

К. К. СИМИНСКИЙ

Профессор Киевского Политехнического Института

624.04

С-37

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СИСТЕМЫ
С ЛИШНИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
Киевского Политехнического
Института

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО КУБУЧА

КИЕВ—1927.

5189



23 1/2 of 2 id.

11/12/20

5189

Commence

the important address
of the Commission
in the year 1912

1912

11/12/20

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
21	12 сверху	CN	CN_1
38	3 снизу	$a)$	$b)$
44	5 сверху	$blEJ$	$6lEJ$
155	2 снизу	$l_n^2 -$	$l_n^2 +$

П

У

К. К. СИМИНСКИЙ
Профессор Киевского Политехнического Института

[00.00]

624,04
с-37

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СИСТЕМЫ
С ЛИШНИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

✓ Ста

5189

Підприємство
Інститут у Києві

проверено
1966 г.

И ○

ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО КУБУЧА
КИЕВ—1927

В. В. СЕВЕРИНСКИЙ

Системы автоматического управления

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

СИСТЕМЫ

С ИСТОРИЕЙ ИЛИЗВЕСТНОСТИ

Киевский Окрит № 2969.
Гострест „Киев-Печать“,
1-я фото-лито-типография.
Заказ № 2378—3000.

СОДЕРЖАНИЕ.

Условные обозначения VII.

Предисловие 1.

Введение 3.

Отдел I. Деформация упругих систем.

Глава I. Деформация брусков.

§ 1. Основания и главные результаты теории деформаций-7-14.

1. Деформация прямых брусков-7; 2. Уравнение упругой линии-7; 3. Примеры исследования деформации при изгибе: а) чистый изгиб, б) консоль, в) балка, односторонне нагруженная моментом, д) косой изгиб-11; 4. Справочные таблицы реакций, поперечных сил, изгибающих моментов, углов поворота, прогибов и формул для упругих линий простых балок-14.

§ 2. Графический прием определения деформаций-14-41.

1. Уравнение веревочной кривой-14; 2. Веревочная кривая, как линия моментов-22; 3. Зависимость между моментом и поперечной силой-24; 4. Упругая линия балки-26; 5. Примеры построения упругой линии: а) простая балка-28; б) балка с консолью 30; в) консоль-31; д) балка переменного сечения-32; е) линия прогибов для системы брусков-34; 6. Способ интегральных кривых: а) значение способа-34; б) дифференциальная кривая-36; в) интегральная кривая-36; д) примеры-37; е) дальнейшие упрощения-39; ф) интеграф-40; г) связь с веревочной кривой-41.

§ 3. Графоаналитический метод определения деформаций-41-46.

1. Основные теоремы: а) геометрическое доказательство-41; б) аналитический прием доказательства-43; 2. Пример: а) простая балка-43; б) балка с опорным моментом-44; в) балка при местной нагрузке-44; д) консольные балки-45; 3. Задачи-46.

Глава II. Деформация систем.

§ 4. Диаграмма перемещений-47-51.

1. Графический прием построения перемещений-47; 2. Перемещения неизменяемой системы-48; 3. Перемещения упругой системы-50: а) диаграмма для одного стержня-50; б) диаграмма для двух стержней-51.

§ 5. Диаграмма Williot для простейшей фермы-51-60.

1. Относительные перемещения узлов фермы-51; 2. Пример треугольной фермы-52; 3. Стропильная ферма-54; 4. Мостовая ферма-54; 5. Практические указания и задачи-58; 6. Приложение диаграммы Виллиот к построению эпюры прогибов-59.

§ 6. Диаграмма для сложной фермы-60-74.

1. Свободные фермы-61: а) ферма Полонсо-61; б) упрощение-63; в) примеры-64; д) общий случай сложных ферм-64; е) примеры и задачи-67; 2. Несвободные фермы-68: а) трехшарнирная арка-68; б) консольно-подвесная система ферм-68; 3. Сложные фермы, неприводящиеся к простейшей схеме-71: а) способ замены стержней-71; б) примеры мгновенных центров и изображающих точек-71.

§ 7. Более сложные системы стержней-74-86.

1. Системы с одной степенью свободы-74; 2. Обращение механизмов-75; 3. Теоремы Аронгольда-Кеннеди: а) первая теорема-76; б) вторая теорема-76; 4. Зависимость между центрами вращения для двух смежных звеньев-77; 5. Примеры построения мгновенных центров-78; 6. Примеры построения перемещений для более сложных ферм-82: а) двухпролетный путепровод-82; б) трехпролетная арочная система-83; в) цепной мост с балками-84.

§ 8. Определение деформации систем вычислением-86-97.

1. Геометрическое решение-86; 2. Решение статическое-87; 3. Другое доказательство теоремы Мора-88; 4. Обобщения-90; 5. Угол поворота упругой цепи-91; 6. Примеры: а) балка-92; б) ломанный брус-92; в) консольная ферма-93; д) балочная ферма-93. 7. Влияние удлинений-93; 8. Общее выражение для поступательного перемещения-95. 9. Случай замкнутого контура-96; 10. Другой способ описания перемещений-96.

§ 9. Вычисление прогиба для стержневых ферм-97-126.

1. Изменение углов треугольника-97: а) графический способ-97; б) вычислительный способ-99;
2. Пример расчета прогибов, вызванных изменением углов-100; 3. Расчет прогибов при изменении углов и удлинении стержней многоугольника-102; 4. Пример параболической мостовой фермы-103; 5. Случай вертикальных стержней-104; 6. Графическое определение фиктивных грузов-105; 7. Иной способ вычисления фиктивных грузов-107: а) ферма без стоек-108; б) фермы со стойками-110; 8. Примеры: а) мостовая ферма с параллельными поясами-112; б) мостовая ферма с полигональными поясами-113; 9. Изменение длины хорды шарнирного многоугольника-115; 10. Несколько практических замечаний-116: а) о знаках углов-116; б) о знаках приращений длины-117; в) о прогибах другого пояса-117; д) трехшарнирная арочная ферма-117; е) ферма Полонсо-119; ф) значение вычислительного метода-119; г) определение приближенных деформаций-119; h) примеры приближенных вычислений-120; и) комбинированный способ определения эюры прогибов-121; 11. Примеры: а) ферма арочного очертания-122; б) прогиб железнодорожного моста-123; 12. Задачи-125.

Отдел II. Общие методы расчета статически неопределимых систем.

Глава III. Метод уравнивания деформаций.

§ 10. Системы с одной лишней неизвестной-127-136.

1. Общие сведения-127; 2. Примеры-128: а) балка на двух неподвижных шарнирах-128; б) защемленно-опертая балка-128; в) замечание о выборе лишних связей-129; д) балка на 3-х опорах-130; 3. Правило расчета-130; 4. Задачи-131; 5. Задачи для решения-134

§ 11. Системы со многими неизвестными-136-148.

1. Два лишних неизвестных-136: а) балка, защемленная двумя концами-136; б) трехпролетная балка с консолью-137; в) балочная опорная рама-138; 2. Случай многих неизвестных-139; 3. Правило расчета-141; 4. Практические указания-141; 5. Примеры: а) двухпролетная балка-142; б) прямоугольная рама с распоркой-144; в) лестничные косоуры-144; 6. Дальнейший расчет систем с лишними неизвестными: а) построение эюры-146; б) примеры-146; в) выражения для M , Q и α защемленной балки-147; 7. Основные формулы для лишних неизвестных-148.

§ 12. Теорема о трех моментах-148-154.

1. Общая форма выражения-148; 2. Примеры-150: а) балка на 3-х опорах-150; б) балка на 4-х опорах-151; 3. Замечание о знаках-151; 4. Формула для 3-х моментов-151; 5. Примеры: а) многопролетная балка-153; б) трехпролетная балка с консолью-153; 6. Прочие элементы расчета-154; 7. Приложение к расчету брусков с защемленными концами-154.

§ 13. Теорема о двух моментах-154-158.

1. Зависимость между двумя моментами соседних пролетов-154; 2. Практические указания-156; 3. Влияние загрузки противоположных пролетов-158.

§ 14. Приложение-158-166.

1. Поперечная балка железобетонного виадука-158; 2. Расчет решетчатых стоек: а) однопанельная стойка-160; б) многопанельная стойка-161; 3. Продольные ветровые связи мостовых ферм-163; 4. Случай взрыва пролетного строения п-ского моста-164.

Глава IV. Начало возможных перемещений

§ 15. Начало возможных перемещений в применении к задачам Строительной механики-166-174.

1. Общие положения-166; 2. Обобщенные силы и координаты-170; 3. Соответствие между ними-172.

§ 16. Принцип взаимности перемещений-174-182.

1. Элементарное доказательство-174; 2. Другой способ доказательства-175: а) силы упругости имеют потенциал-175; б) потенциальная энергия-179; в) доказательство теоремы-177; 3. Исключение внутренних сил-178; 4. Частные случаи-179; 5. Историческая справка-180; 6. Следствие-180; 7. Примеры-180 и задачи-182.

§ 17. Приложения принципа взаимности перемещений-183-194.

1. Определение деформаций. Прогиб балки-183; 2. Прогиб стержневой фермы-184; 3. Изменение углов между стержнями фермы-185; 4. Определение лишних неизвестных. Лишняя реакция балки-186. 5. Лишний опорный момент-187; 6. Опорный момент двухпролетной балки-188; 7. Трехпролетная балка-189; 8. Многопролетная балка-191; 9. Линии влияния для других расчетных величин: M_x , Q_x , A -192; 10. Задачи-194.

§ 18. Приложение принципа взаимности к расчету ферм-194-205.

1. Лишняя реакция—линия влияния распора-194; 2. Линии влияния для лишних стержней-196; 3. Линии влияния для какого угодно стержня фермы-198; 4. Линия влияния для

шпренгельной балки-199; 5. Задачи-200; 6. Фермы с двумя лишними неизвестными-201; 7. Три лишних неизвестных-204.

§ 19. Способ Мора-205-231.

1. Сущность способа-205; 2. Определение прогиба фермы-206: а и б) прогиб статически определимой фермы-206; с) прогиб фермы с лишними неизвестными-207; 3. Изменение углов между стержнями фермы-208; 4. Расчет ферм с лишними стержнями-209; 5. Примеры: а) расчет усилия-210; б) определение реакций-211; 6. Случай нескольких неизвестных-212; 7. Влияние температуры-213; 8. Способ Мора в применении к расчету балок-214: а) сущность способа-214; б) балка защемленно-опертая-215; с) влияние осадки опоры и графический прием-216; 9. Обобщения-217; 10. Практические указания-218; 11. Таблица интегралов $\int CC_1 dx$ и $\int C_1^2 dx$ -221; 12. Примеры-223; 13. Расчет статически неопределимых пространственных ферм-225; 14. Задачи-230.

§ 20. Примеры расчета стержневых ферм-231-250.

1. Расчет прогиба трехпролетной фермы ж. д. моста-231; 2. Линии влияния усилий для серповидной двухрешетчатой фермы-234; 3. Влияние температуры-236; 4. Двухрешетчатая симметричная ферма-237. 5. Пример расчета дважды статически неопределимой системы-242.

Глава V. Метод потенциальной энергии.

§ 21. Выражение потенциальной энергии-250-259.

1. Теорема Клапейрона-250; 2. Теоремы Ламэ-251; 3. Количество потенциальной энергии: а) общее выражение-252; б) энергия растяжения-253; с) сдвига-253; д) изгиба-254; е) изгиб силами перпендикулярными к оси балки-254; ф) полная потенциальная энергия-257; г) обобщения-257; h) потенциальная энергия системы-258.

§ 22. Начало наименьшей работы-259-270.

1. Элементарное доказательство-259; 2. Другой способ доказательства-261; 3. Приложения Начала наименьшей работы-262: а) определение усилий-262; б) определение реакций-263; с) обобщения и примеры-263; 4. Случай многих неизвестных-264; 5. Примеры: а) защемленный вал-265; б) колесо экипажа-265; с) акведуки-266; д) шпренгельная балка-267; е) рама с жесткими узлами-268; 6. Расчет решетчатых стоек-269; 7. Задачи-270.

§ 23. Теорема Кастильяно-271-277.

1. Элементарное доказательство-271; 2. Другой способ доказательства-272; 3. Приложения: а) прогиб консоли-273; б) угол поворота конца консоли-274; с) угол поворота промежуточного сечения-274; д) обобщения-274; е) правило-274; 4. Примеры: а) желоб акведука-275; б) прогиб ломанного бруса-275; с) шпренгельная балка-275; д) прогиб стержневой фермы-276; е) угол поворота стержня фермы-276; 5. Задачи-277.

Глава VI. Общие вопросы расчета систем с лишними неизвестными.

§ 24. Задачи со многими неизвестными-277-307.

1. Система основных линейных уравнений деформации-277; 2. Способ последовательного усложнения-279; 3. Пример построения линий влияния-282; 4. Аналитический прием-283; а) способ Гаусса-283; б) преимущества способа Гаусса-285; 5. Способ неопределимых коэффициентов-286; 6. Примеры: а) пятипролетная балка-290; б) трехпролетная балка-292; 7. Правило построения линий влияния-294; 8. Более сложный пример и пользование номограммами: а) соображения об опорных моментах-294; б) численный пример-297; с) пользование номограммой-300; д) линии влияния других расчетных элементов-301; е) замечание о форме линий влияния-302; 9. Порядок расчета систем с большим числом лишних неизвестных-302: а) случай абсолютно жестких лишних связей-302; б) случай податливых связей-305; с) построение линий влияния-305; 10. Проверка вычислений-306.

§ 25. Приближенный расчет ферм с лишними стержнями-307-315.

1. Разложение на простые фермы-307 2. Линии влияния для решетки-309: а) двухрешетчатая ферма-309; б) двухраскосная ферма-309; с) раскосная ферма с перекрещивающимися раскосами-310; д) решетка криволинейных ферм-311; 3. Линии влияния для поясов-311; 4. Другие приемы приближенного расчета-313.

§ 26. Особенности статически неопределимых систем-315-323.

1. Распределение сил-315; 2. Влияние неточности в длине частей-316; 3. Влияние температуры-317; 4. Проектирование статически неопределимых систем-318; 5. Погрешности расчета-319; 6. Теорема Леви о теоретическом объеме ферм-321; 7. Общее значение статически неопределимых систем-323.

ГЛАВНЕЙШИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ¹⁾

A и B — левая и правая опорные реакции простой разрезной балки AB .

A_0 и B_0 — в теории статически неопределимых балок — левая и правая реакции одного пролета, исчисляемые после освобождения балки от лишних связей, т. е. исчисляемые, как для простой разрезной балки, несущей только нагрузку пролета (без опорных моментов).

M и M' — те же реакции от одних только лишних моментов, возникающих на заделанных концах пролета.

Полная реакция заделанного конца балки обозначается $R_A = A_0 + M$, или $R_B = B_0 + M'$.

A' и B' и соответственно: R' — фиктивные реакции, исчисляемые от эпюры моментов, как от грузовой площади.

a и b — расстояния груза P , находящегося на балке AB , до ее опор A и B .

a' и b' — расстояния сечения балки до ее опор A и B .

a_0 и b_0 — расстояния левого фокуса f пролета AB соответственно до опор A и B .

a'_0 b'_0 — то же для правого фокуса f' .

α и β — углы изгиба по концам балки AB , т. е. углы отклонения концевых касательных упругой линии от первоначальной прямой AB .

c и c' — расстояние до концов от центра тяжести эпюры моментов для нагрузки одного пролета балки, рассматриваемой, как простая разрезная.

d — длина панели, измеренная в плане, т. е. горизонтальная проекция наклонной панели d' ; диаметр цилиндра, круга.

δ — вообще малое перемещение или приращение. Если δ снабжено подстрочными индексами, то первый из них обозначает ту точку, которая получает перемещение δ , а второй обозначает причину (единичную), вызвавшую перемещение в этой точке; третий индекс указывает на число лишних неизвестных в системе, получающей перемещение δ .

D — усилие диагонального стержня фермы (раскоса).

e — относительное удлинение, равно λ/l , где λ — абсолютное удлинение.

E — коэффициент упругости, иначе: модуль упругости, модуль Юнга.

ε — коэффициент температурного расширения.

f и f' — левый и правый фокусы пролетов неразрезной балки.

f — обозначает также прогиб определенного сечения балки или узла фермы, стрелку подъема арки или дуги.

F — площадь поперечного сечения.

φ — угол наклона или угол поворота сечений в балке.

φ — для жесткой рамы это полный угол поворота концевых касательных данного жесткого узла.

τ — угол отклонения концевой касательной упругой линии от первоначально прямой оси бруска, происходящий исключительно от изгиба бруска.

ψ — поворот стержня жесткой рамы, происходящий вследствие искажения (перекашивания) схемы рамы; между всеми углами φ , τ и ψ одного узла существует зависимость $\varphi = \tau + \psi$.

¹⁾ Для тех случаев, когда нет специальных указаний или обозначений на соответствующих чертежах и в формулах.

ϕ — полные упругие грузы, иначе: „фиктивные“ грузы, „упругие веса“, прикладывая которые к узлам упругой системы мы получаем ее прогибы непосредственно из веревочного многоугольника. Эти грузы учитывают и изменение углов между элементами системы и изменение длины элементов, т. е. и $\delta\theta$ и δl .

Φ — те же грузы, но умноженные на E , так что: $\Phi = \phi E$.

Jk — жесткость в обобщенном смысле: при изгибе — это EJ , при растяжении — EF , при кручении GJ_p , при сдвиге — GF .

G — модуль упругости при сдвиге, или сокращенно: модуль сдвига.

g — относительный сдвиг.

g — ускорение силы тяжести.

γ — гибкость бруска, т. е. прогиб, вызываемый единицей силы или единицей изгибающего момента. В первом случае $\gamma = \frac{l^3}{kEJ}$, во втором $\gamma = \frac{l^2}{k'EJ}$, где k — коэффициент прогиба, определяемый расстоянием нагрузки и способом закрепления концов стержня.

По аналогии: ρ — растяжимость бруска см. дальше.

γ — удельный вес или погонный вес, иногда — угол наклона.

h — высоты, вертикальные проекции наклонных линий.

H — горизонтальная составляющая опорной реакции и длина нормального луча силового многоугольника.

J — момент инерции.

i — плечо (радиус) инерции.

$j = \int CC_1 dx$ и $j_1 = \int C_1^2 dx$ — интегралы, определяющие координату деформации упругой системы, при этом C_1 — это обобщенная сила, деформирующая элемент системы dx при единичной обобщенной нагрузке, соответствующей искомой координате, а C — такая же обобщенная сила, но от заданной нагрузки системы.

K — обобщенная координата.

k — коэффициенты.

k_1, k_2, \dots — для неразрезной балки — это отношение между двумя концевыми моментами ненагруженного пролета, наприм.: $k_2 = M_2 : M_1 = -2 \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \right)$. Таково же и отношение отрезков пролета, на которые пролет разделяется фокусами:

$$k = b_0 : a_0.$$

l, L — пролеты балок, длина брусков.

λ — удлинение абсолютное, $e = \frac{\lambda}{l}$ — относительное.

M — изгибающий момент.

M_f и $M_{f'}$ — изгибающие моменты соответственно для левого и правого фокусов данного пролета балки.

M_A и M_B — реактивные опорные моменты заделанных концов балки AB .

M_0 — изгибающий момент простой (основной) балки, освобожденной от лишних связей, составленный для нагрузки и соответствующих ей реакций.

M_n — момент только от нагрузки (не считая реакций).

M_k — крутящий момент.

m — отношение абсциссы x назначенного сечения балки к пролету l , т. е.: $m = x/l$.

μ — коэффициент распределения активного момента M , действующего на данный жесткий узел из двух брусков 1 и 2, между этими брусками; считая, что на бруски приходится порознь M_1 и M_2 , имеем $M_1 = \mu_1 M$ и $M_2 = \mu_2 M$ при условии $M = M_1 + M_2$.

n — нормальное напряжение $n, n+1, n+2, \dots$ номера опор и соответствующих им левых пролетов неразрезной балки, считая слева направо.

N — нормальная составляющая усилия.

O — усилие верхнего пояса фермы из стержней, начало координат.

ω' и ω — площадь эпюры моментов и площадь линии влияния.

P — грузы вообще, p — плечи моментов этих грузов, а также интенсивность постоянной равномерно-распределенной нагрузки.

Π — потенциальная энергия: Π_n — от нормальной силы (растяжения или сжатия), Π_c — от сдвига, Π_m — от изгиба моментами, Π_k — от касательных напряжений при изгибе.

q — интенсивность в р е м е н н о й равномерно-распределенной нагрузки.

Q — поперечная сила, или иначе: срезающая, перерезывающая или касательная сила.

Q_0 — та же сила, только для простой балки, освобожденной от лишних связей.

R_n — реакция n -ой неразрезной балки, исчисляемая, как сумма реакций, получающихся от нагрузки и от лишних реактивных моментов.

R_n' — фиктивная реакция той же опоры, исчисляемая от эпюры моментов, как от грузовой площади.

R_n^0 — та же реакция только от нагрузки пролета.

r — радиус кривизны осевой линии бруска (линии центров).

ρ — радиус кривизны нейтральной линии изгибаемого бруска.

μ — растяжимость бруска, т. е. удлинение его, получающееся при действии единицы

силы: $\mu = \frac{1 \cdot l}{EF}$.

S — статический момент площади поперечного сечения или части этой площади, а также — усилие в стержнях фермы.

S_0 — усилие только от нагрузки с соответствующими реакциями.

S_1 — усилие от 1 вместо лишнего неизвестного.

σ — пуассоново отношение.

T — работа деформации.

t — температура.

τ — касательное (тангенциальное) напряжение.

θ — углы между элементами упругой системы, $\delta\theta$ — изменение этих углов.

U — усилие нижнего пояса стержневой фермы; в этом случае: O — усилие верхнего пояса, D — усилие диагонали или раскоса. Усилие вообще обозначается S .

V — вертикальная составляющая опорной реакции или усилие вертикальной стойки в фермах.

W — момент сопротивления поперечного сечения.

x_0 — абсцисса нулевой точки, где $Q=0$ и M — максимальное.

x и x' или a' и b' — расстояния сечений балки AB соответственно до опор A и B .

X, Y, Z — оси координат. При исследовании балок X — всегда продольная ось,

Y — вертикальная ось поперечного сечения, Z — горизонтальная ось того же сечения, обычно совпадающая с нейтральной осью (для сим. сеч.); при этом уравнение упругой линии всегда будет $y = f(x)$, момент инерции для формулы напряжения $J_z = kbh^3$.

X, Y, Z — лишние неизвестные статически неопределимых систем.

x_x и x_y — перемещения точки, соответствующей неизвестной силе X , вызванные единичной силой X или Y , как указывает подстрочный индекс.

y_y и y_x — перемещения точки, соответствующей неизвестной силе Y , вызванные либо $Y=1$, либо $X=1$, как указывают подстрочные индексы.

y — вообще прогибы балок и ферм.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Содержание этой книги представляют лекции по II части Статики сооружений, читанные в Киевском Политехническом Институте после изменения программ в 1917 г.

Лекции предполагалось издать в 1919 году вслед за I частью Статики, которая вышла под заглавием: Строительная механика. Системы без лишних стержней. Киев, 1919 г.

Но внешние события и исполнение мною ряда непредвиденных обязанностей не позволили мне осуществить издания, и только теперь явилась возможность сдать в печать рукопись после соответствующей переработки.

По обстоятельствам времени я выпускаю курс II части Статики сооружений не в одной книге, как предполагалось в 1919 г., а четырьмя выпусками:

1. Системы с лишними неизвестными.
2. Балки и рамы.
3. Арки и своды.
4. Подпорные стены.

Считаю своим приятным долгом принести глубокую благодарность инженеру Николаю Дмитриевичу Жудину, проверившему некоторые расчеты и просмотревшему рукопись перед напечатанием, а также профессору П. В. Рабцевичу и инженерам Б. Н. Горбунову и А. А. Уманскому, предоставившим для этого выпуска несколько примеров в оригинальной разработке ¹⁾.

Киев, 1 Января, 1927 г.

К. Симинский.

¹⁾ Эти примеры в тексте отмечены соответствующими ссылками на авторов.

Системы с лишними неизвестными.

ВВЕДЕНИЕ.

В этой книге рассмотрен круг задач, стоящих особняком в Строительной механике. Они отличаются не только по содержанию, но и по методам решения.

Предмет общего курса Строительной механики составляли системы, содержащие только необходимое число связей, удовлетворяющих условиям неизменяемости систем. Уравнений Статики было вполне достаточно для определения реакций в связях таких систем, почему они и называются статическими или статически определимыми.

История инженерных конструкций говорит, что техническая мысль тесно связана с этими системами. С того времени, когда Галилей (1564—1642) указал пути расчета прочности построек и машин, и до последних дней, наблюдается общее стремление выработать такие конструкции, для расчета которых достаточно одних только уравнений Статики: и в настоящее время, подавляющее большинство тех задач, с которыми встречается инженер в своей текущей работе по расчету прочности,—удовлетворяют этому условию. Таковы современные фермы мостов, стропильных покрытий, системы балок и проч.

Но более древние системы, продиктованные основными потребностями обихода, в связи с эстетикой быта, дошли до нашего времени в их классической законченности, часто не отразивши отношения к удобствам механического расчета. Примерами могут служить арки Этрусков, сложные консоли и системы Востока и проч. К числу этих же систем приходится отнести резервуары для сыпучих и жидких тел и т. п. Они также очень древни и по природе своей содержат много лишних связей.

Кроме того, и период разработки теории прочности сооружений не чужд предложений о сложных системах. Точный расчет таких систем не мог быть известен их авторам; однако оригинальность замысла, красота формы, экономические или конструктивные соображения вызвали их к жизни; некоторые из этих систем еще и до сих пор не потеряли значения. Мы говорим о художественных решетках старых чугунных арочных ферм и консолей, о многорешетчатых железных и деревянных фермах, фермах-аркадах и проч.

Все эти системы не поддаются статическому расчету, это—статически неопределимые или гиперстатические системы; некоторые из них представляют задачи большой сложности.

Исследованию всех этих разнообразных систем посвящается книга.

Обыкновенно стропильные и мостовые фермы изучаются в предположении, что их элементы связаны идеальными шарнирами, без трения; только при таком предположении эти системы не содержат лишних связей. В действительности вместо шарниров применяются клепанные узлы, не допускающие взаимного поворота частей,—так называемые жесткие узлы. Следовательно, в действительности, каждый узел фермы содержит одну незамечаемую нами лишнюю связь, и те задачи, которые мы решали одними только методами Статики, по существу, при более внимательном их изучении, также должны быть отнесены к статически неопределенным. Прежде для таких систем мы находили основные усилия, направленные по осям стержней, теперь мы ставим перед собой задачу определить те лишние усилия, которые возникают в связях, препятствующих повороту стержней в узлах, т. е. определить узловые моменты, а по ним—и вызываемые ими дополнительные напряжения.

Вообще, здесь рассматриваются системы с лишними связями: для ферм с лишними стержнями излагаются методы расчета основных усилий, а для систем без лишних стержней—вычисляются дополнительные напряжения, вызванные введением тех связей, которыми обыкновенно пренебрегают, жесткостью узлов.

Для определения реакций в лишних связях необходимо к уравнениям Статики добавить столько новых уравнений, сколько имеется лишних связей. Эти добавочные уравнения не должны зависеть от уравнений Статики твердого тела, и могут быть составлены лишь на основании изучения упругих свойств самой системы.

Решая добавочные уравнения совместно с уравнениями Статики, теоретически, мы получаем все искомые силы связей. Но при выполнении этих решений иногда встречаются такие технические трудности, что задача становится практически недоступной. Число совместных уравнений иногда оказывается большим или непосредственное решение их представляется в такой форме, что дает недостаточно точный результат. Это побуждает искать особые методы расчета.

Расчетом систем с лишними связями занимаются не больше $\frac{3}{4}$ века. Однако уже имеется ряд способов решения поставленных задач. Некоторые из них замечательны своей общностью и изяществом, представляя общее решение для большой группы вопросов. Кроме того, эти методы настолько отличаются от известных элементарных приемов, что их даже называют «Новейшими методами Строительной механики»¹⁾. Таковы: метод потенциальной энергии, метод Мора, метод взаимности перемещений. Разработка этих методов в последнее время привела к приемам, механизмирующим расчет, благодаря чему сложные задачи исследования гиперстатических систем уже могут войти в текущую практику инженера.

Основное содержание этого выпуска Строительной механики составляют:

¹⁾ Мюллер-Бреслау. Новейшие методы Строительной механики. Пер. Н. Н. Митинского. 1898.

Общие методы расчета систем с лишними связями; но так как исследование систем с лишними связями основано на определении их деформации, то вначале мы помещаем вводную часть:

О деформации упругих систем.

В этом, первом отделе разбираются все приемы, вытекающие из элементарных курсов Сопротивления материалов и Статики сооружений. Новейшие приемы определения деформаций и связь их с элементарными отмечаются в соответствующих местах последующих глав.

Во втором отделе излагаются общие приемы, на основании которых вопросы последующих специальных выпусков разрешаются, как частные задачи. Поэтому второму отделу этого выпуска уделяется надлежащее внимание. Мы составили его в предположении, что он будет служить общим курсом для ряда факультетов. На основе этого курса могут излагаться те из последующих выпусков, которые связаны со специальностью факультета. В соответствии с этим мы стремимся, во-первых, по возможности полно выяснить основания методов расчета и, во-вторых, иллюстрировать их примерами из различных областей инженерного дела. Таким путем предполагается воспитать своего рода широту взглядов и некоторую, так сказать, смелость при пользовании методами Строительной механики.

Первая глава второго отдела (по порядку III) посвящается тому методу определения лишних неизвестных, который непосредственно вытекает из изучения деформации упругих систем и который мы называем методом уравнивания деформаций. Последующие главы посвящены новейшим методам Строительной механики.

Отдел первый.

Деформация упругих систем.

При исследовании систем с лишними связями постоянно приходится пользоваться деформацией тех же систем, но освобожденных от лишних связей. В виду этого рассмотрим приемы определения деформаций этих упрощенных систем, называемых обыкновенно основными.

Известное из общего курса здесь приводится в кратком извлечении. в качестве материала для повторения; новые сведения излагаются с достаточной полнотой, однако в соответствии с намеченным ограниченным объемом книги.

ГЛАВА I.

Деформация брусков.

§ 1. Основания и главнейшие результаты теории деформаций,

1. Деформация прямых брусков в плоскости системы выражается:

- а) удлинением (укорочением), вызываемым продольными силами, или
- б) изгибом моментами и поперечными силами.

а). Удлинение выражается известной формулой, основанной на законе Гука:

$$\lambda = \frac{Pl}{EF} \dots \dots \dots (1),$$

где λ — абсолютное удлинение бруска, P — его усилие, l — длина, F — площадь сечения, E — модуль упругости.

Если усилие неравномерно распределено по длине бруска, то

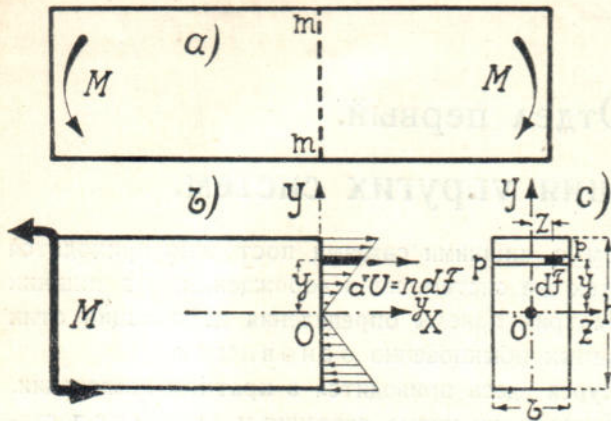
$$\lambda = \int_0^l \frac{P_x dx}{EF} \dots \dots \dots (2),$$

где P_x — есть усилие элемента бруска dx .

б). Изгиб характеризуется кривизной изогнутой оси бруска или ее прогибами и углами поворота (углами изгиба).

2. Уравнение упругой линии (изогнутой оси). Если к концам бруска приложить два равные противоположные момента (фиг. 1) то брусок изогнется и, после некоторой деформации, моменты уравновесятся. Если изгибающие моменты располагаются в главной плоскости инерции, то и изгиб происходит в той же плоскости.

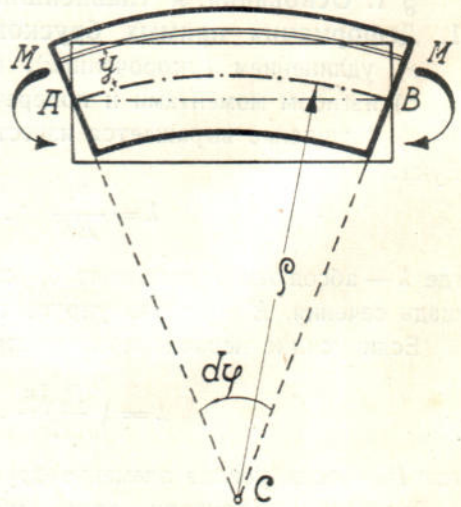
Рассмотрим, например, симметричное сечение и моменты, действующие в вертикальной плоскости симметрии (фиг. 1). Разрежем брусок каким-нибудь нормальным сечением mm и рассмотрим равновесие одной части бруска, например левой, правую же отбросим.



Фиг. 1.

Между частями бруска, при его изгибе, возникли силы взаимодействия. Так как мы отбросили правую часть, т. е. удалили эти силы, то равновесие левой части бруска нарушится. Чтобы сохранить равновесие, необходимо приложить отброшенные силы взаимодействия по сечению mm . Эти внутренние силы нормальны к сечению и вызывают простые напряжения: растягивающие и сжимающие; с другой стороны, напряжения возрастают по линейному закону, начиная от нуля, в нейтральном слое (в центре тяжести сечения mm), до некоторой максимальной величины в крайних волокнах, как на фиг. 1—b представлено графически, причем напряжение весьма малого слоя pp (фиг. c)—постоянно на протяжении всей ширины бруска b . Наконец, эти силы должны быть таковы, чтобы совокупность их уравновешивала внешний момент M , приложенный к левой части бруска (фиг. b). Последнее требование указывает, что совокупность внутренних сил приводится к паре сил, которая лежит в одной плоскости с парой M , равна, но противоположна M ; отсюда же следует, что изгиб будет происходить в плоскости симметрии OY , и нейтральная ось OZ будет перпендикулярна к этой плоскости.

Пусть нормальное напряжение материала в какой-нибудь точке поперечного сечения бруска будет n_y , площадь весьма малого элемента вокруг этой точки будет dF : тогда усилие, испытываемое элементом будет $n_y dF$; момент этого усилия относительно оси OZ есть $(n_y dF) \cdot y$. Чтобы получить момент всех внутренних сил, действующих по сечению mm , надо сложить ряд таких элементарных моментов $n_y dF y$, причем суммирование



Фиг. 2.

надо распространить на всю площадь поперечного сечения бруска. Тогда момент внутренних сил представится $\int n_y dFy \dots \dots \dots (3)$.

Но при изгибе противоположными парами сил (фиг. 2) какое-нибудь волокно, взятое на расстоянии y от нейтрального слоя AB , становится длиннее (короче) первоначального $l = \rho d\varphi$; его удлинение получим, вычитая из дуги $(\rho + y)d\varphi$ первоначальную длину $\rho d\varphi$ нейтрального слоя:

$$\lambda = (\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi = y d\varphi.$$

Относительное удлинение волокна: $e = \frac{\lambda}{l} = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$;

следовательно, напряжение будет: $n_y = Ee = \frac{Ey}{\rho}$.

Подставляя это в формулу (3), получим для момента внутренних сил выражение:

$$\int \frac{Ey}{\rho} dFy = \frac{E}{\rho} \int y^2 dF = \frac{EJ_z}{\rho} \dots \dots \dots (3-a).$$

Но так как при равновесии левой части бруска фиг. 1-б момент внутренних сил равен моменту внешних, M , то:

$$\frac{EJ_z}{\rho} = M, \text{ или } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (4).$$

Такова кривизна бруска при изгибе двумя равными противоположными моментами.

Если моменты M одинаковы на конечной длине бруска l , то кривизна $\frac{1}{\rho}$ на всей этой длине постоянна; получается случай кругового изгиба.

Если же по длине бруска моменты изменяются, то, проводя сечения A и B (фиг. 2) на весьма близком расстоянии dx , и рассматривая изгиб элемента dx , мы определяем по той же формуле (4) кривизну в данной точке:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EJ} \dots \dots \dots (5).$$

При переходе от сечения к сечению вдоль бруска, мы встречаем в этом случае изгибающие моменты разной величины M_x , а потому должна изменяться и кривизна упругой линии $1: \rho_x$.

Искривления, рассматриваемые в Строительной механике, малы, и, вместо точного выражения для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \dots \dots \dots (6),$$

можно воспользоваться приближенным:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots \dots \dots (7),$$

пренебрегая в знаменателе квадратом наклона $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, ничтожным по сравнению с единицей. Тогда получится:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ} \dots \dots \dots (8),$$

известное дифференциальное уравнение упругой линии. По этому уравнению определяется кривизна линии $\frac{d^2y}{dx^2}$ в любом сечении с известным изгибающим моментом M_x .

Интегрируя уравнение один раз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_x x}{EJ} + C \dots \dots \dots (9^1)$$

получаем тангенс угла наклона касательной к упругой линии. При малых изгибах этот тангенс можно принять за угол (в радианах).

В точке упругой линии, где $x=0$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = C \dots \dots \dots (10),$$

т. е. независимая первого интегрирования²⁾ есть угол наклона упругой линии в начале координат. Так как оси координат в нашем распоряжении, то можно расположить ось X так, чтобы C было нулем.

Второе интегрирование

$$y = \frac{M_x x^2}{2EJ} + Cx + D \dots \dots \dots (11)$$

дает уравнение упругой линии, по которому можно найти прогиб y для любой абсциссы x . Применяя уравнение к началу координат, т. е. к точке с абсциссой $x=0$, и принимая, по предыдущему, $C=0$:

$$y = 0 + 0 + D,$$

получим:

$$D = y \dots \dots \dots (12),$$

т. е.: независимая второго интегрирования есть прогиб в начале координат. Так как оси координат в нашем распоряжении, то возможно и D сделать равным нулю. Тогда прогибы представляются функцией момента и x^2 :

$$y = \frac{M_x x^2}{2EJ} \dots \dots \dots (13).$$

Если момент — линейная функция от x , то прогибы будут функцией третьей степени, если момент — квадратичная функция, как например, при равномерно распределенной нагрузке, то прогибы получаются четвертой степени, и т. д.

Очевидно, при расположении упругой линии в произвольной ортогональной системе осей, независимые интегрирования C и D всегда определяются, раз известна упругая линия и ее производная, ибо мы можем при-

1) При постоянной жесткости балки EJ . О балках переменной жесткости см. ниже.

2) Мы употребляем это выражение вместо обычного; „произвольная постоянная“.

менить уравнения упругой линии и ее производной к началу координат, где известны и прогиб и угол наклона упругой линии, и из полученных таким образом двух уравнений рассчитать C и D .

При несимметричных поперечных сечениях изгиб происходит совершенно таким же образом, как изгиб симметричных брусков, но лишь в том случае, когда изгибающие моменты находятся в одной из главных плоскостей инерции. В этом случае, другая плоскость является нейтральным слоем, и можно целиком пользоваться вышеприведенными выводами и формулами.

Если же изгибающие моменты действуют не в главных плоскостях, то происходит кривой изгиб: моменты разлагаются по двум главным плоскостям инерции, и явление рассматривается для каждой из них в отдельности. При этом для каждой из составляющих остается справедливым все вышесказанное, так как она действует в главной плоскости инерции.

3. Примеры исследования деформации изогнутых брусков. а) Чистый изгиб, т. е. изгиб парами M по фиг. 2. Так как упругая линия здесь симметрична, то поместим начало координат по середине и ось X совместим с горизонтальной касательной к упругой линии (фиг. 3 *d*). При этом $y_{\text{при } x=0} = 0$

и $\frac{dy}{dx} = 0$ и потому $C=0$ и $D=0$

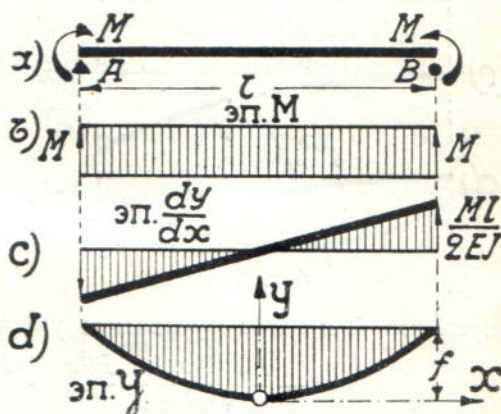
Кривизна упругой линии $\frac{d^2y}{dx^2}$ постоянна, так как M одинаково во всех сечениях балки: мы имеем круговой изгиб.

Углы наклона $\frac{dy}{dx} = \frac{Mx}{EJ}$ изменяются по линейному закону, как представлено ординатами на фиг. 3 *c*. Наибольший угол при $x = \frac{1}{2} l$ составляет

$$\beta = \frac{Ml}{2EJ} \dots \dots \dots (14).$$

Прогибы $y = \frac{Mx^2}{2EJ}$ изменяются по параболическому закону, как показано на фиг. 3 *d*¹⁾. Наибольший прогиб получим, подставляя вместо x длину $\frac{l}{2}$:

$$y_{\text{макс}} = \frac{Ml^2}{8EJ} \dots \dots \dots (15).$$



Фиг. 3.

1) Параболический закон изменения прогибов при круговом изгибе объясняется отбрасыванием малых величин, которое мы позволяем себе делать в кругу больших величин. Уравнение круга в принятой здесь системе координат есть $x^2 + y^2 = 2ry$, или $x^2 + y^2 - 2ry = 0$; если же пренебречь квадратом малой величины y , то получим $x^2 = 2ry$, т. е. уравнение параболы.

б) Консоль с сосредоточенным грузом (фиг. 4). Изгибающий момент в каком-нибудь сечении x : $M_x = -P(l-x) \dots \dots \dots (16)$; ¹⁾ поэтому кривизна меняется по линейному закону, как показано на фиг. 4б:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P(l-x)}{EJ} \dots \dots \dots (17)$$

Интегрируем один раз:

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{P(l-x)^2}{2EJ} + C \dots \dots \dots (18)$$

Применяя уравнение к началу координат находим:

$$0 = \frac{Pl}{2EJ} + C, \text{ т. е., что } C = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

После подстановки в (18), получим:

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{P(l-x)^2}{2EJ} - \frac{Pl^2}{2EJ} \dots (19)$$

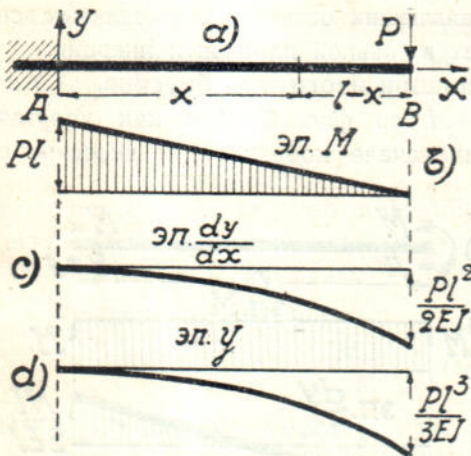
Наибольший угол поворота, при $x = l$, составляет $\frac{dy}{dx} = -\frac{Pl^2}{2EJ}$ (20).

Интегрируя (19) второй раз:

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + D$$

и применяя к опорному сечению, где $x = 0$:

$$0 = -\frac{Pl^3}{6EJ} + D,$$



Фиг. 4.

определим D и найдем уравнение упругой линии в форме:

$$y = -\frac{P(l-x)^3}{6EJ} - \frac{Pl^2x}{2EJ} + \frac{Pl^3}{2EJ} = -\frac{Px^2}{6EJ}(3l-x) \dots (21)$$

Наибольший прогиб конца консоли $f = -\frac{Pl^3}{3EJ} \dots \dots \dots (22)$.

с) Балка односторонне нагруженная моментом (фиг. 5).

Реакция $A = \frac{M_B}{l}$, момент $M_x = Ax = \frac{M_B}{l}x \dots \dots \dots (23)$

Очевидно, кривизна $\frac{1}{\rho_x} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ} = \frac{M_Bx}{lEJ} \dots \dots \dots (24)$

изменяется по линейному закону.

Интегрируя два раза

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{M_Bx^2}{2lEJ} + C \dots \dots \dots (25)$$

¹⁾ При установленной системе осей OXY радиус кривизны консоли при действии P идет против оси Y . Кривизна отрицательна, и потому принимается знак минус, как в выражении для кривизны (17), так и в выражении для момента, которым обусловливается кривизна.

$$2) y = \frac{M_B x^3}{6lEJ} + Cx + D \dots \dots \dots (26),$$

применим последнее уравнение к началу и концу балки: при $x = 0$ получим: $D = 0$; при $x = l$ имеем:

$$0 = \frac{M_B l^3}{6lEJ} + Cl, \text{ или } C = -\frac{M_B l}{6EJ}.$$

Подставим в (25): $\frac{dy}{dx} = \frac{M_B x^2}{2lEJ} - \frac{M_B l}{6EJ} \dots \dots \dots (27).$

Подставим в (26): $y = \frac{M_B x^3}{6lEJ} - \frac{M_B l}{6EJ} x = \frac{M_B}{6EJ} \cdot \frac{x}{l} (x^2 - l^2) \dots \dots (28).$

или: $y = -\frac{M_B l}{6EJ} x \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$

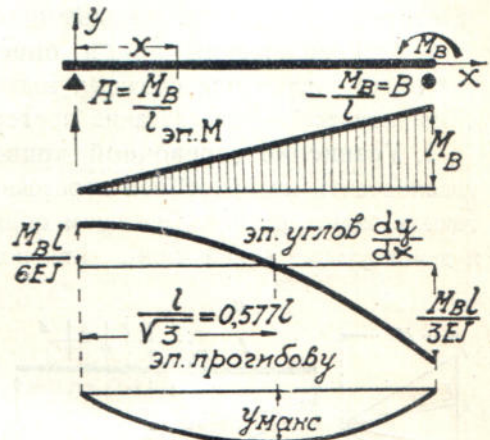
Оказывается, что углы поворота сечений изменяются по параболическому закону. На опоре А, т. е. при $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M_B l}{6EJ} \dots \dots \dots (29).$$

На опоре В, т. е. при $x = l$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M_B l^2}{2lEJ} - \frac{M_B l}{6EJ} = \frac{M_B l}{3EJ} \dots \dots (30).$$

Прогиб посередине балки, т. е. при $x = \frac{l}{2}$:



Фиг. 5.

$$f = \frac{M_B l^3}{48lEJ} - \frac{M_B l l}{12EJ} = \frac{M_B l^2}{16EJ} = 0,0625 \frac{M l^2}{EJ} \dots \dots \dots (31).$$

Для разыскания максимального прогиба приравняем нулю производную от y , т. е. выражение (27); отсюда определим x , которому соответствует максимум;

$$0 = \frac{M_B x^2}{2lEJ} - \frac{M_B l}{6EJ}, \text{ или } x = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l \dots \dots \dots (32).$$

Величину максимального прогиба получим, подставивши в (28) значение для x ;

$$f_{\text{макс}} = 0,0641 \frac{M l^2}{EJ} \dots \dots \dots (33).$$

Этот прогиб на $2^{1/2} \%$ больше прогиба по середине пролета.

Таким же образом определяют элементы деформации брусков и в других случаях нагрузки. Результаты исследования для наиболее часто встречающихся случаев приведены в нижеследующих таблицах раздела 4.

Во всех примерах таблиц оси координат выбраны одинаково: ось X идет вправо, ось Y — вверх от начала, совпадающего с левым концом балки¹⁾.

¹⁾ Исключения отмечены на чертежах.

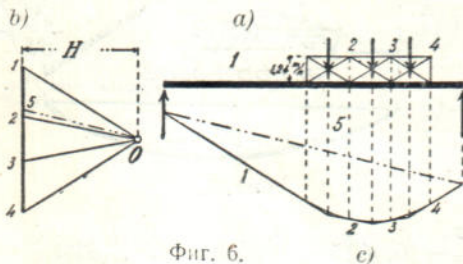
Эпюры расположены соответственно знаку их ординат в установленной системе осей. Формула для прогиба в результате дает не только величину прогиба, но и его знак; тоже относится и к формулам для углов поворота ¹⁾. По малости углов, углы и тангенсы отождествляются.

В таблицах по порядку приведены выражения для опорных реакций и поперечных сил с указанием положения точки (x_0), соответствующей максимальному изгибающему моменту (M_{\max}), выражения для изгибающего момента в любом сечении балки и для характерных точек пролета, а также—общие выражения для упругой линии в разных участках балки. Затем приводятся углы поворота и прогибы для характерных точек пролета.

4. Справочные таблицы формул для деформации, напряжений и соответствующих эпюр (см. таблицы на стр. 15).

§ 2. Графический прием определения деформаций. Этот прием оказывает услуги при сложных заданиях, когда нет подходящих формул, и аналитическое исследование представляет затруднения.

1. Уравнение веревочной кривой. Всякую нагрузку балки можно уравновесить на некоторой веревочной кривой, укрепленной в опорных точках балки, если надлежащим образом подобрать форму этой кривой и действующие в ней силы. Для получения такой кривой из нагрузок



Фиг. 6.

балки строят многоугольник сил, откладывая в стороне от балки, одна за другою, в порядке их расположения на балке, силы по направлению, величине и течению, и притом так, чтобы образовалась непрерывная ломанная линия. Например, при 3 вертикальных грузах фиг. 6-а) строят на фиг. б) прямую

1234. Затем из некоторого полюса O фиг. б) проводят лучи ко всем вершинам многоугольника сил; в данном случае—лучи $O-1$, $O-2$, $O-3$ и $O-4$. Далее, на балке строят ломанную линию из сторон, параллельных лучам, проводя стороны соответственно так, чтобы они пересекались в одной точке с тою силой, с которой в многоугольнике сил они образуют треугольник. На фиг. в) это будет ломанная 1234 с вершинами под тремя жирными стрелками нагруженной балки. Наконец, вписывают кривую через точки касания, взятые на границах раздела грузовой площади балки.

Расположивши усилия, пропорциональные соответствующим лучам, по направлению элементов построенной кривой, мы уравновесим на этой кривой данную нагрузку балки. Эта кривая называется веревочной кривой или кривой Вариньона (1654—1722) ²⁾.

¹⁾ Мы не придерживались знаков только для P и q , вообще, для нагрузки, подставляя положительные числа в последующие формулы. Это сделано, для простоты, по установившемуся обычаю и очевидности знаков.

²⁾ Подробнее см. наши: Техническая механика. Киев, 1922, § 5, или Строительная механика. Системы без лишних стержней. Киев, 1919, § 5—10.

Справочные таблицы по деформации балок.

Таблица I: консоли.

$A=0, Q_x=0.$	$A=P, Q_x=P.$	$A=ql, Q_x=q(l-x).$	$A=P, Q_x=P(1-\frac{x}{l})^2.$
$M_x=M_0$	$M_x=-P(l-x).$	$M_x=-\frac{ql^2}{2}(1-\frac{x}{l})^2.$	$M_x=-\frac{Pl}{3}(1-\frac{x}{l})^3.$
$y=\frac{M_0 x^2}{2EI}$	$y=-\frac{Pl}{6EI}x^2(3-\frac{x}{l}).$	$y=\frac{ql^4}{24EI}(6\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}).$	$y=-\frac{Pl^3}{60EI}[(1-\frac{x}{l})^5+5\frac{x}{l}-1].$
$\alpha=0, \beta=\frac{M_0 l}{EI}.$ $y_{\max}=\frac{M_0 l^2}{2EI}.$	$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{2EI}.$ $y_{\max}=-\frac{Pl^3}{3EI}.$	$\alpha=0, \beta=-\frac{ql^3}{6EI}.$ $y_{\max}=-\frac{ql^4}{8EI}.$	$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{12EI}.$ $y_{\max}=-\frac{Pl^3}{15EI}.$

Таблица II: консоли:

$A=P, Q_x=P(1-\frac{x^2}{l^2}).$	$A=P, Q_1=P, Q_2=P(1-\frac{q}{p}+\frac{x}{l})(\frac{l}{b}-\frac{x}{b}).$	$A=q^2 b, Q_1=q^2 b, Q_2=q(l-x_2).$	$A=qa, Q_1=q(a-x), Q_2=0.$
$M_x=-\frac{Pl}{3}(1-\frac{x}{l})^2(2+\frac{x}{l})$	$M_1=-P(a-x+\frac{2}{3}b), M_2=\frac{1}{3}Pa(2\frac{b}{a}-1+\frac{x}{a})(\frac{l}{b}-\frac{x}{b}).$	$M_1=-q^2 b(a+\frac{1}{2}b-x), M_2=-\frac{1}{2}ql^2(1-\frac{x}{l})^2.$	$M_2=0$
$y=-\frac{Pl^3}{60EI}(20\frac{x^2}{l^2}-10\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^5}{l^5})$	$y_1=-\frac{1}{6}\frac{Pa^2}{EI}(3+2\frac{b}{a}-\frac{x}{a}), y_2=-\frac{1}{60}\frac{Pb^3}{EI}[\frac{x^5}{l^5}-5\frac{q}{p}\frac{x^4}{l^4}-10\frac{q}{p}(\frac{l}{a}-\frac{q}{p})\frac{x^3}{l^3}+10\frac{q^2}{p^2}(\frac{2}{a}-\frac{q}{p})\frac{x^2}{l^2}+5\frac{q^3}{p^3}\frac{x}{l}-\frac{q^5}{p^5}].$	$y_1=-\frac{q^2 b^2}{12EI}(6l-3b-2x), y_2=-\frac{1}{24}\frac{q^4}{EI}(\frac{a^4}{l^4}-4\frac{q^3}{p^3}\frac{x}{l}+6\frac{x^2}{l^2}-4\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}).$	$y_1=\frac{qa^4}{24EI}(\frac{6x^2}{a^2}-4\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}), y_2=\frac{qa^4}{24EI}(1-4\frac{x}{a}).$
$\alpha=0, \beta=-\frac{Pl^2}{4EI}.$ $y_{\max}=-\frac{11}{60}\frac{Pl^3}{EI}.$	$\alpha=0, \beta_2=-\frac{Pa^2}{6EI}(3+4\frac{b}{a}), \beta_1=-\frac{1}{12}\frac{Pb^2}{EI}(1-4\frac{q}{p}+6\frac{q^2}{p^2}).$ $y_\alpha=-\frac{Pa^2}{3EI}, y_{l_1}=-\frac{1}{60}\frac{Pl^3}{EI}(20-10\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}).$	$\alpha=0, \beta_\alpha=-\frac{q^2 ab l}{2EI}, \beta_l=-\frac{1}{6}\frac{ql^3}{EI}(1-\frac{q^3}{p^3}), y_\alpha=\frac{q^2 b^2}{12EI}(4l-b), y_l=-\frac{1}{24}\frac{ql^4}{EI}(3-4\frac{q^3}{p^3}-\frac{q^4}{p^4}).$	$\alpha=0, \beta_1=-\frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI}, \beta_2=-\frac{1}{6}\frac{qa^3}{EI}=\text{Const.}$ $y_\alpha=-\frac{1}{6}\frac{qa^4}{EI}, y_{\max}=\frac{qa^4}{24EI}(1-4\frac{x}{a}).$

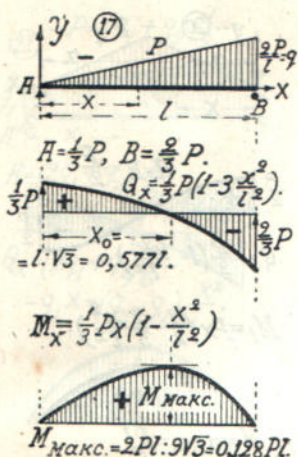
Таблица III: Балки с грузами.

$A=0, Q_x=0.$	$Q_1 = \frac{P\beta}{l}, Q_2 = -\frac{P\alpha}{l}$	$A=P, Q_1=P, Q_2=0.$	$H=B=\frac{1}{2}ql, Q_x = \frac{1}{2}q(l-2x).$
$M_x = M = \text{const.}$	$M_1 = \frac{P\beta}{l}x_1, M_2 = \frac{P\alpha}{l}(l-x_2)$	$M_1 = Px_1, M_2 = P\alpha$	$M_x = \frac{1}{2}qlx(1-\frac{x}{l}).$
$y = -\frac{1}{2} \frac{Mx}{EI} (l-x).$	$y_1 = -\frac{P\beta l}{6EI} (1-\frac{\beta^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2})x, y_2 = -\frac{P\alpha l}{6EI} (1-\frac{\alpha^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2})x.$	$y_1 = -\frac{P}{6EI} [3\alpha(l-\alpha)x - x^3], y_2 = -\frac{P\alpha}{6EI} [3(lx-x^2) - \alpha^2].$	$y = -\frac{q}{24EI} (\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}).$
$\alpha = \beta = -\frac{Ml}{2EI}, y_{\text{макс.}} = -\frac{Ml^2}{8EI}.$	$y_{\text{макс.}} = -\frac{P\beta l^2}{9EI} (1-\frac{\beta^2}{l^2}) \sqrt{\frac{1}{3}(1-\frac{\beta^2}{l^2})}$ при $x = l\sqrt{\frac{1}{3}(1-\frac{\beta^2}{l^2})}$ $\alpha = -\frac{P\beta l}{6EI} (1-\frac{\beta^2}{l^2}), \beta = \frac{P\alpha l}{6EI} (1-\frac{\alpha^2}{l^2})$ При $\alpha = \frac{l}{2}, \alpha = -\frac{Pl}{16EI}, y_{\text{макс.}} = -\frac{Pl^3}{48EI}.$	$\alpha = \beta = -\frac{Pa}{2EI} (l-\alpha), y_{\alpha} = -\frac{Pa^2}{6EI} (3l-4\alpha), y_{\text{макс.}} = -\frac{Pa^3}{24EI} (3\frac{l^2}{\alpha^2} - 4).$	$\alpha_1 = \beta_2 = -\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EI}, y_{\text{макс.}} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}.$

Таблица IV: балки с моментами:

$A = +\frac{M_B}{2} = -\frac{M_A}{2}, Q_x = A = \frac{M_B}{2}$	$A = \frac{M_B - M_A}{2} = -\frac{M_B - M_A}{2}, Q_x = A + (M_B - M_A)x$	$A = -\frac{M_B + M_A}{2} = -B$	$A = -\frac{M_A}{2}, B = -\frac{M_B}{2}$
$M_x = \frac{M_B}{l}x; (M_x = \frac{l-x}{l}M_A)$	$M_x = \frac{x}{l}M_B + \frac{l-x}{l}M_A$	$M_x = \frac{l-x}{l}M_A - \frac{x}{l}M_B$	$M_1 = M_0 \frac{x}{l}, M_2 = M_0 (1-\frac{x}{l})$
$y = -\frac{M_B l}{6EI} x(1-\frac{x^2}{l^2}),$ при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI}$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI}, \beta = \frac{M_B l}{3EI}$ $y_{\text{макс.}} = -0,0611 \frac{M_B l^2}{EI}$ при $x = l\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,577l.$ $y = \frac{M_A l}{6EI} x(2-3\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2})$	$y = -\frac{M_B l}{6EI} x [2\frac{M_B}{M_A} - 3\frac{x}{l} - (\frac{M_B - 1}{M_A}) \frac{x^2}{l^2}]$ при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI} (1 + \frac{M_B}{M_A})$ $y_{\text{макс.}} \text{ при } x = l \cdot [1 - \sqrt{\frac{1}{3}(1 + \frac{M_B}{M_A})}]$ $:(1 - \frac{M_B}{M_A})$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI} (2 + \frac{M_B}{M_A}), \beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 + 2\frac{M_B}{M_A})$	при $x = \frac{1}{2}l:$ $y = -\frac{M_B l^2}{16EI} (1 - \frac{M_B}{M_A})$ $\alpha = -\frac{M_B l}{6EI} (2 - \frac{M_B}{M_A}), \beta = \frac{M_B l}{6EI} (1 - 2\frac{M_B}{M_A})$	$y_1 = \frac{M_0 l}{6EI} x(2-6\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}),$ $y_2 = \frac{M_0 l}{6EI} (\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x}{l} + 3\frac{\alpha^2}{l^2}x - 3\frac{\alpha^2}{l^2}),$ $y_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{16} \frac{M_0 l^2}{EI} + \frac{M_0 \alpha^2}{4EI} (1-2\frac{l}{\alpha}),$ $y_c = \frac{M_0 \alpha}{3EI} (l-\alpha)(2\alpha-l),$ $y_{\text{макс.}} \text{ при } x = l\sqrt{\frac{2\alpha}{l} - \frac{\alpha^2}{l^2}}$ $\alpha = -\frac{M_0 \alpha}{6EI} (6-2\frac{l}{\alpha} - 3\frac{\alpha}{l}), \beta = \frac{M_0 \beta}{6EI} (6-2\frac{l}{\beta} - 3\frac{\beta}{l}).$

Таблица V: Балки с треугольной нагрузкой.



$$y = -\frac{Pl^3}{180EJ} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5} \right).$$

$$\alpha = -\frac{7 Pl^2}{180 EJ}, \quad \beta = \frac{8 Pl^2}{180 EJ}.$$

$$y_{\text{макс.}} = -0,01304 \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$\text{при } x = l \sqrt{1 - \sqrt{8/15}} = 0,5193l.$$

$$\text{При } x = 1/2l:$$

$$y = -\frac{5 Pl^3}{384 EJ}.$$

К столбцу 18.

Углы поворота при треугольной нагрузке, не доходящей до опоры B:

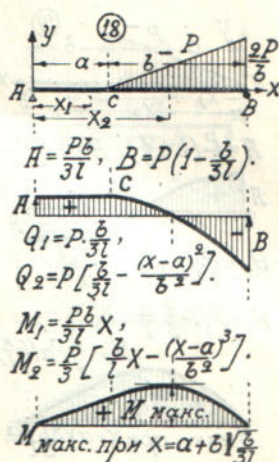
$$\alpha = \frac{-qc}{72 l EJ} \left[6x(l-x)(2l-x) - c^2(l-x + \frac{2}{45}c) \right]$$

$$\beta = \frac{qc}{72 l EJ} \left[6x(l-x)(l+x) - c^2(x - \frac{2}{45}c) \right],$$

где: x — расстояние центра тяжести нагрузки до опоры A,

q — максимальная интенсивность нагрузки,

c — длина грузовой площади (вместо b).



$$y_1 = \frac{Pbl}{180EJ} x \left(10 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{b^2}{l^2} - 10 \right),$$

$$y_2 = \frac{Pbl}{180EJ} \left[10 \frac{x^3}{l^2} + 3 \frac{b^2}{l^2} x - 10x - 3 \frac{(x-a)^5}{lb^3} \right].$$

$$y_0 = -\frac{Pabl}{180EJ} \left(20 \frac{b}{l} - 13 \frac{b^2}{l^2} \right).$$

$$\alpha = -\frac{Pbl}{180EJ} \left(10 - 3 \frac{b^2}{l^2} \right),$$

$$\beta = \frac{Pbl}{180EJ} \left(20 + 3 \frac{b^2}{l^2} - 15 \frac{b}{l} \right).$$

Частный случай: $a = b = 1/2l.$

$$A = 1/6 P, B = 5/6 P.$$

$$Q_1 = 1/6 P, Q_2 = P \left[\frac{1}{6} - \frac{(2x-l)^2}{l^2} \right].$$

$$M_1 = 1/6 Px, M_2 = 1/6 P \left[x - \frac{(2x-l)^3}{l^2} \right],$$

$$M_{\text{макс.}} = 1/12 Pl \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{9} \right) = 0,106Pl$$

$$\text{при } x = 1/2l \left(1 + \sqrt{1/6} \right) = 0,704l,$$

$$M = 1/12 Pl \text{ при } x = 1/2l.$$

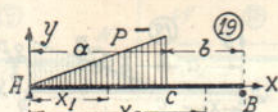
$$y_1 = \frac{Pl^2}{360EJ} x \left(10 \frac{x^2}{l^2} - 9,25 \right),$$

$$y_2 = \frac{Pl^3}{360EJ} \left[10 \frac{x^3}{l^3} - \frac{3}{4} \frac{(2x-l)^5}{l^5} - 9,25 \frac{x}{l} \right],$$

$$y = -\frac{3 Pl^3}{320 EJ} \text{ при } x = 1/2l.$$

$$\alpha = -\frac{37 Pl^2}{1440 EJ}, \quad \beta = \frac{53 Pl^2}{1440 EJ}.$$

Таблица VI: Балки с треугольной нагрузкой.



$$A = \frac{P}{l} \left(b + \frac{\alpha}{3} \right), \quad B = \frac{2}{3} \frac{P\alpha}{l}$$



$$Q_1 = \frac{P}{l} \left(b + \frac{\alpha}{3} \right) - \frac{Px^2}{\alpha^2}$$

$$M_1 = P \left(l - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right), \quad M_2 = \frac{2}{3} Pa \left(l - \frac{x}{l} \right)$$



$$M_{\text{макс.}} \text{ при } x = \alpha \sqrt{\frac{3b+\alpha}{3l}}$$

$$y_1 = -\frac{Pa^2x}{180EJ} \left[3 \frac{x^4}{a^4} + 10 \left(2 \frac{a}{l} - 3 \right) \frac{x^2}{a^2} - 3 \left(15 - 4 \frac{a}{l} \right) + 40 \frac{l}{a} \right],$$

$$y_2 = -\frac{Pal^2}{45EJ} \left[5 \frac{x^3}{l^3} - 15 \frac{x^2}{l^2} + \left(3 \frac{a^2}{l^2} + 10 \right) \frac{x}{l} - 3 \frac{a^2}{l^2} \right],$$

$$y_c = -\frac{2Pa^2l}{45EJ} \left(5 - 9 \frac{a}{l} + 4 \frac{a^2}{l^2} \right).$$

$$\alpha = -\frac{Pal}{180EJ} \left(12 \frac{a^2}{l^2} - 45 \frac{a}{l} + 40 \right),$$

$$\beta = \frac{Pal}{45EJ} \left(5 - 3 \frac{a^2}{l^2} \right).$$

Частный случай: $a = b = \frac{1}{2}l$.

$$A = \frac{2}{3}P, \quad B = \frac{1}{3}P.$$

$$Q_1 = 2P \left(\frac{1}{3} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right), \quad Q_2 = -\frac{1}{3}P.$$

$$M_1 = \frac{2}{3}P \left(x - 2 \frac{x^3}{l^2} \right), \quad M_2 = \frac{1}{3}P \left(l - x \right),$$

$$M_{\text{макс.}} = \frac{2}{9}Pl \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,1815Pl$$

$$\text{при } x = \frac{1}{2}l \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,408l,$$

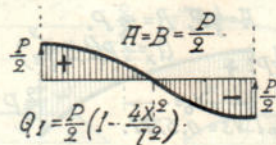
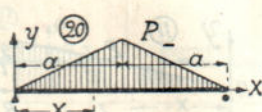
$$M = \frac{1}{6}Pl \text{ при } x = \frac{1}{2}l.$$

$$y_1 = -\frac{Pl^3}{720EJ} \left(48 \frac{x^5}{l^5} - 80 \frac{x^3}{l^3} + 41 \frac{x}{l} \right),$$

$$y_2 = -\frac{Pl^3}{360EJ} \left(20 \frac{x^3}{l^3} - 60 \frac{x^2}{l^2} + 43 \frac{x}{l} - 3 \right),$$

$$y = -\frac{Pl^3}{60EJ} \text{ при } x = \frac{1}{2}l.$$

$$\alpha = -\frac{41Pl^2}{720EJ}, \quad \beta = \frac{17Pl^2}{360EJ}.$$



$$M_1 = Px \left(\frac{l}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2} \right).$$



$$M_{\text{макс.}} = \frac{Pl}{6}.$$

a) Горка.

$$y_1 = -\frac{Pl^3}{12EJ} \left(\frac{5}{8} \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5} \frac{x^5}{l^5} \right).$$

$$-\alpha = +\beta = \frac{5Pl^2}{96EJ}.$$

$$y_{\text{макс.}} = -\frac{Pl^3}{60EJ}.$$

b) Седло.

Если симметрично расположить два треугольника столбца 18-го, то по середине пролета будет впадина, а по краям—максимальные ординаты q .

Для этого случая

$$-\alpha = \beta = \frac{ql^3}{64EJ} = \frac{Pl^2}{32EJ}$$

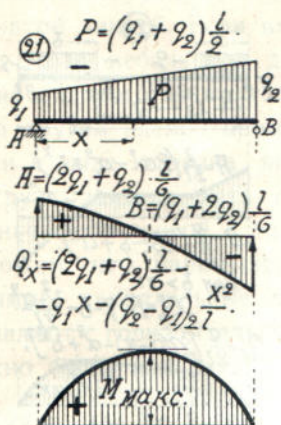
В обоих случаях буквою P обозначен весь груз, лежащий на балке:

$$P = \frac{1}{2}ql,$$

где q —максимальная интенсивность на грузки,

l —весь пролет балки.

Таблица VII: Трапециoidalная и местная нагрузка.



$$M_x = (2q_1 + q_2) \frac{lx}{6} - q_1 \frac{x^2}{2} - (q_2 - q_1) \frac{x^3}{6l}$$

M_{\max} при

$$x = \frac{l}{q_2 - q_1} \left[\sqrt{\frac{1}{3} (q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2)} - q_1 \right]$$

$$y = -\frac{l^4}{360EJ} \left[3 (q_2 - q_1) \frac{x^5}{l^5} + 15q_1 \frac{x^4}{l^4} - 10 (2q_1 + q_2) \frac{x^3}{l^3} + (8q_1 + 7q_2) \frac{x}{l} \right]$$

$$\alpha = -\frac{(8q_1 + 7q_2)l^3}{360EJ}; \quad \beta = \frac{(7q_1 + 8q_2)l^3}{360EJ}$$

$$\text{При } x = \frac{1}{2}l: y = -\frac{5(q_1 + q_2)l^4}{768EJ} = -\frac{5}{384} \frac{Pl^3}{EJ}$$

К столбцу 22 углы поворота.

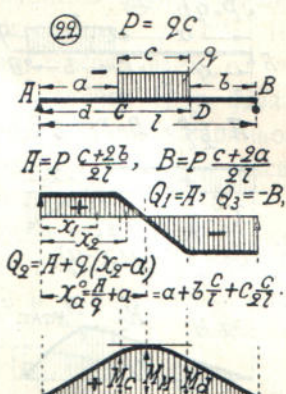
При $a \geq b$:

$$\alpha = -\frac{qc(b + \frac{1}{2}c)}{48EJ} \left[(a + \frac{1}{2}c)(l + b + \frac{1}{2}c) - \frac{1}{4}c^2 \right]$$

$$\beta = \frac{qc(a + \frac{1}{2}c)}{61EJ} \left[(b + \frac{1}{2}c)(l + a + \frac{1}{2}c) - \frac{1}{4}c^2 \right]$$

При $a = b$:

$$-\alpha = \beta = \frac{qc}{48EJ} (3l^2 - c^2)$$



$$M_1 = Ax_1, \quad M_2 = Ax_2 - \frac{1}{2} q (x_2 - a)^2 = P \left[\frac{c+2b}{2l} x - \frac{(x-a)^2}{2c} \right]$$

$$M_3 = P \frac{c+2b}{2l} (l-x)$$

$$M_{\max} = \frac{A}{q} - \frac{1}{2} (A - 2qa)^2 \text{ при } x^0_a = \frac{A}{q} + a = P \frac{c+2b}{8l^2} (c^2 + 2bc + 4al)$$

$$M_c = \frac{Pa(c+2l)}{2l}, \quad M_a = \frac{Pb(c+2a)}{2l}$$

Частный случай: $a = b$.

$$A = B = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} qc$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} P, \quad Q_2 = \frac{1}{2} q (l - 2x)$$

$$M_1 = \frac{1}{2} Px, \quad M_2 = \frac{1}{2} P \left[x - \frac{1}{c} (x-a)^2 \right]$$

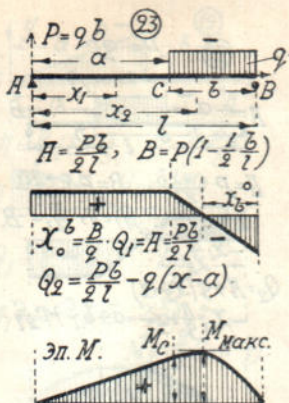
$$M_c = M_a = \frac{1}{2} Pa$$

$$y_1 = -\frac{Pl^3}{48EJ} \left[\left(3 - \frac{c^2}{l^2} \right) \frac{x}{l} - 4 \frac{x^3}{l^3} \right]$$

$$y_a = -\frac{Pal^2}{24EJ} \left(1 + \frac{c}{l} - \frac{c^2}{l^2} \right)$$

$$y_2 = -\frac{P}{48EJ} \left[\frac{2}{c} (x-a)^4 - 4x^3 + l^2 \left(3 - \frac{c^2}{l^2} \right) x \right]$$

Таблица VIII: местная нагрузка.



$$M_1 = \frac{1}{2} Pb \frac{x}{l}, \quad M_c = \frac{1}{2} Pb \frac{a}{l},$$

$$M_2 = \frac{1}{2} Pb \left[\frac{x}{l} - \frac{(x-a)^2}{b^2} \right]$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8} Pb \left(4 \frac{a}{l} + \frac{b^2}{l^2} \right) \text{ при } x_0^b = \frac{B}{q}$$

$$y_1 = -\frac{Pblx}{24EJ} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} - 2 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$$y_c = -\frac{Pab^2}{24EJ} \left(4 - 3 \frac{b}{l} \right)$$

$$y_2 = -\frac{Pbl^2}{24EJ} \left[\frac{(x-a)^4}{b^2 l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} - \frac{b^2 x}{l^2} + 2 \frac{x}{l} \right]$$

$$\alpha = -\frac{Pbl}{24EJ} \left(2 - \frac{b^2}{l^2} \right), \quad \beta = \frac{Pbl}{24EJ} \left(2 - \frac{b}{l} \right)^2$$

Частный случай: $a = b = \frac{1}{2} l$.

$$A = \frac{1}{4} P, \quad B = \frac{3}{4} P, \quad M_1 = \frac{1}{4} Px.$$

$$M_2 = \frac{1}{4} Pl \left(5 \frac{x}{l} - 4 \frac{x^2}{l^2} - 1 \right).$$

$$M_{1/2l} = \frac{1}{8} Pl, \quad M_{\max} = \frac{9}{64} Pl$$

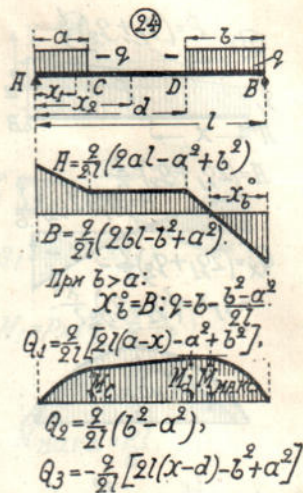
$$y_1 = -\frac{Pl^3}{192EJ} \left(7 \frac{x}{l} - 8 \frac{x^3}{l^3} \right).$$

$$y_2 = -\frac{Pl^3}{192EJ} \left[7 \frac{x}{l} - 8 \frac{x^3}{l^3} + \left(2 \frac{x}{l} - 1 \right)^4 \right]$$

$$y_{1/2l} = -\frac{5 Pl^3}{384 EJ}$$

$$y_{\max} = -0,01313 \frac{Pl^3}{EJ} \text{ при } x = 0,54 l.$$

$$\alpha = -\frac{7 Pl^2}{192 EJ}, \quad \beta = \frac{9 Pl^2}{192 EJ}.$$



$$M_1 = \frac{q}{2l} (2al - a^2 + b^2) x - q \frac{x^2}{2},$$

$$M_2 = \frac{q}{2l} (2al - a^2 + b^2) x - q \frac{a}{2} (2x - a).$$

$$M_3 = \frac{q}{2l} (2bl - b^2 + a^2) (l - x) - \frac{q}{2} (l - x)^2.$$

$$\alpha = -\frac{ql^3}{24EJ} \left(2 \frac{b^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} + 4 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} - 4 \frac{a^3}{l^3} \right).$$

$$\beta = \frac{ql^3}{24EJ} \left(2 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} + 4 \frac{b^2}{l^2} + \frac{b^4}{l^4} - 4 \frac{b^3}{l^3} \right)$$

$$y_c = -\frac{qa^3}{24EJ} \left(2 \frac{b^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{l^4} + 4 \frac{a^2}{l^2} - 7 \frac{a^3}{l^3} + 3 \frac{a^4}{l^4} \right)$$

$$y_d = -\frac{qbl^3}{24EJ} \left(2 \frac{a^2}{l^2} - \frac{a^4}{l^4} - 2 \frac{a^2 b^2}{l^4} + 4 \frac{b^2}{l^2} - 7 \frac{b^3}{l^3} + 3 \frac{b^4}{l^4} \right)$$

Частный случай: $a = b$.

$$\alpha = -\beta = -\frac{qa^2 l}{12EJ} \left(3 - 2 \frac{a}{l} \right),$$

$$y_c = y_d = -\frac{qa^3 l}{24EJ} \left(6 - 7 \frac{a}{l} \right)$$

$$y_{\max} = -\frac{qa^2 l^2}{48EJ} \left(3 - 2 \frac{a^2}{l^2} \right).$$

Составим уравнение этой кривой в общем случае загрузки балки, например, когда на балке находится грузовая площадь $AA_1 B_1 B$ (фиг. 7).

Разобьем нагрузку на элементарные прямоугольники, как показано ступенчатой линией. Если интенсивность нагрузки в точке с абсциссой x есть q_x , то на небольшую длину dx приходится груз $q_x dx$ ¹⁾. При построении силового многоугольника фиг. б) мы откладываем от точки a один за другим элементарные грузы. В таком случае груз $q_x dx$ будет отложен в виде отрезка mn . Стороны многоугольника Вариньона для этого груза должны быть параллельны лучам Om и On и касательны к Вариньоновой кривой в точках M_1 и N_1 (фиг. в).

Положим, что Вариньонова кривая начерчена и проведем через M_1 и N_1 прямые, параллельные лучам. Пусть эти прямые будут DM_1 и CN и составляют с горизонтальной осью X углы φ и $\varphi + d\varphi$. Тогда для точки M можно будет написать:

$$tg\varphi = tg \angle M_1DX = -\frac{mi}{H}$$

где $mO \parallel DM_1$ и H —луч, перпендикулярный к силам ab ; его назовем нормальным лучом.

Но tangens угла наклона касательной к кривой есть dy/dx , поэтому

$$tg\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{mi}{H}.$$

Для точки N tangens угла наклона касательной мало отличается от тангенса в точке M ; можно сказать, что он отличается на приращение этого тангенса, т. е. написать:

$$tg \angle C = \frac{dy}{dx} + d \frac{dy}{dx} = -\frac{ni}{H}, \text{ ибо } nO \parallel CN_1.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, получим

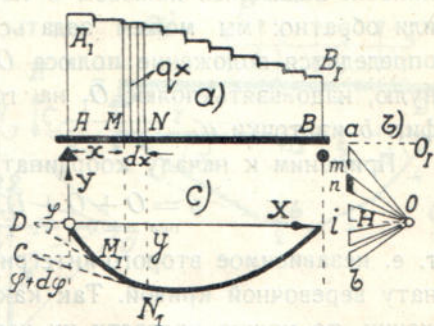
$$-d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{-mi + ni}{H} = -\frac{mn}{H} = -\frac{q_x dx}{H}, \text{ или } \frac{d \left(\frac{dy}{dx} \right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_x}{H}. \quad (34)$$

Таково дифференциальное уравнение веревочной кривой. Интегрируя его два раза, получим уравнение всей кривой. Для случая равномерной нагрузки q

$$\text{первое интегрирование дает: } \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H} + C,$$

1) Если грузовая площадь очерчена плавной линией, то на весьма малой длине интенсивность нагрузки постоянна; ее называют интенсивностью в данной точке и определяют, как предел отношения $\frac{dQ}{dx}$, где Q —грузовая площадь.

2) Знак минус назначается потому, что в избранной системе осей фиг. в) положительному приращению x соответствует отрицательное приращение y , так что угол $\frac{dy}{dx}$, или M_1DX —отрицателен.



Фиг. 7.

второе интегрирование дает: $y = \frac{qx^2}{2H} + Cx + D \dots \dots (35)$.

Последнее уравнение определяет ординату y для любого сечения балки x . На фиг. 7с представлен чертеж соответствующей веревочной кривой. Чтобы уяснить себе геометрический смысл независимых интегрирования C и D , применим первое из уравнений (35) к началу координат, т. е. примем в нем $x = 0$; тогда получится:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + C, \text{ или } C = \frac{dy}{dx}, \text{ при } x = 0.$$

Называя α угол наклона веревочной кривой у опорной точки A , получим: $C = \operatorname{tga}$, т. е. независимое первого интегрирования C есть уклон первого луча многоугольника сил, или—уклон первой касательной к веревочной кривой. Задавшись полюсом O на фиг. 6, мы можем считать C известным или обратно: мы можем задаться величиной C ,—тогда, как следствие, определится положение полюса O . Например, желая сделать C равным нулю, надо взять полюс O_1 на горизонтальной прямой, проведенной на фиг. 6 из точки a .

Применим к началу координат второе из уравнений (35); получим:

$$y = 0 + 0 + D, \text{ или: } D = y \text{ при } x = 0,$$

т. е. независимое второго интегрирования D представляет начальную ординату веревочной кривой. Так как оси координат XU в нашем распоряжении, то можно провести их через начало веревочной кривой, и таким образом сделать $D = 0$.

Таким образом, выбирая полюс и начало веревочной кривой, можно уничтожить независимые интегрирования C и D и уравнение веревочной кривой получить в простой форме параболы:

$$y = \frac{qx^2}{2H} \dots \dots \dots (36)$$

Следовательно, равномерная нагрузка уравнивается на параболической веревочной кривой.

2. Веревочная кривая, как линия моментов. Известно, что луч, проведенный из полюса, параллельно замыкающей стороне веревочного многоугольника, определяет реакции опор, уравнивающие нагрузку балки: на фиг. 8-б) луч $O-5$ разделяет равнодействующую 1—4 на два отрезка: 4—5 и 5—1, представляющие реакции опор B и A ³⁾. Уравнивающимися на балке силам из грузов 1—2, 2—3, 3—4 и реакций 4—5, 5—1, образующим замкнутый многоугольник сил 123451 (фиг. б) соответствует и замкнутый веревочный многоугольник 123451 (фиг. с). Известно также, что равнодействующая какой-нибудь группы сил проходит через точку пересечения начальной и конечной сторон веревочного многоугольника, обнимающего эту группу сил. Так, равнодействующая сил, лежащих левее сечения m , т. е. равнодействующая A и P опреде-

³⁾ См. наши: Системы без лишних стержней. 1919, § 12.

ляется продолжением стороны aA и 2 до пересечения в точке C , ибо веревочный многоугольник для двух сил $A=5-1$ и $P=1-2$ представляет ломанная aAb .

Из построения взаимных фигур b) и c) следует, что треугольники Cab фиг. c) и $2O5$ фиг. b) подобны, так как образованы параллельными сторонами, а потому:

$$\frac{[2-5]}{H} = \frac{ab}{Ca}, \text{ или } [2-5] \cdot Ca = [ab] \cdot H \dots \dots \dots (37).$$

Но $5-2$ есть равнодействующая R сил, расположенных слева от сечения m :

$$R = [5-1] - [1-2] = [5-2];$$

Ca —есть расстояние равнодействующей до сечения m ; назовем это плечо буквой r . Тогда уравнение (37) переписется:

$$Rr = [ab] \cdot H.$$

Так как Rr есть момент M_x всех односторонних сил относительно избранного нами сечения m , то последнее равенство:

$$M_x = [ab] \cdot H \dots \dots \dots (38)$$

говорит, что: Момент односторонних внешних сил балки выражается произведением ординаты веревочного многоугольника и нормального луча многоугольника сил, или:

$$ab = \frac{M_x}{H}, \dots \dots \dots (39)$$

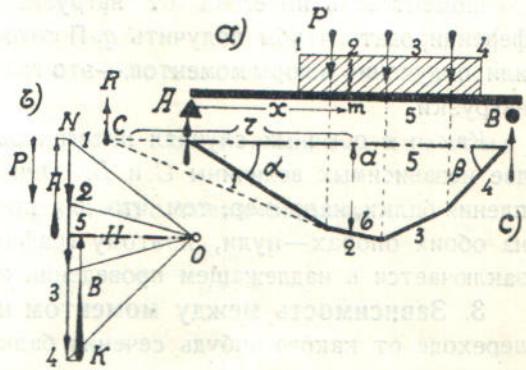
т. е. ордината веревочного многоугольника равна моменту, разделенному на длину нормального луча.

Выбор полюса O в нашем распоряжении, и мы можем взять его на расстоянии единицы, тогда численно:

$$M_x = ab \dots \dots \dots (40).$$

Каждая ордината веревочного многоугольника обладает этим свойством, следовательно, вообще: ординаты ab веревочного многоугольника представляют моменты M для соответствующих сечений балки, взятых над этими ординатами, и притом моменты всех внешних сил, расположенных с одной стороны от сечения.

Но моменты односторонних внешних сил называются изгибающими моментами; следовательно, веревочная линия дает изгибающие моменты для балки. Таким образом, веревочная линия с замыкающей, удовлетворяющей требованиям опор балки, представляет эпюру изгибающих моментов для этой балки.



Фиг. 8.

Отсюда следует, 1) что эпюра изгибающих моментов имеет то же уравнение, что и веревочная кривая, т. е. дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = q_x \quad (41),$$

ибо ордината веревочной кривой y есть момент M_x ,

2) что вторая производная от изгибающего момента равна интенсивности нагрузки в соответствующем сечении балки, и

3) что проинтегрированное уравнение эпюры моментов при постоянном q есть

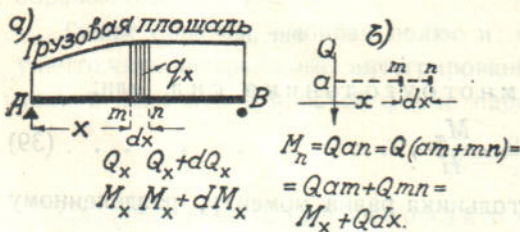
$$M_x = q \frac{x^2}{2} + Cx + D \quad (42).$$

Построение эпюры моментов для какой-нибудь сплошной нагрузки отождествляется с построением для этой нагрузки веревочной кривой.

Момент есть интеграл от нагрузки q , ибо его надо два раза дифференцировать, чтобы получить q . Поэтому построение веревочной кривой, или получение эпюры моментов,—это графическое интегрирование функции нагрузки.

Как и в обычных случаях интегрирования два раза, здесь получаются две независимых величины C и D . Они определяются условиями закрепления балки, например, тем, что для простой балки на 2 опорах моменты на обоих опорах—нули, поэтому графическое определение независимых заключается в надлежащем проведении замыкающей прямой.

3. Зависимость между моментом и поперечной силой. Пусть при переходе от какого-нибудь сечения балки m (фиг. 9) к близкому сечению n , находящемуся на расстоянии dx , момент M_x получает приращение dM_x ; пусть при этом



Фиг. 9.

слева от сечения m находится сумма грузов Q_x , а слева от n пусть будет: $Q_x + dQ_x = Q_x + q_x dx$, где q_x —интенсивность нагрузки элемента dx .

Если бы при переходе от m к n поперечная сила не изменялась, то можно было бы написать, что момент силы Q_x относительно n равняется моменту силы Q_x относительно m плюс произведение Q_x на расстояние dx между точками m и n , т. е. по фиг. 9—б):

$$M_n = M_x + Q_x dx, \text{ или: } M_x + dM_x = M_x + Q_x dx \quad (43)^2.$$

Но так как с переходом от m к n поперечная сила Q изменилась на $dQ = q_x dx$, то необходимо прибавить еще момент этого приращения относительно точки n , т. е.

$$dQ_x \cdot \frac{dx}{2} = q_x dx \frac{dx}{2} = q_x \frac{dx^2}{2}.$$

¹⁾ При $H = 1$.

²⁾ См. также нашу Техническую механику 1922 г. § 8, 2 или Строительную механику 1919 г. § 75, 2.

Это—величина второго порядка малости, и ею можно пренебречь.

Очевидно, выражение (43) можно считать окончательным. Исключая из обеих его частей по M_x , найдем:

$$dM_x = Q_x dx, \text{ или } \frac{dM_x}{dx} = Q_x \dots \dots \dots (44),$$

т. е. производная от изгибающего момента равна соответствующей поперечной силе.

А так как интенсивность нагрузки $q_x = \frac{dQ_x}{dx}$, $\dots \dots \dots$ (45).

то снова получается:

$$q_x = \frac{dQ_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dM_x}{dx} \right) = \frac{d^2 M_x}{dx^2} \dots \dots \dots (46)$$

зависимость (41). Итак:

- 1) вторая производная от изгибающего момента равна интенсивности нагрузки (см. 46),
- 2) первая производная от изгибающего момента равна поперечной силе (см. 44),
- 3) производная от поперечной силы равна интенсивности нагрузки (см. 45).

Все эти теоремы выражаются следующими тремя фразами:

$$q = \frac{dQ}{dx}, \quad Q = \frac{dM}{dx}, \quad q = \frac{d^2 M}{dx^2},$$

или иначе: $q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2},$

$$Q_x = A - \int_0^x q_x dx = \frac{dM_x}{dx},$$

$$M_x = M_0 + \int_0^x Q_x dx = M_0 + Ax - \int_0^x \int_0^{x'} q_x dx dx = \\ = M_0 + Ax - \int_0^x q_x (x-x') dx \dots \dots \dots (47).$$

Определенные интегралы берутся в пределах между начальным сечением и сечением x , так что вместо независимых интегрирования поставлены постоянные начальные условия, а именно: реакция A и момент M_0 , как начальная поперечная сила и начальный изгибающий момент. Конечно, в случае простой балки, при обычной нагрузке, будет $M_0 = 0$.

Те же теоремы выражаются следующими положениями:

- 1) поперечная сила Q есть интеграл односторонней нагрузки,
 - 2) изгибающий момент M есть интеграл от поперечной силы и второй интеграл от односторонней нагрузки,
- или обратно:

3) дифференцированием выражения изгибающего момента, один раз мы получаем поперечную силу, дифференцируя второй раз—получаем интенсивность нагрузки;

4) касательная к эпюре моментов, в какой-нибудь точке определяет

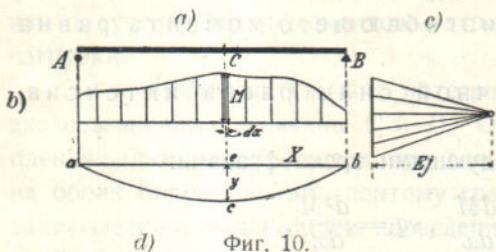
поперечную силу в соответствующем сечении балки, ибо и тангенс касательной и поперечная сила суть производные от момента.

4. Упругая линия балки. Дифференциальное уравнение упругой линии изогнутого бруска, в пределах принятой точности, по (8), выражается

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = M_x, \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ} \dots \dots \dots (48).$$

Сравним это уравнение с уравнением веревочной кривой (34); тогда станет непосредственно ясным, что, если бы при построении веревочной кривой фиг. 7 мы имели вместо нагрузки q_x момент M_x фиг. 10, а вместо расстояния полюса H фиг. 7 взяли бы EJ фиг. 10, то—вместо уравнения (34) оказалось бы (48).

Отсюда следует, что упругую линию можно получить, как веревочную кривую, если балку загрузить не грузовой площадью с ординатами q , а моментной площадью с ординатами M , и если при этом за нормальный луч принять жесткость балки EJ .



Такое построение выполнено на фиг. 10; полученная в результате упругая линия изображена на фиг. d).

При выполнении построения за нагрузку балки необходимо принимать изгибающие моменты M , т. е. с эпюрой моментов—поступать так, как прежде поступали с грузовой площадью, а именно: надо разбить эпюру M фиг. b) на элементарные площади, каждый элемент заменить силой, сосредоточенной в его центре, построить на фиг. c) многоугольник для этих сил и т. д.

Определяя величины сил, приходится составлять произведения абсциссы на ординату. Первая из них—это длина, вторая—момент; очевидно, размерность сил должна быть:

$$(\text{ед. дл.}) (\text{ед. дл.} \times \text{ед. сил}) = (\text{ед. сил}) (\text{ед. дл.})^2 \dots \dots \dots (49),$$

например кг. см.². Жесткость балки имеет ту же размерность

$$[EJ] = \frac{[\text{ед. сил}]}{[\text{ед. длин}]^2} \cdot [\text{ед. дл.}]^4 = [\text{ед. сил}] \cdot [\text{ед. дл.}]^2 \dots \dots \dots (50).$$

Следовательно, многоугольник сил на фиг. 10c в обоих направлениях имеет общий масштаб сил, например, размерности кг. см.².

Если мы построим эпюру прогибов бруска по описанному способу, то получим прогибы в виде ординат, начерченных в таком масштабе, как брусок, например: если чертеж бруска и расположения сил составлен в 0,01 нат. величины, то прогибы тоже получатся в 100 раз меньше натуральных.

Прогибы брусков, которые применяются для сооружений, так малы ¹⁾,

¹⁾ Например, наибольший прогиб балки мостового сооружения составляет $1/1000$ длины балки. В гражданских сооружениях допускают не более $1/1000$ — $1/600$.

что незаметны при вычерчивании в масштабе бруска. Для наглядности чертежа их принято увеличивать и чертить искаженную линию прогибов подобно тому, как вычерчиваются топографические профили. Например, вычерчивают прогибы натуральной величины в то время, как брусок начерчен в 0,01. Чтобы достигнуть этого, достаточно нормальный луч уменьшить в 100 раз, вообще—разделить на знаменатель численного масштаба, в котором вычерчен брусок.

Судя по выражению (48), y есть интеграл от момента, ибо для получения момента необходимо y продифференцировать два раза. Получая по моменту M ординаты y , мы тем самым производим интегрирование выражения момента, подобно тому как и в уравнении (34).

$$EJ \frac{dy}{dx} = Mx + C$$

$$EJy = \frac{Mx^2}{2} + Cx + D \dots \dots \dots (51).$$

Независимые интегрирования C и D определяются условиями закрепления балки и выбором осей. Они то и позволяют проводить оси, как нам удобнее.

Сопоставим полученные результаты с предыдущими при $H=1=EJ$.

Там было: $\frac{d^2M}{dx^2} = q$ $\frac{dM}{dx} = Q$ M — изгиб. момент.	Здесь получено: $\frac{d^2y}{dx^2} = M$ $\frac{dy}{dx} = \varphi$ y — прогиб балки. (52).
---	--	-----------------

Тогда обнаружится определенное соответствие результатов, которое проходит во всех деталях.

Как прежде мы писали:

Если дано выражение интенсивности нагрузки (или грузовая площадь q), то интегрируя один раз, мы получаем выражение для поперечной силы (эпюру Q);
 интегрируя другой раз, — получаем изгибающий момент (эпюру M).

Так теперь можем сказать:

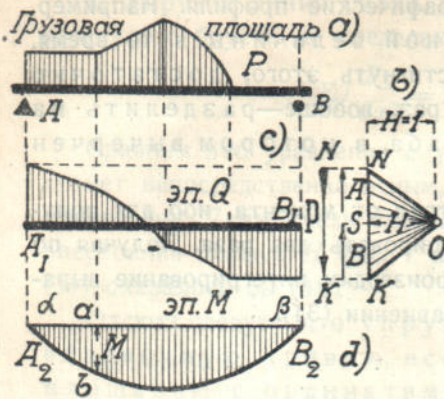
Если дано выражение изгибающего момента M (эпюра моментов), то интегрируя один раз, мы получаем выражение для угла поворота (эпюру углов φ);
 интегрируя другой раз — получаем выражение для прогиба (эпюра прогибов y).

Это соответствие иллюстрируется следующими чертежами (фиг. 11 и 12).

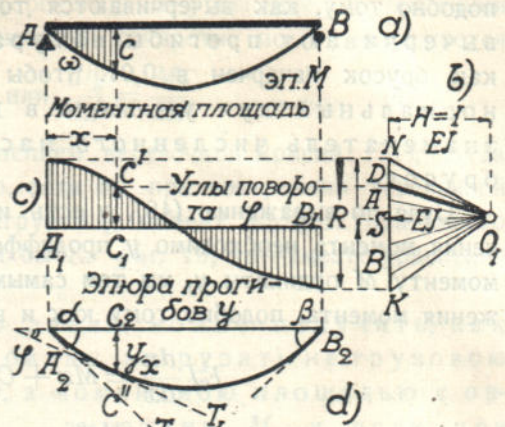
Соединяя все эти результаты вместе, получим известных 5 фраз теории изгиба:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = q_x; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = Q_x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ_x}; \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_x \text{ и } y = f(x) \dots (52a)$$

Они позволяют по нагрузке определить деформацию бруса и обратно: по уравнению упругой линии определить нагрузку.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

5. Примеры построения упругой линии. а) Простая балка на двух опорах (фиг. 13). Сначала строим эпюру моментов на фиг. с, пользуясь многоугольником сил фиг. б. На фиг. 13 принято:

$$\text{масштаб длины } \frac{1}{N} = \frac{1}{100}$$

т. е. 1 мм. чертежа = 0,1 м.,

„ сил

1 мм. „ = 0,1 т.,

длина нормального луча — 30 мм.,

т. е. 3 тонны.

- Ординаты эпюры, измеренные в миллиметрах, показаны на фиг. 13 — f: 5, 8 и 6 мм.

Определим значение одного миллиметра этих ординат.

Момент, вообще, выражается ординатой эпюры, умноженной на нормальный луч H ; поэтому, одному миллиметру эпюры соответствует момент, равный одному миллиметру ординаты, умноженному на масштабное число длины и на длину нормального луча, умноженного на масштабное число сил, т. е.:

$$M_{1 \text{ мм}} = 1 \cdot H = (1 \cdot 0,1) \cdot (30 \cdot 0,1) = 0,3 \text{ тм.}$$

Следовательно, моменты под грузами будут

$$5 \cdot 0,3 = 1,5 \text{ тм.,}$$

$$8 \cdot 0,3 = 2,4 \text{ тм., и}$$

$$6 \cdot 0,3 = 1,8 \text{ тм.}^1).$$

Принимая эпюру моментов за грузовую площадь, разобьем ее на четыре площадки—эти площадки на фиг. 13-f показаны штрихами разных направлений.

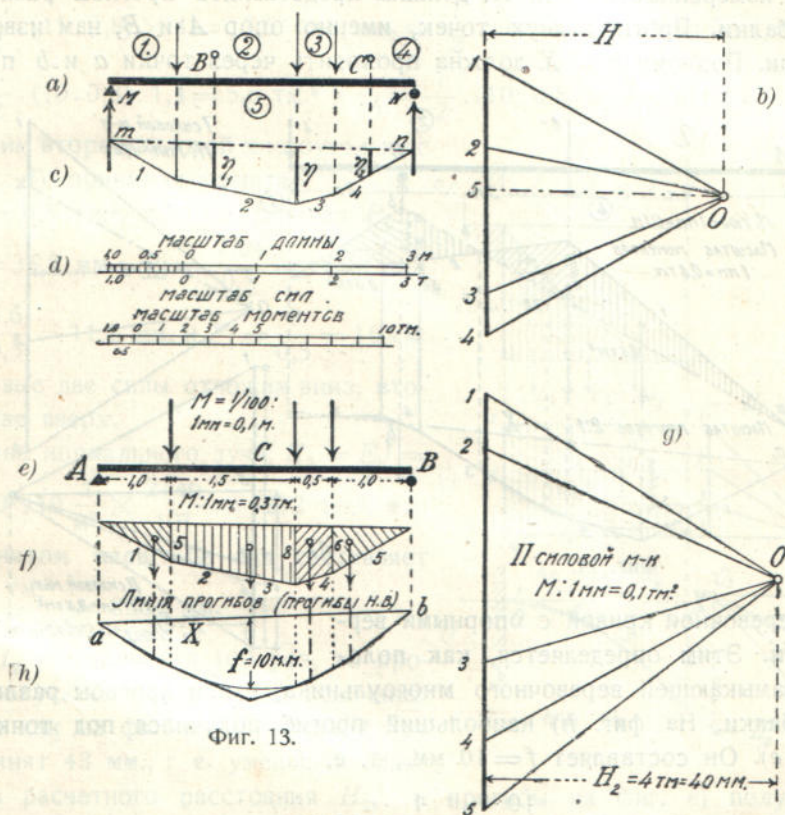
¹⁾ Само собой разумеется, что моменты можно получить просто, по формуле $M = \eta \cdot H$, измеряя η масштабом длины и умножая на H в тоннах; мы здесь приводим расчет, когда все построение производится на миллиметровой бумаге, и представляет известное удобство все, вообще, ординаты прочитывать непосредственно по клеткам и умножать их на постоянное масштабное число: для сил и длин — 0,1, для моментов — 0,3, для прогибов — 1.

Определим затем величины площадок:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 1,5 = 0,75 \text{ тм.}^2, \quad \omega_2 = \frac{1,5 + 2,4}{2} \cdot 1,5 = 2,92 \text{ тм.}^2,$$

$$\omega_3 = \frac{2,4 + 1,8}{2} \cdot 0,5 = 1,05 \text{ тм.}^2, \quad \text{и } \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 1,0 = 0,9 \text{ тм.}^2$$

и заменим каждую площадку силой, сосредоточенной в центре тяжести площадки. Построим для сил $\omega_1, \omega_2, \dots$ силовой многоугольник. На фиг. 13 *g* для него принят масштаб: 1 мм. = 0,1 тм.² и потому:



Фиг. 13.

для сил	$\omega_1 = [1-2],$	$\omega_2 = [2-3],$	$\omega_3 = [3-4],$	$\omega_4 = [4-5],$
отложено	7,5 мм.,	29 мм.,	10,5 мм.,	9 мм.

Положим, что момент инерции балки

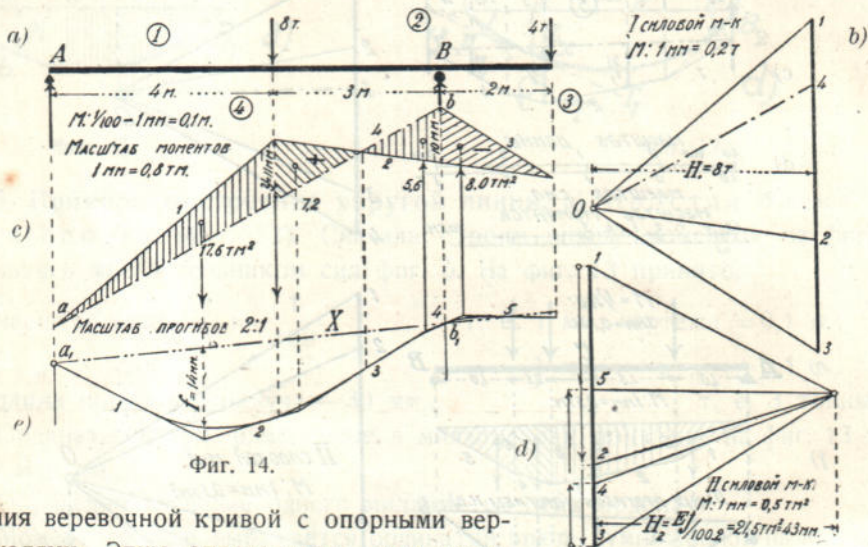
$$J = 2000 \text{ см.}^4 = \frac{2 \cdot 10^3}{100^4} = \frac{2 \cdot 10^3}{10^8} \text{ м.}^4,$$

модуль упругости для железа $E = 2000000 \text{ кг./см.}^2 = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^4}{10^3} \text{ т./м.}^2$

$$\text{Тогда } EJ = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 10^4}{10^3} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{10^8} = 4 \cdot 10^2 \text{ тм.}^2 \text{ } ^1)$$

¹⁾ Вообще, для перевода кг. см.² в тм.², надо кг. см.² разделить на 10⁷, например, $EJ \text{ кг. см.}^2 = \frac{EJ}{10^7} \text{ тм.}^2$

Чтобы прогибы на чертеже увеличить до натуральной величины, уменьшим длину нормального луча EJ в 100 раз, т. е. примем $H_2 = \frac{EJ}{100} = \frac{4 \cdot 10^2}{100} = 4 \text{ тм}^2$: в принятом масштабе для силового многоугольника придется отложить $H_2 = \frac{4}{0,1} = 40 \text{ мм}$. Затем, построим веревочный многоугольник на фиг. *h*) и впишем в него кривую, у которой точки касания лежат на вертикалях, разделяющих грузовую площадь на элементы. Ординаты этой кривой, измеренные от оси X , должны представлять прогибы различных точек балки. Прогибы двух точек, именно опор A и B , нам известны: они нули. Поэтому ось X должна проходить через точки a и b пересечения



чения веревочной кривой с опорными вертикалями. Этим определяется, как положение замыкающей веревочного многоугольника, так и прогибы различных точек балки. На фиг. *h*) наибольший прогиб получился под точкою C фигуры *e*). Он составляет $f = 10 \text{ мм}$, т. е.

$$\frac{10}{4000} = \frac{1}{400} \text{ пролета.}$$

b) Балка с консолью. Пусть балка, вычерченная на фиг. 14 в масштабе 0,01, нагружена силами 8 т. и 4 т.; момент инерции поперечного сечения балки

$$J = 21460 \text{ см}^4 = \frac{2146}{10^7} \text{ м}^4.$$

Построим сначала эпюру моментов, для чего:

1) строим силовой многоугольник на фиг. *b*), принимая масштаб сил: 1 мм. = 0,2 т. и нормальный луч $H_1 = 40 \text{ мм} = 8 \text{ т}$;

2) строим веревочный многоугольник, для чего на фиг. *c*) проводим стороны 1, 2 и 3, продолжаем первую и последнюю до опорных вертикалей и соединяем точки a и b . Тогда сторона ab , обозначенная цифрой 4, будет

замыкающую веревочного многоугольника для уравновешивающихся сил, а заштрихованная площадь представит площадь эпюры моментов. Один миллиметр ординаты этой эпюры составляет:

$$1 \text{ мм.} \left(0,1 \frac{\text{М}}{\text{мм}}\right) \times 40 \text{ мм.} \left(0,2 \frac{\text{Т}}{\text{мм}}\right) = 0,8 \text{ тм.}$$

Поэтому, умножая число мм. каждой ординаты на 0,8 тм., получим моменты в тм.

Затем разобьем эпюру на четыре площадки и для сил:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot (11 \cdot 0,8) \times 4 = 17,6 \text{ тм.}^2; \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot (11 \cdot 0,8) \times 1,6 = 7,04 \text{ тм.}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 0,8) \cdot 1,4 = 5,6 \text{ тм.}^2 \text{ и } \omega_4 = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 0,8) \times 2 = 8 \text{ тм.}^2.$$

построим второй силовой многоугольник на фиг. *d*), принимая масштаб:

$$1 \text{ мм.} = 0,5 \text{ тм.}^2, \text{ т. е. откладывая } P_1 = \frac{17,6}{0,5} = 35,2 \text{ мм.}; \quad P_2 = \frac{7,04}{0,5} = 14,08 \text{ мм.};$$

$$P_3 = \frac{5,6}{0,5} = 11,2 \text{ мм.} \text{ и } P_4 = \frac{8}{0,5} = 16 \text{ мм.}$$

Первые две силы отложим вниз, вторые—две вверх.

$$\text{Длина нормального луча: } H_2 = EJ = 2 \cdot 10^6 \cdot 10 \frac{\text{Т}}{\text{м}^2} \times \frac{2146}{10^7} = 4292 \text{ тм.}^2, \text{ что}$$

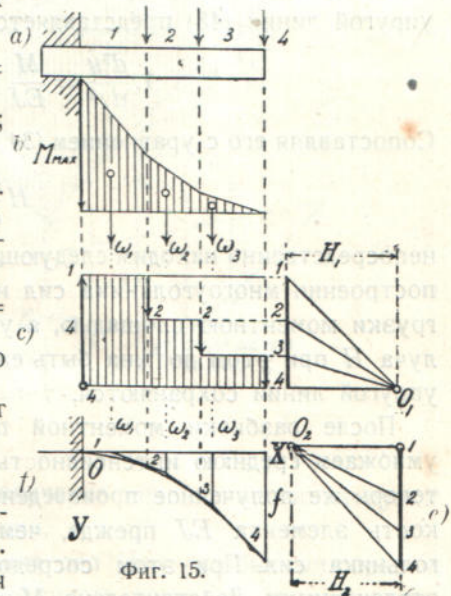
$$\text{в принятом масштабе сил составляет } \frac{4292 \text{ тм.}^2}{0,5 \text{ тм.}^2/\text{мм.}} = 8584 \text{ мм.}$$

Если H_2 уменьшить в 100 раз, то прогибы получатся натуральной величины.

Так как на фиг. *d*) нормальный луч H_2 принят 43 мм., т. е. уменьшен вдвое

против расчетного расстояния H_2 , то прогибы на фиг. *e*) получают также вдвое больше натуральных. Построим веревочный многоугольник 1—2—3—4—5 на фиг. *e*) и через точки a_1 и b_1 пересечения его с опорными вертикалями проведем ось X , так как опоры не понижаются, и прогиб их—нуль; тогда получим линию прогибов, ординаты которой измеряются от оси X . Наибольший прогиб $f = \frac{14}{2} = 7 \text{ мм.}$ составляет $\frac{7}{7000} = 0,001$ пролета.

с) Консоль. Эпюра моментов для этой балки построена на фиг. 15-*b*. Разбивая площадь ее на три элемента, строим для сил ω_1, ω_2 и ω_3 второй силовой многоугольник на фиг. *e*) и веревочный многоугольник на фиг. *f*. Ось X , от которой будут измеряться прогибы, проведем по следующим данным: 1) если балка заделана горизонтальным концом, то касательная к упругой линии в опорной точке остается горизонтальной и после из-



Фиг. 15.

гиба балки (прогибы будем измерять именно от этой касательной); 2) с другой стороны, касательные к упругой линии есть в то же время стороны веревочного многоугольника; следовательно, веревочный многоугольник должен быть построен так, чтобы первая его сторона совпадала с горизонтальной прямой X , проходящей через опорную точку (см. O фиг. f). Этим определяется направление первого луча силового многоугольника, параллельного стороне веревочного многоугольника, и определяется положение веревочной кривой в принятой системе координат OXY . Откладывая нормальный луч $EJ = H_2$ на горизонтальной прямой, проходящей через точку 1 (фиг. e), мы получим полюс O_2 для лучей 1, 2, 3 и 4 и вычертим искомую линию прогибов на фиг. f). Наибольший прогиб f получается на конце консоли.

d) Балка переменного сечения. Дифференциальное уравнение упругой линии (48) представляется в форме

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \dots \dots \dots (53).$$

Сопоставляя его с уравнением (34) веревочной кривой:

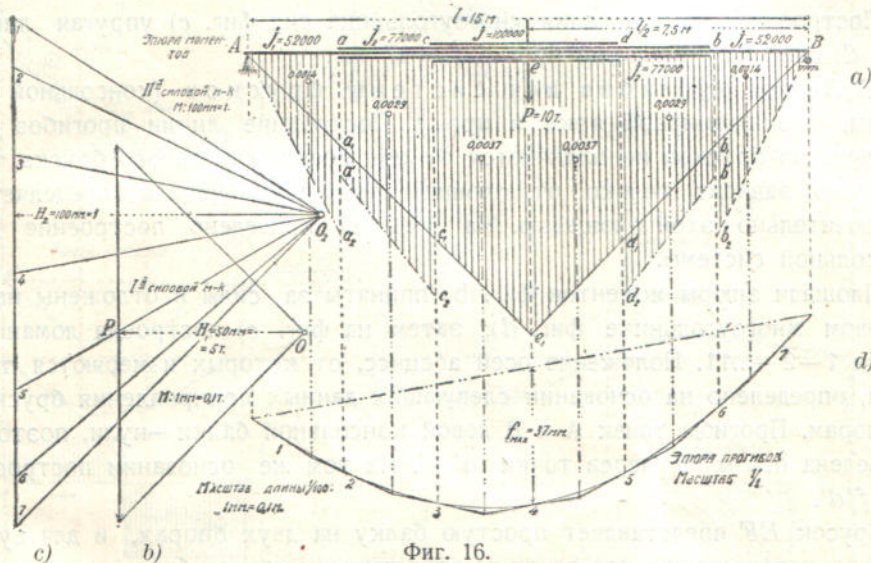
$$H \frac{d^2y}{dx^2} = q,$$

непосредственно находим следующий способ построения упругой линии: при построении многоугольника сил надо брать не полную интенсивность нагрузки моментной площадью, а уменьшенную в EJ раз; длина нормального луча H при этом должна быть единицей. В остальном операции получения упругой линии сохраняются.

После разбивки моментной площади на элементы обыкновенно мы умножаем среднюю интенсивность каждого элемента на длину элемента; теперь же полученное произведение необходимо еще разделить на жесткость элемента EJ прежде, чем откладывать при построении многоугольника сил. При этом сосредоточенные силы последнего получают отвлеченными. Действительно, M измеряется в тонно-метрах, EJ — в тонно-метр-квadrатах; следовательно, интенсивность $q = \frac{M}{EJ}$ выражается в $\frac{т. м}{т. м^2}$, а произведение q на длину есть $\frac{т. м}{т. м^2} \cdot м$, т. е. — отвлеченное число. Если нормальный луч сделать отвлеченной единицей и отложить в том же масштабе, как силы многоугольника сил, то прогибы получатся в масштабе чертежа, напр. в $1/N$ натур. величины. Чтобы получить их натуральными, уменьшим длину луча в N раз, т. е. возьмем $1/N$ единицы. Из всего этого следует, что для построения упругой линии, надо разбить длину балки на части, на протяжении которых момент инерции постоянен, и ординаты эпюры моментов на протяжении каждой из этих частей разделить на EJ для данной части; для измененных таким образом ординат эпюры надо построить силовой и веревочный многоу-

гольники, принимая за нормальный луч $1/N$ единицы сил, где $1/N$ —масштаб балки.

Пример применения этого способа показан на фиг. 16. Здесь нагрузка состоит из одной силы $P=10$ т., приложенной по середине пролета. Для этой силы построена треугольная эпюра моментов $Ae_1 B$ фиг. а). Половина этой эпюры разбита на три участка соответственно трем различным моментам инерции $J_1=52000$ см.⁴, $J_2=77000$ см.⁴ и $J=100000$ см.⁴. Ординаты эпюры на этих участках разделены на численное значение их жесткостей, причем, для наглядности, начерчена штрих-бипунктирная



Фиг. 16.

линия, показывающая относительное увеличение интенсивности нагрузки на участках пониженного момента инерции.

Для построения второго многоугольника сил (фиг. с), обычным образом определяем площади элементов преобразованной эпюры моментов, умножая абсциссу элемента на новое значение ординаты.

Выполняя такое умножение, получим грузы II-го многоугольника сил:

$$\text{груз 1-го участка: } [1 - 2] = \frac{12,5 \cdot 2,5 \cdot 10^3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 52 \cdot 10^3 \cdot 10^4} = \frac{312}{10} \cdot \frac{2,38}{52 \cdot 10^3} = 0,0014,$$

$$\text{груз 2-го участка: } [2 - 3] = \frac{2,38}{77000} \cdot \frac{938}{10} = 0,0029 \dots \dots \dots (54^1).$$

$$\text{груз 3-го участка: } [3 - 4] = \frac{2,38}{100000} \cdot \frac{1562}{10} = 0,0037.$$

¹⁾ Здесь числа 312, 938 и 1562—удвоенные площади участков треугольной эпюры моментов, измеренные просто в квадратных миллиметрах (клише для фиг. 16 сделано в $1/2$ н. в. оригинального чертежа). Во втором и третьем участке повторяется число 2,38, полученное в первом участке, общее для всех участков эпюры и равное $\frac{10}{2 \cdot 2,1}$.

Если эти нагрузки отложить на фиг. е) и принять расстояние полюса H_2 равным единице, то прогибы получатся в масштабе чертежа $\frac{1}{100}$. Чтобы увеличить их до натуральной величины, можно было бы уменьшить H_2 в 100 раз, т. е. принять $H_2 = 0,01$; но того же результата можно достигнуть, увеличивая все нагрузки в 100 раз, т. е. вместо величин (54) принять 0,14, 0,29 и 0,37.

Так и сделано на фиг. е): величина H_2 , равная 100 мм., принята за единицу, и отложены силы [1—2], [2—3]..., равные 0,14; 0,29... от этой единицы, т. е.—14; 29... миллиметров.

Построенная на основании многоугольника сил фиг. с) упругая линия фиг. d) дает максимальный прогиб $f = 37$ мм.

е) Линия прогибов для системы брусков (консольной системы, трехшарнирной арки и проч.). Построение линии прогибов для системы из брусков не отличается от построения для одного бруска, так как оно зависит только от площади эпюры моментов и определяется исключительно этой площадью. На фиг. 17 приведено построение для консольной системы.

Площади эпюры моментов фиг. b) приняты за силы и отложены на II силовом многоугольнике фиг. d); затем на фиг. e) построена ломанная линия 1—2—...11. Положение осей абсцисс, от которых измеряются прогибы, определено на основании следующих данных прикрепления брусков к опорам. Прогибы точек А и В левой консольной балки—нули, поэтому проведена ось $a'b'e'$ через точки a' b' . На том же основании построена ось $f'd'$.

Брусок EF представляет простую балку на двух опорах, и для суждения о перемещениях его точек по отношению к концам бруска на фиг. с) проведена ось $e''f''$ по нулевым ординатам на концах бруска (сравн. фиг. 13-h). Чтобы получить действительные прогибы всей системы балок, измеряемые от одной горизонтальной оси, построена фиг. e), в которой висячая балка EF своими концами связана с концами упругой линии двух консольных балок.

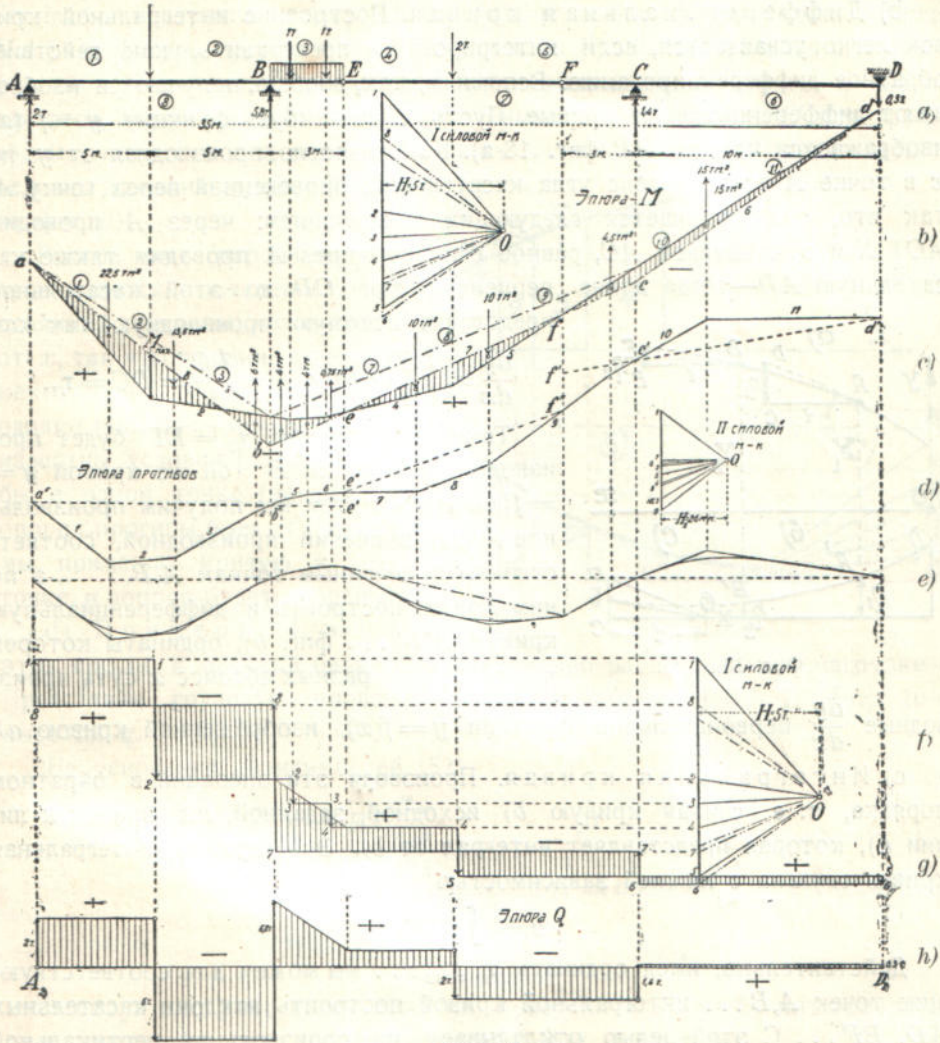
6. Способ интегральных кривых. а) Выражение для упругой линии получается путем интегрирования выражения для изгибающего момента. Поэтому естественно упругую линию строить по общему методу интегральных кривых. Этот метод разработан еще Массо ¹⁾; ему много внимания уделяет Рунге и друг. ²⁾, благодаря чему способ получил применение в технике, в особенности в тяговых расчетах ³⁾. В области Строительной механики обыкновенно считают, что построение интегральных кривых менее удобно, чем вышеописанный общепринятый способ веревочных кри-

¹⁾ Massau. L'integration graphique.

²⁾ G. Runge. Graphische Methoden. L. 1919, изд. 2.

³⁾ См. в: Revue Générale за 1908 г. II сем. стр. 397 статью Desdoits, а также Ю. В. Ломоносов. Тяговые расчеты 1922 г. стр. 122; П. М. Супруненко. Тяговые расчеты. 1926 г., стр. 126.

вых (способ Кульмана, Мора¹⁾). Однако, если иметь в виду не только одну упругую линию простой балки, а более широкую область применений, то способ интегральных кривых может иметь значение наряду с ве-



Фиг. 17.

Масштаб длины $\frac{1}{100}$, или 1 мм. = 0,1 м.

Масштаб сил: 1 мм. = 0,1 т.

Масштаб моментов: 1 мм. = 0,5 тм.

Расчет нормального напряжения:

Поперечное сечение II № 30 Р.Н.С: $W = 2.592 \text{ см}^3$

$$n_{\text{макс.}} = \frac{M_{\text{макс.}}}{W} = \frac{900000}{2.592} = 706 \frac{\text{кг.}}{\text{см}^2} < 750.$$

II силовой многоугольник.

Масштаб: $1 \text{ тм}^2 = 1 \text{ мм}.$

Нормальный луч

$$EJ = \frac{2,15 \cdot 10^6 \cdot 8881,2}{10^7} = 3820 \text{ тм}^2;$$

$$H_2 = \frac{EJ}{100 \cdot 1,5} = \frac{3820}{1,5} = 26 \text{ тм}^2 = 26 \text{ мм}.$$

Прогибы в 1,5 раза больше натур. величины.

ревочной кривой; иногда им следовало бы пользоваться предпочтительно перед последней, например, в случае, когда требуется иметь в распоря-

¹⁾ В. Л. Кирпичев. Основания графической статики. Киев 1902, стр. 93.

жении углы поворота разных сечений балки, в кривых брусках и проч. При графическом расчете моментов инерции способ интегральных кривых должен давать меньшую погрешность, чем веревочная кривая ¹⁾.

б) Дифференциальная кривая. Построение интегральной кривой легко усваивается, если интегрирование представить, как действие, обратное дифференцированию. Вспомним, как, вообще, получают и изображают дифференциальные кривые. Пусть какая-нибудь функция $y = f(x)$ изображается кривою AB фиг. 18-а). Как известно, производная от y по x в точке A есть тангенс угла касательной, проведенной через точку A , так что, она получается следующим построением: через A проводим $AC \parallel X$ и откладываем AC , равное единице; через A проводим также касательную AD —тогда длина перпендикуляра CD до этой касательной представит искомую производную, так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{DC}{CA} = \operatorname{tg} \angle A = \frac{DC}{1} = DC = \eta_1.$$

Таким же образом, $\eta_2 = EF$ будет производной для точки B той же кривой $y = f(x)$. Этим путем мы получим произвольное число значений производной, соответственно намеченным точкам A, B, \dots , а по ним можем построить и дифференциальную кривую $A'B' \dots$ фиг. б), ординаты которой $\eta_1, \eta_2 \dots$ для разных абсцисс x суть производные

водные $\frac{dy}{dx}$ первоначальной функции $y = f(x)$, изображенной кривою a).

с) Интегральная кривая. Производя эти операции в обратном порядке, т. е. считая кривую b) исходной, заданной, мы приходим к линии a), которая представляет интеграл от b). Эта верхняя, интегральная кривая связана с нижней зависимостью

$$y = \int \eta dx.$$

Действительно, имея ординаты $\eta_1, \eta_2 \dots$ мы можем для соответствующих точек $A, B \dots$ интегральной кривой построить наклоны касательных $AD, BF \dots$ С этой целью откладываем на произвольной вертикальной прямой фиг. с) от точки c на оси X отрезки:

$$ac = \eta_1, bc = \eta_2 \dots,$$

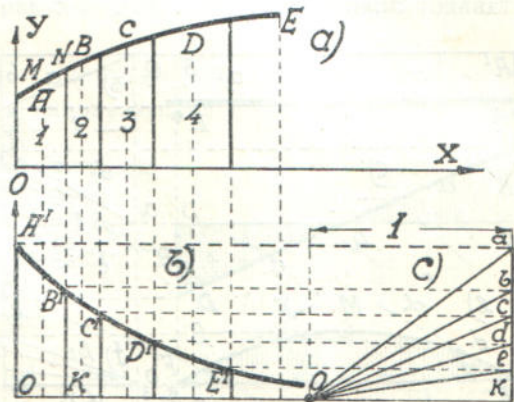
берем полюс O на расстоянии Oc , равном единице, и проводим лучи $Oa, Ob \dots$ Они и представят направление искомых касательных интегральной кривой. Если взять достаточное число касательных, то интегральную кривую удастся построить с требуемой точностью.

На фиг. 19 приведен пример такого построения. Здесь дана кривая $A'B'C'$ фиг. б), ее ординаты спроектированы на вертикальную прямую

¹⁾ Студ. Н. В. Карнаухов обратил внимание на интегральные кривые и разработал ряд примеров из Строительной механики, которые иллюстрируют эту мысль.

фиг. с) и представлены отрезками: $ka, kb \dots ke$. Полюс O взят на расстоянии OK , равном единице и проведены лучи $Oa, Ob \dots Oe$ —они дают направление касательных в последовательных точках интегральной кривой. Последняя построена вверху на фиг. а): от точки M проведена прямая $MA \parallel Oa$ фигуры с), затем— $AB \parallel Ob$ и т. д. Чтобы касательная в точке N фиг. а) действительно соответствовала производной $B'K$ фиг. б), взятой для этой точки, следует кроме намеченных точек $B'C' \dots E'$ для производных, провести еще медианы 1, 2, 3..., и касательные протягивать от медианы до медианы, как сделано на фиг. а).

Всякое интегрирование сопровождается появлением постоянной величины, независимой от x , так что решение содержит некоторую неопределенность; однако последняя исчезает, если известны условия решения хотя бы в одной точке (нередко на опорах прогибы бывают нулями): мы применим кривую к этой точке, и вопрос будет разрешен.



Фиг. 19.

д) П р и м е р ы. Применим

этот способ к простой балке при равномерно распределенной нагрузке q . Представим грузовую площадь прямоугольником $AA'B_1B$ фиг. 20-а) высотой q .

На основании зависимостей (52):

$$\begin{aligned}
 q &= EJ \frac{d^4y}{dx^4} & M &= EJ \frac{d^2y}{dx^2} \\
 Q &= EJ \frac{d^3y}{dx^3} & \text{и} \quad \text{tg} \varphi &= \text{cs} \varphi = \frac{dy}{dx} \dots (52a) \\
 M &= EJ \frac{d^2y}{dx^2} & y &= f(x),
 \end{aligned}$$

интегрируя нагрузку q , мы получим поперечную силу Q , интегрируя затем поперечную силу, получаем изгибающий момент M .

Таким же образом, интегрируя момент, придем к углам поворота сечений φ , а интегрируя углы, получим прогибы y .

На фиг. 20 интегрирование выполнено графически. Первое интегрирование показано фиг. б) и в). Так как все ординаты нагрузки одинаковы, то все они на фиг. б) выразятся одним катетом bc ; откладывая на другом катете bO_1 единицу, получим для всех касательных интегральной кривой одно направление O_1c . Очевидно, кривая превращается в наклонную прямую $C'D'$ фиг. в), т. е. знакомую уже линию поперечных сил простой балки.

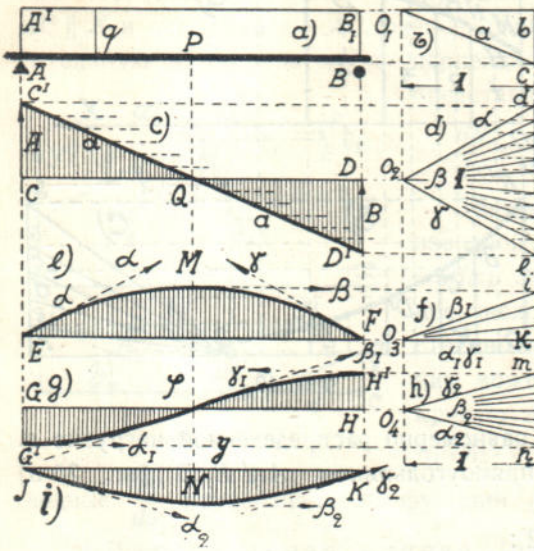
Поперечная сила на конце балки, как справа, так и слева, есть ее опорная реакция $\frac{1}{2} ql$; это дает указание для проведения оси CD , которая должна проходить посередине, ибо только при этом условии $A =$

$= B = \frac{1}{2} ql$. Проводя через середину Q прямую CD , мы определяем таким образом независимую первого интегрирования C .

Второе интегрирование произведено на фиг. d) и e): различные ординаты линии $C'D'$ фиг. c) спроектированы на многоугольник сил de фиг. d); через концы проекций проведены лучи $\alpha \dots \beta \dots \gamma$ и по ним построена Вариньонова кривая фиг. e). Крайние касательные ее α и γ параллельны лучам α и γ фиг. d), средняя β —горизонтальна соответственно лучу β многоугольника сил фиг. d). Полученная интегральная кривая e) представляет эпюру моментов. Так как для концов простой балки моменты

нулевые, то ось EF проведена через точки пересечения кривой с опорными вертикалями.

Третье интегрирование исполнено на фиг. f) и g): ординаты кривой e) спроектированы на многоугольник сил f) и проведены лучи $\alpha_1 \dots \beta_1 \dots \gamma_1$ из полюса O_3 . Первый и последний лучи α_1 и γ_1 совпадают, так как начальная и конечная ордината кривой EMF —нули. Пользуясь лучами фиг. f), мы строим Вариньонову кривую фиг. g), которая представляет углы поворота для различных сечений балки. Ось GH проводится через ее среднюю точку, так как



Фиг. 20.

по симметрии угол наклона касательной к упругой линии по середине балки должен быть нулем.

Наконец, последним интегрированием на фиг. h) и i) мы получаем упругую линию, ось которой JK проводится через нулевые точки на опорных вертикалях.

Переходя от чертежа к числам, надо иметь в виду следующее. Если полюс O_1 фиг. b) взят на расстоянии единицы того же масштаба, в каком отложена отрезком cb интенсивность нагрузки q , то поперечные силы Q получаются непосредственным измерением ординат фиг. c) в масштабе длины. Точно также, при соблюдении связи, указанной на правых и левых построениях фиг. c), d) и e) мы непосредственно получим моменты, если ординаты эпюры e) измерим масштабом длины. Для получения же углов поворота и прогибов из эпюр g) и i) необходимо их ординаты, измеренные масштабом длины, разделить на жесткость балки EJ . Практически, для получения эпюр удовлетворительного очертания, нередко вместо единичного катета bo_1 фиг. a) берут m ; это обязывает ординаты эпюр также умножать на m , чтобы получить их истинное значение. Если при построении эпюр выдерживается во всех их силовых многоугольниках

m —кратный катет направляющего треугольника, то ордината последней эпюры должна быть умножена на $m \cdot m \cdot m$.

е) Дальнейшие упрощения. Правый столбец силовых многоугольников фиг. 20 служит для изображения тангенсов углов наклона касательных в разных точках следующей нижележащей кривой; можно сказать, что каждая следующая кривая строится по тангенсам разных точек вышележащей кривой. Но если для изображения тангенсов верхней кривой мы можем вместо единицы взять произвольный отрезок m , лишь бы только для всех точек кривой одинаковый, то можем обойтись и без отдельных силовых многоугольников.

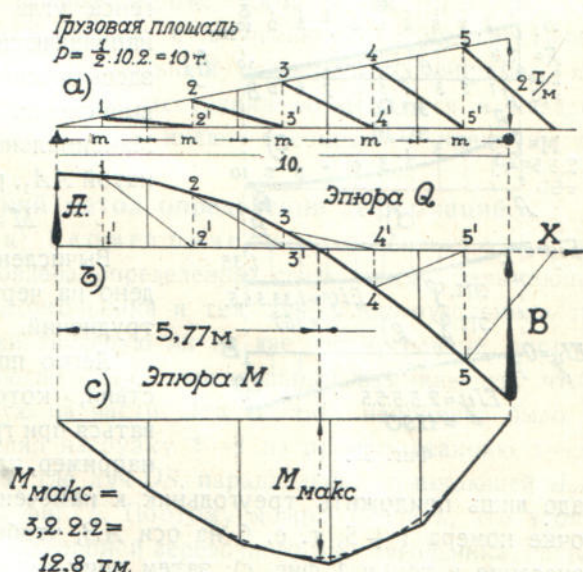
Разобьем основание верхней, т. е. интегрируемой кривой на равные части, и каждую из них примем за направляющий катет m взамен единицы правого столбца фигуры 20.

Соединим ординату середины каждого отрезка m с серединой соседнего отрезка; тогда получим ряд жирных гипотенуз фиг. 21, заменяющих лучи многоугольников правого столбца фиг. 20:—эти гипотенузы, так же, как и лучи силовых многоугольников, дают направление касательной в разных точках кривой. Нам предстоит лишь провести им параллельные отрезки в нижележащей интегральной кривой *b*). Точно также, если во второй кривой *b* концы средних ординат соединить с серединами смежных участков основания кривой, проводя тонкие наклонные и построить кривую из элементов, параллельных этим наклонным, то получим вторую интегральную кривую фиг. *c*.

На фиг. 21 таким путем построена эпюра Q и эпюра M для треугольной грузовой площади. Линия нагрузки фиг. *a* разбита на 5 частей, по 2 метра каждая, как показано сплошными тонкими вертикалями. От средних ординат 1, 2... каждого участка проведены жирные наклонные к точкам 2', 3'...; находящимся на расстоянии $m = 2$ м. от ординат. На фиг. *b*) построена ломанная 1,2... 5 из сторон, параллельных жирным гипотенузам фигуры *a*). Горизонтальная ось $AХ$ проведена так, чтобы оказалось

$$A = \frac{1}{3}P \text{ и } B = \frac{2}{3}P, \text{ где } P = 10 \text{ тонн.}$$

Так как $m = 2$, то ординаты линии Q , измеренные в метрах, умножаем на 2.

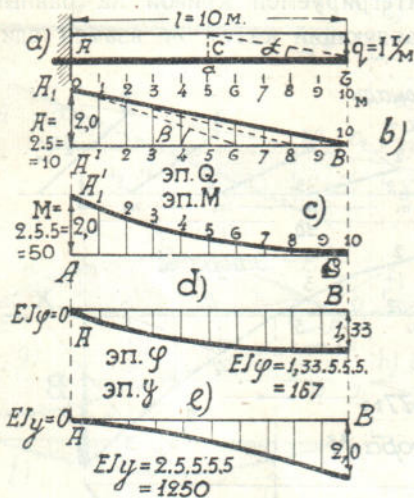


Фиг. 21.

Далее проводим $1-2'$, $2-3'$... на фиг. *b*, принимая для m поперечному 2 м. Если построить фигуру *c*) из параллельных гипотенуз $1-2'$, $2-3'$... фигуры *b*, то получится эпюра *M*. Ординаты ее должны быть умножены на $2 \cdot 2 = 4$.

На фиг. 22 приведено детальное построение эпюр и расчет числовых значений их опорных ординат. Консоль, заделанная в *A*, длиной 10 м. несет равномерную нагрузку 1 т. на пог. метр. Для первого интегрирования берем ординату грузовой площади $ac = q$, а вместо единицы для тангенса угла α принимаем 5 таких единиц, проводя cb . Когда на фиг. *b*) мы проведем A_1-B , параллельно cb фиг. *a*), то на опоре получим $AA_1 = 2$ м. Следовательно, опорная реакция вычисляется по формуле:

$$A = 2 \cdot 5 = 10 \text{ тонн.}$$



Фиг. 22.

При втором интегрировании для тангенса угла β фиг. *b*) мы также берем направляющий катет 5 м.; поэтому и здесь должны ввести множитель 5 при вычислении значения ординат фиг. *c*). Максимальный момент, отмечаемый ординатой AA_1 , равной 2,0 м., очевидно будет

$$M = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \text{ тм.}$$

Вычисление прочих ординат приведено на чертеже и не представляет затруднений.

Легко подметить простоту тех действий, которыми приходится пользоваться при графическом интегрировании, например, при переходе от *b*) к фиг. *c*):

надо лишь приложить треугольник к намеченной точке 1 на кривой и к точке номера $1+5$, т. е. 6 на оси AB , чтобы сделать параллельное перенесение в точку 1 фиг. *c*); затем прикладывают треугольник к точке 3 фиг. *b*) и точке $3+5$, т. е. 8, чтобы перенести к точке 3 фиг. *c*) и т. д. Все ординаты измеряются масштабом длины и только умножаются на длину направляющего катета, в данном случае—5.

й) Интеграф. Существует прибор, который производит операцию интегрирования механически. Идя с прибором по интегрируемой кривой, мы в каждой ее точке отмечаем ординаты, являющиеся тангенсами углов наклона касательных к искомой интегральной кривой, и зачерчиваем по этим тангенсам элементарные касательные, как было показано в предыдущих построениях, например, на фиг. 22—*c*):

$$A_1-2, 2-4, 4-6\dots,$$

в результате получается интегральная кривая. Такой прибор называется интеграллограф или, просто, интеграф¹⁾.

¹⁾ См. напр.: Abdank-Abakanowicz. Les intégraphes. Paris, или Abdank-Abakanowicz Br. Die Integraphen. Die Integralkurve und ihre Anwendungen. Leipzig. 1889.

г) Связь с построением веревочных кривых. При описанном графическом интегрировании каждую построенную кривою мы понижаем степень производной на единицу; поэтому, для получения упругой линии по линии момента, требуется построение двух интегральных кривых. Веревочная же кривая, построенная для моментной нагрузки, дает упругую линию непосредственно: здесь мы зачерчиваем лишь результат двукратного интегрирования, не обращая внимания на первый из этих процессов, а именно, на площадь эпюры. Эти особенности построений определяют их область применения. Обыкновенно пользуются веревочными кривыми, ибо чаще всего по нагрузке q приходится определять моменты и упругую линию; поперечные же силы, а тем более углы требуются сравнительно редко. Но в тех случаях, когда они необходимы, уместным надо признать построение интегральных кривых. Кроме того, в некоторых случаях, приближенное определение площадок и в особенности их расстояний может привести в результате к большой погрешности, например, при определении моментов инерции, где расстояния возвышаются в квадрат. В этом случае интегральные кривые имеют несомненное преимущество перед веревочными.

§ 3. Графоаналитический метод определения деформаций.

1. Основные теоремы. а) Геометрическое доказательство. В предыдущем была установлена определенная связь между замыкающей стороной веревочного многоугольника и тем лучом многоугольника сил, который разделяет равнодействующую их на две части, равные опорным реакциям: мы всегда проводим луч, параллельный замыкающей, чтобы разделить равнодействующую на части A и B ; так, например, было на фиг. 8, где луч $O-5$ разделил нагрузку $1-4$ на правую реакцию $4-5$ и левую $5-1$, или на фиг. 11, где луч OS , параллельный замыкающей A_2B_2 , отделил реакции A и B на фиг. b . Поэтому можно сказать, что угол α , между замыкающей и первой стороной веревочного многоугольника, идущей от опоры A , равняется углу между первым и замыкающим лучом многоугольника сил:

$$\operatorname{tg} \alpha = (1-5) : H \text{ на фиг. 8, или } \operatorname{tg} \alpha = NS : SO \text{ на фиг. 11.}$$

Это справедливо при всякой грузовой площади и конечно, остается в силе при загрузении балки моментною нагрузкой в виде эпюры моментов фиг. 12-а. Здесь также угол α фиг. d равняется углу между NO_1 и SO_1 фиг. b , т. е.:

$$\operatorname{tg} \alpha = NS : EJ.$$

Но если за нагрузку принимается эпюра моментов, то по § 2,4 соответствующая веревочная кривая представляет упругую линию; следовательно, равенство говорит, что тангенс угла наклона упругой линии на опоре A выражается реакцией этой опоры от моментной нагрузки, разделенной на жесткость балки:

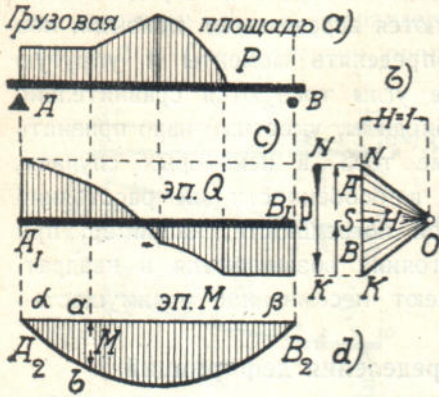
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A'}{EJ} \dots \dots \dots (55).$$

Конечно, то же относится и к опоре B .

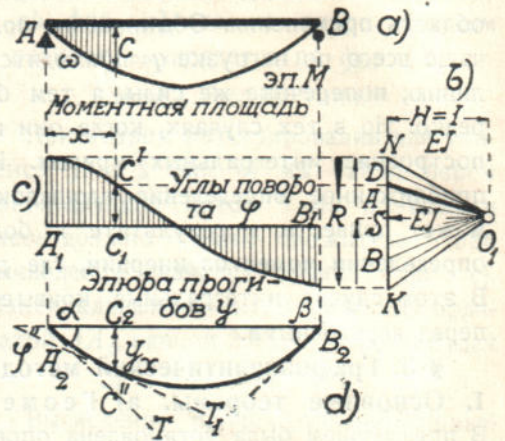
Так как мы рассматриваем малые прогибы и углы поворота, то вместо тангенса можем пользоваться просто углом α . считая, что $tg\alpha = \alpha$.

Определим угол поворота какого-нибудь произвольного сечения балки, например, сечения C на расстоянии x (фиг. 12). Наклон касательной T_1 здесь определяется соответствующим лучом DO_1 (фиг. 12-б), т. е. будет:

$$tg\varphi = \frac{DS}{SO_1} = \frac{A - ND}{EJ}$$



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Но ND —есть нагрузка, лежащая левее сечения C , равная заштрихованной части грузовой площади ω ; алгебраическая сумма

$$A - ND$$

есть поперечная сила Q'_x .

Следовательно,

$$tg\varphi = \frac{A - ND}{EJ} = \frac{Q'_x}{EJ}, \dots \dots \dots (56),$$

или: угол наклона любого сечения балки выражается через поперечную силу для этого сечения от моментной площади, разделенной на жесткость балки.

Определим прогиб балки в каком-нибудь сечении C на расстоянии x . Сопоставляя фиг. 11 и 12, мы непосредственно можем заключить, что, если ордината ab фигуры 11-д представляет разделенный на H момент для сечения C от грузовой площади q (см. форм. 39), то ординаты C_2C'' фигуры 12-д представляют разделенный на жесткость балки EJ момент для сечения C от моментной площади M .

Но ордината C_2C'' есть прогиб y балки в сечении C ; следовательно: прогиб какого-нибудь сечения балки выражается через момент в этом сечении от моментной площади, разделенной на жесткость балки EJ .

Три приведенные здесь теоремы нередко оказывают услуги, как при решении частных задач о деформациях, так и при более общих исследованиях.

б) Аналитический прием доказательства. Уравнение упругой линии (8) представим в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{M}{EJ}, \text{ или } d \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{Mdx}{EJ} \dots \dots \dots (57a).$$

Интегрируя один раз, мы получаем угол наклона упругой линии $\frac{dy}{dx}$, так что, последнее равенство представляет разность углов между какими-нибудь двумя сечениями балки. Если мы произведем интегрирование от нулевой точки до абсциссы x , то, обозначая начальный угол упругой линии α , а угол, соответствующий абсциссе x , — через φ , получим разность углов

$$tg\varphi - tg\alpha = \int_0^x \frac{Mdx}{EJ}, \dots \dots \dots (57b)$$

г. е. относительный поворот одного сечения относительно другого.

Справа написана площадь эпюры моментов от начала до рассматриваемого сечения x ; следовательно, имеем теорему: угол относительного поворота двух сечений балки выражается площадью эпюры моментов между этими сечениями, разделенной на жесткость балки, или иначе: относительный угол поворота сечений есть поперечная сила от моментной нагрузки, разделенной на EJ .

Продолжая интегрирование

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{Mdx}{EJ}, \text{ находим: } dy = dx \int_0^x \frac{Mdx}{EJ}, \text{ откуда}$$

$$y - y_0 = \int_0^x dx \int_0^x \frac{Mdx}{EJ}, \dots \dots \dots (58).$$

В правой части — сумма моментов, составленных из площадей эпюры $\int \frac{Mdx}{EJ}$, умноженных на расстояние до сечения; следовательно и здесь: относительный прогиб двух сечений балки выражается моментом эпюры моментов, взятой между сечениями, относительно одного из этих сечений.

2. Примеры применения графоаналитического метода. а) Простая балка на 2-х опорах при сосредоточенном грузе. Эпюра моментов такой балки — треугольник $A_1C_1B_1$ фиг. 23-б с максимальной ординатой $Pab:l$. Принимаем его за грузовую площадь и определяем реакции опор A_1 и B_1 :

$$\text{Площадь моментной нагрузки: } \omega' = \frac{1}{2} l \frac{Pab}{l} = \frac{Pab}{2}.$$

Расстояние центра тяжести до правой опоры ¹⁾:

$$c' = \frac{1}{3}(a + b + l) = \frac{1}{3}(b + l).$$

То же для левой опоры

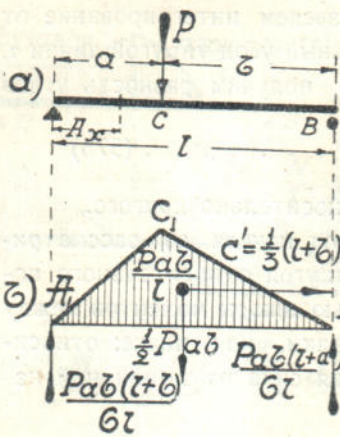
$$c = \frac{1}{3}(a + l).$$

¹⁾ Координата ц. т. треугольника есть среднее арифметическое из координат его вершин (см. нашу Техническую механику 1922 г. § 11, 4).

Поэтому реакция A_1 , как момент относительно B_1 , разделенный на пролет: $A_1 = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{b+l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab(b+l)}{6l}$.

Таким же образом: $B_1 = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{a+l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab(a+l)}{6l}$.

По форм. (55), углы поворота концевых сечений балки оказываются:



Фиг. 23.

$$\alpha = \frac{A_1}{EJ} = \frac{Pab(b+l)}{6lEJ}$$

$$\text{и } \beta = \frac{B_1}{EJ} = \frac{Pab(a+l)}{6lEJ} \dots (59)$$

Определим прогиб под грузом P , как момент в сечении C , вызванный моментной площадью:

$$M' = A_1 a - \omega'_a p = \frac{Pab(b+l)}{6l} \cdot a - \frac{Pa^2 b}{2l} \cdot \frac{a}{3} = \frac{Pa^2 b^2}{3l}$$

и разделенный на жесткость EJ , т. е.

$$y = \frac{M'}{EJ} = \frac{Pa^2 b^2}{3lEJ} \dots (60)$$

Здесь ω'_a — площадь $A_1 C_1$, p — расстояние центра ее тяжести до сечения C .

Таким же образом, прогиб для какого-нибудь сечения в левой части балки в расстоянии x от A :

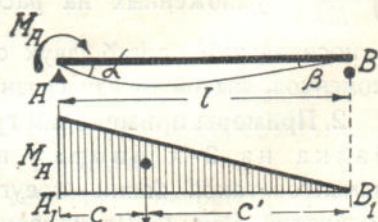
$$y = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Pab(b+l)}{6l} \cdot x - \frac{Px^2 b}{2l} \cdot \frac{x}{3} \right] = \frac{Pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6lEJ} \dots (61)$$

б) Балка, нагруженная опорным моментом (фиг. 24). Реакции A_1 и B_1 от моментной площади здесь будут:

$$A_1 = \frac{2}{3} \frac{M_A l}{2} \text{ и } B_1 = \frac{1}{3} \frac{M_A l}{2}$$

Следовательно, углы поворота:

$$\alpha = \frac{M_A l}{3EJ} \text{ и } \beta = \frac{M_A l}{6EJ} \dots (62)$$



Фиг. 24.

с) Балка при местной нагрузке (фиг. 25). Положим, что местная нагрузка P занимает протяжение b , симметрично относительно середины пролета. Эюра моментов при такой нагрузке имеет прямолинейные части AC и DB и криволинейную часть CKD . Момент в сечении C :

$$M_1 = \frac{P}{4} (l - b) \dots (63)$$

Момент максимальный

$$M_2 = \frac{P}{4} (l - b) + \frac{Pb}{8} = \frac{P}{8} (2l - b) \dots (64)$$

Угол поворота опорного сечения определяется реакцией от моментной нагрузки, т. е.

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{l-b}{2} \cdot \frac{P}{4} (l-b) + \frac{P}{4} (l-b) \frac{b}{2} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{Pb}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{P}{48} (3l^2 - b^2),$$

и составляет $\alpha = \frac{P}{48EJ} (3l^2 - b^2) \dots \dots \dots (65).$

Прогиб посередине балки определяется моментом от моментной нагрузки для середины балки, а именно:

$$M' = \frac{Pl}{96} (3l^2 - b^2) - \left[\frac{P(l-b)^2 (2b+l)}{96} + \frac{Pb^2 (l-b)}{32} + \frac{Pb^3}{128} \right] =$$

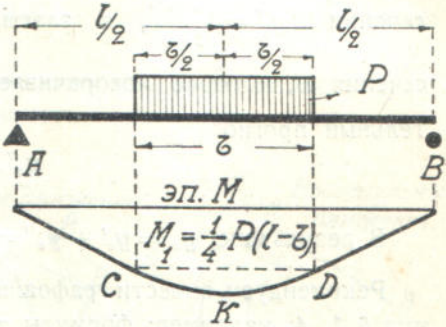
$$= \frac{Pl}{96} (3l^2 - b^2) - \frac{P}{384} (4l^3 - b^3) =$$

$$= \frac{P}{384} (8l^3 - 4lb^2 + b^3)$$

и составляет

$$y = \frac{P}{384EJ} (8l^3 - 4lb^2 + b^3) \dots \dots \dots (66).$$

Результат такого же исследования несимметричной нагрузки приведен в таблице VII.

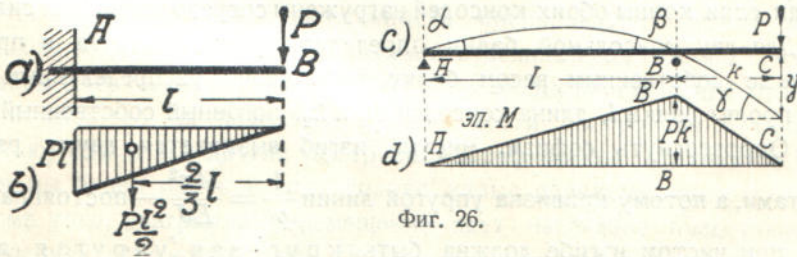


Фиг. 25.

d) Консольные балки. Непосредственно применяя форм. (57—b) к консоли фиг. 26, мы получаем для угла β на конце консоли выражение

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta - 0 = \beta = \frac{\omega'}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot Pl}{EJ} = \frac{Pl^2}{2EJ},$$

так как начальный угол $\alpha = 0$ (при $x = 0$).



Фиг. 26.

Точно также прогиб конца консоли B, по (58):

$$y = y_0 + \frac{M'_B}{EJ} = 0 + \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

как момент относительно конца B от моментной грузовой площади $\frac{1}{2} Pl^2$.

Более сложный пример представляет консольная балка на двух опорах фиг. 26 — c. Однако и здесь, после построения эпюры моментов на фиг. d) углы наклона и прогибы получаются непосредственно.

Балка на пролете AB нагружена опорным моментом M_B и дает тре-

угольную эпюру моментов ABB^1 фиг. d). Реакции опор A и B выражаются $1/3$ и $2/3$ треугольника, так что углы будут: $\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{Plk}{EJ} = \frac{Pkl}{6EJ}$ и $\beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot Pk = \frac{Pkl}{3EJ}$.

Для получения угла γ на конце консоли, воспользуемся форм. (57 — b):

$$\gamma = \alpha + \frac{\omega'}{EJ} = -\frac{Pkl}{6EJ} + \frac{1}{2} (l + k) \frac{Pk}{EJ} = \frac{Pkl}{6EJ} (2l + 3k).$$

Производя расчет в каждом пролете балки в отдельности, получим прогиб для конца консоли C , сначала в предположении полного защемления в сечении B : $y_c' = \frac{Pk^3}{3EJ}$, а затем, — принимая во внимание податливость сечения B , которое поворачивается на угол $\beta = \frac{Pkl}{3EJ}$ и дает дополнительный прогиб

$$y_c'' = \frac{Pkl}{3EJ} \cdot k.$$

$$\text{В результате } y_c = y_c' + y_c'' = \frac{Pk^3}{3EJ} + \frac{Pk^2l}{3EJ} = \frac{Pk^2}{3EJ} (k + l).$$

Рекомендуем вывести графоаналитическим способом некоторые из формул § 1, 4, например: формулы α , β и f для фиг. 11, 13, 22 и 24 таблиц III, IV, VII и VIII.

3. Задачи. 1. Определить угол поворота и прогиб конца консоли в одноконсольной балке, равномерно нагруженной только на протяжении консоли. Ответ: $\gamma = \frac{qk^2}{6EJ} (k + l)$ и $f = q \frac{k^3}{24EJ} (3k + 4l)$, где: l — пролет, k — длина консоли.

2. Для двухконсольной балки определить прогиб и угол поворота конца консоли, если концы обеих консолей нагружены сосредоточенными силами P .

3. Для двухконсольной балки определить углы поворота и прогибы, вызванные собственным весом балки, равномерно распределенным по ее длине; пролет балки l , длина консолей: k_1 и k_2 , погонный собственный вес g .

4. Опровергнуть софизм. Чистый изгиб вызывается двумя равными моментами, а потому кривизна упругой линии $\frac{1}{\rho} = \frac{Mx^2}{EJ}$ — постоянна. Оче-

видно, при чистом изгибе должна быть круговая упругая линия (см. § 1, 3_a). С другой стороны, при графоаналитическом или графическом способе мы пользуемся эпюрой моментов с постоянными ординатами M и определяем прогибы, как моменты от равномерно распределенной нагрузки интенсивностью M ; при этом получается парабола. Такую же параболу мы получаем также и при обычном интегрировании дифференциального уравнения упругой линии в § 1, 3_a : $y = \frac{Mx^2}{2EJ}$. Вообще, при чистом изгибе упругая линия — параболическая.

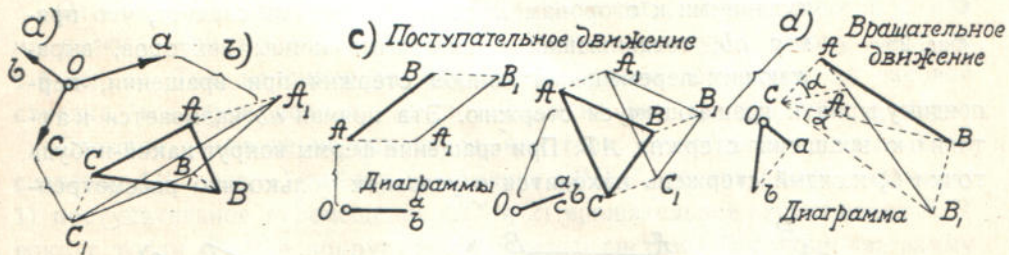
Следовательно, окружность и парабола представляют одну и ту же линию?

ГЛАВА II.

Деформация систем.

§ 4. Диаграммы перемещений. 1. Графический прием для разыскания деформации ферм без лишних стержней представляет построение диаграммы Williot ¹⁾. Диаграмма Виллио — это чертеж, в котором перемещения точек системы представлены векторами, исходящими из одного полюса, т. е. из произвольно взятой на бумаге исходной точки. Например, диаграмма, начерченная при полюсе O на фиг. 27 а), дает представление о перемещении трех точек. Величина, направление и течение перемещения одной точки выражается вектором $O-a$, перемещение другой равно $O-b$, перемещение третьей есть $O-c$.

Нам приходится рассматривать перемещения настолько малые по сравнению с длиной стержней, что они не заметны на чертеже системы, если



Фиг. 27.

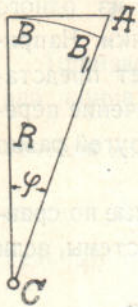
нанесены в том же масштабе. Сюда относятся, например, перемещения узлов фермы при ее деформации под действием нагрузки. Перемещения эти так малы, что при расчете усилий не принимались во внимание.

Диаграмма Виллио дает возможность оперировать с этими малыми перемещениями, потому что представляет отдельный чертеж, не связанный масштабом с чертежом системы. Выбирая для малых перемещений отдельный крупный масштаб на диаграмме, можно вести построения с такою же точностью, как и все другие построения графической статики. В последующем мы будем иметь в виду только малые перемещения.

Кроме того, диаграмма перемещений дает наглядное представление о перемещениях отдельных точек системы и позволяет изобразить систему в перемещенном положении или в деформированном виде. Это достигается путем нанесения на чертеж системы ABC (фиг. b) перемещений $AA_1 = Oa$, $BB_1 = Ob$ и $CC_1 = Oc$ из диаграммы и путем соединения концов их прямыми. Чтобы перемещения были заметны, их, очевидно, следует вычерчивать в более крупном масштабе, чем систему. При этом деформированная система будет изображена искаженной: в ней деформация выступает резко, на подобие того, как рельеф местности в топографических профилях.

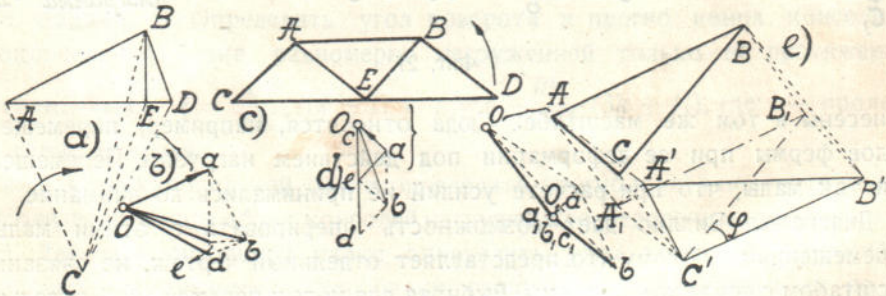
¹⁾ Williot. Notations pratiques sur la statique graphique. Publications scientifiques industrielles. 1887.

2. Перемещения неизменяемой системы. Всякое перемещение неизменяемой системы можно рассматривать, как результат поступательного и вращательного движения. При поступательном движении все точки системы проходят параллельные и одинаковые пути; вычерчивая их на диаграмме, мы получим один вектор, как для точки или стержня, так равно и для целой фермы (фиг. *c*). При вращении стержня *AB* (фиг. *d*) вокруг произвольной точки *C* оба конца *A* и *B* описывают дуги *AA₁* и *BB₁*, пропорциональные радиусам *CA* и *CB*. Пренебрегая при малых перемещениях малыми высшего порядка¹⁾, дуги можно принять за перпендикуляры к радиусам и построить на диаграмме в виде лучей *Oa* и *Ob*. Тогда от одной точки *O* здесь будут начерчены два отрезка, перпендикулярные к сторонам треугольника *ACB* и им пропорциональные. Если соединить концы отрезков прямою, то получится треугольник *abO*, подобный *ABC* и притом со сторонами, перпендикулярными к сторонам последнего. Отсюда следует, что прямая *ab*, соединяющая в диаграмме концы векторов, выражающих перемещения концов стержня при вращении, перпендикулярна к вращающемуся стержню. Эта прямая *ab* называется картиною вращения стержня *AB*. При вращении фермы вокруг какой-нибудь точки *C*, каждый стержень находится в условиях только что рассмотрен-



Фиг. 28

ного *AB*; поэтому сделанный вывод относится ко всем стержням фермы и можно сказать: 1) что прямые, соединяющие в диаграмме концы векторов, выражающих перемещения каждой пары смежных узлов фермы, перпендикулярны к стержням, соединяющим эти узлы (фиг. 29), например, $ab \perp AB$, $ae \perp AE$, 2) что стороны *ab*, *ae*..... пропорциональны *AB*, *AE*....., как принадлежащие подобным треугольникам *ABC* и *abO*, *AEC*



Фиг. 29.

ного *AB*; поэтому сделанный вывод относится ко всем стержням фермы и можно сказать: 1) что прямые, соединяющие в диаграмме концы векторов, выражающих перемещения каждой пары смежных узлов фермы, перпендикулярны к стержням, соединяющим эти узлы (фиг. 29), например, $ab \perp AB$, $ae \perp AE$, 2) что стороны *ab*, *ae*..... пропорциональны *AB*, *AE*....., как принадлежащие подобным треугольникам *ABC* и *abO*, *AEC*

¹⁾ Если радиус *R* поворачивается вокруг одного из концов *C* на угол φ (фиг. 28), то другой конец его описывает дугу *BB₁*, длина которой равна $R\varphi$. При этом длина касательной *BA* равна $R \cdot \operatorname{tg} \varphi$; или после разложения $\operatorname{tg} \varphi$ в ряд по степеням дуги, $BA = R(\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \dots)$. Пренебрегая, при малом φ , вторым и следующими членами ряда, получим $BA = R\varphi$. Вообще, при малом φ разница между длиной дуги и длиной касательной есть малая высшего порядка: $\frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \dots$. Точно также можно показать, что уклонение *B₁A* конца касательной от конца дуги есть малая высшего порядка по сравнению с малым перемещением *BB₁*.

и aeO На этом основании заключаем, что картина вращения для всей фермы есть фигура, подобная ей и повернутая на 90° .

Частный случай. Если ферма вращается вокруг одного из своих узлов, напр., O (фиг. 29— c), то вращательное перемещение этого узла равно нулю; вследствие этого в диаграмме точка c совпадает с полюсом O , и картина начинается из полюса (фиг. d).

Указанное свойство картины дает простой способ построения вращательных перемещений всех узлов фермы, если известны перемещения двух каких-нибудь из ее узлов. Напр., если на фиг. 29— b) построены перемещения Oa и Ob узлов A и B , то, соединяя a и b , получим картину вращения стержня AB ; на ней может быть построен треугольник aeb подобный ABE , на стороне eb может быть построен треугольник ebd , подобный EBD и т. д. Перемещение каждого из узлов фермы по направлению и величине равно лучу, соединяющему полюс с соответствующей точкой картины.

Относительно течения лучей следует заметить, что все лучи идут или из полюса, или в полюс, смотря по тому, в какую сторону начерчен 1-й вектор. Так, например, на фиг. a), где ферма вращается по часовой стрелке, все лучи исходят из полюса, а на фиг. c) лучи идут в полюс.

Сложное перемещение находится, как геом. сумма двух простых. Если система ABC (фиг. e) займет положение $A'B'C'$, то диаграмма выражает: 1) поступательное перемещение CC' и 2) вращательное перемещение B_1B' вокруг точки C' , т. е. вокруг одного из узлов системы. Построим диаграмму для рассматриваемого сложного движения. Сначала отложим от полюса O поступательное перемещение OO_1 , затем, для вращательных перемещений примем новый полюс O_1 , чтобы оба простых перемещения геометрически складывались. При построении вращательных перемещений замечаем, что c совпадает с полюсом O_1 , затем строим O_1b перпендикулярно к $C'B_1$ или, что все равно, к CB , и откладываем величину перемещения B_1B' по течению вектора OO_1 ; наконец, на отрезке c_1b строим картину вращения abc_1 для системы ABC т. е. строим фигуру, подобную и перпендикулярно расположенную. При таком построении результирующие¹⁾ перемещения изображаются векторами, идущими из первоначального полюса O к соответствующей точке картины, напр.: перемещение узла B равно вектору Ob , для узла A получается вектор Oa , для узла C —вектор Oc_1 .

Описанное построение может быть выражено правилом: чтобы получить диаграмму сложного перемещения неизменяемой системы, надо построить вектор, выражающий поступательное движение одной точки этой системы; конец вектора надо принять за полюс для построения картины вращения системы и из этого полюса провести вектор, выражающий вращательное перемещение какой-нибудь другой точки системы; на векторе надо построить фи-

¹⁾ Геометрическая сумма нескольких составляющих перемещений.

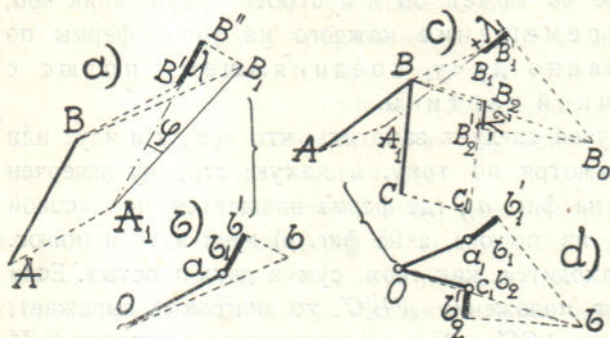
гуру, подобную данной системе и расположенную к ней перпендикулярно. Отрезок, идущий изначала построения к точке картины, есть результирующее перемещение этой точки.

3. Перемещения упругой системы. При статическом расчете ферм стержни их принимаются абсолютно неизменяемыми. Только при этом условии фермы представляют неизменяемые системы. В действительности же, под влиянием усилий, возникающих в стержнях при действии нагрузки, длина стержней изменяется, и ферма деформируется. Можно было бы построить деформированную систему, составляя ее по способу образования, но принимая измененные длины стержней. Однако при построении встретится серьезное затруднение, а именно: деформированная ферма на чертеже всегда будет сливаться с первоначальной. Действительно, по закону Гука, удлинение

даже при наибольшем допуске напряжении $S:F$, равно для железа

$$\lambda = \frac{S \cdot l}{EF} \dots \dots (67).$$

даже при наибольшем допуске напряжении $S:F$, равно для железа



Фиг. 30.

1000 кг./см.², составляет около 0,0005 длины l бруска, и не может получиться на чертеже в масштабе фермы. В виду этого, для построения деформированной фермы необходимо прибегнуть к отдельной диаграмме, заключающей только величины одного порядка, а именно, весьма малые перемещения узлов, начерченные в крупном масштабе.

а) Диаграмма для одного стержня. Если стержень вследствие растяжения удлиняется и из положения AB фиг. 30) переходит в положение A_1B_1 , то его движение можно описать следующим образом: 1) сначала стержень перемещается поступательно и переходит в положение A_1B' , причем конец B стержня, удалившись от A_1 на величину λ , займет положение B'' : 2) затем стержень поворачивается на угол φ .

Построим перемещения обоих концов стержня на диаграмме.

Конец A участвует только в поступательном движении, поэтому его перемещение выразится вектором Oa . Конец B имеет более сложное движение. На диаграмме это движение можно выразить, во-первых, тем же вектором Oa и, во-вторых, векторами $a b'$, равным, параллельным и идущим в ту же сторону, что и $B'B''$ и $-b'b$, равным, параллельным и идущим в ту же сторону, что $B''B_1$. При этом результирующее перемещение для конца B будет Ob . Для сжатого стержня диаграмма строится таким же образом. Это построение выражается в следующем простом правиле: от произвольного полюса O строят вектор, изображающий перемещение конца A , и обозначают конец вектора буквой a ; затем полагают, что A

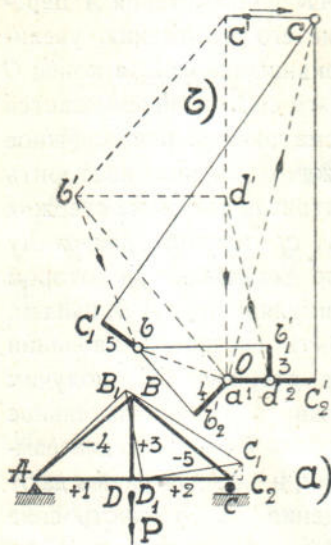
неподвижно, и замечают, в какую сторону перемещается конец B вследствие изменения длины стержня, чтобы в ту же сторону от a отложить изменение длины λ , параллельное стержню; далее, в конце отрезка λ проводят перпендикуляр, идущий в сторону вращения, и конец его обозначают буквой b .

b) Диаграмма для двух стержней, связанных шарниром. Два не параллельных стержня с общим шарниром всегда определяют положение последнего, если известно положение их свободных концов¹⁾. На этом основании перемещенное положение связующего шарнира B (фиг. 30—с) может быть найдено, если дано перемещенное положение концов A и C системы ABC . Положим, что конец A стержня AB из положения A перешел в положение A_1 и длина стержня, вследствие его растяжения, увеличилась на λ_1 ; в то же время длина стержня CB уменьшилась на λ_2 , а конец C перешел в положение C_1 . При этом предположении вся система перемещается и движение каждого из ее стержней можно рассматривать, как сложное движение, изображенное на фиг. 30-а, и для каждого из них построить соответствующую диаграмму *b)*. Например, рассматривая движение стержня AB , как поступательное с удлинением λ_1 , (фиг. с) получим диаграмму Oa_1b_1' (фиг. *d*); далее, рассматривая вращательное движение, при котором конец B перемещается по линии $B_1'B_0$, перпендикулярной к AB , найдем, что окончательное положение узла B должно быть где-нибудь на линии $b_1'b$. Таким же образом, рассматривая движение стержня CB , получим диаграмму $Oc_1b_2'b$, на отрезке $b_2'b$ которой должно быть окончательное положение узла B . Одновременное нахождение точки b , на двух диаграммах указывает, что точка лежит в их пересечении, и обе диаграммы дают для узла B одинаковое результирующее перемещение Ob . Это построение представляет два раза повторенное построение фиг. *b)*; поэтому при его выполнении можно руководствоваться указанным выше правилом, а именно: из произвольного полюса O построить известные перемещения двух узлов A и C и получить точки a_1 и c_1 ; затем из a_1 построить перемещение $\lambda_1 = a_1b_1'$ узла B по отношению к A и восставить в конце перпендикуляр; наконец из c_1 построить перемещение $\lambda_2 = c_1b_2'$ узла B по отношению к C и восставить в конце перпендикуляр до встречи с первым перпендикуляром. Тогда луч, идущий из полюса до пересечения перпендикуляров, дает результирующее перемещение узла B .

§ 5. Диаграмма Williot для простейшей фермы. 1. Диаграмма для двух стержней дает возможность найти относительное расположение узлов после деформации всякой простейшей фермы, а следовательно,—и деформированную ферму. Примем один из стержней фермы за исходный и начало этого стержня будем считать неподвижным; перемещение конца стержня равно удлинению или укорочению λ , вычисляемому по формуле

¹⁾ См. Системы без лишних стержней, § 28.

(67) и идущему вдоль стержня. Перемещение двух точек фермы будет задано, а именно, перемещение начала и перемещение конца исходного стержня; в таком случае, перемещение ближайшего узла, прикрепленного к исходному стержню, определится по фиг. 30, в которой положение B становится известным, коль скоро даны перемещения A и C . Далее, в простейшей ферме каждый последующий узел прикрепляется посредством двух стержней. Эти стержни в нашем случае исходят из узлов, перемещение которых уже построено. Очевидно, перемещение каждого последующего узла определяется построением той же фиг. 30. Рассмотрим эти построения в совокупности на примере треугольной фермы фиг. 31.



Фиг. 31.

2. Пример. Положим, что усилия, возникшие при нагрузке P , вызывают изменения длины, указанные на фигуре a) в миллиметрах со знаком плюс или минус ¹⁾. Кроме того, допустим, что направление стержня AD неизменно, конец его A фиксирован, а перемещение конца D равно удлинению стержня, обозначенному цифрой 1. Первым узлом фермы, прикрепленным к AD , является B ; поэтому прежде всего найдем его перемещение. По правилу § 4 (раздел 3) следует отложить от полюса O фиг. b) перемещение узла A , т. е. нуль, и написать a ; затем отложить перемещение узла D вправо, потому что D , удаляясь от A при растяжении стержня, перемещается вправо, — и написать d . Построивши данные перемещения Oa и Od , замечаем, что узел B , принадлежащий стержню AB , вследствие сжатия стержня, приближается к A ,

т. е. перемещается влево-вниз; поэтому от точки a строим влево-вниз вектор 4, равный укорочению стержня AB и ему параллельный, и в конце восстанавливаем перпендикуляр b'_2b . Узел B , как принадлежащий стержню DB , вследствие растяжения, удаляется от D , т. е. перемещается кверху; поэтому откладываем, вверх от d , вектор 3, равный удлинению стержня и параллельный ему, и в конце восстанавливаем перпендикуляр. На пересечении перпендикуляров к векторам 3 и 4 получается точка b . Переходим к узлу C . Узел C прикреплен к B и D , перемещения которых Ob и Od уже построены на диаграмме b). Поэтому здесь придется выполнить только вторую половину построения. Вследствие сжатия стержня CB , узел C приближается к B , т. е. идет влево-вверх; поэтому укорочение 5 придется отложить влево-вверх от точки b и восстановить перпендикуляр; вследствие растяжения стержня DC узел C удаляется от D , т. е. перемещается вправо; поэтому удлинение 2 придется отложить вправо от d и провести перпендикуляр. Точка c получится в пересечении перпендику-

¹⁾ Плюс обозначает удлинение, минус — укорочение.

ляров к векторам 2 и 5; результирующее перемещение узла C будет Oc . Построения остаются такими же и для ферм из большого числа стержней: здесь к каждому последующему узлу применяется такое же рассуждение, как к шарниру C рассмотренного примера.

Построенная диаграмма, которую для краткости назовем относительной диаграммой, дает перемещения всех узлов фермы относительно одного неподвижного стержня AD и, таким образом, решает вопрос о взаимных перемещениях узлов, т. е. о деформации фермы (чтобы дать наглядное представление об этой деформации, перемещения нанесены на чертеж фермы и концы их соединены тонкими прямыми). Однако, при практическом решении вопроса не ограничиваются определением деформации фермы, и стремятся поместить ферму в такое положение, в каком она действительно находится,—устанавливают на опоры. Для этого деформированную ферму передвигают, как твердое тело, сообщая ей, в общем случае, сложное движение, иногда—простое поступательное или вращательное. Чтобы поставить деформированную ферму AC_1 фиг. 31-а на опорную плоскость AC , необходимо только повернуть ее вниз на столько, чтобы C_1 оказалось на линии скольжения подвижной опоры C . При этом узел C_1 будет перемещаться вниз по перпендикуляру C_1C_2 к радиусу вращения AC ¹⁾, т. е. по вертикальному направлению, и величина вертикального перемещения определится из разложения C_1C на составляющие: 1) вертикальную C_1C_2 и 2) горизонтальную C_2C . Чтобы получить эти перемещения в крупном масштабе диаграммы, разложение делают на диаграмме, как показано на фиг. 31-б, где перемещение Oc конца фермы C разложено на cc' и $c'O$. Таким образом, правому опорному узлу деформированной фермы надо дать вниз перемещение, равное $c'O$; при этом в результате узел окажется передвинувшимся вправо на величину $c's$. Другие узлы фермы при ее вращении тоже перемещаются, и для всех их можно получить вращательные перемещения одновременно, пользуясь тем, что две точки картины уже получены на диаграмме, именно: построено вращательное перемещение узла A , равное нулю, и вращательное перемещение узла C , равное $c'O$. Вычерчивая по точкам O и c' картину $Oc'b'd'$, мы получим все вращательные перемещения: они выражаются расстояниями от полюса вращения O (a) до точек картины и идут в полюс, как указывает течение $c'O$ (сравн. фиг. 29-б и д).

Если вращательные перемещения геометрически сложить с первоначальными относительными, то получатся результирующие перемещения узлов, которые приводят узлы в действительное положение. На диаграмме сложение производится само собой, напр.: 1) для узла D —вращательное перемещение есть $d'O$, относительное— Od , замыкающая треугольника перемещений есть dd' , следовательно, результирующее перемещение получается $d'd$; 2) для узла B вращательное перемещение есть $b'O$, отно-

¹⁾ Мы говорим: по \perp к AC , а не к AC_1 , на том основании, что в действительности деформированная ферма на чертеже совпадает с первоначальной: малыми величинами по сравнению с длиной брусков здесь мы пренебрегаем.

сительное— Ob , замыкающая bb' , следовательно, результирующее— $b'b$. Вообще, направление, течение и величина результирующего перемещения выражается вектором, идущим от точки картины к соответствующей точке относительной диаграммы. Этот общий вывод вытекает из того, что при описанном построении вращательные векторы идут в полюс, а относительные выходят из полюса.

Следует заметить, что ни добавочные, ни результирующие перемещения на диаграмме обычно не вычерчиваются: при этом диаграмма получается более ясной.

3. Другой пример: железная стропильная ферма фиг. 32 при равномерном давлении снега. Усилия, вызванные снегом, написаны в третьем столбце таблицы; соответствующие изменения длины λ , вычисленные по формуле (67):

$$\lambda \text{ мм.} = \frac{S \text{ т.} \times 1000 \times l \text{ см.}}{E \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2} \times F \text{ см.}^2} \times 10,$$

помещены в последнем столбце справа. Построим диаграмму перемещений узлов фермы по отношению к стержню 1, принимая, что узел F неподвижен. От полюса O фиг. *b*) отложим перемещения: нуль и Oc концов исходного стержня FC ¹⁾. Затем, чтобы получить точку b , построим перемещение узла B по отношению к F и перемещение узла B по отношению к C и проведем перпендикуляры до пересечения; далее, чтобы получить точку a , построим перемещение узла A по отношению к B и перемещение узла A по отношению к F и проведем перпендикуляры до пересечения. Такое же построение сделаем и для правой половины фермы. Тогда относительные перемещения узлов A и E будут Oa и Oe . Если построить их на чертеже фермы²⁾, то узлы A_1 и E_1 окажутся приподнятыми над опорной плоскостью и притом на одинаковую высоту. В действительности узел A принадлежит неподвижной опоре и потому не может переместиться, а узел E всегда остается на горизонтальной плоскости. Чтобы поместить деформированную ферму в действительное положение, надо сообщить ей, как твердому телу, поступательное движение A_1A . Это добавочное поступательное движение для всех узлов фермы выразится одним вектором aO , и потому для определения результирующих перемещений необходимо к каждому из относительных перемещений геометрически прибавить перемещение aO . Геометрическая сумма, как и в первом примере, получится в виде вектора, идущего из точки a до соответствующей точки относительной диаграммы, ибо поступательные перемещения для всех точек идут от a к полюсу, а относительные выходят из полюса.

4. Третий пример. Построим диаграмму Виллио для фермы ж.-д. моста пролетом 33,6 м. (фиг. 33). В таблице следующей страницы помещены

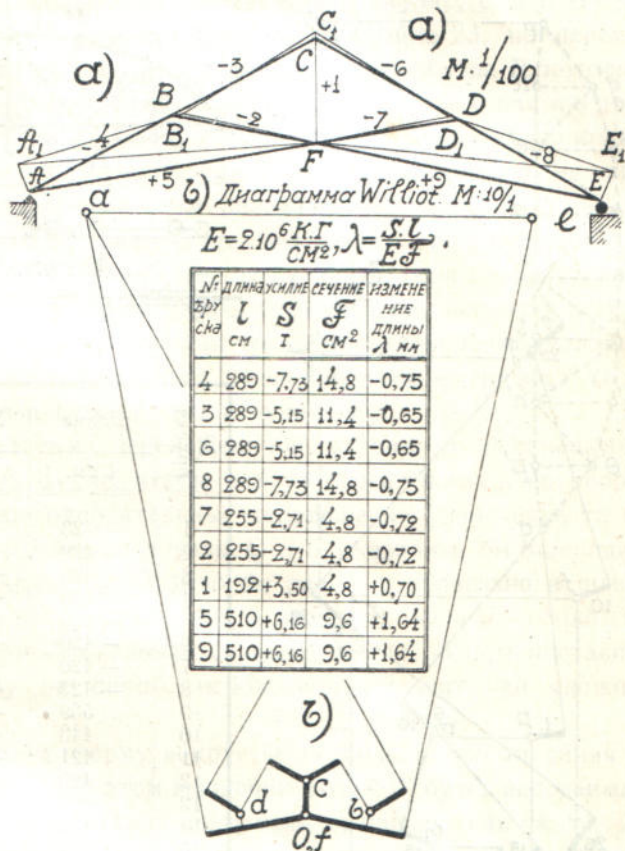
¹⁾ На чертеже перемещения увеличены в 10 раз, но клише сделано в $\frac{3}{4}$ нат. вел. оригинального чертежа.

²⁾ Перемещения на чертеже фермы произвольно увеличены.

длины стержней в см., площади F их поперечного сечения (brutto) в см.² и усилия S в тоннах от поезда, находящегося в положении, соответствующем наибольшему изгибающему моменту для середины пролета. Изменения длины λ всех стержней, вызванные усилиями S и рассчитанные по формуле (67) в мм., вписаны в таблицу. При построении диаграммы, значения λ откладываются в 10 раз больше их действительной величины¹⁾. Коэффициент упругости $E = 2150000$ кг./см.².

Прежде всего (на фигуре b) строим диаграмму относительных перемещений узлов фермы, выбирая исходный стержень 22 около середины пролета, чтобы получилась компактная диаграмма²⁾. Нижний конец A раскоса принимаем неподвижным; перемещение его равно нулю, поэтому на диаграмме точка a совпадает с полюсом O . Под действием поезда, раскос 22 удлинится, благодаря чему узел K переместится вверх-влево; поэтому на диаграмме чертим от полюса O вектор Ok , равный, параллельный и идущий в одну сторону с перемещением конца K раскоса 22, причем получаем точку k , соответствующую узлу K .

Затем переходим к узлу L , положение которого обуславливается стержнями 4 и 21. В виду того, что узел L принадлежит растянутому поясу 4, он перемещается влево от A , поэтому чертим вектор 4, идущий влево от $a(O)$. С другой стороны, узел L , как принадлежащий растянутой

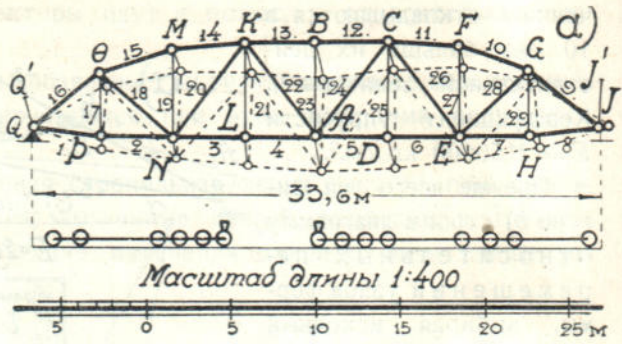
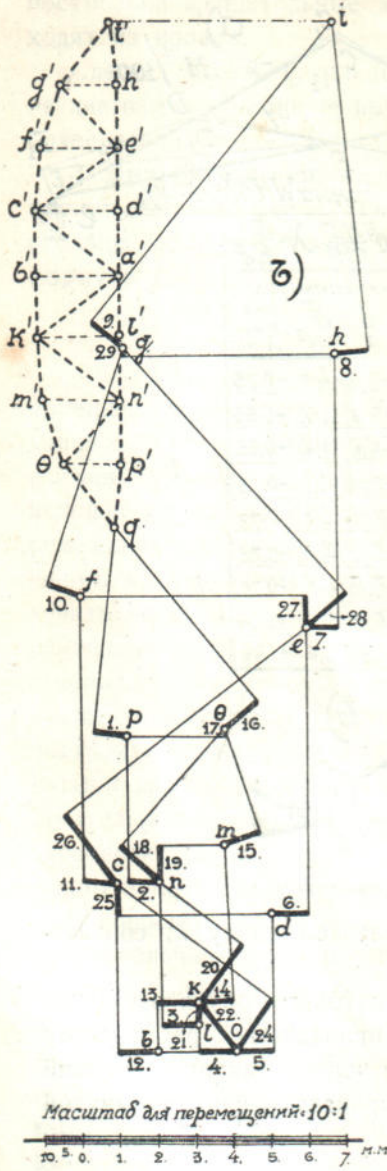


Фиг. 32.

1) Клише составляет 1/2 оригинального чертежа.

2) Длины перпендикуляров быстро возрастают при переходе к узлам, удаленным от исходного стержня; в этом можно убедиться из фиг. 31 и 32. Поэтому, при большом числе стержней диаграмма занимает много места и вычерчивается не точно. Считая исходным один из средних стержней фермы, мы получаем построение, свободное от этих недостатков. При симметричных фермах и симметричных нагрузках еще лучше брать средний стержень, вокруг которого симметрично располагалась бы диаграмма, как на фиг. 32.

стойке 21, переместится вниз от имеющейся на диаграмме точки *k*; поэтому чертим вектор 21 вниз от *k*. Проводим перпендикуляры из концов жирных отрезков 4 и 21 до взаимного пересечения. Получаем точку *l*, соответствующую узлу *L*; луч *Ol* представляет результирующее перемещение узла *L*. Луч на диаграмме не показан.



Фиг. 33.

№ бруска	Длина	Усилие	Сечение	Изменение длины
	<i>l</i> см.	<i>S</i> т.	<i>F</i> см. ²	$\lambda = SI : EF$
1	- 423	+ 65,2	140,36	0,912
2	- 420	+ 64,7	146,36	0,862
3	- 420	+ 99,1	200,66	0,962
4	- 420	+ 99,1	200,66	0,962
5	- 420	+ 99,1	200,66	0,965
6	- 420	+ 99,1	200,66	0,965
7	- 420	+ 61,9	146,36	0,826
8	- 423	+ 62,5	140,36	0,879
9	539	- 78,3	180,48	1,087
10	443	- 84,8	184,48	0,949
11	421	- 80,6	184,48	0,857
12	420	- 106,8	190,48	1,097
13	420	- 106,8	190,48	1,097
14	421	- 85,3	184,48	0,906
15	443	- 89,6	184,48	1,000
16	539	- 81,6	180,48	1,135
17	385	+ 4,96	56,44	0,157
18	570	+ 29,5	54,80	1,428
19	525	+ 22,7	56,44	0,985
20	693	- 23,2	38,94	1,924
21	550	+ 13,3	56,44	0,606
22	693	+ 12,6	24,92	1,642
23	550	0	56,44	0
24	693	+ 12,7	24,92	1,658
25	550	+ 18,1	56,44	0,823
26	693	- 27,8	38,94	2,306
27	525	+ 21,5	56,47	0,933
28	570	+ 29,9	54,80	1,446
29	385	+ 7,62	56,44	0,241

Переходим к узлу *N*. Придерживаясь тех же рассуждений, от точки *l* чертим вектор 3 и от точки *k*—вектор 20; в концах векторов восстанавливаем перпендикуляры до взаимного пересечения в точке *n*. Тогда перемещение узла *N* выразится лучом *On*. Таким же образом получают на диаграмме точки *m*, *θ*, *p* и *q*, соответствующие узлам *M*, *Θ*, *P* и *Q*.

Продолжая построение диаграммы для правой половины фермы, следует исходить из тех же узлов A и K и рассматривать по отношению к ним узел B . С одной стороны узел B , как принадлежащий сжатому поясу 13, переместится влево (при неподвижном узле K); поэтому вектор 13, соответствующий перемещению узла B , надо чертить влево от имеющейся на диаграмме точки k и восставить к нему перпендикуляр; с другой стороны узел B , как принадлежащий ненапряженной стойке 23, не перемещается (при неподвижном A), так что второй вектор для узла B , который должен быть начерчен от точки a (O), равен нулю. Восставляя, как и в предыдущих случаях, в конце вектора, т. е. через $a(O)$, перпендикуляр к вращающемуся стержню AB , получаем точку b , соответствующую окончательному положению узла B ; при этом перемещение узла B выражается лучом Ob , не показанным на диаграмме. Построение перемещений для последующих узлов правой половины фермы не представляет затруднений. Точки диаграммы, соответствующие узлам, отмечены на диаграмме кружками и обозначены малыми буквами, так что, относительное перемещение всякого узла, например J , выражается лучом, идущим из полюса O до точки i ; перемещение узла Q выражается лучом Oq .

Покончив с относительными перемещениями строим те перемещения, которые необходимо дать ферме, чтобы она установилась на опоры. Если бы полученные выше относительные перемещения узлов нанести на чертеж фермы (фиг. a), то опорные узлы Q и J оказались бы приподнятыми с опор: поднятие QQ' узла Q было бы равно, параллельно и шло в одну сторону с лучом $Oq = 14,3$ мм., а поднятие узла J — было бы $JJ' = Oi = 27,4$ мм. Узел J' оказывается выше, чем Q' . Чтобы поставить деформированную ферму на опоры, необходимо сообщить ей сложное движение.

Прежде всего повернем ферму вокруг Q' настолько, чтобы линия ее опор была горизонтальна. При этом вращении точка Q' будет неподвижна; примем ее за полюс для построения диаграммы вращения, как на фиг. 29, именно, на диаграмме, точку q будем считать полюсом для вращательных перемещений. Очевидно, что для горизонтальности фермы надо поворачивать ее до тех пор, пока конец J' опустится на разность высот точек J' и Q' . Этим определяется вращательное перемещение для узла J : во-первых, перемещение это должно быть перпендикулярно к линии QJ вращающейся фермы, т. е. должно быть вертикально; во-вторых, оно должно быть равно разности высот точек J' и Q' и, в-третьих, должно идти вниз, в полюс вращения q (фиг. b). Если через полюс q проведем вертикальную прямую и возьмем отрезок ее до горизонтали, проходящей через точку i , то мы удовлетворим всем этим условиям. Итак, вращательное перемещение точки J должно быть $i'q$.

Но если вращательные перемещения двух точек фермы известны, то на них может быть построена картина вращения для всей фермы, а именно, подобная фигура и перпендикулярно расположенная. Построим эту картину по точкам q и i' , как сделано пунктиром $qp'... g'h'i'$. По известному

свойству картины, вектор, идущий от точки картины в полюс, дает вращательное перемещение этой точки, так что нам теперь известно, какие надо дать перемещения всем узлам фермы, чтобы повернуть ее в горизонтальное положение: эти перемещения идут от узла картины до полюса q .

Теперь надо ферму, находящуюся на уровне Q' , опустить на плоскость опор параллельно самой себе и притом так, чтобы узел Q' попал в положение неподвижной опоры Q ; надо ферме дать поступательное движение qO обратное тому, которое получил узел неподвижной опоры Q при первоначальном относительном движении,—опора поднялась на Oq , надо ее опустить на qO . При поступательном движении все узлы фермы проходят одинаковые и параллельные пути; следовательно, qO выражает поступательное перемещение одновременно для всех узлов фермы.

Таким образом, отрезки, идущие из узлов картины вращения в полюс q суть вращательные перемещения узлов, отрезок qO —это поступательные перемещения узлов, а лучи, идущие из полюса O к точкам относительной диаграммы—это относительные перемещения узлов. Три рода составляющих перемещения отложены здесь последовательно одна за другой, по течению. Очевидно, отрезок, противоположный замыкающей, составляет результирующее перемещение узла. Этот отрезок идет от узла картины со знаком «прим» к точке относительной диаграммы того же наименования, но без знака. Например, для узла A : 1) вращательное перемещение равно $a'q$, 2) поступательное перемещение равно qO , 3) относительное перемещение есть Oa , равное нулю, 4) замыкающий вектор— Oa' ; следовательно, действительное перемещение, узла A будет $a'O$. Измеренное в масштабе диаграммы ¹⁾, оно оказывается 20,8 мм. Действительное перемещение узла D есть $d'd$, равное 19 мм.

Вообще, если относительная диаграмма так построена, что ни один из опорных узлов не совпадает с соответствующей ему опорой и опорные узлы находятся от линии опор на разных расстояниях, то надо узел неподвижной опоры принять за полюс, провести из него отрезок, перпендикулярный к линии опор фермы и равный разности высот этих опор ²⁾. На этом отрезке надо построить картину вращения. Расстояние от узла картины до соответствующей точки относительной диаграммы дает действительное перемещение узла.

5. Практические указания. Первые разобранные примеры можно рассматривать, как частные случаи одного общего случая, изложенного в 3 примере. Фиг. 31—это частный случай, когда поступательный вектор между узлом неподвижной опоры и полюсом O равен нулю, а фиг. 32—

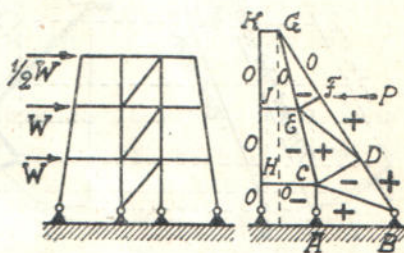
¹⁾ См. фиг. 33-*b* внизу.

²⁾ Если плоскость подвижной опоры не идет по линии опор, то длина вращательного отрезка определяется иным разложением, а именно: через q проводят перпендикуляр к линии опор, а через i —линию, параллельную к плоскости скольжения (катания) подвижной опоры. Пересечение даст необходимую точку i' .

случай, когда картина вращения равна нулю и сосредоточена (исчезает) в точке a .

Выбор исходного стержня для построения диаграммы Виллио в нашем распоряжении, и мы можем начать построение с такого стержня, при котором оно получается особенно точным и простым. Второй пример фиг. 32. представляет лучшее решение. При симметричных фермах и симметричной нагрузке решение еще упрощается, так как возможно ограничиться половиною диаграммы; несимметричные фермы, хотя и дают картину вращения, но построение получается более компактное, чем в том случае, когда исходят из крайнего стержня. От компактности же диаграммы Виллио зависит точность построения. Это видно из того, что пересечения перпендикуляров к жирным отрезкам обыкновенно получаются под острым углом и с каждым новым узлом фермы значительно удаляются от полюса. Во всяком случае лучший исходный стержень—это один из ее средних стержней.

Чтобы получить наглядное представление о деформации, на чертеже фермы изображаются узлы в их перемещенном состоянии: берут отрезки из диаграммы и откладывают их от соответствующих узлов фермы, соблюдая направление, величину и течение. Обыкновенно перемещения откладывают в натуральную величину, так что деформация фермы, начерченной в $1/N$ натуре, получается в искажении N . На фиг. 33-а перемещения начерчены сплошными тонкими линиями, а деформированная ферма показана штрих пунктирными линиями.



Фиг. 34.

Фиг. 35.

6. Задачи ¹⁾. а) Ледорез фиг. 35. Определить горизонтальное перемещение вершины K при ударе льдины P .

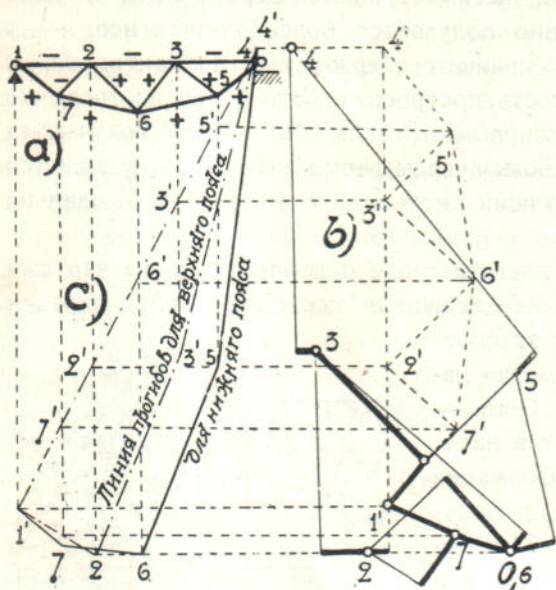
Указания: усилия, определенные построением взаимной диаграммы, считать известными; знаки усилий показаны на соответствующих стержнях фигуры. Диаграмму Виллио начинают с опор A и B , совмещая с полюсом O их нулевые перемещения; затем от O откладывают вниз—сжатие стержня CA , и влево-вверх—растяжение стержня BC . Диаграмма представит частный случай фиг. 30-д, в которой Oa_1 и Oc_1 —нули. Дальнейшее построение в алфавитном порядке узлов не представляет затруднений.

б) Многоярусная мостовая опора фиг. 34. Определить амплитуду горизонтальных перемещений вершины при перемене направления ветра на противоположное.

7. Приложение диаграммы Williot к построению эпюры прогибов. Когда диаграмма Виллио построена, без затруднений определяются прогибы всех узлов фермы; надо только от перемещения каждого узла взять вертикальную составляющую, или иначе: точки картины и одноименные

¹⁾ Заимствованы из наших Этюдов по Графической статике 1910 г.

точки относительной диаграммы надо спроектировать на вертикальную ось. Пользуясь прогибами узлов, легко получить эпюру прогибов какого-либо пояса фермы, т. е. такую линию, ординаты которой представляют прогибы узлов пояса. Очевидно, надо проектировать точки картины и одноименные точки относительной диаграммы на вертикали, проходящие через соответствующие узлы фермы. Если проекции отложить в виде ординат от одной оси и соединить концы ординат прямыми отрезками, то получим эпюру прогибов.



Фиг. 36.

Так прогиб узла 6 фиг. 36 получим, взявши вертикальную проекцию 6'6' фиг. *b* и отнеся ее под узел 6; под узлом 7 фиг. *a* откладываем вертикальный отрезок 7'7', равный вертикальной проекции перемещения 7'7' фиг. *b* и т. д. Легко убедиться, что ординаты прогибов 7'7', 6'6', 5'5' сами собой откладываются от одной оси, если на опорные вертикали фермы спроектировать те точки картины вращения, которые соответствуют опорам, а именно, если на первую и последнюю вертикаль фиг. *a* спроектировать точки 1' и 4' фиг. *b* и соединить 1' и 4' фиг. *c* прямой линией. Для этого надо обратить внимание на то, что картина вращения подобна и перпендикулярна ферме; поэтому линия 1'4' фиг. *c* разобьется узловыми вертикалями фермы *a* в том же отношении, в каком ее делят узловые горизонталы картины *b*; следовательно, точки 1', 7', 2', 6'... фиг. *c* лежат на одной прямой. Отсюда правило: Для построения эпюры прогибов надо опорные узлы картины вращения спроектировать на опорные вертикали фермы, затем узлы относительной диаграммы спроектировать на вертикали соответствующих узлов фермы; наконец, надо соединить прямыми проекции узлов в той последовательности, в какой они встречаются в поясе, для которого разыскивается эпюра прогибов.

На фиг. *c* пунктиром построена эпюра прогибов для верхнего пояса и сплошной линией—эпюра нижнего пояса. Предварительно, на фиг. *b* построена диаграмма перемещений по отношению к стержню 67, затем картина вращения 1', 6', 4'.

§ 6. Диаграмма для сложной фермы. При построении диаграммы Виллио будем различать две категории сложных ферм: 1) такие сочлене-

ниями. Если проекции отложить в виде ординат от одной оси и соединить концы ординат прямыми отрезками, то получим эпюру прогибов. Так прогиб узла 6 фиг. 36 получим, взявши вертикальную проекцию 6'6' фиг. *b* и отнеся ее под узел 6; под узлом 7 фиг. *a* откладываем вертикальный отрезок 7'7', равный вертикальной проекции перемещения 7'7' фиг. *b* и т. д. Легко убедиться, что ординаты прогибов 7'7', 6'6', 5'5' сами собой откладываются от одной оси, если на опорные вертикали фермы спроектировать те точки картины вращения, которые соответствуют опорам, а именно, если на первую и последнюю вертикаль фиг. *a* спроектировать точки 1' и 4' фиг. *b* и

ния, которые оказываются неизменяемыми, даже не будучи прикрепленными к земле, т. е. в условиях свободной системы, и 2) изменяемые цепи, которые превращаются в ферму лишь при скреплении с землей посредством опорных стержней. Для простоты, первую категорию назовем свободными фермами, а вторую — несвободными.

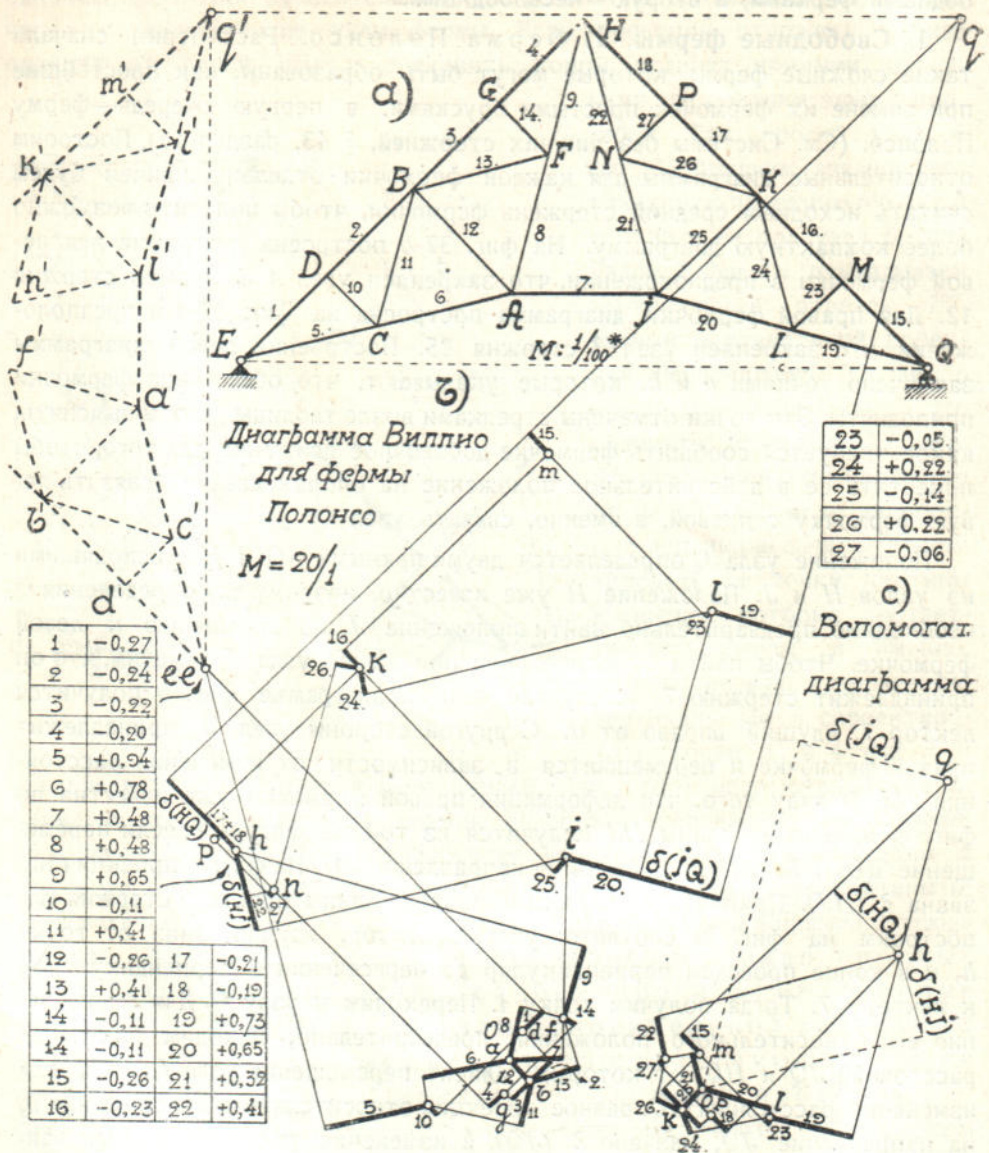
1. Свободные фермы. а) Ферма Полонсо. Рассмотрим сначала такие сложные фермы, которые могут быть образованы, как простейшие при замене их фермочек простыми брусками, в первую очередь — ферму Полонсо. (См. Системы без лишних стержней, § 43, раздел 1а). Построим относительные диаграммы для каждой фермочки отдельно, причем будем считать исходным средний стержень фермочки, чтобы получить возможно более компактную диаграмму. На фиг. 37-*b* построена диаграмма для левой фермочки в предположении, что закреплен узел *A* исходного стержня 12. Для правой фермочки диаграмма построена на фиг. 37-*c* в предположении, что закреплен узел *J* стержня 25. Построение левой диаграммы закончено точками *e* и *h*, которые указывают, что оба конца фермочки приподняты. Эти точки отмечены стрелками возле таблицы. Чтобы выяснить, какое требуется сообщить фермочке добавочное движение для того, чтобы поместить ее в действительное положение на опорах, следует связать левую фермочку с правой, а именно, связать узел *Q*.

Положение узла *Q* определяется двумя прямыми *JQ* и *HQ*, исходящими из узлов *H* и *J*. Положение *H* уже известно, поэтому для определения *Q* необходимо предварительно найти положение *J* по отношению к левой фермочке. Чтобы найти относительное положение узла *J* заметим, что он принадлежит стержню 7, вследствие чего на диаграмме фиг. *b* получится вектор 7, идущий вправо от *a*. С другой стороны узел *J* принадлежит правой фермочке и перемещается в зависимости от изменения расстояния *HJ*. В виду того, что деформация правой фермочки уже известна по фиг. *c*, изменение длины *HJ* получится из той же фигуры *c*, если перемещение *i(O)* и *h*; спроектировать на направление *JH*. На фиг. *c* проекция названа $\delta(HJ)$. Принимая $\delta(HJ)$ как изменение длины простого стержня *HJ*, построим на фиг. *b* соответствующий вектор, идущий вниз от точки *h*, и в конце проведем перпендикуляр до пересечения с перпендикуляром к вектору 7. Тогда получим точку *i*. Переходим к узлу *Q*. Для определения его относительного положения, предварительно, находим изменение расстояний *JQ* и *HQ*, от которых зависит перемещение узла *Q*: на фиг. *c* изменение расстояния *JQ*, равное проекции относительного перемещения *iq* на направление *JQ*, названо $\delta(JQ)$, а изменение расстояния *HQ*, равное проекции перемещения *hq* на направление *HQ*, названо $\delta(HQ)$. Затем, строим изменения длины на диаграмме *b* и находим *q*.

Когда получены относительные перемещения главных шарниров сложной фермы, вопрос об установке ее на опоры решается, как на фиг. 33, путем проведения через *q* фигуры *b* линии, параллельной к плоскости катания подвижной опоры, до пересечения *q'* с вращательным перемещением

eq' , перпендикулярным к линии опор EQ , и путем вычерчивания картины вращения $e'b'n'k'q'ia'1)$.

Чтобы получить действительные перемещения правой фермочки, следует от того же полюса O фиг. b) построить только относительные ее

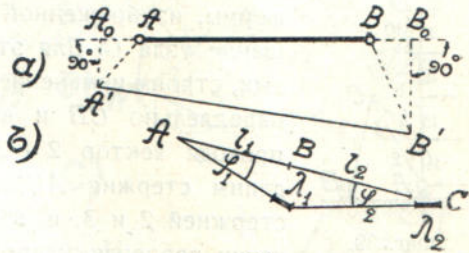
Фиг. 37²⁾.

перемещения, ибо вращательные перемещения уже получены построением картины. На фиг. b правые относительные перемещения построены в порядке узлов $KNPLM$.

1) Вершина N' картины вращения, соответствующая коньку фермы H , вышла из рамок чертежа.

2) Клише изготовлено в $\frac{3}{4}$ натуральной величины оригинала.

б) Упрощение. Для фермы Полонсо фиг. 37-а и вообще для фермочек с прямыми поясами проекция изменения длины пояса на направление пояса равна сумме удлинений отдельных его стержней, напр.: $\delta(HJ)$ фиг. е) равно сумме удлинений 21 и 22, $\delta(HQ)$ равно сумме укорочений 15 + 16 + 17 + 18 и т. п. Это следует из фиг. с и дает возможность до конца построить диаграмму Виллио, не прибегая к вспомогательной диаграмме. Для этого после определения точек *a* и *h*, на фиг. б следует искать точку *i*, считая, что узел *J* прикреплен, во-первых, стержнем 7 с удлинением 0,48 и, во-вторых, стержнем *HJ* с удлинением 0,41 + 0,32; затем, искать точку *q* считая, что узел *Q* прикреплен стержнем *JQ* с удлинением 0,65 + 0,73 и стержнем *HQ* с укорочением 0,19 + 0,21 + 0,23 + 0,26; далее, следует построить картину вращения для сложной фермы и относительные перемещения для правой фермочки.



Фиг. 38.

Упрощение построения для фермы Полонсо, состоящей из фермочек с прямолинейными поясами, основано на том, что взаимное перемещение концов каждой фермочки равно алгебраической сумме изменений длины отдельных стержней пояса. Это положение вытекает из рассмотрения вспомогательной диаграммы фиг. 37-с, но может быть доказано и в общем виде для всех сложных ферм, состоящих из фермочек с прямолинейными поясами. Докажем, что разница между длиной прямой линии, соединяющей концы деформированной фермочки и ломанной линией, образованной вследствие перемещения промежуточных узлов, есть малая величина по сравнению с изменением длины отдельных стержней. Если изменения длины стержней на фиг. 38-б) обозначить λ_1 и λ_2 , то общее изменение длины пояса фермочки из двух стержней будет

$$\delta = \lambda_1 + \lambda_2 \dots \dots \dots (68),$$

в том случае, если считать, что стержни расположены на одной прямой. Если же принять во внимание, что при деформации промежуточный узел уходит в сторону от направления *AC*, то изменение расстояния *AC* выразится $\delta_1 = (l_1 + \lambda_1) \cos \varphi_1 + (l_2 + \lambda_2) \cos \varphi_2 - l_1 - l_2 = l_1(-1 + \cos \varphi_1) + l_2(-1 + \cos \varphi_2) + \lambda_1 \cos \varphi_1 + \lambda_2 \cos \varphi_2$, или, после разложения \cos в ряд:

$$\delta_1 = l_1 \left(-1 + 1 - \frac{\varphi_1^2}{2!} + \frac{\varphi_1^4}{4!} \dots \right) + l_2 \left(-1 + 1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} \dots \right) + \lambda_1 \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2!} + \frac{\varphi_1^4}{4!} \dots \right) + \lambda_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2!} + \frac{\varphi_2^4}{4!} \dots \right).$$

Отбрасывая, при малом φ , квадраты и высшие степени, находим выражение

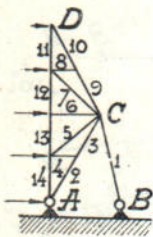
$$\delta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \dots \dots \dots (69),$$

которое не отличается от (68). Следовательно, нет разницы¹⁾, будем ли мы считать изменение длины вдоль стержня AC или вдоль ломанной $A_1 C$. В частном случае, когда рассматривается один стержень, изменение его длины δ можно считать равным проекции удлинения λ , например, если стержень AB фиг. 38-а, переместится при деформации в положение $A'B'$, то

$$\delta = A_0 A + BB_0 \dots \dots \dots (70),$$

т. е. удлинение стержня равно сумме проекций перемещений его концов.

Исходя из этого общего положения, можно значительно упростить нахождение перемещения для главных узлов сложной фермы или перемещения концов простых ферм с прямолинейными поясами.

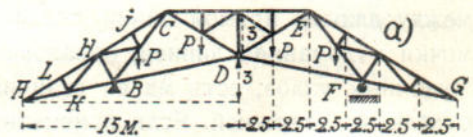


Фиг. 39.

с) Примеры. 1) Для определения перемещения конца D фермы, изображенной на фиг. 39, находим сначала перемещение узла C . Для этого в диаграмме от полюса O , во-первых, строим изменение длины стержня BC , проводя вектор 1 параллельно CB и восставляя перпендикуляр; во-вторых, проводя вектор $2 + 3$ параллельно AC , строим изменение длины стержня AC , равное сумме изменений длины двух стержней 2 и 3, и восставляем перпендикуляр. В пересечении перпендикуляров получается точка c . Затем строим,

во-первых, вектор, параллельный CD , равный сумме изменений длины стержней 10 и 9, во-вторых,—вектор, параллельный AD и равный сумме изменений длины стержней 11, 12, 13 и 14. Получается точка d . Таким образом, перемещение конца D выражается лучом Od .

2) Для нахождения относительных перемещений сложной фермы, представленной на фиг. 40, сначала вычерчивается относительная диаграмма для левой фермочки, как сделано на фиг. 37— b), затем определяется перемещение узла D , для чего пользуются изменениями длины DB и CD ; далее определяется перемещение узла E , для чего пользуются изменениями длины DE и CE , наконец, определяется перемещение узлов F и G .



Фиг. 40.

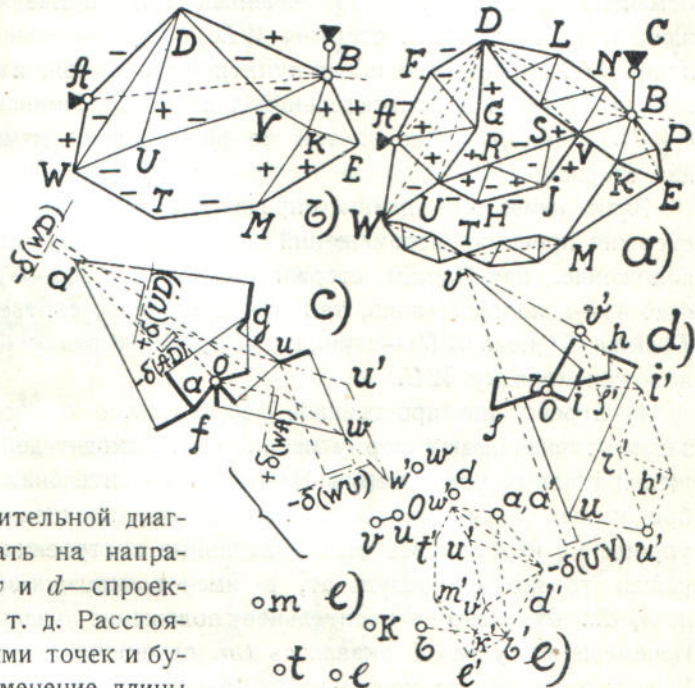
д) Общий случай сложных ферм. Сложную ферму можно привести к простой, заменяя ее фермочки простыми брусками. Тогда задача приведет к построению диаграммы для простой фермы. Особенно удобно построение для фермы простейшей, составленной путем последовательного прикрепления шарниров (§ 5); поэтому будем стремиться сложную ферму привести к простейшей. На фиг. 41 показан пример такого приведения. Сложная ферма фиг. a) заменена простейшею фиг. b). При этом сохранены условия опор A и B основной фермы, неразрезные фермочки WD

¹⁾ Точнее,—разница представляет малую величину второго порядка, которую пренебрегают в кругу малых величин первого порядка.

и DE оставлены неразрезными, но сделаны более простыми, состоящими из стержней, соединяющих одни только узлы опор фермочки (главные узлы); разрезные фермочки заменены стержнями. Чтобы построить диаграмму Williot для такой простейшей фермы (фиг. b), надо знать только удлинения ее стержней. Мы их получим, рассматривая отдельно фермочки, входящие в состав сложной фермы фиг. a). Для каждой из фермочек отдельно может быть построена относительная диаграмма, и из этой диаграммы может быть получено взаимное перемещение тех узлов фермочки,

которые соединены пунктиром на фиг. a . Например, для фермочки WD , путем построения относительной диаграммы, найдется взаимное сближение узлов A и D , W и D , W и U и взаимное удаление узлов W и A , U и D . На основании (70), эти изменения длины получатся, если точки a и d относительной диаграммы спроектировать на направление AD , точки w и d — спроектировать на WD и т. д. Расстояние между проекциями точек и будет необходимое изменение длины AD , WD и т. д. По этим изменениям длины построим диаграмму для фиг. b и найдем, без затруднения, действительные перемещения ее шарниров $A, D, B, E...$ Но это будут лишь главные шарниры данной сложной фермы фиг. a . Чтобы получить перемещения остальных шарниров, заметим, что истинные перемещения двух главных шарниров какой-нибудь фермочки, отложенные от соответствующих относительных перемещений, определяют положение картины вращения этой фермочки. Когда же картина вращения получена на диаграмме относительных перемещений, то вопрос решен для всех промежуточных точек: истинное перемещение равно расстоянию от точки картины до точки относительной диаграммы.

На этом основан следующий общий порядок решения задачи о сложных фермах. 1) Сложную ферму заменяют простейшею из стержней, соединяющих главные узлы сложной фермы. 2) Для каждой фермочки WD, DE, UV, WT и TM строят относительную диаграмму; на фиг. c построена такая диаграмма для фермочки



Фиг. 41.

На этом основан следующий общий порядок решения задачи о сложных фермах. 1) Сложную ферму заменяют простейшею из стержней, соединяющих главные узлы сложной фермы. 2) Для каждой фермочки WD, DE, UV, WT и TM строят относительную диаграмму; на фиг. c построена такая диаграмма для фермочки

WD в предположении неподвижности точки A и направления AF ; на фиг. d изображена диаграмма для UV при неподвижной точке R и фиксированном направлении RS .

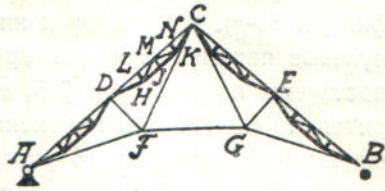
3) Определяют изменения длины стержней простейшей фермы, заменяющей данную сложную ферму: они получаются из диаграмм пункта 2). Так, чтобы получить изменение длины стержня WU , проектируем точки w и u фиг. c на направление WU . Для удобства, внизу на фиг. c , проведена штрихпунктирная короткая прямая направления WU и на ней отмечена проекция uw , обозначенная $\delta(WU)$. Вверху на фиг. c изображено изменение длины стержня WD : предварительно проведено направление WD , отмеченное штрихпунктирной прямой, и на него спроектированы точки w и d относительной диаграммы. Изменение длины обозначено $\delta(WD)$. Немного ниже на той же фигуре дано изменение длины $\delta(UD)$ для стержня UD .

Знак изменения длины определяется из того, что при удлинении стержня проекции перемещений его концов имеют такое же относительное положение, как концы стержня (см. фиг. 38— a). Например: $\delta(UD)$ фиг. 41— c положительно, так как d выше u , соответственно фиг. a), где D выше U ; но $\delta(WU)$ —отрицательно, ибо порядок букв u и w противоположен порядку WU .

4) Строят для простейшей фермы фиг. b относительную диаграмму, затем устанавливают ферму на опоры и находят действительные перемещения главных узлов фермы. На фиг. e относительная диаграмма построена при условии неподвижности узла U и направления стержня UV . Для упрощения чертежа все вспомогательные построения не показаны; изображен только их результат, а именно, кружками и малыми буквами $a, b, d...$ отмечено относительное положение узлов фермы $A, B, D...$ Перемещение узла A оказалось Oa , перемещение узла B оказалось Ob . В виду этого ферма повернута вокруг неподвижной опоры A , т. е. вокруг точки a фиг. e , до положения, параллельного линии опор AB . Для определения вращательного перемещения узла B , через a проведен перпендикуляр к линии опор AB , а через b проведена прямая, параллельная линии скольжения подвижной опоры B . Получена точка b' , определяющая искомое вращательное перемещение $a'b'$. На нем построена картина вращения $a'd'b'e'm't'w'$. Действительные перемещения узлов фермы определяются векторами, идущими от точки картины до точки относительной диаграммы. Например, действительное перемещение узла U будет $u'u$, для узла V находим перемещение $v'v$, для узла W —имеем $w'w$.

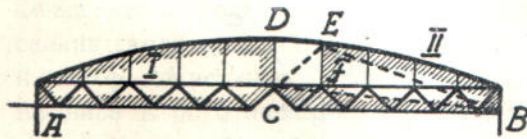
5) Наносят на относительные диаграммы отдельных фермочек действительные перемещения их опорных узлов, взятые из фиг. e). На фиг. d это сделано для узлов U и V фермочки UV : у точек u и v пристроены отрезки $u'u$ и $v'v$, взятые из диаграммы e) с соблюдением направления величины и течения. Таким образом получились на относительной диаграмме d точки u' и v' картины вращения для фермочки UV . По этим двум точкам может быть построена вся картина вращения. В виду этого:

б) по точкам со знаком „прим“ концов действительных перемещений, нанесенных на относительную диаграмму, строят картину вращения для соответствующей фермочки; на фиг. *d* пунктиром построена картина для фермочки *UV*. Действительные перемещения узлов каждой фермочки находят на отдельных диаграммах, как отрезки, идущие от точек картины до точек относительной диаграммы; так, на фиг. *d* действительное перемещение узла *R* выражают отрезком *r'r*, для узла *S* берут отрезок *s's* и т. д.



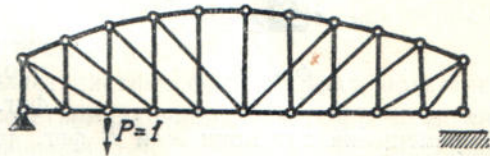
Фиг. 42.

Предлагаем читателю построить на фиг. *c* картину вращения для фермочки *WD* и найти действительные перемещения ее узлов. Для построения картины здесь уже нанесены действительные перемещения двух точек, *U* и *W*, как показывают штрихпунктирные линии справа-внизу фигуры, но мы рекомендуем строить картину по точкам *w'* и *d'*.



Фиг. 43.

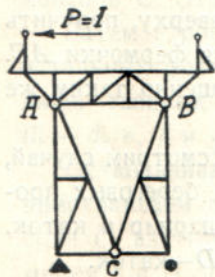
е) Примеры: 1) Сложная ферма Полонсо (фиг. 42). Сначала строим диаграмму Виллио для простейшей фермы *ADCEBGF*, пользуясь для стержней *AD*, *DC* укорочением, равным сумме укорочений четырех панелей верхнего пояса *DL*, *LM*, *MN* и *NC*. Устанавливаем ферму на опоры и определяем истинные перемещения главных шарниров. Затем строим детальные диаграммы для отдельных фермочек *DA*, *DC* и т. д. и наносим сюда истинные перемещения конечных узлов из главной диаграммы. Наконец, на детальных диаграммах строим картины вращения фермочек.



Фиг. 44.

2) Мостовая ферма с арочным третьим поясом (фиг. 43) может быть образована из двух простейших фермочек: I — *ACD* и II — *CFEBC*, соединенных шарниром *C* и стержнем *DE*.

Сначала строим детальные диаграммы для фермочек I и II и из них определяем изменение расстояний между главными узлами: *CE*, *CB* и *EB*. После этого на диаграмме 1 простейшим образом определяем положение *e* шарнира *E*, далее — положение *b* шарнира *B*. Затем устанавливаем ферму на опоры *A* и *B* и определяем таким путем истинные перемещения всех шарниров фермочки I и главных шарниров II. Наконец, истинные перемещения шарниров *E* и *B* переносим на диаграмму II, чтобы построить там картину вращения для узлов правой фермочки.



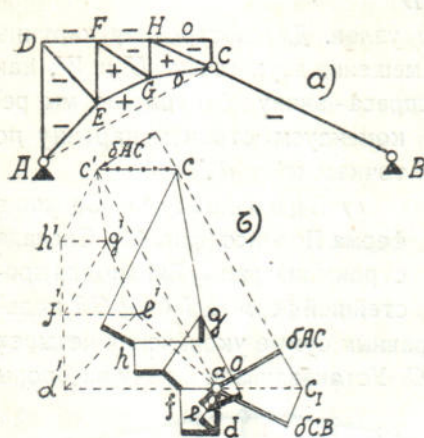
Фиг. 45.

f) Задачи. 1) Построить диаграмму Виллио для фермы, изображенной на фиг. 44.

2) Построить диаграмму Виллио для поперечной рамы моста фиг. 45, принимая во внимание, что в A , B и C шарниры.

2. Несвободные фермы. Рассмотрим сначала несколько примеров. Начнем с трехшарнирной арки.

а) Трехшарнирная арка, по существу, представляет систему фигуры 30-с), у которой данные перемещения начальных узлов A и C суть нулевые перемещения пят арки. Поэтому диаграмма Виллио может быть построена по правилам § 5, если каким-нибудь образом удастся предварительно определить изменение длины каждой полуарки. Применим к трехшарнирной арке фиг. 46 указания предыдущего раздела о сложных фермах, и, предварительным построением диаграммы для фермочки ADC опре-

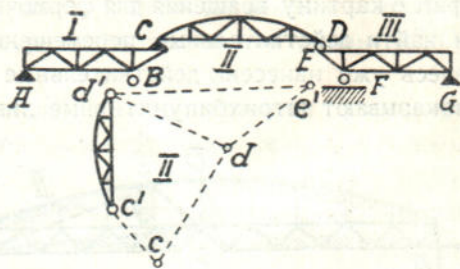


Фиг. 46.

деления перемещения пят арки A и B фиг. 46, как нулевые векторы, совмещаем с полюсом O , и вместо λ_1 и λ_2 принимаем $\delta(AC)$ и $\delta(CB)$. Проводя на диаграмме перпендикуляры к концам δAC и δCB , мы получим истинное положение c_1 ключевого шарнира C и, следовательно,—истинное его перемещение Oc_1 . Остается пристроить его к соответствующей точке относительной диаграммы фермочки AC , как сделано на фиг b сверху, получить точку e' и на e' и $a(O)$ построить картину вращения для фермочки AC . На фиг. b картина вращения показана пунктиром. Совершенно таким же образом строится диаграмма для правой фермочки.

б) Консольно-подвесная система ферм. Рассмотрим случай, когда подвесная ферма укладывается на концы консолей береговых пролетов, как на обычные жесткие опоры: неподвижный шарнир и каток. Такой случай представлен на фиг. 47, где C —шарнир и D —каток.

Для каждого из береговых пролетов I и III без затруднения строится диаграмма Виллио. Положим, что после дополнительных движений для установки ферм I и III на опоры, истинные перемещения шарниров C и E определяются векторами $c'e$ и $e'd$, взятыми из диаграмм I и III, на фиг. 47 не показанных. Положим, кроме того, что диаграмма относительных переме-



Фиг. 47.

делим относительное перемещение узлов A и C . Проектируя по предыдущему точки a и c диаграммы на направление AC , получим удлинение полуарки AC ; обозначим его $\delta(AC)$. Теперь строим фиг. 30 — d , с той лишь разницей, что

щений для фермочки II, построенная при некотором полюсе O , также не показанном на чертеже, дает для опорного шарнира фермочки C положение c и для шарнира D —положение d . Сопоставляя перемещение Oc и Od , мы усматриваем, что правый конец фермочки II поднялся относительно выше левого. Фермочке второй надо дать дополнительное движение, чтобы совместить левый ее конец с концом C консоли BC и с другой стороны,—ее надо повернуть вокруг C вниз так, чтобы правый конец D коснулся опорной площадки E . Пристраивая до точки c относительной диаграммы вектор $c'e'$ истинного перемещения конца консоли C , мы получаем точку картины c' ; и так как фермочку II надо вращать вокруг шарнира C , то получаем таким образом полюс вращения.

Картина вращения перпендикулярна к вращающейся фермочке; поэтому проводим через c' перпендикуляр к CD . Предстоит лишь определить длину этого перпендикуляра, как величину перемещения узла D при вращении II фермочки. Насколько надо повернуть II фермочку вокруг левого конца, чтобы правый установился на консоль E —это зависит от опускания самой консоли: пристраивая до точки d относительной диаграммы II вектор $e'd$ истинного перемещения консоли E , мы находим положение e' шарнира E по отношению к C . Теперь получились те исходные две точки c' и e' , по которым обычно определяется картина вращения. (Сравн. например, q и i на фиг. 33). Остается через e' провести прямую, параллельную плоскости катания подвижной опоры D , до пересечения d' с перпендикуляром через c' к вращающейся фермочке CD .

Когда построена картина вращения для II фермочки, обычным образом получаются истинные перемещения всех ее узлов.

Более сложный случай представляет система фиг. 48. Здесь подвесные фермы связаны с консольными посредством шарниров, так что, невозможно их взаимное поступательное перемещение: вся система имеет лишь одну неподвижно-шарнирную опору A , а все остальные—подвижные на катках. Для I фермочки, как прикрепленной обычными опорами A и B , строим обычную диаграмму Виллио и из нее определяем истинное перемещение консоли C . Эта диаграмма на фиг. 48 не показана.

Затем строим диаграммы относительных перемещений для каждой из остальных фермочек системы. На фиг. 48— b , c и d показано положение лишь главных шарниров каждой фермочки: для II—точки c и d , для III— d , e , f и g , для IV— g и h .

Остановившись на фермочке II, по общему правилу сложных ферм, пристраиваем до точки c вектор $c'e'$ истинного перемещения конца консоли C , взятый из I диаграммы; это предпринимается, чтобы связать фермочки I и II общим шарниром C . Полученную точку c' принимаем за полюс для вращения II-ой фермочки до соединения с III-ей в шарнире D , а потому проводим через него вертикальную прямую. Чтобы установить размер необходимого поворота, обратимся к перемещению левого конца D консоли III.

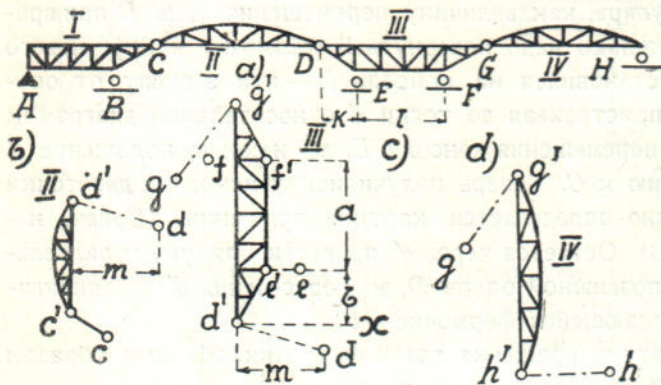
Относительное положение точек e и f фиг. c говорит о необходимо-

сти дополнительного вращения фермочки III. Очевидно, точки e' и f' картины вращения будут на вертикальной прямой. С другой стороны векторы $e'e$ и $f'f$, как представляющие истинное перемещение подвижных опор E и F должны быть горизонтальны, следовательно, точки e' и f' должны лежать на горизонтальных прямых, проведенных через известные точки e и f . Вертикальное расстояние между e и f дается диаграммой III; положим оно равно a . Так как картина пропорциональна вращающейся фермочке, то, очевидно, должно быть $b:a = k:l$,

$$\text{т. е. } b = ak:l.$$

Отсюда находим, на какой горизонтальной линии x должна находиться точка d' консольной фермы III.

Теперь обратим внимание на то, что истинное горизонтальное перемещение правого конца фермочки II и конца левой консоли III одинаковы.



Фиг. 48.

Для фермочки II оно уже известно, так как вертикальная линия картины вращения $c'd'$ и относительная точка d получены на фиг. b; обозначим это перемещение m . Если отложить m от d фиг. c и провести перпендикуляр, $d'g'$, то определится и положение точки d' на

намеченной прежде прямой x и вместе с этим—истинное перемещение $d'd$ шарнира D .

Пристраивая до точки d фиг. b это перемещение $d'd$, мы находим точку d' для картины вращения II-ой фермочки и строим картину $d'c'$.

Переходим к III-ей фермочке. Здесь, на перпендикуляре $d'g'$, разбитом на части b и a , строим картину вращения до конца g' . Путем соединения g' с g , определяем истинное перемещение $g'g$ конца правой консоли.

В IV фермочке (фиг. d) до относительной точки g пристраиваем вектор $g'g$ истинного перемещения шарнира G ; получаем полюс для вращения фермочки GH . Так как, с другой стороны, истинное перемещение правого конца фермочки горизонтально, то проводим через h горизонтальную прямую до пересечения с перпендикуляром через g' : получаем точку h' для картины $g'h'$.

Теперь можно высказать следующее правило построения диаграммы Виллио для системы фермочек, надлежащим образом прикрепленных к земле: Прежде всего строят диаграммы относительных перемещений для каждой фермочки в отдельности, фиксируя один узел и направление исходящего из него стержня. Сообщают соответствующее дополнительное движение

тем из фермочек, которые не посредственно устанавливаются на свои опоры, и определяют для этих фермочек истинные перемещения тех шарниров, которыми они связаны с другими фермочками. Эти перемещения по направлению, течению и величине пристраивают к соответствующим точкам последних фермочек. Наконец, сообщают фермочкам то дополнительное перемещение, которое требуется, чтобы привести их в надлежащую связь с первыми фермочками.

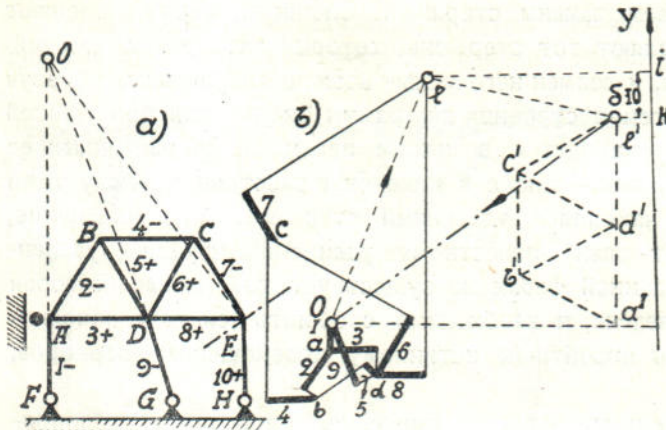
3. Сложные фермы, неприводящиеся к простейшей схеме. а) Замена стержней. Исследование деформации таких ферм проще всего производится посредством замены стержней. Сложную ферму заменяют стержневой схемой, удаляют тот стержень, который затрудняет простейшее образование схемы, и взамен него вводят возмещающую связь, образуя простейшую ферму. Путем построения диаграммы Виллио для простейшей фермы без затруднения находятся взаимные перемещения различных ее шарниров и, между прочими,—также и изменение расстояния между теми двумя шарнирами, где находился удаленный стержень. Это изменение, вообще говоря, не будет равно известному удлинению (сжатию) удаленного стержня, ибо в заданной ферме не существует той связи, которая нами дополнительно введена, и необходимо сообщить системе дополнительное движение, чтобы подойти к истинному перемещению шарниров, удаленного стержня.

Для осуществления дополнительного движения, освободимся от дополнительной связи и изучим движение полученной таким путем подвижной системы и, в частности,—перемещение интересующих нас шарниров удаленного стержня. Так как теперь мы имеем механизм с одной степенью свободы, то движение этих шарниров совершается всегда по одному пути. Мы будем знать, таким образом, направление дополнительного перемещения, остается так подобрать его величину, чтобы при геометрическом сложении с первым перемещением тех-же шарниров получилась истинная деформация удаленного стержня. Это—простая задача, не представляющая затруднения. Когда же определено дополнительное движение для двух точек системы, то становятся известными и перемещения всех ее остальных точек, и необходимо лишь перемещения геометрически сложить с первыми перемещениями простейшей фермы. Покажем этот прием на нескольких простых примерах.

б) Примеры. На фиг. 49—ферма на трех опорных стержнях: ее усилия S определены предварительно и считаются известными; по ним вычислены удлинения λ , написанные у соответствующих стержней. Удалим правый опорный стержень EH и возместим его катком A , опирающимся на вертикальную плоскость. Перемещения шарниров A и G простейшей фермы фиг. 49-а становятся известными: сжатие 1 и нуль. Откладывая их от полюса O фиг. б, мы получим те известные точки диаграммы Виллио O и a , на которых базируется узел D (сравн. фиг. 31); к ним

пристраиваются векторы деформаций: $+3$ и -9 . Пересечение перпендикуляров, проведенных через концы векторов, определяет точку d . Далее получатся b , c и e . Вектор Oe , выражающий перемещение шарнира E , говорит о поднятии шарнира вверх, значительно больше, чем растяжение опорного стержня δ , равное 10 мм. Очевидно, надо ферму опустить.

Чтобы осуществить такое дополнительное движение, освободимся от дополнительной опоры A , отбрасывая цилиндрический каток. Система станет подвижной. Опираясь всего только на два стержня, 1 и 9, она может совершать вращательное движение вокруг мгновенного центра O^1 . При этом E будет перемещаться по перпендикуляру к OE . Таким образом, дополнительным движением системы должно быть вращение вокруг O



Фиг. 49.

(фиг. a) вниз по часовой стрелке.

В виду этого на фиг. b мы направим в полюс O вектор $e'O$, перпендикулярный к EO и дадим ему такую длину $e'O$, чтобы проекция результирующего перемещения $e'e$ на вертикальное направление стержня составляла $\delta=10$, т. е.: из e опу-

стим перпендикуляр ei на ось Y , параллельную стержню EH , отложим $ik = \delta = 10$ и восставим перпендикуляр ke' до пересечения e' с вращательным перемещением Oe' .

Дополнительное движение для шарнира E стало вполне известным: $e'O$.

Так как вся ферма вращается вокруг O фиг. a , то перемещение шарнира A будет меньше в отношении $OA:OE$ и будет перпендикулярно к радиусу вращения OA , т. е. оно выразится вектором $a'O$ фиг. b . Вся картина вращения, подобно фиг. 29- b представится пунктирной фермочкой $a'b'c'e'd'$. Соединяя ее точки с одноименными шарнирами первой диаграммы, получаем истинные перемещения данной фермы на 3-х опорных стержнях.

Более сложный пример представляет ферма двухпролетного путепровода фиг. 50. Слева здесь неподвижная шарнирная опора, справа—подвижная, на катках. Заменим эту сложную ферму стержневой схемой ACB , CDG , $FEBD$; удалим правую опору G и вместо нее поместим такой же цилиндрический каток под шарниром B . Тогда представится возможность построить диаграмму Виллио. Мы начнем ее от точки A и стержня AB , удлинение которого 1 отложено на фиг. b от O до b . Далее получим c , e , d , g . Оказывается, что при фиксированном направлении AB конец

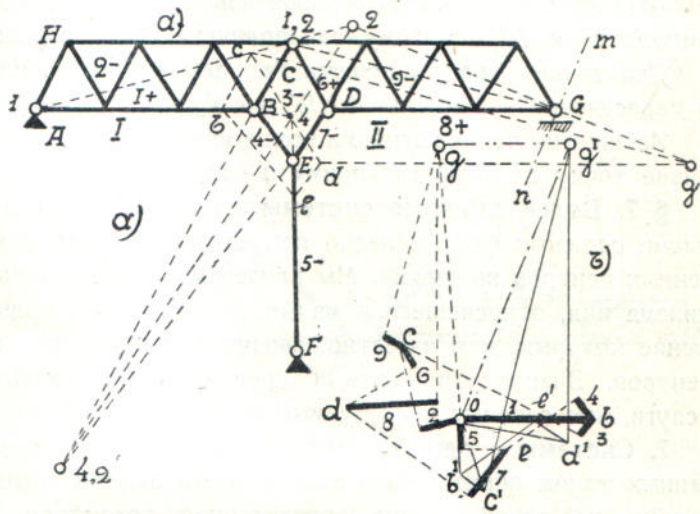
1) См. нашу Техническую механику, § 46, 4.

фермы G приподымается на высоту Og . Так как в действительности он может получать только горизонтальное перемещение, то, очевидно, необходимо сообщить ферме некоторое дополнительное движение, чтобы заставить конец G опуститься на опорную площадку.

Для осуществления такого движения освободимся от дополнительной опоры B ; получится механизм с одной степенью свободы. Определим направление перемещения шарнира G этого механизма и подберем величину перемещения так, чтобы при сложении с Og получить действительное горизонтальное перемещение катков G .

Направление перемещения, как и прежде, можно разыскать, пользуясь мгновенными центрами. Но можно применить и способ изображающих точек¹⁾ который с успехом практикуется при решении многих сложных вопросов кинематики.

Для I-го элемента схемы с неподвижной точкой A перемещение шарнира C происходит по перпендикуляру к AC . Поворачивая



Фиг. 50.

это перемещение на 90° и откладывая от C в некотором масштабе, построим точку c —изображение движения шарнира C . Таким же образом построим точку b для шарнира B , перемещающегося перпендикулярно к AB . Так как дуги перемещений Cc и Bb пропорциональны радиусам вращения AC и AB , то прямая cb параллельна CB . Это соответствует известному свойству «изображения движения» прямой²⁾. На основании этого свойства параллельности, через b проводим линию $be \parallel BE$, и далее: $cd \parallel CD$ и $ed \parallel ED$. Получивши изображение cd движения стержня CD , мы строим на нем треугольник, подобный CGD из сторон, параллельных CG и DG .

Полученная точка g есть изображение движения для G . Очевидно, шарнир G имеет перпендикулярное перемещение, показанное штрих-пунктирной линией mn .

Мы берем вектор, параллельный этому перемещению и направляем его вниз, в полюс O фиг. b ; подбираем величину вектора $g'O$ так, чтобы его геометрическая сумма $g'O$ с первоначальным вектором Og оказалась го-

1) См. наши Системы без лишних стержней, § 66.

2) См. Системы без лишних стержней. § 66,2.

горизонтальной, иначе сказать: через O проводим перпендикуляр к Gg фиг. a , и через g фиг. b проводим параллельную к направлению действительного перемещения шарнира G . Точка пересечения g' определяет, как величину необходимого дополнительного перемещения $g'O$ шарнира G , так и угол катков $g'g$. Дополнительные перемещения для остальных точек диаграммы получаются следующим образом: дополнительное перемещение точки D изображается на фиг. a вектором Dd ; на фиг. b оно перпендикулярно и идет непосредственно в полюс O ; с другой стороны, картина вращения $g'd'$ для стержня GD перпендикулярна к GD . Поэтому, проводя через O фиг. b $Od' \perp Dd$ фиг. a и через g' проводя $g'd' \perp GD$, получим d' .

Перемещение точки E горизонтально, а картина вращения DE перпендикулярна к DE ; поэтому, для получения e' , проводим Oe' и $d'e'$.

Для точки C надо провести $g'c' \perp GC$ и $Oc' \perp Cc$. Наконец b' получается в пересечении вертикальной Ob' и $c'b' \perp CB$.

Истинными перемещениями всех точек, очевидно, будут векторы, соединяющие точку со значком «прим» и одноименную точку без знака.

§ 7. Более сложные системы стержней. При исследовании деформации сложных ферм нередко приходится прибегать к построению мгновенных центров вращения. Мы приведем поэтому основные предложения кинематики, относящиеся к малым перемещениям подвижных систем, движение которых, как известно, сводится к вращению вокруг мгновенных центров. Знакомство с этими предложениями оказывает тем большие услуги, чем сложнее исследуемый вопрос ¹⁾.

1. Системы с одной степенью свободы. Система твердых тел, связанных таким образом, что каждая точка любого ее тела может двигаться только по одной вполне определенной траектории, причем движение одной точки определяет движение всех остальных точек системы, называется системой с одной степенью свободы. Механизмы, встречающиеся в машинах, чаще всего представляют такие системы с одной степенью свободы, например, кривошипный механизм паровой машины, фиг. 52, где движение всего механизма вполне определяется движением одного кривошипа. Легко показать, что для всякого положения кривошипа AB , получается одно вполне определенное положение шатуна и ползуна. Действительно, пусть один конец шатуна, всегда связанный с кривошипом, находится в B_1 , другой же конец всегда находится на прямой dd и в то же время—на постоянном расстоянии от B равно длине шатуна b . Если из B_1 опишем дугу B_1C_1 радиусом b , получим одну определенную точку для ползуна: C_1 .

В трехчленном механизме фиг. 51, если брусок a повернется на угол φ в положение a_1 , то бруски c и b займут положение c_1 и b_1 , определяемые следующим образом. Новое место B_1 шарнира B должно находиться от A_1 на расстоянии длины бруска c , а от D на расстоянии, рав-

¹⁾ Обыкновенно более сложные фермы изучаются только на путейских и инженерно-строительных факультетах, где общий курс механики не обеспечивает достаточных знаний по кинематике механизмов.

ном длине бруска b . Описав из A_1 и D дуги радиусами c и b , в пересечении дуг получим точку B_1 . Следовательно, движение механизма определяется движением одного стержня a , или движением одной его точки.

2. Обращение механизмов. В механизмах участвуют точки, которые не имеют поступательного движения и называются неподвижными точками. Таковы, например, точки C и D фиг. 51. Расстояние между этими точками не изменяется и можно представить себе, что они принадлежат некоторому твердому телу CD . Если мы присоединим это тело CD к цепи брусков a , c и b , то получим замкнутую кинематическую цепь. Удерживая брусок CD , заштрихованный на фиг. 51 в неподвижном состоянии, мы получаем известный механизм параллелограмма. Но в замкнутой цепи брусок d не отличается от других брусков ничем, кроме неподвижности, и с полным правом мы можем сделать неподвижным звено a , освободив d ; тогда получится другой механизм.

Действительно, когда было неподвижно d , точки A и B двигались по окружностям кругов радиусов a и b ; если же сделать неподвижным брусок a , то точки D и B будут двигаться

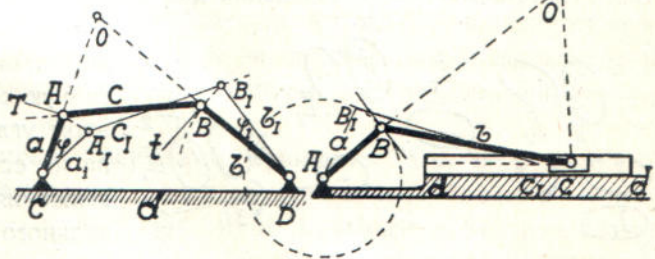
по окружностям радиусов c и d , и положение мгновенных центров придется находить уже не для бруска c , как в предыдущем случае, а для бруска b . Далее мы можем сделать неподвижным звено b и получить третий механизм, отличный от первых двух. Наконец, сделав неподвижным звено c , получим четвертый механизм. Таким образом, различных механизмов из данной системы звеньев получается ровно столько, сколько имеется звеньев, соединенных шарнирами.

Этот прием применим ко всякому другому механизму и более сложному, состоящему из большего числа звеньев. Он был указан Рело¹⁾ и называется обращением механизмов.

Будем определять мгновенные центры, пробуя делать каждое из звеньев механизма неподвижным. Конечно, данное звено кинематической цепи может иметь разные центры вращения в зависимости от того, какое из прочих звеньев сделано неподвижным; но между этими центрами существует известная зависимость, определяемая теоремами Аронгольда.

3. Теоремы Аронгольда-Кеннеди²⁾. Прежде, чем излагать эти теоремы, условимся в следующих обозначениях. Звенья механизма будем обозначать римскими цифрами I, II, III ..., шарниры между ними—большими

Фиг. 51.



Фиг. 52.

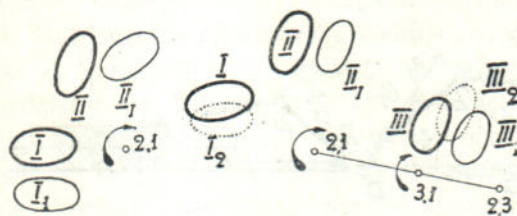
¹⁾ Намеки на идею обращения механизмов находятся еще у Шалля. См. Chasles, Aperçu historique sur le développement des méthodes en Géométrie. 3-е édition. Note XXXIV.

²⁾ Эти теоремы были найдены одновременно Аронгольдом и Кеннеди независимо друг от друга.

буквами A, B, C , мгновенные центры—соответствующими арабскими цифрами 1, 2, 3, причем будем ставить две цифры, из которых первая указывает на то звено, для которого называется мгновенный центр, а вторая указывает звено, которое мы сделали неподвижным. Так 1, 2 обозначает мгновенный центр звена I относительно звена II, которое считается неподвижным; 2, 4—это мгновенный центр для звена II, если считать неподвижным звено IV. Теперь перейдем к теоремам Аронгольда.

а) Первая теорема: мгновенные центры 1, 2 и 2, 1 совпадают. Это следует понимать так. Положим, что в системе брусков с одной степенью свободы I и II есть какие-нибудь бруски (фиг. 53), и точка 1 служит мгновенным центром для звена I, когда звено II сделано неподвижным; если сделать неподвижным звено I, то для звена II получится тот же мгновенный центр 1.

Для доказательства сделаем сначала неподвижным звено I и положим, что мгновенный центр вращения для звена II представляет на фиг. 53



Фиг. 53.

Фиг. 54.

точка 2, 1. Пусть движение звена II происходит в сторону, указанную стрелкой возле 2, 1, при этом угловое перемещение звена II есть ω ¹⁾. В результате движения звено II из первоначального положения переходит в положение II₁; звено I остается без изменения.

Теперь, не изменяя взаимного расположения звеньев, повернем систему около того же центра на ту же величину углового перемещения ω , но в сторону противоположную, именно, против стрелки, показанной на фиг. 53. Конечно, при этом втором движении звено II из положения II₁ вернется в свое первоначальное положение II; звено же I переместится в положение I₁, вращаясь вокруг центра 2, 1. Можно сказать, что система из первого положения жирных фигур в третье положение II и I₁ перешла таким образом: звено II остается в покое, звено же I вращается вокруг 2, 1, так что точка 2, 1 должна быть обозначена 1, 2, ибо это мгновенный центр для звена I при неподвижном II. Следовательно 1, 2 = 2, 1: порядок значков для обозначения мгновенного центра не имеет значения.

Центры вращения связаны со звеньями свойством взаимности.

б) Вторая теорема: мгновенные центры трех звеньев цепи лежат на одной прямой, например, для звеньев I, II и III центры 1,2, 2,3 и 3,1 лежат на одной прямой.

Положим, что на фиг. 54 жирные фигуры I, II и III—это три звена кинематической цепи. Сначала сделаем неподвижным звено I и повернем систему вправо, как показано стрелками. При этом движении звено II бу-

¹⁾ Угол поворота.

дет вращаться около мгновенного центра 2,1, звено III — около 3,1; угловые перемещения пусть будут ω_2 и ω_3 . В результате звенья II и III займут положения II₁ и III₁, указанные тонкими сплошными линиями. Освободим теперь звено I, и всю систему, не изменяя взаимного расположения звеньев, повернем вокруг 2, 1 на угол ω_2 , в сторону, противоположную первоначальному движению. Тогда звено II из положения II₁ вернется в первоначальное положение II, звенья же I и III из положений I и III₁ перейдут в пунктирные положения I₂ и III₂. Окончательно система звеньев будет занимать положение I₂, II и III₂. Сравним это положение с первоначальным, из жирных звеньев I, II и III. Оказывается, что звено II неподвижно, звено же III при переходе из первого положения в третье имело два движения: сначала оно вращалось вокруг центра 3, 1, а затем вместе со всей цепью повернуто было вокруг центра 2, 1. Но известно, что два вращения одного тела вокруг параллельных осей могут быть заменены одним вращением вокруг оси, находящейся в плоскости двух первых осей. На фиг. 54 это вращение будет происходить в плоскости чертежа вокруг центра 2, 3, находящегося на прямой, соединяющей центры 2, 1 и 3, 1. Следовательно, мгновенные центры для трех звеньев кинематической цепи находятся на одной прямой.

4. Зависимость между центрами вращения для двух смежных звеньев. При перемещении двух мгновенных центров механизма по прямой, третий мгновенный центр также перемещается по прямой. Это свойство мгновенных центров вытекает из одной теоремы геометрии, которую постоянно пользуются в графической статике¹⁾, и которая имеет следующую формулировку: если ломанная линия из n сторон преобразуется так, что соответствующие стороны постоянно исходят из данных точек A, B, \dots, n , лежащих на некоторой прямой, и если $n-1$ вершин ломанной перемещаются по прямой, то траектория n -ой вершины также будет прямою.

Покажем это свойство на примере фиг. 55, представляющей подвижную систему с одной степенью свободы. Звено $A_1 A$ имеет неподвижную точку A_1 , являющуюся его центром вращения. Точка A звена I, принадлежа радиусу $A_1 A$, перемещается перпендикулярно к $A_1 A$ и потому центр вращения звена I всегда будет на прямой $A_1 A$, как на перпендикуляре к перемещению²⁾. Но где именно находится центр вращения на прямой $A_1 A$, пока неизвестно.

Предположим сначала, что мгновенный центр звена I лежит в точке $1'$. Тогда перемещение шарниров C и E должно быть перпендикулярным к $1' C$ и $1' E$; следовательно, мгновенный центр для звена III должен лежать на прямой $1' E$, а для звена II — на прямой $1' C$. С другой стороны центр для III должен лежать на стержне $D_1 D$; очевидно, он находится в пересечении $3'$. Переходя к разысканию центра для звена II, заметим, что на исходный брусок ED (III), звено II опирается двумя брусками CE и

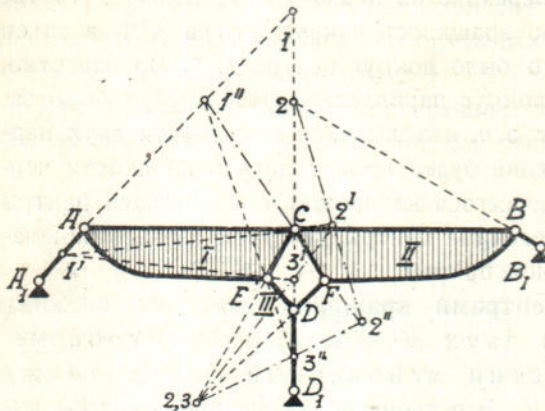
¹⁾ См. наши: Системы без лишних стержней, § 8, 3.

²⁾ См. нашу: Техническую механику, § 46, 4.

FD ; так что, по фиг. 51 его центр находится на пересечении 2, 3. Таким образом, звено II опирается на 2 центра: $3'$ и 2, 3; очевидно, мгновенный его центр должен лежать на прямой $3'-2,3$, соединяющей эти центры. Итак, мгновенный центр $2'$ звена II, находится в пересечении прямых: $1' C$ и $3'-2,3$.

Сделаем теперь другое предположение для центра 1, например, поместим его в $1''$. Повторяя те же рассуждения, мы проводим прямые: $1'' E$ и $1'' C$; на первой из них находим $3''$, а на второй— $2''$, если соединим 2,3 с $3''$.

Оказалось, что двум пробным положениям центра для звена I, а именно: $1'$ и $1''$ соответствует два определенных положения центра для звена II,



Фиг. 55.

а именно $2'$ и $2''$. Можно показать, что при дальнейшем перемещении центра 1 по той же прямой $1' 1''$ центр 2 будет перемещаться по прямой центров $2' 2''$. Действительно, каждое пробное положение центров 1, 2 и 3 дает треугольник 123, стороны которого обязательно проходят через три постоянные точки системы: C , E и 2, 3; кроме того, две вершины треугольника, а именно, 1 и 3, всегда остаются на данных прямых $A_1 A$ и $D_1 D$. Следовательно, третья вершина 2 также должна оставаться на прямой, определяемой двумя пробными положениями: $2'$ и $2''$.

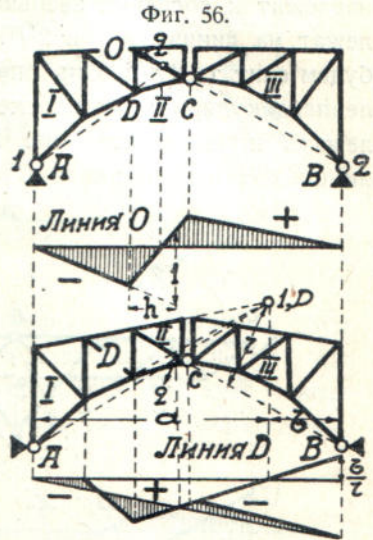
Пользуясь приведенной зависимостью удается решать задачи о мгновенных центрах в том случае, когда одних теорем Аронгольда недостаточно. Так, на фиг. 55 непосредственное определение центра 1 невозможно, ибо звено I опирается правой стороной не на стержень из двух шарниров, а на более сложный механизм из системы стержней. Мы прибегаем здесь к двум пробным положениям центра 1, на основании которых устанавливаем траекторию $2' 2''$ для центра 2. Так как по заданию, тот же центр 2 должен лежать на стержне BB_1 , то истинное его положение определяется пересечением прямых $2' 2''$ и BB_1 . После этого становится известным и истинное положение 1, ибо мы соединим 2 с C , и линию центров $C-2$ продолжим до направления $A_1 A$.

5. Примеры построения мгновенных центров. На фиг. 56 представлена арочная подвижная система из 3-х звеньев I, II и III. Центрами вращения для I и III служат шарниры A и B . Так как звено II опирается двумя брусками I и III непосредственно на неподвижные шарниры A и B , то мгновенным его центром служит точка пересечения (2) прямых AD и CB .

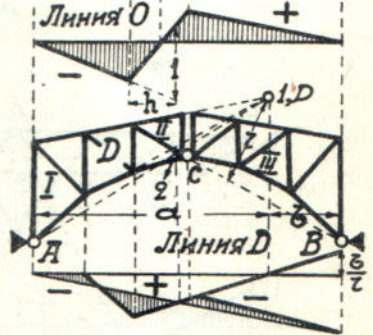
Трехчленный механизм, опирающийся крайними звеньями на неподвижные шарниры, всегда можно представлять, как трехшарнирную арку типа

фиг. 56, и считать, что среднее звено опирается на стержни AD и CB независимо от того, представляют ли точки D и C действительные шарниры, вокруг которых могут взаимно поворачиваться соседние звенья, или же эти точки—суть фиктивные шарниры, являющиеся мгновенными центрами для двух соседних звеньев. Обобщая понятие о стержне, как о прямой, соединяющей два центра определяющих его положение в пространстве¹⁾, мы приходим к такому правилу: для построения мгновенного центра какого-нибудь звена надо определить те два стержня, на которые оно опирается; точка пересечения стержней дает искомый центр.

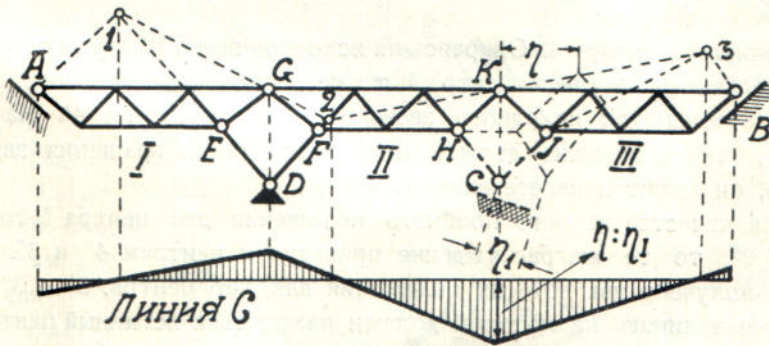
Пример такого обобщения представляет трехшарнирная арка, лишенная диагонали D (фиг. 57). Здесь звено II слева опирается на стержень из двух шарниров: действительного A и фиктивного $1, D$; справа—на стержень CB . Мгновенный центр вращения звена лежит в пересечении (2) стержней $A-1, D$ и BC . Более сложный пример приведен на фиг. 58, где трехпролетная ферма освобождена от опоры C . Здесь звено I опирается на каток A , эквивалентный стержню, нормальному к плоскости катания, и на стержень ED ; очевидно, мгновенный центр 1 находится в пересечении стержней. Звено II опирается на стержень $1G$ и DF ; поэтому



Фиг. 56.



Фиг. 57.



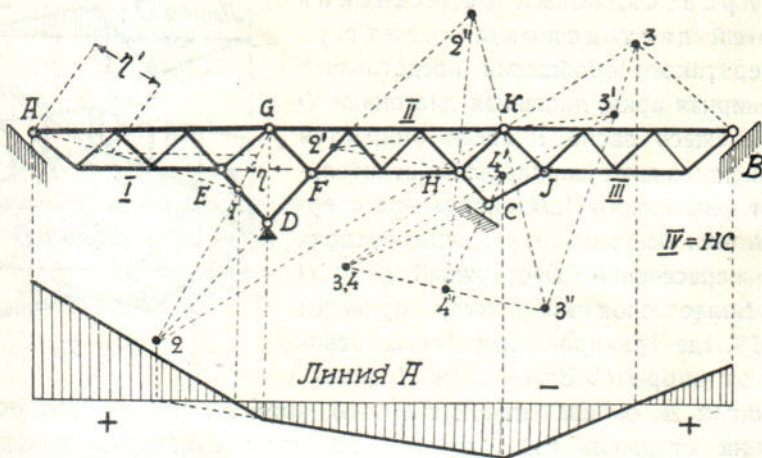
Фиг. 58.

его центр 2 лежит в пересечении прямых $1G$ и DF . Наконец, звено III опирается на стержень $2K$ и на опорный стержень $3B$, вследствие чего определяется центр 3.

На фиг. 59 рассматривается та же ферма, освобожденная от опоры A . Здесь не оказывается ни одного сложного звена, непосредственно опирающегося двумя стержнями на неподвижные точки, и приходится искать мгновенные центры путем попыток, как указывалось в разделе 4.

¹⁾ См. наши: Системы без лишних стержней, § 27.

Начнем со звена II; так как оно опирается на стержень FD , имеющий неподвижную точку D , то центр звена должен лежать на направлении DF . В качестве первой пробы примем для него положение $2'$. Тогда определяются перемещения точек K и H , которые должны быть перпендикулярны к радиусам вращения $2'K$ и $2'H$. Так как шарниры K и H принадлежат к соседним звеньям KB и HC , то, очевидно, центры последних лежат на линиях $2'K$ и $2'H$. Остановимся сначала на звене HC , которое будем считать IV-м. Оно опирается на каток C , эквивалентный стержню, перпендикулярному к плоскости катания, так что, центр звена IV должен лежать на этом стержне. Итак, для звена HC центр должен быть на линии $2'H$ и на нормали C : ясно, что он находится на их пересечении $4'$.



Фиг. 59.

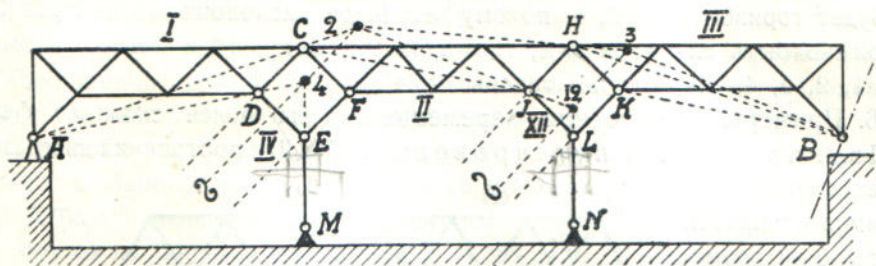
Переходим к звену III. Опираясь на исходное звено IV двумя стержнями KH и IC , звено III имеет центр в точке пересечения стержней $3,4$; с другой стороны для исходного звена IV известен центр $4'$. На линии $3, 4 - 4'$, как на стержне должен находиться центр вращения звена III: очевидно, он лежит в пересечении $3'$.

Если в качестве второго пробного положения для центра II-го звена принять $2''$, то те же рассуждения приведут к центрам $4''$ и $3''$. Таким образом, получено два ложных положения для 3-го центра: $3'$ и $3''$, устанавливающие линию, на которой должен находиться истинный центр. Так как центр того же III-го звена одновременно должен лежать на перпендикуляре к плоскости катания B , то определяется точка 3 .

Когда определено истинное положение 3-го центра, тотчас становятся известными и остальные центры 1 и 2: мы соединяем 3 с K и продолжаем до направления FD ; точка пересечения 2 дает истинный центр для II-го звена. Для звена I мгновенный центр, с одной стороны, лежит на радиусе $2G$ и с другой на DE ; очевидно, он определяется пересечением 1.

На фиг. 60 исследован тот частный случай вышеприведенной системы, когда стержни опорного четырехугольника $DCFE$ параллельны. Точка пере-

сечения стержней — на бесконечности; поэтому через мгновенный центр 4 приходится проводить параллельную прямую. Если отбросить правую опору *B*, то построение мгновенных центров производится непосредственно, как показано на фиг. 60. Если же ферма превращается в подвижную



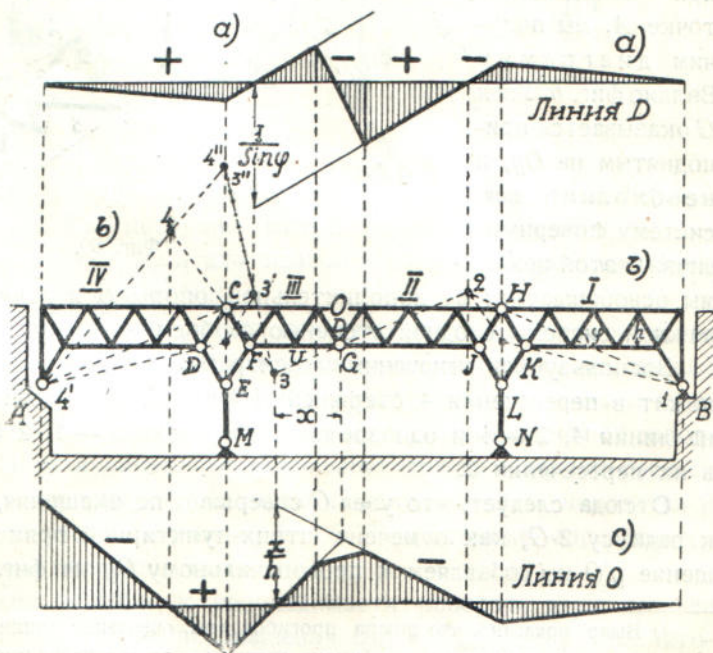
Фиг. 60.

систему путем удаления ее стержня, то приходится прибегать к двум ложным положениям. Положим, что удаляется стержень *O* фиг. 61, где справа неподвижная опора *B*, слева — подвижная. Центром для I звена является опора *B*. Для II звена центр 2 находится, по предыдущему, путем проведения прямой *BK* до пересечения с *NL* и построения через точку пересечения параллельной до пересечения 2 с прямой *BH*.

Мгновенный центр звена III должен лежать на прямой *2-G*.

Для определения его положения на этой прямой, положим, что центр 4' для IV-го звена совпадает с опорой *A*. По аналогии с правой стороной определится центр 3'. Возьмем другое пробное положение для центра IV-го звена, но обязательно на перпендикуляре к опорной площадке *A*, например, — положение 4''. В этом случае те же построения приведут к тому, что центр 3'' совпадает с 4''.

Два положения 3' и 3'' дают прямую, пересечение которой с линией *2G* определяет истинный центр 3.



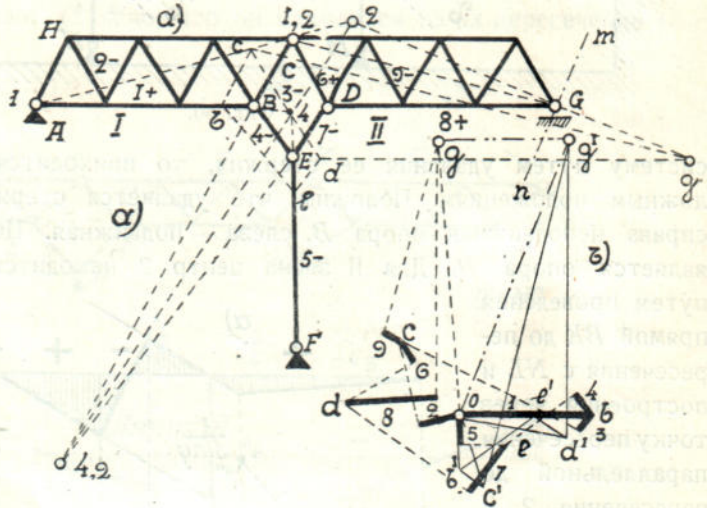
Фиг. 61.

Если из фермы фиг. 61—*b* удалить диагональ D , то звенья II и III окажутся соединенными, вместо действительного шарнира G предыдущего случая, фиктивным из двух параллельных стержней O и U . Фиктивный шарнир окажется на бесконечности, и потому прямая $2-G$ центров II и III будет горизонтальной, а потому истинное расположение центров 2 и 3 должно быть симметричным, также, как и центров 1 и 4. Вместо ломаной 1, 2, 3, 4, мы получим теперь $123'4'1$).

6. Примеры построения перемещений для более сложных ферм.

а) Двухпролетный путепровод фиг. 50. Для построения диаграммы перемещений освободимся от правой опоры G и возьмем ее горизонтальной площадкой под узлом B .

Исходя из начального стержня AB при неподвижной точке A , мы получим диаграмму Виллио фиг. *b*. Узел G оказывается приподнятым на Og , и необходимо всю систему повернуть вниз. С этой целью



Фиг. 50.

мы освобождаемся от дополнительной опоры B и изучаем движение подвижной системы с одной степенью свободы.

Воспользуемся мгновенными центрами. Для звена BE мгновенный центр лежит в пересечении 4 стержней AB и FE . Для звена II центр находится на линии 4, 2 — 4 и одновременно на линии 1 — 1, 2; очевидно, он лежит в их пересечении 2.

Отсюда следует, что узел G совершает перемещения, перпендикулярные к радиусу $2-G$, как отмечено штрих-пунктирной прямой mn . Это перемещение $g'O$ мы добавляем к первоначальному Og на фиг. *b*, чтобы получить

1) Было показано, что эпюра прогибов дает очертание линии влияния. Мгновенный центр вращения какого-нибудь бруска системы — это точка, не имеющая поступательного движения, так что, прогиб ее равен нулю. Очевидно, нулевые точки линии влияния должны приходиться под мгновенными центрами вращения.

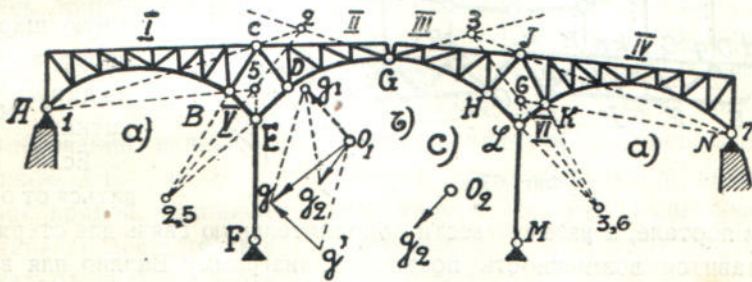
С другой стороны, на протяжении каждого цельного бруска системы линия влияния имеет вид прямолинейного отрезка, так что, общее очертание линии влияния для системы фермочек, образующих сложную ферму, должно быть ломанной линией, пересекающей ось под мгновенными центрами вращения и имеющей вершины под действительными шарнирами фермочек.

Это дает средство для построения линий влияния в сложных фермах. Ряд таких линий приведен на фиг. 56—59 и 61.

истинное $g'g$, соответствующее направлению катания подвижной опоры. Результат, конечно, совпадает с уже полученным посредством изображающих точек.

б) Трехпролетная арочная система. На фиг. 62 представлена система, опирающаяся крайними точками на неподвижные шарниры A и N и имеющая ключевой шарнир G . Два стержня первоначальной трехшарнирной арки CE и JL здесь заменены качающимися колоннами, вследствие чего расчет арки значительно усложняется.

Придерживаясь указаний относительно сложных ферм, освободимся от ключевого шарнира G , т. е. раз'единим полуарки, а взамен введем опоры B и K , допускающие скольжение по направлению AB и NK . Получится две фермы на обычных опорах, но с консолями. Построением диаграммы



Фиг. 62.

Виллио нам удастся получить перемещения всех узлов этих ферм в порядке: $B, C, E, D...$ Мы построим отдельные диаграммы $b)$ и $c)$: для левой половины при полюсе O_1 и для правой—при O_2 , причем для перемещений узла G найдем: O_1g и O_2g_2 .

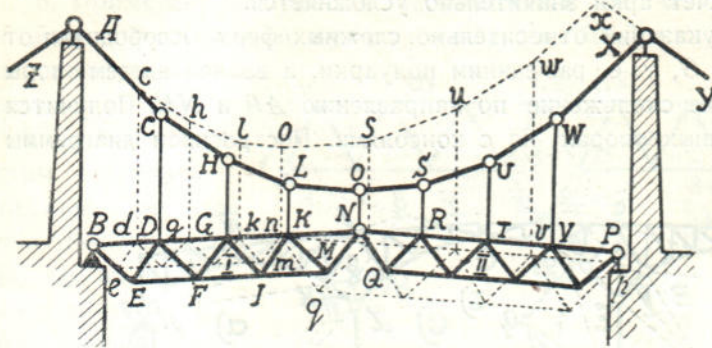
Так как они не одинаковы, ни по величине, ни по направлению, то необходимо обоим полуаркам сообщить дополнительное движение, вращая их до тех пор, пока раз'единенные концы G не соединятся общим ключевым шарниром. Чтобы осуществить это движение, освободимся от дополнительных опор B и K и определим мгновенные центры вращения звеньев II и III, связанных шарниром G . По предыдущему, центр 2 находится в пересечении стержня AC и прямой $2, 5-5$. Точно также определяется и центр 3 для правой половины арки.

Мы пришли, таким образом, к необходимости поворота двух звеньев II и III, (получивших случайные перемещения O_1g и O_2g_2), вокруг их пятых шарниров 2 и 3, до соприкосновения ключевых шарниров G . Эта задача уже решена на фиг. 46, и мы воспользуемся ее результатами. Построим второе перемещение O_2g_2 от того же полюса O_1 , как сделано на фиг. $b)$; и так как вращаются радиусы $2-G$ и $3-G$, то через концы перемещений O_1g и O_1g_2 проведем перпендикуляры к этим радиусам: $gg_1 \perp 2G$ и $g_2g_1 \perp 3G$, до взаимного пересечения g_1 . Вектор O_1g_1 представит истинное перемещение ключевого шарнира G . По правилу о сложных фермах его надлежит пристроить до относительного вектора первоначальной

диаграммы. Мы этого достигаем, перенося O_1g_1 в положение $g'g'$, т. е.— построением параллелограмма.

Точка g' принадлежит картине вращения. По ней и центру вращения 2, совпадающему с полюсом O_1 фиг. *b*, может быть построена и самая картина.

е) Цепной мост, усиленный балочными фермами (фиг. 63). Цепь, перекинутая через береговые порталы, опирается на цилиндрические катки A и X ; концы цепи Z и Y укрепляются в береговых неподвижных



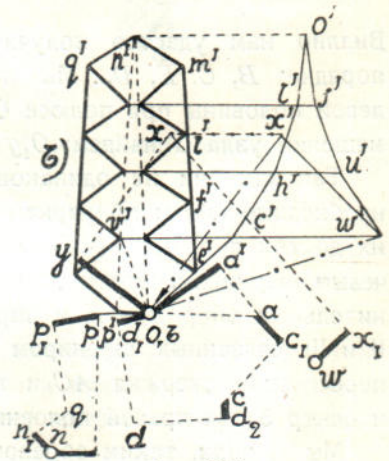
Фиг. 63-а

точках. К цепи подвешиваются две балочные фермы BN и NP , из которых первая имеет неподвижную шарнирную опору, а вторая— подвижную, на катках.

Если освободиться от опоры X

на правом портале, а взамен ввести дополнительную связь для стержня AC , то представится возможность построить диаграмму Виллио для всей системы. От полюса O фиг. *b* отложим известное удлинение Oa' стержня ZA и восставим перпендикуляр $a'a$. Считая каток абсолютно жестким вертикальным стержнем, вообразим из полюса нулевое вертикальное перемещение и восставим перпендикуляр, т. е. проведем горизонтальную Oa . На пересечении перпендикуляров получим точку a .

Вектором Oa определяется истинное перемещение опорного шарнира A ; поэтому примем точку a за исходную для построения диаграммы Виллио. Построим от a удлинение ac_1 стержня AC и допустим ему некоторое пробное движение c_1c ; это равносильно стеснению стержня AC определенной дополнительной связью, допускающей для шарнира C перемещение только по направлению $Oc \parallel AC$. Имея теперь точку c и совмещая b с O , мы обычным образом определим точку d для чего воспользуемся сжатием Od_1 стержня DB и растяжением cd_2 подвески CD . Затем известными уже приемами построения получим e для узла E , f для узла F и далее: g, h, i, k, l, m, n, o . После этого определяется перемещение узла P : от n отложим суммарное растяжение пояса NP и восставим перпендикуляр p , а от полюса O вообразим нулевое вертикальное перемещение и восставим перпендикуляр Op . Имея точки



Фиг. 63-б.

n и p , мы можем определить q , воспользовавшись сжатием mn_1 стержня QN и увеличением расстояния между узлами P и Q простой фермочки PQN^1). Затем по точкам n и q определяем r и прочие узлы фермочки. Далее, по o и r находим s , по s и t — находим u , потом w . Наконец, строим от w удлинение wx_1 стержня WX и проводим перпендикуляр, а, с другой стороны, от O , строим удлинение Oy и проводим перпендикуляр до взаимного пересечения x .

Оказывается, что при той дополнительной связи, которой мы подчинили стержень AC , опорный узел X приподымается на Ox . Необходимо всю систему между опорами A и X повернуть вниз. Если освободимся от дополнительной связи стержня AC , то полученная подвижная система позволит определить необходимое перемещение узла X . Это перемещение, во-первых, может быть только перпендикулярным к стержню YX , ибо стержень прикреплен к неподвижной точке Y , и вначале был освобожден от катков X ; во-вторых, перемещение должно быть такой величины, что результат его геометрического сложения с вектором Ox дает горизонтальное перемещение катков X по площадке портала. На основании этих требований, направляем в полюс O прямую $x'O$, перпендикулярную к стержню XY , а из точки x проводим горизонтальную до пересечения x' с первой прямой. Оказывается, что узлу X системы надо сообщить дополнительное вращательное перемещение $x'O$; при этом действительный уклон катков правого портала будет $x'x$.

Чтобы определить, какие дополнительные перемещения получают при втором движении системы остальные ее узлы, лучше всего в данном случае воспользоваться способом изображающих точек.

При отсутствии катков X и дополнительной связи у стержня AC , перемещения узлов C и D подвески CD идут по перпендикулярам к радиусам AC и BD ; поэтому движение подвески изобразится параллельной пунктирной прямой cd (фиг. a). На том же основании изображением для стержня DE будет параллельная прямая de . Как известно ²⁾, вращение фермы, как неизменяемой системы, изображается подобной фигурой из параллельных сторон; поэтому на Bde построим пунктирную фигуру $Bnme$, подобную фермочке $BNME$. Проводя через ее верхние узлы вертикальные пунктирные прямые и соответственно — прямые, параллельные звеньям цепи CH , HL и LO , получим изображение движения всей левой половины системы. Для правой половины имеем: изображение n шарнира N и, кроме того, — горизонтальность перемещения катков P , т. е. нахождение изображающей точки p на опорной вертикали Pp ; поэтому через n проводим прямую, параллельную NP , и на опорной вертикали намечаем ее точку пересечения p ; на изображении np движения прямой NP строим пунктирную фигуру, как изображение движения для фермочки NQP . Тогда останется через верхние узлы изображения провести вертикали до пересечения

¹⁾ Это увеличение расстояния определяется построением отдельной для фермочки диаграммы, как указывалось в § 6, 1d.

²⁾ См. наши: Системы без лишних стержней, § 66,2.

с прямыми, параллельными к соответствующим звеньям цепи $OSUW$. В результате получится точка w . Проведя через нее параллельную к WX , получим изображающую точку x для опорного узла X . Если в отношении $x'O$ фигуры b к xX фиг. a увеличить векторы между узлами и их изображениями на фиг. a^1) и после поворота на 90° обратно часовой стрелке, направить в полюс O фиг. b , отметивши буквами узлов со значками прим ($'$), то на диаграмме истинные перемещения узлов выразятся векторами, идущими от значков прим до соответствующей буквы без знака.

Это выполнено на фиг. b в следующем порядке: через O проведена прямая Ow' , перпендикулярная к направлению Ww фиг. a , и через x' фиг. b —прямая $x'w'$, перпендикулярная к XW фиг. a ; это сделано на том основании, что картина вращения стержня XW перпендикулярна к стержню. Затем через w' проводим $w'v'$, перпендикулярно WV и через O —перпендикуляр к Vv ; получается точка v' . Проводя далее $v'p' \perp VP$ и $Op' \perp Pp$, т. е. горизонтально, получаем точку p' . На базисе $v'p'$ строим картину вращения $p'v'n'q'$ и получаем точку n' , из которой в полюс O должна направляться картина для другой фермочки NBM .

Для большей точности лучше непосредственно получить точку n' , проводя через O перпендикуляр к BN и откладывая на нем On' , во столько раз большее Nn , во сколько $x'O$ больше, чем Xx ; затем из n' провести перпендикуляр к NP до пересечения p' с горизонтальной прямой Op' , наконец,—построить картину фермочек в деталях.

Имея картину фермочек, находим картины подвесок, проводя горизонтальные прямые через верхние узлы фермочек и линии, перпендикулярные к звеньям цепи в порядке: $w'u'$, $u's'$, $s'o'$, $o'lh'c'O$.

§ 8. Определение деформации вычислением. 1. Геометрическое решение. Деформация системы стержней вполне определяется путем построения диаграммы Виллио. Из нее мы находим, как прогибы и удлинения поясов фермы, так и углы поворота отдельных стержней, ибо диаграмма дает смещенное положение для всех узлов фермы. Но построение диаграммы Виллио сопровождается рядом ошибок, иногда выходящих из пределов обычной точности графического метода, иногда представляет неудобные разбросанные чертежи. Поэтому при определении деформаций нередко приходится прибегать к аналитическому приему.

Общий прием решения задачи заключается в следующем.

Деформацию системы мы разыскиваем после определения ее усилий. В таком случае, для каждого элемента системы известна его частная деформация, и задача исследования состоит в определении деформации всей системы, как целого, на основании известной деформаций отдельных элементов. Положим, например, что требуется разыскать перемещения узлов фермы из стержней с идеальными шарнирами. Мы разыскиваем сначала усилия в ее стержнях— S ; по ним вычисляются изменения длины стержней:

$$\delta l = \lambda = \frac{Sl}{EF} \dots \dots \dots (71).$$

1) Это отношение показывает во сколько раз масштаб диаграммы Виллио крупнее масштаба изображающих перемещений фиг. a .

Теперь остается определить перемещенное положение узлов фермы вследствие удлинения всех ее стержней. Пусть длина l какого-нибудь стержня, соединяющего узлы 1 и 2, выражается через проекции на оси X и Y :

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Дифференцируем по обоим переменным, так как, вообще говоря, оба конца стержня перемещаются:

$$2l\delta l = 2(x_1 - x_2)\delta x_1 - 2(x_1 - x_2)\delta x_2 + 2(y_1 - y_2)\delta y_1 - 2(y_1 - y_2)\delta y_2.$$

Тогда получим уравнение, содержащее перемещения обоих концов стержня

$$\delta x_1, \delta y_1 \text{ и } \delta x_2, \delta y_2.$$

Число уравнений будет равно числу стержней, так что, если узлов n , то стержней, а следовательно и уравнений будет $s = 2n$, т. е. соответственно числу неизвестных перемещений δx и δy .

Таким образом, задача по существу решена. Однако, этот прием непопулярен, так как представляет ряд технических затруднений, в особенности при большом числе стержней фермы.

Практически обыкновенно пользуются частными приемами, представляющими более или менее удачные интерпретации вышеуказанного геометрического приема либо применение принципов Статики к решению геометрической задачи.

Здесь мы рассмотрим прием, доступный для элементарного вывода, относя другие способы к тем последующим частям курса (главы IV и V), где они окажутся более уместными.

2. Решение статическое. Прогиб фермы можно определить на основании анализа процесса определения прогибов для балок. Пользуясь графоаналитическим методом, мы находим прогиб какого-нибудь сечения балки, как статический момент от моментной нагрузки: обыкновенно площадь эпюры моментов разбивают на элементы $\frac{Mdx}{EJ}$ и вычисляют сумму моментов всех элементарных площадок, расположенных с одной стороны сечения, причем плечи x берут относительно сечения; прогиб вычисляют по формуле

$$y = \Sigma \frac{Mdx}{EJ} \cdot x$$

Но по (57), $Mdx : EJ$ есть изменение угла между двумя элементарно близкими сечениями балки; поэтому прогиб всякого ее сечения представляет статический момент этих изменений, составленный относительно сечения. Это следует понимать так: мы находим изменения углов между каждой парой соседних элементов балки и принимаем изменения за силы; односторонний статический момент этих сил будет прогибом всякого сечения, относительно которого составляется момент.

Легко видеть, что нет никаких препятствий для обобщения этого принципа на случай балок, ось которых изогнута или даже изломана под углом; во всех случаях элемент эпюры моментов, разделенный на жест-

кость, представляет изменение угла соседних сечений, а статический момент таких изменений будет прогибом. Очевидно также, что принцип не связан со способом изменения углов, и остается справедливым для всех случаев этого изменения, так что, его можно применить и к случаю стержней, соединенных шарнирами. Если мы имеем цепь из нескольких прямых стержней, соединенных шарнирами, и зададимся изменением углов между стержнями, то на основании того же статического момента угловых изменений относительно конца цепи мы определим перемещение конца цепи по отношению к ее началу. В этом заключается принцип так называемого шарнирного многоугольника и основание для метода упругих весов, предложенного О. Мором ¹⁾.

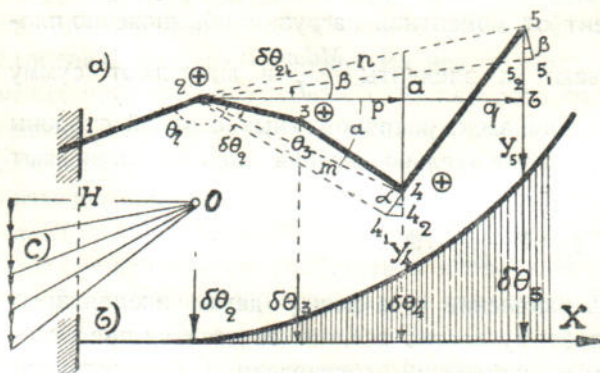
Для любой упругой системы, будет ли то шарнирная цепь из стержней или балка из упруго связанных элементов,—относительный прогиб каких-нибудь ее двух сечений определяется следующим образом: устанавливают изменение углов между элементами системы в пределах между сечениями, принимают изменения углов за силы и составляют статический момент всех этих сил относительно одного из сечений.

Будем называть эти фиктивные силы упругими вращательными грузами.

Прогиб всегда выражается статическим моментом, односторонних упругих вращательных грузов относительно того сечения, для которого он определяется.

Приведем еще другое, более детальное доказательство того же правила

3. Другое доказательство. Рассмотрим систему нескольких элементов l_1, l_2, l_3, \dots из упругих брусков, упруго связанных между собой в узлах



Фиг. 64²⁾.

2, 3, 4... фиг. 64. При действии внешних сил в системе возникают удлинения брусков и повороты отдельных сечений, в результате чего система деформируется. Задача исследования заключается в разыскании этой деформации. Имея в виду получить общий вывод, остановимся на каком-нибудь произвольном сечении, например 4,

и будем вести рассуждение таким образом, чтобы оно могло относиться одинаково ко всем сечениям рассматриваемого многоугольника. Перемещение 4-го сечения становится вполне известным, когда определены его перемещения по двум осям X и Y и угол поворота.

¹⁾ Сравн.: О. Mohr. Beitrag zur Theorie des Fachwerkes в «Der Eisenbahn» за 1910 г. № 1.

²⁾ На фиг. б) вместо ломанной ошибочно вычерчено плавная кривая.

Совершенно ясно, что поступательные перемещения вдоль осей X и Y сечения 4 есть результат удлинения отдельных элементов системы и изменения углов между ними; и так как мы условились всегда рассматривать малые перемещения, то можем воспользоваться принципом независимости действий, и интересующий нас результат получить путем сложения отдельных влияний: удлинений и изменения углов. Это можно обосновать на том, что результирующее перемещение, как полный дифференциал, должно быть равно сумме частных перемещений—изменений тех величин, от которых оно зависит:

$$df(x, y, z, \dots) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \dots$$

Это позволяет, во-первых, рассматривать отдельно каждый род перемещений, и, во-вторых, учитывать отдельно влияние каждого элемента системы на общий результат. Прежде всего рассмотрим влияние изменения углов.

Влияние изменения углов между элементами многоугольника. Положим, что левая часть системы до узла 2—неподвижна, и только угол Θ_2 получил приращение, например, уменьшился на $\delta\Theta_2$, вследствие чего правая часть повернулась вокруг центра 2 по часовой стрелке на угол $\delta\Theta_2$. При вращении вокруг точки 2 твердого тела 2—4, конец 4 радиуса вращения 2—4 опишет дугу:

$$44_1 = 24 \cdot \angle 424_1 = m\delta\Theta_2;$$

приблизненно ее можно принять за перпендикуляр к радиусу ¹⁾.

Проекция перемещения сечения 4 на направление какой-нибудь оси Y_4 :

$$44_2 = 44_1 \cos \alpha = m\delta\Theta_2 \cos \alpha.$$

Но углы 4_144_2 и $42a$ равны, вследствие перпендикулярности сторон, поэтому:

$$44_2 = \delta\Theta_2 m \cos \alpha = \delta\Theta_2 \cdot p,$$

где $p = 24 \cos \alpha$, есть перпендикуляр из угла 2 на направление оси Y_4 .

Следовательно, перемещение какого-нибудь сечения 4 по направлению оси Y_4 , вследствие изменения угла 2, выражается произведением изменения угла на расстояние его вершины до оси Y_4 , проходящей через рассматриваемое сечение.

Рассуждение можно повторить относительно всякого другого сечения системы, например, для сечения 5 можно написать:

$$55_2 = 55_1 \cos \beta = n\delta\Theta_2 \cos \beta = \delta\Theta_2 n \cos \beta = \delta\Theta_2 \cdot q,$$

где q —расстояние точки 2 до оси Y_5 . Таким образом, изменение одного угла Θ_2 отражается на всех правых сечениях системы. Очевидно, если кроме угла Θ_2 изменяются углы $\Theta_1, \Theta_3, \Theta_4$, вообще все углы, расположенные слева от сечения 5, перемещение которого разыскивается, то сечение

¹⁾ При малых, даже конечных перемещениях это допущение не выходит из пределов точности расчетов; в пределе же, для исчезающе малых величин, допущение не нарушает вполне точного решения (см. фиг. 28 и относящуюся к ней выноску).

будет получать новые перемещения. В результате получится их алгебраическая сумма:

$$\delta y_n = \sum_{n-1} \delta \theta \cdot x \dots \dots \dots (72),$$

где проекция перемещения n -го сечения на ось Y обозначена δy_n , а перпендикуляры на ось Y из вершин предшествующих узлов, претерпевающих изменение, обозначены x .

Следовательно: перемещение сечения n по направлению какой-нибудь оси выражается алгебраической суммой произведений из изменения всех углов, расположенных с одной стороны, и их расстояния до оси, проведенной через n -ое сечение.

Это выражение аналогично тому, что определяет изгибающий момент для какого-нибудь сечения балки, нагруженной силами $\delta \theta$; поэтому, если на фиг. b вообразим балку, перпендикулярную к оси Y и нагруженную силами $\delta \theta$, параллельными этой оси, то нахождение перемещения какого-нибудь сечения многоугольника заменится разысканием изгибающего момента для соответствующего сечения балки, например: изгибающий момент для сечения 4 балки фиг. b представит вертикальное перемещение сечения 4 данного упругого многоугольника.

Совершенно очевидно, что разыскание перемещения может быть выполнено также и графически, путем известного построения эпюры моментов. На фиг. 64 — b и c сделано такое построение, при чем перемещения узлов получаются путем умножения заштрихованных ординат фиг. b на нормальный луч H фиг. c .

4. Обобщения. а) Указанный способ определения прогибов можно распространить и на другую ось координат X . Совершенно таким же образом, как для оси Y , мы можем написать и для оси X :

$$\delta x_n = \sum_{n-1} \delta \theta \cdot y \dots \dots \dots (73),$$

и считать, что перемещение сечения вдоль оси X определяется статическим моментом вращательных грузов $\delta \theta$, параллельных оси X . Чтобы получить перемещение по оси X какого-нибудь n -го сечения надо во всех пунктах с одной стороны сечения, где происходит изменение углов $\delta \theta$, представить силы $\delta \theta$, параллельные оси X , и умножить их на расстояния y до оси X . Составляя сумму произведений по форм. (73), получим искомое перемещение. Конечно, его можно получить и графически, если представить вертикальную балку, перпендикулярную к оси X и вращательные грузы $\delta \theta$ направить горизонтально.

б) Прежде для прямых балок было доказано (см. § 3,1), что прогиб в каком-нибудь сечении балки есть односторонний момент, составленный для этого сечения из грузовой площадки в виде эпюры моментов, разделенной на жесткость. Но так как элементы моментной грузовой площади

$\frac{M dx}{EJ}$ есть углы поворота элементов, то, по существу, было доказано,

что прогиб какого-нибудь сечения балки выражается моментом относительно этого сечения всех элементарных изменений углов, происходящих с одной стороны сечения. Теперь основная теорема графоаналитического метода обобщается на случай ломанных брусков и дает перемещение, как по оси Y , так и по оси X .

с) Благодаря тому, что углы $\frac{dx}{\rho}$ всегда выражаются через моменты $\frac{Mdx}{EJ}$, очевидно, что и в случае ломанных брусков поступательное перемещение вдоль какой-нибудь оси, проходящей через сечение, выражается моментом относительно этой оси для односторонней части эпюры моментов.

Отсюда — такое правило для разыскания перемещения ломанного бруска вдоль какой-нибудь оси: надо построить эпюру моментов для всех участков бруска и составить момент от эпюры, расположенной с одной стороны от того сечения, перемещение которого разыскивается.

д) Теорема распространяется и на кривые бруски. Вообразим ломанный брусок с большим числом сторон малой длины δs , — в пределе получится кривой брусок; и если для ломанного мы писали

$$\delta y = \sum \frac{Mdx \cdot x}{EJ}, \dots \dots \dots (74),$$

то для кривого, получим

$$\delta y = \int_0^s \frac{Mds \cdot x}{EJ} \dots \dots \dots (75),$$

где s — есть длина бруска от плоскости заделки до того сечения, перемещение которого разыскивается.

е) При выводе выражения для перемещений не накладывалось никаких ограничительных условий на способ изменения углов между элементами ломанной линии. Поэтому выражениями (72) и (73) можно воспользоваться как для балок, так и для шарнирных цепей, если каким-нибудь образом определены изменения углов между их звеньями.

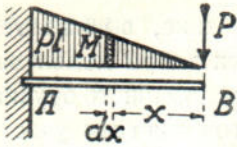
ф) При выполнении вышеприведенных расчетов необходимо считаться со знаком изменения углов между элементами многоугольника и отличать увеличение от уменьшения углов.

На фиг. 64 ось Y идет в ту сторону, куда перемещаются сечения ломанной консольной цепи при уменьшении углов Θ ; поэтому уменьшения углов считаются положительными и отмечены знаком $+$, так как при этом условии знак результата прямо указывает, в какую сторону происходит перемещение: по течению оси Y или против течения¹⁾. Прогиб цепной системы звеньев, подвешенной к двум пилонам, идет вниз, т. е. в сторону оси Y , когда нижние углы между ее звеньями увеличиваются; поэтому увеличение углов Θ надо считать положительным.

5. Угол поворота упругой цепи. Описанным способом определяется поступательное перемещение какого-нибудь сечения системы. П о в о -

¹⁾ Для согласования знака ординат эпюры b следовало бы полюс лучей O фиг. 6 поместить слева от сил. Мы повернули его направо, чтобы уменьшить площадь клише.

рот того же сечения есть алгебраическая сумма изменений всех углов, лежащих слева от рассматриваемого n -го сечения. Это очевидно, и очевидно также соответствие углов поворота поперечным силам балки. Разыскание углов поворота разных сечений упругого многоугольника представляется, таким образом, построением эпюры поперечных сил для некоторых грузов $\delta\theta$, или для моментной нагрузки, разделенной на жесткость балки EJ , т. е. для $\frac{Mdx}{EJ}$ (76).



Фиг. 65.

6. Примеры. а) Рассмотрим цельный брусок, одним концом заделанный в стенку (консоль фиг. 65), и нагруженный на свободном конце силой P . Угол поворота какого-нибудь элемента dx на расстоянии x от конца B есть $\delta\theta = \frac{Mdx}{EJ}$; следовательно, по

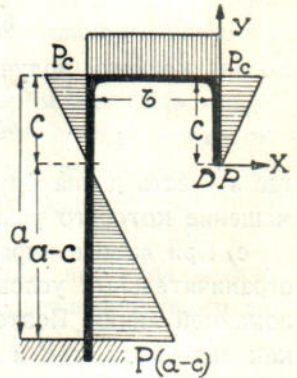
форм. (75), прогиб конца балки

$$y = \int_0^l \frac{Mdx \cdot x}{EJ} = \int_0^l \frac{Pxx dx}{EJ} = \left(\frac{Px^3}{3EJ} \right)_0^l = \frac{Pl^3}{3EJ},$$

что совпадает с общеизвестной формулой.

б) Кран типа Г (глаголь фиг. 66) при горизонтальной силе P . Если все узлы совершенно жестки, то поворот конца D обуславливается только суммой поворотов трех прямолинейных отрезков a, b и c изгибаемых моментами, показанными на заштрихованных эпюрах. А так как углы поворота выражаются площадками эпюры моментов, то непосредственно по эпюре получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Pc^2}{2EJ} + \frac{Pcb}{EJ} + \frac{Pca}{EJ} - \frac{Pa^2}{2EJ} = \\ &= \frac{P}{2EJ} (c^2 + 2cb + 2ca - a^2). \end{aligned}$$



Фиг. 66.

Проводя оси X и Y через конец D , получим горизонтальное перемещение на основании формул (73) и (75), если составим статические моменты относительно оси X для всех участков эпюры моментов. При этом, по принятому уже условию, отметим знаком плюс изменения углов, вращающие правую часть системы относительно неподвижной левой по часовой стрелке, т. е. — уменьшения углов. Плечи у площадок эпюры моментов относительно оси X также будем отмечать знаком плюс, если центр тяжести площадки лежит выше оси X , и — знаком минус, если он ниже. При таких условиях, непосредственно по чертежу имеем:

$$\begin{aligned} EJ\delta x &= \frac{Pc^2}{2} \cdot \frac{2}{3}c + Pcb \cdot c - Pca \left(\frac{a}{2} - c \right) + \frac{Pa^2}{2} \left(\frac{2}{3}a - c \right) = \\ &= P \left(\frac{c^3}{3} + \frac{a^3}{3} + c^2b + c^2a - a^2c \right). \end{aligned}$$

Предлагаем читателю таким же образом определить вертикальное перемещение той же точки крана.

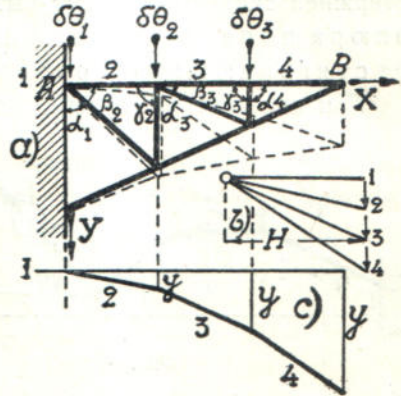
с) Консоль из стержней. Положим, что для консольной фермы фиг. 67 требуется определить прогибы верхнего пояса AB . Углы α, β, γ , образующие треугольники известны, а также предварительно вычислены изменения этих углов $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$.

Верхний пояс представляет тот частный случай стержневого многоугольника, когда стержни его располагаются на одной прямой, так как углы $\theta_1 = \alpha_1 + \beta_2 = 90^\circ$, $\theta_2 = \gamma_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$, $\theta_3 = \gamma_3 + \alpha_4 = 180^\circ$.

Прикладываем изменения углов:

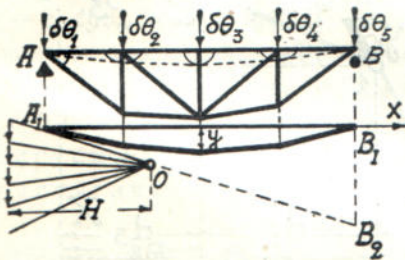
$$\theta\delta_1, \theta\delta_2, \theta\delta_3$$

в виде сил к соответствующим узлам фермы на фиг. *a*; на фиг. *b* строим многоугольник сил и проводим нормальный луч длиной H . Если теперь на фиг. *c* построим веревочный многоугольник, то явится возможность непосредственно измерять прогибы узлов верхнего пояса: они представляются ординатами y , отсчитываемыми от 1-ой стороны веревочного многоугольника, умноженными на длину нормального луча H . Вообще, построение эпюры прогибов можно, во всех отношениях, отождествить с построением эпюры моментов.



Фиг. 67.

d) Случай балочной фермы (фиг. 68). После построения веревочного многоугольника здесь предстоит надлежащим образом провести замыкающую.



Фиг. 68.

Как и во всех предыдущих случаях, нахождение прогибов есть интегрирование, выполняемое графически. Два независимых интегрирования находятся в нашем распоряжении, и мы их можем взять таким образом, чтобы удовлетворить условиям опор. (Это равноценно надлежащему выбору осей координат).

Для балки на двух опорах вопрос решается проведением замыкающей веревочного многоугольника через нулевые точки A_1 и B_1 под опорами A и B .

7. Влияние удлинений. Если удлинения элемента многоугольника l есть δl , а угол между элементом l и осью Y есть γ , то проекция удлинения на ось Y : $\delta y = \delta l \cos \gamma$, или, выражая по (71) через напряжение стержня: $\delta y = \frac{Nl}{EF} \cos \gamma$.

Перемещение какого-нибудь n -го узла системы, очевидно будет

$$\delta y = \sum \frac{Nl}{EF} \cos \gamma \dots \dots \dots (77a).$$

Точно также для оси X, получим

$$\delta x = \sum \frac{Nl}{EF} \sin \gamma = \sum \frac{Nl}{EF} \cos \varphi \dots \dots \dots (77b),$$

где φ — угол наклона к горизонту.

Эти выражения отождествляются с суммой проекций на данную ось всех односторонних фиктивных сил, состоящих из абсолютных удлинений стержней системы, и могут быть графически построены, как эпюра поперечных сил для балки, нагруженной упругими растягивающими грузами.

При составлении суммы, конечно, надо считаться со знаками проекций: они пишутся безошибочно, если сторонам многоугольника придать общее течение, и углы для косинусов отсчитывать по дуге, всегда начиная ее от стороны многоугольника и ведя до направления оси проекций, как показано на фиг. 69. Однако,

так как $\cos a = \cos(-a)$, то можно ограничиваться всегда меньшим углом между стержнем и осью, а именно: либо обведенным дужкой, либо пополняющим его до 360° .

На фиг. 69 только одна проекция 3—4 оказывается отрицательной.

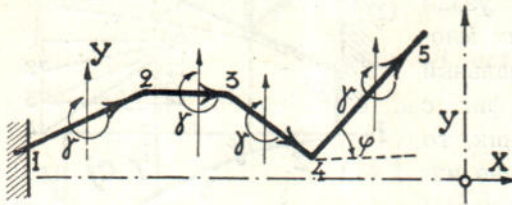
Прогиб, являющийся результатом одних только удлинений системы, можно представить также в виде момента некоторых условных сил. Такое описание прогиба иногда оказывает услуги и упрощает последующие выводы. Положим, что на фиг. 70, какие-нибудь три стержня цепи 1,2,3 получают удлинения $\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3 \dots$. Если бы удлинение δl_1 получил только первый стержень, то конец 1 его приподнялся бы относительно начала O на величину $y_1 = \delta l_1 \cos(90^\circ - \varphi_1) = \delta l_1 \sin \varphi_1$, где φ_1 — угол наклона стержня.

Но $\delta l_1 = e_1 l_1 = e_1 \frac{d_1}{\cos \varphi_1}$, где e_1 — относительное удлинение стержни l_1 .

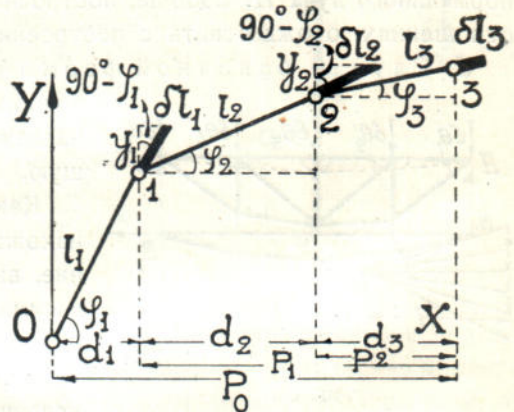
Поэтому $y_1 = e_1 \frac{d_1}{\cos \varphi_1} \cdot \sin \varphi_1 = e_1 \operatorname{tg} \varphi_1 d_1$.

Это представляет момент некоторой вертикальной фиктивной силы $e_1 \operatorname{tg} \varphi_1$ относительно другого конца стержня.

Так как система не поворачивается, то вся правая часть ее приподыметься на y_1 , и в частности узел 3 получит такой же прогиб.



Фиг. 69.



Фиг. 70.

Отдельное рассмотрение удлинения λ_2 второго стержня приводит к такому же заключению: прогиб его правого конца и всех правых узлов системы, включая 3:

$$y_2 = e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 d_2,$$

т. е. будет моментом вертикальной фиктивной силы $e_2 \operatorname{tg}\varphi_2$, приложенной к концу стержня.

Следовательно, при удлинении всех стержней системы прогиб узла 3 выражается суммой

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = e_1 \operatorname{tg}\varphi_1 d_1 + e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 d_2 + e_3 \operatorname{tg}\varphi_3 d_3,$$

т. е. суммой моментов узловых вертикальных фиктивных сил $e \operatorname{tg}\varphi$ относительно ближайшего предшествующего узла.

Преобразуем выражение так, чтобы оно представляло момент относительно того узла, прогиб которого разыскивается. С этой целью заменим:

$$d_1 = p_0 - d_2 - d_3, \quad d_2 = p_0 - d_1 - d_3, \quad \text{т. е. напомним:}$$

$$y = e_1 \operatorname{tg}\varphi_1 p_0 - e_1 \operatorname{tg}\varphi_1 (d_2 + d_3) + e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 p_0 - e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 d_1 - e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 d_3 + e_3 \operatorname{tg}\varphi_3 d_3 = \\ = (e_1 \operatorname{tg}\varphi_1) p_0 + (-e_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + e_2 \operatorname{tg}\varphi_2) (d_2 + d_3) + (-e_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + e_3 \operatorname{tg}\varphi_3) d_3.$$

Члены, стоящие в скобках, составлены по одному общему закону:

$$-e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1},$$

заключая удлинения и углы наклона двух соседних стержней узла; только в первых скобках нет отрицательного члена, так как в начальной точке мы предположили, отсутствие предшествующего стержня, т. е. приняли: $e_0 = 0$.

Если мы будем считать эти разности вертикальных фиктивных сил $(-e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1})$ упругими растягивающими силами P_m , то выражение для прогиба узла 3 представится

$$y_3 = P_0 p_0 + P_1 p_1 + P_2 p_2 \dots \dots \dots (78-a)$$

Таким образом, прогиб какого-нибудь узла стержневой системы измеряется односторонним моментом упругих растягивающих сил:

$$P_m = -e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}, \dots \dots \dots (78-b)$$

относительно этого узла.

8. Общее выражение для поступательного перемещения системы.

В общем случае, когда происходит изменение углов между элементами системы и одновременно—удлинение ее элементов, поступательное перемещение какого-нибудь узла составляется путем сложения перемещений на основании формул (72—73) и (77—78).

а) Для шарнирного многоугольника получается: перемещение по оси Y:

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= \Sigma \delta \theta \cdot x + \Sigma \delta l \sin \varphi, \\ \text{или: } \delta y &= \Sigma \delta \theta x + \Sigma P_{my} x = \Sigma (\delta \theta + P_{my}) x, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (79-a)$$

где буквой x обозначено расстояние того угла, где происходит изменение $\delta \theta$, и буквой P_{my} обозначен фиктивный упругий растягивающий груз узла:

$$P_{my} = -e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}$$

по формуле (78-b).

Таким же образом для оси X :

$$\delta x = \Sigma \delta \Theta \cdot y + \Sigma \delta l \cos \varphi,$$

или $\delta x = \Sigma (\delta \Theta + P_{mx}) y$, где $P_{mx} = -e_m \operatorname{ctg} \varphi_m + e_{m+1} \operatorname{ctg} \varphi_{m+1} \dots$ (79-b).

б) Для многоугольника из жестко связанных элементов, как балка, рама и т. п.:

$$\begin{aligned} \delta y &= \int_0^s \frac{M x ds}{EJ} + \int_0^s \frac{N dy}{EF} \quad \text{и} \\ \delta x &= \int_0^s \frac{M y ds}{EJ} + \int_0^s \frac{N dx}{EF} \dots \dots \dots (80). \end{aligned}$$

9. Случай замкнутого контура. Представим себе, что замкнутый контур в каком-нибудь сечении разрезан, закрепим один из его концов, освобожденных сечением и будем определять перемещение другого, пользуясь предыдущими указаниями. Конечно, к свободному концу контура применимы формулы (76) и (80).

В замкнутом контуре сумма внешних углов постоянна, $2d$, и не зависит от изменения отдельных внутренних углов; очевидно, при всех изменениях внутренних углов сумма углов также остается постоянной, так что, сумма изменений должна быть нулем, т. е. должна быть:

$$\Sigma \delta \Theta = 0, \quad \text{или} \quad \int \frac{M ds}{EJ} = 0 \dots \dots \dots (81).$$

Представляя изменения углов $\delta \Theta$ в виде сил, мы приходим таким образом к паре сил: в замкнутом контуре упругие вращательные силы приводятся к паре.

Кроме того, в замкнутом контуре не происходит отделения освобожденного нами конца контура от закрепленного; следовательно, поступательное перемещение (79) должно быть равно нулю по направлению какой угодно оси:

$$\Sigma \delta \Theta \cdot y + \Sigma \delta l \cos \varphi = 0 \dots \dots \dots (82).$$

Зависимости (81) и (82) могут служить для проверки вычислений и иногда могут быть использованы для определения неизвестных.

10. Другой способ описания перемещений. Перемещение прямой, например, какого-нибудь сечения бруска, вообще определяется тремя параметрами, так как для движения на плоскости кинематика предоставляет 3 независимых уравнения. Обычно этими параметрами служат поступания вдоль двух осей X и Y и вращение вокруг перпендикулярной оси Z ;—этот прием, именно, и рассмотрен в предыдущих разделах настоящего параграфа. Но можно определить перемещение прямой и другими тремя параметрами, например, проекциями на 3 оси, лежащие в плоскости перемещения. Если оси не пересекаются в одной точке, то проекции перемещения будут совершенно независимы и могут служить для полного определения перемещения. Покажем, что для независимости проекций перемещения, 3 избранные оси не должны пересекаться в одной точке. Прежде всего заметим, что проекция поступательного перемещения точки

на какую-нибудь ось, проходящую через эту точку, не зависит от положения точки на оси, ибо выражается изменением угла в каком-нибудь сечении контура, умноженным на перпендикуляр из этого сечения на ось; эти же множители не зависят от положения перемещаемой точки на оси. Далее вообразим 3 точки a , b и c , неизменно связанные с тем сечением, перемещение которого определяется, и расположенные порознь на некоторых осях X , Y , Z , не пересекающихся в одной точке: перемещение сечения определится перемещением точек a , b и c , которые, по предыдущему, вначале могут быть расположены произвольно.

Теперь положим, что перемещения по двум осям X и Y равны m и n ; и так как они не зависят от положения точки на оси, то сместим их до пересечения O осей X и Y . Истинная величина перемещения, очевидно, будет диагональю параллелограмма, построенного на m и n . Проектируя эту диагональ на третью ось Z , проходящую через O , мы получим величину, зависящую от m и n . Очевидно, она не может служить третьим параметром. Если же ось Z не проходит через точку O , то смещение по ней, вообще, не может быть получено из смещений m и n ; и проекция на такую ось может служить третьим параметром перемещения.

На этом основании, полное представление о перемещении конца какого-нибудь ломанного бруса можно дать, назначая две оси параллельные, а третью, — их пересекающую: достаточно определить перемещения по этим трем осям.

§ 9. Вычисление прогиба для стержневых ферм. При расчете стержневых ферм, обыкновенно, определяют прогибы их поясов, так что приходится решать задачу о прогибе шарнирного многоугольника.

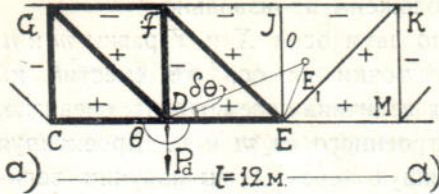
В предыдущем параграфе показано, что для определения прогиба какого угодно шарнирного многоугольника необходимо иметь в распоряжении изменения углов между его элементами и изменения длины элементов. Изгибающий момент первых изменений плюс поперечная сила из вторых относительно назначенной оси дает прогиб по этой оси.

Конечно, это справедливо и для прогиба любого пояса стержневой фермы.

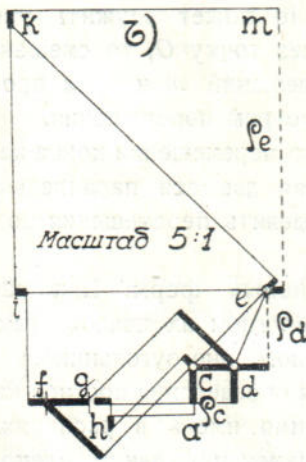
На прогиб большое влияние оказывает изменение углов между стержнями пояса; малые же удлинения стержней, имеющие место в действительности, в большинстве случаев вносят лишь незначительные поправки; при прямолинейных поясах фермы они и вовсе не влияют на прогиб, так как по уравнениям (78 и 79) при $\varphi = 0$ член P пропадает, и прогибы обуславливаются исключительно только поворотами $\delta\theta$.

1. Изменение углов. а) Графический способ. Изменение угла между двумя соседними стержнями пояса может быть определено путем построения диаграммы Виллио: один из стержней мы можем считать неподвижным и определить, на сколько по отношению к нему повернется другой. Так как одна точка второго стержня неподвижна — это общий шарнир двух стержней, находящийся в вершине их угла, то поворот второго стержня определится вращательным перемещением его свободного конца, разделенным на длину стержня. На фиг. 71 приведем пример та-

кого построения. Чтобы определить, насколько поворачивается стержень DE относительно CD , мы считаем CD неподвижным стержнем, начало его D совмещаем с полюсом O диаграммы Виллио фиг. b , откладываем удлинение стержня DC влево от $O(d)$ в виде вектора dc . Исходя из вектора dc , строим положение g узла G , затем находим f для узла F и, наконец, e — для узла E . Вектором de выражается перемещение свободного конца стержня DE . Так как величина и направление этого перемещения известны, то пристроивши его к узлу E , получим треугольник DEE_1 , из которого



а) $l = 12m$



Фиг. 71.

определяется искомое изменение угла $\delta\theta$. При малых угловых изменениях, которые только и встречаются в фермах, вычисление $\delta\theta$ упрощается, так как изменение угла $\delta\theta$ выражается через отношение $\rho : DE$, где ρ — перпендикулярная к стержню составляющая перемещения. Продолжая построение диаграммы Виллио влево, получим точку a для узла A .¹⁾ Вертикальная составляющая ρ_e вектора da представляет величину вращательного перемещения для конца A стержня CA . Очевидно, изменение угла C будет:

$$\delta\theta_c = \rho_e : CA \dots \dots \dots (83).$$

Так как ρ_e идет вниз от полюса, то $\delta\theta_c$ — отрицательно.

Таким же образом для правой части фермы найдем точку m , соответствующую узлу M ; она показывает, что подъем узла M больше, чем E . Разность высот точек m

и e , разделенная на длину панели ME , представляет угол поворота стержня ME :

$$\varphi = \rho_e : ME = \frac{md' - ed'}{ME} = \frac{\rho_e}{ME},$$

где md' и ed' — вертикальные проекции векторов md и ed .

Изменение угла E есть относительный поворот стержня ME вокруг стержня DE , так что:

$$\delta\theta_e = \varphi - \delta\theta_d = \frac{\rho_e}{ME} - \frac{\rho_d}{ED}.$$

При равных панелях d это будет:

$$\delta\theta_e = \frac{1}{d} (\rho_e - \rho_d) = \frac{1}{d} (dm' - de' - de') = \frac{1}{d} (dm' - 2de').$$

Для третьего узла M соответственно получим

$$\delta\theta_m = \frac{1}{d} (db' - 3de') \text{ и т. д. } \dots \dots \dots (84).$$

¹⁾ Концы фермы на чертеже не показаны.

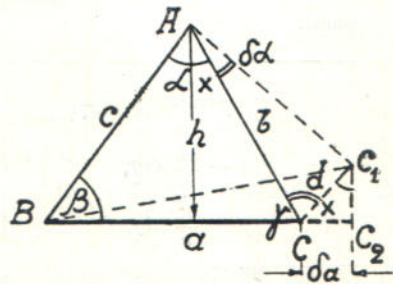
Для криволинейных поясов изменения углов определяются на основании тех же соображений.

б) Способ вычислительный. Изменение угла между двумя соседними стержнями пояса определится, если известны будут изменения углов тех треугольников решетки, которые сходятся в рассматриваемом угле. Так, на фиг. 71 изменение $\delta\theta$ определяется изменением углов CDG , GDF и FDE . Поэтому рассмотрим, как изменяются углы треугольников в стержневой ферме, работающей под нагрузкой.

Усилия стержней вызывают удлинения. Следовательно, здесь придется решать задачу об изменении углов треугольника, стороны которого получили данные приращения длины по форм. (71).

Положим, что на фиг. 72 стороны треугольника a, b, c получили малые приращения $\delta a, \delta b, \delta c$, и требуется определить, насколько изменились углы α, β, γ .

Выясним сначала, как изменятся все углы треугольника от удлинения одной только стороны a . Рассмотревши таким же образом отдельное влияние удлинения других сторон, не трудно будет получить суммарный результат.



Фиг. 72.

Если удлинилась только сторона a , то, очерчивая из B и A дуги радиусами b и $(a + \delta a)$, получим смещенное положение C_1 вершины C . Заменяем дуги, по малости перемещений, перпендикулярами: $C_1C_2 \perp BC$ и $CC_1 \perp AC$. Теперь $\delta\alpha = CC_1 : b$. Но из подобия треугольников CC_1C_2 и ACa :

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{b}{h}, \text{ или } CC_1 = \frac{CC_2 \cdot b}{h};$$

поэтому

$$\delta\alpha = \frac{CC_2 \cdot b}{h \cdot b} = \frac{\delta a}{h}$$

Но так как $a = h \operatorname{ctg}\beta + h \operatorname{ctg}\gamma$, то

$$h = \frac{a}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma} \text{ и } \delta\alpha = \frac{\delta a}{a} (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$$

Таким же образом: $\delta\beta = -\frac{C_1C_2}{BC_2} = -\frac{C_1C_2}{a}$,

а так как $C_1C_2 = CC_2 \operatorname{ctg}\gamma$, то $\delta\beta = -\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\gamma$.

Аналогично: $\delta\gamma = -\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\beta$.

Итак, удлинение одной стороны a дает следующие приращения углов:

противолежащего угла	α :	$\frac{\delta a}{a} (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \delta\alpha'$,	} (85).
прилежащего	„	β : $-\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\gamma$ $\delta\beta'$,	
„	„	γ : $-\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\beta$ $\delta\gamma'$.	

Такие же выводы можно было бы сделать по отношению к изменению любой стороны треугольника; поэтому круговой перестановкой букв получаем: от удлинения стороны b :

$$\delta\alpha'' = -\frac{\delta b}{b} \operatorname{ctg}\gamma; \delta\beta'' = \frac{\delta b}{b} (\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha); \delta\gamma'' = -\frac{\delta b}{b} \operatorname{ctg}\alpha. \dots (86)$$

от удлинения стороны c :

$$\delta\alpha''' = -\frac{\delta c}{c} \operatorname{ctg}\beta; \delta\beta''' = -\frac{\delta c}{c} \operatorname{ctg}\alpha; \delta\gamma''' = \frac{\delta c}{c} (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \dots (87).$$

Сопоставляя в таблице, получим:

При удлинении стороны:	Получается приращение углов:		
	α	β	γ
a	$\frac{\delta a}{a} (\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta)$	$-\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\gamma$	$-\frac{\delta a}{a} \operatorname{ctg}\beta$
b	$-\frac{\delta b}{b} \operatorname{ctg}\gamma$	$\frac{\delta b}{b} (\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha)$	$-\frac{\delta b}{b} \operatorname{ctg}\alpha$
c	$-\frac{\delta c}{c} \operatorname{ctg}\beta$	$-\frac{\delta c}{c} \operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{c}{c} (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$
При удлинении всех сторон: Σ	$\left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta c}{c}\right) \operatorname{ctg}\beta + \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b}\right) \operatorname{ctg}\gamma = \delta\alpha$	$\frac{\delta\beta}{\beta} = \left(\frac{\delta b}{b} - \frac{\delta a}{a}\right) \operatorname{ctg}\gamma + \left(\frac{\delta b}{b} - \frac{\delta c}{c}\right) \operatorname{ctg}\alpha$	$\left(\frac{\delta c}{c} - \frac{\delta b}{b}\right) \operatorname{ctg}\alpha + \left(\frac{\delta c}{c} - \frac{\delta a}{a}\right) \operatorname{ctg}\beta = \delta\gamma$

Так как, в скобках стоят относительные удлинения сторон треугольника, то обозначая их e , перепишем формулы:

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= (e_a - e_c) \operatorname{ctg}\beta + (e_a - e_b) \operatorname{ctg}\gamma \\ \delta\beta &= (e_b - e_a) \operatorname{ctg}\gamma + (e_b - e_c) \operatorname{ctg}\alpha \dots \dots \dots (88), \\ \delta\gamma &= (e_c - e_b) \operatorname{ctg}\alpha + (e_c - e_a) \operatorname{ctg}\beta \end{aligned}$$

или, заменяя относительное удлинение через напряжение по формуле $n = Ee$:

$$\begin{aligned} E\delta\alpha &= (n_a - n_c) \operatorname{ctg}\beta + (n_a - n_b) \operatorname{ctg}\gamma \\ E\delta\beta &= (n_b - n_a) \operatorname{ctg}\gamma + (n_b - n_c) \operatorname{ctg}\alpha \dots \dots \dots (89). \\ E\delta\gamma &= (n_c - n_b) \operatorname{ctg}\alpha + (n_c - n_a) \operatorname{ctg}\beta \end{aligned}$$

2. Пример расчета прогибов, обусловленных изменением углов.

Ферма мостового крана с параллельными поясами фиг. 73. Для этой фермы известны: 1) усилия—они написаны, в тоннах, у стержней левой половины фермы и 2) площади сечений, написанные у тех же стержней в скобках.

а) Вычислим изменения углов отдельных треугольников. Для формул (89) предварительно определяем напряжение стержней.

Треугольник № 1 (А—9—1): $n_a = 24000 : 40 = 600$ кг/см.²

$$n_b = 34000 : 50 = +680 \quad ,,$$

$$n_c = 34000 : 60 = -567 \quad ,,$$

Таким же образом:

для треугольников №		2	3	4	5
напряжения:	n_a	-687	632	-720	655
	n_b	680	567	567	0
	n_c	-448	-448	0	0

Для всех треугольников $ctg\beta = ctg\gamma = 1$, а $ctg\alpha = 0$. Поэтому для треугольника № 1:

$$E\delta\alpha = (+600 + 567) \cdot 1 + (+600 - 680) \cdot 1 = +1087 \text{ кг/см.}^2$$

$$E\delta\beta = (+680 - 600) \cdot 1 + (+680 + 567) \cdot 0 = +80 \text{ ,,}$$

$$E\delta\gamma = (-567 - 680) \cdot 0 + (-567 - 600) \cdot 1 = -1167 \text{ ,,}$$

$$\text{Сумма} = 0$$

Таким же образом:

для треугольников		№	2	3	4	5
изменения углов: (эти изменения написаны в правой части фермы).	$E\delta\alpha$		-1606	1145	-2007	1310
	$E\delta\beta$		1367	-65	1287	-655
	$E\delta\gamma$		239	-1080	720	-655
Сумма			0	0	0	0

b) Вычисляем изменения углов Θ , как сумму изменений тех углов, которые сосредоточены в узлах нижнего пояса:

$$E\delta\Theta_1 = (\delta\gamma_1 + \delta\alpha_2 + \delta\beta_3) \quad E = -1167 - 1606 - 65 = -2838 \text{ кг./см}^2.$$

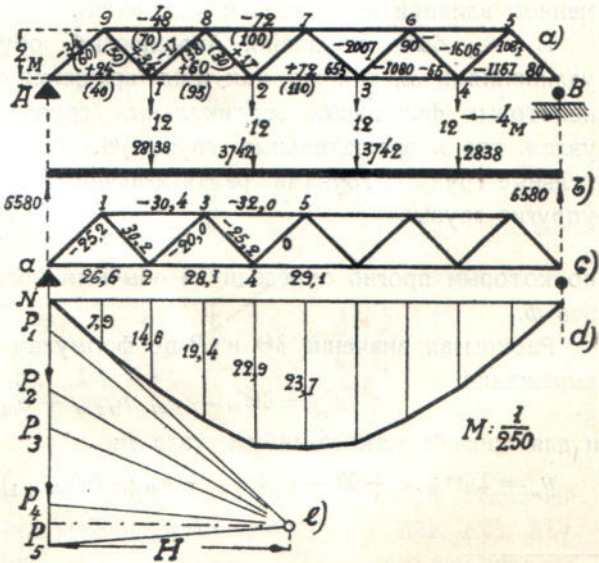
$$E\delta\Theta_2 = (\delta\gamma_3 + \delta\alpha_4 + \delta\beta_5) \quad E = -1080 - 2007 - 655 = -3742 \text{ ,,}$$

Эти величины и принимаем за нагрузку балки, приложенную в узлах нижнего пояса 1 и 2 (фиг. b). По симметрии, такие же грузы прикладываем и с правой стороны.

Реакции опор от нагрузки оказываются:

$$A_1 = 2838 + 3742 = 6580 = B_1.$$

c) Наконец, определяем искомые прогибы: под узлом 2 это будет момент всех внешних сил, расположенных слева. Но так как были отложены силы $\delta\Theta$, увеличенные в E раз,



Фиг. 73¹⁾.

то при вычислении момент должен быть соответственно уменьшен:

1) Клише изготовлено в 0,85 натуральной величины оригинального чертежа.

$$y_2 = \frac{1^1}{1,8 \cdot 10^6} (6580.400.2 - 2838.400) = 2,29 \text{ см.}$$

Конечно, вычисление может быть заменено построением. На фиг. 73 *e* построение сделано при следующих данных: угловые изменения, умноженные на E , т. е. $E\delta\theta$, показаны векторами NP_2 и P_2P_4 в масштабе 1 мм. = 200 кг/см²). Чтобы сохранить масштаб веревочной кривой и длина нормального луча H также увеличена в E раз, т. е. принято:

$$H = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см.}^2, \text{ т. е. } \frac{1,8 \cdot 10^6}{200} \text{ мм.}$$

Для того же, чтобы прогибы из масштаба чертежа фиг. *a*) в $1/25$ увеличить до натуральных, длина H уменьшена в 250 раз. Окончательно на чертеже *e* отложено

$$H = \frac{1,8 \cdot 10}{200 \cdot 250} = 36 \text{ мм.}$$

Веревочный многоугольник, построенный на фиг. *d*) дает для узла 1 прогиб 1,46 см., и для узла 2 прогиб 2,29 см., что совпадает с вышеприведенными величинами, полученными вычислением.

Так как вычисление момента от ряда сосредоточенных сил не представляет затруднений, то лучше пользоваться вычислительным приемом, чтобы полностью использовать точность предшествовавших вычислений,

3. Расчет прогибов при изменении углов и удлинении стержней.

Если линию прогибов, вызванных одними только поворотами, можно построить, как веревочный многоугольник, то естественно стремиться таким же путем определять прогибы и в более общем случае, при одновременном влиянии поворотов и удлинений.

В § 8,7 было показано, что прогиб, обусловленный одними только удлинениями δl , так же, как и для вращений $\delta\theta$, представляется моментом некоторых фиктивных вертикальных грузов P , приложенных в тех же узлах, что и вращательные грузы $\delta\theta$. Очевидно, соединяя вместе вращательные грузы с грузами растягивающими, мы получим такие фиктивные упругие грузы:

$$\phi = \delta\theta + P,$$

по которым прогиб определится обычным образом, т. е. как момент грузов ϕ .

Раскрывая значение $\delta\theta$ и P по формулам (78) и (79), получаем для ϕ выражение:

$$\phi_m = \delta\theta_m - e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}, \dots (90)$$

и для прогиба какого-нибудь узла n :

$$y_n = \sum \delta\theta_m \cdot x + \sum (-e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}) x = \sum (\delta\theta_m - e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}) x \dots (91).$$

¹⁾ Этот пример заимствован у Мюллер-Бреслау, который принимает модуль упругости $E = 1,8 \cdot 10^6$ кг/см².

²⁾ На фиг. *e*), кроме $E\delta\theta$ для узлов 2 и 4 нижнего пояса, отложены еще грузы $E\delta\theta$ для узлов 1 и 3 верхнего пояса, чтобы иметь возможность получать прогибы одновременно для верхнего и для нижнего пояса.

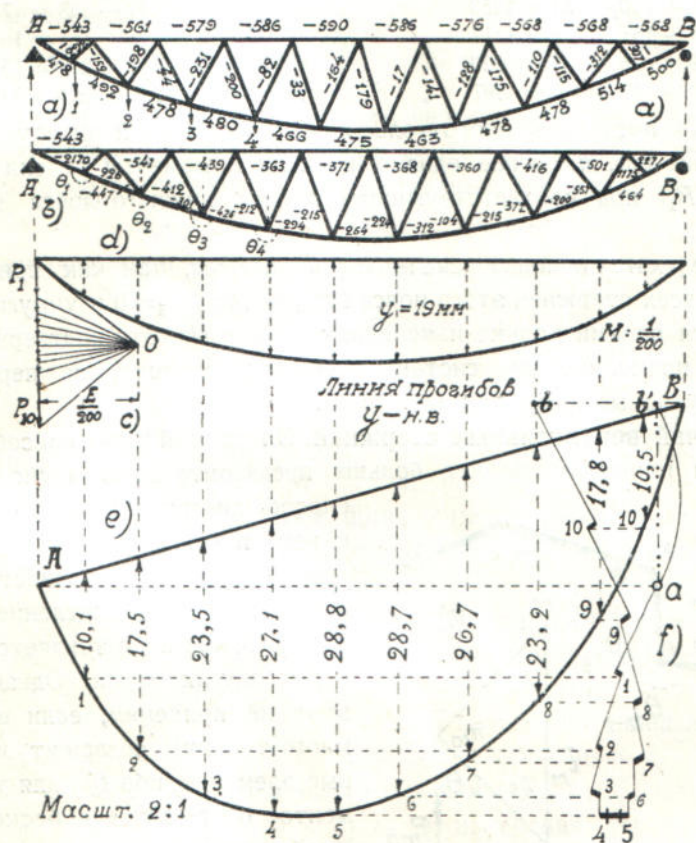
Иногда выражение (91) удобнее заменить другим, связанным с напряжениями $n = Ee$.

Подстановкою последней формулы, получаем для m -го узла:

$$\Phi_m = E\delta\Theta_m - n_m \operatorname{tg}\varphi_m + n_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1} \dots (92).$$

В последнем выражении буквою Φ_m обозначен фиктивный полный упругий груз, умноженный на модуль E ; поэтому при построении многоугольника сил нормальный луч H должен быть не 1, а также E , только тогда мы получим эпюру прогибов в масштабе длины стержневой системы.

4. Пример. На примере параболической фермы с треугольной решеткой фиг. 74 покажем построение линии прогибов, как веревочного много-



Фиг. 74¹⁾.

угольника. На фиг. *a* выпишем напряжения соответствующих стержней фермы; на фиг. *b*—приращение углов ее треугольников $E\delta\alpha$, $E\delta\beta$, $E\delta\gamma$. Тогда явится возможность вычислить изменение $E\delta\Theta$ углов шарнирного многоугольника, подобно тому, как сделано в предыдущем примере фиг. 73.

¹⁾ Построение нижней части *f*) этой фигуры описано в § 9, 10-и и к. Клише сделано в $\frac{3}{4}$ нат. вел. оригинального чертежа.

Идя по фиг. 74-*b* слева направо получим:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 $E\delta\theta = 3096, 1400, 1166, 869, 850, 904, 679, 988, 1522, 3446$ кг/см².

Далее для форм. (92) вычислим $ntg\varphi$, пользуясь напряжениями фиг. *a* и углами наклона стержней нижнего пояса, измеренными по той же фигуре:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
 $ntg\varphi = -253, -210, -151, -98, -47, 0, +47, +98, +151, 219, +264$ кг/см².

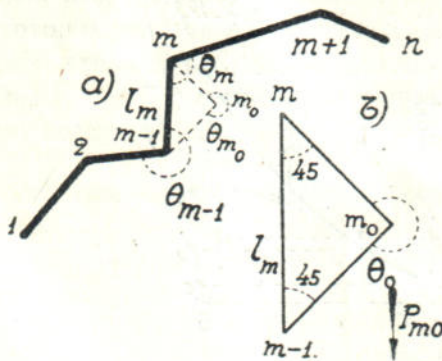
Теперь, подставляя в форм. (92) одно число из верхней строки и два числа того же и следующего столбца из нижней строки, получим следующие фиктивные силы:

$\Phi_1 = 3096 + 253 - 210 = 3139$ кг/см ²	$\Phi_6 = 904 - 0 + 47 = 951$ кг/см ²
$\Phi_2 = 1400 + 210 - 151 = 1459$ "	$\Phi_7 = 679 - 47 + 98 = 730$ "
$\Phi_3 = 1159 + 151 - 98 = 1212$ "	$\Phi_8 = 988 - 98 + 151 = 1041$ "
$\Phi_4 = 869 + 98 - 47 = 920$ "	$\Phi_9 = 1522 - 151 + 219 = 1590$ "
$\Phi_5 = 850 + 47 + 0 = 897$ "	$\Phi_{10} = 3446 - 219 + 264 = 3491$ "

Остается построить многоугольник сил на фиг. *c* и многоугольник веревочный на фиг. *d*. Лучше однако вычислить моменты от сил Φ (и реакций A_1, B_1) под соответствующими узлами нижнего пояса (см. конец раздела 2).

Для верхнего пояса расчеты упрощаются, так как при горизонтальности всех стержней этого пояса $tg\varphi_m = tg\varphi_{m+1} = 0$ и упругие грузы Φ выражаются одними только изменениями углов $\delta\theta$. Это подтверждает, что удлинение прямолинейной системы стержней не влияет на перемещения, перпендикулярные к их направлению¹⁾.

5. Случай вертикальных стержней. Описанный здесь способ построения эпюры прогибов требует больше предварительных вычислений, чем способ диаграммы Виллио. Поэтому к нему прибегают в тех случаях, где требуется большая точность, а также и тогда, когда вычисление углов и их изменений готовится попутно и для других целей. Однако способ этот не применим, если шарнирный многоугольник содержит вертикальные элементы, ибо $tg\varphi$ для таких элементов обращается в бесконечность. Чтобы распространить способ и на этот случай, надо данный многоугольник соответственно видоизменить.



Фиг. 75.

С этой целью вводят вспомогательные стержни, заменяющие неудобные вертикальные, и подбирают здесь такие вращательные грузы (изменения углов), при которых сохраняется фактическое изменение углов преобразованной части многоугольника. Например, при построении линии проги-

¹⁾ Сравни. начало § 9.

бов для многоугольника 1—2— n фиг. 75, вместо вертикального стержня $[m-1]-m$ помещаем два абсолютно жесткие стержня $[m-1]-m_0$ и $m_0 m$. Углы между ними выбираем, как удобнее, например, по 45° , как показано на фиг. b . При вычислении вращательных грузов P_{m-1} , P_{m_0} и P_m исходим из того, что стержень l_m получает удлинение δl_m , а углы Θ_{m-1} и Θ_m получают приращения $\delta\Theta_{m-1}$ и $\delta\Theta_m$.

Если стержень l_m удлинится на δl_m , то по форм. (88) при углах в 45° фиг. 75 b угол Θ_{m_0} получит приращение $+2e_m$:

$$\delta\Theta_{m_0} = +2e_m = +2 \frac{\delta l_m}{l_m}.$$

Так как сумма приращений должна быть нулем, то по симметрии углы $m-1$ и m получают приращения, равные половине этой величины и притом отрицательные:

$$\delta\Theta_{m-1} = -e_m = -\frac{\delta l_m}{l_m} \quad \text{и} \quad \delta\Theta_m = -e_m = -\frac{\delta l_m}{l_m}.$$

Вводя вспомогательные стержни, мы вносим в систему такие изменения углов. Очевидно, чтобы избавиться от этого нарушения системы, надо поместить в соответствующих узлах обратные фиктивные силы

$$+e_m \qquad -2e_m \qquad +e_m.$$

На этом основании вращательные грузы расчетного многоугольника в узлах:

	$m-1$	m_0	m
должны быть:	$\delta\Theta_{m-1} + \frac{\delta l_m}{l_m}$	$-2 \frac{\delta l_m}{l_m}$	$\delta\Theta_m + \frac{\delta l_m}{l_m}$

После этого линия прогибов строится обычным образом, но конечно, соблюдая порядок сил 1, 2... $m-1$, m_0 , m ...

6. Графическое определение фиктивных грузов. а) Упругие грузы представляют удобное средство для определения прогибов: достаточно построить для них веревочную линию или вычислить момент для данного сечения. Но вычисление величины грузов по форм. (92) довольно утомительно, ибо требует предварительного вычисления изменения углов во всех треугольниках фермы и пользования углами наклона стержней соответствующего пояса. Проф. П. В. Рабцевич предложил определять упругие грузы графически на основании следующих соображений¹⁾.

Положим, что на фиг. 76-а изменения длины $l_1, l_2, l_3...$ стержней шарнирного многоугольника суть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3...$, а изменения углов — $\delta\Theta$. Чтобы определить величину упругого груза для какого-нибудь узла m , проведем через соседние узлы прямые $(m-1) B$ и $(m+1) C$, параллельные оси прогибов Y , назовем стойками и возьмем на них произвольные точки B и C . Будем считать последние прикрепленными к стержням шарнирной системы $(m-1) m$ и $m (m+1)$ посредством абсолютно неизменяемых

¹⁾ Автор любезно предоставил нам рукопись, которую мы воспользовались в этом разделе и которая представляет удачную дальнейшую разработку задач § 52 и стр. 119 части I тома II Графической статики сооружений Мюллер-Бреслау. 1910.

стоек и подкосов. Тогда удастся доказать, что полный упругий груз узла m выражается изменением угла τ между подкосами $m B$ и $m C$. Действительно, $\angle \tau$ есть: $\tau = \theta + \gamma_m + \beta_{m+1}$, а потому его изменение:

$$\delta\tau = \delta\theta + \delta\gamma_m + \delta\beta_{m+1}.$$

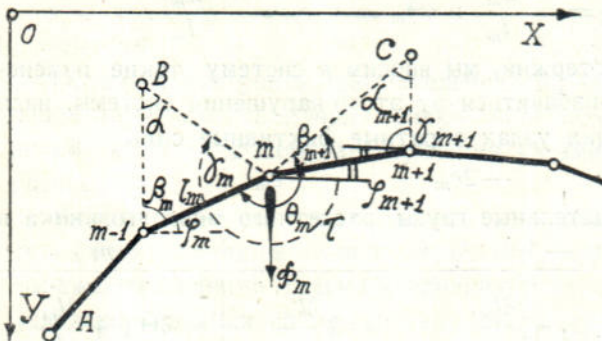
Но в треугольнике $B m (m-1)$, в котором только одна сторона $(m-1) m$ получает удлинение λ_m , изменение угла γ_m , по форм. (85) составляет:

$$\delta\gamma_m = -\frac{\lambda_m}{l_m} \operatorname{ctg}\beta_m = -e_m \operatorname{tg}\varphi_m, \text{ ибо } \beta_m = 90^\circ - \varphi_m.$$

Точно также $\delta\beta_{m+1} = -e_{m+1} \operatorname{ctg}\gamma_{m+1} = +e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1}$, ибо $\gamma_{m+1} = 90^\circ + \varphi_{m+1}$. Следовательно: $\delta\tau = \delta\theta_m - e_m \operatorname{tg}\varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg}\varphi_{m+1} = \phi_m$ т. е. полный упругий груз данного узла равняется изменению угла между

вспомогательными подкосами, исходящими из этого узла (сравн. форм. 90).

На этом основании вычисление по форм. (90) заменяется построением изменения угла, как было показано на фиг. 71: мы возьмем две панели пояса, связанные рассматриваемым



Фиг. 76-а).

мым узлом m , прикрепим к ним точки B и C абсолютно неизменяемыми стойками, параллельными оси прогибов Y , и такими же неизменяемыми подкосами, и построим диаграмму Виллио, принимая один из подкосов за исходный неподвижный стержень. По диаграмме окажется, что другой подкос повернется относительно первого—этот поворот будет нужным нам упругим грузом ϕ .

Вследствие малости рассматриваемых перемещений, угол поворота подкоса можно отождествлять с тангенсом угла.

б) Примеры. На фиг. 76—б) и в) приведен пример определения полного упругого груза для узла D нижнего пояса арочной фермы. Удлинения стержней фермы, увеличенные в 2000 раз, написаны на чертеже, но только для тех стержней, от которых зависит взаимное расположение вспомогательных подкосов BD и DH .

Исходим из подкоса BD , как от неподвижного стержня. Так как подкос абсолютно неизменяем, то точки b и d , соответствующие обоим его концам совмещаем с полюсом O фигуры в). По общим правилам построения диаграммы Виллио определяем последовательно точки c , g , f , e и, наконец, — h . Вектор Oh диаграммы представляет вращательное перемещение узла H фигуры б). Разделив Oh на длину DH , получим изменение угла τ , которое является в то же время и искомым упругим грузом ϕ .

На фигуре *c*) вектор Oh идет вверх; следовательно, на фигуре *b*) вращение подкоса DH происходит обратно часовой стрелке, увеличивая угол τ . А так как увеличению угла соответствуют положительные прогибы, то ϕ надо считать положительным, идущим по течению оси Y .

с) В частном случае, когда два из стержней пояса располагаются на горизонтальной прямой, как указывалось в конце раздела 4, упругие грузы превращаются в одни только изменения углов $\delta\theta$, ибо в этом случае: $tg\varphi_m = tg\varphi_{m+1} = 0$. Поэтому и определение упругих грузов производится по фиг. 71 т. е. не требуется вспомогательных стоек.

д) Переход к числам и точность результата. Чтобы вычислить величину упругого груза ϕ , достаточно число миллиметров в длине ρ на диаграмме Виллио разделить на число миллиметров в длине того стержня, поворот которого определяется посредством диаграммы; при этом получается груз ϕ , увеличенный в масштабе диаграммы, так что, эпюра прогибов, построенная для таких упругих грузов, сохраняет масштаб диаграммы Виллио.

На фиг. 76 - *b*) и *c*) вращательное перемещение вспомогательного под-

коса длиной 6300 мм. составляет $\rho = 112$ мм. при увеличении в 2000 раз; поэтому упругий груз для того же масштаба должен быть

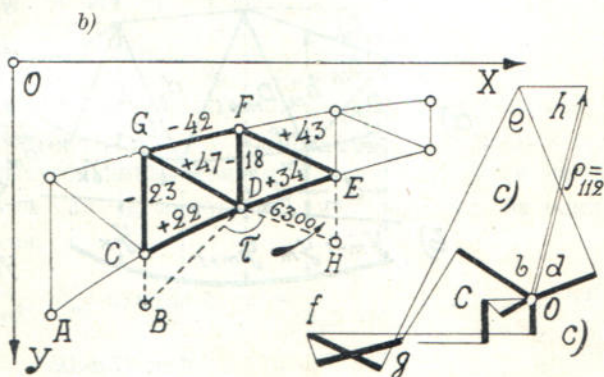
$$\phi_a = \frac{\rho}{DH} = \frac{112}{6300} = 0,0178.$$

На фиг. 71, где диаграмма Виллио построена при 5-кратном увеличении, упругий груз Φ для прогибов натуральной величины вычисляется так:

$$\Phi = \frac{\rho_a \text{ мм}}{5} : DE = \frac{10 \text{ мм}}{5} : 2000 \text{ мм} = 0,001.$$

Точность определения величины вращательного вектора зависит от масштаба диаграммы Виллио, и так как есть возможность строить ее для небольшого числа треугольников, то обыкновенно можно бывает принять достаточно крупный масштаб, чтобы получить вполне удовлетворительную точность.

7. Иной способ вычисления фиктивных грузов. Вычисление фиктивных грузов основано на предварительном вычислении изменения углов между стержнями шарнирного многоугольника. Последняя операция составляет главную часть расчета, и в тех случаях, когда не требуются прогибы всех узлов фермы, а лишь некоторые из них или максимальный прогиб, она оказывается громоздкой. Обыкновенно вычислением изменения

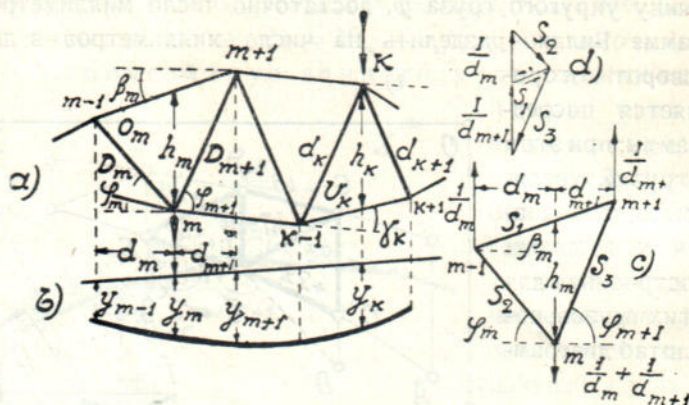


Фиг. 76-*b*) и *c*).

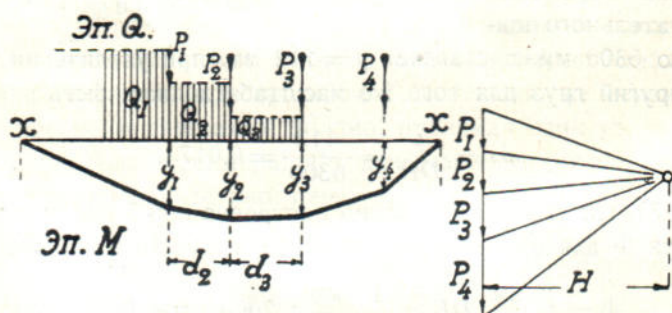
углов пользуются одновременно и для других целей, например, при определении дополнительных напряжений от жесткости узлов; тогда и описанный способ вычисления фиктивных грузов уместен, ибо вся подготовительная работа по изменению углов оказывается уже проделанною.

Известен другой способ вычисления фиктивных грузов, основанный только на удлинении стержней фермы. Хотя вывод формул здесь и сложнее, чем в предыдущих случаях, но практика пользования результатами значительно проще.

а) Фермы без стоек. Положим, что требуется определить полные упругие грузы для нижних узлов решетчатой фермы, изображенной



Фиг. 77-a-d).



Фиг. 77-e).

частично на фиг. 77—а. Если бы мы нашли эти грузы $P_1, P_2, P_3 \dots$ и построили для них эпюру моментов на фиг. 77—е, то получили бы следующую, по (44) известную зависимость: $dM = Qdx$. Но при сосредоточенных грузах поперечная сила Q на протяжении между грузами постоянна, так что, на участке d_2 получается $Q_2 d_2$. С другой стороны, приращение момента на том же участке, если судить по ординатам эпюры моментов y_2 и y_1 , оказывается $H(y_2 - y_1)$, где H —длина нормального луча, при котором построена эпюра моментов. Поэтому

$$H(y_2 - y_1) = Q_2 d_2.$$

Точно также для следующей панели: $H(y_3 - y_2) = Q_3 d_3$.

Но груз P_2 есть разность между поперечными силами Q двух соседних панелей: $P_2 = Q_2 - Q_3$; и если мы из предыдущих равенств определим Q_2 и Q_3 и вычтем, то получим выражение для этого груза P_2 :

$$Q_2 = H \frac{y_2 - y_1}{d_2}; Q_3 = H \frac{y_3 - y_2}{d_3}; Q_2 - Q_3 = P_2 = H \left(\frac{y_2 - y_1}{d_2} - \frac{y_3 - y_2}{d_3} \right).$$

Принимая для общих выводов $H = 1$, получаем следующее выражение для упругого груза любого узла m :

$$P_m = \frac{1}{d_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{d_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) \dots \dots \dots (93).$$

Выразим ординаты y через удлинения стержней. Воспользуемся Началом возможных перемещений в его распространительном толковании¹⁾.

Нагрузим треугольник m , $m-1$, $m+1$ фиг. 77-с фиктивными силами $\frac{1}{d_m}$ и $\frac{1}{d_{m+1}}$ и уравновешивающую силу $\frac{1}{d_m} + \frac{1}{d_{m+1}}$.

Такие силы, приложенные в намеченных узлах фермы, не вызовут в ней никаких других усилий, кроме S_1 , S_2 и S_3 , действующих в стержнях одного только выделенного треугольника: причем усилия находятся непосредственным разложением на фиг. d , и могут быть определены, на основании подобия треугольников:

$$S_1 : \frac{1}{d_m} = \frac{d_m}{\cos \beta} : h_m, \text{ откуда } S_1 = - \frac{1}{h_m \cos \beta_m} \dots \dots \dots (94).$$

$$S_2 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m}; S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}$$

Знаком минус отмечаем сжимающее усилие S_1 , сохраняя у растягивающих S_2 и S_3 знак плюс.

Напишем, что работа этих сил на действительных, а следовательно, — возможных перемещениях фермы равна нулю, так как система фиктивных сил уравновешивается на ферме. Конечно, при этом надо будет принять в расчет не только внешние, но и внутренние силы системы. Но работа внешних сил

$$\frac{1}{d_m}, \frac{1}{d_{m+1}} \text{ и } \frac{1}{d_m} + \frac{1}{d_{m+1}}$$

на взаимных перемещениях узлов фигуры b):

$$y_m - y_{m-1} \text{ и } y_{m+1} - y_m$$

будет:

$$\frac{1}{d_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{d_{m+1}} (y_{m+1} - y_m)^2 \dots \dots \dots (95).$$

¹⁾ См. наши: Системы без лишних стержней, § 62.

Конечно, вывод можно было бы обосновать на диаграмме Виллио фиг. 76-а и б. Тогда пришлось бы решить задачу тригонометрии.

²⁾ Мы представляем себе, что нижняя точка треугольника m фиг. с неподвижна, а две верхние: $m-1$ и $m+1$ перемещаются относительно нижней, соответственно линии прогибов, изображенной на фиг. б), т. е. перемещаются на величину разности прогибов $y_m - y_{m-1}$ и $y_{m+1} - y_m$. При этом, если все ординаты y возрастают вправо, получится подъем узла $m-1$ и опускание узла $m+1$, так что, знаки работы будут $+$ и $-$.

и представляет по форм. (93) упругий груз P_m .

Внутренние силы: S_1 , S_2 и S_3 соответствуют действительным удлинениям

$$\delta O_m, \delta D_m, \delta D_{m+1};$$

и потому работа их будет:

$$-S_1\delta O_m - S_2\delta D_m - S_3\delta D_{m+1} \dots \dots \dots (96).$$

Если буквы O , D , S понимать, как символы положительных усилий, то работу их на соответствующих перемещениях придется считать отрицательной, ибо в таком случае стрелки усилий всегда идут против фактического перемещения точек их приложения.

Следовательно, по (95 и 96), Начало возможных перемещений представится в форме:

$$P_m - S_1\delta O_m - S_2\delta D_m - S_3\delta D_{m+1} = 0,$$

которая после подстановки значения усилий S из (94) дает:

$$P_m = \frac{-\frac{\delta O_m}{\cos\varphi_m} + \frac{\delta D_m}{\cos\varphi_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}}}{h_m} \dots \dots \dots (97).$$

Для верхнего пояса путем таких же рассуждений получим:

$$P_k = \frac{\frac{\delta U_k}{\cos\varphi_k} - \frac{\delta D_k}{\cos\varphi_k} - \frac{\delta D_{k+1}}{\cos\varphi_{k+1}}}{h_k} \dots \dots \dots (98).$$

Прикладывая одновременно упругие грузы к верхнему и нижнему поясу, получим эпюру прогибов обоих поясов фермы, как показано на фиг. 77-б.

Для определения упругих грузов по этой формуле требуются только удлинения стержней и углы их наклона ¹⁾. Однако вывод формул сделан для простой треугольной решетки и нет основания пользоваться формулами вообще. Рассмотрим, как выразятся упругие грузы при других системах решетки.

б) Фермы со стойками: Рассмотрим прогибы нижнего пояса при нисходящих раскосах фиг. 78. Как и в предыдущем случае, упругий груз форм. (93) выразим через удлинения стержней, пользуясь Началом возможных перемещений.

На трех последовательно расположенных узлах нижнего пояса поместим фиктивные уравнивающиеся силы:

$$\frac{1}{d_m}, \frac{1}{d_{m+1}} \text{ и сумму их: } \frac{1}{d_m} + \frac{1}{d_{m+1}}.$$

Определим действующие при этом стержни фермы, отбрасывая для ясности нулевые, как показано на фиг. б. Расчитаем усилия в этих стержнях, например, как сделано на фиг. с:

При другом законе изменения ординат могут получиться знаки $+$ и $+$, но в таких же условиях выводилась и форм. (93); поэтому предлагаемое здесь выражение для упругого груза P имеет общее значение.

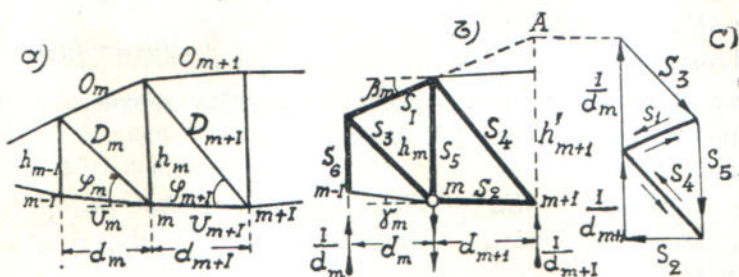
Заметим еще, что если бы на фиг. 77-с), случайно, мы приложили бы силы в обратную сторону, это не повлияет на результат.

¹⁾ Cosinus'ы углов надо вводить в формулу с соответствующим знаком, (см. раздел 10).

$$S_1 = \frac{-1}{h_m \cos \beta_m}; \quad S_2 = \frac{1}{h_m \cos \gamma_{m+1}}; \quad S_3 = \frac{1}{h_m \cos \varphi_m};$$

$$S_4 = -\frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+1}}; \quad S_5 = \frac{h'_{m+1}}{d_{m+1} h_m}; \quad S_6 = -\frac{1}{d_m} \dots \quad (99).$$

Здесь через h'_{m+1} обозначен вертикальный отрезок $A - (m+1)$ между узлом $m+1$ и продолжением стержня O_m верхнего пояса (фиг. б).



Фиг. 78.

Замечая теперь, что работа фиктивных внешних сил на действительных перемещениях фермы есть упругий груз P :

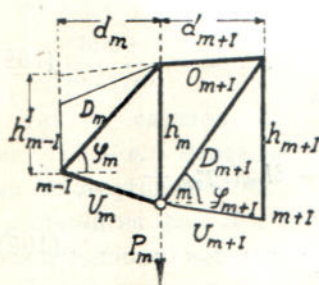
$$\frac{1}{d_m} (y_m - y_{m-1}) - \frac{1}{d_{m+1}} (y_{m+1} - y_m) = P_m,$$

составляя Начало возможных перемещений:

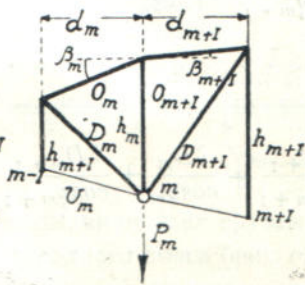
$$P_m - S_1 \delta O_m - S_2 \delta U_{m+1} - S_3 \delta D_m - S_4 \delta D_{m+1} - S_5 \delta h_m - S_6 \delta h_{m-1} = 0$$

и подставляя сюда значение S из (99), получим для фиг. 78:

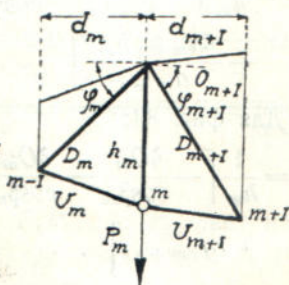
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_m h'_{m+1}}{d_{m+1}} - \frac{\delta h_{m-1} h_m}{d_m} \right] \dots \dots \dots (100).$$



Фиг. 79.



Фиг. 80.



Фиг. 81.

При восходящих раскосах фиг. 79 упругий груз m -го узла нижнего пояса:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m+1} h_m}{d_{m+1}} + \frac{\delta h_m h'_{m-1}}{d_m} \right] \dots \dots \dots (101).$$

Для треугольной решетки фиг. 80 со стойками:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_{m-1} h_m}{d_m} + \delta h_m (tg \beta_m - tg \beta_{m+1}) - \delta h_{m+1} \frac{h_m}{d_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (102).$$

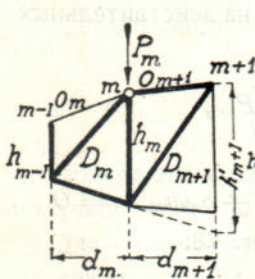
Тоже для обратных диагоналей фиг. 81:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \delta h_m (tg \varphi_m + tg \varphi_{m+1}) \right] (103).$$

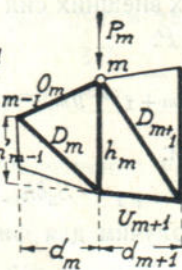
Для тех же решеток, но при расчете прогибов верхнего пояса, аналогично, получим следующие формулы:

Для фиг. 82:

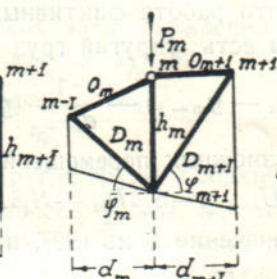
$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} - \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_{m-1} h_m}{d_m} - \frac{\delta h_m h'_{m+1}}{d_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (104).$$



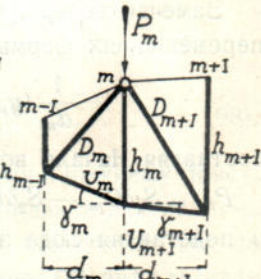
Фиг. 82.



Фиг. 83.



Фиг. 84.



Фиг. 85.

Для фиг. 83:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} + \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \frac{\delta h_m h'_{m-1}}{d_m} + \frac{\delta h_{m+1} h_m}{d_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (105).$$

Для фиг. 84:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \delta h_m (tg \varphi_m + tg \varphi_{m+1}) \right] \dots \dots \dots (106).$$

Для фиг. 85:

$$P_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\delta U_m}{\cos \gamma_m} + \frac{\delta U_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - \frac{\delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\delta h_{m-1} h_m}{d_m} - \delta h_m (tg \gamma_m - tg \gamma_{m+1}) + \delta h_{m+1} \frac{h_m}{d_{m+1}} \right] \dots \dots \dots (107).$$

8. Примеры. а) Мостовая ферма фиг. 73. Применим последний способ вычисления упругих грузов к поясам мостовой фермы. Положим, что удлинения стержней известны. Так как решетка здесь простая тре-

угольная, то пользуемся формулами: (97 и 98). Для них удлинения стержней надо разделить на $\cos\varphi$ 'ы соответствующих углов наклона; кроме того, при постоянной высоте h треугольников, все члены придется делить на высоту фермы $h = 2$ м. В виду этого на левой части фермы фиг. 73 — *c* написаны результаты этих действий, т. е. $\frac{1}{h} \cdot \frac{\delta l}{\cos\varphi}$ в см., с соответствующим знаком удлинения δl .

Так как получились малые числа, то они умножены на 40000 . . . (108).

Теперь вычисление упругих грузов приводится к алгебраическому сложению чисел, выписанных на чертеже фермы фиг. 73 — *c*, принимая во внимание знаки формул (97) и (98). Таким образом, для узла 1 треугольника *a* 1 2 фиг. *c* получим

$$P_1 = 26,6 + 25,2 - 30,2 = 21,6.$$

Для узла 2 из треугольника 1 2 3:

$$P_2 = 30,4 + 30,2 - 20 = 40,6.$$

И далее:

$$P_3 = 28,1 + 20,0 - 25,2 = 22,9$$

$$P_4 = 32,0 + 25,2 = 57,2 \dots \dots \dots (109).$$

$$P_5 = 29,1 = 29,1$$

Остается построить веревочный многоугольник. Откладывая на фиг. 73 — *e* упругие грузы в масштабе 1 мм. = 4,45 ед. силы, мы должны для нормального луча принять 40000 таких единиц, разделенных на масштабное число длины 250, так как силы P , по (108), были увеличены в 40000 раз, и ферма вычерчена в $\frac{1}{250}$ натуральной величины. Следовательно, должно быть

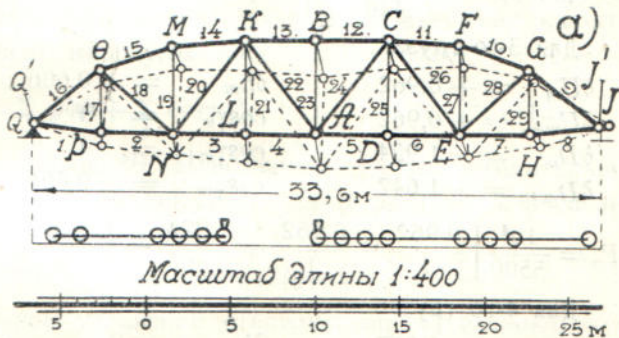
$$H = \frac{40000}{250 \cdot 4,45} = 36 \text{ мм.}$$

Так и сделано на фиг. 73 — *e*. Вевочный многоугольник, построенный на фиг. *d* с переломами на всех грузах $P_1 P_2 \dots \dots P_5$, дает наибольший прогиб под узлом 5 верхнего пояса (фиг. *e*): $f_5 = 2,37$ см. . . (110).

То же получим, вычисляя момент от упругих грузов для узла 5:

$$f = \frac{1}{4 \cdot 10^4} (156,85 \cdot 1000^2) - 21,6 \cdot 800 - 40,6 \cdot 600 - 22,9 \cdot 400 - 57,2 \cdot 200 = 2,365 \text{ см.}$$

б) Мостовая ферма фиг. 33. Упругие грузы вычисляем по формулам 102 и 103. (111).



Фиг. 33-bis.

¹) Здесь 156, 85 — реакция от упругих грузов, $4 \cdot 10^{-4}$ — число, на которое прежде были умножены упругие грузы (см. форм. 108).

Для 1-го груза имеем:

$\delta U_m = +0,912$	$\varphi_m = 36^\circ$	$\cos \varphi_{m+1} = 1$
$\delta U_{m+1} = +0,862$	$\varphi_{m+1} = 41^\circ$	$\cos \varphi_m = 0,780$
$\delta D_m = -1,135$	$h_m = (1 - 7) = 3850$	$\cos \varphi_{m+1} = 0,737$
$\delta D_{m+1} = +1,428$	$\gamma_m = 8^\circ$	$tg \varphi_m = 0,797$
$\delta h_m = +0,157$	$\cos \gamma_m = 0,993$	$tg \varphi_{m+1} = 0,917$

$$P_1 = \frac{1}{3850} \left[\frac{0,912}{0,993} + \frac{0,862}{1} + \frac{1,135}{0,78} - \frac{1,428}{0,737} + 0,157 (0,797 + + 0,917) \right] = + 4,06 \cdot 10^{-4}.$$

Так как фиктивный груз получился ничтожно малым, то умножим его, как и все последующие грузы, на 10^4 ; тогда получим $P_1 = 4,06$.

Для 2-го груза:

$\delta O_m = -1$	$\delta h_m = +0,985$	$\cos \varphi_{m+1} = 0,606$
$\delta O_{m+1} = -0,906$	$\delta h_{m+1} = +0,606$	$h_m = 5250$
$\delta D_m = +1,428$	$\cos \beta_m = 0,948$	$tg \beta_m = 0,334$
$\delta D_{m+1} = -1,924$	$\cos \beta_{m+1} = 0,998$	$tg \beta_{m+1} = 0,0595$
$\delta h_{m-1} = +0,157$	$\cos \gamma_m = 0,737$	

$$P_2 = \frac{10^4}{5250} \left[+ \frac{1}{0,948} + \frac{0,906}{0,998} + \frac{1,428}{0,737} - \frac{1,924}{0,606} - \frac{0,157 \cdot 525}{420} + 0,985 (0,334 - - 0,0595) - \frac{0,606 \cdot 525}{420} \right] = + 0,743.$$

Для 3-го груза:

$\delta U_m = +0,962$	$\delta h_m = +0,606$	$\cos \varphi_{m+1} = 0,606$
$\delta U_{m+1} = +0,962$	$\cos \gamma_m = 1$	$tg \varphi_m = 1,310$
$\delta D_m = -1,924$	$\cos \gamma_{m+1} = 1$	$tg \varphi_{m+1} = 1,310$
$\delta D_{m+1} = +1,642$	$\cos \varphi_m = 0,606$	$h_m = 5500$

$$P_3 = \frac{10^4}{5500} \left[\frac{0,962}{1} + \frac{0,962}{1} + \frac{1,924}{0,606} - \frac{1,642}{0,606} + 0,606 \cdot 2,62 \right] = + 7,24.$$

Для 4-го груза:

$\delta O_m = -1,097$	$\delta h_m = 0$	$\cos \varphi_{m+1} = 0,606$
$\delta O_{m+1} = 1,097$	$\delta h_{m+1} = +0,823$	$tg \beta_m = 0$
$\delta D_m = +1,642$	$\cos \beta_m = 1$	$tg \beta_{m+1} = 0$
$\delta D_{m+1} = +1,658$	$\cos \beta_{m+1} = 1$	$h_m = 5500$
$\delta h_{m-1} = +0,606$	$\cos \varphi_m = 0,606$	

$$P_4 = \frac{10^4}{5500} \left[+ \frac{1,097}{1} + \frac{1,097}{1} + \frac{1,642}{0,606} + \frac{1,658}{0,606} - \frac{0,606 \cdot 550}{420} - \frac{0,823 \cdot 550}{420} \right] = + 10,5.$$

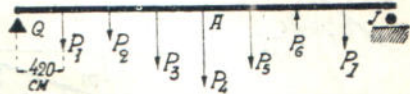
Таким же образом:

$$P_5 = \frac{10^4}{5500} \left[\frac{0,965}{1} + \frac{0,965}{1} + \frac{2,306}{0,606} - \frac{1,658}{0,606} + 0,823 \cdot 2,62 \right] = + 9,37$$

$$P_6 = \frac{10^4}{5250} \left[\frac{0,949}{0,948} + \frac{0,857}{0,998} + \frac{1,446}{0,737} - \frac{2,306}{0,606} - \frac{0,241 \cdot 525}{420} + \right. \\ \left. + 0,933(0,334 - 0,0595) - \frac{0,823 \cdot 525}{420} \right] = -2,025.$$

$$P_7 = \frac{10^4}{3850} \left[\frac{0,879}{0,993} + \frac{0,826}{1} + \frac{1,087}{0,78} - \frac{1,446}{0,737} + 0,241(0,797 + 0,917) \right] = \\ = +4,04.$$

По вычисленным грузам P определяем максимальный прогиб (по середине пролета) нижнего пояса, как изгибающий момент вызванный грузами в сечении A . На фиг. 86 представлена схема расположения упругих грузов. По ней: реакция $Q = 17,397$ и $J = 16,53$, прогиб $y_{\text{макс.}} = 10^{-4}(17,397 \cdot 4 \cdot 4200 - 4,06 \cdot 3 \cdot 4200 - 0,743 \cdot 2 \cdot 4200 - 7,24 \cdot 4200) = 20,45$ мм. (112).



По диаграмме Williot фиг. 33 тот же прогиб получился 20,8 мм.

9. Изменение длины хорды шарнирного многоугольника. Упрощение, представляемое введением фиктивных грузов для прогибов, можно распространить и на горизонтальное перемещение системы. Такое перемещение приходится определять, как для расчета угона катков в фермах, так, в особенности, при расчете статически неопределимых ферм на неподвижных опорных шарнирах, ферм с затяжкой и проч.

Чтобы в общем выражении для горизонтального перемещения какого-нибудь n -го узла шарнирного многоугольника (см. форм. 79):

$$\delta x = \sum_1^{n-1} y \delta \theta + \sum_1^n \cos \varphi \delta l \quad (113)$$

избавиться от изменений углов $\delta \theta$, вычисление которых утомительно, выразим эти изменения через фиктивные грузы ϕ раздела 3. Воспользуемся для этой цели формулой для ϕ :

$$\phi_m = \delta \theta_m - e_m \operatorname{tg} \varphi_m + e_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+1},$$

в которой e — относительное удлинение стержней многоугольника, φ — угол наклона к оси X .

Определим из нее $\delta \theta_m = \phi_m + e_m \operatorname{tg} \varphi_m - e_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}$

и вставим в выражение (113); получится:

$$\delta x = \sum_1^{n-1} y_m \phi_m + \sum_1^{n-1} y_m (e_m \operatorname{tg} \varphi_m - e_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) + \sum_1^n \cos \varphi_m \delta l_m \quad . . (114).$$

Если в общем случае хорда, соединяющая начало и конец шарнирного многоугольника, не параллельна оси X , образует с последнею угол α и имеет длину L , то приращение длины хорды будет:

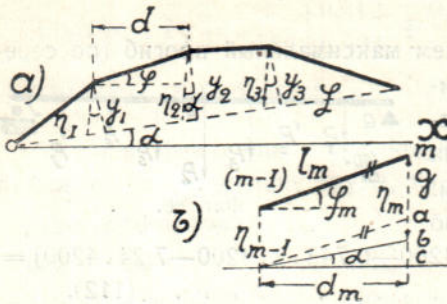
$$\delta L = \sum_1^{n-1} y_m \phi_m + \sum_1^{n-1} y_m (e_m \operatorname{tg} \varphi_m - e_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) + \sum_1^n \cos(\varphi_m - \alpha) \delta l_m \quad . . (115).$$

Для вычисления удлинения хорды по этой формуле не требуется вычислять изменение углов шарнирного многоугольника; вместо него прихо-

дится определять более простые удлинения отдельных стержней: сначала абсолютные δl_m , а по ним — и относительные $e_m = \delta l_m : l_m$.

Если суммирование вести по стержням, то формула может быть преобразована в еще более простую.

Заметим, что каждый брусок m с относительным удлинением $e_m = \delta l_m : l_m$ и углом наклона φ_m для формулы (115) приходится умножать три раза: один раз его абсолютное удлинение δl умножить на $\cos(\varphi_m - \alpha)$, как видно из последнего члена выражения (115): другой раз относительное удлинение e_m множить на плечо правого конца y_m и третий раз множить на плечо левого конца y_{m-1} . Последние два умножения вытекают из того, что во вторых скобках формулы (115) к каждому плечу y_m прикрепляется по два стержня: левый l_m



Фиг. 87.

и правый l_{m+1} . Иначе сказать, с каждым стержнем l_m приходится производить такие действия:

$$\frac{\delta l_m}{l_m} \cdot y_m \operatorname{tg} \varphi_m - \frac{\delta l_m}{l_m} y_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_m + \delta l_m \cos(\varphi_m - \alpha) \dots (116).$$

Но по фиг. 87-a: $y_m = r_m \cos \alpha \dots \dots \dots (117)$; кроме того, по фиг. 87-b можно написать:

$$r_m - r_{m-1} = ab = ac - bc = d_m \operatorname{tg} \varphi_m - d_m \operatorname{tg} \alpha = d_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha).$$

Поэтому (116) переписется:

$$\begin{aligned} \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg} \varphi_m (y_m - y_{m-1}) + \delta l_m \cos(\varphi_m - \alpha) &= \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg} \varphi_m (r_m - r_{m-1}) \cos \alpha + \\ + \delta l_m \cos(\varphi_m - \alpha) &= \frac{\delta l_m}{l_m} \operatorname{tg} \varphi_m d_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha) \cos \alpha + \delta l_m \cos(\varphi_m - \alpha) = \\ &= \delta l_m \left[\frac{\sin \varphi_m \sin(\varphi_m - \alpha)}{\cos \varphi_m} + \cos(\varphi_m - \alpha) \right] = \frac{\delta l_m \cos \alpha}{\cos \varphi_m}. \end{aligned}$$

Так упрощается сумма двух последних членов выражения (115). Если еще в первом члене сделать замену (117), то окончательно получим следующее приращение длины хорды:

$$\delta L = \cos \alpha \left[\sum_1^{n-1} r_m P_m + \sum_1^n \frac{\delta l_m}{\cos \varphi_m} \right] \dots (118).$$

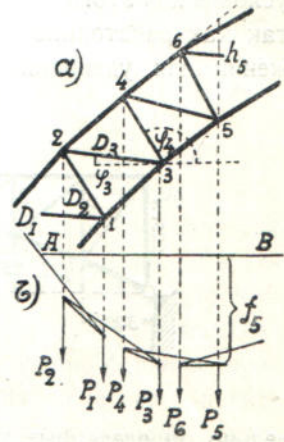
Расчет по этой формуле не представляет затруднений: надо знать удлинения стержней δl_m , углы их наклона φ_m к оси X, наклон хорды L и ординаты шарнирного многоугольника r , перпендикулярные к той же оси; кроме того, предварительно надо вычислить фиктивные грузы P.

10. Несколько практических замечаний. а) О знаках углов φ при вычислении фиктивных грузов. Если вертикальная линия, проведенная через узел m , проходит между узлами $m - 1$ и $m + 1$, расположенными в порядке, т. е. $m - 1$ слева и $m + 1$ справа, то достаточно при вычи-

слении брать острые углы с горизонтальной осью X , не обращая внимания, в какую сторону идет измерение: вверх или вниз, ибо $\cos(-\varphi) = \cos(+\varphi)$. Но если узлы $m-1$ и $m+1$ встречаются не в порядке, то знаки \cosinus' ов—различны. Пример представляет фиг. 88, где изображена часть арочной фермы. В таких случаях $\cos\varphi_m$ ¹⁾ будет положительным или отрицательным, смотря по тому, лежит-ли $m-1$ левее или правее m -го узла нижнего пояса; а $\cos\varphi_{m+1}$ будет положительным или отрицательным, смотря по тому, находится $m+1$ правее или левее m .

При таком расположении узлов решетки очень важно также стороны веревочного многоугольника проводить в порядке расположения фиктивных грузов, а именно как показано на фиг. *b*.

b) О знаках приращений длины. Формулы, приведенные выше, надо понимать в алгебраическом смысле, и, вместо букв, вводить числовые значения с соответствующим знаком: удлинение со знаком $+$, укорочение со знаком $-$. Произведения на \cosinus могут сохранять или изменять знак в зависимости от знака \cosinus' а. Первый случай относится к порядковому расположению узлов в решетке фермы, как на фиг. 77; при нарушении же порядка номеров, как на фиг. 88, члены с \cosinus' ами, например, $\frac{\delta D_m}{\cos\varphi}$ имеют тот же,



Фиг. 88.

или обратный знак, как и у δD , смотря по тому, приходится $m-1$ левее или правее m ; точно также: $\frac{\delta D_{m+1}}{\cos\varphi_{m+1}}$ имеет тот же или обратный знак, смотря по тому, приходится $m+1$ правее или левее m .

с) О прогибах другого пояса. Если ферма имеет вертикальные стойки, то к известным уже прогибам одного пояса, в соответствующих узлах, прибавляются приращения длины стоек, конечно, принимая во внимание знаки; получается линия прогибов другого пояса. В фермах без стоек можно получать прогибы одновременно для обоих поясов, как сделано в примере раздела 2 на фиг. 73. При этом передают грузы с одного пояса на другой, пользуясь законом рычага. Например, груз P_m на фиг. 77-а с нижнего пояса передают в узлы $m-1$ и $m+1$ верхнего пояса по частям:

$$P'_{m-1} = P_m \frac{d_{m+1}}{d_m + d_{m+1}} \quad \text{и} \quad P'_{m+1} = P_m \frac{d_m}{d_m + d_{m+1}}$$

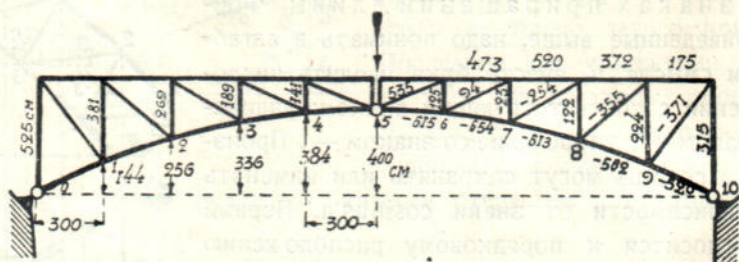
которые должны быть прибавлены к соответствующим фиктивным грузам верхнего пояса. Построение ведется для суммы:

$$P_{m-1} + P'_{m-1} \quad \text{и} \quad P_{m+1} + P'_{m+1}.$$

d) Трехшарнирная арочная ферма фиг. 89. Когда вычислено изменение углов отдельных треугольников фермы, то криволинейный ниж-

¹⁾ Буквой φ обозначается угол наклона стержня решетки к горизонтальной прямой.

ний пояс становится шарнирным многоугольником с известными Θ и $\delta\Theta$, независимо от системы треугольников, образующих ферму. К нему, вообще говоря, можно применять вышеописанное построение эпюры прогибов. Но в трехшарнирной арке есть особенность, отличающая ее от простых ферм. Две части арки 0—5 и 5—10 имеют возможность поворачиваться взаимно вокруг ключевого шарнира 5 вне прямой зависимости от изменения прочих углов Θ , и пока неизвестен этот поворот,—не представляется возможным установить здесь, в ключевом шарнире, величину упругого груза. Однако арка предоставляет нам и одно дополнительное условие для этого определения, а именно—неизменяемость длины ее хорды L , так как расстояние между пятами постоянно. Поэтому если мы в выражении для удлинения хорды (118) введем все упругие грузы, предвари-



Фиг. 89.

тельно определенные уже известными способами, кроме P_5 , и P_5 введем в качестве неизвестного, то, приравнявая δL нулю, получим уравнение, из которого определится это неизвестное. Дальнейший расчет не представляет особенностей.

На фиг. 89 приведен пример расчета. На левой половине показаны размеры в см., на правой—удлинения стержней в мм. умноженные на 10^4 . По формуле (100) произведено вычисление упругих грузов для первых четырех узлов фермы. Так как принятая нагрузка симметрична, один сосредоточенный груз по середине, то правая часть фермы не рассматривается.

$$P_1 = (-175 - 600 - 600 + 477 - 400 + 201) : 3810 = -0,29$$

$$P_2 = (-372 - 633 - 477 + 300 - 201 + 77) : 2690 = -0,49$$

$$P_3 = (-529 - 663 - 300 - 104 - 77 - 11) : 1890 = -0,89$$

$$P_4 = (-473 - 616 + 104 - 601 + 11 - 53) : 1410 = -1,15$$

Далее для форм. (118) составляются произведения $P\eta$:

$$P_1\eta_1 = -0,29 \cdot 1440 = -417,6 \text{ мм}$$

$$P_2\eta_2 = -0,49 \cdot 2560 = -1254 \text{ »}$$

$$P_3\eta_3 = -0,89 \cdot 3360 = -2990 \text{ »}$$

$$P_4\eta_4 = -1,15 \cdot 3840 = -4416 \text{ »}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1\eta_1 \\ P_2\eta_2 \\ P_3\eta_3 \\ P_4\eta_4 \end{array} \right\} \sum_1^4 P_m\eta_m = -9078 \text{ мм.}$$

Затем составляется сумма обратных проекций удлинений стержней:

$$\sum_1^n \frac{\delta l_m}{\cos \varphi_m} = -[577 + 600 + 633 + 663 + 616] 2 = -6178.$$

Тогда из форм. (118) для всей цепи из 10 стержней:

$$\delta L = 2 \sum_1^4 P_m \gamma_{lm} + P_5 \gamma_{l5} + \sum_1^{10} \frac{\delta l_m}{\cos \varphi_m} = 0$$

определяется P_5 :

$$P_5 = \frac{2 \sum_1^4 P_m \gamma_{lm} + \sum_1^{10} \frac{\delta l_m}{\cos \varphi_m}}{\gamma_{l5}} = \frac{2.9078 + 6178}{4000} = 6,08.$$

Остается вычислить моменты от этих сил под соответствующими узлами арки. Прогиб в ключе 5 оказывается: $y_5 = 1,998 \text{ мм} \approx 2$.

e) Ферма Полонсо, или трехшарнирная арка с затяжкой¹⁾. Расчет ее отличается от расчета трехшарнирной арки только тем, что удлинение хорды не равно нулю, а должно составлять удлинение λ , определяемое предварительно по форм. (71).

й) О значении вычислительного метода. Выражения для упругих грузов содержат все стержни, от которых может находиться в зависимости прогиб фермы. Эти выражения могут быть использованы для выяснения влияния различных частей фермы на величину прогиба, и в зависимости от значения отдельных членов, они более или менее упрощаются. В виду сложности расчета ферм с лишними стержнями вообще вопрос о приближенных вычислениях приобретает особенно большое практическое значение. При вычислении деформации ферм чаще всего пренебрегают стержнями решетки. Если в последних формулах раздела 7 пренебречь всеми членами, содержащими диагонали D и стойки h , то они превращаются в одночленные или двучленные, и приводят к более простым вычислениям. В этом случае способ расчета по своей простоте может конкурировать с диаграммой Виллио, и естественно, возникает вопрос о сравнительном размере погрешностей в обоих этих способах. Ряд исследований, произведенных нами в этом направлении, говорит не в пользу вычислительного метода. Ошибки, которые получаются при игнорировании решетки, обыкновенно, больше точности графического метода и, если в данном частном случае можно довольствоваться деформацией одних только поясов, то уместнее будет графический метод. На этом основании для приближенных расчетов мы рекомендуем диаграмму Виллио: оставляя вычислительный способ главным образом для точных расчетов.

g) Определение приближенных значений деформации. Мы получаем вполне удовлетворительные результаты при определении деформации ферм по следующему способу.

На прогиб фермы сравнительно мало влияют удлинения ее стержней; диаграмма Виллио (см. фиг. 74-f) наглядно доказывает, что положение узлов фермы, а, следовательно, и величина прогибов обуславливается главным образом перпендикулярами к удлинениям стержней. Это позволяет, вместо точного, пользоваться приближенным значением удлинений. Мы разбиваем все стержни системы на группы с подходящими удлинениями и каждой

¹⁾ См. наши: Системы без лишних стержней, § 42, I, а.

группе приписываем некоторое среднее удлинение, характерное для группы: для поясов одно, для решетки другое,—и отличаем сжатие от растяжения. В хорошо спроектированных фермах напряжения всех стержней должны быть близки к допускаемому, например, в растянутых железных частях—к 10 кг./мм.² Следовательно, для всех растянутых стержней железной фермы, при расчетной нагрузке, можно принять относительное удлинение $e = \approx 10 : E = \approx 1/2 \cdot 10^{-3}$, а это позволяет абсолютное удлинение вычислять по условной формуле:

$$\lambda = e l = \frac{l \cdot 1000}{2 \cdot 10^3} = 0,5 l, \quad (119-a),$$

где l —принято в метрах, а λ —получается в миллиметрах. В сжатых коробчатых поясах мостовых ферм коэффициент φ уменьшения допускаемого напряжения на сжатие близок к единице; поэтому для них также приемлема формула $\lambda = 0,5 l$; при тавровом же поясе φ меньше, и следует пользоваться $\lambda = 0,4 l$ (119-b)

Сжатые части решетки имеют большую гибкость; здесь φ , в среднем 0,5—0,6 и допускаемое напряжение 5—6 кг./мм.² Следовательно, укорочение надо вычислять по формуле: $\lambda = 0,3 l$ (119-c).

Если нагрузка не достигает расчетной, то все удлинения можно пропорционально уменьшить—это не внесет большой погрешности в результат.

В этом приеме для расчета прогиба фермы требуется одна только ее схема в линиях—нет надобности иметь сечения стержней. По схеме фермы мы получаем число метров длины стержней; взявши по формулам (119) от этого числа 0,5—0,3 найдем число миллиметров удлинений, необходимых для построения диаграммы Виллио. Построение диаграммы выполняется в обычном порядке.

h) Примеры приближенных вычислений. Будем на фиг. 73 пренебрегать деформацией решетки. Тогда, пользуясь теми же формулами для упругих грузов (97 и 98), что и в разделе 7, мы должны считать, что удлинение всех внутренних стержней равно нулю. В формулах (109) окажется: два члена для P_1 , и по одному члену для остальных грузов:

$P_1 = 26,6 + 25,2 = 51,8$; $P_2 = 30,4$; $P_3 = 28,1$; $P_4 = 32,0$; $P_5 = 29,1$
а потому прогиб по середине окажется:

$$f_5 = \frac{1}{4 \cdot 10^4} (156,85 \cdot 1000 - 51,8 \cdot 800 - 30,4 \cdot 600 - 28,1 \cdot 400 - 32,0 \cdot 200) = 1,988 \text{ см.}$$

Разница с прежним результатом по (110) — 16,0%.

Прогиб по диаграмме Виллио, построенной в масштабе $1/100$ для фермы и $10/1$ для удлинений, при средней аккуратности черчения, оказывается 2,38 см.; если же пренебречь деформацией решетки, то — 1,93 см. Ошибка составляет $< 1/2\%$ и 3% по сравнению с расчетными прогибами.

Другой пример представляет мостовая ферма с полигональным верхним поясом фиг. 33. Пренебрегая решеткой, при вычислении упругих грузов P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 по формулам 102 и 103, мы должны отбросить в

скобках все члены, кроме первых двух; при вычислении P_1 и P_7 , надо отбросить все члены, кроме первых трех. При этом получатся следующие грузы:

$$P_1 = +5,00, \quad P_2 = +3,74; \quad P_3 = +3,50; \quad P_4 = +3,99; \quad P_5 = +3,51; \\ P_6 = +3,54; \quad P_7 = +8,05.$$

Реакции от упругих грузов: $Q = 14,57$ и $J = 16,75$.

Прогиб $y_{\text{макс.}} = 10^{-4} [14,57 \cdot 4 \cdot 4200 - 5 \cdot 3 \cdot 4200 - 3,74 \cdot 2 \cdot 4200 - 3,5 \cdot 4200] = 13,57$ мм. Он отличается от точного 20,45 мм. (форм. 112) на 33,50%.

и) Комбинированный способ определения прогибов фермы. Когда для какого-нибудь пояса фермы вычислено изменение углов между стержнями и изменение длины стержней, то эпюра прогибов может быть получена простым построением, не прибегая к диаграмме Виллио: 1) надо только последовательно, для каждого стержня рассматриваемого пояса, выполнить построение фиг. 30—b из § 4,3а.

Направление одного из стержней пояса мы считаем неподвижным и от некоторого полюса строим вектор удлинения стержня, например на фиг. 74 вектор 4—5. Следующий по порядку стержень имеет известное удлинение, которое надо отложить за первым вектором и в конце восставить перпендикуляр; таковы на фиг. 74 стержни 4—3 и 5—6. Длину перпендикуляра надо сделать равной известной нам величине вращательного перемещения, приближенно, составляющей произведение из длины стержня и угла поворота его $\delta\theta$:

$$\rho_2 = l_2 \cdot \delta\theta_1.$$

Затем у конца перпендикуляра ρ надо построить удлинение следующего по порядку третьего стержня, восставить перпендикуляр и отложить на нем:

$$\rho_3 = l_3 \cdot \delta\theta_2 \text{ и т. д.}$$

На фиг. 74 - f) выполнено такое построение: удлинение 0,94 мм. исходного стержня 4—5 построено внизу в масштабе 2:1, затем от точки 4 построено удлинение 0,98 мм. стержня 4—3 и восставлен перпендикуляр $\rho = 1,77$ мм.; далее, от конца перпендикуляра 3 отложено удлинение 1,0 мм. и восставлен перпендикуляр 4,25 мм., и т. д. до точки a . Таким же образом справа получена точка b .

Разница высот опорных точек a и b показывает, что пояс должен быть повернут. Величина вращательного перемещения определяется перпендикуляром ab' от точки a до горизонтальной прямой через точку b . Остается, по § 5,6, спроектировать нумерованные точки построенной на фиг. f) диаграммы относительных перемещений на вертикали, проведенные через одноименные узлы рассматриваемого пояса. Получится фигура e).

Конечно, совершенно таким же образом получается эпюра прогибов и для верхнего пояса, только проще, и эпюра для любой системы стержней, связанных шарнирами.

1) Бывают случаи, когда изменения углов вычисляются для других целей, например, для расчета дополнительных напряжений от жесткости узловых соединений. Тогда ими непосредственно можно воспользоваться для описанного построения.

Если система стержней располагается на одной прямой, как в верхнем поясе той же фиг. 74, то все удлинения будут параллельны этой прямой, и перпендикуляры ρ представят также ряд параллельных линий. Очевидно: 1) на эпюру прогибов не влияют удлинения стержней, влияние оказывают исключительно только изменения углов $\delta\theta$ — результат уже полученный прежде; 2) удлинение хорды равно сумме удлинений стержней системы.

Рекомендуем построить для этого случая эпюру прогибов.

к) Определение вращений ρ и угловых изменений $\delta\theta$ по эпюре прогибов. В том случае, когда построена эпюра прогибов по одному из вышеописанных способов (§ 5,6, § 9,3), легко получаются вращательные перемещения ρ отдельных стержней шарнирного многоугольника, а по ним — и изменения углов $\delta\theta$. Если цепь стержней прямолинейна, то ординаты эпюры прогибов суть вращательные перемещения ρ , разность ординат для двух соседних шарниров представляет вращательное перемещение соединяющего их стержня относительно соседнего. Это следует, как из пункта *й*) настоящего раздела 10, так и из пункта *а* раздела 1.

Если же рассматриваемая цепь стержней криволинейна, как нижний пояс на фиг. 74, то вращения ρ определяются, во-первых, на основании того, что прогибы суть проекции искомым вращений ρ и соответствующих удлинений стержней, и во-вторых, — по перпендикулярности вращательных перемещений ρ к направлению стержней. Поэтому для какого-нибудь стержня 2 между горизонталями 1 и 2 фигуры *e*) проводят на фигуре *f*) перпендикуляр $\rho = (1-2)$ к направлению стержня 2 фигуры *a*), но ограничивают его длину, не доводя до горизонтали 2, немного, соответственно удлинению λ , изображенному жирным коротким отрезком. Таким образом зигзаг из ρ и λ вмещается меж горизонталями 1 и 2. Затем таким же образом между горизонталями 2 и 3 вмещают зигзаг 2—3 из перпендикуляра ρ_3 и параллели λ_3 к стержню 3 и т. д.

Пренебрегая удлинениями λ , мы получаем ломанную изодних только тонких перемещений ρ . Это — приближенное значение ρ для отдельных стержней цепи. Они становятся вполне точными при прямолинейном расположении стержней.

Для получения изменений углов $\delta\theta$ достаточно разделить длину отрезка ρ на длину соответствующего стержня.

11. Примеры. а) Ферма аточного очертания фигуры 90 при вертикальных опорных стойках. При вычислении упругих грузов для построения линии прогибов верхнего пояса $P_1, P_2 \dots P_{n-1}$ воспользуемся фиг. 83 и 84 и соответствующими формулами (105) и (106). По грузам без затруднения построим веревочный многоугольник *асв*. Проводя замыкающую ось *X*, необходимо считаться с тем, что узлы 0 и *n* верхнего пояса садятся на величину, равную приращению длины соответствующей опорной стойки. Например, если левая стойка при расчетной нагрузке удлиняется на δh_0 , а правая сжимается на δh_n , то надо провести замыкающую так, как показано на фиг. *b*.

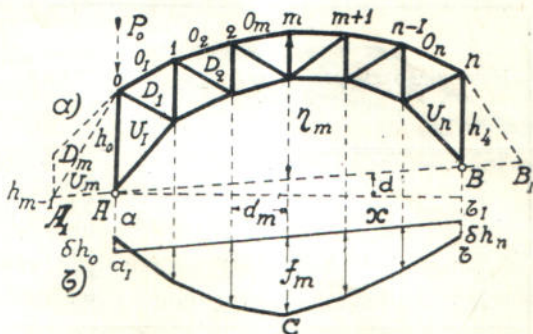
Для расчета удлинения хорды *AB* необходимо ферму подготовить путем введения вспомогательных абсолютно жестких стержней AA_1 и BB_1 , идущих

по направлению хорды ¹⁾. Так как вспомогательные стержни абсолютно жестки, то удлинение хорды A_1B_1 будет равно искомому удлинению AB . Однако полученная ферма A_1OmnB_1 еще не имеет упругих грузов в узлах 0 и n . Для вычисления этих последних придется прибегнуть к подходящей формуле (107) и фиг. 85.

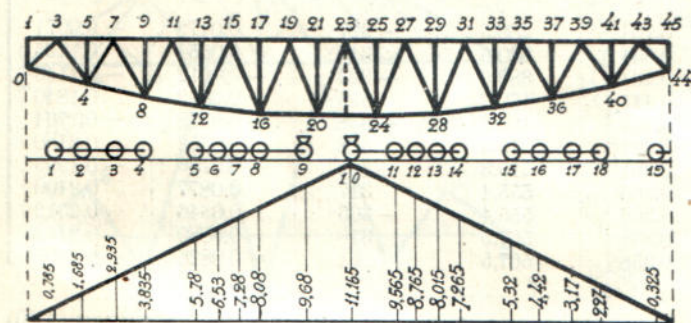
Принимая в формуле $\delta U_m = 0$, $\delta D_m = 0$ и $h_{m-1} = 0$, получим P_0 и, аналогично, $-P_n$, которые следует присоединить к определенным ранее грузам $P_1 - P_{n-1}$. Дальнейший расчет не представляет затруднений.

б) Прогиб железнодорожного моста фиг. 91. Пролет ферм $l = 44,66$ м.; число панелей 22 по 2,03 м. каждая;

высота ферм по середине пролета 5,30 м., на опорах—2,05 м.; очертание нижнего пояса параболическое. Определим прогиб, вызванный поездом 1907 года при нахождении 10-го колеса над средним узлом № 23. Имея



Фиг. 90.



Фиг. 91.

в виду вычислительный способ, заменим, для простоты, поезд эквивалентной нагрузкой ²⁾.

Изгибающий момент от поезда по середине пролета, на основании ординат линии влияния для момента, выписанных на фигуре внизу:

$$M = \Sigma Py = 784,7 \text{ тоннометра.}$$

Поэтому эквивалентная нагрузка определится из равенства:

$$q \frac{l^2}{8} = M, \text{ откуда } q = \frac{8M}{l^2} = \frac{8 \cdot 784,7}{44,66^2} = 3,135 \frac{\text{тонн}}{\text{на 1 пог. м.}}$$

По этой нагрузке определим усилия в стержнях фермы, а по ним—удлинения, необходимые для вычисления упругих грузов по форм. (97 и 98):

$$\left. \begin{aligned} P_o &= \left(\frac{\delta U_k}{\cos \gamma_k} - \frac{\delta D_k}{\cos \psi_k} - \frac{\delta D_{k+1}}{\cos \varphi_{k+1}} \right) : h_k \text{ — для узлов верхнего пояса,} \\ P_u &= \left(-\frac{\delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\delta D_m}{\cos \tau_m} + \frac{\delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} \right) : h_m \text{ — для узлов нижнего пояса.} \end{aligned} \right\} (120).$$

¹⁾ Ибо формула для удлинения хорды выведена в предположении отсутствия вертикальных стержней шарнирного многоугольника.

²⁾ См. наши Системы без лишних стержней, § 74.₂.

Благодаря наличности в решетке фермы дополнительных стоек, грузы узлов 5, 9, 13... приходится считать приложенными в нижних узлах и пользоваться нижней формулой для P_u . Все данные, необходимые для вычисления грузов P , приведены в следующей таблице:

Название элемента		Cosinus'ы угл. накл. c	Длина элемента в см.	Напряже- ние в кг./см. ²	Удлинения в см. λ	Отношение $\lambda : c$
Верхний пояс	O_{1-3}	0	203	0	0	0
	O_{3-7}	0	206	-274	-0,0556	-0,0556
	O_{7-11}	0	406	-278	-0,0554	-0,0564
	O_{11-15}	0	406	-280	-0,0569	-0,0569
	O_{15-19}	0	406	-295	-0,0599	-0,0599
	O_{19-23}	0	406	-291	-0,0591	-0,0591
Нижний	U_{0-4}	0,961	422,5	183	0,0386	0,0402
	U_{4-8}	0,976	416,1	335	0,0697	0,0714
	U_{8-12}	0,985	411,2	345	0,0700	0,0710
	U_{12-16}	0,996	407,8	339	0,0692	0,0695
	U_{16-20}	0,999	406,2	335	0,0774	0,0774
	U_{20-24}	1,000	406,0	341	0,0693	0,0693
Р а с к о с ы	D_{0-3}	0,704	288,5	-327	-0,0472	-0,0671
	D_{3-4}	0,534	380,6	343	0,0654	0,1225
	D_{4-7}	0,534	380,6	-322	-0,0612	-0,1148
	D_{7-8}	0,441	460,2	353	0,0812	0,1840
	D_{8-11}	0,441	460,2	-338	-0,0778	-0,1764
	D_{11-12}	0,391	519,3	328	0,0852	0,2180
	D_{12-15}	0,391	519,3	-301	-0,0780	-0,1995
	D_{15-16}	0,366	555,4	317	0,0877	0,2400
	D_{16-19}	0,366	555,4	-305	-0,0846	-0,2312
	D_{19-20}	0,358	567,5	310	0,0880	0,2460
	D_{20-23}	0,358	567,5	-291	-0,0826	-0,2308

Подставляя цифры последнего столбца со знаками \pm в формулы (120) применительно к соответствующим узлам, получим следующую таблицу:

№№ узлов	$\partial U : \cos \gamma$ $\partial O : \cos \beta$	$\partial D_k : \cos \varphi_k$ $\partial D_m : \cos \varphi_m$	$\partial D_{k+1} : \cos \varphi_{k+1}$ $\partial D_{m+1} : \cos \varphi_{m+1}$	h_m	Упругие грузы	
					1000 · P_o 1000 · P_u	
Верхний пояс	3	0,0402	0,0671	-0,1225	263,5	-0,0577
	7	0,0714	0,1148	-0,1840	367,5	0,0060
	11	0,0710	0,1764	-0,2180	445,5	0,0659
	15	0,0695	0,1995	-0,2400	497,5	0,0582
	19	0,0774	0,2460	-0,2312	523,5	0,1760
	23	0,0695	0,2380	-0,2380	530,0	0,1312
Нижний пояс	4	0,0557	0,1225	-0,1148	322,0	0,1970
	8	0,0564	0,1840	-0,1764	413,0	0,1545
	12	0,0569	0,2180	-0,1996	478,0	0,1575
	16	0,0599	0,2400	-0,2312	517,0	0,1330
	20	0,0591	0,2460	-0,2308	530,0	0,1210

1000 $A = 1,0770$

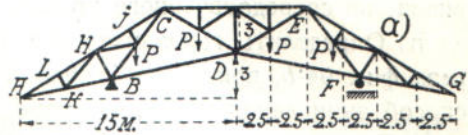
Теперь прогиб фермы по середине определяется, как изгибающий момент для 23-го узла, т. е. по формуле:

$$y_{23} = M_{23} = A \cdot \frac{1}{2}l - \sum Pp,$$

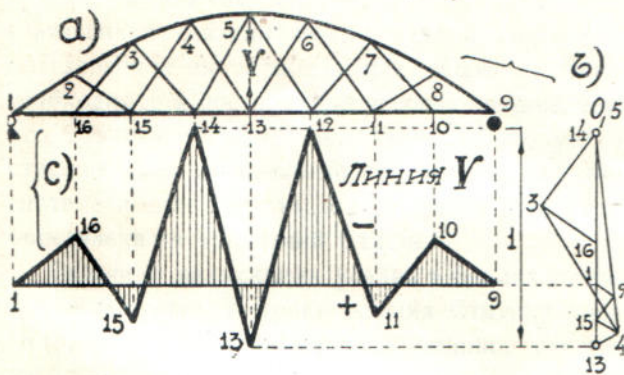
где реакция A есть алгебраическая сумма грузов P последнего столбца таблицы, за исключением P_{23} , от которого принимается только половина; p — есть плечо груза P относительно 23-го узла.

Для получения прогибов прямо в миллиметрах, мы умножили упругие грузы на 1000 вместо того, чтобы плечи, данные на чертеже в метрах, переводить в миллиметры. Пользуясь цифрами последнего столбца таблицы и длиной панели 2,03 м., получаем:

$$y_{23} = 1,077 \cdot 22,33 - (0,121 \cdot 1 + 0,176 \cdot 2 + 0,133 \cdot 3 + 0,0582 \cdot 4 + 0,1575 \cdot 5 + 0,0659 \cdot 6 + 0,1545 \cdot 7 + 0,006 \cdot 8 + 0,197 \cdot 9 - 0,0577 \cdot 10)2,03 = 24,04 - 7,34 = 16,70 \text{ мм.}$$



Фиг. 92.



Фиг. 93.

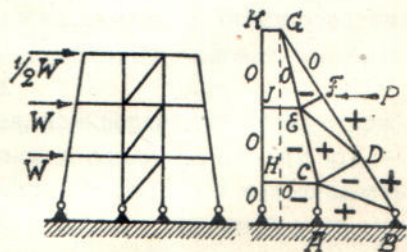
12. Задачи. а) Сложная шпренгельная ферма с консолями (фиг. 92). Определить прогиб по середине пролета и на конце консоли при условии нагружения верхних узлов. Воспользоваться способом упругих грузов.

б) Консольная система ферм фиг. 48. Построить эпюру прогибов верхнего пояса, пользуясь расчетом упругих грузов. Сравните прогиб конца консоли при точном расчете и в предположении, что решетка из абсолютно неизменяемых стержней.

в) Двухрешетчатая система фиг. 93. Указать способ вычисления упругих грузов для построения эпюры прогибов нижнего пояса.

г) Пренебрегая решеткой при расчете прогибов, мы допускаем погрешность. В каком случае она больше, при слабой или при относительно сильной решетке?

д) При выборе системы простого балочного моста, оставляя постоянной общую площадь сечения поясов и решетки, изменяют систему последней. Сильно ли отражается эта перемена на прогибе фермы?



Фиг. 94 а) и б).

f) Спроектирована ферма, удовлетворительная по напряжениям в стержнях, но неудовлетворительная в отношении прогиба. Можно ли, перемещая часть материала из поясов в решетку, улучшить жесткость фермы?

g) Сравните прогиб сплошной двутавровой балки и стержневой фермы с параллельными поясами, той же высоты и из того же количества материала, но сосредоточенного только в тавровых поясах фермы.

h) Определить горизонтальное перемещение свободного конца ледореза фиг. 94-*b*, при ударе льдины в узел *F*, если сила удара *P*. Показать способ вычисления упругих грузов

i) Составить выражение для горизонтального перемещения вершины многоярусной решетчатой опоры при равномерно распределенном давлении ветра, например, применительно к фиг. 94-*a*.

—————



Отдел второй.

Общие методы расчета статически неопределимых систем.

ГЛАВА III.

Метод уравнивания деформаций.

§ 10. Системы с одной лишней неизвестной. 1. Общие сведения. Неизменяемость системы стержней обуславливается двумя обстоятельствами. Во-первых, требуется некоторое минимальное число стержней, являющихся связями между узлами системы, и, во-вторых, — требуется определенное их расположение, иначе сказать: должны быть соблюдены необходимое и достаточное условия неизменяемости. Кроме того, известно, что Статика твердого тела дает столько уравнений, сколько необходимо стержней для неизменяемости системы; поэтому, каждая лишняя связь в системе всегда представляет неизвестную силу, которая не может быть определена из уравнений Статики.

Задачи о разыскании усилий в фермах с лишними связями — это задачи, неопределенные с точки зрения Статики твердого тела; те неизвестные силы, которые возникают в лишних связях, называются лишними неизвестными. Однако, задача оказывается неопределенной только с точки зрения Статики абсолютно твердого тела, когда предполагают, что элементы системы совершенно неизменяемы. Но если принять во внимание упругость брусков, то вопрос приобретает определенность. Упругие бруски не могут деформироваться произвольно, а лишь подчиняясь определенным законам в зависимости от длины, толщины и материала, и, таким образом, накладывают на всякую упругую систему некоторые условия, которые приходится добавлять к условиям Статики.

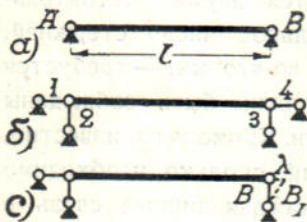
Вообразим, например, на плоскости узел, прикрепленный тремя стержнями. Всякие три силы могут уравновеситься в одной точке, так что, — задача неопределенная. Действительно, в одном из стержней можно задать силу S_1 ; разлагая ее на направления двух других стержней узла, мы получим их усилия T_1 и U_1 . Но можно задаться другим усилием первого стержня S_2 и путем разложения получить также и усилия T_2 и U_2 . Ничто не препятствует таким же образом получить сколько угодно усилий в трех стержнях, пересекающихся в одной точке. Но это случилось оттого, что мы не считаемся с деформацией стержней. В действительности же в

стержнях T и U не может быть произвольных усилий, а лишь такие, при которых узел, поддерживаемый ими, опускается на столько, на сколько по своим размерам допускает стержень S ; если последний толще и жестче, то это опускание будет меньше, при податливом стержне S — оно будет больше.

Вообще, вводя лишнюю связь в неизменяемую основную систему из необходимых стержней, мы лишаем последнюю некоторой свободы деформироваться. Поэтому при действии нагрузки, а также при температурных изменениях в лишней связи должны появляться усилия, как результат стремления системы деформироваться. Усилия тем больше, чем сильнее стремление неизменяемой системы к деформации в том месте, где помещается лишняя связь. Зная деформацию, которую имела бы система при отсутствии лишней связи, мы можем судить о величине лишнего усилия. Эти соображения служат основанием для расчета лишних неизвестных.

Предварительно рассмотрим несколько примеров.

2. Примеры. а) Балка на двух неподвижных шарнирах фиг. 95. Ее закрепление эквивалентно 4-опорным (абс. твердым) стержням,



Фиг. 95.

как показано на фиг. *b*. Если бы в этой балке не было 4-го опорного стержня (фиг. *c*), она свободно расширялась бы от изменений температуры, например, удлинилась на $\lambda_t = \varepsilon lt$, где ε — коэффициент линейного расширения материала балки, l — ее длина и t — изменение температуры.

В действительности такое расширение невозможно благодаря препятствию со стороны стержня № 4 (фиг. *b*). Очевидно, в стержне возникает некоторое усилие X , тем большее, чем больше λ , ибо задача этого усилия: передвинувшийся в свободной балке конец B_1 (фиг. *c*) вернуть обратно в положение B , т. е. надлежащим образом сжать балку AB .

Выражая для пределов пропорциональности усилие X через размеры балки $\lambda_x = \frac{Xl}{EF}$ и приписывая X знак $+$, как, вообще, всякому неизвестному, заметим, что в результате конец балки остается на месте; поэтому алгебраическая сумма λ_t и λ_x равна нулю, т. е.

$$\lambda_t + \lambda_x = \varepsilon lt + \frac{Xl}{EF} = 0$$

Отсюда находится X : $X = -\varepsilon t EF \dots \dots \dots (121)$.

б) Балка, одним концом защемленная и опирающаяся другим. Эта балка имеет также одну лишнюю связь. Если бы здесь не было правой опоры B , то получилась бы обыкновенная консоль. Под действием равномерной нагрузки q конец консоли прогибается вниз на величину $y_0 = \frac{ql^4}{8EJ}$ (фиг. 96—*b*).

В действительности такого прогиба нет. Очевидно, роль правой (лишней) опоры состоит в уничтожении прогиба. Это и представляет средство ра-

зыскать лишнюю реакцию B . Обозначим реакцию лишней опоры X , и подберем величину ее так, чтобы она уничтожала тот прогиб, который получается в консоли, освобожденной от лишнего закрепления B .

Прикладывая к концу консоли сосредоточенную силу X , мы получаем обратный прогиб вверх.

$$y_x = -\frac{Xl^3}{3EJ}.$$

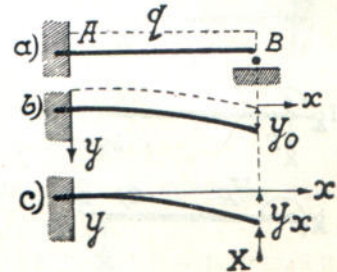
Остается написать, что в данной балке с лишними связями (фиг. а) при одновременном действии, и нагрузки q (фиг. б), и лишней неизвестной X (фиг. с) истинный прогиб точки B есть нуль, т. е. — алгебраическая сумма прогибов y_0 и y_x равна нулю:

$$y_0 + y_x = \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{Xl^3}{3EJ} = 0.$$

В результате получим $X = \frac{3}{8} ql \dots (122).$

Лишняя реакция составляет $\frac{3}{8}$ от полной нагрузки балки.

Другое решение. За лишнюю связь можно принять защемление опоры и вообразить, что там действует некоторый реактивный момент M_B (фиг. 97). Как и прежде, разобьем все



Фиг. 96.



Фиг. 97.

внешние силы балки на две группы. Одну группу составляют: нагрузка q и вызванные ею реакции A_0 и B_0 , как показано на фиг. б. Другая группа — это лишний момент M_B с его реакциями A_x и B_x фиг. с. Как и прежде, определим деформацию в балке фиг. б, освобожденной от лишней связи, и притом в месте, где находилась эта связь; — такую деформацию будет угол поворота балки $\beta_0 = \frac{ql^3}{24EJ}$, вызванный ее нагрузкой q .

Далее, по предыдущему, определяем такой же угол поворота, вызванный лишним моментом на фиг. с;

$$\beta_x = \frac{M_B l}{3EJ}.$$

Наконец, напишем, что алгебраическая сумма углов поворота $\beta_0 + \beta_x$ равна действительному углу в месте закрепления данной балки, т. е. нулю:

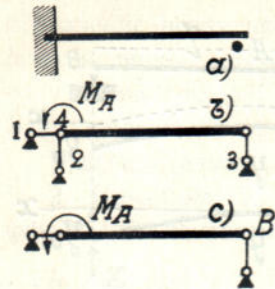
$$\beta_0 + \beta_x = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} = 0; \text{ отсюда: } M_B = -\frac{ql^2}{8} \dots (123).$$

с) Замечание о выборе лишних связей. Предыдущая задача допускает свободу выбора той или иной лишней неизвестной: мы можем для расчета отбросить опорный шарнир (фиг. 96) или защемление опоры, как на фиг. 97. Однако такой выбор не совершенно произволен. Из 4-х

связей, под влиянием которых находится балка фиг. 98, не может считаться лишним вертикальный стержень 2, ибо, отбрасывая этот стержень, мы не получаем неизменяемой системы, а следовательно, и лишены возможности производить дальнейший расчет деформаций.

Как показывает фиг. с, система вращается вокруг мгновенного центра *B*, не претерпевая изгиба.

д) Балка на 3 опорах при равномерной нагрузке (фиг. 99). Снова намечаем две категории сил: одна—это нагрузка *q* и крайние реакции *A₀* и *C₀*, другая—реакция *X* лишней опоры *B* и соответствующие ей реакции *A_x* и *C_x*.



Фиг. 98.

Определяем прогиб балки *AC* в точке *B* от первой категории сил:

$$y_0 = \frac{5qL^4}{384EJ}.$$

Определяем прогиб от сил второй категории:

$$y_x = \frac{XL^3}{48EJ}.$$

Сумму этих прогибов приравниваем истинному перемещению точки *B* данной балки с лишней опорой. В случае, если опора незыблема, то ее перемещение—нуль; поэтому:

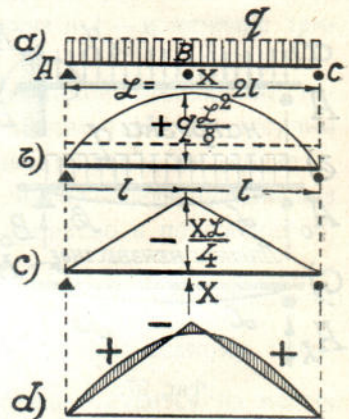
$$y_0 + y_x = \frac{5}{384} q \frac{L^4}{EJ} - \frac{XL^3}{48EJ} = 0 \dots (124).$$

$$\text{Отсюда } X = \frac{5}{8} qL = \frac{5}{8} P \dots (125),$$

где *P*—вес всего груза балки = *qL*.

Если же опора податлива, например, если под давлением нагрузки она садится на величину δ , то в правой части равенства (124)

$$\text{пишем } \delta. \text{ При этом оказывается } \lambda = \frac{5}{8} (qL) - \frac{40\delta EJ}{L^3} \dots (126).$$



Фиг. 99.

3. Правило расчета. Разобранные примеры подсказывают следующее правило для определения лишнего неизвестного усилия. Систему с лишней связью освобождают от этой связи, выбирая последнюю так, чтобы осталась неизменяемая система. В полученной, таким образом, системе определяют деформацию, соответствующую отброшенной лишней связи: один раз—от данной нагрузки, а другой—от действия одной только лишней неизвестной. Алгебраическую сумму обеих деформаций приравнивают истинной деформации, имеющей место в данной системе с лишней связью. Из полученного уравнения определяется лишнее неизвестное.

Систему, освобожденную от лишних связей, называют основной системой.

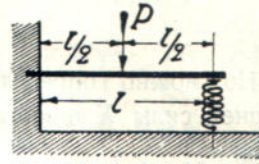
4. Задачи. а) Защемленная балка на упругой опоре (фиг. 100). Пружину примем за лишнюю связь с усилием X и определим на ее месте прогиб консоли.

От нагрузки P :

$$y_0 = \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EJ} + \frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EJ} \cdot \frac{l}{2}$$

От лишней неизвестной X :

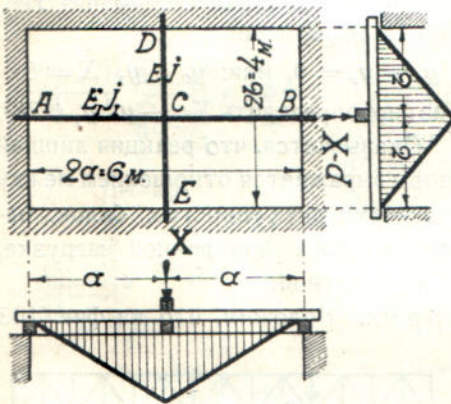
$$y_x = -\frac{X \cdot (l)^3}{3EJ}$$



Фиг. 100.

Алгебраическая сумма их равна осадке пружины, так как это есть действительное перемещение данной системы:

$$\frac{Pl^3}{24EJ} + \frac{Pl^2}{8EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Xl^3}{3EJ} = \frac{4XNR^3}{Gr^4},$$



Фиг. 101.

где N — число витков пружины. Отсюда находим X .

б) Перекрестные балки (фиг. 101). На пересечении двух балок находится груз $P = 3,5$ тонны. Требуется найти распределение этого груза между балками. Положим, что на продольную балку AB приходится X ; на поперечную $P - X$. Освободивши балки от взаимной связи, определим прогиб поперечной балки по середине:

$$y = \frac{(P - X)(2b)^3}{48EJ}$$

и приравняем его действительному прогибу системы, равному прогибу продольной балки:

$$y = \frac{X(2a)^3}{48E_1J_1}$$

$$\text{Из полученного уравнения } \frac{(P - X)b^3}{6EJ} = \frac{Xa^3}{6E_1J_1} \dots \dots \dots (127)$$

находим $X = P \frac{1}{1 + \frac{a^3 EJ}{b^3 E_1 J_1}}$, что при $EJ = E_1 J_1$ после подстановки чисел

дает $X = 0,8$ т., следовательно, $P - X = 2,7$ тонн.

в) Более сложные нагрузки. При более сложных нагрузках целесообразно определять деформации графически. Покажем это на примере двухпролетной балки с разными пролетами l_1 и l_2 при нескольких сосредоточенных грузах $P_1, P_2 \dots P_5$ (фиг. 102).

Отбросивши среднюю опору B , построим упругую линию фиг. с, для чего воспользуемся многоугольником сил f и эпюрой моментов b , затем — вторым многоугольником сил g . Из чертежа упругой линии, под лишней опорой B , определяем непосредственно стрелу прогиба y_0 .

Далее определяем прогиб под той же точкой *B* от действия лишней силы *X*. Для этого простого случая пользуемся готовой формулой § 1,4 при $x = l_1$:

$$y_x = \frac{X l_1^2 l_2^2}{3(l_1 + l_2) E J} \cdot 1)$$

Но можно определить y_x и графически. Поместим единицу вместо лишней силы *X* и построим, по предыдущему, эпюру моментов *d*) и упругую линию *e*). Тогда для груза единица получится прогиб y_1 непосредственно под опорой *B*. В действительности к балке *AC* приложена не 1, а неизвестное *X*; поэтому прогиб должен быть в *X* раз больше:

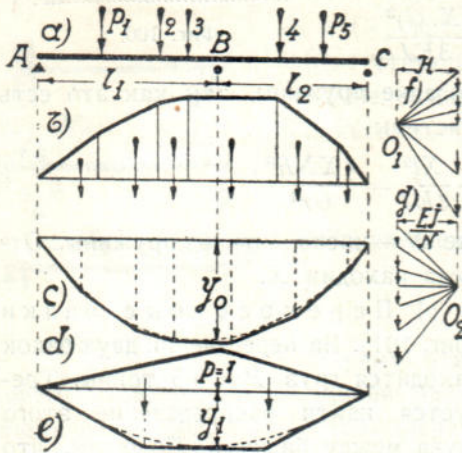
$$y_x = X \cdot y_1.$$

Остается составить обычное уравнение деформаций

$$y_o + y_x = 0, \text{ или: } y_o + y_1 X = 0$$

и из него определить $X = -y_o : y_1$ (128).

Оказывается, что реакция лишней опоры выражается отношением между прогибами двух простых балок: одного прогиба при данной нагрузке,

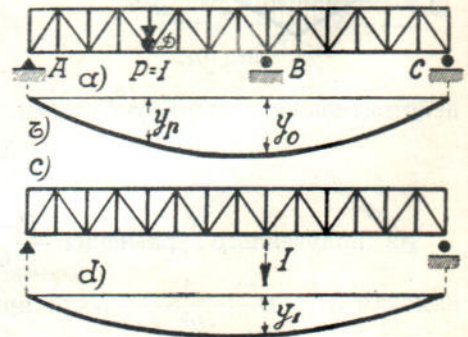


Фиг. 102.

а другого—при единице вместо лишней неизвестной.

d) Мостовая ферма на 3 опорах. Положим, что на фиг. 103 ферма нагружена силой $P=1$, приложенной в точке *D* и вызывающей в опоре *B* реакцию *X*.

Отбрасывая лишнюю опору, строим эпюру прогибов того пояса фермы, по которому происходит езда (нижнего). Для этого определяем усилия, вызванные грузом *P* в простой ферме на 2-х опорах, затем, по удлинениям, обуславливаемым этими усилиями, строим диаграмму Виллио и по ней—эпюру прогибов (см. § 5,6). Последняя представлена на фиг. b, и дает непосредственно прогиб лишней опорной точки y_o .



Фиг. 103.

Прикладывая к той же простой ферме единицу силы вместо лишней реакции, (фиг. c), совершенно таким же образом определим прогиб y_1 от лишней неизвестной, равной единице. В действительности прогиб должен быть: $X y_1$.

Следовательно: $y_o + X y_1 = 0$, или $X = -\frac{y_o}{y_1} \dots \dots \dots$ (129).

1) См. табл. III, пример 10 внизу.

е) Подкосный мост (фиг. 104) при равномерной нагрузке. Называя Y усилие подкоса, выразим лишнюю реакцию B через Y :

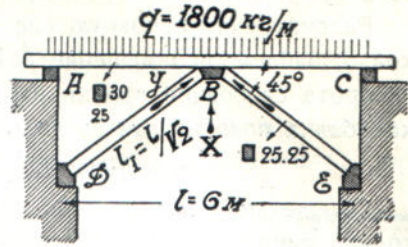
$$X = 2Y \cos 45^\circ = Y\sqrt{2}.$$

Так как вертикальная осадка подушки B :

$$h = Y \frac{l}{\sqrt{2}} \frac{1}{EF} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то уравнение деформаций получается в форме:

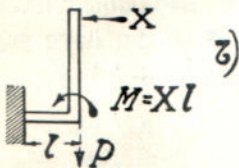
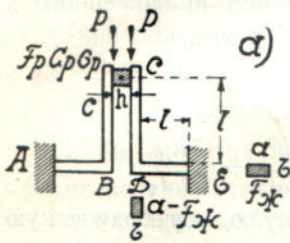
$$\frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ} - \frac{Y\sqrt{2}l^3}{48EJ} = \frac{Yl}{\sqrt{2}\sqrt{2}EF}.$$



Фиг. 104.

После преобразований и подстановки чисел получим

$$Y = \frac{5}{8} ql \frac{1}{\sqrt{2} + 24 J : Fl^2} = \frac{5}{8} \cdot 1800 \cdot 6 : (1,414 + \frac{24 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 30}{12 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 600 \cdot 600}) = 4,75 \text{ тонн} \dots (130).$$



Фиг. 105.

ф) Рессора из двух железных углов ABC и CDE с резиновой прокладкой C (фиг. 105). Для определения осадки рессоры при нагрузке PP , обозначим X усилие прокладки; получим уравнение

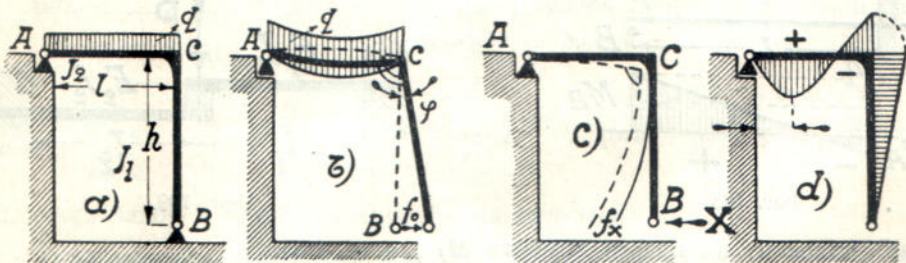
$$\left[\frac{Pl^2}{2E_{ж}J_{ж}} - \frac{(Xl)l}{E_{ж}J_{ж}} \right] l - \frac{Xl^3}{3E_{ж}J_{ж}} = \frac{Xh}{2E_p F_p},$$

где $E_{ж}F_{ж}J_{ж}$ — относится к железу,

$E_p F_p$ — " к резине.

$$\text{Отсюда } X = P \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{hE_{ж}J_{ж}}{l^3 E_p F_p}}.$$

г) Береговой кран фиг. 106 представляет раму с двумя шарнирами A и B ; в узле C — жесткое соединение, обеспечивающее неизменя-



Фиг. 106. Размер, показанный горизонтальными стрелками на фиг. d), составляет:

$$\frac{l}{8} \frac{4k + 3}{k + 1}$$

мость прямого угла. Определим реакции A и B при действии равномерно распределенной нагрузки q .

Чтобы обратить раму в основную систему, отбросим горизонтальное закрепление опоры B , превращая последнюю в подвижную фиг. b . Соответствующую лишнюю реактивную силу обозначим X .

Рассматривая основную систему фиг. b , нагруженную только нагрузкой q , найдем перемещение f_0 освобожденного конца B , как результат поворота свободной стойки рамы, жестко скрепленной с балкой AC . Так как балка поворачивается на опорах на угол

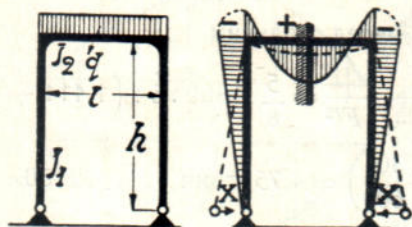
$$\varphi = ql^3 : 24EJ_2, \text{ -- то } f_0 = ql^3h : 24EJ_2^1).$$

Определим теперь на фиг. c перемещение f_x того же конца B от одной только лишней силы X . Если бы конец стойки C был неподвижен, то f_x составляло бы $Xh^3 : 3EJ_1$; но в действительности конец C балки AC поворачивается под влиянием приложенного к нему момента Xh на угол

$$\varphi = Ml : 3EJ_2 = Xh : 3EJ_2;$$

поэтому общее перемещение

$$f_x = \frac{Xh^3}{3EJ_1} + \frac{Xh^2l}{3EJ_2}.$$



Фиг. 107.

Приравнявая нулю алгебраическую

сумму перемещений $f_0 + f_x$, получим:

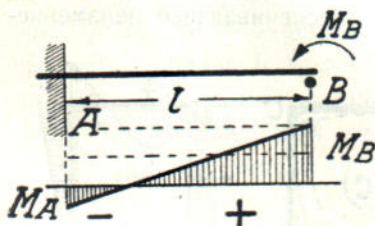
$$q \frac{l^3h}{24EJ_2} - \frac{Xh^3}{3EJ_1} - \frac{Xh^2l}{3EJ_2} = 0, \text{ откуда } X = q \frac{l^2}{8h} \cdot \frac{1}{1+k},$$

где буквой k обозначено $\frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$.

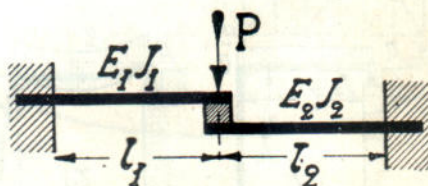
Совершенно таким же образом для рамы о двух ногах, опирающихся на шарниры фиг. 107, получим:

$$q \frac{l^3h}{24EJ_2} - \frac{Xh^3}{3EJ_1} - \frac{Xh^2l}{2EJ_2} = 0, \text{ откуда } X = q \frac{l^2}{4h} \frac{1}{2k+3} \quad (131).$$

5. Задачи для решения. а) Доказать, что на фиг. 108 реактивный момент в плоскости защемления A соста-



Фиг. 108.



Фиг. 109.

влет половину активного момента M_B , т. е. что:

$$M_A = \frac{1}{2} M_B \dots \dots \dots (132)$$

и угол поворота $\beta = \frac{1}{4} \frac{M_B l}{EJ}$.

1) Обыкновенно, по малости, пренебрегают сжатием стойки CB и разницей между длиной дуги B и касательной к ней.

b) Две консоли противоположных стен помещения скреплены концами, как показано на фиг. 109. Определить прогиб точки скрепления при действии на нее груза P .

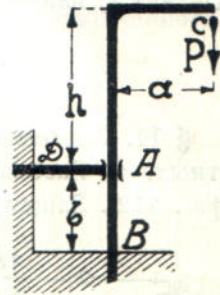
Ответ: $y = \frac{Pl_1^3}{3E_1J_1} \cdot \frac{1}{1+k}$, где $k = \frac{E_2J_2l_1^3}{E_1J_1l_2^3} \dots \dots \dots (133)$.

c) Кран в виде «глаголя» имеет заземленную пяту B и направляющую шайбу A (фиг. 110), в которой стойка может свободно скользить. Определить реакцию этой шайбы при действии силы P .

Ответ: $A = 1,5Pa : b \dots \dots \dots (134)$.

d) На фиг. 99 определить опорные реакции при условии, что вместо средней абс. жесткой опоры B помещается железная колонна высотой h . Площадь сечения колонны F , момент инерции балки J .

Ответ: $\frac{5}{8}P : \left(48 \frac{h}{L^3} \frac{J}{F} + 1 \right)$.



Фиг. 110.

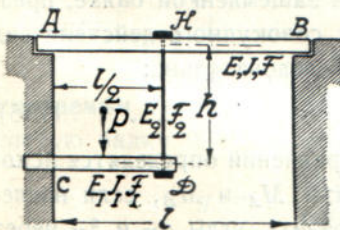
e) На фиг. 101 определить, каково должно быть распределение нагрузки между продольной и поперечной балкой, чтобы их напряжения в опасном месте были одинаковы, и какой зазор z между балками необходимо оставить для этой цели?

Решение. Равенство напряжений:

$\frac{X \cdot 2a \cdot \frac{1}{2}h_1}{4J_1} = \frac{(P-X) \cdot 2b \cdot \frac{1}{2}h}{4J}$ дает при $h_1 = h$ для X значение

$X = P \frac{1}{1 + \frac{aJ}{bJ_1}}$, где h — высота сечения.

Следовательно: $P - X = P \frac{1}{1 + \frac{J_1 b}{J a}}$.



Фиг. 111.

Вычитая теперь прогиб поперечной балки из прогиба продольной:

$P \frac{1}{1 + \frac{J_1 b}{J a}} \cdot \frac{8b^3}{48EJ} - P \frac{1}{1 + \frac{J a}{J_1 b}} \cdot \frac{8a^3}{48E_1J_1} = \frac{Pab^3}{6E_1(aJ + bJ_1)} \left(\frac{E_1}{E} - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{J}{J_1} \right)$

получим зазор z между перекрестными балками.

f) Определить добавочную нагрузку, которую получает основная балка AB фиг. 111 вследствие подвешивания к ней балочных балок CD посредством подвесок DH из круглого железа. Считая размеры и жесткость заданными, рассмотреть: a) случай нерастяжимой подвески DH и b) случай упругой подвески—при расположении груза P по середине балки CD . Балка CD —защемленная, AB — опертая.

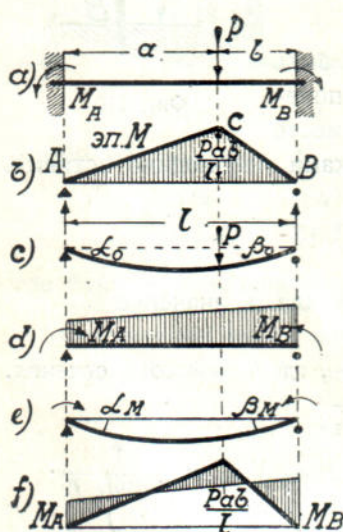
$$\text{Решение. а) } \frac{Xl^3}{48EJ} = \left[\frac{P \left(\frac{l}{4}\right)^3}{3E_1J_1} + \frac{P \left(\frac{l}{4}\right)^2 \cdot \frac{l}{4}}{2E_1J_1} \right] - \frac{X \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3E_1J_1}$$

$$\text{Отсюда: } X = \frac{5}{8} P \frac{1}{2 + \frac{E_1J_1}{EJ}}$$

б) Приравнявая прогиб точки D , написанный в правой части первого равенства, удлинению подвески $Xh : EF$ плюс прогиб балки AB , равный $Xl^3 : 48EJ$, найдем:

$$X = \frac{5}{8} P \frac{1}{2 + \frac{E_1J_1}{EJ} + 48 \frac{E_1J_1h}{E_2F_2l^3}}$$

§ 11. Системы со многими неизвестными. 1. Два лишних неизвестных. а) Рассмотрим балку, защемленную двумя концами (фиг. 112). Защемления считаем лишними связями, в которых действуют



Фиг. 112.

реактивные моменты M_A и M_B . По предыдущему, разобьем все внешние силы балки на две категории: 1) нагрузка и 2) лишние неизвестные. Определим в простой балке, освобожденной от лишних защемлений, углы поворота соответствующих концов A и B от нагрузки P (фиг. c). Пусть они составляют α_0 и β_0 . Далее определим углы тех же концов от лишних моментов: α_M и β_M (фиг. d и e).

Очевидно, истинные углы поворота, имеющие место в данной защемленной балке, представляют результат совокупного действия сил обеих категорий и, следовательно:

$$\alpha_0 + \alpha_M = 0 \text{ и } \beta_0 + \beta_M = 0 \dots \dots (135).$$

Из таких двух уравнений определяются искомые лишние моменты M_A и M_B , если надлежащим образом выразить углы α_M и β_M через эти неизвестные. Таково общее решение задачи. Мы применим его к случаю одного сосредоточенного груза и воспользуемся графоаналитическим методом для определения углов α и β .

$$\text{Известно, что } \alpha_0 = \frac{A'}{EJ} \text{ и } \beta_0 = \frac{B'}{EJ} \text{ (см. 55).}$$

$$\text{Но } A' = \frac{\omega' \cdot c'}{l} \text{ и } B' = \frac{\omega' c}{l},$$

где ω' — площадь эпюры моментов, c и c' — расстояние центра ее тяжести, соответственно, до опор A и B .

Следовательно:

$$\alpha_0 = \frac{\omega' c'}{lEJ} \text{ и } \beta_0 = \frac{\omega' c}{lEJ} \dots \dots (136).$$

Углы поворота от лишних моментов, как известно, суть:

$$\alpha_M = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} \text{ и } \beta_M = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} \dots \dots \dots (137^1)$$

Поэтому уравнения (135) дают:¹⁾

$$\frac{\omega'c'}{lEJ} + \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} = 0 \text{ и } \frac{\omega'c}{lEJ} + \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} = 0.$$

Откуда $M_A = -\frac{2\omega'(2c' - c)}{l^2}$ и $M_B = -\frac{2\omega'(2c - c')}{l^2} \dots \dots \dots (138).$

Применим эти общие формулы для случая одного сосредоточенного груза P по фиг. 112. Тогда:

$$\omega' = \frac{1}{2} l \frac{Pab}{l} = \frac{1}{2} Pab,$$

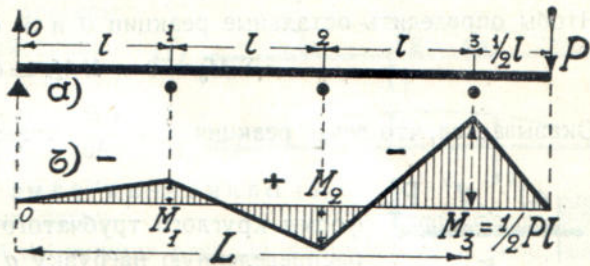
$$c = \frac{1}{3}(0 + a + l) \text{ и } c' = \frac{1}{3}(0 + b + l) \dots \dots (139).$$

Поэтому: $M_A = -\frac{Pab}{l^2} \left[\frac{2}{3}(b + l) - \frac{1}{3}(a + l) \right] = -\frac{Pab^2}{l^2}$

и соответственно: $M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2} \dots \dots \dots (140).$

б) Трехпролетная балка с консолью (фиг. 113). Примем за лишние две средних опоры 1 и 2 и будем считать, что балка нагружена на опоре 3 опорным моментом

$$M_3 = -P \frac{l}{2},$$



Фиг. 113.

создаваемым нагрузкою консоли. Отбрасывая средние опоры и нагружая простую балку 0—3 моментом M_3 , получим упругую линию по (28):

$$y = -\frac{M_3 Lx}{6EJ} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right), \text{ где } M_3 = -\frac{Pl}{2},$$

из которой определяются прогибы опорных точек 1 и 2:

$$y_{1P} = \frac{2}{9} \frac{Pl^3}{EJ} \text{ и } y_{2P} = \frac{5}{18} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Теперь нагрузим простую балку 0—3 силой X вместо первой лишней опоры и найдем прогибы под обоими лишними опорными точками. С этой целью воспользуемся уравнением упругой линии простой балки, нагруженной одной сосредоточенной силой X (см. в § 1,4 второй столбец таблицы III):

$$y = \frac{Xb}{6LEJ} x(x^2 + b^2 - L^2),$$

¹⁾ Лишние неизвестные моменты, пока они еще не определены, считаются положительными, т. е. сгибающими балку выпуклостью вниз. Отрицательный ответ форм. (140) указывает, что в действительности они идут в обратные стороны.

где b — есть расстояние силы до правой опоры. Применяя уравнение, один раз при $x=l$, а другой раз при $x=2l$, получим необходимые прогибы:

$$y_{1x} = \frac{4}{9} \frac{Xl^3}{EJ} \text{ и } y_{2x} = \frac{7}{18} \frac{Xl^3}{EJ}.$$

Нагрузивши неизвестным Y вместо второй лишней реакции, из того же уравнения получим

$$y_{1y} = \frac{7}{18} \frac{Yl^3}{EJ} \text{ и } y_{2y} = \frac{4}{9} \frac{Yl^3}{EJ}.$$

Пока течение сил неизвестно, все прогибы и силы идут кверху. Напишем, что сумма прогибов на 1 опоре равна нулю, т. е.:

$$y_{1p} + y_{1x} + y_{1y} = 0 = \frac{2}{9} \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{4}{9} \frac{Xl^3}{EJ} + \frac{7}{18} \frac{Yl^3}{EJ} = 0.$$

или, по сокращении: $8X + 7Y = -4P$.

Таким же образом для 2 опоры: $7X + 8Y = -5P$.

Остается решить уравнения, чтобы получить:

$$X = \frac{-4.8 + 5.7}{8.8 - 7.7} P = \frac{3}{15} P \text{ и } Y = \frac{-5.8 + 4.7}{8.8 - 7.7} P = -\frac{12}{15} P \dots (141).$$

Чтобы определить остальные реакции 0 и 3, составляем уравнения:

$$\Sigma M_0 = 0 \text{ и } \Sigma M_3 = 0.$$

Оказывается, что левая реакция $= -\frac{P}{30}$, правая $= +\frac{49}{30}P$.



Фиг. 114.

с) Балконная рама (фиг. 114) прямоугольной формы круглого трубчатого сечения несет равномерно распределенную нагрузку q и сосредоточенный груз P .

Для расчета системы выделим часть рамы AB и освободим от заделки ее концы A и B . Пусть действующие здесь лишние моменты

$$M_A \text{ и } M_B.$$

Тогда углы поворота от нагрузок

$$\alpha_0 = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Pab(b+l)}{6lEJ} \text{ и } \beta_0 = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Pab(a+l)}{6lEJ}.$$

Углы поворота от лишних моментов

$$\alpha_M = \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} \text{ и } \beta_M = \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ}.$$

Так как концы балки A и B скреплены с упруго вращающимися консолями CA и DB , то истинный их поворот определяется углами закручивания концов консолей: $\varphi = \frac{M_k k}{GJ_p}$,

где M_k — крутящий момент, очевидно, совпадающий с лишними моментами M_A и M_B .

Таким образом, получим уравнения: для конца A : $\alpha_0 + \alpha_M = \varphi_\alpha$, или:

$$\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Pab(b+l)}{6EJ} + \frac{M_A l}{3EJ} + \frac{M_B l}{6EJ} = \frac{M_A k}{GJ_p};$$

для конца B : $\beta_0 + \beta_M = \varphi_\beta$, или:

$$\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Pab(a+l)}{6EJ} + \frac{M_A l}{6EJ} + \frac{M_B l}{3EJ} = \frac{M_B k}{GJ_p} \quad 1).$$

Остается решить эти уравнения относительно M_A и M_B .

2. Случай многих неизвестных (фиг. 115). Удобнее всего такая задача решается приемом, представляющим дальнейшее развитие мысли, высказанной в примерах фиг. 102 и 103. Принимая средние опоры за лишние, мы здесь тоже можем усмотреть две категории внешних сил: нагрузку и лишние реакции. Отбрасывая последние, мы, прежде всего, определяем деформацию простой балки AE под действием ее нагрузки. Упругая линия фиг. b вполне выражает такую деформацию; между прочим из нее определяются прогибы тех точек, где прежде находились лишние опоры: — b_0 , — c_0 , — d_0 .

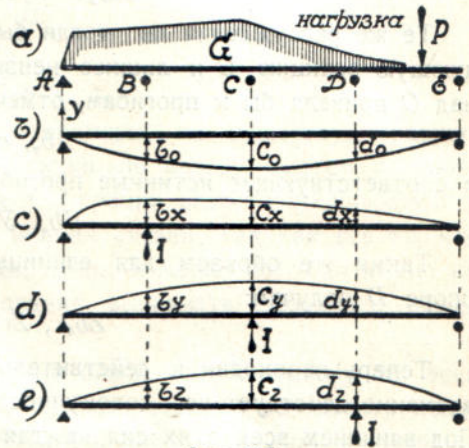
Затем рассматриваем лишние неизвестные. Но, для простоты, сложный вопрос о многих силах мы разобьем на ряд одиночных нагрузок. Остановимся на одной из лишних реакций, например B , и определим обуславливаемую ею деформацию балки.

Здесь придется поступить так: пока мы не знаем величины реакции этой опоры B , припишем ей значение единицы и определим деформацию, вызываемую этой единицей силы. Так как в действительности здесь действует сила X , то, очевидно, полученную деформацию надо увеличить в X раз.

Нахождение прогибов простой балки с одиночным грузом не представляет затруднений. Оно выполняется на основании формулы для упругой линии § 1,4 табл. III столбец 10:

$$y = \frac{Pb}{6LEJ} x(x^2 + b^2 - L^2) \dots \dots \dots (142),$$

в которой b — обозначает расстояние груза l от правой



Фиг. 115.

1) Следует иметь в виду, что простой формулой кручения можно пользоваться лишь для круглых сечений; при прямоугольных же требуется вводить поправочные коэффициенты по Saint-Venant'у или другим источникам (см., наприм. С. П. Тимошенко. Курс Сопротивления материалов. 1918 г. стр. 89). Кроме того, для консолей CA и DB возникает вопрос об устойчивости деформации, вследствие одновременного действия изгиба и кручения.

опоры балки E , x — есть абсцисса той точки, для которой разыскивается прогиб y , а P — принимается за единицу, находящуюся над B ¹⁾.

В частных случаях задача может быть решена и графически.

Применяя формулу (142) для абсцисс AB , AC , AD ... при постоянном $b = BE$, мы определим прогибы под бывшими опорами балки:

$$\bullet \quad \quad \quad B, \quad \quad C, \quad \quad D.$$

Обозначим эти прогибы фиг. c соответственно:

$$b_x, \quad c_x, \quad d_x,$$

отмечая значками x то обстоятельство, что вместо X мы поставили единицу. Истинные же прогибы, очевидно, должны быть:

$$Xb_x \quad Xc_x \quad Xd_x$$

Те же рассуждения мы могли бы повторить, выбирая, вместо B , следующую реакцию C и лишнее неизвестное Y . При этом единица груза над C привела бы к прогибам, отмеченным на фиг. d знаками:

$$b_y, \quad c_y, \quad d_y,$$

а соответствующие истинные прогибы получились бы:

$$Yb_y, \quad Yc_y, \quad Yd_y$$

Таким же образом для единицы вместо лишней неизвестной Z на опоре D получим:

$$Zb_z, \quad Zc_z, \quad Zd_z.$$

Теперь переходим к действительной балке фиг. a , в которой одновременно действует вся совокупность сил первой и второй категории. Под влиянием всех этих сил каждая из опорных точек балки должна занимать действительное положение в пространстве, например, в случае незыблемой опоры, она не должна опускаться, а в случае упругой опоры должна давать осадку этой опоры и т. п. Остается выразить эту мысль уравнением.

В нашем случае алгебраическая сумма прогибов будет:

$$\left. \begin{aligned} \text{для опоры } B: & -b_0 + Xb_x + Yb_y + Zb_z = 0 \\ \text{» } & \text{» } C: -c_0 + Xc_x + Yc_y + Zc_z = 0 \\ \text{» } & \text{» } D: -d_0 + Xd_x + Yd_y + Zd_z = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (143).$$

Таких уравнений составляется столько, сколько дано промежуточных опор, т. е. по числу лишних неизвестных и, следовательно, решается задача с каким угодно числом неизвестных.

Решение этой системы дает все лишние реакции опор X , Y , Z ...; они выражаются через определители:

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad Y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad \dots \dots \dots (144),$$

¹⁾ Следует иметь в виду, что формула (142) дает прогиб y для абсциссы, отсчитываемой от начала балки до сосредоточенного груза. Поэтому, применяя формулу для $P = 1$ в точке B , надо считать начало координат в E , а абсциссами x для точек D , C и B считать ED , EC и EB ; расстояние b груза $P = 1$ до противоположной опоры балки должно быть принято равным AB .

где знаменатель Δ есть определитель системы коэффициентов при неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} b_x X + b_y Y + b_z Z &= b_0 \\ c_x X + c_y Y + c_z Z &= c_0 \\ d_x X + d_y Y + d_z Z &= d_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (145),$$

а числитель Δ_x получается из того же знаменателя Δ путем подстановки, вместо столбца коэффициентов при X , т. е. вместо:

$$b_x, c_x, d_x$$

столбца соответствующих свободных членов уравнений:

$$b_0, c_0, d_0;$$

числитель Δ_y получается путем подстановки тех же свободных членов

$$b_0, c_0, d_0$$

вместо коэффициентов при Y :

$$b_y, c_y, d_y \text{ и т. д.}$$

3. Правило расчета. Разобранные примеры, по существу, требуют лишь повторения мыслей, высказывавшихся по поводу систем с одним лишним неизвестным. Здесь также все операции расчета производятся с основной системой, не содержащей лишних связей. Так как все то, что говорилось применительно к примерам, целиком может быть отнесено ко всякой другой системе, то есть основание высказать следующее общее правило:

Для определения лишних неизвестных освобождают систему от всех ее лишних связей, выбирая их таким образом, чтобы в результате получилась неизменяемая система. Находят деформацию основной системы от действия одних только заданных нагрузок и при том, — в параметрах, соответствующих отброшенным лишним связям и находящимся в местах связей, например: прогибы для лишних сил, углы поворота — для лишних моментов. Затем, для той же основной системы определяют в тех же местах соответствующие деформации, но только от совокупного действия всех лишних неизвестных. При этом, если нет готовых формул, пользуются описанным приемом подстановки единицы вместо каждой из лишних неизвестных. Далее, для каждой лишней связи одним уравнением выражают, что алгебраическая сумма деформаций основной системы от данной нагрузки и от всех лишних неизвестных равна деформации, имеющей место в действительной системе, в месте нахождения этой связи. Таким путем получают столько уравнений, сколько лишних связей. Решая уравнения, находят соответствующие им лишние неизвестные.

4. Практические указания. Описанный метод дает столько уравнений упругости, сколько лишних связей было в системе и притом уравнений первой степени. Поэтому по существу решается всякая задача с лишними неизвестными. Однако при большом числе неизвестных встречается ряд технических затруднений. Решение большого числа уравнений утомительно и вызывает, не всегда оправдываемую, потерю времени. Кроме того, если решение осуществляется путем последовательной подстановки,

то последующие результаты могут содержать большую, недопустимую погрешность. Обыкновенно, решения представляются разностями, как в числителе, так и в знаменателе дроби (см. форм. 141), а в таких случаях точность вычисления может особенно сильно понижаться. Простой пример иллюстрирует эту мысль.

Положим, что при решении задачи о лишнем неизвестном, получилось:

$$X = \frac{110 - 100}{150 - 140} = 1.$$

Если в эту формулу были введены ошибочные числа, изменившие каждый член выражения на 1, например так:

$$X = \frac{111 - 99}{149 - 141}, \text{ то получится иной результат.}$$

Производя вычисление, мы найдем: $X = 12 : 8 = 1,5$

т. е. на 50% больше предыдущего числа 1.

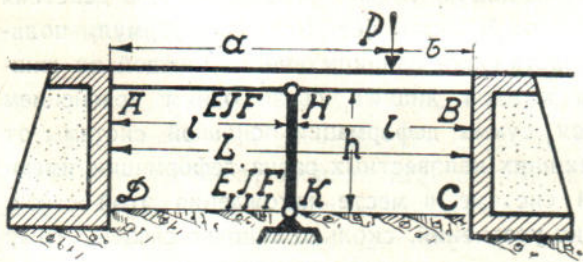
Большая опасность потери в точности результата появляется всегда, при разности близких чисел, и еще более возрастает при их делении.

Все это побуждает искать другие приемы расчета: стремиться к уменьшению числа уравнений и к такому распределению неизвестных, при котором каждое из них, по возможности, входит только в одно уравнение, — к разделению неизвестных.

Общие приемы разделения переменных рассматриваются ниже, в связи с изложением других методов определения лишних неизвестных (§ 24). Там же более подробно разбирается система линейных уравнений (143) или (145), являющихся общим решением задачи о многих лишних неизвестных, к которому приводят все методы исследования. Здесь мы отмечаем лишь значение разделения неизвестных и на ряде примеров покажем, как оно осуществляется в частных случаях 3-х и 4-х лишних связей.

5. Примеры.

а) Двухпролетная балка фиг. 116. Железо-бетонная балка составляет одно целое с такими же устоями AD и BC . При усилении грузооборота понадобилось подпереть ее посередине колонкой HK . Определим усилие колонны, при условии, что длина ее сделана на δ меньше (больше), чем имеющееся между балкой



Фиг. 116.

и фундаментом расстояние $HK = h$. Жесткость балки EJF и колонны $E_1J_1F_1$ известны.

В этой системе балка AB прикреплена четырьмя лишними связями; но если, при вертикальной нагрузке, пренебрегать горизонтальными составляющими реакций, то можно будет считаться лишь с тремя лишними неизвестными: двумя защемлениями A и B и третьей опорой HK .

Освободимся от лишних связей и определим прогиб в точке H , как для простой балки, нагруженной силой P . По предыдущему пользуемся формулой (142), в которой принимаем $x = l$ и $L = 2l$:

$$y_0 = P \frac{bl}{12EJl} (l^2 + b^2 - 4l^2) = P \frac{b}{12EJ} (b^2 - 3l^2).$$

Ту же простую балку нагрузим одновременно всеми лишними неизвестными: M_A , M_B и X , замечая, что M_A и M_B возникают, как от действия нагрузки P , так и от лишней силы X . Тогда прогиб точки H будет:

1) От лишней силы X ¹⁾

$$\frac{X(2l)^3}{48EJ} = \frac{Xl^3}{6EJ},$$

от вызванных ею реактивных моментов $M_A = M_B = \frac{1}{4}Xl$:

$$-\frac{ML^2}{8EJ} = -\frac{Xl \cdot 4l^2}{4 \cdot 8EJ} = -\frac{Xl^3}{8EJ},$$

что составляет в сумме: $y_x = \frac{Xl^3}{6EJ} - \frac{Xl^3}{8EJ} = \frac{Xl^3}{24EJ}$.

2) От реактивных моментов M_A и M_B , вызванных нагрузкой P :

$$y_p = \frac{M_A (2l)^2}{16EJ} + \frac{M_B (2l)^2}{16EJ} = \frac{l^2}{4EJ} (M_A + M_B);$$

но так как реактивные моменты выражаются через нагрузку по известным формулам (140):

$$M_A = P \frac{ab^2}{L^2} \text{ и } M_B = P \frac{a^2b}{L^2},$$

то: $y_p = P \frac{l^2}{4EJ} \left[\frac{(2l-b)b^2}{4l^2} + \frac{(2l-b)^2b}{4l^2} \right] = P \frac{bl(2l-b)}{8EJ}$.

Общий прогиб от груза P и всех лишних неизвестных идет на уничтожение зазора δ между балкой и стойкой и на сжатие стойки; поэтому можно написать:

$$-\left[\frac{Pb}{12EJ} (b^2 - 3l^2) + \frac{Xl^3}{24EJ} + P \frac{bl}{8EJ} (2l - b) \right] = \frac{Xh}{E_1F_1} + \delta.$$

Знак минус в левой части равенства принимается потому, что прежде это были перемещения вверх, по течению оси Y ; теперь же мы выражаем, что перемещение балки вниз равно зазору δ плюс укорочение стойки. Отсюда находим:

$$X = -[2Pb(b^2 - 3l^2) + 3Pbl(2l - b) + 24EJ\delta] : \left(\frac{24EJh}{E_1F_1} + l^3 \right).$$

В частном случае, когда зазор δ между балкой и стойкой отсутствует, и стойка заменена абсолютно неизъемной опорой, получится:

$$X = -P \frac{b}{l} \left[2 \left(\frac{b^2}{l^2} - 3 \right) + 3 \left(2 - \frac{b}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (146).$$

¹⁾ Считая X идущим вверх так же, как и ось Y для упругой линии.

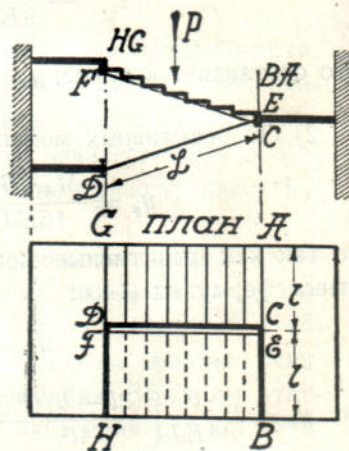
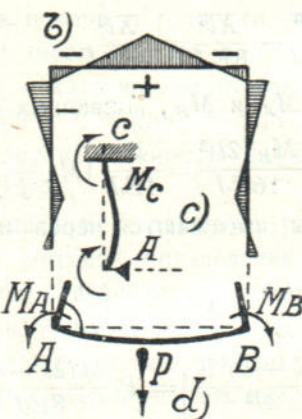
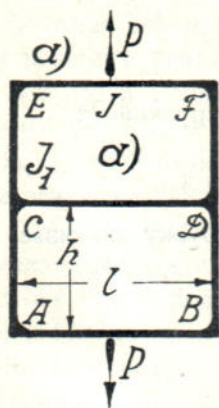
Если же незыблемая опора ниже на δ , то соответственно:

$$X = P \left[\frac{b}{l} \left\{ 2 \left(3 - \frac{b^2}{l^2} \right) - 3 \left(2 - \frac{b}{l} \right) \right\} \right] - \frac{24EJ\delta}{l^3} \dots (146a).$$

b) Прямоугольная рама с распоркой при симметричной нагрузке (фиг. 117). Нижняя распорка рамы AB (фиг. d) находится в условиях балки, заделанной концами, ибо стойки AC и BD препятствуют ее свободному поворачиванию вниз при изгибе под давлением груза P . Поэтому углы поворота опорных сечений балки получаются:

$$\alpha = \beta = \frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{M_A l}{2EJ}.$$

Так как величина прямого угла A между балкой и стойкой не изменяется, то на тот же угол α повернется и конец стойки AC . Этот угол поворота, имеющий место фактически в статически неопределимой системе, определим из рассмотрения стойки AC по фиг. e .



Фиг. 117.

Фиг. 118.

Вследствие симметрии относительно оси CD (фиг. a) стойка AC представляет балку, вполне защемленную концом C и опирающуюся концом A , несущим нагрузку в виде момента M_A . При таких условиях, по (132), реактивный момент защемления $M_C = 1/2 M_A$, и угол

$$\alpha = \frac{M_A h}{3EJ_1} - \frac{M_C h}{6EJ_1} = \frac{M_A h}{3EJ_1} - \frac{M_A h}{2 \cdot 6EJ_1} = \frac{M_A h}{4EJ_1}.$$

Приравнявая первому углу α

$$\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{M_A l}{2EJ} = \frac{M_A h}{4EJ_1}, \text{ определим } M_A = \frac{Pl}{4} \frac{1}{2 + k} \dots (147),$$

где $k = \frac{J}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$.

с) Лестничные косоуры (фиг. 118). Балки AB и GH лестничных площадок защемлены в стенах клетки и жестко скреплены с косоурами CD и EF . Косоуры и балки прямоугольного сечения bh и $b_1 h_1$; жесткости их EJ и $E_1 J_1$. Определим для косоуров расчетные изгибающие моменты.

Расстояние CE между косоурами в плане, обыкновенно, бывает незначительным по сравнению с пролетом AB , и для простоты, можно считать C и E находящимися в одном сечении балки. Так как нагрузка косоуров может быть различною, то и вращающие балку их моменты M_e и M_c также не одинаковы. Очевидно, посередине на балку действует крутящий момент $M_e - M_c$, где M_e — относится к более нагруженному косоуру. Благодаря симметрии, в плоскостях защемления балки A и B будут половинные крутящие моменты:

$$M_A = M_B = \frac{1}{2}(M_e - M_c).$$

Очевидно также, что угол поворота конца косоура представляет в то же время угол закручивания для балки посередине. Написавши это для обоих косоуров, получим два уравнения для определения двух лишних неизвестных M_e и M_c . Рассматривая, например, случай одного сосредоточенного груза P посередине одного из косоуров, составим следующие два уравнения: для нагруженного косоура FE :

$$\frac{P'L^2}{16EJ} - \frac{M_e L}{2EJ} = \frac{M_e - M_c}{2} \cdot \frac{l}{kG_1 J_{p1}},$$

для ненагруженного косоура:

$$\frac{M_c L}{2EJ} = \frac{M_e - M_c}{2} \cdot \frac{l}{kG_1 J_{p1}},$$

где P' — нормальная составляющая груза P , k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения¹⁾. Обозначая $kG_1 J_{p1}$ буквой α и определяя M_c из второго уравнения, получим после преобразования:

$$M_c = M_e \frac{1}{1 + \frac{\alpha L}{EJl}}.$$

Умножая части первого уравнения на $\frac{2\alpha}{l}$, получим

$$P' \frac{\alpha L^2}{8EJl} = \left(\frac{\alpha L}{EJl} + 1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha L}{EJl}} \right) M_e;$$

так что, если $\alpha L : EJl$ обозначить буквой β , то будет:

$$M_c = \frac{1}{8} P' L \frac{1 + \beta}{2 + \beta}, \quad \text{где } \beta = k \frac{G_1 J_{p1}}{EJ} \cdot \frac{L}{l}.$$

При том же обозначении:

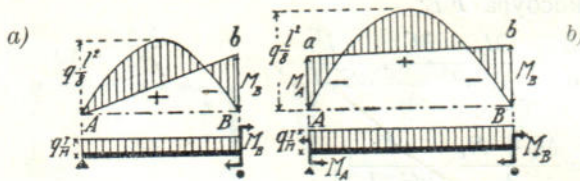
$$M_c = M_e \frac{1}{1 + \beta} = \frac{1}{8} P' L \frac{1}{2 + \beta} \quad \text{и} \quad M_A = \frac{1}{16} P' L \frac{\beta}{2 + \beta} \quad \dots (148).$$

В частном случае одинаковых круглых железных брусьев получаем: $\beta = \frac{1.8 \cdot 10^5 \cdot 2}{2 \cdot 10^6} \cdot \frac{L}{l} = \frac{4}{5} \frac{L}{l}$. Это показывает, что даже при круглых балках нет основания рассматривать косоуры, как защемленные бруски, ибо момент заделки M_e концов косоура получается значительно меньше, чем $\frac{1}{8} P' L$, например: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$... от $\frac{1}{8} P' L$, а потому расчетный момент,

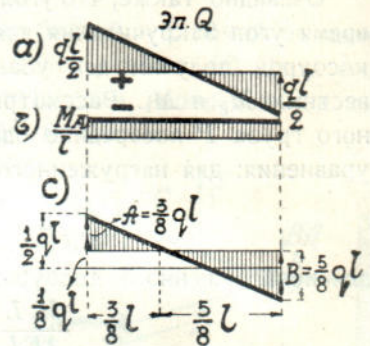
¹⁾ См. напр. С. П. Тимошенко. Курс сопротивления материалов. 1918, стр. 90.

под грузом, оказывается соответственно больше: вместо $\frac{1}{8}P'L$ защемленного бруска он будет $\frac{3}{16}P'L$, $\frac{1}{6}P'L$... При прямоугольных же балках AB и GH условия для косоуров еще более неблагоприятны¹⁾.

6. Дальнейший расчет систем с лишними неизвестными. а) Когда получены реактивные силы, действующие в лишних связях, дальнейший расчет системы производится на основании одних только уравнений Статики. Действительно, все лишние неизвестные теперь определены, и число неизвестных становится равным числу уравнений Статики. Поэтому с момента, когда разысканы лишние неизвестные, приобретают значение все те приемы, которыми пользуются при решении статически определенных задач: принцип сложения действия сил, сложение эпюр, построение линий влияния и проч.



Фиг. 119.



Фиг. 120.

Теперь уже мы можем рассматривать данную систему, как основную, не содержащую лишних связей и на ней—два рода известных внешних сил: одни силы—это всегда заданная нагрузка фермы с соответствующими реакциями, а другие—это прежде неизвестные лишние силы, которые теперь уже стали известными. Воспользуемся принципом сложения: сначала рассчитаем систему от нагрузки, затем—от лишних сил. Очевидно, алгебраически складывая результаты, полученные из такого двукратного рассмотрения одной и той же основной системы, мы разрешим и заданную задачу с лишними неизвестными.

б) Примеры. Для балки фиг. 97, одним концом защемленной и другим свободно опирающейся, после освобождения от защемления, мы получаем: 1) параболу от нагрузки и 2) треугольник от лишнего момента.

Первая эпюра моментов имеет положительные ординаты, вторая—отрицательные. Результирующая эпюра показана штрихами. Она получается путем построения вышеуказанных двух эпюр с разными знаками $+$ и $-$ в одну сторону от оси AB (фиг. 119-а).

То же можно сказать и относительно эпюры поперечных сил фиг. 120. Откладывая в разные стороны от оси AB фиг. с) ординаты одинакового знака из эпюр фиг. а) и б), мы выполняем графическое сложение эпюр, и получаем заштрихованный результат фигуры с).

¹⁾ Балки приходится рассчитывать на изгиб силою $\frac{1}{2}P$ и кручение моментом M_A по формулам сложного сопротивления. Но следует также иметь в виду обеспечение устойчивости деформации, так как при скручивании балки лишним моментом нагрузка $\frac{1}{2}P$ дает также дополнительный крутящий момент.

При расчете двухпролетной балочной фермы фиг. 121 (103), отбрасывая промежуточную опору, мы получаем эпюру моментов ABC от нагрузки P (фиг. 121-б). Прикладывая лишнюю реакцию, мы получим также треугольную эпюру ABD (фиг. в). Расчетная эпюра получается путем алгебраического сложения вышеуказанных двух эпюр. Этой эпюрой (фиг. д) определяются моменты для всех панелей фермы.

Так как усилие пояса — для какой-нибудь панели выражается моментом относительно соответствующей точки Риттера, разделенным на высоту фермы, то полученная эпюра определяет вместе с тем и усилия поясов для фермы на 3-х опорах.

с) Эпюра моментов для балки, зашпеленной двумя концами фиг. 112, составит из двух частей: от данной нагрузки и от лишних опорных моментов (фиг. f).

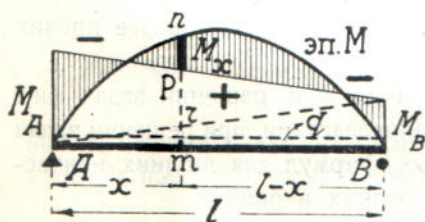
Очевидно, момент M_x , результирующий в каком-нибудь сечении m фиг. 122 выразится ординатой $nr = mn - pm = M_0 + M_M$.

$$\text{Но } pm = pr + rm = \frac{l-x}{l} M_A + \frac{x}{l} M_B.$$

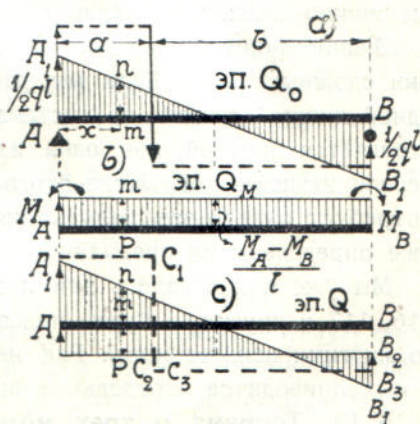
$$\text{Следовательно, } M_x = M_0 + M_M = M_0 + \frac{l-x}{l} M_A + \frac{x}{l} M_B \dots (149^1),$$

где M_0 — момент простой балки от данной нагрузки q .

Эпюра поперечных сил сложится из фигуры а) для простой балки (фиг. 123) и прямоугольника б), и представится



Фиг. 122.



Фиг. 123.

заштрихованной фигурой с), а поперечная сила в каком-нибудь сечении выразится (по фиг. с):

$$Q_x = nr = mn + mr = Q_0 + Q_M = Q_0 + \frac{M_A - M_B}{l} \dots (150).$$

1) Знаки этой формулы приняты в алгебраическом смысле, предполагая, что все моменты: и M_0 от нагрузки и опорные моменты M_A и M_B — положительные, т. е. изгибают балку выпуклостью вниз. Когда же мы применяем формулу к частным случаям, то должны подставлять значения моментов с их знаками, например, на фиг. 122 — считать M_A и M_B — отрицательными, и в двух последних членах взять минус.

Такой же случай сложения эпюр представляет рама фиг. 117.

При сосредоточенном грузе P , показанном на фиг. 123 пунктиром, угол наклона α определится, как алгебраическая сумма

$$\alpha_0 = -\frac{Pab}{6EJ}(b+l) \dots \dots \dots (151)$$

$$\text{и } \alpha_M = -\frac{M_A l}{3EJ} - \frac{M_B l}{6EJ} = -\frac{l}{6EJ}(2M_A + M_B) \dots \dots \dots (152)$$

т. е. будет:

$$\alpha_0 + \alpha_M = -\frac{Pab}{6EJ}(b+l) - \frac{l}{6EJ}(2M_A + M_B).$$

7. Основные формулы для лишних неизвестных. В результате решения вышеприведенных примеров, мы получаем формулы для тех реактивных сил, которые возникают в лишних опорных закреплениях, либо для усилий в лишних стержнях. При абсолютно жестких связях формулы для лишних неизвестных представляют функцию только от внешних сил, например, момент защемления составляет определенную часть от активного момента, реакция лишней опоры—определенную часть от действующего груза и проч.; лишнее усилие здесь, как будто не зависит от упругих свойств системы. Но это объясняется весьма большой жесткостью связей, по сравнению с которой жесткость рассматриваемых брусков теряет значение. В том же случае, когда лишняя связь представляет упругий стержень или податливую опору, например, в случае осадки, жесткость системы обязательно входит в выражение для лишней неизвестной. То же можно сказать и о балках переменного сечения.

Знание формул для лишних неизвестных оказывает услуги при решении сложных задач. Если мы располагаем зависимостью для системы с одной лишней связью, то система с двумя лишними неизвестными представляется простой, ибо одна из неизвестных исключается посредством первой зависимости. После этого система с тремя лишними неизвестными потребует отдельного разыскания только одной из них, ибо две прочих уже определены из предыдущих зависимостей.

Мы уже пользовались этими соображениями при решении задач фиг. 116, 117 и других, и будем пользоваться впоследствии, при решении задач со многими неизвестными. Ряд необходимых формул для лишних неизвестных приводится в отдельном выпуске о балках и рамах.

§ 12. Теорема о трех моментах. 1. Общая форма выражения. Представим эпюру моментов неразрезной балки, как составную из двух частей. Первая эпюра определяется только нагрузкой и необходимыми реакциями и получается при отбрасывании лишних опор. Она имеет вид фиг. 124—*a*. Вторую эпюру получим, если нагрузим ту же балку фиг. *a* одними только лишними реакциями *C* и *D* и уравновесим соответствующими опорными сопротивлениями *A* и *B* (фиг. *b*). Как уже говорилось, складывая такие эпюры, мы получаем истинную эпюру для неразрезной балки (фиг. *c*).

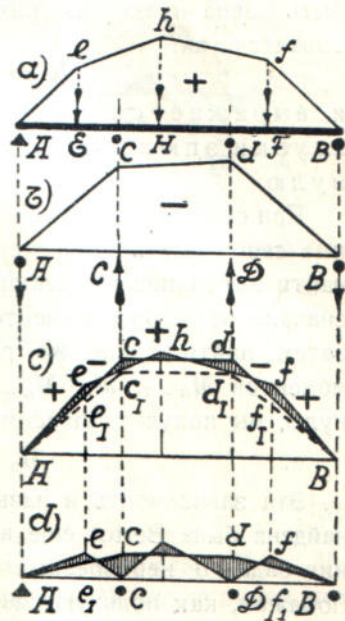
Если теперь рассмотреть каждый пролет балки в отдельности: *AC*, *CD*, *DB*, то окажется, что в каждом из них налицо принцип сложения

эпюр. В первом пролете AC мы имеем эпюру от нагрузки Aec_1 и эпюру от лишнего момента Acc_1 ; во втором пролете CD находим: от нагрузки c_1hd_1 и от лишних моментов $-c_1cdd_1$; наконец, в третьем пролете — d_1fB и d_1dB . Средний пролет оказывается, как балка, заделанная двумя концами C и D , а крайние — это балки, одним концом заделанные и свободно лежащие другим.

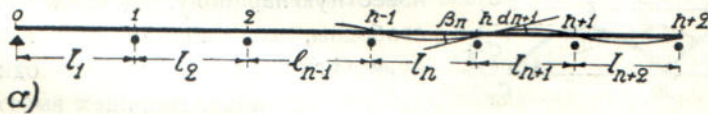
Перестраивая эпюру этих балок от одной горизонтальной оси AB на фиг. d , мы тотчас же заметим, что для построения такой эпюры требуется лишь разыскать ординаты моментов на опорах, так как все остальные вершины фигуры известны, ибо определяются нагрузкой простых балок на двух опорах. Как только будут разысканы опорные моменты, мы отложим их ординаты над соответствующими опорами и соединим концы прямыми отрезками, чтобы получить ломанную $AcdB$ (фиг. d).

Примем поэтому моменты на опорах неразрезной балки за лишние неизвестные, как это сделано было на фиг. 112 и 119, и определим на общих основаниях их величины, пользуясь уравниванием деформаций.

В многопролетной балке будем обозначать пролеты номерами и теми же номерами отметим правые их опоры (фиг. 125). Рассматривая отдель-

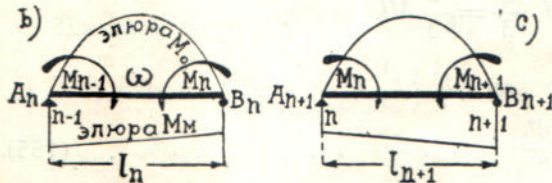


Фиг. 124.



Фиг. 125-a).

ные разрезные балки пролетов (фиг. b и c), будем отмечать левую опору и угол поворота балки буквами A и α , а правую опору и угол — соответственно B и β .



Фиг. 125-b) и c).

здесь смежных пролетов: слева и справа, и можно написать, что углы β_n и α_{n+1} равны между собой: $\beta_n = -\alpha_{n+1}$.

Только знаки у них различны, ибо в то время, когда угол одного пролета идет вниз, в другом — он обязательно обращается вверх.

Под действием нагрузки балка изогнется: ее упругая линия $012\dots n-1, n, n+1$ будет плавною кривою без переломов на опорах. Поэтому над всякой опорой n окажется общая касательная у двух

Следовательно, сумма углов равна нулю: $\alpha_{n+1} + \beta_n = 0$. (152-а).

Но угол поворота в каждом пролете выражается через реакцию от моментной нагрузки, разделенную на жесткость балки. Очевидно, сумма реакций от нагрузок эпюрами моментов левого и правого пролетов должна быть равна нулю, так как жесткость сокращается. Это коротко записывается так:

$$R' = 0 \dots \dots \dots (153)$$

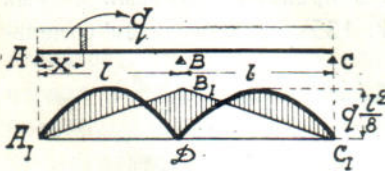
и выражается правилом: полная реакция опоры от нагрузки эпюрами моментов двух соседних пролетов равна нулю.

При составлении такого уравнения необходимо разбить балку на отдельные свободные пролеты слева и справа от избранной n -ой опоры. Надо найти затем правую реакцию левого и левую реакцию правого пролета, сначала от эпюры моментов, вызванных данной нагрузкой пролетов, а затем найти такие же реакции от эпюры неизвестных пока опорных моментов M_{n-1} , M_n , M_{n+1} . Написавши, что сумма этих реакций равна нулю, мы получим зависимость между тремя опорными моментами:

$$M_{n-1}, \quad M_n, \quad M_{n+1}.$$

Эта зависимость и называется теоремой о трех моментах. Она найдена была Bertot еще в 1855 г. и оказалась очень удобной для решения задач о неразрезных балках с небольшим числом лишних опор¹⁾ Покажем, как пользуются теоремой на примерах.

2. Примеры. а) Применим правило (153) к балке на 3-х опорах с равными пролетами l при равномерно распределенной нагрузке q (фиг. 126).



Фиг. 126.

Рассмотрим отдельно пролеты AB и BC . Эпюра M от нагрузки представляет известную параболу. Так как крайние опоры свободны, то опорные моменты здесь — нули; искомым оказывается один момент на средней опоре. Напишем выражение для реакции этой опоры:

От 2-х парабол: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{12} \dots \dots \dots (154);$

от 2-х тр-ков A_1B_1D : $2 \cdot \frac{1}{2} l M \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} Ml.$

Сумма $\frac{ql^3}{12} + \frac{2}{3} Ml = 0.$

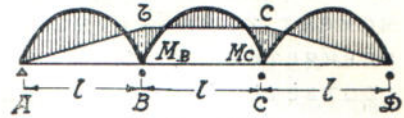
Отсюда $M = - \frac{3ql^2}{2 \cdot 12} = - \frac{ql^2}{8} \dots \dots \dots (155).$

Уравнение (153) можно составить для любой промежуточной опоры многопролетной балки. Число уравнений окажется таким образом равным

¹⁾ Не смотря на то, что Bertot опубликовал свою теорему в 1855 г. в Comptes rendus de la Société des Ingenieurs civil на стр. 278, она более известна под именем К л а п е й р о н а, пользовавшегося теоремой с 1857 года.

числу промежуточных опор. А так как в свободной балке насчитывается столько же лишних неизвестных, то на основании теоремы о трех моментах задача о многопролетных балках вполне разрешается.

б) В балке на 4-х опорах (фиг. 127) имеем две лишних неизвестных, и требуется составить два уравнения, а именно написать, что каждая из средних реакций B и C порознь равна нулю. При равных пролетах и равномерной нагрузке, благодаря симметрии, задача упрощается.



Фиг. 127.

Реакция B от двух соседних парабол, по предыдущему, оказывается $\frac{ql^3}{12}$. Реак-

ция B от лишних моментов обуславливается тр-ком AbB и прямоугольником $BbcC^1$). Она будет

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} lM_B + \frac{1}{2} M_B l.$$

Напишем, что сумма реакций равна нулю:

$$\frac{ql^3}{12} + \frac{M_B l}{3} + \frac{M_B l}{2} = 0.$$

Отсюда $M_B = -\frac{ql^2}{10} \dots \dots \dots (156).$

Благодаря симметрии второго уравнения не требуется, так как $M_C = M_B$.

3. Замечание о знаках. Составляя уравнения (153), мы не знаем пока ни величины, ни знака опорных моментов. В таких случаях, вообще, принято предполагать положительное число; следовательно, надо допустить, что искомый опорный момент изгибает балку выпуклостью вниз. Если в результате решения получим для момента отрицательный знак, то это покажет, что момент противоположен предположенному, т. е. изгибает выпуклостью кверху.

4. Формула для трех моментов. Представим теорему о трех моментах (153) более детальной формулой. Обозначим через R'_{no} реакцию n -ой опоры, вызванную эярами M только от нагрузки соседних пролетов. Реакция B_n^x от эяры моментов M_{n-1} и M_n левого пролета получается, как момент площади трапеции относительно $(n - 1)$ -ой опоры, разделенный на пролет l_n :

Площадь трапеции $(M_{n-1} + M_n) \frac{l_n}{2}$; плечо ее центра относительно $(n - 1)$ опоры: $\left(\frac{M_{n-1} + 2M_n}{M_{n-1} + M_n}\right) \frac{l_n}{3}$; поэтому реакция

$$B_n^x = \frac{M_{n-1} + M_n}{2} \cdot l_n \cdot \frac{M_{n-1} + 2M_n}{M_{n-1} + M_n} \cdot \frac{l_n}{3} \cdot \frac{1}{l_n} = \frac{l_n}{6} (M_{n-1} + 2M_n).$$

Для правого пролета l_{n+1} , соответственно:

$$A_n^x + 1 = \frac{l_{n+1}}{6} (M_{n+1} + 2M_n).$$

1) Благодаря симметрии.

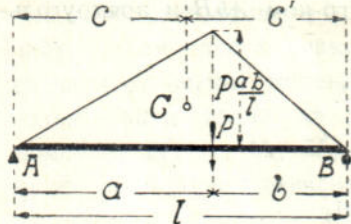
Сумма этих реакций:

$$R'_{no} + \frac{l_n}{6} (M_{n-1} + 2M_n) + \frac{l_{n+1}}{6} (M_{n+1} + 2M_n).$$

Приравнявая нулю и определяя отсюда M_n , найдем:

$$M_n(l_n + l_{n+1}) = -[1/2(M_{n-1}l_n + M_{n+1}l_{n+1}) + 3R'_{no}] \dots (157),$$

что выражается следующим правилом: отрицательный опорный момент, помноженный на сумму длин соседних пролетов, равняется полусумме соседних моментов, умноженных соответственно на длину связывающих их пролетов, плюс утроенная полная реакция опоры от моментной нагрузки этих пролетов, как простых разрезных балок.



Фиг. 128.

В применении к случаю равномерно распределенной нагрузки формула может быть соответственно детализирована. В этом случае эпюра моментов — парабола, имеющая стрелку подъема $h = 1/8ql^2$ и площадь $\omega' = 2/3lh = 1/12ql^3$. Опорная реакция от такой моментной нагрузки одного пролета

будет $1/2\omega'$; если же одновременно нагружены оба пролета l_n и l_{n+1} , то реакция

$$R'_{no} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} q_n l_n^3 + \frac{1}{12} q_{n+1} l_{n+1}^3 \right),$$

и формула для трех моментов будет:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = 1/4(q_n l_n^3 + q_{n+1} l_{n+1}^3) \dots (158-a).$$

При равных пролетах и одинаковой нагрузке:

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = 1/2ql^2.$$

При действии одного сосредоточенного груза P эпюра моментов представляет треугольник. Так как основание его l , а высота $P \frac{ab}{l}$, то площадь $\omega' = 1/2 Pab$ (фиг. 128). Расстояния центра тяжести C до соответствующих опор:

$$c = 1/3(a + l) \text{ и } c' = 1/3(b + l).$$

Поэтому реакции от нагрузки эпюрою моментов выразятся следующим образом: для правой опоры B пролета l_n :

$$B'_n = \frac{1}{2} P a_n b_n \frac{c_n}{l_n} = \frac{1}{2} P a_n b_n \frac{a_n + l_n}{3l_n} = \frac{1}{6} P a_n b_n \left(1 + \frac{a_n}{l_n} \right),$$

для левой опоры A пролета l_{n+1} :

$$A'_{n+1} = \frac{1}{6} P_{n+1} a_{n+1} b_{n+1} \left(1 + \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Реакция от моментной нагрузки обоих пролетов l_n и l_{n+1} :

$$R'_{no} = B'_n + A'_{n+1} = \frac{1}{6} \left[P_n a_n b_n \left(1 + \frac{a_n}{l_n} \right) + P_{n+1} a_{n+1} b_{n+1} \left(1 + \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \right].$$

Следовательно, формула трех моментов будет иметь вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = P_n a_n b_n \left(1 + \frac{a_n}{l_n}\right) + P_{n+1} a_{n+1} b_{n+1} \left(1 + \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}\right) \dots \dots \dots (158-b).$$

При равных пролетах формула упрощается:

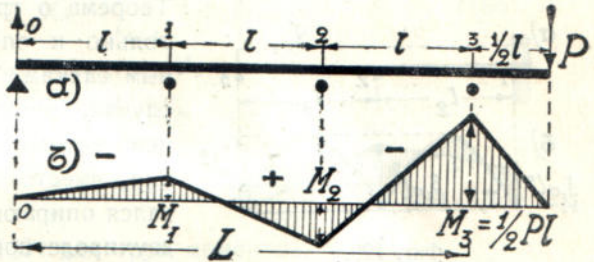
$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = P_n a_n \left(1 - \frac{a_n^2}{l_n^2}\right) + P_{n+1} b_{n+1} \left(1 - \frac{b_{n+1}^2}{l_{n+1}^2}\right).$$

5. Примеры. а) Применим теорему о трех моментах к равномерно нагруженной многопролетной балке с одинаковыми пролетами. При очень большом числе опор моменты на средних опорах, приближенно, равны, т. е. можно принять $M_{n-1} = M_n = M_{n+1}$. Поэтому (157) переписывается:

$$2Ml = -Ml - 3R'_{no}, \text{ или: } M = -\frac{R'_{no}}{l}.$$

Так как, по (154), реакция от двух парабол $R'_{no} = \frac{ql^3}{12}$, то $M = \frac{ql^3}{12} : l = \frac{ql^2}{12}$.

б) Второй пример приложения представит балка на 4-х опорах с нагруженной консолью (фиг. 113). Здесь нагрузка несимметрична, и придется составлять два уравнения: одно для опоры 1 и другое—для 2. Моменты на опорах 0 и 3 известны.



Фиг. 113.

Так как пролеты отдельных разрезных балок не имеют непосредственной

нагрузки, то реакции первого рода R'_{no} отсутствуют, и в уравнение (157) войдут только моменты M_1 и M_2 ¹⁾.

Для первой опоры получим:

$$2M_1 l = -\frac{1}{2} M_2 l, \text{ или } 4M_1 + M_2 = 0 \dots \dots \dots (159).$$

Соответственно для второй:

$$2M_2 l = -\frac{1}{2} (M_1 + M_3) l, \text{ или: } M_1 + 4M_2 - \frac{Pl}{2} = 0 \dots (160),$$

так как $M_3 = -\frac{Pl}{2}$.

Решая уравнения (159) и (160), найдем:

$$M_1 = -\frac{Pl}{30} \text{ и } M_2 = +\frac{2Pl}{15} \dots \dots \dots (161).$$

¹⁾ Может показаться, что реакция R_2^0 имеет место, так как нагрузка от силы P на пролете 2—3 дает эпюру моментов в виде треугольников; такая ошибка сделана, например, у Генкеля: Графическая статика 2 вып. Русск. изд. Göschen Sammlung стр. 93. Но это разъясняется, если принять во внимание, что здесь треугольная эпюра относится к группе опорных эпюр.

6. Прочие элементы расчета. Когда построена эпюра моментов, не представляет затруднений разыскать все прочие расчетные величины. Реакция опоры получится, как алгебраическая сумма реакций от нагрузки двух смежных пролетов и от опорных моментов:

$$R_n = B_n + A_{n+1} + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} \dots (162).$$

Точно также находится поперечная сила в каком-нибудь сечении x пролета l_n :

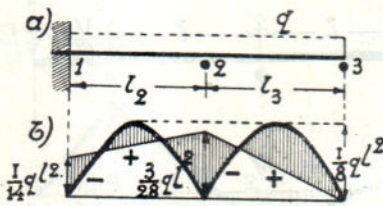
$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \dots (163),$$

или она определяется на основании теоремы о производной от момента (см. форм. 44).

По форм. (149): $M_x = M_x^0 + \frac{x}{l_n} M_n + \left(1 - \frac{x}{l_n}\right) M_{n-1}$; поэтому

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{dM_x^0}{dx} + \frac{M_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n} = Q_x^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}.$$

7. Приложение к расчету брусков с защемленными концами.



Фиг. 129.

Теорема о трех моментах приложима не только к опирающимся, но и защемленным балкам. Только обобщая ее на этот случай, приходится считаться с лишним неизвестным опорным моментом защемления, вместо нуля, которым характеризовался опирающийся конец балки. Так, для двухпролетной балки (фиг. 129), защемленной на левой опоре, т. е. имеющей два не-

известных момента M_1 и M_2 можем написать следующие два уравнения:

Для опоры 1: $M_1(0 + l_2) = - \left[\frac{1}{2} (0 + M_2 l_2) + 3R'_{10} \right]$ и

„ „ 2: $M_2(l_2 + l_3) = - \left[\frac{1}{2} (M_1 l_2 + 0) + 3R'_{20} \right]$.

Откуда $M_1 = - \frac{M_2}{2} - \frac{3R'_{10}}{l_2}$ и $M_2 = - \frac{M_1 l_2}{2(l_2 + l_3)} - \frac{3R'_{20}}{l_2 + l_3} \dots (164).$

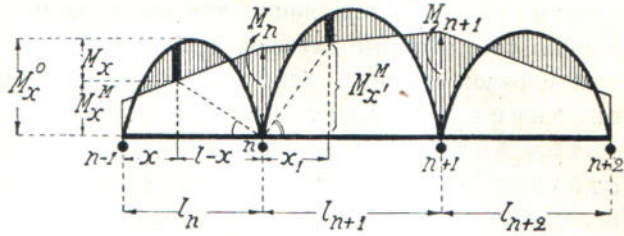
При равных пролетах и равномерной нагрузке q оказывается:

$$M_1 = - \frac{ql^2}{14} \text{ и } M_2 = - \frac{3ql^2}{28} \dots (165).$$

§ 13. Теорема о двух моментах. 1. Зависимость между двумя моментами соседних пролетов. Выражение трех моментов составляется в достаточно простой форме; но число уравнений всегда равно числу лишних неизвестных и решать их приходится совместно. Поэтому при большом числе опор здесь сохраняются вышеуказанные недостатки решения системы n уравнений (см. § 11,4).

М. Lévy ¹⁾ в 1866 г. предложил упрощение, указавши новую зависимость между двумя моментами. Пользуясь зависимостью Lévy, мы всегда можем определить второй момент по заданному первому, и решение задачи свести, таким образом, к рассмотрению отдельных уравнений.

Определим зависимость между двумя какими-нибудь сечениями в смежных пролетах: в n -ом пролете фиг. 130 наметим сечение на расстоянии x от левой опоры, в $(n + 1)$ -ом пролете возьмем сечение на расстоянии x_1 .



Фиг. 130.

Для каждого из этих сечений момент неразрезной балки напишется, по предыдущему (см. 149):

$$M_x = M_x^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n},$$

$$M_{x_1} = M_{x_1}^0 + M_n \frac{l_{n+1} - x_1}{l_{n+1}} + M_{n+1} \frac{x_1}{l_{n+1}} \dots (166).$$

Определим отсюда опорные моменты M_{n-1} и M_{n+1} :

$$M_{n-1} = \frac{(M_x - M_x^0) l_n}{l_n - x} - \frac{M_n x}{l_n - x}$$

$$M_{n+1} = \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}}{x_1} - \frac{M_n (l_{n+1} - x_1)}{x_1} \dots (167).$$

и подставим в выражение (157) для трех моментов:

$$- 2 M_n (l_n + l_{n+1}) = \frac{(M_x - M_x^0) l_n^2}{l_n - x} - \frac{M_n x l_n}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}^2}{x_1} - \frac{M_n (l_{n+1} - x_1) l_{n+1}}{x_1} + 6R_n^0.$$

Перенося все члены в одну часть уравнения и вынося за скобки M_n , получим:

$$\frac{(M_x - M_x^0) l_n^2}{l_n - x} + \frac{(M_{x_1} - M_{x_1}^0) l_{n+1}^2}{x_1} + 6R_n^0 + M_n [2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{l_{n+1} - x_1}{x_1} l_{n+1}] = 0 \dots (168).$$

Выбор сечений x и x_1 в нашем распоряжении, и мы можем остановиться на таких x и x_1 , при которых коэффициент при M_n равняется нулю, т. е. можем принять:

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{x l_n}{l_n - x} - \frac{(l_{n+1} - x_1) l_{n+1}}{x_1} = 0 \dots (169).$$

Тогда уравнение будет содержать всего лишь два момента M_x и M_{x_1} :

$$\frac{M_x - M_x^0}{l_n - x} \cdot l_n^2 - \frac{M_{x_1} - M_{x_1}^0}{x_1} \cdot l_{n+1}^2 = - 6R_n^0 \dots (170).$$

¹⁾ Maurice Lévy. La Statique graphique, II part. Paris, 1866.

Совершенно ясно, что если будет задан один из моментов для неразрезной балки, например, M_x , то по этому моменту тотчас же определится другой— M_{x_1} . Очевидно также, что такая зависимость между моментами сохраняется лишь для совершенно определенных сечений, а именно тех, которые связаны условием (169). Отсюда намечается следующий порядок расчета балок: сначала задаются каким-нибудь сечением с известным здесь моментом в одном из пролетов балки: x и M_x ; затем, по (169), определяют соответствующее сечение x_1 следующего смежного пролета, для которого уже по (170) может быть вычислен и соответствующий момент M_{x_1} .

2. Практические указания. При разыскании соответствующих сечений x_1 и x упростим выражение (169), обозначая отношение отрезков пролета $\frac{l_n - x}{x}$ через k_n :

$$2(l_n + l_{n+1}) - \frac{l_n}{k_n} - l_{n+1} k_{n+1} = 0;$$

откуда

$$k_{n+1} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right) \dots \dots \dots (171).$$

Тогда будет удобно определять длину x_1 для следующего пролета, соответствующую сечению x предыдущего, ибо для каждого последующего пролета, по формуле (171) мы вычислим k_{n+1} , если только известно k_n .

По величине же k определится и x , ибо $k = \frac{l-x}{x}$, так что $x = \frac{l}{1+k}$.

Далее обратим внимание на то, что в числителях дробей (170) находятся моменты, вызванные в данном сечении действием только опорных моментов; обозначим их M_x^m , т. е. примем:

$$M_x - M_x^o = M_x^m \dots \dots \dots (172),$$

В знаменателе оказываются расстояния до n -ой опоры. Поэтому формула (170) переписывается:

$$\frac{M_x^m}{l_n - x} \cdot l_n^2 + \frac{M_{x_1}^m}{x_1} l_{n+1}^2 = -6R_n^o \dots \dots \dots (173),$$

как отношение лишнего момента в данном сечении к расстоянию до опоры n . Сумма таких отношений, умноженных на квадраты соответствующих пролетов, составляет минус ушестеренную реакцию, вызванную эпюрой моментов для нагрузки тех же пролетов.

Теперь для решения задач о многопролетных балках мы имеем два уравнения: 171 и 173, которыми надо пользоваться, как указывалось в конце предыдущего раздела. Очевидно, надо знать предварительно хотя бы один момент в каком-нибудь из пролетов данной балки.

При шарнирно-опертых балках такой момент находится на крайней опоре—здесь мы имеем нуль, т. е. исходные условия расчета будут:

Для l_1 : $x = 0$, $M_x = 0$; $k_1 = \infty$.

В таком случае для l_2 по (171) получим:

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{5} \right);$$

что при равных пролетах дает

$$k_2 = 4 \text{ и } x_2 = \frac{l_2}{1 + k_2} = \frac{l}{1 + 4} = \frac{l}{5} \dots (174).$$

Для l_3 при равных пролетах находим

$$k_3 = 2 + \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 3,75 \text{ и } x_3 = \frac{l}{1 + 3,75} = \frac{l}{4,75} \dots (175).$$

Таким образом, независимо от нагрузок балки определяется положение точек, соответствующих нулевому моменту первого пролета. Остается подставить их в выражение для двух моментов (173). Первая подстановка $x = 0$ и $M_x = 0$ дает:

$$\frac{M_2^M l^2}{\frac{1}{5} l} = -6R_1^0, \text{ или } M_2^M = -\frac{6}{5} \frac{R_1^0 l}{l}.$$

Так что, если балка нагружена равномерно, то

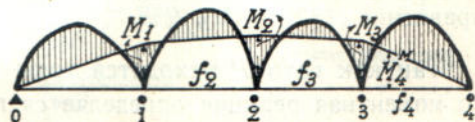
$$M_x^M = -\frac{6}{5} q \frac{l^3}{12 l} = -q \frac{l^2}{10}.$$

Для третьего пролета, соответственно, получим:

$$-q \frac{l^2}{10} \cdot \frac{l^2}{\frac{4}{5} l} + \frac{M_3^M}{l} l^2 = -6 \cdot q \frac{l^3}{12};$$

Откуда $M_3^M = -\frac{3}{38} q l^2.$

Пользуясь таким приемом, мы можем определить по одному моменту во всех пролетах балки. Но в последнем пролете, кроме того, известен крайний момент — нуль. Следовательно, в последнем пролете имеет-ся две ординаты для проведения прямой линии лишних моментов M^M . Этими ординатами прямая вполне определяется и определяет ломанную во всех предыдущих пролетах. Действительно, если на фиг. 131 определена точка f_4 и соответствующий момент M_4^M , то проводим прямую $4 - M_4^M$. Продолжая ее до опоры, определяем M_3 . Далее по ординате M_3 и по моменту, известному уже для точки f_3 , проводим прямую, которую продолжаем до опоры 2, где сам собою определяется M_2 , и т. д.



Фиг. 131.

Описанный прием представляет независимое решение двух уравнений для каждого пролета балки: одного для разыскания соответствующих точек, а другого для моментов. Таким путем мы избегаем решения сложной системы совместных уравнений, к которой всегда приводят предыдущие приемы при большом числе лишних неизвестных.