Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства

02-05-157М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни

«Теоретична механіка (розділ «статика»)»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» спеціальності 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної й заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІ ЕАВГ
Протокол № 9 від 21 травня 2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка (розділ «статика»)» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» спеціальності 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної й заочної форм навчання. [Електронне видання] / Серілко Л. С., Войтович Л. В. – Рівне : НУВГП, 2024. – 45 с.

Укладачі:
Серілко Л. С., к.т.н., доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства;
Войтович Л. В., к.т.н., доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Відповідальний за випуск: Козяр М .М., д.пед.н., професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Керівник групи забезпечення спеціальності 194 «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» Хлапук М. М.

Попередня версія методичних вказівок 02-05-21.

1. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

1.1. Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закономірності, закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл. Вона є загальнотехнічною точною дисципліною (наукою) – на її основних положеннях базуються такі інженерні дисципліни, як опір матеріалів, будівельна механіка, тощо. Тому глибоке вивчення теоретичної механіки необхідне для успішного засвоєння і розуміння матеріалу усіх технічних предметів, а також для адекватного сприйняття і наукового тлумачення явищ природи.

Важливе прикладне значення в теоретичній механіці має статика – розділ, в якому розглядаються силові взаємодії і рівновага матеріальних тіл, а також еквівалентні перетворення систем сил.

1.2. Запорукою успішного засвоєння матеріалу даного розділу дисципліни є самостійне розв'язання практичних задач для самостійної роботи.

1.3. Виконання завдань проводиться індивідуально: номер схеми вибирається відповідно до порядкового номера студента в журналі викладача (на початок семестру) та номера групи на потоці (визначає викладач).

1.4. Самостійні, (індивідуальні) роботи належним чином оформляються. Розв'язок задачі (завдання) повинен містити назву, умову (достатньо – у символьній формі), розрахункову схему, викладки розв'язання з короткими поясненнями та виділені відповіді.

2. ЗАВДАННЯ

2.1. Завдання С1. Визначення реакцій опор балки

Для зазначеної балки (рис. 2.1) визначити реакції опор та зробити перевірку знайденого розв'язку. Вагою балки знехтувати. Вихідні дані взяти з таблиці 2.1, номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі.

2.2. Завдання С2. Визначення реакцій опор плоскої рами

Для заданої рами (рис. 2.2) визначити реакції опор та зробити перевірку розв'язку. Вагою рами знехтувати. Вихідні дані взяти з таблиці 2.2, номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі.

2.3. Завдання С3. Визначення реакцій в'язей у складеній конструкції

Для конструкції (рис.2.3), яка складається із двох абсолютно твердих ламаних стержнів, визначити реакції опор та зусилля в шарнірі С і зробити перевірку розв'язку. При розрахунку вагою конструкції знехтувати. Вихідні дані взяти з таблиці 2.3, номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі.

2.4. Завдання С4. Дослідження рівноваги тіла під дією довільної просторової системи сил

Визначення опорних реакцій плити

Для заданої (рис.2.4) тонкої однорідної важкої (вага *G*) плити визначити реакції опор. Виконати перевірку розв'язку.

Вихідні дані взяти з таблиці 2.4. При розв'язанні покласти *AB*=***a***, *BC*=***b***, *BK*=0,5(***a***+***b***). Номер схеми відповідає порядковому номеру в журналі викладача.

2.5. Завдання С5. Визначення положення центра ваги плоскої фігури

Для заданої на рис.2.5 складеної плоскої фігури визначити координати її центра ваги.

Прийняти, що ***a′***= 0,2***a***, ***b′***= 0,2***b***, ***c***= 0,1***a***, ***d***= 0,1***b***. Значення ***a*** та ***b*** взяти з таблиці 2.5. Номер схеми відповідає порядковому номеру студента в журналі викладача.

Таблиця 2.1

Варіант (номер групи)	*P*, кН	*G*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м	$\alpha=\beta$, град.	***a***, м	***b***, м
1	12	14	32	4	30	1,0	1,5
2	10	15	20	6	45	1,4	1,6

Таблиця 2.2

Варіант (номер групи)	*P*, кН	*G*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м	β, град.	***a***, м	***b***, м
1	12	16	20	8	60	1,2	2,2
2	18	14	22	10	30	2,0	2,5

Таблиця 2.3

Варіант (номер групи)	*P*, кН	*G*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м	α, град.	***a***, м	***b***, м
1	10	15	20	6	30	2,2	2,1
2	14	20	20	8	45	1,5	2,0

Таблиця 2.4

Варіант (номер групи)	*P*, кН	*G*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м	*β*, град.	***a***, м	***b***, м
1	7	8	6	2,0	60	2,0	1,4
2	9	12	10	2,4	45	2,5	1,5

Таблиця 2.5

Варіант (номер групи)	***a***, м	***b***, м
1	2,0	2,6
2	2,2	2,5

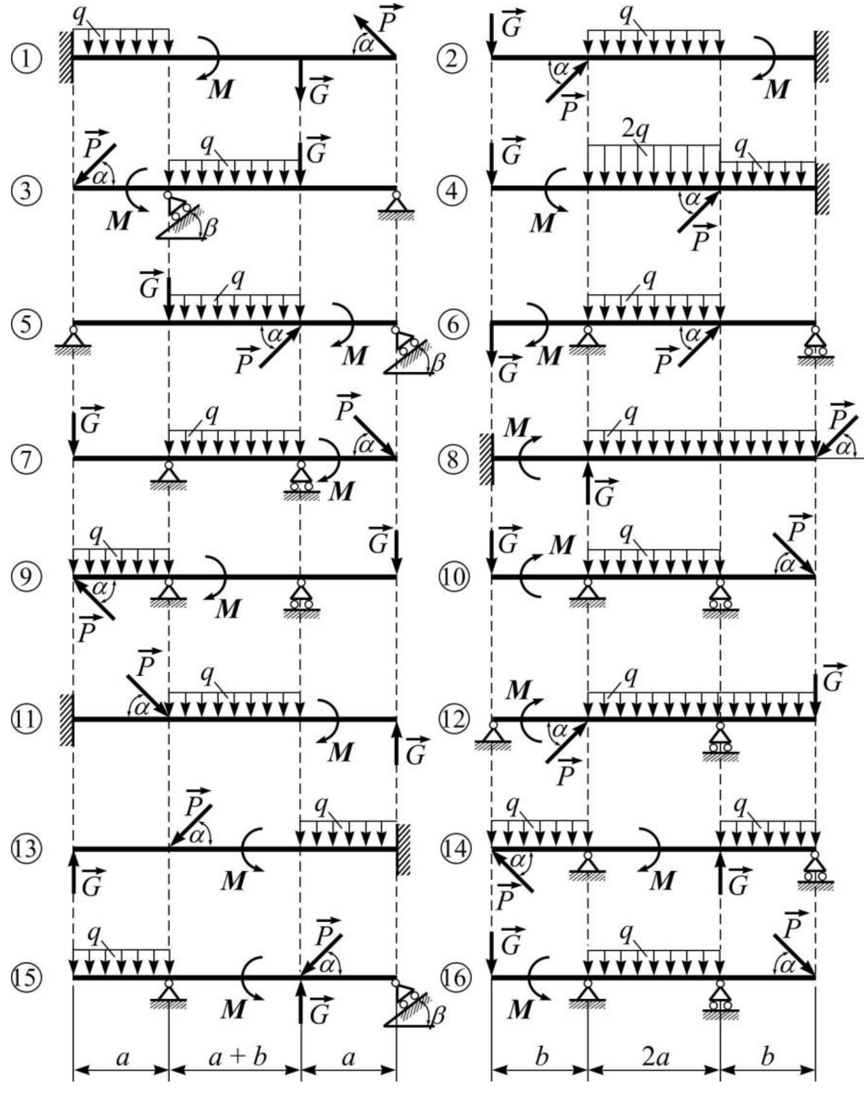


Рис. 2.1

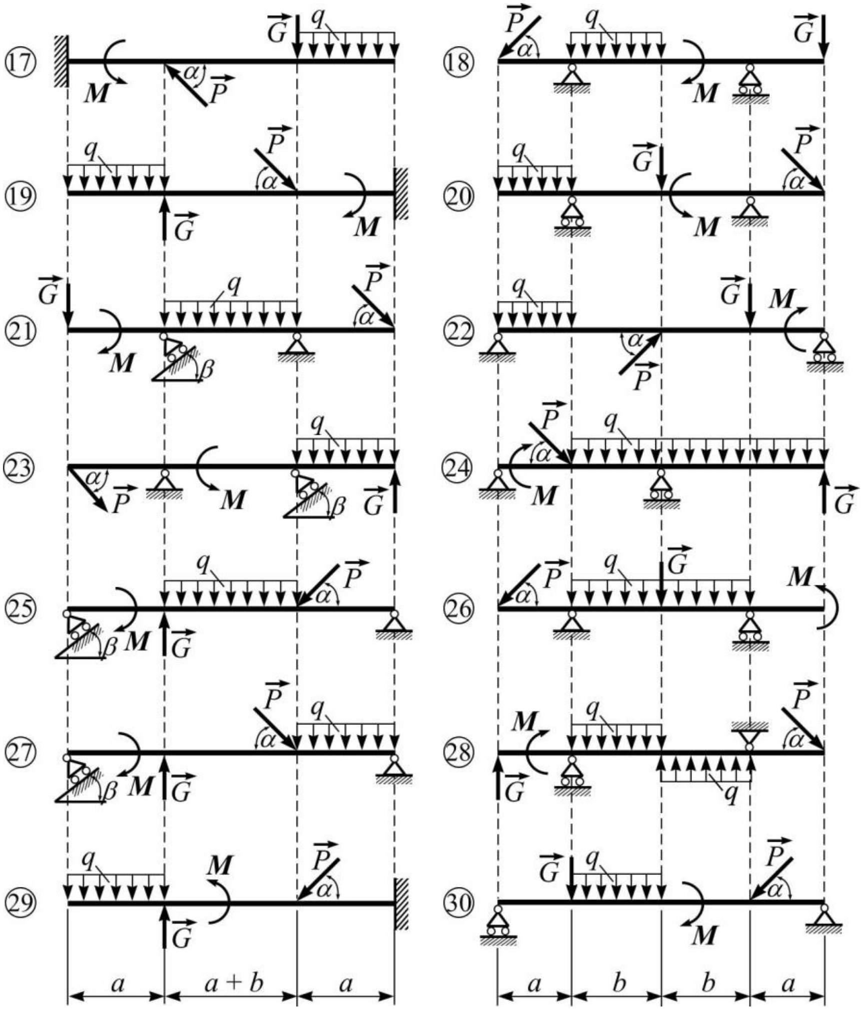
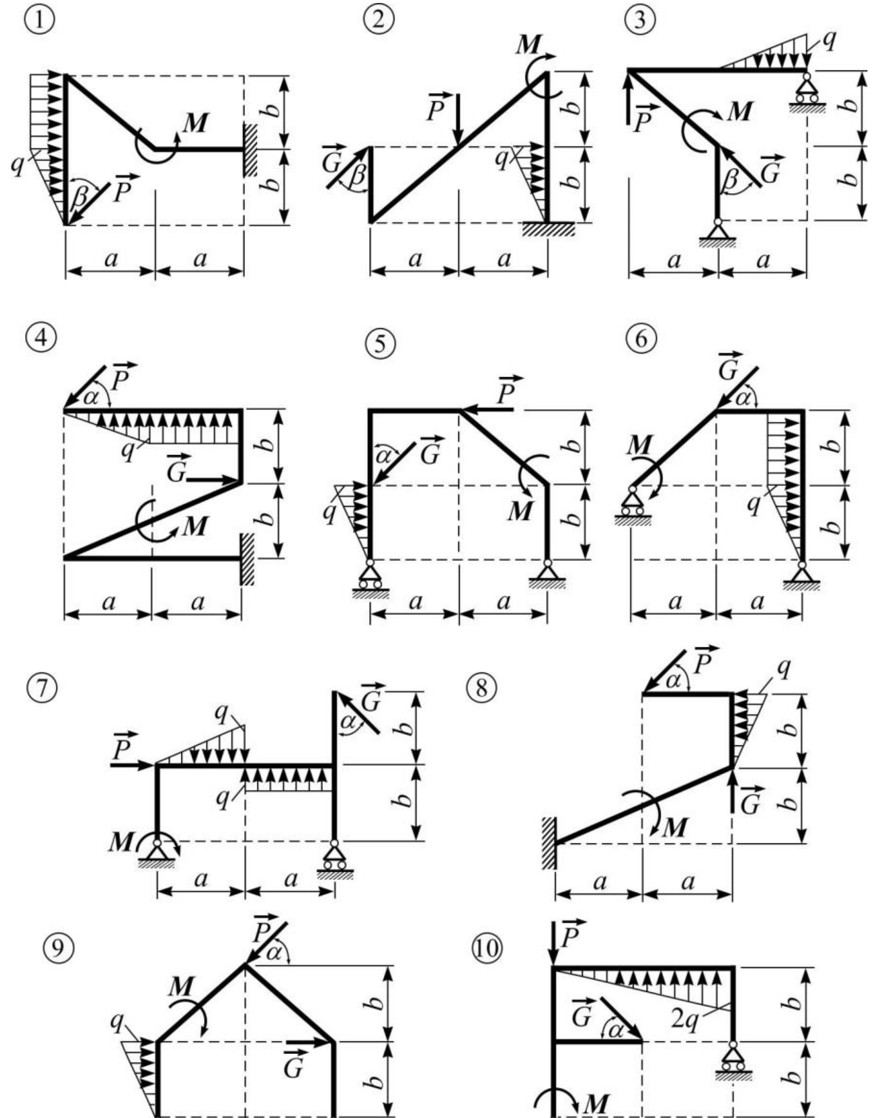


Рис. 2.1 (продовження)



1
q
M
β
P
b
b
a
a
2
M
P
G
β
q
b
b
a
a
3
q
P
M
β
G
b
b
a
a
4
P
α
q
G
M
b
b
a
a
5
P
α
G
q
M
b
b
a
a
6
G
α
M
q
b
b
a
a
7
P
q
q
G
α
M
b
b
a
a
8
P
α
q
G
M
b
b
a
a
9
P
α
M
q
G
b
b
a
a
10
P
G
α
2q
M
b
b
a
a

Рис. 2.2

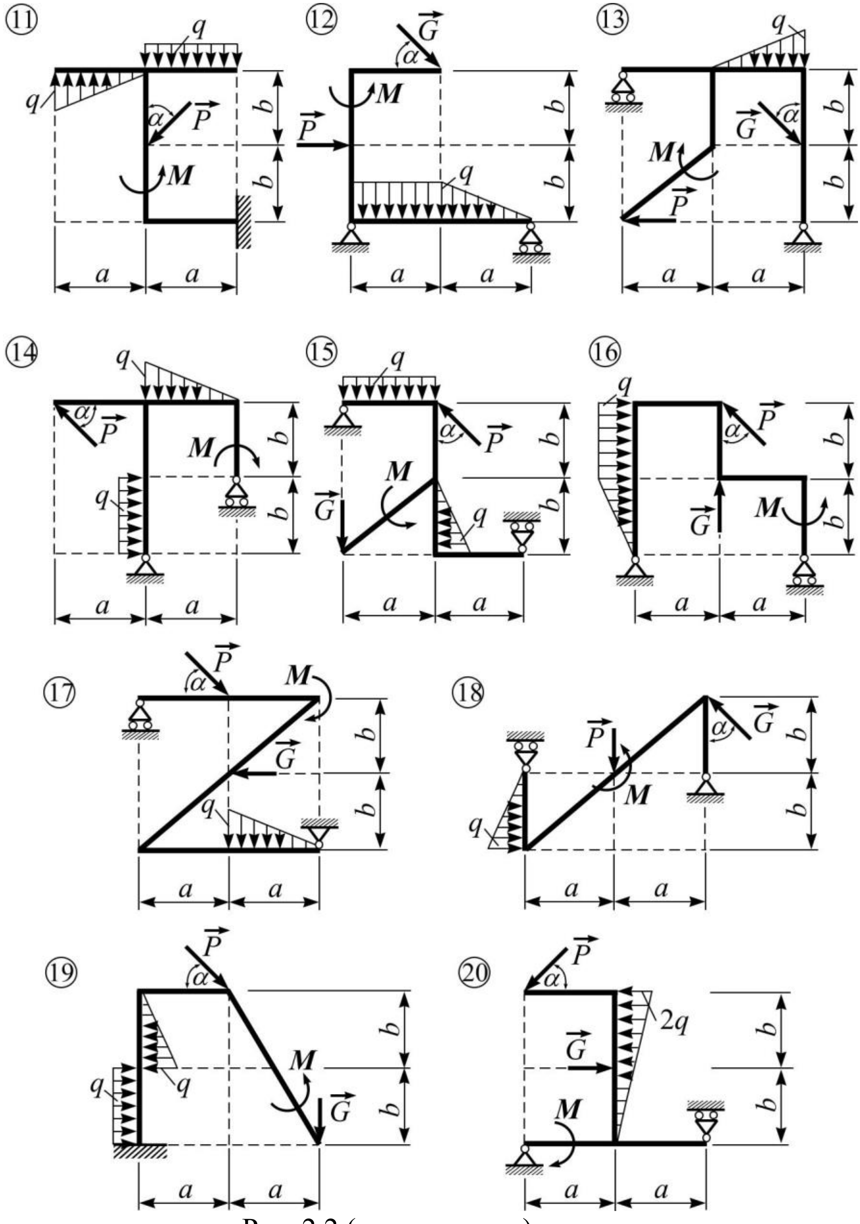


Рис. 2.2 (продовження)

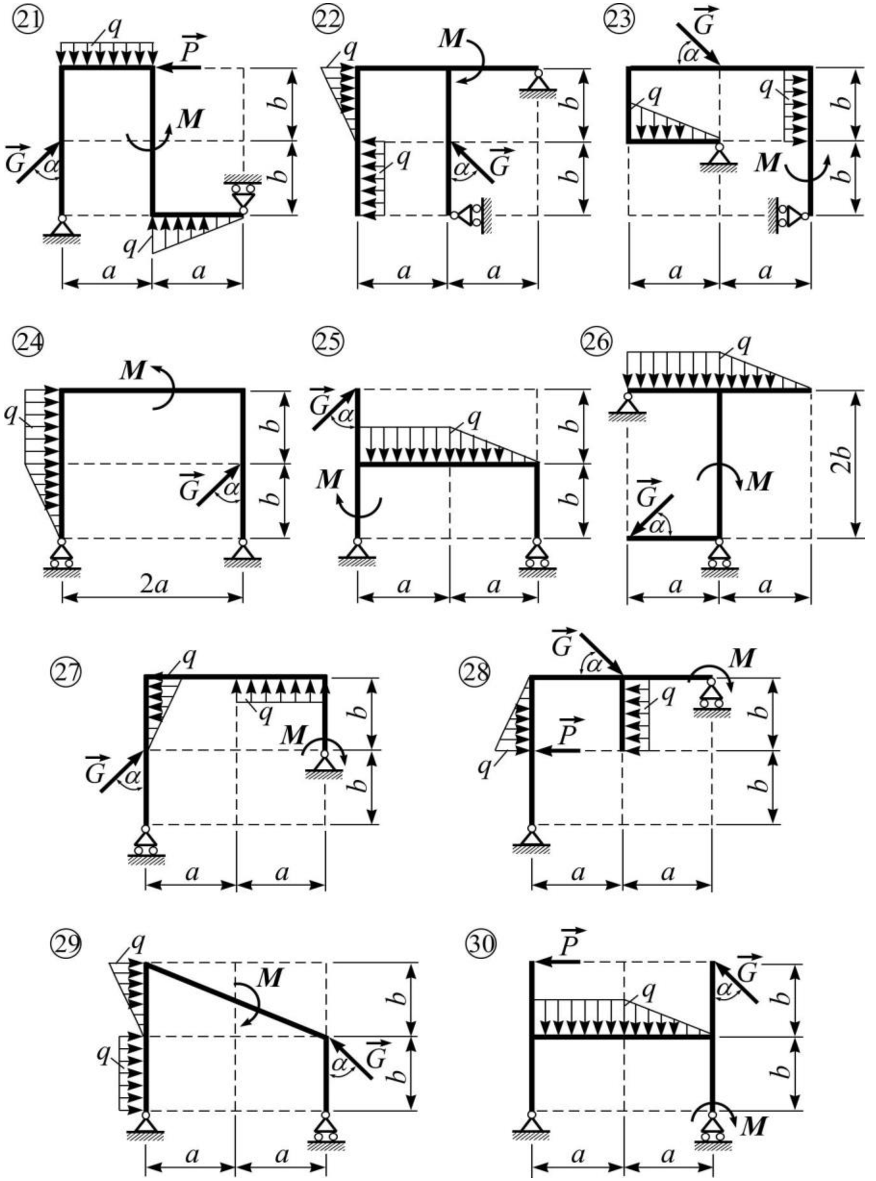


Рис. 2.2 (продовження)

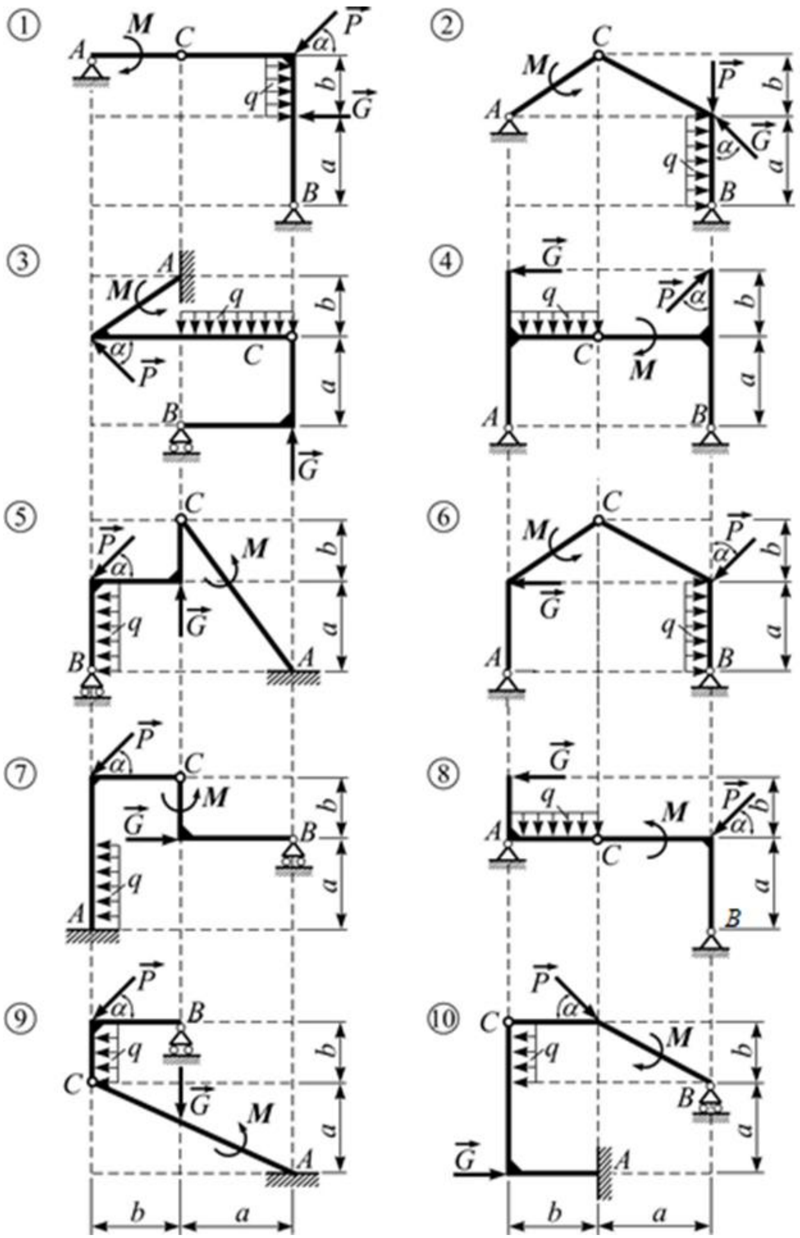


Рис. 2.3

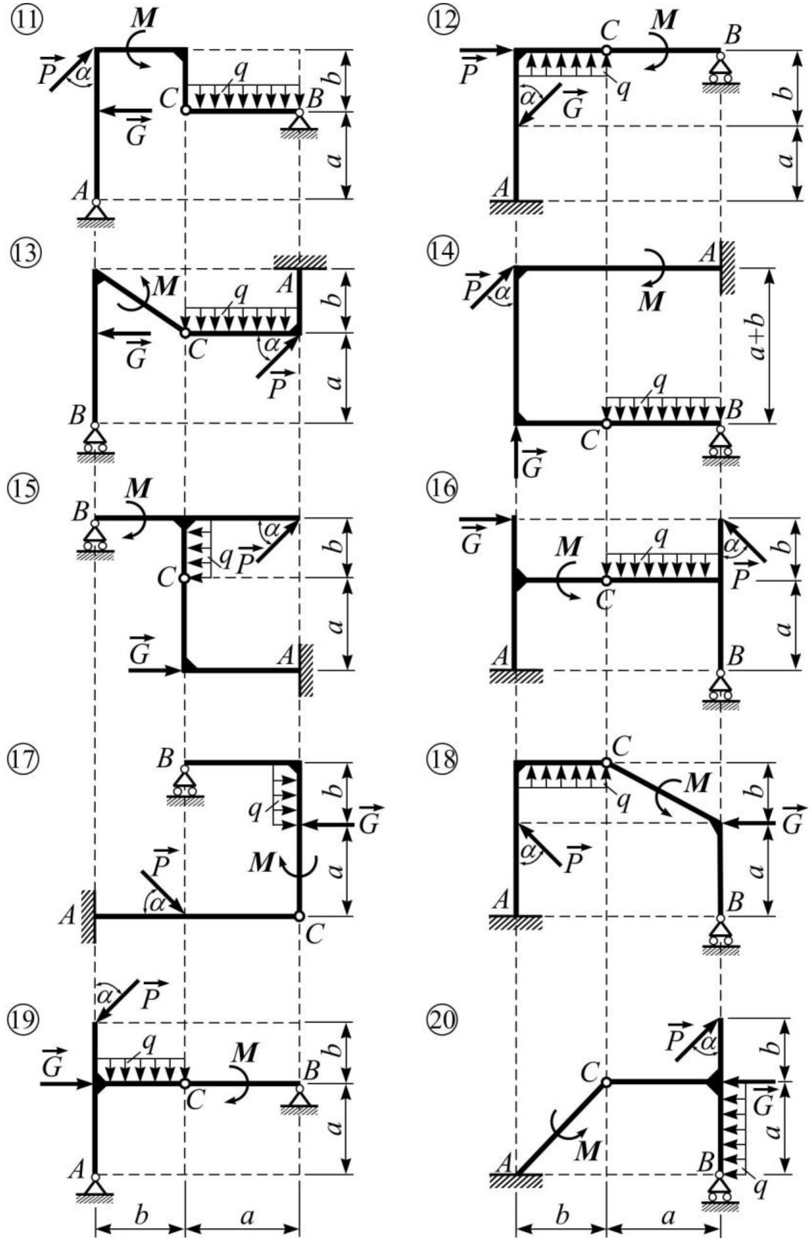


Рис. 2.3 (продовження)

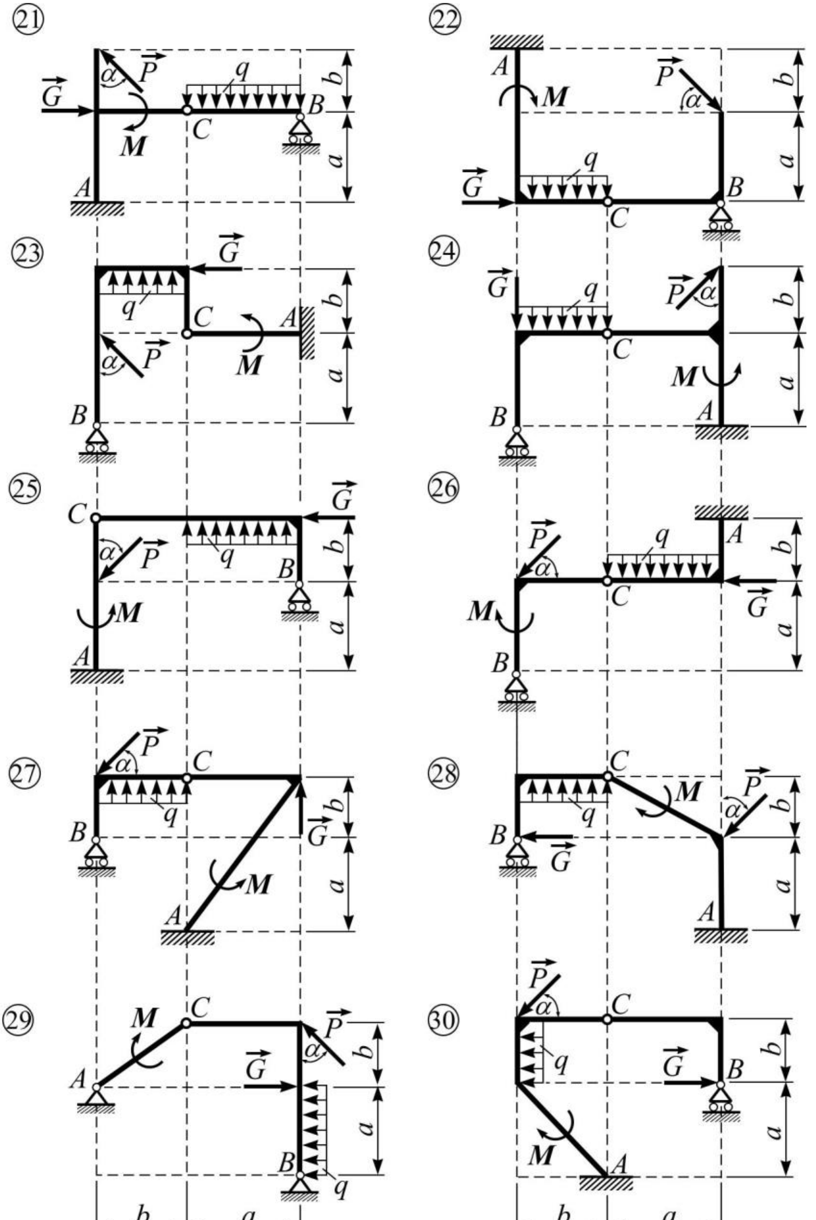


Рис. 2.3 (продовження)

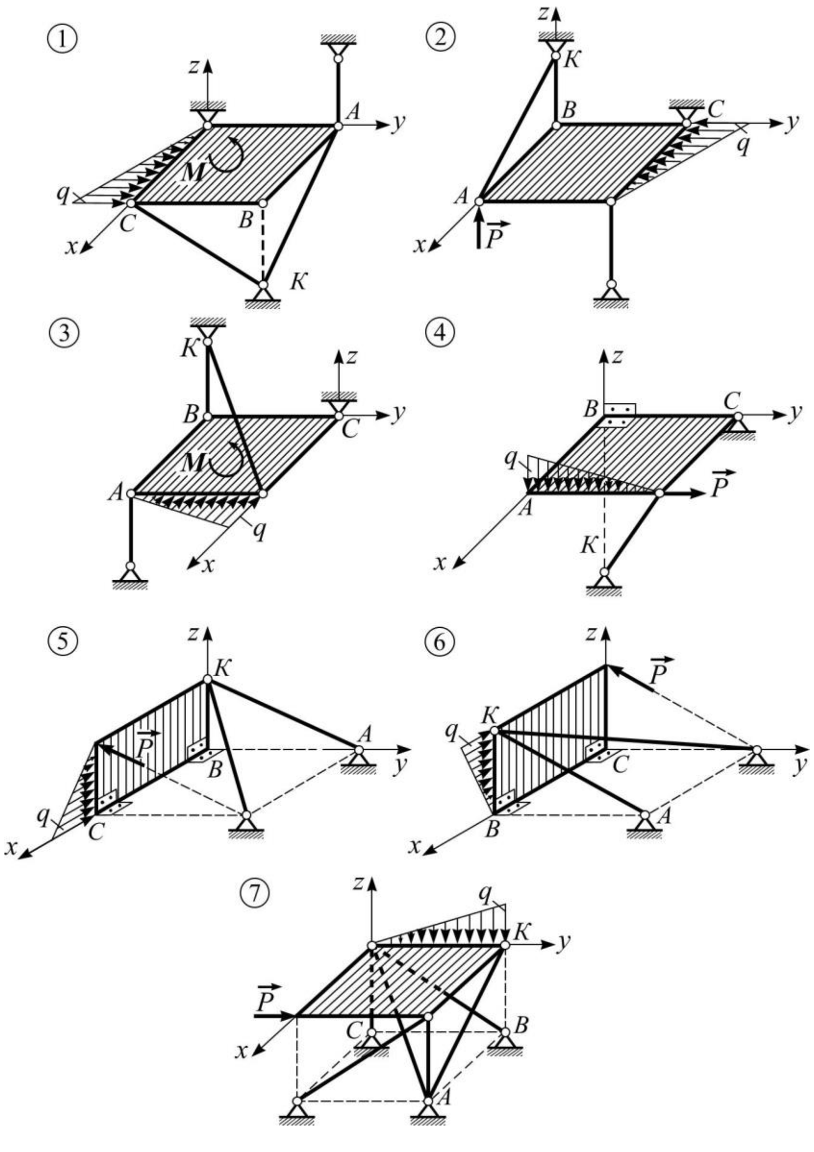


Рис. 2.4

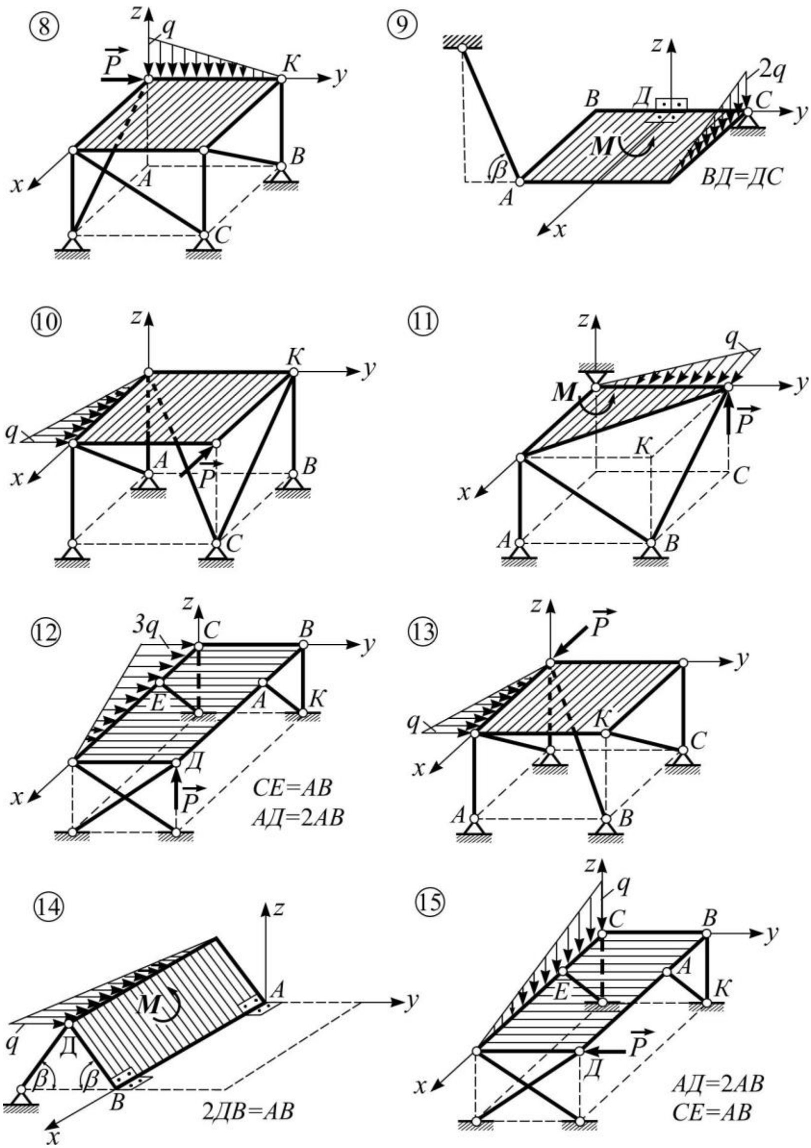


Рис. 2.4 (продовження)

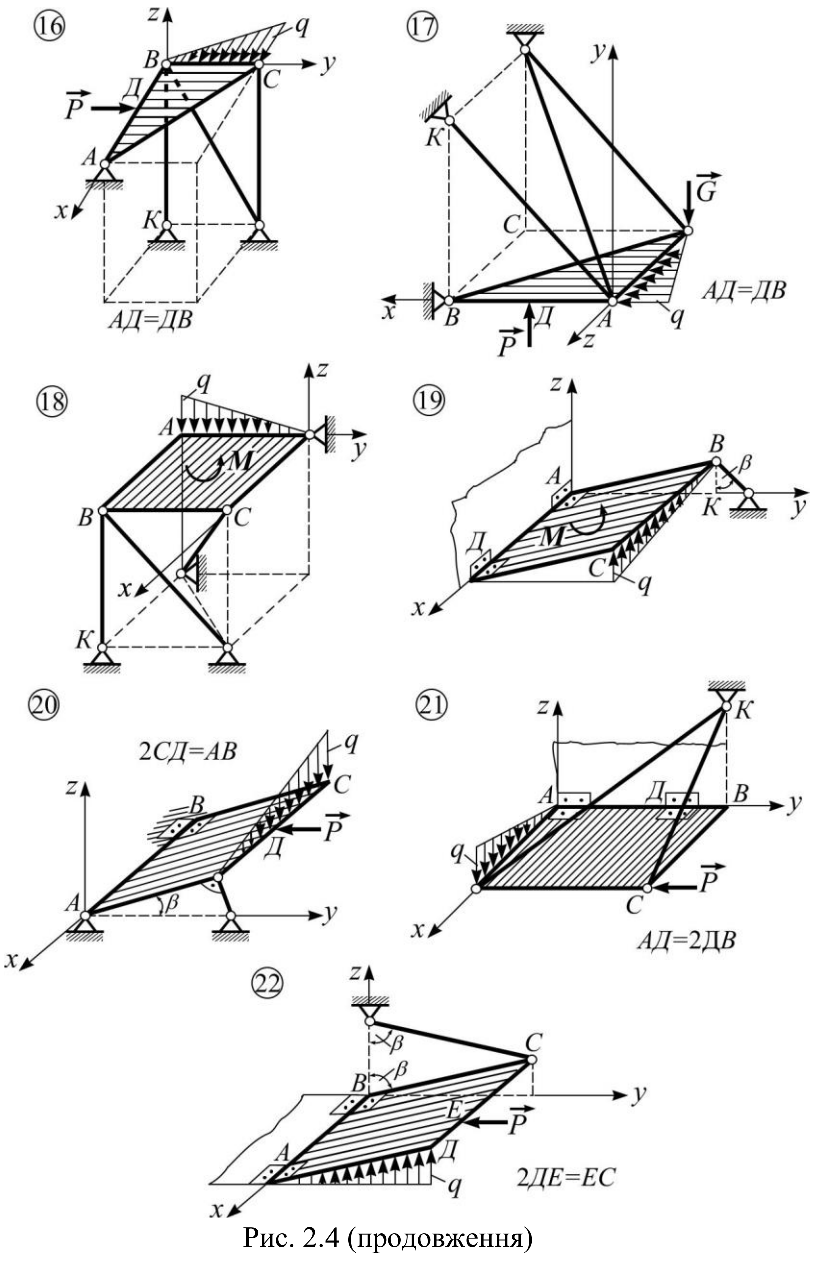


Рис. 2.4 (продовження)

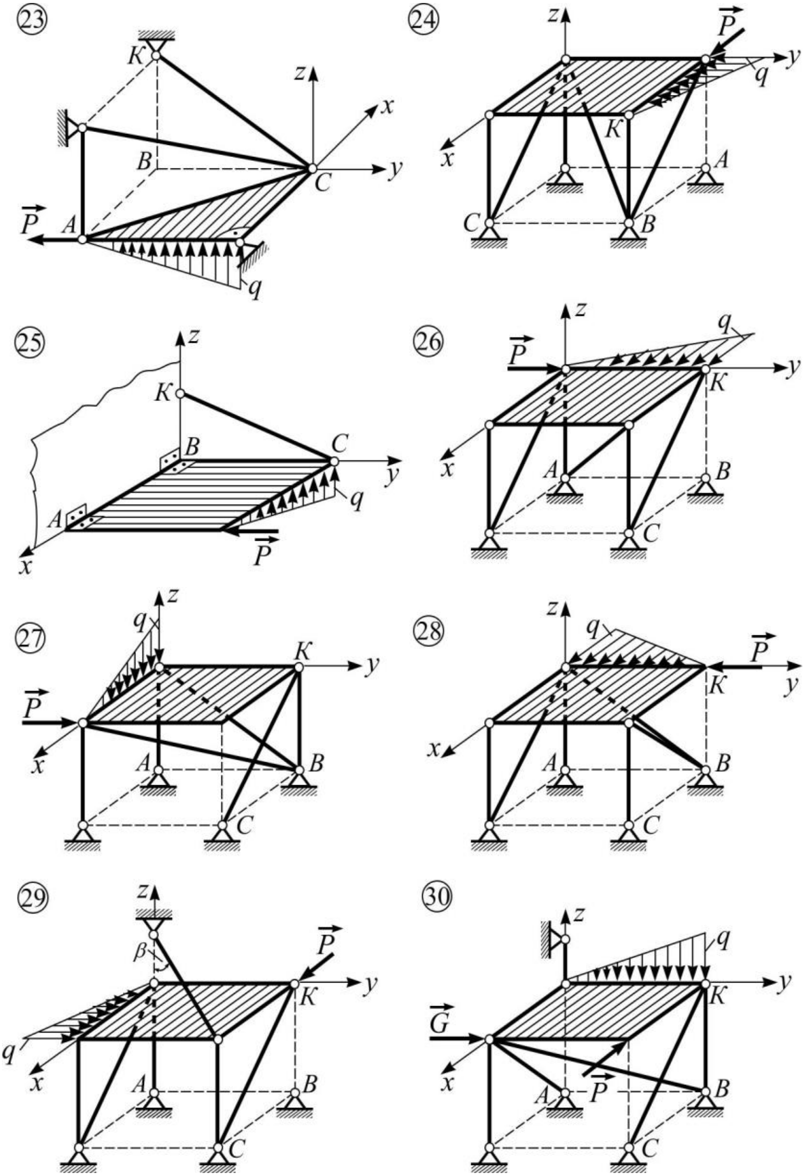


Рис. 2.4 (продовження)

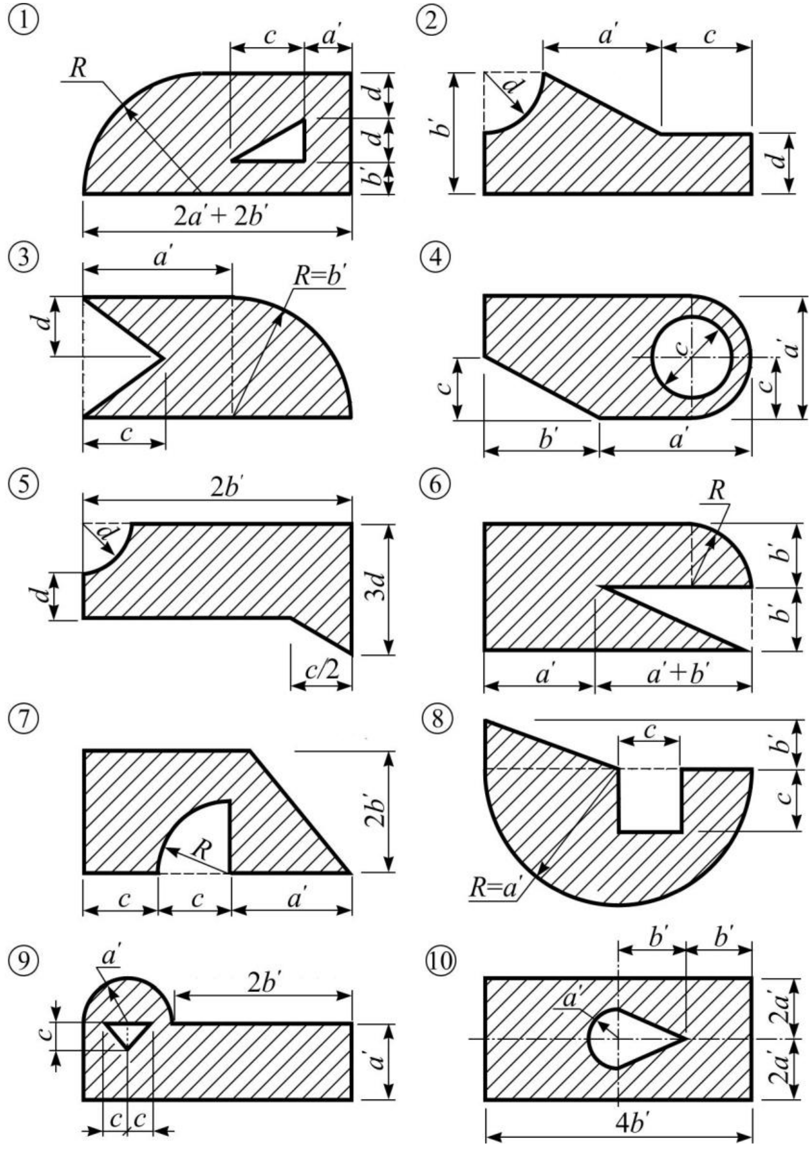

①
R
c
a′
d
d
b′
2a′ + 2b′
②
a′
c
d
b′
d
③
a′
R=b′
d
c
④
c
c
a′
c
b′
a′
⑤
2b′
d
d
3d
c/2
⑥
R
b′
b′
a′
a′+b′
⑦
2b′
R
c
c
a′
⑧
c
b′
c
R=a′
⑨
a′
2b′
c
a′
c
c
⑩
b′
b′
a′
2a′
2a′
4b′

Рис. 2.5

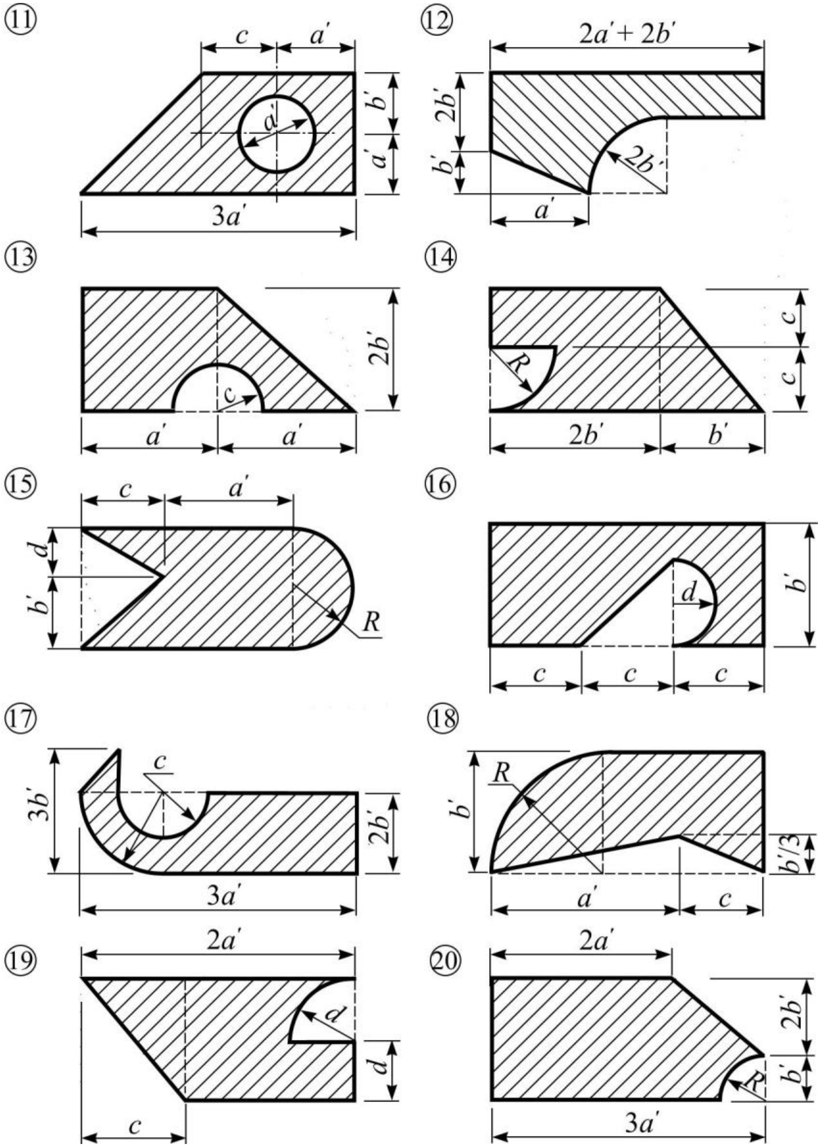


Рис. 2.5 (продовження)

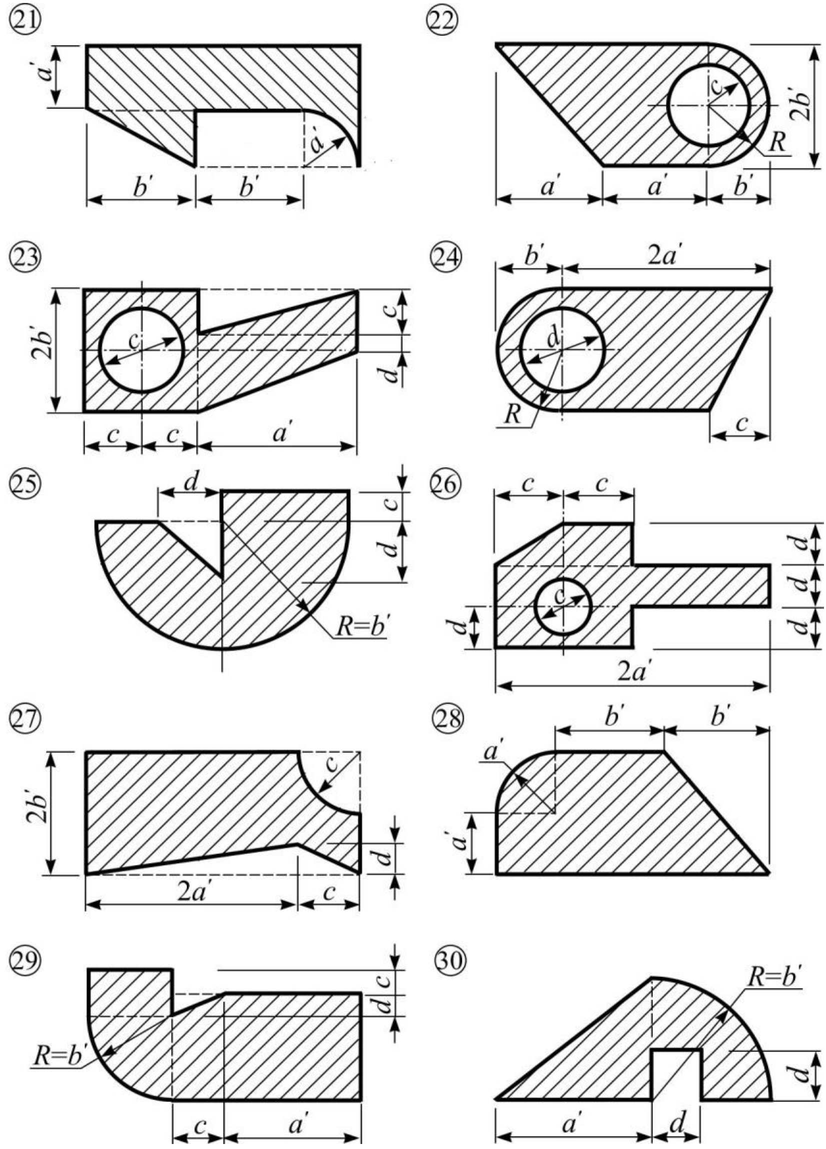


Рис. 2.5 (продовження)

Вказівки до самостійної роботи

Самостійна робота студентів над курсом теоретичної механіки є запорукою успішного його засвоєння та складання або заліку.

Вивчення кожної теми доцільно проводити в такій послідовності: спочатку вивчити теоретичну частину курсу по конспекту та одному з рекомендованих підручників [1...2], пам'ятаючи, що головне – це зрозуміти, а не „завчити”; потім розібратися у розв'язаннях прикладів в конспекті та підручнику, звернувши особливу увагу на методичні вказівки по їх розв'язанню; розв'язати самостійно кілька аналогічних задач з рекомендованих по збірнику [3]. Якщо виникають труднощі з відповідями, то необхідно знову вернутися до конспекту та підручника й розібратися у відповідному матеріалі.

У випадку труднощів в розумінні якого-небудь питання необхідно звернутися на кафедру за консультацією: відповіді можна отримати лише на конкретні питання як з теорії, так і по розв'язанню задач.

Питання, які розглядаються в статиці, носять переважно геометричний характер, тому для їх застосування треба знати з середньої школи функції синуса та косинуса, розв'язання трикутників за допомогою теорем синуса та косинуса. З курсу нарисної геометрії досить повторити проектування відрізка на площину (вісь), а з курсу вищої математики необхідно знати основи векторної алгебри: правила додавання, віднімання та множення векторів.

Слід зазначити, що велику допомогу в розв'язанні задач нададуть студентам навчальні посібники [4], [5].

3. СТАТИКА НА ПЛОЩИНІ

<u>Система збіжних сил</u>

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називаються *збіжними.* Для того, щоб система збіжних сил перебувала в рівновазі, необхідно і достатньо рівності нулю рівнодійної цієї системи сил:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0 \tag{3.1}$$

Якщо система сил еквівалентна нулю, то кажуть, що система сил зрівноважена, тобто тіло під її дією знаходиться в рівновазі.

Геометрично це означає, що векторний многокутник збіжних сил замкнений: кінець останньої сили збігається з початком першої. У випадку рівноваги системи трьох не паралельних сил можна побудувати трикутник сил (*силовий трикутник*).

Якщо зрівноважена система збіжних сил лежить в одній площині, наприклад *Oxy*, то отримаємо дві умови рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases} \quad . \qquad (3.2)$$

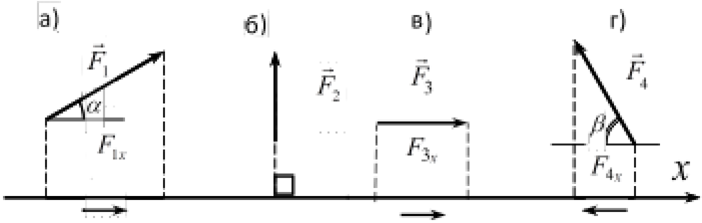


Рис. 3.1

Умови рівноваги (3.2) називають також *рівняннями рівноваги*, з яких шукають невідомі величини під час розв'язання конкретних задач.

При складанні рівнянь рівноваги (3.2) необхідно проектувати сили на осі координат.

Проекцією сили $\vec{F}$ на вісь називають алгебраїчну величину, яка дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямом осі та напрямом сили (рис. 3.1):

$$F_{1x} = F_1 \cos\alpha , \quad F_{2x} = 0 , F_{3x} = F_3 ,$$

$$F_{4x} = F_4 \cos(180° - \beta) = -F_4 \cos\beta .$$

Практично, при обчисленні проекції сили на вісь, її модуль множать на косинус гострого кута між вектором сили та віссю і подумки повертають вектор сили на цей кут: знак проекції вважається додатнім, якщо напрями вектора та осі збігаються (рис. 3.1 а) і від'ємним – якщо не збігаються (рис. 3.1 г). *Проекція сили на вісь рівна нулю, якщо сила перпендикулярна до осі* (рис. 3.1 б). *Проекція сили на вісь рівна величині сили, якщо сила паралельна до осі* (рис. 3.1 в).

Вибір напряму координатних осей, на які проектуються сили, не має принципового значення, але під час розв'язання задач *доцільно осі напрямляти перпендикулярно невідомим силам:* отримуємо більш прості рівняння, які легше розв'язати з точки зору математики. В цьому і полягає *раціональність вибору осей координат.*

Якщо тверде тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил , розміщених на площині , то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (це *теорема про три сили*). Ця вимога необхідна для рівноваги трьох сил , але вона недостатня , бо необхідно також , щоб усі три сили утворили замкнений трикутник.

При розв'язанні будь-якої задачі статики на рівновагу дотримуються наступної послідовності.

1. Необхідно вибрати тіло (або точку), рівновагу якого (якої) будемо розглядати.
2. Прикласти до нього (неї) активні сили.
3. Відкинути в'язі, а їх дію замінити реакціями в'язей.
4. Визначити, яка система сил діє на тіло (точку) та вибрати раціонально систему координат.
5. Скласти необхідну кількість рівнянь рівноваги і розв'язати їх відносно невідомих.
6. Провести аналіз отриманих результатів.

При розв'язанні задач статики про рівновагу кількість невідомих не повинна перевищувати кількості рівнянь рівноваги – це означає, що *задача має бути статично означеною*. Якщо ж невідомих більше кількості рівнянь рівноваги, то таку *статично неозначену задачу неможливо розв'язати методами теоретичної механіки*: ці задачі розв'язують методами опору матеріалів, додаючи до рівнянь рівноваги зі статики рівняння деформацій.

Приклад 1. Визначити аналітичним та графоаналітичним способом) реакції в'язей абсолютно твердого тіла (рис. 1), якщо: $a = 2$ *м*, $b = 3$ *м*, $F = 4$ *кН*, $\beta = 30$. При розрахунках власною вагою тіла та його поперечним розміром знехтувати.

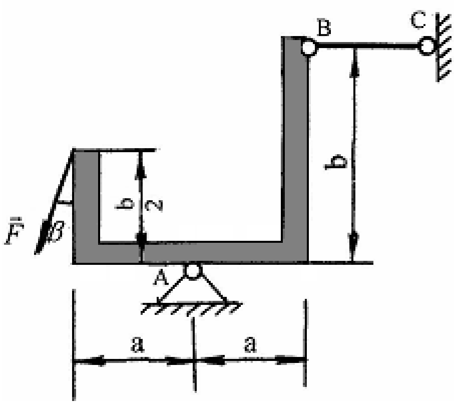


Рис. 1

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу абсолютно твердого тіла. На нього діє лише одна активна сила $\vec{F}$. Ідеальний стержень *BC* та нерухомий шарнір *A* є в'язями для цього тіла. Звільняємося від в'язей, замінивши їх дію реакціями в'язей: зусилля $\vec{S}$ у стержні напрямлене уздовж нього, а лінію дії реакції нерухомого шарніра $\vec{R}$ визначаємо за теоремою про три не паралельні сили. Продовжуємо лінії дії сили $\vec{F}$ і реакції $\vec{S}$ стержня *BC* до перетину в точці *Д* (рис. 2), з'єднуємо точку прикладання реакції шарніра *А* з точкою *Д* і отримуємо лінію дії реакції $\vec{R}$ опори *А*. Щоб визначити дійсний напрям реакцій $\vec{R}$ та $\vec{S}$ будуємо силовий трикутник (рис. 2). Його побудову починаємо з активної сили $\vec{F}$, напрям якої відомий. З довільної точки *С* проводимо паралельно силі $\vec{F}$ лінію

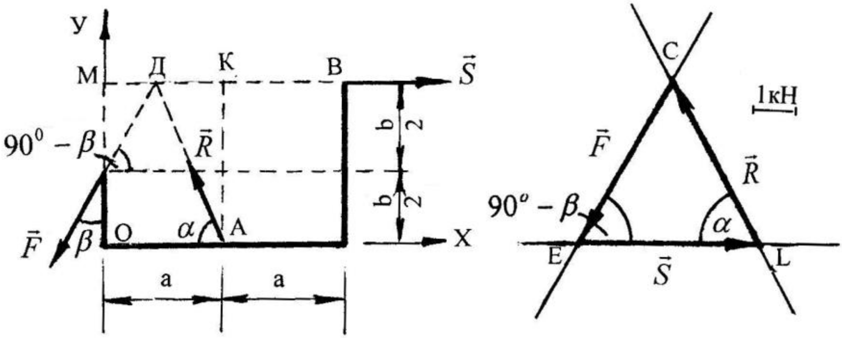


Рис.2

СЕ довільної довжини, що зображує силу $\vec{F}$. Через початок *С* та кінець *Е* вектора $\vec{F}$ проводимо прямі, які паралельні прямим *АД* (лінія дії реакції $\vec{R}$) та *ВМ* (лінія дії реакції $\vec{S}$, рис. 2) до їх перетину в точці *L*. Обходячи трикутник по контуру *CELC*, починаючи з сили $\vec{F}$, визначаємо дійсні напрямки сил $\vec{S}$ та $\vec{R}$: початок наступного вектора співпадає з кінцем попереднього. Зображуємо сили $\vec{R}$ та $\vec{S}$ на рис. 2. Вибір осей координат *xOy* показаний на рис. 2.

При аналітичному способі розв’язання задачі, складаємо рівняння рівноваги плоскої збіжної системи сил (1.2):

$$\begin{cases} \sum F_{kx}=0, & -R\cos\alpha+S-F\sin\beta=0, \\ \sum F_{ky}=0, & +R\sin\alpha-F\cos\beta=0. \end{cases}$$

Розв’язуючи отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$R=F\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\quad S=F\sin\beta+R\cos\alpha=F\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}.$$

Визначимо кут α, який був введений нами для визначення напряму реакції $\vec{R}$ нерухомого шарніра *А*. Робимо додаткові побудови на рис. 3.3 і знаходимо:

$$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{AK}{DK}=\mathrm{arctg}\frac{b}{a-\frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\beta}=\mathrm{arctg}\frac{2}{2a/b-\mathrm{tg}\beta}.$$

Обчислюємо:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2\cdot 3}{2\cdot 2-\sqrt{3}} = 69.3°,$$

$$R = 4\cdot\frac{\cos 30°}{\sin 69.3°} \approx 3.70\ кН,$$

$$S = 4\cdot\frac{\cos(69.3°-30°)}{\sin 69.3°} \approx 3.31 кН.$$

Перевіримо отримані результати графоаналітичним способом. Застосувавши теорему синусів для силового трикутника (рис. 3.3), отримаємо:

$$\frac{R}{\sin(90°-\beta)} = \frac{F}{\sin\alpha} = \frac{S}{\sin(90°-(\alpha-\beta))},$$

$$R = F\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},\quad S = F\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha},$$

оскільки, $\sin(90°-\varphi) = \cos\varphi$.

Відповідь: $F \approx 4.00\ кН,\quad S \approx 3.31 кН$.

Довільна система сил на площині

Для рівноваги довільної системи сил на площині необхідно і достатньо, щоб головний вектор $\vec{R}^*$ та головний момент M_O цієї системи відносно довільного центра O одночасно дорівнювали нулю:

$$\vec{R}^* = \sum \vec{F}_k = 0,\quad M_O = \sum m_O(\vec{F}_k) = 0\ . \qquad (3.3)$$

Виходячи з умов (1.3), отримуємо рівняння рівноваги довільної системи сил на площині, які можна записати в трьох альтернативних формах.

Перша форма умов рівноваги: для рівноваги довільної системи сил на площині необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі системи координат xOy та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки О дорівнювали нулю:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Друга форма умов рівноваги (вісь проекцій не $\perp AB$):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Третя форма умов рівноваги (А, В, С довільні точки, які не лежать на одній прямій):

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Таким чином, незалежних рівнянь рівноваги три, будь-яке інше рівняння використовується для перевірки розв’язку задачі.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно деякої точки *O* називають добуток модуля сили на її плече відносно цієї точки, взятий зі знаком „плюс” або „мінус”:

$$m_O(\vec{F}) = \pm F h . \quad (3.7)$$

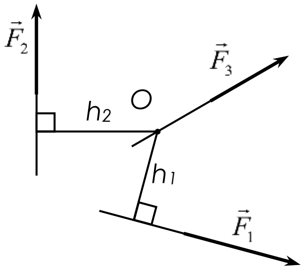


Рис. 3.2

Плечем сили називають найкоротшу відстань від точки до лінії дії сили (довжину перпендикуляра від точки до цієї лінії).

Момент сили вважається *додатним*, якщо сила намагається повернути тіло відносно точки в напрямку *проти ходу* годинникової стрілки (рис. 3.2, сила $\vec{F}_1$) та *від’ємним* – у протилежному випадку (рис. 3.2, сила $\vec{F}_2$). Якщо лінія дії сили проходить через точку – $h = 0$ і момент такої сили відносно точки дорівнює нулю (рис. 3.2, сила $\vec{F}_2$).

Дві рівні за модулем антипаралельні сили, що не лежать на одній прямій, утворюють *пару сил* (рис. 3.3).

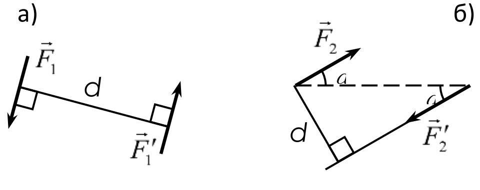


Рис. 3.3

Моментом пари сил називають добуток однієї із сил пари на найкоротшу віддаль (плече) між силами, що утворюють пару:

$$M = \pm F\,d\,. \qquad (3.8)$$

Якщо пара сил намагається повернути тіло проти годинникової стрілки, то момент пари вважається *додатним* (рис. 3.3 а), в протилежному випадку – *від'ємним* (рис. 3.3 б).

Слід пам'ятати, що пара сил не може бути зрівноважена однією силою і що пару сил можна переносити в будь-яке положення в площині її дії; крім того у пари сил можна міняти модулі сил пари так, щоб алгебраїчний момент пари залишався незмінним. Зауважимо також, що алгебраїчна сума проекцій сил, що утворюють пару, на будь-яку вісь рівна нулю, і таким чином в рівняння проекцій сил момент пари сил не входить.

При визначенні реакцій в'язей розподілене навантаження замінюють зосередженою силою; на рис 3.4 наведені два основні випадки такої

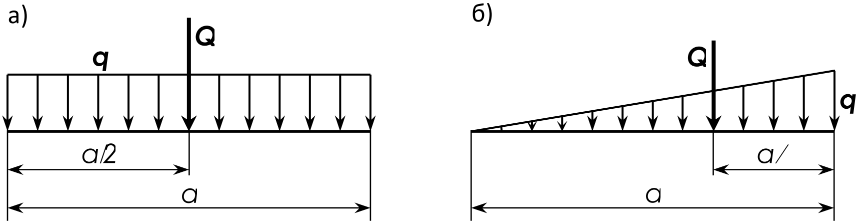


Рис. 3.4

заміни: $Q = qa$ (рис. 3.4 а), $Q = 1/2qa$ (рис. 3.4 б).

Силу, яка діє на тіло під деяким кутом α, бажано розкладати на складові, які паралельні координатним осям (рис. 3.5) та потім застосовувати *теорему Варіньйона: момент рівнодійної відносно деякої точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї ж точки*. Та-

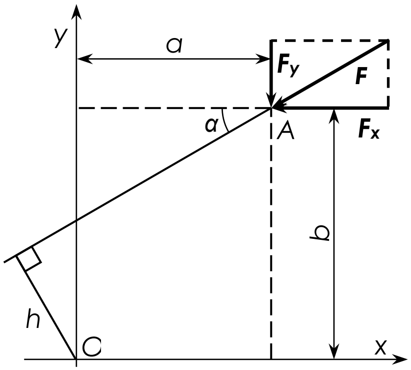


Рис. 3.5

кий підхід спрощує розрахунок, бо не треба шукати плече h, що добре видно для випадку на рис. 3.5: $F_x = Fcos\alpha$, $F_y = Fsin\alpha$.

$$m_A(\vec{F}) = F_x b - F_y a = F(b\cos\alpha - a\sin\alpha).$$

Приклад 2. На консольну балку AC (рис. 3 а) діє сила $\vec{F}$, пара сил з моментом M та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q. Визначити реакції опор A та B, якщо $F = 2$ *кН*, $M = 5$ *кН·м*, $q = 3$ *кН/м*, $a = 2$ *м*, $b = 3$ *м*, $c = 1$ *м*.

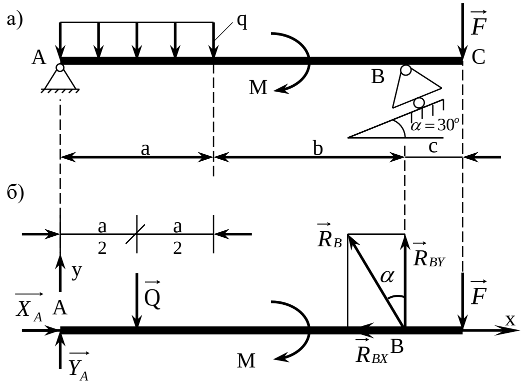


Рис.3.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу балки AC: в'язями для неї є шарнірно-рухома опора B, напрям реакції $\vec{R}_B$ якої відомий (перпендикулярно до площини опори) та шарнірна нерухома опора A, напрям реакції якої заздалегідь невідомий, тому представляємо її у вигляді двох складових $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$.

Відкидаємо в'язі і замінюємо їх дію на балку реакціями в'язей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ (рис. 3 б); прикладаємо до балки активні сили $\vec{F}$, $\vec{Q}$ ($Q = qa = 3 \cdot 2 = 6\,кН$) та пару сил з моментом M. На рис. 3 б зображена розрахункова схема та вибрана система координат xAy.

На балку діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три, невідомих також три ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$), задача статично означена.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A - R_B \sin\alpha = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, & R_B \cos\alpha (a+b) - F(a+b+c) - Qa/2 - M = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, & -Y_A(a+b) + Q(a/2+b) - Fc - M = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі реакції:

$$\begin{cases} X_A = R_B \sin\alpha, \\ R_B \cdot 5\cos\alpha = F\cdot 6 + Q\cdot 1 + M, \\ Y_A \cdot 5 = Q\cdot 4 - F\cdot 1 - M, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A \approx 5.31\cdot \sin 30° \approx 2.66\,кН, \\ R_B = (2\cdot 6 + 6\cdot 1 + 5)/5\cos 30° \approx 5.31\,кН, \\ Y_A = (6\cdot 4 - 2\cdot 1 - 5)/5 = 3.4\,кН. \end{cases}$$

Перевіримо отримані результати:

$$\sum F_{ky} = (Y_A + R_B\cos\alpha) - (Q+F) =$$
$$= (3.4 + 5.31\cdot\cos 30°) - (6+2) = -0.001\,кН,$$

що є достатнім при прийнятій точності обчислень. Реакції опор знайдено правильно. Знаки "плюс" свідчать про те, що реакції $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ напрямлені на рис. 3, б правильно.

Відповідь: $R_B \approx 5.31\,кН,\ \ Y_A = 3.4\,кН,\ \ X_A \approx 2.66\,кН$.

Приклад 3. Рама *ABC* (рис. 4 а) жорстко защемлена кінцем *A*. На неї діють сила $\vec{F}$, розподілене навантаження за лінійним законом, інтенсивність якого змінюється від *q* до 2*q*, та пара сил з моментом *M*. В точці *C* рами прив'язаний канат, перекинутий через блок *D*, на кінці якого прикріплений тягар вагою *P*. Нехтуючи тертям на блоці, визначити складові реакції жорсткого защемлення *A*, якщо *F* = 8 *кН*, *P* = 10 *кН*, *M* = 4 *кН·м*, *q* = 2 *кН/м*, *a* = 2 *м*, *b* = 6 *м*, *α* = 45°.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу рами *ABC*, в'яззю для якої є жорстке защемлення *A*: звільняємось від в'язі, дію якої заміняємо трьома складовими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A, оскільки напрям реакції опори *A* невідомий.

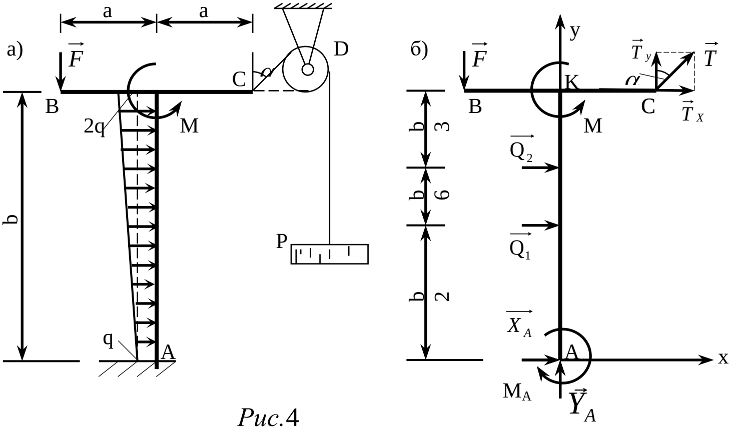


*Рис.*4

Сила натягу троса $\vec{T}$ за величиною дорівнює *P*, бо тертям у блоці нехтуємо згідно з умовою задачі. Сила $\vec{T}$ напрямлена вздовж гнучкої в’язі (каната), яка завжди розтягнута. Розподілене навантаження розбиваємо (пунктир на рис 4 а) на рівномірно розподілене інтенсивності q та лінійно розподілене навантаження, які замінюємо силами $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ відповідно. Сила $\vec{Q}_1$ ($Q_1 = qb = 12\,кН$) прикладена посередині стояка *AK*, а сила $\vec{Q}_2$ ($Q_2 = qb/2 = 6\,кН$) на віддалі $b/3$ від точки *K*. Для зручності обчислення моменту сили $\vec{T}$, розкладено її на складові $T_x = T\sin\alpha$ та $T_y = T\cos\alpha$, що дозволяє застосувати теорему Варіньйона. Розрахункова схема та вибір осей зображено на рис. 4 б. На раму діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три, стільки ж невідомих ($\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A) і задача статично означена.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A + Q_1 + Q_2 + T\sin\alpha = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - F + T\cos\alpha = 0, \\ \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad -M_A + M - Q_1 b/2 - Q_2(b/2 + b/6) + Fa - T_x b + T_y a = 0. \end{cases}$$

Розв’язуємо систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$X_A = -Q_1 - Q_2 - T\sin 45^\circ = -\left(18 + 5\sqrt{2}\right) \approx -25.1\,кН,$$
$$Y_A = F - T\cos 45^\circ = 8 - 5\sqrt{2} \approx 0.929\ кН,$$
$$\begin{aligned} M_A &= M - Q_1 b/2 - Q_2(b/2 + b/6) + Fa - T_x b + T_y a = \\ &= 4 - 12\cdot 3 - 6\cdot 4 + 8\cdot 2 - 10\sqrt{2}\cdot(3-1) = \\ &= -\left(40 + 20\sqrt{2}\right) \approx -68.3\ кН\cdot м. \end{aligned}$$

Перевірка розрахунку:

$$\begin{gathered} \sum m_C(\vec{F}_k) = (F\cdot 2a + Q_1 b/2 + Q_2 b/3 + M) - (M_A - X_A b + Y_A a) = \\ = (8\cdot 4 + 12\cdot 3 + 6\cdot 2 + 4) - \left(-20\cdot\left(2 + \sqrt{2}\right) + \left(18 + 5\sqrt{2}\right)\cdot 6 + \left(8 - 5\sqrt{2}\right)\cdot 2\right) = \\ = 84 - 84 = 0. \end{gathered}$$

Реакції визначені вірно, знаки „мінус” у X_A та M_A означають, що напрями цих реакцій є протилежними вибраним в розрахунковій схемі на рис. 4 б.

<u>*Відповідь:*</u> $Y_A \approx 0.929\,кН,\ X_A \approx -25.1\,кН,\ M_A \approx -68.3\,кН\cdot м$.

<u>**Розрахунок складених конструкцій. Рівновага сил при наявності тертя ковзання**</u>

Складеною конструкцією називають сукупність кількох твердих тіл, які вільно спираються одне на одне або з’єднані між собою нежорсткими в’язями (наприклад, шарнірами, гнучкими пасами, тросами тощо).

Якщо система з n тіл перебуває в рівновазі, то кожне з цих тіл також перебуває в рівновазі, тому розрахунок складених конструкцій з n тіл може вестися двома шляхами:

розглядається окремо рівновага кожного з n тіл окремо;

розглядається рівновага всієї системи, а потім окремо ще $n - 1$ тіл, що входять до системи.

В обох випадках маємо $3n$ рівнянь рівноваги, розв’язання яких простіше (з точки зору математики) в першому випадку. Зауважимо, що при розгляді рівноваги кожного тіла слід враховувати сили взаємодії між окремими тілами (внутрішні сили). Ці сили відповідно до аксіоми рівності дії та протидії завжди рівні між собою за величиною та протилежні за напрямком.

Визначення рівноваги тіл з врахуванням тертя ковзання зводиться до звичайного розгляду граничного положення рівноваги, коли сила тертя досягає свого найбільшого значення

$$F_{mn} = f\,N\,, \tag{3.9}$$

де f – безрозмірний коефіцієнт тертя ковзання, а $\vec{N}$ – сила нормального тиску одного тіла на інше. Сила тертя $\vec{F}_{mn}$ виникає в площині дотику цих тіл і завжди напрямлена в бік протилежний тому, куди діючі сили намагаються зсунути тіло.

При аналітичному розв’язанні задач реакцію шорсткої поверхні зображають двома складовими $\vec{N}$ та $\vec{F}_{mp}$, а потім складають звичайні рівняння рівноваги, враховують рівність (3.9) і знаходять невідомі величини.

Приклад 4.Дві рами (рис. 5 а) шарнірно з’єднані між собою в точці *C*. Ліва рама жорстко защемлена в точці *A*, а права прикріплена в точці *B* до шарнірно-рухомої опори. На систему діють сила $\vec{F}$, пара сил з моментом *M* та розподілені навантаження на ділянках *АД* та *ВК*. Визначити реакції опор *A* та *B* і тиск в шарнірі *C*, якщо $F = 10$ *кН*, $M = 5$ *кН·м*, $q = 2$ *кН/м*, $a = 2$ *м*, $b = 3$ *м*, $\alpha = 45°$. Зробити перевірку.

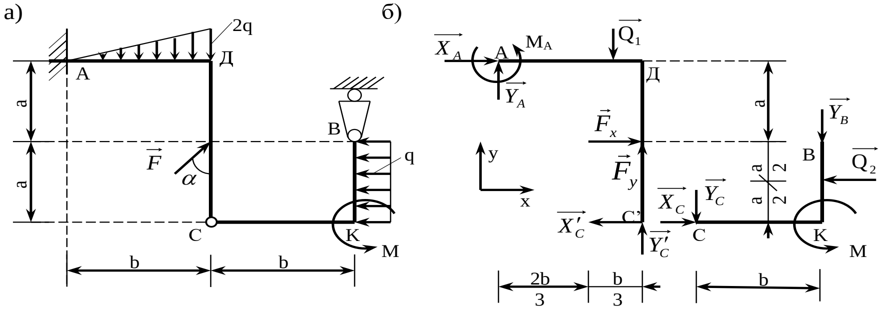


Рис. 5

Розв’язання.

Розрахунок складеної з двох рам конструкції почнемо з розгляду рівноваги правої рами *ВКС*, для чого роз’єднаємо складену конструкцію на дві частини (рис. 5 б). В точці *C* зображаємо сили взаємодії між лівою і правою частинами конструкції:

$$\vec{X}'_C = -\vec{X}'_C, \quad \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C .$$

На раму *ВКС* діє активна сила $\vec{Q}_2$ ($Q_2 = q\,a = 4\,кН$) та пара сил з моментом *M*. Звільняємось від в’язі в точці В (шарнірно-рухома опора) і заміняємо її дію реакцією в’язі $\vec{Y}_B$. На раму діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_C - Q_2 = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad -Y_B - Y_C = 0, \\ \sum m_K\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad Y_C b + Q_2\, a/2 + M = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему рівнянь відносно невідомих:

$$X_C = Q_2 = 4\,кН,$$

$$Y_B = -Y_C = \left(M + \tfrac{1}{2}Q_2 a\right)/b = (5+4)/3 = 3\,кН.$$

Розглянемо рівновагу лівої рами *АДС`* (рис. 5 б).

Відкидаємо жорстке защемлення *A* і заміняємо дію цієї в’язі трьома складовими $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, M_A. Активну силу $\vec{F}$ розкладаємо також на складові ($F_x = F\sin\alpha,\ F_y = F\cos\alpha$), що в подальшому надасть можливість використати теорему Варіньйона при обчисленні моменту сили $\vec{F}$, а навантаження розподілене за лінійним законом заміняємо активною силою $\vec{Q}_1$ ($Q_1 = qb/2 = 6\,кН$), яку прикладаємо на віддалі 2*b*/3 від точки *А*. На раму *АДС*` діє плоска довільна система сил, незалежних рівнянь рівноваги три:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad X_A - X'_C + F_x = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y'_C + F_y - Q_1 = 0, \\ \sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \quad M_A - X'_C \cdot 2a + Y'_C b + F_x a + +F_y b - Q_1 \cdot 2b/3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини:

$$\begin{aligned} X_A &= -F\sin 45° + X_C = -5\sqrt{2} + 4 \approx -3.07\,кН, \\ Y_A &= -F\cos 45° + Q_1 - Y_C = -5\sqrt{2} + 9 \approx 1.93\,кН, \\ M_A &= -F_x a - F_y b + Q_1 \cdot 2b/3 + X_C \cdot 2a - Y_C b = \\ &= -5\sqrt{2}\cdot(2+3) + 6\cdot 2 + 4\cdot 4 + 3\cdot 3 = \\ &= 37 - 25\sqrt{2} \approx 1.64\,кН\cdot м. \end{aligned}$$

Перевіримо ці результати:

$$\begin{aligned} \sum m_C\left(\vec{F}_k\right) &= ((M_A - X_A\cdot 2a - Y_A b) - (F_x a - Q_1 b/3)) + (-Y_B b + (Q_2\, a/2 + M)) = \\ &= \left(\left(37 - 25\sqrt{2} + \left(5\sqrt{2} - 4\right)\cdot 4 + \left(5\sqrt{2} - 9\right)\cdot 3\right) - \left(5\sqrt{2}\cdot 2 - 6\cdot 1\right)\right) + \\ &+ (-3\cdot 3 + (4\cdot 1 + 5)) = \left(\left(-6 + 10\sqrt{2}\right) - \left(10\sqrt{2} - 6\right)\right) + (9 - 9) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

.

Реакції знайдено правильно, знаки „мінус" означають, що складові $\vec{X}_A$, $\vec{X}_C$, $\vec{X}'_C$ мають напрямки протилежні до зображених на рис. 5 б.

<u>*Відповідь:*</u>
$$X_A \approx -3.07\,кН,\ Y_A \approx 1.93\,кН,\ M_A \approx 1.64\,кН\cdot м,$$
$$X_C = 4\,кН,\ Y_C = -3\,кН,\ Y_B = 3\,кН.$$

Приклад 5. Рама складається з двох частин (рис. 6 а), шарнірно з'єднаних в точці *С*; кожна з них закріплена в точках *А* та *В* шарнірно-нерухомими опорами. На систему діють сила $\vec{F}$, пара сил з моментом *М* та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю *q*. Визначити реакції опор *А, В* і тиск в шарнірі *С*, якщо $F = 10\sqrt{2}\,кН$, *М* = 15 *кН·м*, *q* = 2 *кН/м*, *а* = 2 *м*, b = 3 *м*, α = 45°. Зробити перевірку.

Розв'язання.

Розглянемо рівновагу кожної частини рами окремо (рис. 6 б). Внутрішні реакції, з якими взаємодіють між собою обидві частини рами в шарнірі *С*, за аксіомою дії-протидії – $\vec{X}'_C = -\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$. В'язі в точках *А* та *В* (шарнірно нерухомі опори) замінимо відповідно складовими реакцій $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ та $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$. Силу $\vec{F}$ розкладаємо на складові $F_x = F\sin\alpha$, $F_y = F\cos\alpha$. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивності *q* замінюємо рівнодійною $\vec{Q}$ ($Q = q\cdot 2b = 12\,кН$). Розрахункова схема зображена на рис 6,б.

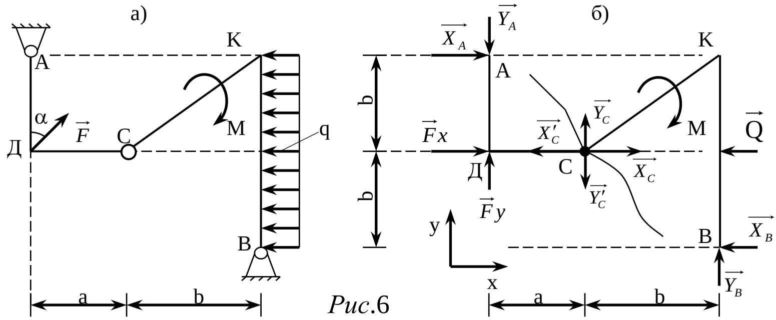


*Рис.*6

На кожну із частин рами діє плоска довільна система сил, тому для кожної з них складаємо три рівняння рівноваги:

Ліва частина (АДС)

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_A - X'_C + F_x = 0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad -Y_A - Y'_C + F_y = 0, \tag{2}$$

$$\sum m_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \qquad -X'_C b - Y'_C a + F_y b = 0. \tag{3}$$

Права частина (СКВ)

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad X_C - X_B - Q = 0, \tag{4}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad Y_C + Y_B = 0, \tag{5}$$

$$\sum m_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \qquad -X_C b - Y_C b + Qb - M = 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що коли дві шарнірно нерухомі опори розташовані на різних рівнях (рис. 6 а), то рівняння моментів слід складати саме відносно точок, в яких розташовані ці опори, що дає можливість легко розв'язати систему шести рівнянь, починаючи з рівнянь (3) та (6): два рівняння і дві невідомих, $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$. В нашому випадку досить відняти від третього рівняння шосте:

$$-Y_C'a + Y_C b + F_y b - Qb + M = 0, \Rightarrow Y_C(b-a) = (Q - F_y)b - M,$$
$$Y_C = \left(12 - 10\sqrt{2}\cos 45°\right)\cdot 3 - 15 = -9\,кH.$$

З рівняння (6):

$$X_C = Q - Y_C - M/b = 12 + 9 - 15/3 = 16\,кH\ .$$

Решту невідомих величин послідовно визначаємо з рівнянь (1), (2), (4), (5) системи:

$$X_A = -F\sin 45° + X_C' = -10 + 16 = 6\,кH\ ,$$
$$Y_A = F\cos 45° - Y_C' = 10 - (-9) = 19\,кH\ ,$$
$$X_B = -Q + X_C = -12 + 16 = 4\,кH\ ,$$
$$Y_B = -Y_C = 9\,кH\ .$$

Перевіримо отриманий розв'язок (складемо рівняння рівноваги для всієї конструкції):

$$\sum m_C\left(\vec{F}_k\right) = ((-X_A b + Y_A a) - F\cos\alpha \cdot a) + ((-X_B b + Y_B b) - M) =$$
$$= ((-6\cdot 3 + 19\cdot 2) - 10\cdot 2) + ((-4+9)\cdot 3 - 15) = 0 + 0 = 0.$$

Реакції знайдено правильно, складові Y_C, Y_C' $\overrightarrow{Y_C}$, $\overrightarrow{Y_C'}$ мають напрям протилежний зображеному на рис. 6 б.

<u>Відповідь:</u>

$$X_A = 6\,кH,\ X_B = 4\,кH,\ X_C = 16\,кH,$$
$$Y_A = 19\,кH,\ Y_B = 9\,кH,\ Y_C = -9\,кH.$$

4. СТАТИКА В ПРОСТОРІ

Система збіжних сил

Векторній рівності (3.1) відповідають три скалярні рівності:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

які є умовами рівноваги просторової збіжної системи сил в аналітичній формі.

Ці умови називають також *рівняннями рівноваги*, з яких шукають невідомі величини під час розв’язання конкретних задач.

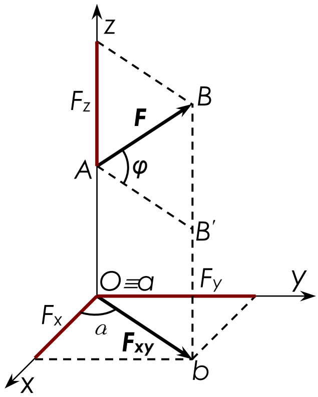


Рис. 4.1

У випадках, коли сила та вісь не лежать в одній площині, при визначенні проекції на вісь необхідно спочатку знайти її проекцію на площину, в якій лежить вісь, а потім цю проекцію спроектувати на вісь. Так, наприклад, для випадку на рис. 4.1 маємо:

$$\begin{cases} F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha, \\ F_y = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha, \\ F_z = F\sin\varphi. \end{cases}$$

Таким чином проекції вектора $\vec{F}$ на осі Ox та Oy визначені шляхом *подвійного проектування.*

Приклад 6. З умови рівноваги вузла *A* визначити зусилля в трьох стержнях конструкції, якщо *KM* = 1.5 *м*, *AD* = *BD* = 3 *м*, *CD* = 4 *м*, $\gamma = 60°$, *P* = 5 *кН*. (рис. 7).

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вузла *A*. На нього діє активна сила $\vec{P}$. В'язями для вузла *A* є три ідеальних стержні *AB*, *AC* та *AO*.

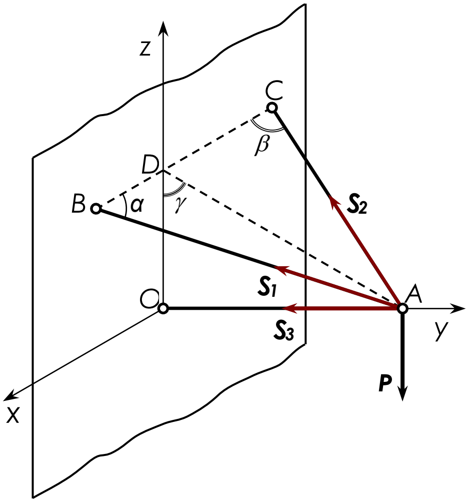


Рис.7

Звільняємось від в'язей та заміняємо їх дію реакціями в'язей $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$ які спрямовані вздовж осей стержнів від вузла *A*, тобто вважаємо, що всі стержні розтягнуті. Вибираємо систему координат, як показано на рис. 10.

З рис. 10 видно, що на вузол *A* діє просторова система збіжних сил, запишемо три рівняння рівноваги (2.1):

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \quad S_1\cos\alpha - S_2\cos\beta = 0, & (а) \\ \sum F_{ky} = 0, \quad -S_1\sin\alpha\sin\gamma - S_2\sin\beta\sin\gamma - S_3 = 0, & (б) \\ \sum F_{kz} = 0, \quad S_1\sin\alpha\cos\gamma + S_2\sin\beta\cos\gamma - P = 0. & (в) \end{cases}$$

Тут $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{AD}{BD} = 1, \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{4}, \Rightarrow \sin\beta = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0.8\,.$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (а) та (в), отримуємо:

$$S_2 = \frac{P}{\cos\gamma(\sin\beta+\cos\beta)} = \frac{5}{0.5\cdot 1.4} = 7.14\,кН,$$

$$S_1 = S_2\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{10}{1.4}\cdot 0.8\cdot\sqrt{2} = 8.08\,кН\,.$$

З рівняння (б) маємо:

$$S_D = -(S_1\sin\alpha + S_2\sin\beta)\sin\gamma =$$
$$= -\left(8.08/\sqrt{2} + 7.14\cdot 0.6\right)\cdot\left(\sqrt{3}/2\right) = -8.66\,кН.$$

Стержень *AO* – стиснутий.

<u>*Відповідь:*</u> $S_1 = 8.08\,кН,\ S_2 = 7.14\,кН,\ S_3 = -8.66\,кН$.

<u>Довільна система сил в просторі</u>

Як відомо, необхідними і достатніми умовами рівноваги просторової системи сил, яка діє на тверде тіло, є одночасна рівність нулю головного вектора та головного моменту:

$$\vec{R}^* = 0,\quad \vec{M}_O = 0\ .$$

В проекціях на осі декартової системи координат маємо:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0,\ \ \sum F_{ky} = 0,\ \ \sum F_{kz} = 0, \\ \sum m_x\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \ \sum m_y\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \ \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Таким чином, *для рівноваги просторової довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій всіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей були рівні нулю*. Незалежних рівнянь рівноваги в просторі в загальному випадку шість.

Поряд з поняттям моменту сили відносно точки важливим в механіці є поняття *моменту сили відносно осі*, як алгебраїчної величини, що дорівнює *моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з цією площиною*. Отже, для визначення момента сили $\vec{F}$ відносно осі, необхідно (один із способів):

силу $\vec{F}$ спроектувати в площину перпендикулярну до осі (рис. 4.2),

обчислити момент отриманої проекції відносно точки перетину осі з площиною.

Наприклад,
$$m_z\left(\vec{F}\right) = F_{xy}\,h\,. \tag{4.4}$$

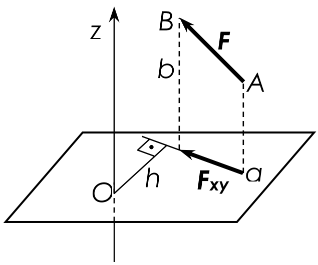


Рис. 4.2

Момент сили відносно осі *додатний*, якщо з кінця осі видно намагання сили обертати тіло відносно осі проти ходу годинникової стрілки та *від'ємний* у протилежному випадку.

Таким чином момент сили відносно осі (4.4) є скалярною величиною, яка дорівнює моменту проекції сили на площину, перпендикулярну до даної осі, відносно точки перетину осі з площиною, взятою з відповідним знаком.

Момент сили відносно осі (4.4), дорівнює нулю, якщо:

лінія дії сили паралельна осі ($F_{xy} = 0$),

лінія дії сили перетинає вісь ($h = 0$).

Якщо сила $\vec{F}$ не паралельна жодній з координатних осей, то для спрощення обчислення моментів цієї сили відносно координатних осей (крім випадку коли лінія дії сили перетинає вісь, відносно якої обчислюємо момент) необхідно силу розкласти на складові, які паралельні осям, та скористатися теоремою Варіньйона: *момент рівнодійної відносно будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.*

Приклад 7. Із умов рівноваги однорідної прямокутної плити вагою 8 *кН* визначити опорні реакції (рис. 8), якщо $\alpha = 60$, $\beta = 30°$, $q = 4$ *кН/м*.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу плити *ABCD*. Активні сили, що діють на неї – вага $\vec{P}$ та лінійно розподілене навантаження, яке замінюємо рівнодійною $\vec{Q}$ (точка прикладання знаходиться на відстані *CD*/3 від основи трикутника):

$$Q = q \cdot AD/2 = 2 \cdot 3 = 6\,кН$$

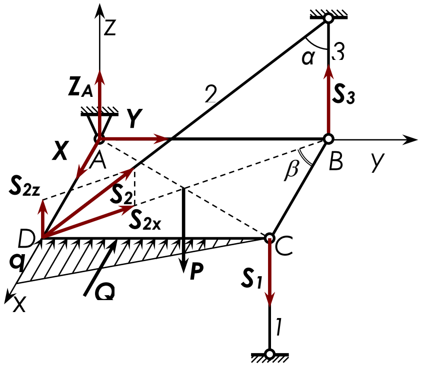


Рис. 8

Плита утримується в горизонтальному положенні за допомогою сферичного шарніра *A* та трьох ідеальних стержнів (рис. 8).

Замінюємо в’язі відповідними реакціями: складові сферичного шарніра $\vec{X}_A,\ \vec{Y}_A,\ \vec{Z}_A$ та зусилля в стержнях $\vec{S}_1,\ \vec{S}_2,\ \vec{S}_3$ (попередньо стержні вважаємо розтягнутими). Зусилля $\vec{S}_2$ розкладаємо на складові $\vec{S}_{2xy},\ \vec{S}_{2z}$ ($S_{2xy}=S_2\sin\alpha,\ S_{2z}=S_2\cos\alpha$.

Складаємо шість рівнянь рівноваги (2.3) довільної просторової системи сил:

$$\sum F_{kx}=0, \qquad X_A-S_{2xy}\cos\beta-Q=0, \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky}=0, \qquad Y_A+S_{2xy}\sin\beta=0, \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz}=0, \qquad Z_A-S_1+S_{2z}+S_3-P=0, \qquad (3)$$

$$\sum m_x\left(\vec{F}_k\right)=0, \qquad -S_1\cdot CD+S_3\cdot AB-P\cdot\tfrac{1}{2}AB=0, \qquad (4)$$

$$\sum m_y\left(\vec{F}_k\right)=0, \qquad S_1\cdot BC-S_{2z}\cdot AD+P\cdot\tfrac{1}{2}BC=0, \qquad (5)$$

$$\sum m_z\left(\vec{F}_k\right)=0, \qquad S_{2xy}\cdot AB\cos\beta+Q\cdot\tfrac{1}{3}CD=0. \qquad (6)$$

Розв’язуємо отриману систему рівнянь, визначаємо невідомі величини, врахуємо *AB* = *CD*, BC = *AD*:

$$S_{2xy}=-\tfrac{1}{3}\left(Q/\cos30^\circ\right)=-\sqrt{3}\,кН,\quad S_2=-\sqrt{3}/\sin60^\circ=-2\,кН,$$

$$S_1=-P/2+S_{2z}=-8/2-2\cos60^\circ=-5\,кН,$$

$$S_3=P/2+S_1=8/2+3=7\,кН,$$

$$X_A=S_{2xy}\cos30^\circ+Q=-3/2+6=4.5\,кН,$$

$$Y_A=-S_{2xy}\sin30^\circ=\sqrt{3}/2=0.87\,кН,$$

$$Z_A = P + S_1 - S_{2z} - S_3 = 8 + 3 + 2\cos 60^\circ - 7 = 5\,\kappa H\ .$$

Знаки „мінус” показують, що напрямки зусиль $\vec{S}_1,\ \vec{S}_2$ протилежні для попередньо вибраних на рис. 8.

<u>*Відповідь:*</u>

$$X_A = 11.1\,\kappa H,\ Y_A = -8.31\,\kappa H,\ Z_A = -4\,\kappa H,$$
$$Y_B = 0,\ Z_B = -16\,\kappa H,\ Q = 16\,\kappa H.$$

5. ЦЕНТР ВАГИ ОДНОРІДНОЇ ПЛОСКОЇ ФІГУРИ

Центром ваги твердого тіла називають незмінно зв'язану з цим тілом геометричну точку C, через яку проходить лінія дії рівнодійної сил ваги елементарних частинок тіла при будь-якому його положенні.

Координати центра ваги однорідної плоскої фігури визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{\sum A_k x_k}{A}, \quad y_C = \frac{\sum A_k y_k}{A}, \quad A = \sum A_k , \qquad (5.1)$$

де A_k, x_k, y_k – площа та координати центра ваги k-тої частини тіла, A – площа плоскої фігури.

При визначенні координат центра ваги тіла необхідно пам'ятати:

- якщо плоске однорідне тіло має вісь або центр симетрії – його центр ваги знаходиться на цій осі або в цьому центрі;
- якщо плоске тіло має складну геометричну форму, його поділяють на частини, у яких положення їх центра ваги легко знайти;
- якщо тіло має пустоти (вирізи, отвори тощо), то відповідні їм площі вважають від'ємними;
- іноді доцільно доповнити задане тіло новими елементами, що полегшує розв'язання задачі: всю площину нового тіла вважають додатною, а площини доданих елементів – від'ємними.

При розв'язанні задач на цю тему доцільно дотримуватись такого порядку:

- поділити складну плоску фігуру на мінімальну кількість простих фігур, у яких положення центра ваги легко знайти;
- вибрати систему координат: бажано, щоб тіло розташовувалось у першому квадранті;
- записати формули (5.1) для визначення координат центра ваги плоскої фігури;
- визначити величини, які входять в (5.1);
- визначити координати x_C, y_C центра ваги тіла (розрахунок можна вести в табличній формі).

Приклад 8. Визначити центр ваги плоскої однорідної пластинки (рис. 9), якщо $a = 0.6$ *м*, $b = 0.9$ *м*, $r = 0.3$ *м*.

Розв'язання: Для знаходження центра ваги пластинки застосуємо спосіб від'ємних площин – розглянемо дану фігуру як прямокутник OABD з якого „вирізані" трикутник, круговий сектор та круг. Площини вирізів врахуємо зі знаком „мінус" у формулах (5.1). Вибираємо

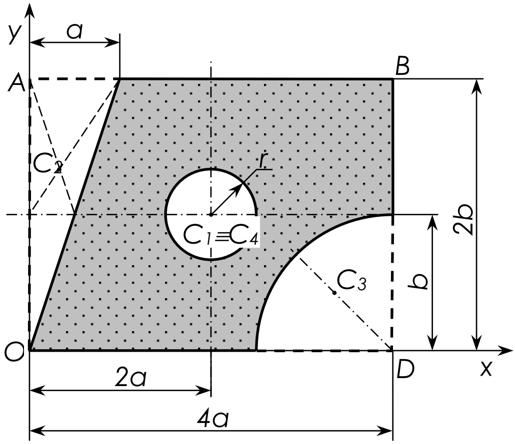


Рис. 9

систему координат *xOy*, визначаємо координати центрів ваги елементів пластинки та їх площі (рис. 9).

1). Прямокутник.

$$x_1 = 2a = 2 \cdot 0.6 = 1.2\ м, \quad y_1 = b = 0.9\ м,$$

$$A_1 = 4a \cdot 2b = 4 \cdot 0.6 \cdot 2 \cdot 0.9 = 4.32\ м^2.$$

2). Трикутник.

$$x_2 = a/3 = 0.6/3 = 0.2\ м,$$

$$y_2 = \tfrac{2}{3}(2b) = 4 \cdot 0.9/3 = 1.2\ м,$$

$$A_2 = -\tfrac{1}{2}a \cdot 2b = -0.6 \cdot 0.9 = -0.54\ м^2.$$

3). Круговий сектор.

$$DC_3 = \tfrac{2}{3}b\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi/4} = \tfrac{4\sqrt{2}}{3\pi}b,$$

$$x_4 = 4a - DC_3\cos\tfrac{\pi}{4} = 4 \cdot 0.6 - 4 \cdot 0.9/(3\pi) = 2.02\ м,$$

$$y_3 = DC_3\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{4b}{3\pi} = 4 \cdot 0.9/(3\pi) = 0.382\ м,$$

$$A_3 = -\tfrac{\pi}{4}b^2 = -(\pi/4) \cdot 0.9^2 = -0.636\ м^2.$$

4). Круг радіуса *r*.

$$x_4 = 2a = 2 \cdot 0.6 = 1.2\ м, \quad y_4 = b = 0.9\ м,$$

$$A_4 = -\pi r^2 = -\pi \cdot 0.3^2 = -0.287\ м^2.$$

Визначаємо площу фігури та координати її центра ваги за формулами (5.1):

$$A = 4.32 - 0.54 - 0.283 - 0.635 = 2.86\,м^2,$$

$$x_C = (4.32 \cdot 1.2 - 0.54 \cdot 0.2 - 0.636 \cdot 2.02 - 0.283 \cdot 1.2)/2.86 = 1.21\,м,$$

$$y_C = (4.32 \cdot 0.9 - 0.54 \cdot 1.2 - 0.636 \cdot 0.38 - 0.283 \cdot 0.9)/2.86 = 0.96\,м.$$

Відповідь: $x_C = 1.21\,м,\ y_C = 0.96\,м$.

6. Література

1. Павловський М. А. Теоретична механіка. К. : Техніка, 2002. 512 с.
2. Цасюк В. В. Теоретична механіка : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 402 с.
3. Практикум з теоретичної механіки. Частина 1 «Статика. Кінематика» : навч. посіб. / Багнюк Г. А., Галанзовська М. Р., Наконечний В. В., Серілко Л. С. Рівне : НУВГП, 2014. 162 с.
4. Хижняков О. В. Основи теоретичної механіки в прикладах та задачах. Кінематика. Статика : навч. посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 284 с.
5. Методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка (розділ «статика»)» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Галузеве машинобудування», «Автомобільний транспорт», «Агроінженерія» спеціальностей 133 «Галузеве машинобудування», 274 «Автомобільний транспорт», 208 «Агроінженерія», денної й заочної форм навчання [Електронне видання] / Серілко Л. С., Щурик В. О., Войтович Л. В. Рівне : НУВГП, 2021. 49 с.