная балка была абсолютно жесткою, то все поперечины находились бы в одинаковых условиях и средняя опорная реакция для всех их была бы:

$$\frac{5}{8} gl_1 = \frac{5}{8} P_0, \text{ где: } g \text{ — есть интенсивность равномерной нагрузки поперечины, } P_0 \text{ — полная ее нагрузка, } l_1 \text{ — пролет поперечины. Теперь же эта реактивная сила меньше: она уменьшается по формуле (125) § 4:}$$

Теперь же эта реактивная сила меньше: она уменьшается по формуле (125) § 4:

$$R = \frac{5}{8} P_0 - \frac{48E_1J_1\delta}{l_1^3} \dots \dots \dots (387)$$

и тем значительнее, чем больше осадка δ , т. е. чем ближе находится поперечина к середине балки. Штриховка фигуры 199-а) дает наглядное представление об относительной величине реактивных сил.

Балка находится под действием ряда сосредоточенных сил P_1, P_2, \dots ; однако, при значительном числе поперечин их можно заменить распределенной нагрузкой, считая каждую из сил равномерной вдоль соответствующей панели *a*. Следовательно, интенсивность нагрузки приблизительно можно считать:

$$p_1 = P_1 : a, p_2 = P_2 : a \text{ и т. д.}$$

в соответственной области поперечин 1, 2 и т. д. На протяжении балки интенсивность нагрузки оказывается ступенчатой. Число ступенек тем больше, чем больше поперечин. Как показывают подсчеты, в обычных условиях сооружений, уже при 4-х — 5-ти балках замена ступеней плавной кривой дает вполне удовлетворительную точность. Итак, мы пришли к балке *AB*, нагруженной сплошной нагрузкой интенсивности

$$p = \frac{P}{a} = \frac{5}{8} \frac{P_0}{a} - \frac{48E_1J_1y}{l_1^3a} \dots \dots \dots (388),$$

где *y* — прогиб продольной балки, равный осадке соответственной поперечины δ .

Первый член выражения представляет постоянную нагрузку, приходящуюся на единицу длины балки *l*, а во втором члене коэффициент $\frac{48E_1J_1}{l_1^3a}$ при *y* есть такая интенсивность давления, которая понижает балку на единицу длины, — это коэффициент упругого сплошного основания *k*. Следовательно, мы пришли к балке, имеющей нагрузку

Следовательно, мы пришли к балке, имеющей нагрузку

$$p = \frac{5}{8} \frac{P_0}{a} - \frac{48E_1J_1}{l_1^3a} \cdot y = q - ky \dots \dots \dots (389)$$

Оказывается, что продольная балка, опирающаяся концами на жесткий контур и несущая ряд равномерно нагруженных поперечин, приблизительно эквивалентна балке, лежащей на сплошном упругом основании типа фиг. 172. Очевидно, ее дифференциальное уравнение должно быть то же:

$$EJ \frac{d^4y}{dx^4} = q - ky \text{ и также должны получиться решения, например, для}$$

изгибающего момента по середине должно быть: $M_{\text{макс.}} = q \frac{l^2}{8} \mu$ (форм. 350).

Наибольшее давление поперечной балки может быть определено по форм. (388), если принять $y = 0$; оно оказывается $P_1 = \frac{5}{8} gl_1 = \frac{5}{8} P_0$.

Наименьшее давление P_4 получим по той же формуле, если вставим вместо y прогиб по середине балки:

$$y_0 = \frac{5}{384} q \frac{l^4}{EJ} \frac{1}{(al)^4} \frac{96}{5} (1 - \eta) = \frac{q}{k} (1 - \eta) \quad (\text{см. форм. 348}).$$

Подставляя это в формулу $P_4 = pa = (q - ky)a$, получим:

$$P_4 = a \left[q - k \frac{q}{k} (1 - \eta) \right] = aq\eta,$$

или
$$P_4 = a \cdot \frac{5}{8} \frac{gl_1}{a} \cdot \eta = \frac{5}{8} P_0 \eta = \frac{5}{8} P_0 \frac{2 \operatorname{Ch}^{1/2} al \cos^{1/2} al}{\operatorname{Ch} al + \cos al}, \quad \dots \quad (390)$$

где P_0 — полная нагрузка поперечины.

Если жесткость продольной балки весьма велика, то $\alpha = \sqrt[4]{k : 4EJ}$ обращается в нуль; вместе с тем становится нулем al , а $\operatorname{Ch}(0)$ приобретает значение 1. Давление $P_4 = \frac{5}{8} P_0$. При уменьшении жесткости балки, α возрастает, и если al достигнет значения π , то $\cos \frac{1}{2} al = \cos \frac{1}{2} \pi = 0$ и должно быть $P_4 = 0$.

Продольная балка не поддерживает поперечин, — она оказывается бесполезной.

Дальнейшее уменьшение жесткости продольной балки приводит к al большему π ; $\cos \frac{1}{2} al$ становится отрицательным и вместе с ним отрицательным оказывается и давление P_4 : балка становится вредным элементом системы, ибо, значительно прогибаясь, только обременяет собою поперечины.

По наибольшему и наименьшему давлению P рассчитываются поперечины системы. Очевидно, в худших условиях будет поперечина середины пролета, в лучших — вблизи опор балки.

б) Пример. Рассчитаем, для примера, квадратное перекрытие ребристой системы из 9 железных поперечин коробчатого сечения № 10 с моментом инерции $J_1 = 213 \text{ см}^4$, поддерживаемых продольной балкой двутаврового сечения № 40 с моментом инерции $J = 26100 \text{ см}^4$. Полная равномерная нагрузка поперечины P_0 . Для форм. (390) находим предварительно:

$$k = \frac{48EJ_1}{l_1^3 a} \quad \text{и} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{48EJ_1}{l_1^3 a 4EJ}} = \frac{2}{l} \sqrt[4]{\frac{J_1}{J} \cdot \frac{30}{4}} =$$

$$= \frac{2}{l} \sqrt[4]{\frac{213 \cdot 30}{26100 \cdot 4}} = \frac{2}{l} \cdot 0,498, \quad \text{ибо} \quad a = \frac{1}{10} \quad l = \frac{1}{10} l_1;$$

далее, $al = 2 \cdot 0,498$, $\operatorname{Ch}^{1/2} al = \operatorname{Ch} 0,498 = 1,1266$, $\operatorname{Ch} al = \operatorname{Ch} 0,996 = 1,5384$, $\cos^{1/2} al = \cos 0,498 = \cos \left(0,498 \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 0,8781$ и $\cos al = 0,5420$ *).

Тогда
$$\frac{2 \operatorname{Ch}^{1/2} al \cos^{1/2} al}{\operatorname{Ch} al + \cos al} = \frac{2 \cdot 1,1266 \cdot 0,8781}{1,5384 + 0,5420} = \approx 0,95,$$

и $P_5 = \frac{5}{8} P_0 \cdot 0,95 = 0,594 P_0$ — немного меньше, чем при абсолютно жесткой балке.

*) Таблицу гиперболических функций см. в § 16,4.

Но если продольную балку взять того же профиля, что и поперечные, т. е. сделать $J = J_1$ то те же вычисления приводят к

$$P_5 = -0,0226 P_0$$

балка окажется вредной.

с) Более общий случай. Когда продольная балка находится не под серединою поперечных, а также при неравномерной или при несимметричной сосредоточенной нагрузке, коэффициент реактивной силы перекрестка уже не будет определяться формулой (388). Однако, и в этих случаях он может быть получен по условию пропорциональности между прогибами и давлениями, производимыми на балку. Освободим сначала поперечину от поддерживающей продольной перекрестной балки; тогда прогиб перекрестка будет: $y_1 = \gamma_1 P_0$, где P_0 общая нагрузка поперечины, а γ_1 — прогиб, производимый единицей нагрузки, например: при равномерно распределенной нагрузке будет: $y_1 = \frac{5l^3}{384E_1J_1} \cdot P_0$, при сосредоточенном грузе посередине: $y_1 = \frac{l^3}{48E_1J_1} P_0$, при двух симметрично расположенных грузах P : $y_1 = \frac{b^2(3l-4b)}{6E_1J_1} P$, и т. д. (сравни. форм. 368).

Введем теперь реактивную силу R со стороны продольной балки; она даст обратный прогиб вверх, также пропорциональный силе: $y_2 = -\gamma_2 R$, например, если продольная балка посередине поперечных, то $y_2 = -\frac{l^3}{48E_1J_1} R$.

Результирующий прогиб будет:

$$y = y_1 + y_2 = \gamma_1 P_0 - \gamma_2 R,$$

а следовательно, — реактивная сила перекрестка:

$$R = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} P_0 - \frac{y}{\gamma_2} \dots \dots \dots (391).$$

Эту силу надлежит считать нагрузкой продольной балки и распределить равномерно на протяжении соответствующей панели a согласно фиг. 199:

$$p = \frac{R}{a} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 a} P_0 - \frac{y}{\gamma_2 a},$$

чтобы получить для формулы (389) интенсивность $q = ky$,

где
$$q = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{P_0}{a} \text{ и } k = \frac{1}{\gamma_2 a} \dots \dots \dots (392).$$

Дальнейшее решение задачи отличается от предыдущего частного решения только подстановкою вместо $q = \frac{5}{8} \frac{P_0}{a}$ более общего выражения

$$q = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{P_0}{a}.$$

д) Применение поперечных балок с большим числом пересечений разнообразно. Они встречаются в плоских междуэтажных перекрытиях, как деревянных*), так и, в особенности, — железобетонных. Перекрестные балки представляют основной каркас для устройства потолков и водонепроницаемых переборок в морских судах, для плюжных ворот и проч. Во всех этих случаях, проектируя систему, целесообразно предварительно разрешить экономический вопрос: сбережения, которые получаются на

*) Такое покрытие характерно для старых украинских построек. Продольная балка называется здесь сволоком.

поперечинах, превосходят ли затрату материала и работы на продольную балку. Конечно, окончательное решение надо принять в соответствии с конструктивными соображениями и специальным назначением системы.

2. Защемленные и неразрезные балки. Если концы балки защемлены или упруго заделаны, то в них появляются опорные моменты, определяемые из дополнительных условий закрепления, например: для зашпемленного конца, по формулам (349), (353) и (354), пишут, что нулю равняется угол поворота от нагрузки и от опорных моментов; для неразрезной балки решают соответствующее уравнение трех моментов (см. форм. 357).

а) Продольная балка. Для проверки прочности продольной балки, обыкновенно можно ограничиться расчетом двух моментов зашпемления ее концов и третьего момента посередине (хотя последний при несимметричных моментах зашпемления и не является максимальным, но он сравнительно мало отличается от максимального). При постоянном сечении балки наибольший из этих трех моментов определяет размеры ее сечения; при переменной же толщине приходится вычислять и другие моменты.

Для основной балки, освобожденной от моментов зашпемления, изгибающий момент по середине пролета вычисляется по форм. (350):

$$Mq = \frac{ql^2}{8} \mu, \dots \dots \dots (393),$$

для той же балки при действии одного опорного момента M'_A , по формуле (355), момент посередине будет:

$$M^0_1 = M'_A \frac{\text{Ch } \frac{1}{2} al \cos \frac{1}{2} al}{\text{Ch } al + \cos al} = \frac{1}{2} M'_A \eta. \dots \dots \dots (394^*)$$

и для другого момента M'_B — соответствующее выражение.

Вычисляя момент для середины балки приближенно, оба опорные момента можно заменить средним арифметическим $\frac{1}{2} (M'_A + M'_B)$ и, для удобства, — выразить в долях ξ от момента для полного зашпемления M_A , т. е. по формуле:

$$\frac{1}{2} (M'_A + M'_B) = \xi M_A, \text{ где } M_A = -\frac{ql^2}{12} \mu_2 \text{ (см. 356).}$$

Тогда изгибающий момент по середине пролета балки от действия двух приближенно одинаковых опорных моментов ξM_A будет:

$$\begin{aligned} M_2^0 &= \xi M_A \eta = -\xi \frac{ql^2}{12} \mu_2 \eta = \\ &= -2\xi \frac{ql^2}{12} \frac{3}{2u^2} \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} \cdot \frac{\text{Ch } u \cos u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} \end{aligned}$$

Суммарный момент посередине будет:

$$\begin{aligned} M_{\text{марс.}} &= \frac{ql^2}{8} \mu - \xi \frac{ql^2}{12} \mu_2 \eta = \\ &= \frac{ql^2}{8} \left(\frac{2}{u^2} \frac{\text{Sh } u \sin u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} - \frac{2\xi}{u^2} \cdot \frac{\text{Ch } u \cos u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} \cdot \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} \right). \end{aligned}$$

*) Для общности решения моменты M_A и M_B берутся в предположении упругой заделки, а не полного зашпемления.

Прибавим и вычтем в скобках величину $\xi \frac{2}{u^2} \cdot \frac{\text{Sh } u \sin u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u}$ и обозначим буквою μ_1 выражение:

$$\begin{aligned} \frac{6}{u^2} \frac{\text{Sh } u \sin u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} - \frac{6}{u^2} \frac{\text{Ch } u \cos u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} \cdot \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} = \\ = \frac{6}{u^2} \frac{\text{Ch } u \sin u - \text{Sh } u \cos u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} = \mu_1 \dots \dots \dots (395); \end{aligned}$$

воспользуемся также прежним обозначением (350):

$$\mu = \frac{2}{u^2} \frac{\text{Sh } u \sin u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u};$$

тогда получится:

$M_{\text{макс.}} = \frac{ql^2}{8} \left[(1 - \xi) \mu + \frac{1}{3} \xi \mu_1 \right]$. А так как, по (389), для продольной балки помещенной по середине поперечных, — $q = \frac{5}{8} P_0 : a$, то:

$$M_{\text{макс.}} = \frac{5}{64} P_0 \frac{l^2}{a} \left[(1 - \xi) \mu + \frac{1}{3} \xi \mu_1 \right] \dots \dots \dots (396).$$

При ином расположении балки и при иной нагрузке, вместо $\frac{5}{64}$ должен быть другой коэффициент:

Вычисление изгибающего момента не представляет затруднений, если имеются в распоряжении таблицы для μ и μ_1 .

б) Поперечные балки. Наибольшая реакция средней опоры поперечины получается у концов продольной балки; по предыдущему, при расположении продольной балки посередине и при равномерной нагрузке поперечины она будет $\frac{5}{8} P_0$, вообще же говоря $R = \frac{\gamma}{\gamma_1} P_0$, где $\gamma : \gamma_1$ — относительная гибкость поперечной балки при нагрузке и при реактивной силе продольной балки (см. § 19,10).

Наименьшая реакция соответствует месту наибольшего прогиба продольной балки, приближенно, — середине пролета. Поэтому она определится по форм. (391), если вместо y подставить прогиб середины балки от нагрузки ее поперечными балками и опорными моментами. Так как прогиб от этих нагрузок определяется формулами (348) и (352) и составляет

$$\frac{q}{k} (1 - \eta) + \xi \frac{M_A l^2}{8EJ} \mu, \text{ то по (391):}$$

$$R_{\text{мин.}} = P_0 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \frac{y}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} P_0 - \frac{q}{k \gamma_2} (1 - \eta) - \frac{\xi}{\gamma_2} \frac{M_A l^2}{8EJ} \mu$$

или, по равенству (392): $\frac{q}{k} = \gamma_1 P_0$:

$$R_{\text{мин.}} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} P_0 \eta - \frac{\xi M_A l^2}{8 \gamma_2 EJ} \mu$$

А после подстановки значения η , μ , M_A по формулам: (348, 351 и 356) и $q = k \gamma_1 P_0 = \frac{\gamma_1 P_0 64 EJ u^4}{l^4}$ по форм. (392):

$$R_{\text{мин.}} = \frac{\gamma_1 P_0}{\gamma_2} \left(\frac{2 \cos u \text{Ch } u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} + \xi \frac{\text{Sh } 2u - \sin 2u}{\text{Sh } 2u + \sin 2u} \frac{2 \text{Sh } u \sin u}{\text{Ch } 2u + \cos 2u} \right).$$

Прибавляя, по предыдущему, и вычитая в скобках

$$\xi = \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u}, \text{ и пользуясь прежним обозначением (348):}$$

$$\eta = \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} \text{ а также, вводя новое обозначение:}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cos u \operatorname{Ch} u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} + \frac{\operatorname{Sh} 2u - \sin 2u}{\operatorname{Sh} 2u + \sin 2u} \cdot \frac{2 \operatorname{Sh} u \sin u}{\operatorname{Ch} 2u + \cos 2u} = \\ & = \frac{2(\operatorname{Sh} u \cos u + \operatorname{Ch} u \sin u)}{\operatorname{Sh} 2u + \sin 2u} = \eta_1, \end{aligned}$$

получим окончательно:

$$R_{\text{мин.}} = \frac{\gamma_1 P_0}{\gamma_2} [(1 - \xi) \eta + \xi \eta_1] \dots \dots \dots (397).$$

Как и прежде, с возрастанием u , т. е. с уменьшением жесткости балки EJ , значение $R_{\text{мин.}}$ убывает; при таком соотношении жесткостей, когда $R_{\text{мин.}} = 0 = (1 - \xi) \eta + \xi \eta_1$ — продольная балка теряет значение, а при меньшей жесткости — она вредна.

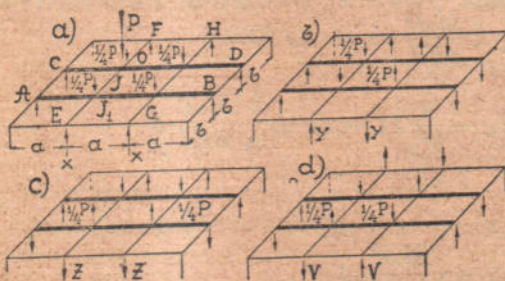
Когда таким образом определены реакции поперечин, дальнейший расчет последних не представляет затруднений: здесь придется рассматривать балку на 3-х опорах с уже известной реакцией средней опоры.

3. Случай нескольких перекрестных балок по существу не отличается от предыдущего. Как и при одиночной балке здесь надо определить давления, передаваемые поперечинами на балку, исходя из равенства прогибов; но число неизвестных, а следовательно, и вычислительная работа будет значительно больше. Обычно пользуются упрощениями, которые допускаются симметрией системы, иногда прибегают к преобразованию нагрузки, чтобы таким путем упростить технику вычислений.



Фиг. 200.

Способ преобразования нагрузки, разработанный Андреем, рассматривается в следующей части курса, посвященной рамным системам, и здесь мы ограничимся примером одного сосредоточенного груза, приложенного в пересечении продольной и поперечной балок. Положим, что система из 4-х взаимно пересекающихся балок фигуры 200 несет один груз P . Заменим последний четырьмя составляющими, приложенными на перекрестках, выбирая их так, чтобы получилась симметричная система, удобная для расчета, например, возьмем силы по $\frac{1}{4} P$, как показано на фиг. 201-а). Рас-



Фиг. 201.

смотрим еще 3 других системы нагрузки тех же перекрестков: $b)$, $c)$ и $d)$, имея в виду, что задача содержит 4 неизвестных, и подберем эти системы так, что при сложении всех нагрузок в узле 0 получилось P , а во всех остальных, в результате, оказался — нуль. Такие системы показаны на фигурах $b)$, $c)$ и $d)$ короткими стрелками — это ряд пар из грузов $\frac{1}{4} P$. Оче-

видно, искомые силы взаимодействия между балками, представляют сумму реакций, получающихся в отдельных фигурах.

Нам предстоит решить ряд отдельных простых задач. Благодаря симметрии, все эти задачи содержат по одному неизвестному: в случае $a)$ — X , в случае $b)$ — Y и т. д.

Определим для примера X по фиг. a), пользуясь формулой для прогиба балки, нагруженной двумя симметрично расположенными сосредоточенными грузами. По таблице III (см. Введение), общее выражение прогиба под грузом:

$$y_a = P \frac{a^2}{6EJ} (3l - 4a).$$

Если принять $l = 3a$ и предположить, что поперечина AB передает продольной балке давление X , сама неся остаток $\frac{1}{4} P - X$, то из этой общей формулы получится:

$$\text{прогиб поперечины } AB: y_a = \left(\frac{1}{4} P - X \right) \frac{5}{6} \frac{a^3}{EJ_1},$$

$$\text{прогиб балки } EF: y_b = X \frac{5}{6} \frac{b^3}{EJ}.$$

Приравнивая, сокращая и определяя X , имеем:

$$X = \frac{1}{4} P \frac{1}{1+k}, \text{ где } k = \frac{J_1}{J} \cdot \frac{b^3}{a^3}.$$

Таким же образом получаются реакции и в других частных случаях нагрузки:

$$Y = \frac{1}{4} P \frac{1}{1+15k}, \quad Z = \frac{5}{4} P \frac{1}{15+k}, \quad V = \frac{1}{12} P \frac{1}{1+k}.$$

При квадратной системе и одинаковых балках, т. е. при $a = b$, $J_1 = J$ будет:

$$X = \frac{1}{8} P, \quad Y = \frac{1}{64} P, \quad Z = \frac{5}{64} P \text{ и } V = \frac{1}{24} P.$$

Теперь истинные реакции опорных точек системы по фиг. a):

$$F = X + Y + Z + V = \frac{25}{96} P; \quad H = X + Z - (Y + V) = \frac{14}{96} P;$$

$$G = X + V - (Y + Z) = \frac{7}{96} P; \quad E = X + Y - (Z + V) = \frac{2}{96} P.$$

Вследствие симметрии остальные реакции определяются теми же величинами: $C = F$, $A = H$, $D = E$ и $B = G$. После этого без затруднения вычисляются силы взаимодействия в перекрестках и получаются эпюры моментов.

При большом числе продольных балок с успехом пользуются приближенным способом проф. С. П. Тимошенко *).

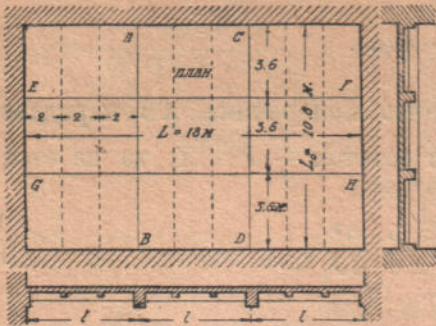
§ 20. Примеры и задачи. 1. Пример. предварительного расчета перекрытия актового зала в одном из новых научных учреждений г. Киева **), По первоначальному эскизу перекрытие должно представлять железобетонную плиту толщиной 6 см, расположенную на системе поперечных балок (пунктирных), опирающихся на две продольных балки большой жесткости, поддерживаемые главными поперечными балками (арками) AB

*) См. С. П. Тимошенко. Курс теории упругости, ч. II. 1916 г., стр. 72.

**) Здесь приводится эскизный приближенный расчет перекрытия, как пример пользования таблицами и вышеприведенными формулами. Для простоты сделано допущение, что жесткость арок AB и CD велика по сравнению с жесткостью продольных балок EF и GH , а жесткость последних — велика по сравнению с жесткостью верхних поперечных балок, показанных в плане пунктиром. Во втором примере путем сравнительного расчета системы перекрестных балок сделана примерная оценка этого допущения.

и CD (фиг. 202). В этом примере расчет произведен в предположении, что главные балки неподатливы.

а) Расчетные величины для плиты. Все поперечные балки в средней части перекрытия находятся, примерно, в одинаковых условиях; поэтому плиту, приближенно, можно считать лежащей на весьма большом числе опор и воспользоваться таблицей 4 из § 9.3.



Фиг. 202.

Пролетами плиты l считаем расстояние между поперечными балками—2 м. и для расчета выделяем полосу шириной в 1 м. по перпендикуляру к пролету.

Постоянную нагрузку такой полосы составляют: вес бетона на кирпичном щебне

$$p = 1.1 \cdot 0,06 \cdot 2000 = 120 \text{ кг/м}$$

вес настила

$$80 \text{ ,, всего .. } 200 \text{ кг/м.}$$

Временная нагрузка принимается $q = 400 \text{ кг/м.}$

При таких условиях по таблице 4 из § 9.3 получим:

*Опорные моменты *).*

$$M_{1 \text{ макс.}} = (-0,1057 \cdot 200 + 0,0141 \cdot 400)^2 = -62,0 \text{ т. м.}$$

$$M_{1 \text{ мин.}} = (-0,1057 \cdot 200 - 0,1198 \cdot 400)^2 = -276,24 \text{ т. м.}$$

$$M_{2 \text{ макс.}} = (-0,0774 \cdot 200 + 0,0331 \cdot 400)^2 = -8,96 \text{ т. м.}$$

$$M_{2 \text{ мин.}} = (-0,0774 \cdot 200 - 0,1105 \cdot 400)^2 = -238,72 \text{ т. м.}$$

$$M_{3 \text{ макс.}} = (-0,0849 \cdot 200 + 0,0297 \cdot 400)^2 = -20,40 \text{ т. м.}$$

$$M_{3 \text{ мин.}} = (-0,0849 \cdot 200 - 0,1146 \cdot 400)^2 = -251,28 \text{ т. м.}$$

$$M_{4 \text{ макс.}} = (-0,0829 \cdot 200 + 0,0307 \cdot 400)^2 = -17,20 \text{ т. м.}$$

$$M_{4 \text{ мин.}} = (-0,0829 \cdot 200 - 0,1136 \cdot 400)^2 = -248,08 \text{ т. м.}$$

Моменты в пролетах.

$$M^I_{\text{ макс.}} = (+0,0774 \cdot 200 + 0,0996 \cdot 400)^2 = +221,28 \text{ т. м.}$$

$$M^I_{\text{ мин.}} = (+0,0774 \cdot 200 - 0,0222 \cdot 400)^2 = +26,40 \text{ т. м.}$$

$$M^{II}_{\text{ макс.}} = (+0,0339 \cdot 200 + 0,0793 \cdot 400)^2 = +154,00 \text{ т. м.}$$

$$M^{II}_{\text{ мин.}} = (+0,0339 \cdot 200 - 0,0454 \cdot 400)^2 = -45,52 \text{ т. м.}$$

$$M^{III}_{\text{ макс.}} = (+0,0439 \cdot 200 + 0,0844 \cdot 400)^2 = +170,16 \text{ т. м.}$$

$$M^{III}_{\text{ мин.}} = (+0,0439 \cdot 200 - 0,0405 \cdot 400)^2 = -29,68 \text{ т. м.}$$

$$M^{IV}_{\text{ макс.}} = (+0,0411 \cdot 200 + 0,0830 \cdot 400)^2 = +165,68 \text{ т. м.}$$

$$M^{IV}_{\text{ мин.}} = (+0,0411 \cdot 200 - 0,0419 \cdot 400)^2 = -34,16 \text{ т. м.}$$

б) Расчетные величины для поперечных балок. Для предварительного расчета, балки считаются лежащими на 4-х незыблемых опорах. Постоянную нагрузку балки по грубому расчету составляет: 1) вес плиты со штукатуркой и половым настилом—200 кг/м², что на 1 пог. м. балки дает 200 · 2 = 400 кг.

2) Собственный вес балки—45 кг/м—50

Всего 450 кг**).

Временная нагрузка на один пог. м. балки 2.400 = 800 кг. **).

*) При определениигибающих моментов, в запас прочности, считаем плиту, свободно вращающуюся по краям, т. е. принимаем, что $M_0 = 0$.

***) Точнее, по таблицам для плиты на бесконечно большом числе опор:

$$p = (45 + 1,1340 \cdot 200)2 = 544 \text{ кг/м и } q = 1,2189 \cdot 400 \cdot 2 = 975 \text{ кг/м.}$$

По грубому расчету предполагается, что на каждую поперечную балку передается нагрузка полосы шириной в 2 м, равной расстоянию между осями поперечных балок. Хотя это допущение и противоречит принятому условию свободного опирания концов плиты, при котором крайние балки получают перегруженными % на 15—20 по сравнению со средними, но оно принимается, как относящееся к средней „типичной“ поперечной балке.

Изгибающие моменты.

При расчете пользуемся таблицей § 5,5с. В первом пролете для сечений, определяемых относительным расстоянием $\frac{x}{l} = 0,2, 0,4, 0,6\dots$, моменты обозначены $M_{0,2}, M_{0,4}, M_{0,6}\dots$, во втором — $M_{1,2}, M_{1,4}, M_{1,6}$. Для данного сечения m первая строка представляет максимальный расчетный момент, вторая — минимальный.

$$\begin{aligned}
 M_{0,2} &= (+ 0,060 \cdot 450 + 0,070 \cdot 800)3,6^2 = + 1075,0 \text{ т. м.} \\
 &\quad (+ 0,060 \cdot 450 - 0,010 \cdot 800)3,6^2 = + 246,0 \\
 M_{0,4} &= (+ 0,080 \cdot 450 + 0,100 \cdot 800)3,6^2 = + 1504,0 \\
 &\quad (+ 0,080 \cdot 450 - 0,020 \cdot 800)3,6^2 = + 259,2 \\
 M_{0,6} &= (+ 0,060 \cdot 450 + 0,090 \cdot 800)3,6^2 = + 1282,0 \\
 &\quad (+ 0,060 \cdot 450 - 0,030 \cdot 800)3,6^2 = + 38,88 \\
 M_{0,8} &= (+ 0,000 \cdot 450 + 0,0402 \cdot 800)3,6^2 = + 417,0 \\
 &\quad (+ 0,000 \cdot 450 - 0,0402 \cdot 800)3,6^2 = - 417,0 \\
 M_1 &= (- 0,100 \cdot 450 + 0,0167 \cdot 800)3,6^2 = - 410,0 \\
 &\quad (- 0,100 \cdot 450 - 0,1167 \cdot 800)3,6^2 = - 1793,0 \\
 M_{1,2} &= (- 0,020 \cdot 450 + 0,030 \cdot 800)3,6^2 = + 194,5 \\
 &\quad (- 0,020 \cdot 450 - 0,050 \cdot 800)3,6^2 = - 635,02 \\
 M_{1,4} &= (+ 0,020 \cdot 450 + 0,070 \cdot 800)3,6^2 = + 842,5 \\
 &\quad (+ 0,020 \cdot 450 - 0,050 \cdot 800)3,6^2 = - 402,0 \\
 M_{1,5} &= (+ 0,025 \cdot 450 + 0,075 \cdot 800)3,6^2 = + 923,4 \\
 &\quad (+ 0,025 \cdot 450 - 0,050 \cdot 800)3,6^2 = - 372,6
 \end{aligned}$$

Поперечные силы.

$$\begin{aligned}
 Q_{0,0} &= (+ 0,4 \cdot 450 + 0,45 \cdot 800)3,6 = + 1944,0 \text{ т.} \\
 &\quad (+ 0,4 \cdot 450 - 0,05 \cdot 800)3,6 = + 504,0 \\
 Q_{0,2} &= (+ 0,2 \cdot 450 + 0,2752 \cdot 800)3,6 = + 1116,58 \\
 &\quad (+ 0,2 \cdot 450 - 0,0752 \cdot 800)3,6 = + 107,2 \\
 Q_{0,4} &= (0,0 \cdot 450 + 0,1496 \cdot 800)3,6 = + 430,82 \\
 &\quad (0,0 \cdot 450 - 0,1496 \cdot 800)3,6 = - 430,82 \\
 Q_{0,6} &= (- 0,2 \cdot 450 + 0,0694 \cdot 800)3,6 = - 124,0 \\
 &\quad (- 0,2 \cdot 450 - 0,2694 \cdot 800)3,6 = - 1100,0 \\
 Q_{0,8} &= (- 0,4 \cdot 450 + 0,0280 \cdot 800)3,6 = - 567,36 \\
 &\quad (- 0,4 \cdot 450 - 0,4280 \cdot 800)3,6 = - 1880,64 \\
 Q_{1,0} &= (- 0,6 \cdot 450 + 0,0167 \cdot 800)3,6 = - 923,9 \\
 &\quad (- 0,6 \cdot 450 - 0,6167 \cdot 800)3,6 = - 2748,1
 \end{aligned}$$

По другую сторону опоры:

$$\begin{aligned}
 Q_{1,0} &= (+ 0,5 \cdot 450 + 0,5833 \cdot 800)3,6 = + 2490,0 \\
 &\quad (+ 0,5 \cdot 450 - 0,0833 \cdot 800)3,6 = + 571,54 \\
 Q_{1,2} &= (+ 0,3 \cdot 450 + 0,3991 \cdot 800)3,6 = + 1635,10 \\
 &\quad (+ 0,3 \cdot 450 - 0,0991 \cdot 800)3,6 = + 200,59 \\
 Q_{1,4} &= (+ 0,1 \cdot 450 + 0,2537 \cdot 800)3,6 = + 892,66 \\
 &\quad (+ 0,1 \cdot 450 - 0,1539 \cdot 800)3,6 = - 280,66 \\
 Q_{1,5} &= (0,0 \cdot 450 + 0,1979 \cdot 800)3,6 = + 569,95 \\
 &\quad (+ 0,0 \cdot 450 - 0,1979 \cdot 800)3,6 = - 569,95
 \end{aligned}$$

Опорные реакции.

$$\begin{aligned}
 A_0 &= (0,40 \cdot 450 + 0,45 \cdot 800)3,6 = + 1943,00 \\
 &\quad (0,40 \cdot 450 - 0,050 \cdot 800)3,6 = + 504,00 \\
 A_1 &= (1,10 \cdot 450 + 1,20 \cdot 800)3,6 = + 5238,00 \\
 &\quad (1,10 \cdot 450 - 0,10 \cdot 800)3,6 = + 1494,00
 \end{aligned}$$

с) Продольные балки рассматриваются, как лежащие на 4-х незыблемых опорах, расстояния между которыми одинаковы — 6 м. На трех каждого пролета приложены сосредоточенные силы — давления поперечных балок, — как от постоянной, так и от временной нагрузки. Для простоты в тех же узловых точках сосредоточен и собственный вес балки 120 кг. на 1 пог. м. Величина давления поперечных балок на продольные определится по расчету реакций трехпролетной балки при равномерно распределенной нагрузке. Как указывалось в § 12 наших „Систем с лишними неизвестными“, опорный момент такой балки $M_2 = -\frac{1}{10} ql^2$, а потому опорная реакция будет:

$$R_1 = \frac{1}{2} ql + \left(\frac{1}{10} ql^2 : l \right) + \frac{1}{2} ql = \frac{11}{10} ql = 1,1ql.$$

Постоянную узловую нагрузку продольной балки составляет

$$1,1 \cdot 450 \cdot 3,6 + 2 \cdot 120 = 2022 \text{ кг} = \approx 2020,$$

временную $1,1 \cdot 800 \cdot 3,6 = 3830 \text{ кг}$.

Так как расположение поперечных балок на продольной соответствует фиг. 74 — с), то расчетные величины определяем по таблице 5 из § 5,5.

Моменты.

$$\begin{aligned} M_{0,33} &= (+ 0,2444 \cdot 2020 + 0,2889 \cdot 3830)6 = + 9602,9 \text{ т. м.} \\ & \quad (+ 0,2444 \cdot 2020 - 0,0444 \cdot 3830)6 = + 1943,4 \\ M_{0,67} &= (+ 0,1555 \cdot 2020 + 0,2444 \cdot 3830)6 = + 7447,7 \\ & \quad (+ 0,1555 \cdot 2020 - 0,0889 \cdot 3830)6 = - 158,4 \\ M_{1,0} &= (- 0,2667 \cdot 2020 + 0,0444 \cdot 3830)6 = - 2210,0 \\ & \quad (- 0,2667 \cdot 2020 - 0,3111 \cdot 3830)6 = - 10366,0 \\ M_{1,33} &= (+ 0,0667 \cdot 2020 + 0,2000 \cdot 3830)6 = + 5404,2 \\ & \quad (+ 0,0667 \cdot 2020 - 0,1333 \cdot 3830)6 = - 2258,0 \\ M_{1,5} &= (+ 0,0667 \cdot 2020 + 0,2000 \cdot 3830)6 = + 5404,2 \\ & \quad (+ 0,0667 \cdot 2020 - 0,1333 \cdot 3830)6 = - 2258 \end{aligned}$$

Поперечные силы.

$$\begin{aligned} Q_{00} &= + 0,7333 \cdot 2020 + 0,8667 \cdot 3830 = + 4791 \text{ т.} \\ & \quad + 0,7333 \cdot 2020 - 0,1333 \cdot 3830 = + 970,8 \\ Q_{0,33} &= - 0,2667 \cdot 2020 + 0,2790 \cdot 3830 = + 530,1 \\ & \quad - 0,2667 \cdot 2020 - 0,5457 \cdot 3830 = - 747,2 \\ Q_{0,67} &= - 1,2667 \cdot 2020 + 0,0444 \cdot 3830 = - 2388 \\ & \quad - 1,2667 \cdot 2020 - 1,3111 \cdot 3830 = - 7580,2 \\ Q_{1,0} &= + 1,0000 \cdot 2020 + 1,2222 \cdot 3830 = + 6701 \\ & \quad + 1,0000 \cdot 2020 - 0,2222 \cdot 3830 = + 1169 \\ Q_{1,33} &= 0,0 \cdot 2020 + 0,5333 \cdot 3830 = + 2042,5 \\ & \quad 0,0 \cdot 2020 - 0,5333 \cdot 3830 = - 2042,5 \end{aligned}$$

Опорные реакции.

$$\begin{aligned} R_0 &= + 0,7333 \cdot 2020 + 0,8667 \cdot 3830 = + 4790 \text{ т.} \\ & \quad + 0,7333 \cdot 2020 - 0,1333 \cdot 3830 = + 970,7 \\ R_1 &= + 2,2667 \cdot 2020 + 2,5333 \cdot 3830 = + 14276 \\ & \quad + 2,2667 \cdot 2020 - 0,2667 \cdot 3830 = + 3555 \end{aligned}$$

2. Сравнительный расчет того же перекрытия, как системы перекрестных балок. Верхние поперечные балки проектируются двутавровые № 28

с моментом инерции $J_0 = 6878 \text{ см}^4$, продольные — решетчатые двойные, двутаврового профиля высотой 700 мм, с моментом инерции $J = 105700 \text{ см}^4$. Отношение жесткостей

$$J : J_0 = 15,36 = k_0.$$

Имея в виду впоследствии так подобрать главные поперечные арки AB и CD , чтобы работу продольных балок приблизить к условиям разрезных балок с пролетом $l = \frac{1}{3}L$, т. е. рассчитывая на значительную жесткость арок, рассматриваем только часть l покрытия между арками. Получается симметричная двойная перекрестная система. Хотя она имеет четыре перекрестка, но, благодаря симметрии системы и постоянной нагрузки, — здесь только одна лишняя неизвестная.

Обозначим силу взаимодействия балок в перекрестке X . Тогда поперечная балка окажется под влиянием равномерно распределенной нагрузки сверху $p_0 = 450 \text{ кг}$ на 1 пог. м. и снизу — под действием двух реактивных сил X . Продольная балка несет собственный вес $p = 120 \text{ кг}$ на 1 пог. м. и давление двух сил X .

Приравнявая прогибы этих балок в месте их пересечения, получим уравнение для определения неизвестной X .

По столбцу 12 таблицы III (см. введение) уравнение упругой линии для равномерно распределенной нагрузки:

$$y = \frac{p_0 L_0^4}{24 E J_0} \left(\frac{x}{L_0} - 2 \frac{x^3}{L_0^3} + \frac{x^4}{L_0^4} \right).$$

Прогиб перекрестка получится, если положить $x = 3,6 \text{ м}$ при $L_0 = 10,8 \text{ м}$ и

$$\frac{x}{L_0} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x^3}{L_0^3} = \frac{1}{27}, \quad \frac{x^4}{L_0^4} = \frac{1}{81};$$

$$y = \frac{450 \cdot 10,8^4 \cdot 10^8 \cdot 22}{10^2 \cdot 24 E J_0 \cdot 81}.$$

По 11 столбцу той же таблицы для двух симметричных грузов X :

$$y = \frac{X a^2}{6 E J_0} (3L_0 - 4a) = \frac{X l_0^2 L_0}{6 E J_0} \left(3 - 4 \frac{l_0}{L_0} \right) = X \frac{3,6^2 \cdot 10,8 \cdot 10^6 \cdot 5}{6 \cdot E J_0 \cdot 3}.$$

Следовательно, результат для поперечной балки будет:

$$y_0 = \frac{450 \cdot 10,8^4 \cdot 10^6 \cdot 22}{24 \cdot E J_0 \cdot 81} - \frac{3,6^2 \cdot 10,8 \cdot 10^6 \cdot 5}{6 \cdot E J_0 \cdot 3} X. \dots \dots (398)$$

Таким же образом для продольной балки:

$$y = \frac{120 \cdot 6^4 \cdot 10^6 \cdot 22}{24 \cdot E J \cdot 81} + \frac{2^2 \cdot 6 \cdot 10^6 \cdot 5}{6 \cdot E J \cdot 3} X. \dots \dots (399)$$

Приравнявая y_0 и y , получим, при $EJ : EJ_0 = k_0$:

$$X = 33 \frac{3,6^4 \cdot 15k_0 - 64}{3,6^3 k_0 + 8} = 1758 \text{ кг}.$$

По предыдущим таблицам, для случая незыблемых опор, одна только постоянная нагрузка дает:

$$X = 1,10 \cdot 450 \cdot 3,6 = 1780 \text{ кг}.$$

Разница — около 1%, так что, оставаясь в пределах принятой точности, расчет поперечных балок и нагрузки продольных можно производить в предположении незыблемости этих последних.

На этом основании верхние поперечные балки и плита рассчитываются по предыдущим таблицам первого примера.

Продольные балки и главные поперечные арки составляют двойную перекрестную систему той же схемы (см. сплошные линии); разница лишь

в том, что продольная балка здесь нагружена рядом сосредоточенных сил в виде давлений верхних поперечных балок. Однако, число этих сил значительно, 8, они равны и равномерны; поэтому и здесь можно воспользоваться формулами соответствующими (398) и (399).

Сосредоточенные грузы продольной балки:

$P = 1780 + 2 \cdot 120 = 2020$ кг *) заменяем равномерно распределенной нагрузкой на 1 пог. метр:

$$p = 9 \cdot 2020 : 18 = 1010 \text{ кг/м,}$$

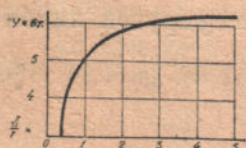
принимая $L = 18$ м, $l = 6$ м и отношение жесткостей поперечной арки и продольной балки принимаем:

$$EJ_1 : EJ = k,$$

обозначаем взаимодействие брусков в перекрестке Y , тогда равенство прогибов даст:

$$\frac{1010 \cdot 18^4 \cdot 10^6 \cdot 22}{24 \cdot EJ \cdot 81} - \frac{Y \cdot 6^2 \cdot 18 \cdot 10^6 \cdot 5}{6EJ \cdot 3} = \frac{450 \cdot 10,8^4 \cdot 10^6 \cdot 22}{24 \cdot EJ_1 \cdot 81} + Y \frac{3,6^2 \cdot 10,8 \cdot 10^6 \cdot 5}{6 \cdot EJ_1 \cdot 3}$$

Отсюда определяется



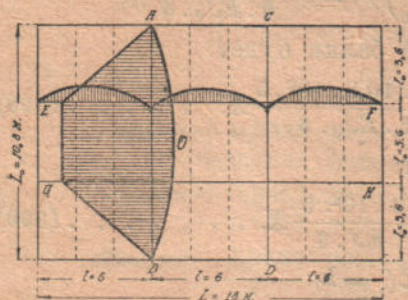
Фиг. 203.

$$Y = \frac{34 \cdot 11}{27} \cdot \frac{101 - \frac{1}{k} \cdot 4,5 \cdot 1,296}{0,5 + \frac{1}{k} \cdot 0,108} = \frac{6666 - 384,9 \frac{1}{k}}{1 + 0,216 \frac{1}{k}}$$

Давая k различные значения, построим кривую зависимости давления Y в перекрестке от жесткости поперечной балки (фиг. 203):

при $k = 1/2$	1	1,5	2,0	4,0	∞
$Y = 4115$	5165	5600	5840	6227,4	6666

Изменение жесткости поперечной арки в пределах, близких к жесткости продольной балки, в особенности в сторону понижения, чувствительно отражается на величине реактивной силы перекрестка. Кроме того, продольная балка при данных условиях всегда нагружает дополнительно поперечные арки, являясь для последних „вредной“.



Фиг. 204.

Принимая $J_1 = 4J$, определим изгибающие моменты продольной балки, как разность моментов от равномерно распределенной сплошной нагрузки $p = 1010$ кг/м и от сосредоточенных сил X — примерный вид эпюры моментов наметен на фиг. 204 волнистой линией. Первые моменты вычисляются по формуле:

$$M = \frac{1}{2} px(Lx - x) = \frac{1}{2} pLx \left(1 - \frac{x}{L} \right), \text{ где } L = 3l,$$

вторые — по формуле: $M = Yx$ в первом пролете, а $M = Yl$ — во втором.

$$M_{0,33} = \frac{1010}{2} \cdot 18 \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{18} \right) - 6227,42 = + 3705 \text{ кг м}$$

$$M_{0,67} = \text{„} \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{4}{18} \right) - \text{„} \cdot 4 = + 3370$$

*) 120 — собств. вес 1 пог. м. продольной балки.

$$M_{1,0} = \frac{1010}{2} \cdot 18,6 \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 6227,4 \cdot 6 = -1004$$

$$M_{1,33} = +3036 \text{ кг. м. и } M_{1,5} = +3541 \text{ кг. м.}$$

По таблице 5 и § 5,5 для незыблемых опор:

$$M_{0,33} = 0,2441 \cdot 2020 \cdot 6 = +2966 \text{ кг. м.}$$

$$M_{0,67} = 0,1555 \cdot \text{„} \text{„} = +1887 \text{ „}$$

$$M_{1,0} = -0,2667 \cdot 2020 \cdot 6 = -3233 \text{ кг. м.}$$

$$M_{1,33} = +808 \text{ кг. м. и } M_{1,5} = +808 \text{ кг. м.}$$

Если продольную балку считать, как разрезную, то:

$$M_{0,33} = \frac{1010}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4040 = M_{0,67} = M_{1,33}, \quad M_{1,0} = 0 \text{ и } M_{1,5} = 4545.$$

Сопоставим результаты в таблице:

По расчету перекрестных балок	$M_{0,33}$	$M_{0,67}$	$M_{1,0}$	$M_{1,33}$	$M_{1,5}$
	+ 3705	+ 3370	- 1004	+ 3036	+ 3541
В предположении, что поперечные неподатливы	+2966	+1887	-3233	+ 808	+ 808
По расчету разрезных продольных балок	+4040	+4040	0	+4040	+4545

Оказывается, что цифры второй строки совершенно не соответствуют действительности. Моменты продольной балки значительно ближе подходят к моментам простых разрезных, отличаясь по расчетной величине, примерно, на 10%. Очевидно, для приближенного расчета, надо рассмотреть продольные балки, как разрезные.

Обратимся к поперечным аркам, имеющим пролет $l^0 = 10,8$ м. и воспринимающим давление Y от продольных на расстоянии $l_0 = 3,6$ м. Моменты от нагрузки $p = 450$ кг/м и от давления Y :

а) под продольной балкой:

$$M_{1,0} = \frac{1}{2} \cdot 450 \cdot 3,6 \cdot (10,8 - 3,6) + 6227 \cdot 3,6 = 28249 \text{ кг. м.}$$

б) по середине среднего пролета:

$$M_{1,5} = \frac{450 \cdot 10,8^2}{8} + 6227 \cdot 3,6 = 28980 \text{ кг. м.}$$

По таблицам для незыблемых опор имеем:

$$M_{1,0} = -0,100 \cdot 450 \cdot 3,6^2 = -583 \text{ кг. м.}$$

$$M_{1,5} = +0,025 \cdot 450 \cdot 3,6^2 = +146 \text{ „}$$

совершенно не соответствующие цифры, что и следовало ожидать, т. к. продольные балки для поперечных арок являются „вредными“, т. е. не опорами, а нагрузкой.

Примерный вид эпюры моментов для поперечной арки показан на фиг. 204 слева.

Расчитывая систему в предположении, что продольные балки разрезные, мы идем в сторону запаса их прочности, но одновременно в поперечных арках можем получить некоторый ущерб прочности, конечно, с большей или меньшей погрешностью в зависимости от соотношения жесткостей и пролетов.

3. Расчет трехпролетной поперечной балки жел.-бет. виадука *) при равных пролетах $l = 12$ м.

*) Вариант расчета той же балки при постоянном сечении приведен в наших „Системах с лишними неизвестными“, § 14,1.

Железо-бетонная балка армируется и набивается вместе с плитой, объединяющей ряд балок, которые составляют ребра плиты. При изгибе плита принимает участие в сопротивлении нагрузкам вместе с ребрами, так что по оси каждого ребра работает тавровое сечение, стенкой которого служит ребро, а горизонтальной полкой — активная часть плиты. Назначая толщину плиты 15 см. и помещая ребра на взаимном расстоянии 2 метра, получим такую же двухметровую активную часть плиты. Примем толщину ребра 30 см. и прямолинейное очертание в пролете; высоту по середине назначим



Фиг. 205.

60 см., на опорах — 120 см, переход — прямолинейный на длине 3 м., т. е. $\frac{1}{4}l$. На фиг. 205 представлены поперечные сечения ребра и активной части плиты по середине пролета и на опоре. Для них: площадь сечения $F_m = 4350 \text{ см}^2$, $F_a = 6150 \text{ см}^2$, расстояние центра тяжести от верхней грани

$$c_m = 16,82 \text{ см}, c_a = 38,21 \text{ см},$$

центральный момент инерции $J_m = 1,123 \cdot 10^6 \text{ см}^4$, $J_a = 8,482 \cdot 10^6 \text{ см}^4$.

Отношение $i = \frac{J_m}{J_a} = 0,1325$ *), и по таблице § 10 раздела 3:

$$z = \mu = 0,618 \text{ и } \nu = 0,841.$$

Уравнение трех моментов (267), благодаря равенству пролетов; шарнирности левой опоры и симметрии будет:

$$4lM_1z + lM_2\nu = -6EJ_m(\beta_1^0 + \alpha_2^0), \text{ где } M_1 = M_2, \text{ или}$$

$$M = -6EJ_m \frac{\beta_1^0 + \alpha_2^0}{l(4z + \nu)}.$$

Имея готовые формулы для грузового члена при частных случаях нагрузки, рассмотрим отдельно влияние равномерно распределенной нагрузки $p = 0,9 \text{ т/м}$. и отдельно влияние двух сосредоточенных грузов $P = 5 \text{ тонн}$.

Действие постоянной нагрузки. По форм. (279):

$$\frac{6EJ_m}{l} (\beta_1^0 + \alpha_2^0) = \frac{2pl^2}{4} [1 - m^2(1 - i)(3 - 1,6 m)] = 0,848 \cdot \frac{1}{2} pl^2$$

следовательно:

$$-M = \frac{0,848pl^2}{2(4z + \nu)} = \frac{0,848pl^2}{2(4,056 + 0,81)} = 0,139pl^2.$$

Действие сосредоточенных грузов. На среднем пролете балки нет нагрузки, так что $\alpha_2^0 = 0$, а β_1^0 , по форм. (294) при $P = 1$ будет:

$$\beta_1^0 = x_b \frac{l^2}{6EJ_m}, \text{ где } x_b = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{16} (1 - 0,065) \left[1,5 \cdot \frac{3}{4} + \right. \\ \left. + 0,8 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \right] = 0,268, \text{ т. е. } \beta_1^0 = 0,268 \frac{l^2}{6EJ_m}; \text{ при грузе же } P, \text{ гру-}$$

зовой член $\frac{6EJ_m(\beta_1^0 + \alpha_2^0)}{l} = 0,268Pl$ и опорный момент:

$$-M_1 = \frac{0,268Pl}{4z + \nu} = 0,044Pl.$$

*) При составлении отношения моментов инерции в ж.-б. балках с вутами обыкновенно не принимают во внимание железной арматуры.

Расчетный опорный момент

$$-M_1 = 0,139pl^2 + 0,044Pl^*$$

4. Пример расчета балки на упругих опорах.)** а) Определение реакций. Неразрезная балка постоянного сечения опирается на 4 упругих опоры. Жесткость крайних опор вдвое больше жесткости промежуточных. Требуется рассчитать опорные реакции при установке груза над опорой 2 (фиг. 206).

Обозначая прогибы (просадки) балки, свободно лежащей на двух упругих опорах 1 и 4, от груза $P=1$ тн. значком δ , а осадки самих упругих опор от груза 1, приложенного непосредственно к опоре, значком Δ , получим уравнение для определения неизвестных X_2 и X_3 в следующем виде:

$$(P - X_2)\delta_{22} - X_3\delta_{23} = X_2\Delta_2$$

$$(P - X_2)\delta_{32} - X_3\delta_{33} = X_3\Delta_3$$

Первое из этих уравнений выражает, что прогиб балки в точке 2 равен осадке упругой опоры 2, второе же уравнение выражает равенство таких же деформаций для опоры 3. Уравнения эти преобразуются следующим образом:

$$X_2(\Delta_2 + \delta_{22}) + X_3\delta_{23} = P\delta_{22}$$

$$X_2\delta_{32} + X_3(\delta_{33} + \Delta_3) = P\delta_{32}$$

Принимая во внимание, что в силу симметрии $\delta_{22} = \delta_{33}$ и $\Delta_2 = \Delta_3$, и по принципу взаимности перемещений $\delta_{23} = \delta_{32}$, найдем:

$$X_2 + X_3 = P \frac{\delta_{22} + \delta_{32}}{\delta_{22} + \delta_{32} + \Delta_2} \quad \text{и} \quad X_2 - X_3 = P \frac{\delta_{22} - \delta_{32}}{\delta_{22} + \Delta_2 - \delta_{32}}$$

$$\text{Откуда: } X_2 = \frac{P}{2} \left[\frac{\delta_{22} + \delta_{32}}{\Delta_2 + \delta_{22} + \delta_{32}} + \frac{\delta_{22} - \delta_{32}}{\Delta_2 + \delta_{22} - \delta_{32}} \right]$$

$$X_3 = \frac{P}{2} \left[\frac{\delta_{22} + \delta_{32}}{\Delta_2 + \delta_{22} + \delta_{32}} - \frac{\delta_{22} - \delta_{32}}{\Delta_2 + \delta_{22} - \delta_{32}} \right]$$

б) Вычисление перемещений δ . Осадка некоторой точки разрезной балки 1—4 складывается из двух частей: 1) зависящей от осадок опорных точек 1 и 4 и 2) зависящей от прогиба самой балки, т. е.

$$\delta = \delta' + \delta''$$

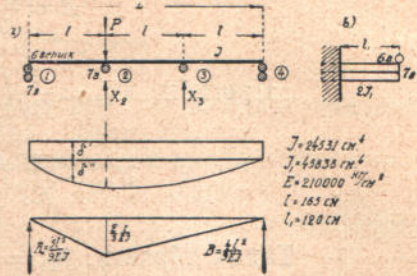
При установке груза единицы над опорой 2 первые части перемещений очевидно будут:

$$\delta'_{12} = \frac{2}{3} \Delta_1 \quad \text{и} \quad \delta'_{42} = \frac{1}{3} \Delta_4 = \frac{1}{3} \Delta_1$$

Отсюда по линейной интерполяции:

$$\delta'_{22} = \frac{2}{3} \delta'_{12} + \frac{1}{3} \delta'_{42} = \frac{4}{9} \Delta_1 + \frac{1}{9} \Delta_1 = \frac{5}{9} \Delta_1 \quad \text{и}$$

$$\delta'_{32} = \frac{1}{3} \delta'_{12} + \frac{2}{3} \delta'_{42} = \frac{2}{9} \Delta_1 + \frac{2}{9} \Delta_1 = \frac{4}{9} \Delta_1$$



Фиг. 206.

*) Сравни с тем, что получен при постоянном сечении (см. § 14,1 ваших „Систем с лишними неизвестными“.

**) Материал для этого примера предоставлен инж. А. А. Уманским.

Вторые части перемещений найдем графоаналитически, как моменты от нагрузки эпюрой моментов.

Реакции от моментной нагрузки будут:

$$A = \frac{5}{9} \frac{l^2}{EJ} \text{ и } B = \frac{4}{9} \frac{l^2}{EJ}.$$

$$\text{Прогибы: } \delta''_{22} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{5}{9} l^2 \cdot l - \frac{1}{3} l^2 \cdot \frac{l}{3} \right) = \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} \text{ и}$$

$$\delta''_{23} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{4}{9} l^2 \cdot l - \frac{1}{6} l^2 \cdot \frac{l}{3} \right) = \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ}.$$

$$\text{Таким образом: } \delta_{22} = \delta_{33} = \delta'_{22} + \delta''_{22} = \frac{5}{9} \Delta_1 + \frac{4}{9EJ} l^3 \text{ и}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \delta'_{23} + \delta''_{23} = \frac{4}{9} \Delta_1 + \frac{7}{18EJ} l^3.$$

Принимая во внимание устройство упругих опор, найдем:

$$\Delta_1 = \Delta_4 = \frac{1 \cdot l_1^3}{3E(2J_1)} \text{ и } \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{l_1^3}{3EJ_1}$$

Введем обозначение $k = \left(\frac{l_1}{l} \right)^3 \frac{J}{J_1}$, тогда:

$$\delta_{22} + \delta_{32} = \Delta_1 + \frac{5l^3}{6EJ} = \frac{l_1^3}{6EJ_1} + \frac{5l^3}{6EJ} = \frac{l^3}{6EJ} (5 + k),$$

$$\Delta_2 + \delta_{22} + \delta_{32} = \frac{l_1^3}{2EJ_1} + \frac{5l^3}{6EJ} = \frac{l^3}{6EJ} (5 + 3k),$$

$$\delta_{22} - \delta_{32} = \frac{1}{9} \Delta_1 + \frac{l^3}{18EJ} = \frac{l_1^3}{54EJ_1} + \frac{l^3}{18EJ} = \frac{l^3}{54EJ} (3 + k) \text{ и}$$

$$\Delta_2 + \delta_{22} - \delta_{32} = \frac{19l_1^3}{54EJ_1} + \frac{l^3}{18EJ} = \frac{l^3}{54EJ} (3 + 19k).$$

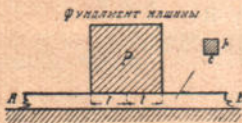
Подставляя эти выражения в полученные выше формулы для X_2 и X_3 , после сокращений получим:

$$X_2 = \frac{P}{2} \left[\frac{5+k}{5+3k} + \frac{3+k}{3+19k} \right] \text{ и } X_3 = \frac{P}{2} \left[\frac{5+k}{5+3k} - \frac{3+k}{3+19k} \right].$$

Перейдем к числовым значениям:

$$k = \left(\frac{120}{165} \right)^3 \frac{24531}{45838} = 0,206, \quad X_2 = 0,695 \cdot P, \quad X_3 = 0,232P,$$

$$X_1 = \frac{2}{3} (P - X_2) - \frac{1}{3} X_3 = 0,126 \cdot P \text{ и } X_4 = \frac{1}{3} (P - X_2) - \frac{2}{3} X_3 = -0,053 \cdot P.$$



Фиг. 207.

5. Задачи. № 1. Найти прогиб f середины фундамента машины, опирающегося на грунт посредством весьма длинных деревянных балок AB (фиг. 207). Вес фундамента, приходящийся на одну балку = P . Коэффициент основания $k \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

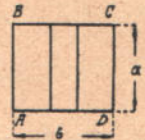
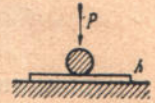
Решение. Такой случай разобран в § 16,3.

Подставив в формуле (330) вместо $q = \frac{P}{2cl}$, $a = b = l$,

$$J = \frac{1}{12} \cdot h^3 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{h} \sqrt[4]{\frac{3kh}{E}},$$

получим: $f = \frac{P}{2clk} (1 - e^{-\alpha l} \cos \alpha l)$.

№ 2. Стальная подушка ABCD распределяет на кладку давление цилиндрического катка с нагрузкой P (фиг. 208). Какова осадка подушки по опорной образующей катка и по краям AB и CD, если $P = 25$ т, $a = b = 50$ см, $h = 5$ см. и осадка кладки составляет 0,0025 см. при нагрузке $q = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$?



Фиг. 208.

Решение. Такой случай разобран в § 16,4.

$$k = \frac{1}{0,0025} = 400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{400 \cdot 12}{4 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5^4}} = 5,57 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{см}};$$

$\alpha b = 0,0278$; $(\alpha b)^4 = 6,02 \cdot 10^{-7}$, т. е. $(\alpha b)^4$ исчезающе мало по сравнению с единицей, а поэтому осадка подушки посредине

$$y_{\text{макс.}} = \frac{P \cdot a}{b \cdot k} \left[1 + \frac{(\alpha b)^4}{80} - \dots \right] \approx \frac{P}{abk} = \frac{25000}{50 \cdot 50 \cdot 400} = \frac{1}{40} \text{ см} = 0,25 \text{ мм.}$$

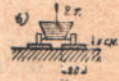
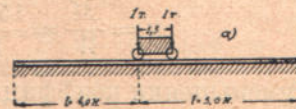
осадка по краям:

$$y_{\text{мин.}} = \frac{P \cdot a}{b \cdot k} \left[1 - \frac{(\alpha b)^4}{192} - \dots \right] \approx \frac{P}{abk} = 0,25 \text{ мм.},$$

т. е. в виду большой жесткости подушки и малой ее длины подушка садится равномерно.

№ 3. Телега весом 2 тонны стоит на двух катальных досках (фиг. 209).

а) Найти наибольшее напряжение материала доски и грунта, а также наибольшее опускание колеса телеги, если предварительными опытами установлено, что при нагрузке грунта в 1000 кг/см^2 он дает осадку в 1 см.



Фиг. 209.

б) Для сравнения рассмотреть ту же задачу—податливость основания в 100 раз больше.

Решение. На полоску доски шириною 1 см. приходится сила

$$P = \frac{1000}{2 \cdot 20} = 25 \text{ кг}; \quad k = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}; \quad E = 100000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad J = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 5^3}{12} = 10,42 \text{ см}^4$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = 0,1245 \frac{1}{\text{см}}.$$

Длина волны упругой линии $2L = \frac{2\pi}{\alpha} = 50,4$ см, настолько невелика, что доску можно считать бесконечно длинной.

Прогиб под грузом 1 т. от одного только его действия (см. § 16, фор. 321):

$$y_{\text{макс.}} = P\alpha : 2k = 0,00155 \text{ см.}$$

Прогиб от действия другого груза, находящегося на расстоянии 1,50 м. от первого по форм. (320):

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) = \frac{P\alpha}{2k} \gamma_0 = 0,99 \cdot 10^{-11} \text{ см, т. е.}$$

настолько ничтожен, что его влиянием на прогиб под первым грузом можно пренебречь, и напряжение грунта вычислить по формуле

$$n = k \cdot y = 1,55 \text{ кг/см}^2.$$

Изгибающий момент доски под грузом по форм. (327):

$$M = \frac{P}{4\alpha} = \frac{25}{4 \cdot 0,1245} = 50,2 \text{ кг/см.}$$

Напряжение катальной доски от изгиба

$$n = \frac{M}{W} = \frac{50,2 \cdot 6}{1 \cdot 5^2} = 12,04 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Принимая во внимание, что грунт не препятствует подыманью катальных досок, следует по § 16,4 полученные значения увеличить на 9%, тогда:

$$\text{наибольшая осадка } y = 1,09 \cdot 0,00155 = 0,00169 \text{ см.}$$

$$\text{напряжение грунта } n = 1,09 \cdot 1,55 = 1,69 \text{ кг/см}^2.$$

$$\text{напряжение доски } n = 1,09 \cdot 12,04 = 13,13 \text{ кг/см}^2.$$

б) Если податливость основания в 100 раз больше, то:

$$k = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}, \alpha = 0,03934 \frac{1}{\text{см}}. \text{ Длина волны } 2L = \frac{2\pi}{\alpha} = 159,7 \text{ см.}$$

Балку попрежнему можно считать бесконечно длинной.

Прогиб под грузом $y_{\text{макс.}} = \frac{P\alpha}{2k} + \frac{P\alpha}{2k} \tau_0 = 0,0492 (1 + 0,00169) = 0,0493 \text{ см.}$, т. е. влиянием второго груза на прогиб также можно пренебречь. Напряжение грунта под грузом: $n = ky = 0,493 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Для доски под грузом:

$$M = \frac{P}{4\alpha} + \frac{P}{4\alpha} \mu_0 = 158,7 \cdot (1 + 0,00356) = 159,2 \text{ кг/см.}$$

$$n = \frac{M}{W} = \frac{159,2 \cdot 6}{1 \cdot 5^2} = 38,2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Т. о., при уменьшении коэффициента основания k в 100 раз напряжения грунта и доски от груза над данным сечением возрастают в $\sqrt[4]{100} = 3,16$ раз.



Фиг. 210.

Влияние же второго груза при уменьшении k сказывается непропорционально влиянию груза над сечением, т. к. с уменьшением k возрастает длина волны и груз как-бы приближается к сечению.

№ 4. Построить эпюры M и Q для всей длины балки AB фиг. 210 т. е. для консоли и заделанной части, считая кладку за упругое основание.

Решение. Прежде всего определяем $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$ и длину волны $2L = \frac{2\pi}{\alpha}$. Затем, если длина заделанной части a меньше длины волны $a < \frac{2\pi}{\alpha}$, то применяем формулы для короткой балки, в противном случае можно воспользоваться формулами для бесконечной балки.

а) $a < \frac{2\pi}{\alpha}$. Помещая начало координат в конец заделки A , пишем:

$$M_x = -\frac{ky_0}{\alpha^2} \mathfrak{C}_x - \frac{k\varphi_0}{\alpha^3} \mathfrak{D}_x \quad \text{и} \quad Q_x = -\frac{ky_0}{\alpha} \mathfrak{B}_x - \frac{k\varphi_0}{\alpha^2} \mathfrak{C}_x.$$

При $x=a$, $M_a = -Pl$ и $Q_a = P$, откуда находим коэффициенты:

$$-\frac{ky_0}{\alpha} = -\frac{\alpha l C_a + D_a}{C_a^2 - B_a D_a} \cdot P \quad \text{и} \quad -\frac{k\varphi_0}{\alpha^2} = \frac{C_a + \alpha B_a}{C_a^2 - B_a D_a} P.$$

б) Если $a \geq \frac{2\pi}{\alpha}$, то применяем формулы § 16,2 *d* и *f*. Уравнение упругой кривой заделанной части при начале координат в плоскости заделки будет:

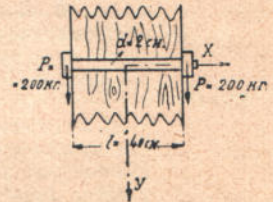
$$y = \frac{P}{2\alpha^3 EJ} e^{-\alpha x} \cos \alpha x + \frac{Pl}{2\alpha^2 EJ} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) = \\ = \frac{2Pa}{k} e^{-\alpha x} [(1 + \alpha l) \cos \alpha x - \alpha l \sin \alpha x]$$

$$M = EJy'' = -\frac{P}{\alpha} e^{-\alpha x} [\alpha l \cos \alpha x + (1 + \alpha l) \sin \alpha x].$$

$$Q = EJy''' = P \cdot e^{-\alpha x} [\cos \alpha x - (1 + 2\alpha l) \sin \alpha x].$$

№ 5. Сквозь деревянную балку толщиной $l=40$ см пропущен болт диаметром $d=2$ см, по концам которого вдоль оси балки действуют две равные и одинаково направленные силы $P=200$ кг. Опытами установлено, что болт вдавливается в дерево на 1 мм. при равномерном давлении в 20 кг. на погонный см. болта. Построить эпюру M и эпюру Q для болта (фиг. 211).

Решение. Применяем формулы § 16,5 (344) и (345):



Фиг. 211.

$$k = 200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad J = \frac{\pi d^4}{64} = 0,785 \text{ см}^4, \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = 0,0752 \frac{1}{\text{см}},$$

$$A_1 = -\frac{4\alpha}{k} \cdot \frac{\text{ch} \frac{\alpha l}{2} \text{cs} \frac{\alpha l}{2}}{\text{sh} \alpha l + \text{sn} \alpha l} \cdot P = -0,00464 \text{ см},$$

$$A_2 = -\frac{4\alpha}{k} \cdot \frac{\text{sh} \frac{\alpha l}{2} \cdot \text{sn} \frac{\alpha l}{2}}{\text{sh} \alpha l + \text{sn} \alpha l} \cdot P = -0,0627 \text{ см}.$$

$$y = A_1 \text{ch} \alpha x \text{cs} \alpha x + A_2 \text{sh} \alpha x \text{sn} \alpha x$$

$$M = \frac{k}{2\alpha^2} (A_2 \text{ch} \alpha x \text{cs} \alpha x - A_1 \text{sh} \alpha x \text{sn} \alpha x) = -1106 (\text{ch} \alpha x \text{cs} \alpha x + 82 \text{sh} \alpha x \text{sn} \alpha x),$$

$$Q = \frac{k}{2\alpha} [(A_2 - A_1) \text{sh} \alpha x \text{cs} \alpha x - (A_1 + A_2) \text{ch} \alpha x \text{sn} \alpha x] = -77,2 \text{sh} \alpha x \text{cs} \alpha x + \\ + 89,5 \text{ch} \alpha x \text{sn} \alpha x.$$

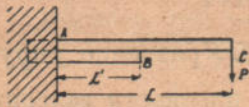
Для $x = -\frac{l}{2}$: $y = -0,1347$ см., $M = 0$, $Q = -200$ кг.

„ $x = 0$: $y = -0,00464$ см., $M = -1106$ кг/см., $Q = 0$.

„ $x = +\frac{l}{2}$: $y = -0,1347$ см., $M = 0$, $Q = +200$ кг.

№ 6. Балка AC прямоугольного сечения $b \cdot h$ длиной L закреплена концом A в стенку и, кроме того, — поддерживается подбалкой AB того же сечения, но длины L_1 (фиг. 212). Построить эпюру моментов и эпюру поперечных сил для балки и подбалки.

Решение. Роль подбалки AB выражается в возбуждении некоторой реактивной силы B , поддерживающей балку AC в точке B (на протяжении между плоскостью заделки A и точкою B поверхности балки и подбалки не соприкасаются). Мы определим эту реактивную силу, уравнивая прогибы балки и подбалки в точке B :



Фиг. 212.

$$\frac{(P-B)L_1^3}{3EJ_1} + \frac{P(L-L_1)L_1^2}{2EJ_1} = \frac{BL_1^3}{3EJ_1}$$

При равенстве $J_1 = J_2$ получится: $B = \frac{3L-L_1}{4L_1} P$.

Подбалка не является для балки сплошным упругим основанием, а лишь—упругой опорой.

СОДЕРЖАНИЕ.

	стр.
Предисловие	3
Обозначения	5
Балки с лишними закреплениями.	
Введение. Справочные таблицы по деформации балок	9—16
ГЛАВА I. ОДНОПРОЛЕТНЫЕ БАЛКИ	
19—72	
§ 1. Балка с одним защемленным и другим опертым концом	19—35
1. Равномерно-распределенная нагрузка 19. — 2. Другие случаи сплошной нагрузки 21. — 3. Сосредоточенные грузы 24. — 4. Консольная балка и балка с моментом 26. — 5. Произвольная нагрузка 27. — 6. Выражение расчетных величин через момент простой балки 29. — 7. Построение линий влияния 29. — 8. Влияние понижения опоры и температуры 33. — 9. Задачи 34.	
§ 2. Балка с защемленными концами	35—57
1. Равномерно распределенная нагрузка 35. — 2. Сосредоточенные грузы 38. — 3. Местная равномерно распределенная нагрузка 42. — 4. Треугольная нагрузка 42. — 5. Трапецидальная нагрузка 44. — 6. Нагрузка (активным) моментом 44. — 7. Произвольная нагрузка и выражение через момент простой балки 44. — 8. Линии влияния 49. — 9. Влияние температуры 54.	
§ 3. Балка с упруго заделанными концами	57—72
1. Податливость опор 57. — 2. Основные зависимости упруго заделанной балки 61. — 3. Построение эпюры моментов 62. — 4. Балки переменного сечения 66. — 5. Задачи 70.	
ГЛАВА II. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ	
72—147	
§ 4. Двухпролетная балка	72—93
1. Балка на трех опорах 72. — 2. Сосредоточенная нагрузка 73. — 3. Произвольная нагрузка 75. — 4. Опоры на разных уровнях 77. — 5. Линии влияния 79. — 6. Балка с защемленными концами 86. — 7. Влияние неравномерного нагревания 87. — 8. Справочные таблицы 88. — 9. Задачи 92.	
§ 5. Трехпролетная балка	93—110
1. Расчет при неподвижной нагрузке 93. — 2. Линии влияния опорных моментов 97. — 3. Изгибающие моменты в промежуточных сечениях балки 99. — 4. Реакция и поперечные силы 103. — 5. Справочные таблицы 106.	
§ 6. Многопролетные балки	110—128
1. Загружение одного пролета 110. — 2. Фокусы пролетов 111. — 3. Опорные моменты загруженного пролета 115. — 4. Моменты прочих пролетов 118. — 5. Случай одного сосредоточенного груза 119. — 6. Знаки изгибающих моментов 121. — 7. Опасное положение подвижной нагрузки 122. — 8. Общий случай нагрузки 124. — 9. Пример графического решения 127.	
§ 7. Линии влияния многопролетных балок	128—147
1. Линия опорного момента 128. — 2. Линия изгибающего момента в пролете 136. — 3. Линия поперечной силы 139. — 4. Линия опорной реакции 142.	
ГЛАВА III. РАСЧЕТ БАЛОК ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕ	
147—189	
§ 8. Расчет статистически неопределимых балок по линиям влияния	147—161
1. Особенности линий влияния статически неопределимых балок 147. — 2. Параболическая линия влияния для опорного момента 147. — 3. Параболическая линия влияния для момента в пролете 155. — 4. Линия опорной реакции 157. — 5. Расчет поперечной силы 158. — 7. Примеры 159. — 7. Общее замечание 161.	

- § 9. Расчетные эпюры балок при подвижной нагрузке 161—189
 1. Общие сведения о расчете балок при подвижной нагрузке 161.—2. Численный пример расчета неразрезной балки 162.—3. Справочные формулы и расчетные таблицы 174.—4. Практические замечания 181.

ГЛАВА IV. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ 189—224

- § 10. Уравнение трех моментов 189—195
 1. Общий прием 189.—2. Балки разной жесткости в разных пролетах 189.—3. Балки переменного сечения в пролете 190.
- § 11. Приближенный способ расчета балок переменного сечения 195—200
 1. Случай несимметричного пролета 195.—2. Симметричное очертание 196.
- § 12. Определение фокусов 200—205
 1. Случай разных жесткостей в разных пролетах 200.—2. Переменное сечение в пролете 200.—3. Примеры 201.
- § 13. Линия влияния для опорного момента 205—214
 1. Пролеты, отличающиеся жесткостью 205.—2. Переменное сечение в пролете 206.—3. Примеры построения линий влияния 209.
- § 14. Случай равных пролетов 214—220
 1. Выражение для опорного момента 214.—2. Таблицы для приближенного расчета 216.—3. Пример 219.
- § 15. Практические замечания 220—224
 1. Предварительный расчет неразрезных балок 220.—2. Прогиб балок переменного сечения 221.—3. Пример расчета 222.—4. Литература 222.

ГЛАВА V. БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ И УПРУГИХ СПОРАХ 224—296

- § 16. Балки на упругом основании 236—256
 1. Коэффициент основания 224.—2. Случай одного сосредоточенного груза 225.—3. Местная распределенная нагрузка 233.—4. Короткие балки 233.—5. Балка при равномерной нагрузке и концевых сосредоточенных силах 243.—6. Балка на двух опорах и сплошном упругом основании 246.—7. Неразрезные балки 249.—8. Гиперболические функции 250.—9. Таблицы гиперболо-тригонометрических функций 252.
- § 17. Метод начальных условий 256—269
 1. Пример применения способа начальных условий 256.—2. Короткая балка, несимметрично нагруженная 258.—3. Балка на опорах и сплошном упругом основании 259.—4. Защемленная балка 260.—5. Балка с грузами и активными моментами 260.—6. Балка на трех опорах и упругом основании 260.—7—9. Местная нагрузка балки 262.—10. Двухконсольная балка на упругом основании 263.—11. Бесконечная балка, односторонне нагруженная 263.—12. Абсолютно жесткие балки 265.—13. Расчет рельсового пути 267.
- § 18. Балки на упругих опорах 269—276
 1. Случай применения балок 269.—2. Балка, свободно лежащая на упругих опорах 270.—3. Случай трех поперечин 270.—4. Случай пяти поперечин 272.—5. Случай семи поперечин 273.—6. Практические указания 274.—7. Неразрезная балка на упругих опорах 274.
- § 19. Расчет перекрестных балок 276—283
 1. Опорные балки 276.—2. Защемленные и неразрезные балки 280.—3. Случай нескольких перекрестных балок 282.
- § 20. Примеры и задачи 278—296
 1—2. Пример предварительного расчета перекрытия из перекрестных балок 283.—3. Расчет трехпролетной поперечной балки 289.—4. Расчет балки на упругих опорах 291.—5. Задачи 292.

ИЗДАТЕЛЬСТВО

КАССЫ ВЗАИМОПОМОЩИ СТУДЕНТОВ КИЕВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Киев, ул. Свердлова 2, маг. 9, тел. 45—52.

П Е Ч А Т А Ю Т С Я:

1. Проф. **Г. С. Жирицкий**. „Паровые турбины“, 2-е изд.
2. Д-р инж. **Ф. Мюнцингер**. „Расчеты водотрубных котлов“, перевод с немецкого.
3. Инж. **А. Я. Слоним**. „Атлас — справочник. Схемы коммутаций и распределительных устройств электро-станций и подстанций“.
4. Инж. **Слоним и Фингер**. „Расчет нагрузок электрических станций“.
5. Д-р инж. **Рюденберг**. „Реле и схемы защиты электростанций и сетей“, перевод с немецкого.

В СКЛАДЕ ИЗДАТЕЛЬСТВА ИМЕЮТСЯ:

1. **Е. О. Патон и Б. Н. Горбунов**. „Стальные мосты“ I том, изд. 1930 г. Цена 14 р. переплет 1—50.
2. Проф. **Г. С. Жирицкий**. „Паровые машины“, 4 изд. 1930 г.
3. Под редакц. проф. **Я. Н. Марковича**, инж. **Свидерский, Ельясберг**. „Расчеты подъемных кранов“, изд. 2-е переработ. и значительно дополненное, 1930 г. Цена 4—25, пер. 1—00.
4. Инж. **Я. М. Хаймович и Ю. Л. Берман**. „Графические расчеты“.
5. Проф. **П. В. Окулов**. „Электрические измерения“, на укр. яз.
6. **П. З. Фишер** под ред. **В. О. Плотникова**. „Рабочая книжка по лаборатории общей химии“ 1930 г. Цена 1 р. 10 к. На укр. яз.
7. Инж. **Б. С. Барский**. „Специальные сорта стали“ изд. 1930 г. Цена 1 руб 10 коп.
8. Пр. **Вольский**. „Военная топография“ для ВУЗ'ов, на укр. яз. Цена 95 коп.
9. Акад. **Е. О. Патон**. „Таблицы для проектирования дерев. и стальных мостов“, изд. 6-е 1929 г. Цена 5 руб. 90 коп.
10. Д-р инж. **Ф. Мюнцингер**. „Котельные установки больших силовых станций“ изд. 1929 г. Цена 3 р. 85 к. перепл. 95 к.
11. Проф. **А. А. Скоморохов**. „Основы общей электротехники“ изд. 1929 г. Цена 3 р. 25 к. На укр. яз.
12. Д-р инж. **Вальтер**. „Проектирование селективной защиты“ перевод с немецкого изд. 1929 г. Цена 2 р.
13. Проф. **В. В. Синеуцкий**. „Безкомпрессорные дизеля“ изд. 1929 г. Цена 3 р. 50 коп.
14. Инж. **Д. И. Марьяновский** под ред. проф. **И. Я. Штаермана**. „Сборник задач по математике для поступающих в ВУЗ'ы“, изд. 1928 г. Цена 3 р. 90 к.
15. Проф. **Г. Л. Эпштейн**. „Перенапряжения на электрических установках“ изд. 1927 г. Цена 4 р.
16. Проф. **И. Л. Антоконенко**. „Проектирование железных дорог“. Изд. 1927 г. Цена 3 р. 50 к.
17. Проф. **И. А. Ладыженский**. „Конуса, поддувала и дымовые трубы паровозов“ изд. 1927 г. Цена 1 р. 30 к.
18. Проф. **И. Я. Штаерман**. „Упругая устойчивость труб и оболочек“, изд. 1929 г. Цена 50 к.
19. „Диаграммы водяного пара“ 0,1—250 атм. с объемными линиями в 2 краски, цена 20 коп.

