

**3. Влияние загрузки противоположных пролетов.** Мы вычислили ряд моментов в соответствующих точках, пользуясь формулой (170) или (173); оказалось, что момент последующего пролета всегда определяется через момент от нагрузки  $M_x^0$  и момент от опорных моментов  $M_x^m$ , но только для предыдущих пролетов. Отношение  $k$  между отрезками  $x$  и  $l-x$ , на которые разбивается пролет соответствующими точками, также выражается исключительно через предыдущие пролеты. Это — общее свойство соответствующих точек и моментов, ибо в формуле (170) момент  $M_{x_1}$  зависит только от  $M_x$  предыдущих пролетов и  $k_{n+1}$  в формуле (171) зависит от  $k_n$  и  $l$  только предыдущих пролетов. На этом основании соответствующие точки  $f$  и моменты  $M_{x_1}$  можно вычислять, не обращая внимания на нагрузку последующих пролетов.

Соответствующие точки  $f$ , определяемые отношениями  $k$  по форм. (171), принято называть фокусами.

В частном случае может не быть нагрузки на пролетах, примыкающих непосредственно к опоре  $n$ ; тогда  $R_n = 0$ ,  $M^0 = 0$  и уравнение (170) превращается в:  $M_x \frac{l_n^2}{l_n - x} + M_{x_1} \frac{l_{n+1}^2}{x_1} = 0$ ,

т. е. в формулу для одних только опорных моментов. Влияние загрузки одного пролета будет подробно рассмотрено в отдельном выпуске: Неразрезные балки и рамные системы.

**§ 14. Приложения. 1. Поперечная балка железобетонного виадука** (фиг. 132). Балка опирается на 4 главных прогона  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  и рассчитывается на постоянную нагрузку  $p$  и 2 сосредоточенных груза  $P$ , находящихся симметрично в четвертях крайних пролетов. Определим расчетные величины этой балки путем построения соответствующих эпюр.

а) Определение лишних моментов. Балка имеет две лишние опоры  $B$  и  $C$ . Определим соответствующие им опорные моменты по теореме о трех моментах. Благодаря симметрии достаточно составить одно уравнение (157):  $-M_B 2l = \frac{1}{2} (0 \cdot l + M_C l) + 3R'_{Bo}$ , где  $M_C = M_B$ .

Так как груз  $P$  находится только в левом из входящих сюда пролетов, то моментная реакция определяется по одному треугольнику фиг. 128 по формуле:  $B'_1 = \frac{1}{6} P a_1 b_1 \left(1 + \frac{a_1}{l}\right) = \frac{7}{128} Pl^2$ , и уравнение трех моментов дает:  $-M_B 4l = M_B l + 6 \cdot \frac{7}{128} Pl^2$ , или  $M_B = -\frac{21}{320} Pl$ .

От равномерно распределенной нагрузки  $p$ , по (156)  $M_B = -\frac{pl^2}{10}$ , так что суммарный опорный момент  $M_B = -\left(\frac{21}{320} P + \frac{1}{10} pl\right)l$ .

б) Построение эпюры моментов. Из двух треугольников крайних пролетов вычитается трапеция  $AB_1C_1D$  (фиг. а); заштрихованный результат представляет эпюру моментов от сосредоточенных сил  $P$ . Внизу, под осью балки  $AD$  построена уже известная эпюра моментов от постоян-



ной нагрузки  $p$ , равномерно распределенной вдоль пролетов. Чтобы сложить эти эпюры, мы складываем ординаты обеих отрицательных трапеций:  $AB_1C_1D$  и  $AB_2C_2D$ , надстраивая одну над другой, как показано на фиг. б), и вычерчиваем положительную параболу постоянной нагрузки  $p$  уже от наклонной оси  $AB_2$ . На фиг. в) результирующие ординаты отложены от горизонтальной оси.

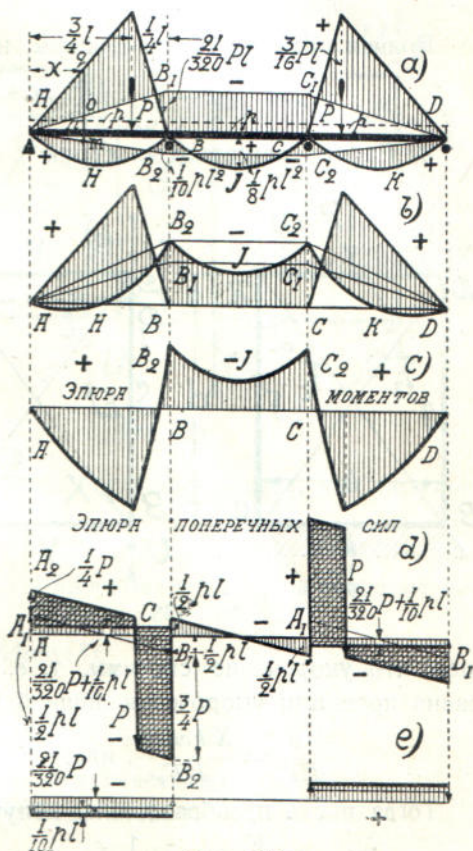
с) Эпюра поперечных сил. От постоянной нагрузки  $p$  мы имеем ряд  $\parallel$  наклонных  $A_1B_1$  с опорными ординатами  $1/2pl$ . Сосредоточенные грузы дают добавочную ступенчатую линию  $A_2PB_2$  определяемую реакциями  $A_1A_2 = 1/4P$  и  $B_1B_2 = 3/4P$ . Результирующая эпюра  $Q$  на фиг. д) заштрихована вертикальными штрихами. Эпюра от лишних моментов изображена отдельно на фиг. е) в несколько увеличенном масштабе. Ордината ее получается путем деления на пролет  $l$  суммы опорных моментов  $M_B$  от сосредоточенного груза  $P$  и от равномерной нагрузки  $p$ . Складывая алгебраически эту эпюру с вертикально заштрихованной эпюрой фигуры д), мы получим результат, отмеченный жирными линиями и двойной горизонтальной и наклонной штриховкой на той же фигуре д). Так как средний пролет  $BC$  находится под действием двух равных и противоположных моментов, то здесь не получается добавочной поперечной силы (чистый изгиб).

На основании построенных эпюр определяются все расчетные величины либо графически, либо вычислением по основным ординатам, написанным на чертеже. Определим, например, максимальный положительный момент. Составим для левого участка балки сумму  $nq$  и  $nH$  моментов положительных по треугольной и по параболической эпюре и вычитаем сумму  $no$  и  $nt$  — отрицательных моментов, определяемых опорными треугольниками (фиг. а):

$$M_x = \frac{1}{4} Px + \frac{1}{2} px(l-x) - \frac{x}{l} \left( \frac{21}{320} Pl + \frac{1}{10} pl^2 \right).$$

Приравниваем нулю производную по  $x$ :

$$\frac{1}{4} P + \frac{1}{2} pl - px - \frac{21}{320} P - \frac{1}{10} pl = 0.$$



Фиг. 132.



Оказывается, что максимальный момент получается при  $x = \frac{2}{5}l + \frac{59}{320} \frac{P}{p}$ . Остается подставить это  $x$  в выражение для момента  $M_x$ .

Наибольший отрицательный момент над опорой  $B$  составляет:

$$M_B = \frac{21}{320} Pl + \frac{1}{10} pl^2.$$

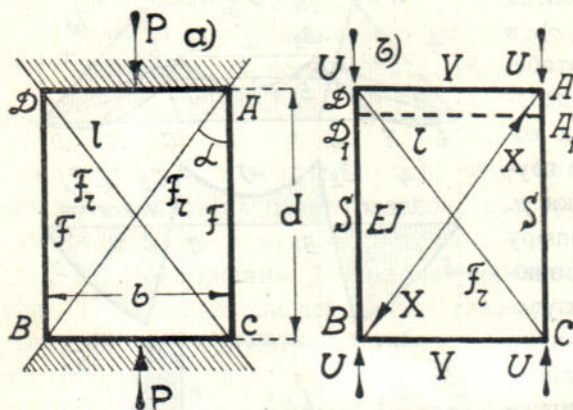
Наибольшая поперечная сила вблизи опоры  $B$  или  $C$  крайних пролетов

$$Q = \frac{1}{2}pl + \frac{3}{4}P + \frac{1}{10}pl + \frac{21}{320}P = \frac{3}{5}pl + \frac{261}{320}P.$$

Полная реакция средней опоры, например  $B$ :

$$R_B = \frac{1}{2}pl - \left[ - \left( \frac{3}{5}pl + \frac{261}{320}P \right) \right] = 1,1pl + \frac{261}{320}P.$$

2. Расчет решетчатых стоек<sup>1)</sup>. а) Рассмотрим сначала однопанельную



Фиг. 133.

стойку с двумя пересекающимися диагоналями фиг. 133. Давление на стойку передается через жесткие фасонные листы или соответствующие подушки, которые можно считать нерастяжимыми.

При центральной передаче давления  $P$  ноги стойки  $S$  получают одинаковые усилия  $U = \frac{1}{2}P$  и, кроме того, от лишней неизвестной силы  $X$  — усилие  $X \cos \alpha$ . Напишем, что укорочение системы, т. е. опускание  $AA_1$  точки  $A$  фигуры  $b$ ) равно проекции укорочения лишней диагонали  $AB$ :

Тогда после преобразования получится:

$$\frac{S d}{EF} = \frac{X l \cos \alpha}{EF_r}, \text{ или: } \frac{(U - X \cos \alpha)d}{F} = \frac{X d \cos \alpha}{F_r \cos \alpha}.$$

Обозначая напряжение диагонали  $X:F_r$  буквою  $n_r$ , а напряжение  $U:F$  стойки — буквою  $n$ , найдем:

$$X = U \frac{F_r}{F} \frac{1}{1 + F_r \cos \alpha : F}, \text{ или: } \frac{X}{F_r} = \frac{U}{F} \cdot \frac{1}{1 + F_r \cos \alpha : F}.$$

Обыкновенно решетка во много раз слабее ног; известны случаи отношения  $F_r:F = \frac{1}{30}$  и даже  $\frac{1}{40}$ . Принимая, для примера, египетский треугольник  $ABC$  со сторонами 5:4:3, получим в крайнем случае

$$n_r = n \frac{1}{1 + F_r \cos \alpha : F}.$$

$$n_r = n \frac{1}{1 + 0,8 \cdot \frac{1}{40}} = n : 1,02 = 0,98n \dots \dots \dots (176).$$

<sup>1)</sup> Сравни. Е. О. Патон. Железные мосты. Киев, 1909, т. IV, стр. 102.

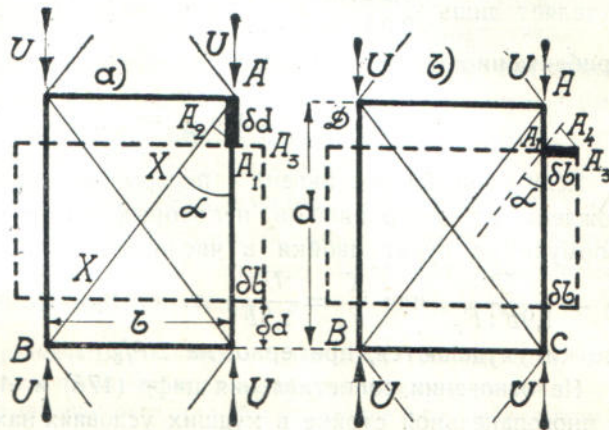


Оказывается, что при слабой решетке напряжение ее мало отличается от напряжения ног. Если же сечения решетки и ног одинаковы, то

$$n_r = n \frac{1}{1 + 0,8 \cdot 1} = \frac{5}{9} n = 0,556n;$$

оно падает едва ли не вдвое.

б) В многопанельной стойке средняя панель находится в таких условиях, что, при сжатии элементов решетки, ноги стойки могут расходиться за счет растяжения распорок; вследствие этого работа диагоналей облегчается. На фиг. 134 пунктиром представлена средняя панель сжатой стойки после деформации. Так как здесь перемещение узла  $A$  обуславливается удлинением двух направлений — ноги и распорки, то уравнение деформаций составится при проектировании обоих удлинений на направление диагонали  $BA$ .



Фиг. 134.

Перемещение из  $A$  в  $A_3$  можно представить себе, как результат перемещений  $AA_1$  и  $A_1A_3$ , где:

$AA_1 = \delta d$  — есть сжатие ног, а

$A_1A_3 = \delta b$  — растяжение распорки. Но проекция первого на направление диагонали есть по фиг. а):

$$AA_2 = -\delta d \cos \alpha^1);$$

проекция второго, по фиг. б), есть:

$$A_1A_4 = +\delta b \cos (90^\circ - \alpha) = +\delta b \sin \alpha.$$

Поэтому удлинение вдоль диагонали дает равенство:

—  $\delta l = -\delta d \cos \alpha + \delta b \sin \alpha$ , или, после подстановки:

$$\frac{Xl}{EF_r} = \frac{(U - X \cos \alpha) d \cos \alpha}{EF} - \frac{2X \sin^2 \alpha \cdot b}{EF_v} \quad ^2).$$

Отсюда находим:  $X = U \cdot \left( \cos \alpha + \frac{F}{F_r} \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{F}{F_v} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right)$ .

Если же обозначить буквой  $k$  выражение:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} (1 + 2 \sin^2 \alpha) \text{ и принять } F_r = F_v,$$

<sup>1)</sup> При составлении этого и последующих выражений мы пренебрегаем малой разницей между длиной дуги и касательной, между углом и синусом и проч.

<sup>2)</sup> Наличие двойки в последнем члене объясняется тем, что в узлах  $A$  и  $D$  имеется по две диагонали, принадлежащих двум соседним панелям.



так как обыкновенно распорки делаются того же сечения, что и диагонали,—то получится:

$$X = U: (\cos z + kF : F_r).$$

Для египетского треугольника, где  $\cos z = 0,8$  и  $\sin z = 0,6$ , —

$$k = \frac{1}{0,64} (1 + 2 \cdot 0,6^3) = 2,23 \text{ и } X = U: (0,8 + 2,23F : F_r).$$

В случае слабой решетки, например, при  $F_r : F = 1 : 40$ , число 0,8 составляет лишь  $\frac{0,8 \cdot 100}{2,23 \cdot 40} = 0,9\%$  от числа, стоящего с ним рядом; поэтому приближенно можно считать

$$X = \frac{U}{2,23F : F_r}, \text{ или } \frac{X}{F_r} = \frac{U}{2,23F}, \text{ т. е. } n_r = 0,45n \dots (177).$$

Если решетка поставлена с перерывами (местные кресты), либо освобождена от диагоналей в некоторых панелях, то в вышеприведенной формуле не будет двойки в числителе последнего члена, и получится

$$X = \frac{U}{1,9F : F_r}, \text{ или } \frac{X}{F_r} = \frac{U}{1,9F}, \text{ т. е. } n_r = 0,526n \text{ — условия работы решетки ухудшаются, примерно, на } 20\%.$$

На основании сопоставления цифр (176) и (177) можно полагать, что в многопанельной стойке в худших условиях находится решетка концевых панелей, прикрепленных к фасонным листам или узловым диафрагмам. Наши опыты сжатия стоек длиной 3 м. со слабой решеткой обнаружили существование у решетки склонности к выпучиванию еще в то время, когда совершенно не замечается выпучивания ног. Нередко обнаруживалось, что выпучивание решетки у концов стойки больше, чем посередине<sup>1)</sup>.

Можно допустить, что в концевых панелях напряжение диагоналей слабой решетки выражается средними цифрами между 0,98 и 0,45.

Таким образом, подсчет указывает на важное значение соединительной решетки сжатых стоек. Так как диагонали решетки работают на сжатие, то, очевидно, для одинаковой устойчивости решетки и ног, коэффициент  $\varphi$  уменьшения допускаемого напряжения на сжатие в решетке должен приближаться к коэффициенту ног, и тем ближе, чем слабее решетка. На практике нередко коэффициент  $\varphi$  для элементов решетки—вдвое и втрое меньше, чем у ног, вследствие чего, из-за решетки, стойки не обладают тем запасом устойчивости, на который рассчитаны<sup>2)</sup>.

При средних размерах решетки устойчивость, повидимому, обеспечивается, если коэффициент  $\varphi$  для решетки не ниже 0,75 такового же для

<sup>1)</sup> См. К. Симінський. До питання про розрахунок на стиск складних стрижнів. Записки Української Академії Наук. 1926 р. Фізико-Математ. Відділ.

<sup>2)</sup> Примеры можно найти между прочим в немецкой справочной книжке по железным конструкциям «Eisen in Hochbau, 3 Aufl. 1911, Berlin». Здесь Дюссельдорфский завод предлагает нормализованные типы колонн из двутавровых или коробчатых ног, связанных решеткой, гарантируя 5-ти кратный запас прочности. Однако, по вышеприведенным подсчетам на устойчивость, в № 30—№ 40 этих колонн не обеспечена даже и половина этого запаса.



ног; при слабых решетках он должен быть увеличен, а при сильных— может быть соответственно уменьшен <sup>1)</sup>).

**3. Продольные ветровые связи** мостовых ферм. Эти связи рассчитаны только на горизонтальное действие ветра. Однако при действии вертикальной нагрузки, например, при накатке поезда, пояса ферм удлиняются или укорачиваются. Изменение длины панелей фермы вызывает и соответствующее изменение в диагоналях их продольных связей. Последние нагибаются подобно решетке сжатых стоек. Следовательно, вертикальная нагрузка также вызывает усилия в горизонтальных продольных связях, и должна быть принята во внимание при их расчете. Особенно важно считаться с этим в сжатых поясах, например, в верхних поясах простых балочных ферм, так как устойчивость диагоналей связей здесь уменьшается еще благодаря их изгибу от собственного веса. Во всяком случае надо считаться здесь и с вышеприведенными формулами (176) и (177). Первая из них будет уместною тогда, когда распорками связей служат поперечные балки, в десятки раз более жесткие, чем диагонали ветровых связей; вторую формулой приходится пользоваться, когда сечения распорок и диагоналей—одного порядка <sup>2)</sup>).

<sup>1)</sup> Полное изложение расчета решетчатых стоек выходит за пределы курса. Мы пользуемся здесь решетчатыми стойками лишь как примером для иллюстрации метода уравнивания деформаций и попутно отмечаем важное значение решетки в общем сопротивлении стойки сжатию.

Вопрос о решетчатых стойках имеет большую литературу. Мы приведем некоторые работы последнего времени, связанные известной преемственностью.

1) Николаи Л. Къ вопросу о сопротивлении продольному изгибу сжатыхъ раскосовъ въ рѣшетчатой фермѣ. СПб. 1896.

2) Ясинский Ф. С. Собрание сочинений, т. 1.

3) Nussbaum. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 51, 1907.

Prandtl L. Knicksicherheit v. Gitterstäben. Zeitschr. d. Ver. Deutsch. Ing. 1907.

Kayser H. Knickwiderstand von Druckstäben. Der Eisenbau, 1910, № 12.

Engesser. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1891, 1907, 1909. Zeitschr. d. V. deutsch Ing. 1908. Eisenbau 1911.

Tetmayer L. Die Gesetzte der Knickungs—und der Zusammen gesetzten Druckestigkeit. 3 Aufl. 1903.

Белзецкий С. И. Теория фермъ. Извѣстія СПб. Политехн. Ин-та 1909, т. XI и XII.

Тимошенко С. П. Къ вопросу о продольномъ изгибѣ. Извѣстія К. П. И. 1908.

Об устойчивости упругих систем. 1910, стр. 50.

Виноградов Н. П. О расчетѣ сжатыхъ рѣшетчатыхъ стержней. Оттискъ из „Вѣстникъ О-ва Технологов“ 1914.

Rudeloff. Eisenbau 1913, стр. 41.

Müller-Breslau. Eisenbau 1911—1913.

Lossier. Cenie Civil. LXVI, 1915, стр. 150.

Mayer R. Die Knickfestigkeit, Berlin 1921.

Kayser N. Ausbildung und Berechnung von Einteiligen und Mehrteiligen Druckstäbch. Bauingenieur, 1923.

Bleich F. Theorie und Berechnung der Eisernen Brücken, 1924.

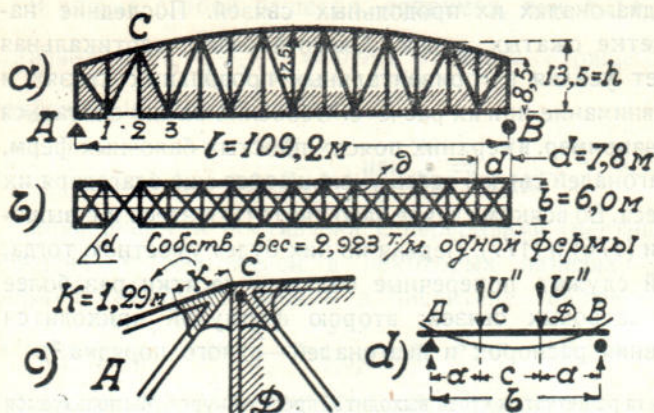
Тауер Л. К расчету сжатых решетчатых стержней. Труды Научно-Технич. Комитета Н. К. П. С., вып. № 17. М. 1926.

Тауер Л. Графики для подбора соединительных решеток. Труды Н. Т. К. М. 1926 вып. № 40.

<sup>2)</sup> Сравн. Winkler E. Eiserne Brücken. Querkonstruktionen. Wien. 1884.



4. Расчет дополнительных напряжений, вызванных взрывом N-ского моста <sup>1)</sup>. В качестве более сложного примера уравнивания деформаций рассмотрим случай определения дополнительных напряжений, появившихся в пролетном строении железного моста, как результат взрыва поясов одной панели. В этом примере мост не обрушился, несмотря на то, что были уничтожены взрывом панели нижнего пояса обеих плоских ферм.



Фиг. 135.

Очевидно, какие-то второстепенные части пролетного строения приняли на себя усилия, существовавшие до взрыва в уничтоженных панелях 1—2, вследствие чего появились дополнительные напряжения, на которые не было рассчитано пролетное строение моста. Здесь имеются в виду напряжения от собственного веса пролетного строения. Определение этих напряжений представляет двойкий интерес: во-первых, для объяснения факта равновесия строения и, во-вторых, для уничтожения дополнительных напряжений при восстановлении моста в нормальное состояние.

При взрыве уничтожено постоянное усилие второй панели нижнего пояса, удерживающее узлы 1 и 2 (фиг. 135):

$$U = \frac{M_c}{h} = q \frac{l}{2} \cdot \frac{2d}{h} - q \cdot \frac{2d}{2} \cdot \frac{2d}{h} = \frac{2,923 \cdot 109,2 \cdot 7,8}{13,5} - \frac{2,923 \cdot 2 \cdot 7,8 \cdot 7,8}{13,5} = 184 - 26 = 158 \text{ тонн} \quad \dots \quad (178),$$

где  $M_c$  — момент относительно точки Риттера  $C$  для второй панели нижнего пояса от собственного веса строения  $q = 2,923$  тонны на 1 пог. метр фермы;  $d$  — длина панели 7,8 м.;  $h$  — плечо нижнего пояса относительно точки  $C$ , равное 13,5 м.

Вследствие этого узлы 1 и 2 разошлись, растянув диагонали нижних связей, продольные балки, скрепленные с поперечными, прикрепанными в свою очередь к фермам, и изогнув в плане ближайшие поперечные балки. При этом должен был несколько разогнуться жесткий узел  $C$  верхнего пояса. Полагая, что все усилие  $U$  распределилось между перечисленными деформированными элементами, имеем следующее уравнение Статики:

$$U = U' + U'' + U''' = 158 \text{ тонн} \quad \dots \quad (179),$$

где  $U'$  — усилие диагонали связей,  $U''$  — усилие продольной балки,  $U'''$  — усилие, выдерживаемое жесткостью узла  $C$ .

Очевидно, требуется добавить еще два уравнения деформации. Послед-

<sup>1)</sup> Пример заимствован из практики мостовой восстановительной организации.



ние получатся, если написать, что расхождение нижних узлов 1 и 2 фермы от поворота ее заштрихованных частей вокруг точки  $C$  равняется, один раз—проекции на пояс удлинения диагонали связей, а другой раз—равняется удлинению продольных плюс прогиб 2-х поперечных балок.

Можно предположить, что плоскость стойки  $CD$  (фиг.  $c$ ) осуществляет защемление части  $CA$ , прикрепленной фасонным узлом  $C$  и имеющей возможность упруго вращаться вокруг центра узла  $C$ . Момент усилия относительно узла  $C$ :  $M_c = U''h$ , изгибает фасонку<sup>1)</sup> в плоскости фермы, как консоль длиной  $k$ , так что, угол  $\varphi$  поворота ее конца должен быть

$$\varphi = \frac{M_c k}{EJ} = \frac{U''hk}{EJ}.$$

Следовательно, удлинение нижней панели, которое соответствует этому повороту

$$\lambda''' = \varphi h = \frac{U''h^2k}{EJ} \dots \dots \dots (180).$$

Если усилие пояса, приходящееся на долю диагоналей нижних связей, обозначим через  $U'$ , то усилие самых диагоналей должно быть:  $U' \cdot \cos \alpha$ , а удлинение  $\frac{U' \partial}{EF \cos \alpha}$ ; следовательно, проекция удлинения на направление пояса  $\lambda' = \frac{U' \partial}{EF}$ .

Приравнивая  $\lambda'''$  и  $\lambda'$ , получаем первое уравнение деформаций:

$$\frac{U''h^2k}{EJ} = \frac{U' \partial}{EF}, \text{ или } U' = \frac{kh^2F}{\partial J} U'' \dots \dots (181).$$

Удлинение продольной балки, растянутой усилием  $U''$ , очевидно:

$$\lambda_1'' = \frac{U'' d}{EF_1} \dots \dots \dots (182),$$

где  $F_1$ —площадь поперечного сечения продольной балки.

Перемещение конца  $A$  поперечной балки фиг.  $d$  по отношению к точке  $C$  прикрепления продольной балки в плане, обуславливается, во-первых, поворотом сечения  $C$  средней части балки  $CD$ , находящейся в условиях чистого изгиба моментами  $M = U''a$ , т. е. углом

$$\beta = \frac{Mc}{2EJ_1} = \frac{U''ac}{2EJ_1}, \text{ где } J_1 \text{— момент инерции поперечной балки относительно вертикальной оси, и, во вторых,—прогибом балки } AC, \text{ как консоли, заделанной в } C: y = \frac{U''a^3}{3EJ_1}.$$

Следовательно,  $\lambda_2'' = \beta a + y = \frac{U''ac \cdot a}{2EJ_1} + \frac{U''a^3}{3EJ_1} = \frac{U''a^2}{6EJ_1} (2a + 3c) =$

$$= \frac{U''a^2}{6EJ_1} (b + 2c) \dots \dots \dots (183).$$

<sup>1)</sup> Узловой фасонный лист.



Приравнивая теперь  $\lambda''$  из (182—183) и  $\lambda'''$  из (180), получим второе добавочное уравнение деформаций:

$$\frac{U'''h^2k}{EJ} = \frac{U''d}{EF_1} + \frac{U''a^2}{3EJ_1} (b + 2c) \dots \dots \dots (184).$$

В рассматриваемом примере имеем:

$U = 158$  т.,  $h = 13,5$ ,  $\partial = 9,85$  м. (длина диагоналей связей),  $\cos \alpha = 0,7927$ ,

$d = 7,8$  м.,  $b = 6$  м.,  $c = 2$  м.,  $k = 1,29$  м.,  $F = 68,88$  см<sup>2</sup>,

$F_1 = 438,5$  см<sup>2</sup>.

$J_1 = 3433$  см<sup>4</sup>,  $J = 2028000$  см<sup>4</sup>.

Поэтому из (181) находим:

$$U' = \frac{129 \cdot 1350^2 \cdot 68,88}{985 \cdot 2028000} U''' = 8,1 U'''.$$

$$\text{Из (184): } U'' = U''' h^2 k : J \left[ \frac{d}{F_1} + \frac{a^2}{3J_1} (b + 2c) \right] =$$

$$= 1350^2 \cdot 129 U''' : 2,028 \cdot 10^6 \left[ \frac{780}{438,5} + \frac{200 \cdot 200}{3 \cdot 3433} (600 + 400) \right] = 0,03 U'''.$$

Из (179):  $U = 8,1 U''' + 0,03 U''' + U''' = 9,13 U'''$ .

Отсюда:  $U''' = 0,109 U = 17,3$  тонны.

$U'' = 0,03 U''' = 0,52$  тон. и  $U' = 8,1 U''' = 140,2$  тон.

Таким образом, исчезнувшее при взрыве постоянное усилие распределяется следующим образом:

в связях: 88,7% <sub>0</sub>	в балках: 0,3% <sub>0</sub>	в жестком узле: 11,0% <sub>0</sub>
---------------------------------	--------------------------------	---------------------------------------

Получаются добавочно: 1) моменты:

для поперечной балки в плане:  $M'' = U'' a = 0,52 \cdot 2 = 1,04$  т. м.

для фасонной вставки узла:  $M''' = U''' h = 17,3 \cdot 13,5 = 234$  т. м.;

2) усилия в диагоналях связей  $U' / \cos \alpha = \frac{140,2}{0,7927} = 177$  тонн.

Вследствие чего возникают добавочные напряжения:

в поперечной балке 674 кг./см.<sup>2</sup>, в фасонном узле 995 кг./см.<sup>2</sup>, в связях—2560 кг./см.<sup>2</sup>.

Напряжения не достигают временного сопротивления литого железа разрыву, однако, в диагоналях связей они достигают предела упругости и могут вызвать остаточные деформации.

## ГЛАВА IV.

### Начало возможных перемещений.

**§ 15. Начало возможных перемещений** в применении к задачам Строительной механики. 1. **Общие положения.** а) Задачи Строительной механики обыкновенно решают, исходя из условий равновесия системы; в зависимости от формы этих условий получают более или менее общее



решение. Так как мы стремимся здесь разыскать общие методы, охватывающие также и задачи с лишними неизвестными, то должны обратиться к самому общему началу механики — Началу возможных перемещений. Как известно, это Начало говорит: если система находится в равновесии, то работа всех приложенных к ней сил на любых исчезающе малых, но возможных перемещениях, т. е. допускаемых связями системы, равна нулю, и обратно: если равна нулю работа всех приложенных к системе сил на любых возможных исчезающе малых перемещениях системы, то система находится в равновесии. Следовательно, равенство нулю работы всех сил материальной системы на любых возможных исчезающе малых перемещениях есть необходимое и достаточное условие равновесия. Так как это условие относится к любой системе материальных точек, связанных какими угодно связями, то, очевидно оно охватывает и стержневые системы. Им мы можем воспользоваться и для расчета систем с лишними стержнями. Однако в применении к стержневым системам и, вообще, к задачам Строительной механики это Начало требует некоторых разъяснений.

Его следует понимать так. Система точек, образующих машину или строительную ферму, подчинена некоторым связям, при которых одни перемещения возможны, а другие — связями не допускаются. Кроме того, силы системы, вообще говоря, могут быть внешние и внутренние. Если для каждой силы составить выражение работы, производимой силою на перемещении той точки системы, где приложена сила и, притом, на перемещении, исчезающе малом и возможном для системы, и, если повторить выражение для каждой из внешних и внутренних сил системы и составить сумму, распространяя ее на все силы, то должно получиться нуль:

$$\sum F \delta f = 0 \dots \dots \dots (185).$$

Конечно, в это выражение вводится не фактическое перемещение, совершаемое точкою системы, а проекция перемещения  $\delta f$  на направление силы  $F$ .

б) Необходимо также условиться в понимании термина: возможные перемещения. Для всякой упругой системы возможными оказываются самые разнообразные перемещения ее частиц; множество поступательных перемещений и поворотов доступно, например, частям упругого бруска; внешним образом они выражаются в растяжении, сжатии, сдвиге, изгибе, кручении... — все эти перемещения в разнообразных направлениях допускаются межчастичными упругими связями и потому — возможны.

Но одна форма не может считаться возможною — это резкие переломы оси бруска, например, перелом упругой линии при изгибе. Этим упругое тело резко отличается от абсолютно твердого в котором совершенно невозможно взаимное перемещение частиц. Абсолютно твердое тело получает перемещения только как целое, в зависимости от устройства его связей, например: простая балка на двух опорах может иметь перемещение на свободном конце лишь по направлению плоскости катания ее опорных



катков, стержень, подвешенный одним концом к потолку, может свободным концом перемещаться по шаровой поверхности и т. п. Следовательно, для абсолютно твердого тела возможные перемещения вполне определены и задаются устройством его прикрепления.

с) Применяя Начало возможных перемещений к упругим системам Строительной механики, мы прежде всего встречаем два затруднения: во-первых, деформации таких систем, хотя и сравнительно малы, но конечны, и, во-вторых, под действием нагрузки, система сначала деформируется, и только после того приходит в состояние равновесия: чтобы применить Начало, необходимо разыскать и ввести в уравнение (185) возможные перемещения не от начального состояния, а от состояния деформированного, которое нам предварительно не бывает известным. Однако эти затруднения отпадут, если мы ограничим применение Начала теми системами, которые подчиняются закону пропорциональности.

Большинство инженерных задач удовлетворяет этому условию, а если иногда по существу и не удовлетворяют, то отклонения столь ничтожны, что ими можно пренебречь, не выходя из пределов общепринятой точности выводов и расчетов<sup>1)</sup>. Исключение составляют задачи об устойчивости (продольный изгиб), для которых требуются иные методы.

Первое затруднение отпадает на основании следующего соображения. Если какие-нибудь силы  $F$  вызывают исчезающе малые перемещения  $\delta f$ , так что  $\Sigma F \delta f = 0$ , то при увеличении сил в  $m$  раз, перемещения также должны соответственно возрасти, подчиняясь закону пропорциональности; это равносильно тому, что в выражении работы сила и перемещение помножатся на постоянные коэффициенты пропорциональности  $m$  и  $n$ , т. е. будет:

$$\Sigma m F n \delta f.$$

Так как множители  $m$  и  $n$  постоянны, то их можно вынести за знак суммирования:

$$mn \Sigma F \delta f.$$

Совершенно ясно, что это выражение равно нулю; а следовательно, Начало возможных перемещений оправдывается и для конечных перемещений, ибо числа  $m$  и  $n$  могут быть подобраны достаточно большими, так что  $n \delta f$  станет конечной величиной.

d) Как следствие из условия пропорциональности, мы получим также оправдание для Начала возможных перемещений и в случае, когда система из состояния покоя переходит под действием нагрузки в деформированное состояние. Положим, что из начального положения  $N_0$  какая-нибудь точка системы под действием данных внешних уравновешивающихся сил  $F_1$  переместилась в положение  $N_1$  (фиг. 136). Мы можем представить себе другую дополнительную совокупность сил  $F_2$ , которая при общей деформации системы переведет ту же точку из положения  $N_1$  в положение  $N_2$  и также уравновесится в этом положении системы.

<sup>1)</sup> Здесь приходится не соглашаться с представителем минового направления, отрицающего в науке сопротивление материалов закон Гука, существование предела упругости и проч., например, с известным физиком Буас (Bouasse).



Исходя из условия упругости и пропорциональности сил и деформаций, мы должны придти к заключению, что, по удалении всех сил, система вернет точку  $N_2$  в ее начальное положение  $N_0$ .

Если для системы оказалось возможным перемещение  $N_0N_1$  и  $N_1N_2$ , то, очевидно, будет возможным и перемещение  $N_2N_0$  и обратно: перемещение из  $N_0$  в  $N_2$ .

Каждая точка упругой системы описывает некоторый замкнутый цикл при изменении группы сил, производящих деформацию, и, если процесс изменения совершается статически, то в каждый данный момент существует равновесие между внутренними и внешними силами, и к каждому данному моменту можно применить Начало возможных перемещений.

Применим его к моменту  $N_1$ .

В этот момент система находится под действием сил  $F_1$ . Что касается перемещений, то для системы возможны, как перемещение  $\delta f_2$  вперед, так и перемещение  $\delta f_1$  назад. Остановившись на первом, получаем:

$$F_1 \delta f_2,$$

т. е. работу сил первого состояния на перемещениях второго. Здесь мы имеем силы, обычно прикладываемые к недеформированной начальной системе; перемещения же не те, что первоначально получаются, а другие, представляющие часть циклического процесса, возможного для системы.

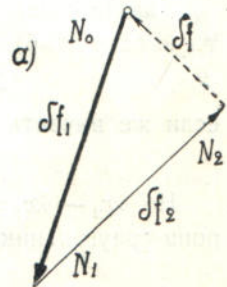
Применяя Начало возможных перемещений к моменту  $N_2$ , мы должны уже считаться с равнодействующей сил  $F_1$  и  $F_2$ , которую назовем  $F$ . Если и теперь для возможного перемещения воспользуемся движением вперед, то получим

$$F \delta f,$$

т. е. работу сил, приложенных к деформированной системе на перемещениях начального, недеформированного состояния.

Отсюда следует, что при составлении Начала возможных перемещений можно принимать силы действительного, недеформированного состояния системы, а перемещения—другие, соответствующие другим силам, лишь бы они были в пределах упругости, были возможны для системы и достаточно малы; или обратно: принимают перемещения от недеформированной системы, а силы—соответствующие какому-нибудь другому состоянию. Этот результат придает Началу возможных перемещений распространительное толкование и представляет основание для применения его в той форме, в какой им впоследствии чаще всего придется пользоваться. Теперь мы можем составлять Начало возможных перемещений, как работу сил действительного состояния на перемещениях некоторого фиктивного и обратно: как работу сил фиктивного состояния системы на перемещениях ее действительного состояния. По условию равновесия обе эти работы порознь равны нулю.

е) Это положение может быть доказано также следующим приемом



Фиг. 136.



математического анализа. Положим, что на какую-нибудь точку упругой системы в положении  $N_1$  на фиг. 136 уже действует сила  $F_1$ , переместившая точку из ее начального положения  $N_0$ , и пусть возможными для системы перемещениями из состояния  $N_1$  являются  $\delta f_1$  и  $\delta f_2$ . Тогда Начало возможных перемещений напишется:

$$\text{либо } \Sigma F_1 \delta f_1 = 0, \text{ либо } \Sigma F_1 \delta f_2 = 0 \dots \dots \dots (186).$$

Отнесем систему к осям  $X$  и  $Y$ , обозначая

$$\begin{aligned} F_1(\cos F_1, X) &= X, & F_1(\cos F_1, Y) &= Y, \\ \delta f_1 \cos(\delta f_1, X) &= \delta x_1, & \delta f_1 \cos(\delta f_1, Y) &= \delta y_1 \\ \delta f_2 \cos(\delta f_2, X) &= \delta x_2, & \delta f_2 \cos(\delta f_2, Y) &= \delta y_2. \end{aligned}$$

Так как работа равнодействующей равна сумме работ составляющих, то вместо (186) получится:

$$\Sigma(X\delta x_1 + Y\delta y_1) = 0 \text{ и } \Sigma(X\delta x_2 + Y\delta y_2) = 0,$$

если же вычесть одно из другого, то:

$$\Sigma[X(\delta x_2 - \delta x_1) + Y(\delta y_2 - \delta y_1)] = 0.$$

Но  $\delta x_2 - \delta x_1 = \delta x$  и  $\delta y_2 - \delta y_1 = \delta y$ , так как  $\delta f$  есть замыкающая сторона треугольника, у которого две другие стороны  $\delta f_1$  и  $\delta f_2$ ; следовательно:

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y) = 0, \text{ или } \Sigma F_1 \delta f = 0 \dots \dots \dots (187),$$

т. е. вместо возможных перемещений от нагруженного и деформированного состояния системы  $N_1$  можно рассматривать перемещение  $\delta f$  из нулевого состояния в какое-нибудь другое  $N_2$ , соответствующее фиктивным нагрузкам.

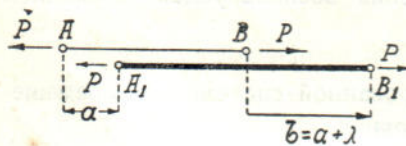
**2. Обобщенные силы и координаты.** Составляя выражение работы для Начала возможных перемещений, нет надобности суживать те возможности, которые предоставляет это Начало. Оно говорит о равенстве нулю суммы работ всех сил системы, но совершенно не накладывает каких либо ограничений на характер работы, на состав тех множителей, из которых она составляется.

Мы, конечно, можем составлять эту сумму, по своему усмотрению, как удобнее, например, группируя ряд сил вместе и отделяя их от других. К группировкам часто прибегают в элементарной механике и здесь мы только подчеркнем их, как общий, вполне естественный прием. Так, при вычислении работы сил, растягивающих брусок  $AB$  фиг. 137 при его параллельном смещении, приходится работу силы  $P$  конца  $A$  сложить с работой силы  $P$  конца  $B$ ; т. е. написать

$$T = -Pa + Pb = P(b-a) = P\lambda,$$

где  $\lambda$  — есть разность перемещений обоих концов бруска, т. е. его удлинение<sup>1)</sup>. Следовательно, здесь работа двух одинаковых противоположных

<sup>1)</sup> Обращаем внимание на то, что мы здесь пользуемся элементарным выражением для работы, иначе сказать, пользуемся постоянной силой  $P$ , вызывающей некоторое элементарное перемещение  $\lambda$ . Если же сила переменная, то выражение для результирующей



Фиг. 137.



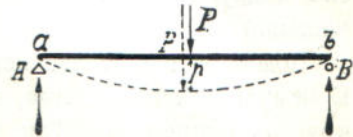
сил представляется, как работа одной силы  $P$ ; точно также два отличных друг от друга перемещения  $a$  и  $b$  представляется как одно  $\lambda$ , равное разности  $a$  и  $b$ . Говоря, что работа растяжения выражается произведением растягивающей силы на удлинение бруска, мы молчаливо приняли условие, что под силой подразумевается группа из двух сил ( $P_n - P_k$ ), а под удлинением — разность  $\lambda$  перемещений двух разных точек  $A$  и  $B$ .

Другой пример представляет балка на 2 опорах фиг. 138. При вычислении работы всех внешних сил системы мы обязаны перемножить 3 силы:  $A$ ,  $P$  и  $B$  на соответствующие им перемещения, т. е. написать:

$$T = Aa + Pp + Bb.$$

Но обычно перемещения опор по направлению реакций—нули: хотя подвижная опора и перемещается, но перпендикулярно к силе; поэтому

$$T = A \cdot 0 + Pp + B \cdot 0 = Pp:$$



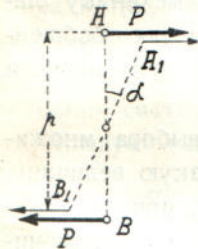
Фиг. 138.

работа группы трех уравновешивающихся сил выражается работой одной силы  $P$ . В случае осадки всей системы на  $\delta$ , получим:

$$T = -A\delta + P(p + \delta) - B\delta = -\delta(A + B) + P\delta + Pp.$$

Но так как  $A + B = P$ , то  $T = -\delta P + P\delta + Pp = Pp$ .

Следовательно, снова та же группировка. Кроме того, работа может выражаться не только произведением силы и перемещения точки ее приложения в буквальном смысле этих слов. Уже в элементарной механике приняты некоторые группировки, расширяющие понятие о работе. Рассмотрим, например, две равные и противоположные параллельные силы—пару фиг. 139.



Фиг. 139.

$$T = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1.$$

Но дуга  $AA_1 = BB_1 = \frac{P}{2} \cdot \alpha$ ; проекцию ее на направление касательной можно считать равной самой дуге; поэтому:

$$T = P \left( \frac{P}{2} \alpha + \frac{P}{2} \alpha \right) = Pp\alpha = M\alpha \dots \dots (188).$$

Следовательно, работа пары сил выражается ее моментом, умноженным на угол поворота.

Положим далее, что две равные и противоположные пары  $M_1$  и  $M_2$  вращают систему на  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , Очевидно, работа будет:

$$T = M_1\alpha_1 - M_2\alpha_2 = M(\alpha_1 - \alpha_2) \dots \dots (189).$$

Такой случай может встретиться в рычагах, балках, стержневых работы получается в зависимости от закона изменения силы и перемещения ее точки приложения и определяется интегрированием. Для случая линейной зависимости, имеющей место при деформировании упругих систем статической нагрузкой, эта работа выражается полупроизведением из окончательного значения силы и окончательного значения вызванного ею перемещения. Это известно из курса Сопротивления материалов и повторно доказывается ниже, формулюю (253) § 21.



фермах.... Оказывается, что работа выражается одним моментом пары, умноженным на разность поворотов, так что, группа четырех сил обобщается в один момент, а два угла поворота обобщаются в один, равный их разности.

Вообще, при составлении выражения работы всех сил системы допускаются различные группировки и может быть более общее представление о работе, как о произведении двух множителей, из которых каждый может быть составным. Как видно из рассмотренных примеров, работа, вообще говоря, составляется из двух множителей: один из них зависит от сил, а другой—от перемещений. В отличие от элементарных сил и перемещений их называют обобщенными.

Подобное обобщение нередко встречается в математике и механике. К нему прибегают всегда, когда требуется обобщить выводы и расширить круг их применения. Так, площадью называют произведение координат, независимо от того, какова размерность каждой из них. Мы уже встречали такую площадь в примере эпюры моментов, где берется произведение

$$[Mdx] = [\text{ед. с}] [\text{ед. дл.}] \times [\text{ед. дл.}] = [\text{ед. . с}] [\text{ед. дл.}]^2$$

или — в площади влияния, где размерность изменяется в зависимости от размерности ординат.

Обобщение понятия о силах и координатах введено в механику Лагранжем (Lagrange Joseph-Louis, 1736—1813), который дал для обобщенных координат ряд известных теорем, нашедших широкое применение и в Строительной механике.

В дальнейшем мы также будем пользоваться свободой выбора множителей работы. За координату будем стремиться выбрать такую величину, которая вполне определяет деформацию системы, например, при растяжении — примем удлинение  $\lambda$ , при кручении — угол закручивания  $\varphi$ , при чистом изгибе — угол поворота концевых сечений и т. д. и, притом, выражает деформацию возможно проще. Тогда за силу придется считать некоторые группы сил, совокупность которых обуславливает ту деформацию, которая принята нами за обобщенную, например: при растяжении — две противоположных силы, при кручении — два противоположных момента в параллельных плоскостях, при изгибе — два противоположных момента в одной плоскости и т. д.

Будем всегда подбирать силу так, чтобы, при умножении на координату получалась работа. Так подобранные координаты и силы будем называть обобщенными.

Итак, будем выражать работу произведением двух множителей: обобщенной силы и обобщенной координаты; тогда выражения окажутся значительно проще и выводы будут иметь самое общее значение.

**3. Соответствие между ними.** Выбирая произвольно множители работы, мы обязаны однако соблюдать условие, чтобы произведение их давало работу. Поэтому, здесь устанавливается определенная зависимость между размерностью множителей, например, если один из них есть длина



в квадрате, то другой должен быть силой, разделенной на длину, чтобы получилось:  $[\text{дл}]^2 \cdot \left[ \frac{c}{\text{дл}} \right] = [c] [\text{дл}]$  — размерность работы.

Кроме того, должно быть определенное соответствие между группой, принятой за обобщенную силу, и перемещениями этой группы. Это уже было показано на примере работы двух моментов. Другой пример представляет балка при равномерно распределенной нагрузке  $q$  (фиг. 140).

При изгибе балки элементарный груз  $q dx$  совершает работу  $q dx \cdot y$ , где  $y$  — прогиб, приходящийся под элементарным грузом  $q dx$ .

Полная работа всей нагрузки и уравновешивающих ее реакций есть:

$$\int_0^l q dx \cdot y = q \int_0^l y dx = q\omega,$$

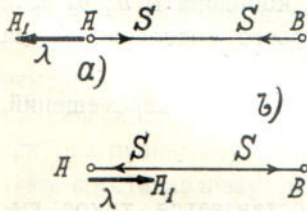
где  $\omega$  — заштрихованная площадь эпюры прогибов.

Если за обобщенную силу принять интенсивность нагрузки  $q$ , то обобщенной координатой должна явиться площадь между начальной и упруго изогнутой осью бруска.

Вообще, для простоты, следует обобщенные силы и координаты выбирать так, чтобы они выражались одним членом. Этому удовлетворяют все вышеприведенные примеры:  $M$  и  $\varphi$ ,  $q$  и  $\omega$  и проч.

Если координаты отсчитываются от начального ненагруженного состояния системы, то их называют нулевыми.

Следует еще сказать о знаке работы.



Фиг. 141.

Отдельные точки системы, в зависимости от характера связей, могут получать перемещения, противоположные приложенным силам. Тогда работу надо считать отрицательной.

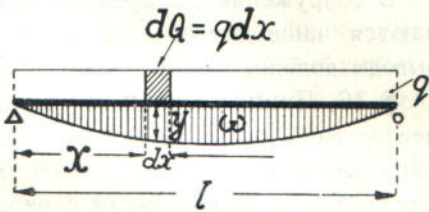
Такова работа сил трения, ибо они идут всегда против движения тела: путь тела противоположен течению силы трения. Отрицательной же всегда оказывается работа внутренних сил. Рассмотрим, например, растянутый брусок

(фиг. 141), получающий удлинение  $\lambda$ . Внутренние его силы  $S$  идут против перемещения концов бруска, т. е. приходится писать:

$$T = S \cdot (-\lambda) = -S\lambda \dots \dots \dots (190).$$

Сжатый брусок (фиг. b), длина которого укорачивается на  $\lambda$ , имеет внутренние силы  $S$ , идущие к узлам бруска. Здесь тоже концы бруска перемещаются против сил, и потому также дают отрицательную работу.

После этих общих замечаний можно говорить о разнообразных явлениях в упругих системах: в самой общей форме, независимо от того, чем они вызываются, силами, моментами, бесконечно большим числом малых однородных грузов, какова, например, нагрузка равномерно распределен-



Фиг. 140.



ная, или — одним сосредоточенным грузом и т. д. Поэтому сделанные выводы будут иметь общее значение и будут приложимы ко всем упругим системам. Одно только ограничение мы накладываем на область применения выводов — это требование, чтобы деформация была пропорциональна вызывающим ее силам, иными словами: выводы будут относиться к линейной зависимости между обобщ. силами и координатами, к явлениям, подчиняющимся закону Гука.

В сооружениях, в пределах принятой точности, такие явления встречаются чаще всего, едва ли не исключительно. Так что, последующие выводы должны иметь очень широкое применение.

**§ 16. Принцип взаимности перемещений.** При определении лишних неизвестных большую услугу оказывает одна зависимость между деформациями системы и нагрузкой. Эта зависимость указывает, как изменяются деформации вместе с перестановкою грузов, и оказывается очень плодотворной в применении к исследованию влияния подвижной нагрузки. Она известна под названием принципа взаимности перемещений.

Мы сделаем сначала элементарный вывод этого принципа, основываясь непосредственно на Начале возможных перемещений.

**1. Элементарное доказательство.** Положим, что на упругую систему действуют несколько обобщенных сил  $A, B, C, \dots$ , заключающих, как нагрузки и реакции, так и внутренние силы. Пусть соответствующие им обобщенные координаты будут  $a, b, c, \dots$ . Деформация системы мала, совершенно упруга и подчиняется закону пропорциональности.

Рассмотрим два состояния системы: одно, когда она находится под действием сил:  $A_1, B_1, C_1, \dots$  и получает соответствующие перемещения:  $a_1, b_1, c_1, \dots$ , измеряемые от нулевого состояния; другое состояние системы пусть будет под действием сил:  $A_2, B_2, C_2, \dots$ , также измеряемых от нулевого состояния и вызывающих соответствующие координаты  $a_2, b_2, c_2, \dots$

На основании § 15.1а, напомним работу сил первого состояния  $F_1$  на координатах второго состояния  $f_2$ :

$A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2, \dots$  и, пользуясь Началом возможных перемещений, приравняем нулю:

$$A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2 + \dots = 0.$$

Но если для Начала возможных перемещений составляется такое выражение, то с тем же правом можно написать и обратное:

$$A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2 c_1 + \dots = 0.$$

Следовательно:

$$A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2 + \dots = A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2 c_1 \dots \dots (191),$$

т. е. работа обобщенных сил одного состояния системы на соответствующих им координатах другого состояния равна работе обобщенных сил второго состояния на соответствующих координатах первого.

В этом и заключается принцип взаимности перемещений<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Впервые мы приводим это доказательство в сокращенной форме в „Системах без лишних стержней“ 1919 г. Оно не должно вызывать сомнений, так как неопределенность здесь исключается.



**2. Другой способ доказательства.** Для этого доказательства установим некоторые положения, характеризующие условия задачи.

а) Силы упругости имеют потенциал. Это следует из того, что идеальный упругий процесс деформации обратим и что работа деформации вполне определяется размером деформации и не зависит от пути, по которому она происходит, ни от того, в какую сторону совершается.

Из механики известно, что такие силы имеют потенциал, т. е. существует такая силовая функция, производные от которой по координатам равны соответствующей проекции силы<sup>1)</sup>. Эта силовая функция называется потенциальной функцией или — потенциальной энергией.

Следовательно, если обозначить потенциальную функцию буквой  $\Pi$ , проекции сил обозначить буквами  $A, B, C$ , а соответствующие координаты —  $a, b, c$ , то, по определению, будет:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = A, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = B, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c} = C \dots \dots \dots (192).$$

Как известно, таким свойством обладают: сила тяжести, электрические и магнитные силы и другие. Теперь оно распространяется на силы упругости, и мы можем сказать, что: производная от потенциальной энергии упругой деформированной системы по какой-нибудь из обобщенных координат равна соответствующей силе.

Впрочем это положение можно вывести: и непосредственно.

Если обобщенные силы  $A, B, C \dots$  деформируют систему, то ими совершается работа, тем большая, чем достигнуто большее значение координат. В случае спокойной деформации, когда во все моменты процесса существует равновесие между внешними и внутренними силами, эта работа целиком передается системе. (Если часть и расходуется на тепловые и электромагнитные явления, то столь ничтожная, что не может иметь практического значения). При освобождении системы от обобщенных сил (при разгрузке) внутренними силами упругости первоначальная форма системы восстанавливается и, если процесс совершенно упруг, то восстанавливается в точности. При этом внутренние силы целиком возвращают работу, поглощенную системой при ее первоначальной деформации. Эта работа, возвращаемая системой при благоприятных условиях, есть ее потенциальная энергия. Она зависит от деформации, т. е. от обобщенных координат и, следовательно, есть функция координат.

Положим, что координаты  $a, b, c \dots$  получили малые приращения  $\delta a, \delta b, \delta c \dots$ ; тогда приращение потенциальной энергии

$$\delta \Pi = A \delta a + B \delta b + C \delta c + \dots,$$

ибо оно равняется совершаемой силами элементарной работе.

С другой стороны, потенциальная энергия есть функция нескольких

<sup>1)</sup> См. напр. Диняк А. Н. Теоретическая механика. Екатеринбург, 1919, ч. I стр. 75. Кирпичев В. Л. Беседы о механике. СПб. 1907, стр. 278—280.



координат  $a, b, c, \dots$ , и ее приращение, как полный дифференциал, есть сумма частных дифференциалов, по  $a$ , по  $b$ , по  $c, \dots$ , так что, можно написать:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a} \delta a + \frac{\partial\Pi}{\partial b} \delta b + \frac{\partial\Pi}{\partial c} \delta c + \dots$$

Приравнивая правые части равенств и перенося все члены на одну сторону, получим:

$$\left(A - \frac{\partial\Pi}{\partial a}\right) \delta a + \left(B - \frac{\partial\Pi}{\partial b}\right) \delta b + \left(C - \frac{\partial\Pi}{\partial c}\right) \delta c + \dots = 0.$$

Приращения координат  $\delta a, \delta b, \delta c, \dots$  независимы и совершенно произвольны. Чтобы при таких условиях всегда удовлетворялось последнее равенство, очевидно, должны быть порознь равны нулю коэффициенты при  $\delta a, \delta b, \delta c, \dots$  т. е. должно быть:

$$A - \frac{\partial\Pi}{\partial a} = 0, \quad B - \frac{\partial\Pi}{\partial b} = 0, \quad C - \frac{\partial\Pi}{\partial c} = 0, \dots,$$

или иначе:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a} = A; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial b} = B; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial c} = C, \text{ т. е.}$$

производная от потенциальной энергии по координате равна соответствующей силе.

б) Потенциальная энергия упругой системы в пределах пропорциональности есть однородная функция второй степени от координат либо от внешних сил<sup>1)</sup>.

Закон пропорциональности говорит, что координаты суть линейные функции от сил. Точно также, при одновременном действии нескольких сил обобщенные координаты выражаются суммой координат, вызванных отдельными силами, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} a &= m_1 A + n_1 B + p_1 C + \dots \\ b &= m_2 A + n_2 B + p_2 C + \dots \\ c &= m_3 A + n_3 B + p_3 C + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (193).$$

Здесь  $m, n, p, \dots$ —коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств упругой системы. Постоянные члены не входят в выражения, так как отсчет координат ведется от нулевого состояния системы, когда отсутствуют силы, т. е.  $A = B = C = 0$ .

Решая эти уравнения относительно сил, получим:

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots \\ B &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots \\ C &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Здесь имеется в виду пропорциональность между усилием и деформацией не только для отдельных элементов, но и для всей упругой системы в целом, поэтому из рассмотрения исключаются такие системы, как гибкая нить, нагруженная сосредоточенным грузом по середине (определение модуля упругости  $E$  по Gravesand'у), продольный изгиб и т. п., ибо здесь прогибы не пропорциональны силам.



Подставим теперь значения сил в выражения (192); получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a} &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c} &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (194).$$

Таким образом, производные от потенциальной энергии представляют функции первой степени от координат; очевидно, потенциальная энергия будет функцией второй степени<sup>1)</sup>. Так как координаты линейно зависят от сил, то вставляя в последнее выражение координаты из (193), найдем, что потенциальная энергия выражается также однородной функцией второй степени от сил.

Многие примеры, известные из курса Сопротивления материалов, подтверждают это положение, так:  
потенциальная энергия растяжения

$$\Pi = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{Fl}{EF} = \frac{P^2 l}{2EF}$$

выражается квадратом силы  $P$ , или, при другой подстановке — квадратом удлинения  $\lambda$ :

$$\Pi = P \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda EF}{l} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{EF\lambda^2}{2l}.$$

В самом общем виде потенциальная энергия в функции координат, очевидно будет:

$$\Pi = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \dots \alpha' ab + \beta' ac + \gamma' bc \dots$$

А производные по координатам должны быть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a} &= A = 2\alpha a + \alpha' b + \beta' c + \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} &= B = 2\beta b + \alpha' a + \gamma' c + \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c} &= C = 2\gamma c + \beta' a + \gamma' b + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (195).$$

с) Доказательство теоремы. Рассмотрим два состояния системы: одно, когда действуют обобщенные силы

$$A_1 \quad B_1 \quad C_1 \dots$$

и имеют место соответствующие им координаты:

$$a_1 \quad b_1 \quad c_1 \dots$$

и другое состояние, при действии сил:

$$A_2 \quad B_2 \quad C_2 \dots,$$

вызывающих координаты соответственно:

$$a_2 \quad b_2 \quad c_2 \dots$$

<sup>1)</sup> Может показаться, что функция не будет однородной, так как при интегрировании появится свободный член. Но он должен быть нулем по начальным условиям, так как мы рассматриваем системы, не имеющие начальных внутренних сил, с нулевой потенциальной энергией.



Напишем выражение для работы сил первого состояния из (195) на координатах второго:

$$\begin{aligned} A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2 + \dots &= 2\alpha a_1 a_2 + \alpha' b_1 a_2 + \beta' c_1 a_2 + \\ &+ 2\beta b_1 b_2 + \alpha' a_1 b_2 + \gamma' c_1 b_2 + \\ &+ 2\gamma c_1 c_2 + \beta' a_1 c_2 + \gamma' b_1 c_2 + \dots = \\ &= 2\alpha a_1 a_2 + 2\beta b_1 b_2 + 2\gamma c_1 c_2 + \alpha' (b_1 a_2 + a_1 b_2) + \beta' (c_1 a_2 + a_1 c_2) + \\ &+ \gamma' (c_1 b_2 + b_1 c_2) \dots \dots \dots (196). \end{aligned}$$

В правой части получилось выражение, симметричное относительно координат обоих состояний. Очевидно, если взять работу сил второго состояния на координатах первого, то придем к тому же выражению:

$$\begin{aligned} A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2 c_1 + \dots &= 2\alpha a_2 a_1 + \alpha' b_2 a_1 + \beta' c_2 a_1 + \\ &+ 2\beta b_2 b_1 + \alpha' a_2 b_1 + \gamma' c_2 b_1 + \\ &+ 2\gamma c_2 c_1 + \beta' a_2 c_1 + \gamma' b_2 c_1 = \\ &= 2\alpha a_1 a_2 + 2\beta b_1 b_2 + 2\gamma c_1 c_2 + \alpha' (b_1 a_2 + a_1 b_2) + \beta' (c_1 a_2 + a_1 c_2) + \\ &+ \gamma' (c_1 b_2 + b_1 c_2) \dots \dots \dots (197). \end{aligned}$$

Так как правые части (196) и (197) одинаковы, то должны быть равны и их левые части:

$$A_1 a_2 + B_1 b_2 + C_1 c_2 + \dots = A_2 a_1 + B_2 b_1 + C_2 c_1 + \dots \quad (198).$$

Следовательно, работа обобщенных сил одного состояния системы на соответствующих координатах другого равна работе сил второго состояния на координатах первого.

**3. Исключение внутренних сил.** Разобьем все силы системы на внешние и внутренние. Внешние силы, нагрузки и реакции, деформируя систему, вызывают работу внутренних сил. Если процесс деформации развивается медленно, сохраняя равновесие между внутренними и внешними силами в каждый данный момент, то имеет место Начало возможных перемещений <sup>1)</sup>:  $T + T_i = 0$ , где  $T$ —работа внешних, а  $T_i$ —работа внутренних сил.

Работа внутренних сил противоположна работе внешних, ибо перемещение точек системы происходит в определенном направлении, а внутренние силы всегда противоположны внешним. Следовательно:  $T - T_i = 0$  или

$$T = T_i,$$

т. е. работа внутренних сил численно равна работе внешних.

Для уравнения взаимности мы составляем работу внешних и внутренних сил, относя к каждой из них соответствующие координаты, и, если обозначим  $\Phi$  внешние силы, а  $U$ —внутренние, то получим:

$$\Phi_1 \phi_2 + U_1 u_2 = \Phi_2 \phi_1 + U_2 u_1 \dots \dots \dots (199).$$

Так как в каждый данный момент работа внутренних сил  $U$  численно равна работе внешних  $\Phi$ , то каждая группа сил и координат должна обладать независимой взаимностью. Следовательно, нет надобности рас-

<sup>1)</sup> Так как в этом случае нет приращения скоростей, то выражение можно рассмотреть также, и как частный случай закона живых сил.



смагивать обе группы сил в совокупности,—достаточно одних только внешних сил.

Это положение можно было бы принять и непосредственно, как следствие молекулярной гипотезы, по которой при всяком циклическом процессе работа внутренних сил из уравнения живых сил исключается.

Исключение внутренних сил из уравнения взаимности иллюстрируется рядом последующих примеров (см. например § 19,8,9). Мы остановимся здесь лишь на примере стержневой фермы. Положим, для простоты, что в первом состоянии фермы груз  $P$  вызывает в каком-нибудь из ее стержней усилие  $S_p$ . Во втором состоянии груз  $Q$ , помещенный в другом месте фермы, в том же стержне дает усилие  $S_q$ . Составим работу внутренних сил I-го состояния, т. е. усилия  $S_p$  на соответствующих перемещениях II состояния, т. е. на удлинении,  $\lambda_q$ , вызванном усилием  $S_q$ .

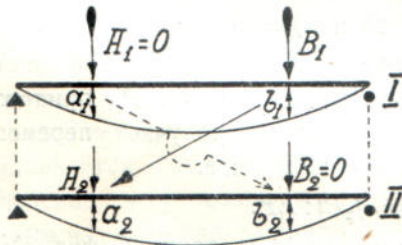
$$\text{Так как } \lambda_q = S_q l : EF, \text{ то работа } T_1 = S_p \frac{S_q l}{EF} = S_p S_q \frac{l}{EF}.$$

Она выражается симметрично относительно  $S_p$  и  $S_q$ , произведение которых умножается только на постоянный множитель  $l : EF$ . Очевидно, работа внутренних сил II-го состояния на перемещении  $\lambda_p$  I-го даст точно такой же результат:

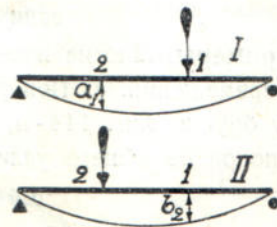
$$T_2 = S_q \cdot \frac{S_p l}{EF} = S_q S_p \frac{l}{EF} = T_1.$$

Следовательно, обе эти работы  $T_1$  и  $T_2$  внутренних сил из выражения (199) исключаются. Это можно сказать про всякий из стержней фермы, а следовательно, и про всю ферму вообще.

**4. Частные случаи.** Рассмотрим случай двух сил  $A_1, B_1$ , и  $A_2, B_2$  и положим (фиг. 142), что в I состоянии одна сила равна нулю, а во II состоя-



Фиг. 142.



Фиг. 143.

нии—другая сила равна нулю, например:  $A_1 = 0$  и  $B_2 = 0$ . Тогда (198) даст:

$$0 + B_1 b_2 = A_2 a_1 + 0 \cdot b_1 \text{ или } B_1 b_2 = A_2 a_1, \text{ откуда } \frac{B_1}{A_2} = \frac{a_1}{b_2}.$$

Если  $A_2 = B_1$ , то  $a_1 = b_2$  . . . . . (200).

По существу описанный частный случай есть установка одного и того-же груза  $A_2 = B_1$  в двух точках одной и той же балки или фермы. Когда груз  $B_1$  стоит в точке 1 (фиг. 143), то в точке 2 возникает перемещение  $a_1$ ; но когда тот же груз поставить в точку 2, то в 1-ой точке получается такое же перемещение  $a_1$ , какое было прежде в точке 2, ибо  $a_1 = b_2$ .



Этот результат описывается следующим образом: если груз  $B_1$  переместить на место  $A_2$ , то перемещение  $a_1$  становится на место  $b_2$ , т. е. при перемещении грузов соответственно меняются места перемещений. Выражаясь фигурально: если груз из точки 1 переместится в точку 2, то бывшее там перемещение  $a_1$  станет на освободившееся место груза 1, или грузы и перемещения взаимно меняются местами. В этом собственно и заключается принцип взаимности перемещений.

**5. Историческая справка.** Это важное свойство упругих систем, на котором основаны многие расчеты из области Строительной механики, было впервые обнаружено Максвеллом в 1864 г. <sup>1)</sup> по отношению к плоским фермам с идеальными шарнирами. В 1872 г. итальянский математик Бетти нашел это свойство в упругом теле, нагруженном произвольными сосредоточенными силами <sup>2)</sup>. В самом общем виде этот принцип был доказан через 2 года в 1874 г. Лордом Рейлей <sup>3)</sup>.

Принцип взаимности перемещений представляет дальнейшее развитие Начала возможных перемещений. Благодаря симметричности выражений для работы внутренних сил, они исключаются из выражения принципа. Последний таким образом составляется из одних только внешних сил и потому получает исключительно важное практическое значение.

**6. Следствие.** Из предыдущего раздела 4 непосредственно вытекает, что если одна обобщенная сила  $A$  не вызывает координаты, соответствующей другой силе  $B$ , то и обратно: сила  $B$  не будет вызывать координаты, соответствующей силе  $A$ . Если координаты обозначить буквами, одноименными с соответствующими им силами, и снабдить значками, указывающими, какая сила вызвала эту координату, то эти положения запишутся в форме:

$$\text{если } A = B, \text{ то } b_A = a_B \dots \dots \dots (200 - \text{bis})$$

$$\text{если } b_A = 0, \text{ то и } a_B = 0.$$

**7. Примеры.** Многие известные примеры иллюстрируют принцип взаимности перемещений. а) При растяжении бруска грузом  $P_1$ , приложенным к концу бруска фиг. 144-а, середина бруска  $C$  получает перемещение, равное половине общего удлинения  $\lambda = Pl : EF$ , т. е.

$$\Delta AC = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}Pl : EF.$$

Но переместим груз  $P$  на середину бруска, в точку  $C$  фиг. б); тогда окажется, что конец  $B$  бруска переместится на

$$\Delta AB = P \cdot \frac{1}{2}l : EF = \frac{1}{2}Pl : EF,$$

т. е. настолько, насколько в первом состоянии переместилась середина бруска.

<sup>1)</sup> Clerk Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffnes of frames (Philosophical Magazine, t. XXVII, 1864, p. 294).

<sup>2)</sup> Betti. Teoria del Elasticità, 1872, или: Il nuovo Cimento. Serie 2, том 7 и 8 за 1872 г.

<sup>3)</sup> Lord Rayleigh. Scientific Papers, том I, стр. 179.

Новейшим математическим обобщениям этого принципа посвящена книга M. Bertrand de Fontviolant: Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. Paris, 1920.



б) При изгибе консоли грузом  $P$ , приложенным к концу, по фиг. 145-а, из уравнения упругой линии:  $6EJy = -Pl^3 \left( 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right)$ . . . (201)

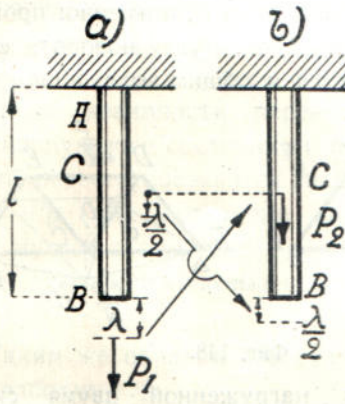
находим для середины балки  $C$   
 прогиб:  $c_1 = \frac{Pl^3}{6EJ} \left( 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$ .

Если тот же груз  $P$  поместить посередине консоли  $C$  фиг. б, то прогиб конца консоли окажется

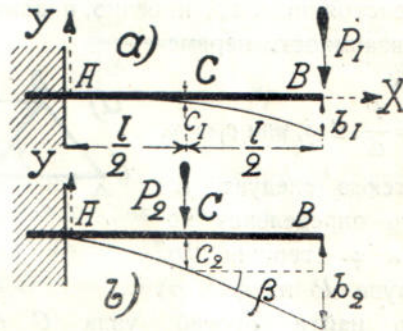
$$b_2 = c_2 + \frac{1}{2} l \theta^2 = \frac{P(l/2)^3}{3EJ} + \frac{l}{2} \frac{P(l/2)^2}{2EJ} = \frac{Pl^3}{24EJ} + \frac{Pl^3}{16EJ} = \frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

т. е. при перемещении груза  $P$  с конца на середину балки прогиб с середины перемещается на ее конец.

с) Так как множители работы могут иметь более общее значение, то взаимность не ограничивается только переменою мест у деформаций, она отражается в соответствующих случаях и на изменении природы деформаций.



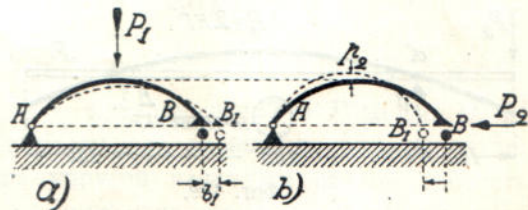
Фиг. 144.



Фиг. 145.

Если обобщенная сила, изменяя свое положение в системе, вместе с тем претерпевает какое-нибудь преобразование, то и соответствующая ей координата также должна соответственно преобразоваться, например

если сила меняет направление, то изменяется соответственно направление и у координаты, если сила из груза превращается в момент, то координата из поступательного перемещения должна превратиться в соответствующий угол поворота. Так,



Фиг. 146.

если вертикальная сила  $P_1$  фиг. 146-а) перемещает конец кривой балки  $B$  вправо на  $b_1$ , то такая же горизонтальная сила  $P_2$  (фиг. б) подымет середину балки вверх на  $p_2 = b_1$ .

Другой пример представляет балка на двух опорах, нагруженная по середине грузом  $P = 1$  (фиг. 147-а). У опоры  $A$  такая балка поворачивается на угол  $\alpha = \frac{Pl^2}{16EJ} = \frac{1 \cdot l^2}{16EJ}$ .



Но если груз 1 переместить от середины к концу балки и по пути преобразовать в момент  $M=1$ , то окажется, что численная величина угла  $\alpha = \frac{1 \cdot l^2}{16EJ}$  от левого конца балки переместится на середину и превратится в прогиб; действительно на фиг. б)

$$y = \frac{Ml^2}{16EJ} = \frac{1 \cdot l^2}{16EJ}$$

д) Рассмотрим ферму из стержней. Если нагрузить ферму фиг. 148-а) грузом  $P$  в узле  $C$ , то какой-нибудь стержень  $DC$  повернется на угол  $\varphi$ .

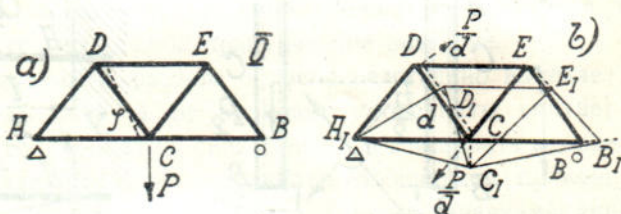
Но если ту же ферму нагрузить вместо силы  $P$  моментом  $M$ , численно равным  $P$ , приложенным к стержню  $DC$  (фиг. б), то угол поворота  $\varphi$  станет на место прогиба узла  $C$ , а именно: прогиб  $c_1$

узла  $C$  во втором состоянии фермы численно равен углу поворота  $\varphi$  первого состояния. Это, конечно, подтверждается и общим выражением принципа взаимности перемещений:

$$Pc_1 = \frac{P}{d} \cdot d \cdot \varphi, \text{ или } c_1 = \varphi.$$

Отсюда следует, что вместо определения поворота  $\varphi$  стержня  $DC$  от груза  $P$  на фиг. а)

можно найти прогиб узла  $C$  фермы нагруженной двумя силами  $\frac{P}{d}$ , приложенными в  $D$  и  $C$  фигуры б).



Фиг. 148.

8. Задачи. 1) Стальная двухконсольная балка фиг. 149 (модуль  $E=2,1 \cdot 10^6$  кг./см.<sup>2</sup>) нагружается два раза: один раз силой  $P_1=2$  кг., приложенной посередине,



Фиг. 149.

причем измеряется угол поворота  $\alpha$ ; в другой раз груз  $P_2=2$  кг. прикладывается на конце консоли, т. е. на расстоянии 1 м. от опоры, причем измеряется прогиб  $f$  посередине балки. Пользуясь формулами § 1,4 показать, что здесь оправдывается принцип взаимности.

2) На той же балке один раз кладут груз  $P_1=2$  кг. в точке  $F$  на расстоянии 50 см. от опоры  $B$  и наблюдают угол поворота у опоры  $B$  ( $\beta=0,0127$ ). В другой раз в том же месте  $F$  кладут груз  $P_2=4$  кг. и измеряют прогиб  $f$  под грузом  $P_2$  ( $f=15,9$  мм).

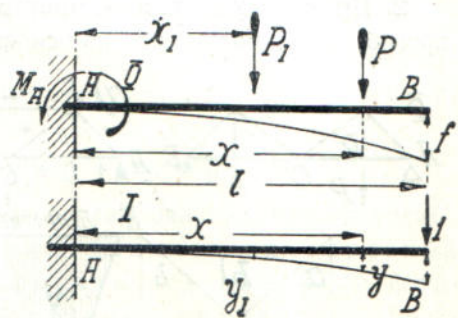
Показать, что в данном случае оправдывается принцип взаимности перемещений.



**§ 17. Приложение принципа взаимности перемещений.** Принцип взаимности перемещений представляет зависимость между внешними силами и деформациями. Поэтому им можно воспользоваться для определения деформации, если известны силы, или для определения неизвестных сил по данным деформациям.

Определение деформаций.

**1. Прогиб балки.** Положим, требуется определить прогиб конца консоли, вызванный грузом  $P$ , находящимся на расстоянии  $x$  от опоры. Будем считать это действительное состояние системы нулевым, а прогиб под концом консоли обозначим  $f$ . Рассмотрим другое, воображаемое состояние системы, когда в том месте, где находится искомый прогиб предыдущего состояния, помещена сила 1. Обозначим это воображаемое состояние номером 1. Составим теперь выражение принципа взаимности перемещений. Из сил нулевого состояния и перемещений первого составит лишь один член:  $Py$ , ибо остальные внешние силы нулевого состояния: реакция  $A$  и реактивный момент  $M_A$  встречают в 1-ом состоянии нулевые перемещения и не дают работы:



Фиг. 150.

$$A \cdot 0 + M_A \cdot 0 = 0.$$

Таким же образом для сил 1-го и перемещений 0-го состояния получим работу:  $1 \cdot f$ .

Приравнявая их, найдем:

$$1 \cdot f = Py, \text{ или } f = Py \dots \dots \dots (202),$$

т. е.: прогиб конца балки определяется прогибом сечения  $x$  от единичного груза, стоящего на конце балки. Этот прогиб, очевидно, определится из соответствующего уравнения упругой линии (201):

$$y = -\frac{1 \cdot l^3}{6EJ} \left( 3 \frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right), \text{ где } P = 1.$$

Очевидно также, что изменяя  $x$ , т. е. перемещая груз  $P$  на фиг. 0, мы будем получать прогибы конца консоли для разных положений груза. Каждому сечению  $x$  из уравнения упругой линии мы найдем соответствующее  $y$ , т. е. ту ординату  $y$ , которую надо умножить на находящийся над ней в действительности груз  $P$ , чтобы получить прогиб конца балки по формуле (202). Если бы на балке было несколько грузов:

- $P_1$  на расстоянии  $x_1$
- $P_2$  " " "  $x_2$
- $P_3$  " " "  $x_3$

то на конце балки каждый из них вызвал бы соответствующий прогиб:  $y_1, y_2, y_3 \dots$ ; Очевидно, суммарный прогиб конца балки:

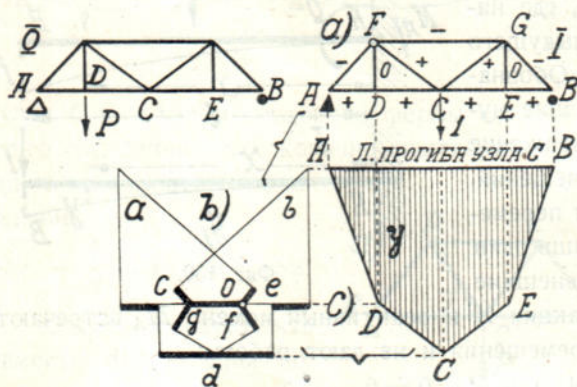
$$f = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = \Sigma Py.$$



Таким образом, каждая ордината упругой линии фиг. 1 есть прогиб конца консоли, вызванный грузом  $P=1$ , находящимся над этой ординатой. Следовательно: упругая линия фиг. 1 есть линия влияния для прогиба на конце консоли.

Рассуждение, приведенное здесь для консоли, можно буквально повторить для какой угодно балки. Поэтому вообще можно сказать, что для построения линии влияния прогиба в каком-нибудь сечении балки надо поместить в этом сечении груз единицу и построить упругую линию для балки; она и представит искомую линию влияния прогиба в данном сечении.

**2. Прогиб стержневой фермы.** Для фермы без лишних стержней прогиб также получается на основании принципа взаимности перемещений.



Фиг. 151.

Положим, что требуется найти прогиб с среднего узла  $C$  нижнего пояса фермы фиг. 151, нагруженной грузом  $P$ . Это действительное состояние системы, заданное для расчета, будем называть нулевым. Кроме него, рассмотрим другое состояние, когда в узле  $C$  приложен груз единица (фиг.  $a$ ); назовем это состояние первым воображаемым или фиктивным.

Применим к этим двум состояниям принцип взаимности перемещений.

В нулевом состоянии надо взять все внешние силы, а именно: груз  $P$  и реакции опор  $A$  и  $B$ . Из воображаемого состояния берем соответствующие перемещения: проекцию перемещения узла  $D$  на направление груза  $P$  — назовем это перемещение  $y$ ; заметим, что перемещение опор в I состоянии не дает работы на реакциях 0-го состояния. В результате левая часть выражения окажется:

$$Py + A \cdot 0 + B \cdot 0 = Py.$$

Аналогично, во второй части равенства будем считаться с грузом 1 из I-го состояния и перемещением  $c$  узла  $C$  из 0-го состояния, т. е. напишем:

$$1 \cdot c + A_1 \cdot 0 + B_1 \cdot 0 = 1 \cdot c.$$

Приравнявая, получаем:

$$1 \cdot c = Py, \text{ откуда } c = Py.$$

Следовательно, чтобы определить прогиб узла  $C$ , надо груз  $P$  умножить на вертикальную составляющую перемещения узла  $D$ , взятого из фиктивного состояния фермы I. Если бы груз  $P$  в действительности был в узле  $E$ , то мы пришли бы к такому же заключению: необходимо груз умножить на вертикальную составляющую перемещения узла  $E$ , взятую из фигуры I.



Вообще, каждый груз, расположенный на ферме в действительности, надо умножать на прогиб обремененного им узла, но брать этот прогиб из воображаемого состояния I.

Чтобы иметь в распоряжении необходимые перемещения фермы I, нагруженной силой 1 в узле  $C$ , надо построить эпюру прогибов, пользуясь диаграммой Виллио или фиктивными грузами, как указывалось в § 9.

На фиг. 151 построена диаграмма Виллио и эпюра прогибов нижнего, нагруженного пояса фермы; ординату эпюры, взятую под узлом  $D$  нижнего пояса, следует умножить на груз, находящийся в этом узле; тогда получится искомый прогиб узла  $C$ :

$$c = Py.$$

Если на ферме несколько грузов  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , то каждый из них умножается на ординату эпюры прогибов, находящуюся под грузом. Прогиб, вызванный совокупностью грузов

$$c = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = \Sigma P y \dots (203).$$

Очевидно, эпюра прогибов фиг. 151-с) есть линия влияния для прогиба узла  $C$ .

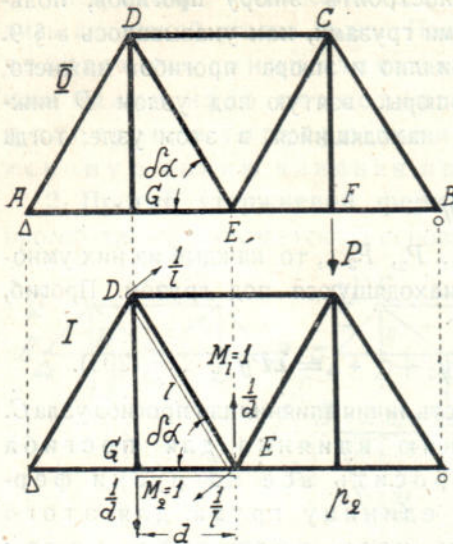
Итак, чтобы построить линию влияния для прогиба данного узла фермы, надо отбросить все нагрузки фермы и в данном узле поместить единицу груза; для этого фиктивного состояния фермы надо построить эпюру прогибов применительно к нагруженному поясу фермы. Это и будет искомая линия влияния.

Общность этих двух примеров очевидна; не трудно также видеть, что правило для фермы буквально получается из правила для балки и требует лишь замены одного слова: «балка»—«фермой». Вообще, для разыскания любой деформации упругой системы, отбрасывают данную нагрузку, а на месте искомой деформации прикладывают единицу обобщенной силы, соответствующей этой деформации, и определяют эпюру для всей системы: эпюра представит линию влияния для искомой деформации в данном месте системы. По ней, как известно, вычисляется эффект, производимый любой нагрузкой, как неподвижной, так и подвижной. Применим правило в такой общей форме к определению изменения углов в треугольниках стержневой фермы (сравн. § 9<sub>1</sub>).

**3. Изменение углов между стержнями фермы.** Уже говорилось о значении этой задачи (см. § 9<sub>1</sub>, а также Введение) для вычисления прогибов и учета влияния жесткости узлов. Покажем, как можно найти изменение угла между двумя стержнями фермы при любой нагрузке, пользуясь принципом взаимности перемещений. Если на ферме фиг. 152—0, нагруженной силою  $P$ , происходит изменение угла  $\delta\alpha$  между стержнями  $DE$  и  $EG$ , то, для разыскания величины этого изменения, надо рассмотреть ферму фиг. I, к стержням которой  $DE$  и  $EG$  приложены противоположные пары  $M_1$  и  $M_2$ . Принимая численную величину каждой пары 1, т. е. прикладывая к концам стержня  $DE$  перпендикулярные силы  $\frac{1}{l}$  и к концам



стержня  $EG$  — силы  $\frac{1}{d}$ , определим деформацию фермы при такой фиктивной нагрузке, например, путем построения диаграммы Виллио. Из последней найдется прогиб  $y$  под данным грузом  $P$ . Этот прогиб и представит искомое изменение угла  $DEG$ , а линия прогибов даст линию влияния для этого изменения. Действительно, принцип взаимности перемещений дает



Фиг. 152.

$P_y = M \delta \alpha = 1 \cdot \delta \alpha$  (см. форм. 189).  
Здесь осуществлен прием построения линии прогибов вместо изменения углов (см. § 16,7а).

Таким образом, принцип взаимности перемещений указывает общий путь решения задач о тех деформациях, определение которых затруднительно: вместо них мы можем определять другие, более для нас удобные в том или ином отношении, например, вместо изменения углов — определять прогибы. Прием заключается в подборе соответствующих обобщенных

сил для искомой деформации и в рассмотрении фиктивного состояния под действием единицы такой обобщенной силы. Можно показать, что способ построения прогибов § 9 представляет лишь иную форму изложенного здесь общего приема.

Определение лишних неизвестных.

**4. Лишняя реакция балки.** Рассмотрим простой случай балки на 3 опорах, нагруженной сосредоточенным грузом  $P$  (фиг. 153—0). Будем считать лишней среднюю опору  $B$ . Действительное состояние балки, когда на ней находится груз  $P$ , уравниваемый реакциями  $A, B, C$ , примем за 0-ое состояние. В качестве I-го, фиктивного, примем балку, освобожденную от лишней опоры и нагруженную единицей вместо лишней реакции. Пусть прогибы балки последнего состояния —  $b_1$  и  $y$ .

Условия задачи здесь таковы:

в 0-м состоянии имеются	силы	перемещения
	$P, A, B, C$	$p, a = 0, b = 0, c = 0$
в I-м состоянии	$0 \quad A_1 \quad 1 \quad C_1$	$y \quad a_1 = 0 \quad b_1 \quad c_1 = 0.$

Составляя работу сил 0-го состояния на перемещениях I-го и обратно, получим:

$$-Py + A \cdot 0 + Bb_1 + C \cdot 0 = 1 \cdot 0 + A_1 \cdot 0 + C_1 \cdot 0;$$

$$\text{или } Bb_1 = Py, \text{ откуда } B = P \frac{y}{b_1} \dots (204).$$



Здесь искомая реакция, по прежнему, определяется упругой линией фиктивного состояния I: из нее мы берем прогиб  $y$  под грузом, находящимся на балке в действительности, и прогиб  $b_1$  — под лишней опорой.

Разделивши один прогиб на другой, найдем число

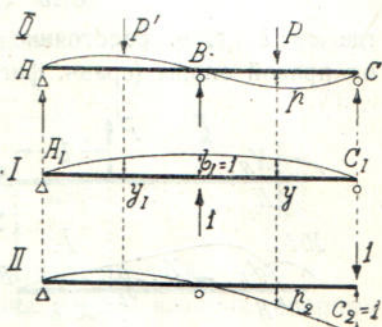
$$\frac{y}{b_1} \dots \dots \dots (205),$$

представляющее реакцию лишней опоры от груза  $P = 1$ , ибо произведение этого числа на  $P$  дает величину реакции, от груза  $P$ .

При каком-нибудь другом положении груза  $P'$  (см. фиг. 153—0) придется ординату  $y_1$  делить также на  $b_1^1$ ). Вообще: ординаты упругой линии I, разделенные на постоянное число  $b_1$ , дают величину реакции лишней опоры  $B$ , вызванной грузом, стоящим над ординатой. Если измерять ординаты этой линии масштабом прогиба  $b_1$ , т. е., если принять  $b_1 = 1$ , и перемещать по балке груз  $P = 1$ , как это принято при построении линий влияния, то из форм. (204):

$$B = 1 \cdot \frac{y}{b_1 \text{ при } b_1 = 1} = \frac{y}{1} = y \dots \dots (206).$$

Следовательно, ординаты упругой линии непосредственно дают реакцию лишней опоры при разных положениях груза  $P = 1$ . Очевидно, и в этом случае упругая линия отождествляется с линией влияния для реакции  $B$ .



Фиг. 153.

Итак, чтобы получить линию влияния для лишней реакции, надо балку, освобожденную от соответствующей лишней опоры, нагрузить единицей силы и построить упругую линию. На прогибе под лишней опорой надо написать 1, устанавливая таким образом масштаб, в котором произведено построение.

Приведенное рассуждение целиком можно повторить и в том случае, если бы за лишнюю была принята правая опора  $C$ . Поэтому упругая линия, изображенная на фиг. II, где  $c_2$  под отброшенной опорой принято за единицу, также будет линией влияния для лишней опоры. Вообще, изложенное представляет общий способ построения линий влияния для любой из лишних реакций двухпролетной балки. Этот способ напоминает определение деформаций в системах без лишних связей, рассмотренных в предыдущих разделах этого параграфа; там также вместо искомого мы ставили единицу силы. Разница лишь в том, что здесь, получивши окончательный результат, мы стеснены определенным масштабом — это и есть то дополнительное условие, которое налагается лишней связью системы.

**5. Лишний опорный момент.** В балке, одним концом защемленной и другим опертой, за лишнюю неизвестную примем опорный момент  $M_A$

<sup>1)</sup> Так как величина реакции выражается соотношением ординат, то, очевидно, масштаб построения не влияет на результат.



(фиг. 154—0). В освобожденной балке I назначим вместо него 1. Упругая линия, обусловленная этой 1, по форм. (28), представляется уравнением:

$$y_1 = \frac{Mlx}{6EJ} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \text{ при } M=1 = \frac{lx}{6EJ} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

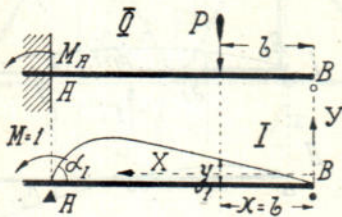
Это и будет линия влияния для опорного момента  $M_A$ , если мы измерим ее ординаты масштабом деформации  $\alpha_1$ , т. е. примем за единицу

$$\alpha_1 = \frac{Ml}{3EJ} = \frac{1 \cdot l}{3EJ}.$$

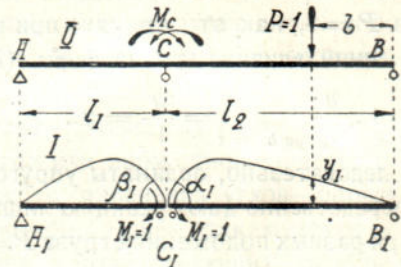
Разделяя правую часть предыдущего равенства на  $\alpha_1$ , получим окончательно уравнение линии влияния в такой форме:

$$y = \frac{y_1}{\alpha_1} = \frac{l \cdot x}{6EJ} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) : \frac{1 \cdot l}{3EJ} = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right). \quad (207),$$

где  $x=b$ , т. е. расстояние груза  $P$  от правой опоры (сравн. фиг. 5).



Фиг. 154.



Фиг. 155.

**6. Опорный момент двухпролетной балки (фиг. 155).** Поместим на балке груз  $P=1$  в расстоянии  $b$  от правой опоры  $B$  и это состояние с неизвестными реакциями будем считать нулевым. Так как мы намечаем себе построение линии влияния для опорного момента  $M_c$ , то его и будем считать за лишнее неизвестное. Чтобы создать во втором состоянии основную балку с обобщенной силой того же типа, что и искомый опорный момент, разрежем балку на опоре  $C$ , как представлено фиг. I, и нагрузим моментами  $M=1$ . Эти два равные и противоположные момента с соответствующими реакциями будут обобщенной силой первого воображаемого состояния системы.

Применим теперь принцип взаимности перемещений. Из нулевого состояния только силам  $P$  и  $M_c$  соответствуют значащие перемещения воображаемого состояния I: грузу  $P$  — прогиб  $y_1$  и опорному моменту  $M_c$  — углы поворота  $\beta_1$  и  $\alpha_1$ , определяемые из уравнения упругой линии простой балки. Соответствующая работа будет:

$$-Py_1 + M_c(\beta_1 + \alpha_1).$$

Из фиктивного состояния I придется взять два равные и противоположные момента  $M_1=1$  и соответствующее перемещение нулевого состояния. Таким перемещением, по (189), должна быть разность поворотов двух совпадающих сечений  $C$  фиг. 0. Так как в действительности балка не разрезывается и ее упругая линия над опорой  $C$  имеет общую кас-



тельную для обоих пролетов, то разность поворотов  $\beta$  и  $\alpha$  равна нулю, и работа

$$M_1 \cdot 0 = 0 \text{ — также равна нулю.}$$

В результате

$$-Py_1 + M_c(\beta_1 + \alpha_1) = 0, \text{ откуда } M_c = P \frac{y_1}{\beta_1 + \alpha_1} \dots (208).$$

Ясно, что упругие линии I-го состояния системы дадут линии влияния для опорного момента  $M_c$ , если их ординаты измерять масштабом:

$$\beta_1 + \alpha_1 = 1.$$

А так как  $\beta_1 = \frac{1 \cdot l_1}{3EJ}$ ,  $\alpha_1 = \frac{1 \cdot l_2}{3EJ}$  . . . . . (209),

$$\beta_1 + \alpha_1 = \frac{l_1 + l_2}{3EJ} \text{ и } y_1 = \frac{1 \cdot l_2 b}{6EJ} \left(1 - \frac{b^2}{l_2^2}\right),$$

то уравнение линии влияния для правого пролета получается в форме:

$$y = \frac{y_1}{\beta_1 + \alpha_1} = \frac{l_2 b \cdot 3EJ}{6EJ(l_1 + l_2)} \left(1 - \frac{b^2}{l_2^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} b \left(1 - \frac{b^2}{l_2^2}\right) \dots (210).$$

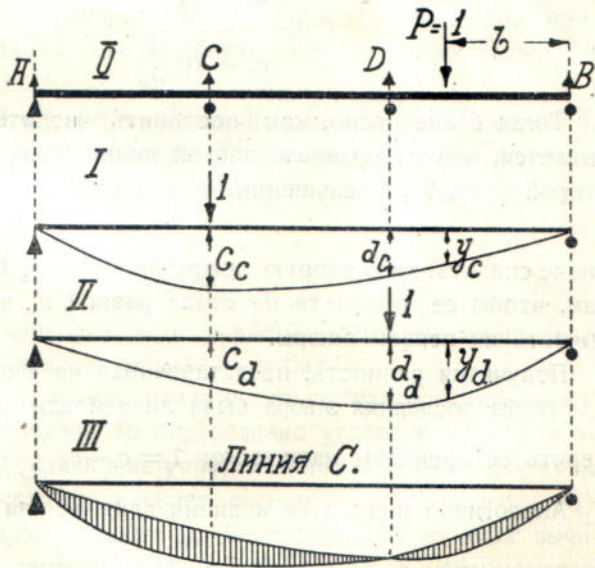
Соответственно для левого пролета

$$y = \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} a \left(1 - \frac{a^2}{l_1^2}\right) \dots (211),$$

где  $a$ —расстояние груза  $P$  от левой опоры левого пролета.

**7. Две лишние реакции.** Для построения линий влияния опорных реакций положим, что на балке 0 находится сосредоточенный груз  $P=1$

и вызванные им реакции  $A, B, C, D$  (фиг. 156). Кроме этого состояния системы рассмотрим еще два фиктивных, освободивши балку от лишних опор: одно, состояние I, когда вместо первой из лишних реакций стоит единица силы, и другое, состояние II, когда единица поставлена вместо другой лишней опоры. В каждом из фиктивных состояний прогибы находятся без затруднений, как для простой балки при одном грузе  $P=1$ , сосредоточенном в определенной точке: либо в  $C$ , либо в  $D$ . Обозначим



Фиг. 156.

прогибы опорных точек  $C$  и  $D$  одноименными малыми буквами  $c$  и  $d$ , только с индексами, указывающими, в каком состоянии системы этот прогиб находится, иначе сказать: какая из лишних реакций принята за еди-



ницу. Так, если единица поставлена вместо  $C$ , то во всех прогибах пишется индекс  $c$ , как сделано на I фигуре, если же за единицу принята реакция  $D$ , то все прогибы  $c$ ,  $d$  и  $y$  снабжаются индексом  $d$ .

Применим теперь принцип взаимности перемещений два раза: каждый раз к действительному нулевому состоянию и одному из фиктивных. Получатся следующие два уравнения:

при сопоставлении 0 и I —

$$Py_c - Cc_c - Dd_c = 1.0 = 0$$

при сопоставлении 0 и II —

$$Py_d - Cc_d - Dd_d = 1.0 = 0 \quad \dots \dots (212),$$

которые переписываются в форме:

$$C c_c + D d_c = P y_c \quad \text{и} \quad C c_d + D d_d = P y_d.$$

Решение этих уравнений дает для неизвестных следующие значения:

$$C = P_{=1} \frac{y_c d_d - y_d d_c}{c_c d_d - c_d d_c} \quad \text{и} \quad D = P_{=1} \frac{c_c y_d - c_d y_c}{c_c d_d - c_d d_c} \quad \dots (213).$$

При построении линий влияния по этим формулам, для каждого положения груза  $P = 1$ , приходится брать из упругих линий ординаты  $y_c$ ,  $y_d$  и составлять числителя дроби, так что, линия строится по точкам. Задачу однако можно упростить и привести линии к обычной форме, если надлежащим образом видоизменить выражения.

Разделим числителя и знаменателя первой дроби на  $d_d$ :

$$C = \frac{y_c - y_d \frac{d_c}{d_d}}{c_c - c_d \frac{d_c}{d_d}} \quad \dots \dots \dots (214).$$

Тогда станет ясно, как построить числитель этого выражения. Оказывается, что из ординат первой линии (фиг. I) надо вычесть ординаты второй (фиг. II), уменьшенные в отношении опорных ординат

$$d_c / d_d;$$

иначе сказать: надо вторую эпюру прогибов II пропорционально сократить так, чтобы ее ордината  $d_d$  стала равной  $d_c$  в первой эпюре I, и тогда вычесть из первой эпюры.

Получится разность, представленная на фиг. III.

Чтобы последняя эпюра была линией влияния для реакции  $C$ , надо измерять ее ординаты масштабом  $1 = c_c - c_d \frac{d_c}{d_d}$ .

Аналогично получится и линия влияния для другой реакции  $D$ :

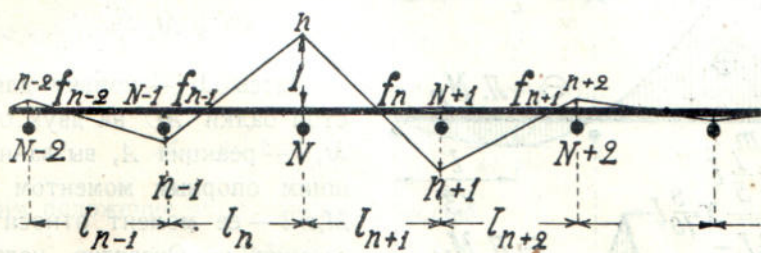
$$D = \frac{y_d - y_c \frac{c_d}{c_c}}{d_d - d_c \frac{c_d}{c_c}}$$

путем перечерчивания первой эпюры I ко второй II так, чтобы в результате оказалась нулевая ордината под опорой  $C$ .



Здесь приводится графическое решение, но конечно, легко получить и уравнение результирующей линии влияния: надо уравнение упругой линии II умножить на  $\frac{d_c}{da}$  и вычесть из уравнения упругой линии состояния I; результат надо разделить на знаменатель формулы (214).

**8. Многопролетная балка.** При большом числе неизвестных задача осложняется и целесообразно пользоваться всеми теми зависимостями, которые уже получены для балок с лишними неизвестными, иначе сказать: отбрасывая лишние неизвестные, не обязательно стремиться к превращению системы в основную, свободную от лишних связей,—нередко вопрос разрешается проще, если превратить систему в такую, хотя и содержащую лишние связи, но более простую, для которой решение уже известно, либо может быть выполнено независимо посредством сравнительно про-



Фиг. 157.

стых операций. При этом приходится решать систему меньшего числа уравнений с меньшим числом неизвестных. Поясним эту мысль на примере построения линии влияния для опорного момента многопролетной балки фиг. 157.

Разрежем балку над  $N$ -ой опорой, как в предыдущем примере раздела б, и приложим здесь две равные и противоположные пары, равные единице. Рассуждение, аналогичное предыдущему, приведет нас к такой же формуле для  $M_n$  (ср. форм. 208).

$$M_n = P \cdot \frac{y_1}{\beta_n + \alpha_{n+1}}.$$

Вопрос таким образом сводится к отысканию упругой линии  $y_1$  и углов поворота  $\beta_n$  и  $\alpha_{n+1}$  для двух неразрезных балок.

Если каждый пролет балки рассматривать отдельно, как простую балку, нагруженную опорными моментами, то определение углов и прогибов не представит затруднений, ибо уравнение упругой линии и готовые формулы для углов поворота уже находятся в нашем распоряжении (см. § 1, 3 и 4), опорные же моменты отдельных пролетов, необходимые для этих вычислений, определяются, как указывалось выше в § 13,2, по данному моменту над  $N$ -ой опорой, равному единице. Впоследствии построению линий влияния для многопролетных балок будет уделено особое внимание<sup>1)</sup>; теперь же

<sup>1)</sup> См. § 24, а также отдельный выпуск: Статически неопределимые балки и рамные системы.



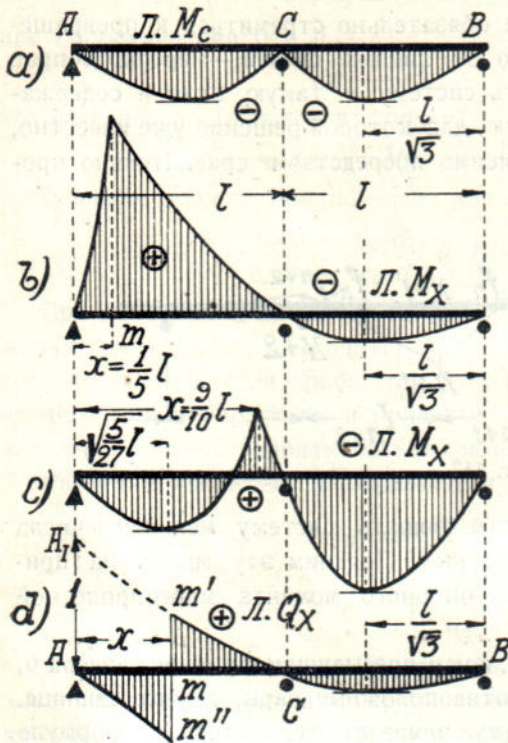
мы ограничиваемся общими указаниями, каким образом сложная задача о многопролетной балке сводится к ряду более простых.

9. **Линии влияния других расчетных величин.** Мы можем получить эти линии на основании принципа сложения действий, так как лишние неизвестные стали уже известными внешними силами. Для примера рассмотрим двухпролетную балку, для которой уже построена линия среднего опорного момента (см. форм. 210 и фиг. 155). Если требуется построить линию изгибающего момента для какого-нибудь сечения  $m$  на расстоянии  $x$  от левой опоры (фиг. 158-б), то, на общих основаниях, составляем момент всех внешних односторонних сил:

$$M_m = M^0 + M_c \frac{x}{l} \dots (215).$$

Здесь  $M^0$  — момент для простой балки  $AC$  на двух опорах,  $M_c/l$  — реакция  $A$ , вызванная лишним опорным моментом  $M_c$ , а  $M_c x/l$  — ее момент относительно сечения  $m$ . Очевидно, надо сложить две линии влияния: 1) для простой балки и 2) линию момента от лишней реактивной силы  $A$ .

Графическое сложение не представляет затруднений, например: для левого пролета мы построим известную треугольную линию  $M_0$  простой балки, затем — криволинейную  $M_c \frac{x}{l}$ , пользуясь го-



Фиг. 158.

товой уже линией  $M_c$  фигуры 158-а, только умножая ее ординаты на постоянное число  $\frac{x}{l}$ , наконец, вычтем площадь второй линии из первой, так как реакция от лишнего момента противоположна реакции от груза  $P$ . Результат вычитания представится фигурой 158-б.

При определении ординат вычислением необходимо рассмотреть два участка, так как выражение для изгибающего момента простой балки изменяется в зависимости от того, где находится груз: слева или справа от рассматриваемого сечения  $m$ .

Для левых грузов, т. е. когда  $P=1$  стоит между  $A$  и  $m$ , момент

$$M_0 = \frac{1 \cdot (l-a)x}{l} - 1 \cdot (x-a) = \frac{1 \cdot a(l-x)}{l},$$

где  $a$  — расстояние груза до левой опоры;



$M_c \frac{x}{l}$ , по уравнению (211) при  $l_1 = l_2$  дает:

$$M_c \frac{x}{l} = \frac{a}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \frac{x}{l}; \dots \dots \dots (216)$$

поэтому

$$M_x = 1 \cdot a \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{ax}{4l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) = a \left(1 - \frac{5}{4} \frac{x}{l}\right) + \frac{x a^3}{4l l^2}.$$

Для правых грузов, т. е. когда  $P = 1$  находится между  $m$  и  $C$  имеем:

$$\begin{aligned} M_x = M_o + M_c \frac{x}{l} &= \frac{1 \cdot (l-a)x}{l} - \frac{a}{4} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \frac{x}{l} = \\ &= \frac{x}{l} \left(l - \frac{5}{4} a + \frac{1}{4} \frac{a^3}{l^2}\right) \dots \dots \dots (217). \end{aligned}$$

Из первого выражения усматривается, что при  $\frac{x}{l} > \frac{4}{5}$  первый член отрицателен, и линия  $M_x$  может иметь нулевую точку. Приравнявая  $M_x$  нулю:

$$M_x = \left(1 - \frac{5}{4} \frac{x}{l}\right) a + \frac{x a^3}{4l l^2} = 0,$$

определим положение этой точки абсциссою

$$a = 2l \sqrt[5]{\frac{4}{5} - l/x} \dots \dots \dots (218).$$

При  $x < \frac{4}{5}l$  нулевой точки нет, и вся линия моментов в левом пролете положительна.

На фиг. *b* и *c* построены две линии  $M$ : одна—для  $x < \frac{4}{5}l$  и другая— для  $x > \frac{4}{5}l$ .

Когда груз  $P = 1$  находится на правом пролете, то слева от сечения  $m$  левого пролета окажется одна только реакция от лишнего момента. Момент ее

$$M_x = \frac{M_c}{l} \cdot x = - \frac{1 \cdot b x}{4l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right) \dots (219); ^1)$$

следовательно, линия влияния в правом пролете представляет перечерченную линию  $M_c$  фиг. *a*) с соответственно уменьшенными ординатами.

Таким же образом строится и линия реакции и линия поперечной силы. Реакция  $A^0$  простой балки при расположении груза  $P = 1$  в левом пролете:

$$A^0 = \frac{1(l-a)}{l}.$$

Реакция от лишнего момента

$$A^M = \frac{M_c}{l} = - \frac{1 \cdot a}{4l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R = A^0 + A^M &= 1 \left(1 - \frac{a}{l}\right) - \frac{1 \cdot a}{4l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) = \\ &= 1 - \frac{5}{4} \frac{a}{l} + \frac{1a a^2}{4l l^2} \dots \dots \dots (220). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Здесь  $b$  отсчитывается от правой опоры  $B$ , влево.



При нахождении груза в правом пролете имеем только

$$R = \frac{M_c}{l} = -\frac{1 \cdot a}{4l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots \dots (221).$$

По этим уравнениям построена линия  $A_1 C B$  на фиг. *d*).

Поперечная сила в сечении  $m$  левого пролета выражается реакцией  $R$ , пока груз  $P$  находится справа от сечения  $m$ . Поэтому линия влияния  $Q_x$  на участке  $mC$  строится по уравнению (220). Когда же груз  $P$  перейдет на участок между  $A$  и  $m$ , то

$$Q_x = R - 1 = -\left(\frac{5}{4} \frac{a}{l} - \frac{1}{4} \frac{a}{l} \frac{a^2}{l^2}\right) \dots \dots (222);$$

из ординат линии  $A_1 m'$  здесь надо вычитать единицу, т. е. надо провести внизу, под осью, линию  $A m''$ , равноудаленную от  $A_1 m'$ .

**10. Задачи.** а) Пользуясь принципом взаимности перемещений, определить реакцию опоры  $A$  крана, изображенного на фиг. 110 (см. задачу *c*) в § 10, *b*).

б) Построить линию влияния для угла поворота на конце консоли фиг. 4.

с) Построить линию влияния прогиба по середине простой балки на 2 опорах (например, фиг. 3).

д) Определить угол поворота конца консоли от равномерно распределенной нагрузки  $q$ , пользуясь линией влияния, построенной в задаче б).

е) Построить линию влияния опорной реакции для балки, одним концом защемленной и другим опертой (тип фиг. 97).

ф) Построить линию влияния для опорного момента двухпролетной балки с одним защемленным концом (тип фиг. 129).

г) Построить линию влияния изгибающего момента в каком-нибудь сечении консоли (фиг. 4).

h) Построить линии влияния для поперечной силы и изгибающего момента в каком-нибудь сечении балки с одним защемленным и другим опертым концом (тип фиг. 97).

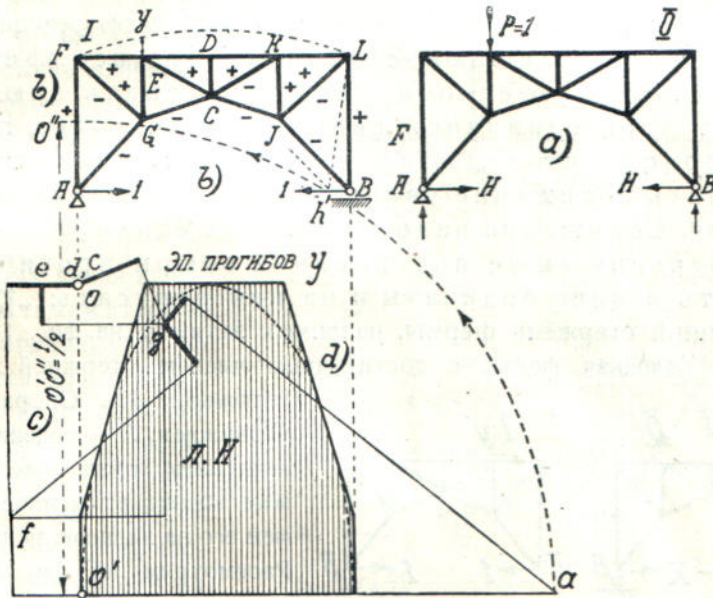
**§ 18. Приложение принципа взаимности к расчету ферм. 1. Линия влияния распора** двухшарнирной арки. Реактивные силы всякой фермы, опирающейся на два неподвижных шарнира, определяются одинаково, на основании следующих соображений. В неподвижном шарнире реакция может быть любого направления, и, раскладывая ее на две составляющие, мы получаем при двух опорах всего 4 неизвестных. Одно из них всегда будет лишним.

Условимся разлагать реактивную силу на горизонтальную и вертикальную составляющие; тогда при вертикальной нагрузке и двух опорах мы будем иметь только 2 горизонтальных внешних силы — составляющие реакций  $A$  и  $B$ . Называя их  $H_A$  и  $H_B$  и приравнявая нулю сумму горизонтальных проекций всех внешних сил фермы, найдем  $H_A + H_B = 0$ , или  $H_A = -H_B$ , — т. е. что обе опоры  $A$  и  $B$  имеют одинаковый горизонтальный распор. Обозначим его  $H$  и примем за лишнюю неизвестную силу.



Как и прежде, отбросим лишнюю связь, т. е. одну из опор, например, правую на фиг. 159, превратим в подвижную; вместо отпора  $H$  приложим горизонтальную единицу силы (фиг.  $b$ ). Конечно, для этого I-го фиктивного состояния мы без затруднения определим прогибы во всех узлах фермы. На фиг.  $c$ ) и  $d$ ) эпюра прогибов получена путем построения диаграммы Виллио; она показана штрихами.

В действительном, 0-ом состоянии фермы  $a$ ) мы имеем груз  $P=1$  и реакции опор  $A$  и  $B$ . Вертикальным составляющим реакций этого состоя-



Фиг. 159.

ния соответствуют в I-ом состоянии нулевые перемещения; они не дадут работы, и остается лишь работа груза  $P$  на перемещении  $y$ .

Благодаря принятому здесь действию распора 1 внутрь, верхний пояс фермы выпучится кверху, и работа  $Pu$  окажется отрицательной. Однако, для однообразия действий, чтобы при пользовании формулами и при постановке в них частных значений понимать буквы в алгебраическом смысле, мы и здесь сохраним знак плюс.

Горизонтальному отпору  $H$  нулевого состояния соответствует в первом фиктивном состоянии сближение опор  $A$  и  $B$ ; поэтому, обозначая сближение  $h$ , получим работу  $Hh$ .

Первая часть принципа взаимности перемещений будет:  $Hh + Pu$ .

В другой части оказывается нуль, ибо единице отпора I-го состояния соответствует нулевое перемещение 0-го состояния. Окончательно имеем:

$$Hh + Pu = 0, \text{ откуда } H = -P \frac{y}{h} \dots \dots \dots (223).$$

Таким образом, как и в предыдущих примерах, если сближение опор  $h$  там, где была лишняя связь, принять за единицу, то эпюра прогибов

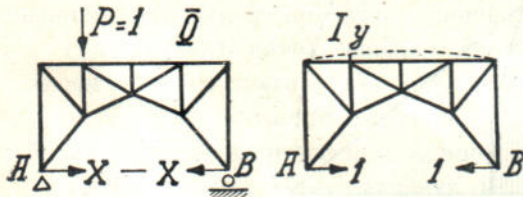


фермы I-го фиктивного состояния будет линией влияния для реакции этой лишней связи; оказывается, что надо построить эпюру прогибов для I-го фиктивного состояния и измерить прогибы масштабом  $h = 1$ .

На фиг. с) горизонтальное сближение опор  $h$  определяется горизонтальной проекцией  $O'a$  вектора  $Oa$ : эта проекция составляет половину сближения; следовательно, поворачивая  $O'a$  в вертикальное положение  $O'O''$  и помещая на ординате  $O'O''$  размер: „ $1/2$ “, мы тем самым линию прогибов превращаем в линию влияния для горизонтального распора.

Отсюда вытекает следующее правило для построения линии влияния распора, правило, легко обобщаемое на всякую лишнюю реакцию фермы: надо отбросить лишнюю связь и вместо нее приложить соответствующую единицу; надо построить эпюру прогибов от этой единичной силы для того пояса, по которому происходит езда; по направлению единицы надо определить сближение узлов фермы, обремененных этой единицей. Сближение надо принять за единицу масштаба для измерения выше построенной эпюры прогибов, т. е. отложить в виде ординаты и на ней написать: „1“.

2. Лишний стержень фермы, например, затяжка на фиг. 160. Положим, что балочная ферма с достаточным числом стержней снабжена затяжкой  $AB$ . Опора  $A$  — неподвижная,  $B$  — подвижная. Под давлением груза  $P = 1$  в затяжке возникает усилие  $X$ ; примем его за лишнюю неизвестную. Рассмотрим на фиг. 1 другое состояние системы, где вместо  $X$  приложена 1. Работа сил 0-го



Фиг. 160.

состояния на перемещениях I-го дает совершенно тот же результат:

$$Xh + Py.$$

Но силам 1 фиктивного состояния уже не будет соответствовать нулевое перемещение неподвижных опор действительного состояния, как было на фиг. 159, ибо узлы  $A$  и  $B$  связаны теперь упругой затяжкой. Очевидно, истинное сближение узлов  $A$  и  $B$  0-го состояния равно удлинению затяжки:

$$\lambda = \frac{Xl}{EF}.$$

При удлинении затяжки перемещение узлов идет против единичной силы I-го состояния; поэтому работу надо считать отрицательной

$$-1\lambda = -1 \cdot \frac{Xl}{XF} \dots \dots \dots (224).$$

Условимся течение единичной силы фиктивного состояния всегда брать по течению лишней неизвестной  $X$ ; тогда во всех случаях, как при сжатии, так и при растяжении, у знака последней работы будет получаться минус.



Составляя теперь принцип взаимности перемещений, найдем:

$$Xh + Py = -1 \frac{Xl}{EF},$$

откуда

$$X = -P \frac{y}{h + \frac{1 \cdot l}{EF}} \dots \dots \dots (225).$$

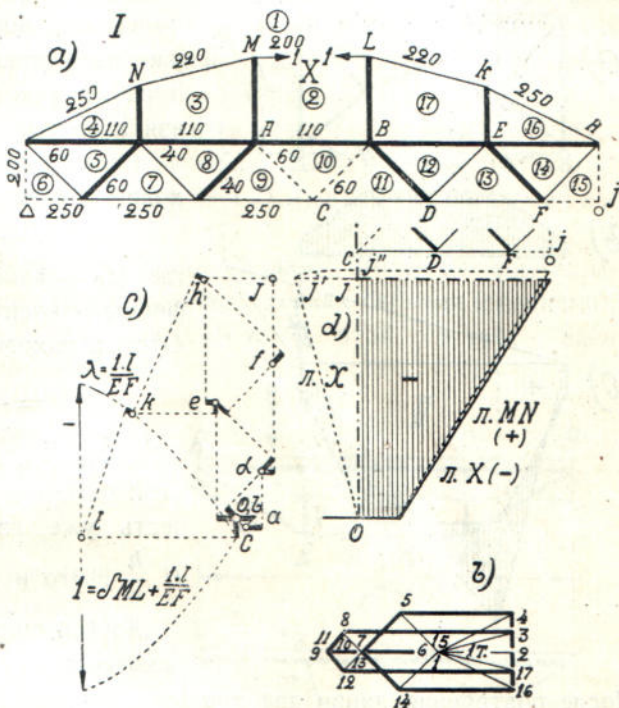
Сравнивая это выражение с формулой (223), мы непосредственно замечаем, что отличие находится лишь в знаменателе и состоит в том, что к сближению  $h$  концов хорды основной фермы, где приложена единица, прибавляется упругое удлинение хорды от этой единицы

$$\lambda_1 = \frac{1 \cdot l}{EF}.$$

Поэтому линия влияния для затяжки строится как предыдущая, но измеряется другим масштабом. Если прежний масштаб  $h$  мы назвали бы фигурально „жестким“, то теперь мы должны применить „упругий масштаб“, а именно,—ту же хорду  $h$ , получившую дополнительное удлинение от единичной силы затяжки.

По этому правилу построена линия влияния для среднего элемента верхнего пояса мостовой фермы фиг. 161. Расстояние  $Ol$  фигуры  $c)$  представляет половину приращения хорды  $ML$  фигуры  $a)$ . Описывая на фиг.  $c)$  вокруг точки  $l$ , вверх и вниз, дуги радиусом, равным проекции  $Ol$ , получаем „жесткую единицу“ для измерения эпюры фигуры  $d)$ ; если же к этой единице прибавим удлинение  $\frac{1 \cdot l}{EF}$ , где  $l$  — длина лишнего стержня  $ML$ , то получится необходимый „упругий масштаб“.

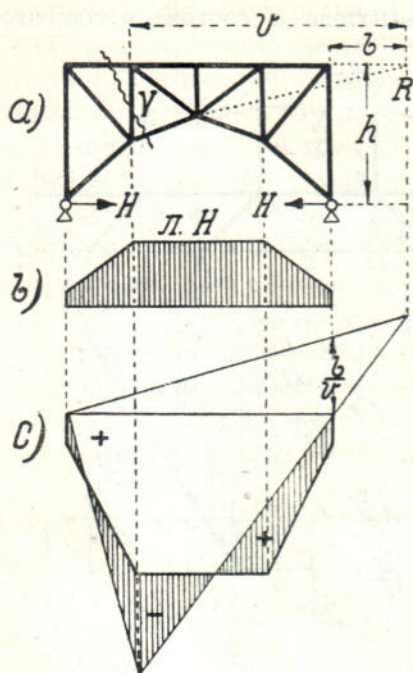
Как видно, упругий масштаб мало отличается от жесткого, так что при обычных длинах и сечениях стержней, для приближенных расчетов, можно пользоваться „жестким масштабом“. Погрешность оказывается ощутительной только при длинных лишних стержнях и ничтожной их жесткости.



Фиг. 161.



3. **Линии влияния для прочих стержней фермы.** Когда построена линия влияния для лишней связи, то построение для необходимых реакций, и стержней основной фермы не представляет затруднений. Действительно, теперь лишняя сила уже стала известной, и ее можно причислить к разряду тех связей, которые вообще не препятствуют построению последующих линий в простых фермах. Составляя в таких случаях уравнение Статики для какого-нибудь стержня основной фермы, мы получаем, кроме внешних сил, еще и член, зависящий от лишней связи. Результат получается путем сложения линий влияния<sup>1)</sup>.



Фиг. 162.

После построения линии для лишнего стержня  $ML$ , заштрихованной на фиг.  $d$ ), ее максимальная ордината разложена на две составляющие по перпендикулярам к стержням  $MA$  и  $MN$ . Это равнозначно с разложением лишнего неизвестного  $X$  в узле  $M$  фиг.  $a$ ) на направления  $MA$  и  $MN$ . Поворачивая на фиг.  $d$ ) отрезок  $OJ'$  вокруг  $O$  в положение  $OJ''$ , получаем ординату для линии влияния  $MN$ ; контур этой линии на правой половине фермы очерчен пунктиром.

Проще однако пользоваться принципом сложения линий влияния в иной форме.

Выражение для усилия в каком-нибудь стержне  $S$  основной фермы, нагруженной грузом  $P=1$  и лишним неизвестным  $X$ , составляется: 1) из усилия от груза  $P=1$  и 2) из усилия от лишнего неизвестного  $X$ . Первое усилие  $S_0$  изменяется в зависимости от положения груза в пролете и представляется линией влияния для стержня  $S$ , построенного для

получается путем сложения линий влияния<sup>1)</sup>.

Положим, что на фиг. 162 требуется построить линию  $V$  для фермы, которая уже разобрана на фиг. 159. Линия распора  $H$  уже построена на фиг.  $b$  (она взята из фиг. 159).

Сделавши сечение через  $V$ , мы приходим к следующему уравнению:

$$M_R - Hh + Vv = 0,$$

где  $M_R$  — момент внешних сил основной фермы относительно точки Риттера  $R$ . Отсюда находим:

$$V = - \left( \frac{M_R}{v} - \frac{Hh}{v} \right).$$

Очевидно, из линии для стойки простой балочной фермы  $M_R : v$ , надо вычесть уже известную линию распора  $H \frac{h}{v}$ . Это и выполнено на фиг.  $c$ ).

Другой пример построения линии для основного стержня приведен на фиг. 161.

<sup>1)</sup> См. Системы без лишних стержней § 52.



основной системы без лишних связей. Второе усилие можно представить себе, как усилие в том же стержне  $S$ , вызванное единицей, приложенной вместо лишнего неизвестного, и умноженное на  $X$ , т. е. на величину лишнего неизвестного. Усилие от единицы—постоянно и определяется из обычной диаграммы основной фермы, — мы называем его  $S_1$ ; лишнее же неизвестное изменяется в зависимости от положения груза в пролете и определяется уже построенною для него линиею влияния  $X$ . Очевидно:

$$S = S_0 + S_1 \cdot X.$$

Следовательно, чтобы получить линию влияния для стержня основной фермы, надо: 1) построить для него обычную линию влияния  $S_0$  при отсутствии лишнего неизвестного, 2) надо построить линию влияния  $X$  для самого лишнего неизвестного и умножить ее ординаты на усилие  $S_1$ , получающееся в стержне при единице вместо лишнего неизвестного. Наконец, обе линии 1) и 2) надо алгебраически сложить.

**4. Линия влияния для шпренгельной балки.** Шпренгельной называется балка, поддержанная в промежуточных точках бабками (стойками), подтянутыми посредством струн фиг. 163. В этой системе — один лишний стержень; действительно, каждый из шарниров  $E$  и  $F$  прикреплен к балке  $AB$  посредством двух стержней, а стержень  $EF$  оказывается лишним. Его усилие надо принять за лишнее неизвестное  $X$ .

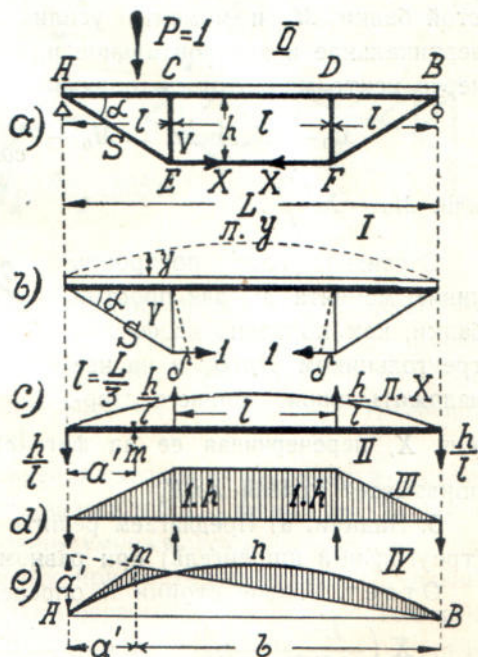
В 1-ом воображаемом состоянии вместо  $X$  поместим 1 и найдем соответствующие перемещения:  $y$  — против груза  $P$  и приращение  $\delta$  хорды, соединяющей освобожденные от связи узлы  $E$  и  $F$ , теперь нагруженные единицей. Тогда принцип взаимности перемещений напишется в форме:

$$Py + X\delta = -1 \cdot \frac{Xl}{EF};$$

откуда: 
$$X = -P \frac{y}{\delta + \frac{1 \cdot l}{EF}}$$
 — со-

вершенно такое же выражение как в предыдущем примере (225).

Эпюра прогибов— $y$  определяется уравнением упругой линии для балки  $AB$ , нагруженной симметрично двумя сосредоточенными силами  $EC$  и  $FD$ . Мы без затруднения получим это уравнение руководствуясь § 3,



Фиг. 163.



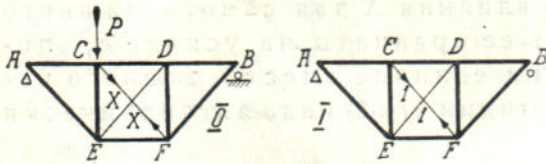
если нагрузим балку  $AB$  эпюрой моментов, как представлено на фиг. 11-III<sup>1)</sup>.

$$y_1 = \frac{hlx}{6EJ} \left( 6 - \frac{x^2}{l^2} \right) \text{ и } y_2 = \frac{hl^2}{6EJ} \left[ 3 \frac{x}{l} \left( 3 - \frac{x}{l} \right) - 1 \right].$$

Остается определить приращение  $\delta$  хорды  $EF$ , для вычисления масштаба линии влияния. При этом необходимо принять во внимание сжатие балки, удлинение струны и сжатие стойки, а также поворот сечения  $C$  балки вследствие ее изгиба:

$$\delta = \frac{2l}{E_1 F_1 \cos^3 \alpha} + \frac{2h \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_2 F_2} + \frac{5h^2 l}{3EJ} \dots \dots \dots (226)^2,$$

где  $\operatorname{tg} \alpha = h : l$ ,  $E_1 F_1$  — жесткость струн,  $E_2 F_2$  — то же для стоек. Наибольшее влияние оказывает последний член, так что, при приближенных вычислениях остальные могут быть отброшены.



Фиг. 164.

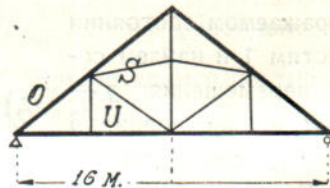
Когда построена линия для лишнего стержня  $EF$  фиг. с) то прочие линии строятся на общих основаниях. Построим, например, линию изгибающего

момента — для сечения  $m$ , взятого в расстоянии  $a'$  от левой опоры  $A$  (фиг. с). Момент здесь составит из двух частей: из момента для простой балки  $M_0$  и момента усилия  $S$ . Разлагая последнее в точке  $A$  на вертикальное и горизонтальное и, отбрасывая последнее, как проходящее через центр моментов  $m$ , получим:

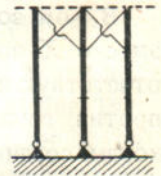
$$M_0 - (S \cdot \sin \alpha) a' = M_0 - \frac{X a'}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = M_0 - X \operatorname{tg} \alpha \cdot a'$$

или:  $M_0 - X \frac{a'h}{l}$ .

Очевидно, надо построить линию момента  $M_0$  для простой балки, как показано на фиг. e) треугольником  $AmB$ , и на нее наложить линию лишнего стержня  $X$ , перечерчивая ее из фиг. с) и умножая ординаты на  $\frac{a'h}{l}$ , как показывает кривая  $AnB$ .



Фиг. 165.



Фиг. 166.

**5. Задачи.** а) Предлагаем решить задачу о шпренгеле с одной бабкой (треугольный шпренгель) при равномерно распределенной нагрузке  $q$ .

Ответ. Усилие стойки  $X$  определяется из выражения:

$$X \left( \frac{L^3}{48EJ} + \frac{L}{4EF \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{L}{4 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha E_1 F_1} + \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{2E_2 F_2} \right) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EJ}$$

где  $L$  — полный пролет балки  $AB$  применительно к фиг. 163.

<sup>1)</sup> См. третий столбец таблицы III в § 14. В этих выражениях  $x$  считается от левой опоры  $A$ .

<sup>2)</sup> Выражение для  $\delta$  удобнее получить, пользуясь теоремой Кастильяно (см. § 23, с).

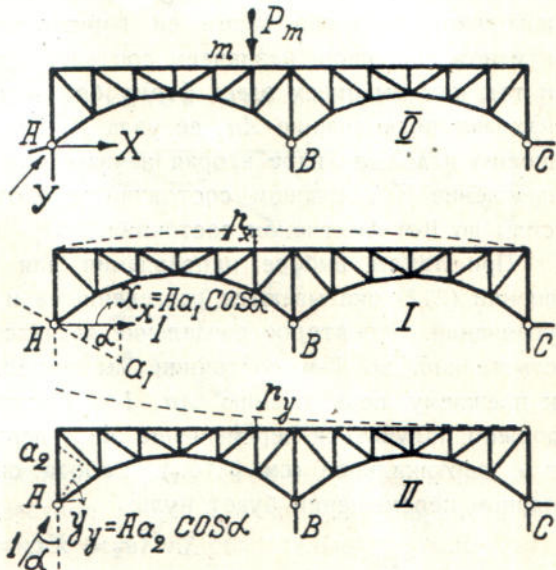


б) Построить линию влияния для одной из перекрестных диагоналей стержневой системы фиг. 164.

с) Построить линии влияния для стержней стропильной фермы фиг. 165, например, для  $O$ ,  $U$  и  $S$ .

д) Построить линии влияния для диагональных связей эстокады фиг. 166.

**6. Ферма с двумя лишними неизвестными.** При решении задач с двумя или несколькими неизвестными в Строительной механике всегда стремятся к разделению неизвестных, т. е. к таким уравнениям, при которых каждая из неизвестных попадает лишь в одно уравнение. Принцип взаимности перемещений предоставляет нам средство к достижению такого разделения. Мы покажем сначала, как это достигается на простых примерах с тем, чтобы впоследствии перейти к обобщениям. Рассмотрим двухпролетную ферму арочного вида с ездой по верху фиг. 167. При крайних неподвижных опорах ферма переобременена двумя лишними связями.



Фиг. 167.

Сосредоточим обе лишние неизвестные в одной точке, например, в левой опоре  $A$ , и обозначим их  $X$  и  $Y$ .

Отбрасывая опору  $A$ , мы получаем балочную ферму  $CB$  с консолью  $BA$  и, по предыдущему, можем рассмотреть

ее в двух состояниях: I-ое фиктивное состояние, когда вместо одного из неизвестных  $X$ , находится единица силы, и II-ое,—когда единица приложена вместо  $Y$ . Выбор направления этих неизвестных в нашем распоряжении. Мы этим воспользуемся и подберем их так, чтобы в уравнение входило только по одной неизвестной.

Обратим внимание на способ составления выражения взаимности перемещений при двух неизвестных. Как указывалось в § 17, формулой (212), обе неизвестные  $X$  и  $Y$  из нулевого состояния умножаются на перемещения одного и того же фиктивного состояния; так, при составлении первого уравнения мы пользуемся только перемещениями первого фиктивного состояния I:

$$Xx_x + Yy_x + Pp_x = 0 \dots \dots \dots (227^1).$$

<sup>1)</sup> Здесь, по прежнему, малой буквой мы обозначаем перемещение, соответствующее силе, обозначенной одноименной большой буквой, а индекс внизу обозначает ту силу, вместо которой принята единица, вызвавшая перемещение. Так,  $p_x$ — это перемещение под грузом  $P$  нулевого состояния, но взятое из фиктивного состояния I, где вместо  $X$  была единица.



Чтобы избавиться в этом уравнении от неизвестной  $Y$ , надо работу силы  $Y$  нулевого состояния на перемещении  $y_x$  первого фиктивного состояния сделать равную нулю, т. е. достигнуть  $Y \cdot y_x = 0$ .

Но известно, что нулевая работа получается при перпендикулярных направлениях перемещения и силы. Очевидно, разделение неизвестных получится, если в I фиктивном состоянии  $X=1$  перемещение точки приложения неизвестного  $Y$  будет перпендикулярно к направлению этого неизвестного. Этим намечается путь к разделению неизвестных.

Какова бы ни была неизвестная опорная реакция  $A$  мы можем представить ее двумя составляющими. Так как направление составляющих находится в нашем распоряжении, то назначим первую из них  $X$  произвольно, например дадим ей горизонтальное направление. В I-м фиктивном состоянии назначаем соответствующую горизонтальную единицу; и так как мы имеем здесь ферму без лишних связей, то без затруднений находим перемещение  $Aa_1$  ее узла  $A$ . Перпендикулярно к этому перемещению и должна идти вторая неизвестная  $Y$ . Теперь мы назначаем направление  $Y$  в нулевом состоянии и соответственно помещаем единицу силы во II-м фиктивном состоянии.

При таком выборе направления для неизвестных первого из уравнений (212) оказываются разделенными и неизвестные второго из этих уравнений. Это второе разделение является следствием взаимности. Действительно, во II-м состоянии мы помещаем силу 1 перпендикулярно к прежнему перемещению  $Aa_1$  I-го состояния; в таком случае теперь должно получиться перемещение  $Aa_2$ , перпендикулярное к прежней силе, т. е. вертикальное (см. § 16,7). Работа силы  $X$  на таком перпендикулярном перемещении будет нуль:

$$X \cdot Aa_2 = Xx_y = 0.$$

Вообще, если  $y_x = 0$ , то и  $x_y = 0$ , как уже доказывалось в § 16,6.

Кроме того, в I-м и во II-м состоянии системы находится одна та же сила 1; очевидно, и перемещения  $Aa_1$  и  $Aa_2$  также должны быть равны:  $Aa_1 = Aa_2$  — это следует из форм. (200-bis). Следовательно, можно написать:

$$x_x = y_y \dots \dots \dots (228).$$

Перейдем теперь к решению задачи. Сопоставляя два состояния системы: 0-ое с I-м, а затем 0-ое со II-м, мы получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} & X \cdot Aa_1 \cos \alpha + Y \cdot Aa_1 \cos 90^\circ + Pp_x = 0 \\ \text{и} & X \cdot Aa_2 \cos 90^\circ + Y \cdot Aa_2 \cos \alpha + Pp_y = 0, \\ \text{или:} & Xx_x = -Pp_x \quad \text{и} \quad Yy_y = -Pp_y; \\ \text{откуда:} & X = -P \frac{p_x}{x_x} \quad \text{и} \quad Y = -P \frac{p_y}{y_y} \dots \dots \dots (229). \end{aligned}$$

Таким образом, во-первых, здесь разделились неизвестные, во-вторых, для каждого из них эпюра прогибов соответствующего состояния основной фермы представляет линию влияния, и в-третьих, — обе линии имеют общий масштаб для измерения ординат, ибо  $x_x = y_y$ .

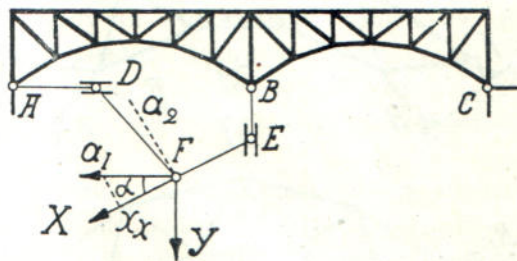


Так как описанный прием не связан какими-либо условиями, кроме требования сосредоточить обе неизвестные в одной точке, то можно высказать следующее правило для построения линий влияния при двух лишних реактивных неизвестных: 1) сосредоточивают обе л. неизвестные в одной точке и назначают для первой произвольное направление; 2) находят перемещения  $p$  и  $a$  основной фермы от единицы вместо первой неизвестной, как для узлов нагруженного пояса, так и для того узла, где приложена единица; для последнего перемещения замечают величину  $a$  и наклон  $\alpha$ ; 3) назначают единицу II-го состояния перпендикулярно к перемещению  $a$ , т. е. под углом  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ , и для этого состояния также находят перемещения

$p$  и  $a$ ; равенство и перпендикулярность перемещений  $a$  в обоих случаях служат контролем правильности построения. Наконец, устанавливают масштаб для измерения ординат  $p$ , для чего, вычисляют

$$a \cos \alpha = x_x = y_y,$$

откладывают в масштабе эпюры  $p$  в виде ординаты и пишут на ней: 1.



Фиг. 168.

По этому правилу решается вопрос во всех случаях, когда возможно сосредоточить обе лишние неизвестные в одной точке. Если принять во внимание, что точка, о которой идет речь, не обязательно должна служить узлом фермы, а может быть лишь определенным образом с нею связанной, то область применения правила окажется довольно широкой. За лишние связи можно принять стержни, идущие в разные узлы фермы, но надо их связать таким образом, чтобы действие их на ферму можно было бы осуществить действием некоторой внешней силы, приложенной в одной точке, хотя бы прямо и не принадлежащей к ферме; например, на фиг. 168 за лишние стержни можно принять горизонтальный стержень  $AD$  левой опоры  $A$  и вертикальный стержень  $BE$  средней опоры  $B$ . Если концы этих стержней поместить в такие направляющие, которые обеспечивают присвоенную опорам подвижность: в горизонтальную  $D$  и вертикальную  $E$  и связать шарниры  $D$  и  $E$  абсолютно твердыми стержнями  $FD$  и  $FE$  с одной точкой  $F$ , то, действуя на последнюю некоторой силой, мы можем поставить ферму в такие условия, в каких она находится в действительности. Надо только надлежащим образом подобрать силу  $F$ .

Первую составляющую  $X$  этой неизвестной силы  $F$  назначаем произвольно, например,—по направлению стержня  $FE$ , и по этому направлению приложим единицу. Разлагая последнюю в  $E$ <sup>1)</sup> мы получим фиктив-

<sup>1)</sup> Если единица идет по направлению  $FE$ , то составляющая  $FD$  равна нулю.

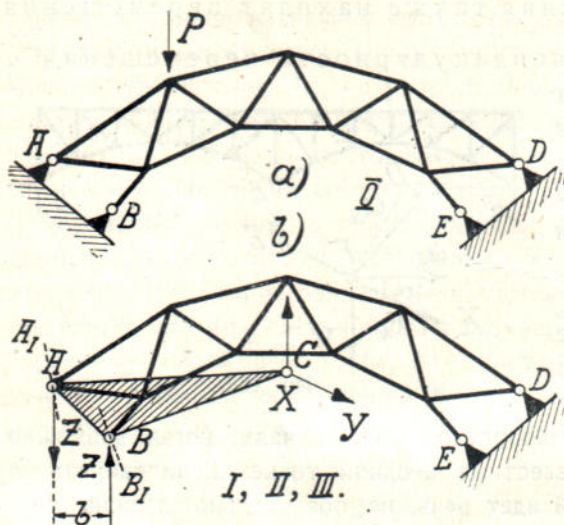


ную нагрузку фермы в узле  $B$  и определим усилия и перемещения, как узла  $B$ , так и  $A$ . По ним нам удастся получить перемещение  $Fa_1$  точки  $F$  и

$$x_x = Fa_1 \cdot \cos \alpha.$$

Теперь назначаем вторую составляющую  $Y$ , перпендикулярно к перемещению  $Fa_1$ . По принципу взаимности перемещений, она должна вызвать перемещение, перпендикулярное к силе  $X$ . Здесь также разделятся неизвестные и, как в предыдущем случае, непосредственно получатся линии влияния для  $X$  и  $Y$ . По ним, простым умножением на тригонометрический множитель, находятся требуемые линии  $AD$  и  $BE$ .

**7. Три лишних неизвестных стержневой фермы**—это обыкновенно три ее опорных стержня; в сплошном бруске—это две составляющие реакции и момент защемления.



Фиг. 169.

Во всяком случае, если мы каким-либо сечением отделим систему от опор, то совокупность всех сил, действующих в сделанном сечении, может быть приведена к силе и паре; разлагая же первую на 2 составляющие, получим:  $X$ ,  $Y$ ,  $M_z$  (фиг. 169).

Эти величины и будем считать лишними неизвестными.

Воспользуемся тем, что всякое малое перемещение системы можно рассматривать, как результат поступания и вращения, и что по-

следние при этом независимы, а также тем, что состояние твердого тела не изменяется от перемещения пары. На основании этих положений приходим к заключению, что в момент вращения системы вокруг мгновенного центра, когда пара  $M_z$  совершает работу вращения, составляющие  $X$  и  $Y$  не работают, если они приложены к этому центру, так как им соответствуют лишь поступательные перемещения, отсутствующие в момент вращения. Таким образом, найден способ отделить третью неизвестную от первых двух:—надо разыскать мгновенный центр вращения, вызываемый парой сил  $M_z$ ; если к этому центру приложить составляющие  $X$  и  $Y$ , то при действии момента  $M_z$  работа  $X$  и  $Y$  будет нулем.

Так как пара может быть приложена произвольно, то мы поместим ее в виде двух параллельных сил в узлах, попавших в сделанное опорное сечение. Конечно, между узлами  $A$  и  $B$  надо поместить абсолютно жесткий брусок  $AB$ .

Примем единицу за величину пары, т. е. приложим в опорных узлах силы:

$$Z = \frac{1}{b}.$$



Основная ферма представляет консоль без лишних стержней, нагруженную на конце двумя сосредоточенными силами  $Z$ . Перемещения ее опорных узлов  $A$  и  $B$ , определяются известными приемами. Положим, что они оказались  $AA_1$  и  $BB_1$  и изображаются пунктиром. Проводя к ним перпендикуляры  $AC$  и  $BC$ , мы определим необходимый мгновенный центр  $C$ . Остается связать этот центр абсолютно жесткими стержнями с опорным стержнем  $AB$  и приложить две неизвестных  $X$  и  $Y$ , как в предыдущем примере.

По предыдущему, назначаем для  $X$  произвольное направление, а для  $Y$  принимаем направление, перпендикулярное к перемещению, получаемому точкою  $C$  под действием  $X$ .

Теперь, кроме действительного состояния системы 0, рассматриваем три фиктивных: один раз (I) нагружаем единицей вместо  $X$ , другой раз (II) помещаем единицу вместо  $Y$  и, наконец, третий (III),—принимаем единичный момент. Сопоставляя 0 со I, 0 со II и 0 с III напишем три раза принцип взаимности перемещений. Получим независимые уравнения, из которых определяются неизвестные, и непосредственно могут быть построены линии влияния. Имея последние, путем графического разложения или составления уравнений Статики, мы получим усилия трех рассеченных стержней на опоре.

Описанный прием можно распространить и на большее число неизвестных, прибегая к системе механизмов по типу фиг. 168, но решения становятся в этом случае громоздкими<sup>1)</sup>. Если принять во внимание, что при большом числе неизвестных требуется еще и сравнительно большая точность, то придется признать сомнительное практическое значение этого приема при решении более сложных задач. В этом случае рекомендуются другие приемы, которым ниже посвящается отдельный § 24.

**§ 19. Способ Мора. 1. Сущность способа.** Принцип взаимности перемещений разрешает все вопросы расчета систем. Но для него требуется предварительное определение деформаций, обыкновенно связанное с большой вычислительной работой. Кроме того, не всегда бывают нужны линии влияния,—при неподвижной нагрузке вопросы быстрее разрешаются посредством эпюр и диаграмм.

Отто Мор<sup>2)</sup> предложил такую форму Начала возможных перемещений, при которой вопросы Строительной механики решаются на основании расчета усилий.

Как известно, Начало возможных перемещений обнимает внешние и внутренние силы системы, устанавливая, что для ее равновесия необходимо и достаточно равенство нулю работы всех сил на возможных малых перемещениях системы. Обозначая работу внешних сил  $T$ , а работу внутренних  $T_i$ , имеем:

$$T + T_i = 0 \quad \dots \dots \dots (230).$$

<sup>1)</sup> См. Мюллер-Бреслау, Графическая Статика сооружений, т. II, изд. 1910, стр. 142.

<sup>2)</sup> О. Mohr. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 1906. Первые статьи Мора по этому вопросу появились в 1874 г., 75 и 85 г. в журнале Zeitschrift des Architekten-und Ingenieur-Vereines, Hannover под заглавием: Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger.



При составлении работы здесь также рассматривается два состояния системы: одно действительное, с нагрузкой и искомыми неизвестными, другое состояние, фиктивное, когда вместо неизвестной величины помещена соответствующая единица. Мор предложил брать работу сил второго состояния на перемещениях первого и, на основании Начала возможных перемещений, приравнять ее нулю.

В обоих состояниях мы имеем систему без лишних связей, но во втором из них определяем усилия для непосредственного применения в уравнении работы, в первом же состоянии усилия определяются для вычисления по ним необходимых перемещений.

Как и в предыдущих способах, здесь составляется столько фиктивных состояний, сколько имеется неизвестных. В этом и заключается способ Мора, который кратко можно выразить так: кроме данного состояния системы с искомыми величинами, рассматривают фиктивные состояния, где вместо каждого искомого находится единица; сопоставляя действительное состояние с каждым из фиктивных, пишут, что работа сил второго состояния на перемещениях первого равна нулю. При этом составляется столько уравнений, сколько имеется неизвестных.

Способ Мора имеет столь же широкое применение, как и способ взаимности перемещений. При определении деформаций и усилий в системах без лишних связей он оказывается особенно простым и применяется на ряду с уже описанными элементарными приемами. Рассмотрим ряд задач.

**2. Определение прогиба фермы.** а) Если задана нагрузка  $P$ , то усилия  $S_0$  всякой фермы без лишних стержней мы можем считать известными. По ним без затруднения определяются и удлинения стержней

$$\lambda = \frac{S_0 l}{EF} \dots \dots \dots (231).$$

На основании этих данных может быть определен прогиб любого узла фермы или угол поворота любого из ее стержней.

Чтобы определить, например, прогиб  $y$  узла  $C$  фиг. 170, рассмотрим второе состояние фермы, когда узел  $C$  нагружен единицей. Усилия, которые вызывает эта единица в стержнях, назовем  $S_1$ . Составим теперь работу сил состояния I на перемещениях состояния 0. Нам придется при этом считаться со следующими данными:

Силы I-го состояния	Перемещения 0-го состояния
1) внешняя сила 1 и вызванные ею реакции,	1) искомый прогиб $y$ , который соответствует силе 1,
2) внутренние силы $S_1$ , действующие во всех стержнях фермы.	2) удлинения стержней $\lambda$ , соответствующие усилиям $S_1$ .

Следовательно, работа для одного какого-нибудь стержня фермы будет:

$$-S_1 \cdot \lambda, \text{ или } -S_1 \frac{S_0 l}{EF}.$$

По § 18,2 (форм. 224) она отрицательна.



Работа всех внутренних сил  $I$ -го состояния на соответствующих перемещениях  $0$ -го представляется суммой таких членов:

$$-\sum \frac{S_1 S_0 l}{EF}.$$

Присоединяя сюда работу внешней силы  $1$  на прогибе  $y$ , т. е.  $1 \cdot y$ , получим Начало возможных перемещений в форме:

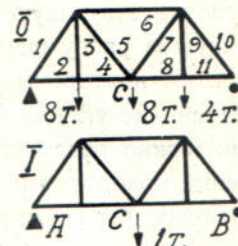
$$1 \cdot y - \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} = 0, \text{ откуда } y = \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} \quad \dots (232).$$

Следовательно, для вычисления прогиба необходимо предварительно определить:

1) усилия от  $1$  и 2) усилия в тех же стержнях от нагрузки  $P$ ; необходимо также знать размеры стержней  $l$  и  $F$  и модуль  $E$ . Для каждого стержня необходимо составить произведение первых трех величин, разделить на произведение двух последних и составить сумму произведений для всех стержней фермы. Если все стержни из одного материала, то модуль  $E$  выносится за знак суммирования.

б) В нижеследующей таблице показано, как делается вычисление для примера фиг. 170. Путем построения диаграммы Максвелля (Кремоны)

№ стержней.	$l$ см.	$F$ см. <sup>2</sup>	$S_0$ тон.	$S_1$ тон.	$\frac{S_1 S_0 l}{F}$
1	500	30	-13,75	-0,625	143
2	300	15	+ 8,25	+0,375	62
3	400	10	+ 8,00	0	0
4	300	15	+ 8,25	+0,375	62
5	500	10	+ 3,75	+0,625	117
6	600	20	-10,50	-0,750	236
7	500	10	+ 6,25	+0,625	195
8	300	15	+ 6,75	+0,375	51
9	400	10	+ 4,00	0	0
10	500	30	-11,25	-0,625	117
11	300	15	+ 6,75	+0,375	51
					$\Sigma = 1034$



Фиг. 170.

определяются усилия фермы от данной нагрузки  $P$ —они написаны в 4-м столбце таблицы. Затем, путем построения второй диаграммы, определяют усилия от единицы, приложенной в том узле  $C$ , для которого разыскивается прогиб—эти усилия  $S_1$  выписаны в 5-м столбце таблицы. Далее по размерам брусков  $l$  и  $F$  и усилиям  $S_0$  и  $S_1$  составляется последний столбец. Сумма членов этого столбца, подписанная внизу, должна быть разделена на модуль упругости  $E$ , чтобы получить искомый прогиб  $y$ :

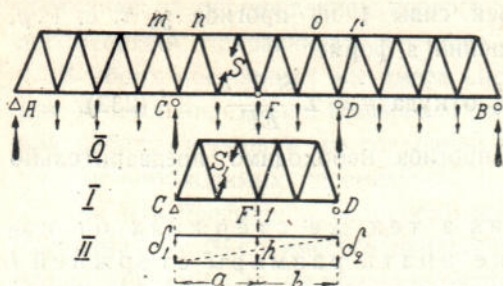
$$y = \frac{1034}{2000} = 0,51 \text{ см.}$$

с) Прогиб фермы с лишними связями. Когда определены лишние неизвестные, усилия  $S$  во всех стержнях фермы становятся известными; они равны

$$S = S_0 + S_x X + S_y Y + \dots$$



В таком случае можно считать известными и удлинения стержней фермы  $\lambda = \frac{Sl}{EF}$ . Ферма в 0-м состоянии в этом отношении не отличается от основной системы. Чтобы составить фиктивное состояние, удалим стержни



Фиг. 171.

$mn$  и  $or$ , освобождая тот пролет, где находится рассматриваемый узел  $F$ . В полученной основной ферме I к узлу  $F$  приложим 1 и определим усилия  $S_1$ . Повторяя предыдущие рассуждения, придем к прежнему выражению для прогиба:

$$y = \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF}$$

Если в неразрезной ферме средние опоры садятся на  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , как показано на фиг. II, то к определенному прогибу  $y$  надо прибавить осадку точки  $F$ :

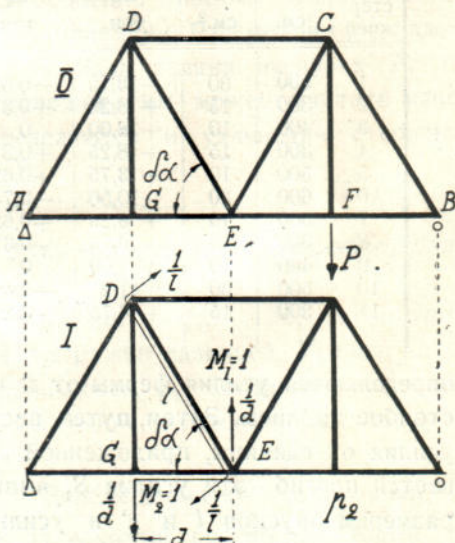
$$h = \delta_1 \frac{b}{l} + \delta_2 \frac{a}{l}.$$

3. Изменение углов между стержнями фермы определяется точно таким же образом, как и прогиб. Неизвестное изменение угла будем считать координатой и к ней подберем соответствующую силу. Тогда все предыдущие рассуждения могут быть полностью повторены.

Изменение угла между двумя стержнями можно рассматривать, как их взаимный поворот; ему соответствует две вращающие пары, которые и следует принять за обобщенную силу (сравн. форм. 189). Для фиктивного состояния берем две пары, моменты которых составляют единицы, т. е. нагружаем концы каждого из стержней фермы  $DE$  и  $GE$  соответственно силами:

$$\frac{M}{l} = \frac{1}{l} \quad \text{или} \quad \frac{M}{d} = \frac{1}{d},$$

как показано на фиг. 172.



Фиг. 172.

Если за действительное состояние принять то, что было в предыдущей задаче (фиг. 170-a), то уравнение Мора напишется в такой форме:

$$1 \cdot \delta\alpha - \sum S_1 \lambda = 0, \quad \text{или} \quad 1 \cdot \delta\alpha = \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} \dots (233).$$

Все отличие исчерпывается тем, что во втором состоянии системы



вместо одного груза 1 в узле  $C$ , должно быть приложено 4 силы, показанные на фигуре.

Две рассмотренные задачи 2 и 3 представляют еще один способ решения тех вопросов, которые были разобраны в § 5,7 и 9,1.

**4. Расчет ферм с лишними стержнями.** Отбрасывая лишний стержень фермы, заменим его неизвестною силою  $X$ <sup>1)</sup>. Полученную таким образом основную систему под действием данной нагрузки  $P$  и лишнего неизвестного усилия  $X$  принимаем за 0-ое состояние системы. Во втором состоянии вообразим вместо лишнего стержня обобщенную единицу и определим вызываемые ею усилия  $S_1$ .

При определении перемещений, которые соответствуют усилиям  $S_1$  в 0-ом состоянии фермы, необходимо считаться с действительными усилиями, возникающими в основной ферме от грузов  $P$  и от лишней силы  $X$ . Усилия от нагрузки  $P$  можем считать известными— $S_0$ . Усилия же от  $X$  легко выражаются через  $S_1$ . Действительно:  $X$  и 1 идут между одними и теми же узлами, и потому, если сила 1 вызывает в каком-нибудь стержне фермы усилие  $S_1$ , то сила  $X$  даст в том же стержне  $XS_1$ . Полное усилие  $S$  какого-нибудь стержня, очевидно, будет:

$$S = S_0 + XS_1;$$

удлинение его

$$\lambda = \frac{Sl}{EF} = \frac{(S_0 + XS_1)l}{EF}.$$

Работа внутренних сил фиктивного состояния  $S_1$  на перемещениях действительного 0-го будет:

$$\Sigma S_1 \lambda = \Sigma \frac{S_1(S_0 + XS_1)l}{EF}.$$

Из внешних сил фиктивного состояния только 1 встречает значащие перемещения действительного состояния: ей соответствует удлинение лишнего стержня

$$\lambda_x = \frac{Xl}{E_x F_x}.$$

Выбирая общее течение для  $X$  и для 1, мы всегда получим отрицательную работу (см. фор. 224):

$$-1 \cdot \frac{Xl_x}{E_x F_x}.$$

Следовательно, в результате:

$$-1 \cdot \frac{Xl_x}{E_x F_x} - \Sigma \frac{S_1(S_0 + XS_1)l}{EF} = 0.$$

Отсюда, после преобразований:

$$X = - \frac{\Sigma \frac{S_1 S_0 l}{EF}}{\Sigma \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x}} \dots \dots \dots (234).$$

<sup>1)</sup> В обобщенном смысле, т. е. двумя равными и прямо противоположными силами.



Если ферма из одного материала, то  $E$  выносится за знак  $\Sigma$  и сокращается:

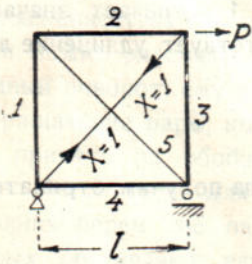
$$X = - \frac{\sum S_1 S_0 l}{\sum \frac{S_1^2 l}{F} + \frac{1 \cdot l_x}{F_x}} \dots \dots \dots (235)^1).$$

Формула легко приспособляется для случая лишней реактивной силы. При абсолютно незыблемых опорах мы примем, что мысленно соединяющий их стержень—абсолютно жесткий:  $E_x F_x = \infty$  и  $\frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} = 0$ ;

поэтому 
$$X = - \frac{\sum S_1 S_0 l}{\sum \frac{S_1^2 l}{EF}} \dots \dots \dots (236).$$

**5. Примеры.** а) Расчет усилия. На фиг. 173 приведен пример расчета квадратной поперечной рамы моста с ездой по верху при действии на верхний узел горизонтального давления ветра  $P$ . Рама стоит на опорах, как простая балка. Для простоты приняты одинаковые сечения всех стержней.

Одна из диагоналей здесь лишняя; поэтому вместо нее принята единица и определены усилия  $S_1$ . Отбрасывая единицу, определим усилия  $S_0$ . Если вписать эти усилия в 3-ий и 4-ый столбцы таблицы, то дальней-



Фиг. 173.

№ стерж.	Длина l	$S_0$	$S_1$	$S_1 S_0 l$	$S_1^2 l$
1	l	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{lP}{\sqrt{2}}$	$1/2 l$
2	l	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{lP}{\sqrt{2}}$	$1/2 l$
3	l	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$1/2 l$
4	l	P	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{lP}{\sqrt{2}}$	$1/2 l$
5	$l\sqrt{2}$	$P\sqrt{2}$	+1	$-2lP$	$l\sqrt{2}$
6	$l\sqrt{2}$	-	X=1	-	-
				$\Sigma = -lP \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$	$l(2 + \sqrt{2})$

ший расчет будет заключаться в составлении построчных произведений. Остается просуммировать их в столбцах и полученные суммы подставить в форм. (235).

Получится: 
$$X = \frac{-Pl \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right)}{l(2 + \sqrt{2}) + 1 \cdot l\sqrt{2}} = P \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} P.$$

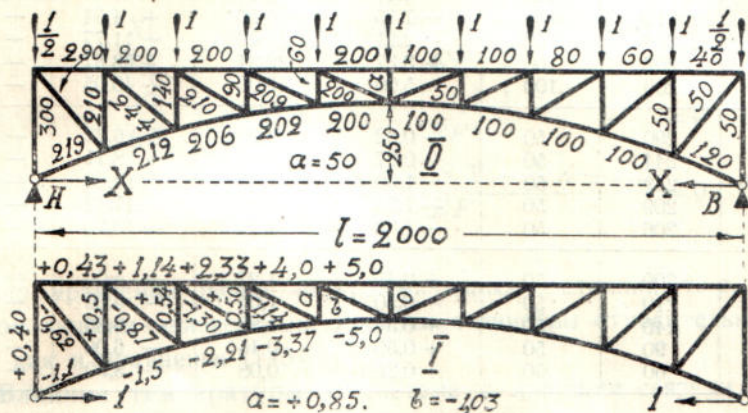
<sup>1)</sup> Сравни. аналогичные формулы 223 и 225).



б) Определение реакций. Более сложный пример приложения способа Мора представлен на фиг. 174. Здесь определяется распор  $X$  двухшарнирной арки при равномерно-распределенной нагрузке  $P = 1/2, 1, 1, \dots, 1, 1/2$  тонны, приложенной в верхних узлах. Размеры стержней в см. показаны на чертеже (слева—длина, справа—сечение).

Если в I-м состоянии вместо  $X$  положить единицу, то получим усилия  $S_1$ , выписанные у соответствующих стержней фермы I.

Так как здесь точки  $A$  и  $B$  считаются абсолютно неподвижными, то пользуемся форм. (236), которую упрощаем применительно к ферме из



Фиг. 174.

одного материала ( $E$ —постоянное). В виду того, что ферма и нагрузка симметричны, и  $X$  по форм. (236) определяется отношением сумм, можем ограничиться половиной фермы.

Расчет заключается в построении двух диаграмм усилий для простой балочной фермы: один раз при нагрузке  $P$ , причем получаются усилия  $S_0$ , и другой раз—при  $X=1$ , при чем находятся усилия  $S_1$ . Все усилия и соответствующие размеры фермы выписаны в следующую таблицу (см. табл. на стр. 212):

Распор определяется путем деления сумм  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$ :

$$X = + \frac{1982,78}{224,50} = + 8,8 \text{ тон.}$$

Теперь усилие какого угодно стержня фермы в действительности:

$$S = S_0 + S_1 \cdot X,$$

например, для первой диагонали:

$$S = 6,22 - 8,8 \cdot 0,62 = 0,76 \text{ тон.}$$

Конечно, если бы в узлах верхнего пояса были не единицы, а грузы  $P$ , то  $X$  и  $S$  надо было бы помножить на  $P$ .

$$X = 8,8P \text{ и } S = P(S_0 + S_1X).$$



Часть фермы	Длина стержня $l$ см	Площадь сеч. $F$ см. <sup>2</sup>	$S_1$ тон.	$\frac{S_1^2 l}{F} 100$	$S_0$ тон.	$\frac{S_1 S_0 l}{F} 100$
верхний пояс	200	40	+ 0,43	0,92	— 4,29	— 9,22
	200	60	+ 1,14	4,36	— 11,43	— 43,39
	200	80	+ 2,33	13,57	— 23,33	— 135,90
	200	100	+ 4,00	32,00	— 40,00	— 320,00
	200	100	+ 5,00	50,00	— 5,00	— 500,00
нижний пояс	219	120	— 1,10	2,21	0	— 0
	212	106	— 1,15	4,50	+ 4,54	— 13,62
	206	100	— 2,21	10,06	+ 11,77	— 53,58
	202	100	— 3,37	22,94	+ 23,57	— 160,45
	200	100	— 5,00	50,00	+ 40,05	— 400,50
диагонали	290	50	— 0,62	2,23	+ 6,22	— 22,37
	244	50	— 0,87	3,69	+ 8,71	— 36,98
	219	50	— 1,30	7,40	+ 13,03	— 74,19
	209	50	— 1,74	12,66	+ 17,42	— 126,70
	206	50	— 1,03	4,37	+ 10,30	— 43,71
стойки	300	50	+ 0,45	1,22	— 5,00	— 13,50
	210	50	+ 0,50	1,05	— 6,00	— 12,60
	140	50	+ 0,54	1,82	— 6,36	— 9,62
	90	50	+ 0,50	0,45	— 6,00	— 5,40
	60	50	+ 0,25	0,08	— 3,50	— 1,05
$\Sigma_1 =$						
				224,50	$\Sigma_0 =$	— 1982,78

Так как числа 5-го и 7-го столбцов оказались малыми, то они помножены на 100 что не влияет на результат вычисления по форм. 236.

**6. Случай нескольких неизвестных.** Удалим лишние связи системы, превращая ее таким образом в основную, удобную для расчета. Заданные грузы  $P$  и реактивные неизвестные силы отброшенных связей  $X, Y, Z...$  примем за нагрузку основной системы, и это действительное состояние системы назовем 0-ым. Действительные усилия стержней обозначим  $S$  и удлинение их —  $\lambda$ .

Рассмотрим, кроме того, ряд фиктивных состояний: одно, когда вместо неизвестного  $X$  находится единица; — усилия в стержнях основной системы назовем при этом  $S_x$ ; в другом фиктивном состоянии поместим единицу вместо  $Y$  и обозначим усилия тех же основных стержней  $S_y$  и т. д., по числу лишних неизвестных. Теперь сопоставим каждое из фиктивных состояний с действительным и напишем, что равна нулю работа сил фиктивного состояния на перемещениях действительного. Получится ряд таких уравнений:

$$-1 \cdot \frac{Xl_x}{E_x F_x} - \Sigma S_x \lambda = 0; \quad -1 \cdot \frac{Yl_y}{E_y F_y} - \Sigma S_y \lambda = 0; \quad -1 \cdot \frac{Zl_z}{E_z F_z} - \Sigma S_z \lambda = 0 \dots$$

Но удлинение стержня основной фермы  $\lambda = \frac{Sl}{EF}$ ; поэтому уравнения переписываются:

$$-1 \cdot \frac{Xl_x}{E_x F_x} - \Sigma \frac{S_x Sl}{EF} = 0; \quad -1 \cdot \frac{Yl_y}{E_y F_y} - \Sigma \frac{S_y Sl}{EF} = 0 \dots \quad (237 - a).$$



Действительное усилие  $S$  есть результат действия на основную систему нагрузки  $P$  и лишних сил  $X, Y, Z...$  Если бы вместо  $X$  была единица, то в стержне получилось усилие  $S_x$ ; при нагрузке  $X$ , усилие будет  $S_x \cdot X$ . Точно также нагрузка  $Y$  вызывает в том же стержне  $S_y Y$ , нагрузка  $Z$  — дает  $S_z \cdot Z$  и т. д., а полное усилие  $S = S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots + S_0$ . (237 - б); следовательно, удлинение

$$\lambda = \frac{Sl}{EF} = \frac{(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots)l}{EF}$$

Подставляя это значение в предыдущие уравнения, получим:

$$\begin{aligned} 1. \frac{Xl_x}{EF_x} + \sum \frac{S_x(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots)l}{EF} &= 0 \\ 1. \frac{Yl_y}{EF_y} + \sum \frac{S_y(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots)l}{EF} &= 0 \\ 1. \frac{Zl_z}{EF_z} + \sum \frac{S_z(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots)l}{EF} &= 0 \dots (238). \end{aligned}$$

Число уравнений равно числу фиктивных состояний, т. е. совпадает с числом лишних неизвестных. Уравнения линейны относительно неизвестных, как и уравнения (143).

**7. Влияние температуры.** В системе с лишними связями отдельные стержни не могут произвольно удлиняться, не вызывая при этом усилий в других стержнях и не напрягаясь сами. Называя коэффициент линейного расширения  $\varepsilon$ , изменение температуры какого-нибудь стержня —  $t$  и длину его  $l$ , найдем, что от одного только влияния температуры стержень удлинится на  $\varepsilon lt$ .

Если же стержень принадлежит ферме с лишними связями  $X, Y, Z...$  и притом нагруженной силами  $P$ , то в действительности общее удлинение его будет:

$$\lambda = \varepsilon lt + \frac{Sl}{EF},$$

где  $S = S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z + \dots$

Это удлинение действительного состояния фермы и надо принимать при составлении, по Мору, работы сил фиктивного состояния. В случае нагревания нескольких стержней для каждого из них надо принять указанное составное удлинение: от изменения температуры и от нагрузки; при этом является возможность решить задачу в самом общем случае, когда температура стержней изменяется различно.

Положим, что в системе с одним лишним стержнем стержни 1, 2, 3... $m$  нагреваются до температуры  $t_1, t_2, t_3 \dots t_m$ ; лишний стержень в свою очередь нагревается на  $t_x$ . Тогда работа сил фиктивного состояния ( $X = 1$ ) на перемещениях действительного дает уравнение:

$$1. \left( \varepsilon l_x t_x + \frac{Xl_x}{E_x F_x} \right) + \sum_{1, \dots, 3, \dots, m} S_1 \left( \frac{S_0 + S_x X}{EF} + \varepsilon \cdot t \right) l = 0, \dots (239)$$

из которого определяется  $X$ .



Применим эту формулу к случаю, когда нагревается только один стержень, принимаемый за лишний. Здесь придется отбросить  $\varepsilon t$  в правой части уравнения (239); лишнее неизвестное окажется:

$$X = - \frac{\varepsilon l_x t_x + \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF}}{\frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} + \sum \frac{S_1^2 l}{EF}} \dots \dots \dots (240).$$

Например, для квадратной рамы фиг. 173 получится:

$$X = - \frac{\varepsilon l \sqrt{2} \cdot t \cdot EF - lP \left( 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \right)}{1 \cdot l \sqrt{2} + l(2 + \sqrt{2})} = P \frac{1,5 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} - \varepsilon t \frac{EF}{2 + \sqrt{2}}.$$

Для учета влияния только одной температуры применим форм. (239) при условии, что  $S_0 = 0$ :

$$X = - \frac{\varepsilon l_x t_x + \sum S_1 \varepsilon t l}{\frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} + \sum \frac{S_1^2 l}{EF}} \dots \dots \dots (241).$$

Величина  $X$ , вызванная нагреванием одного только лишнего стержня, как видно из (239) или (241), будет:

$$X = - \frac{\varepsilon l_x t_x}{\frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} + \sum \frac{S_1^2 l}{EF}} \dots \dots \dots (241-a).$$

Например, для той же квадратной рамы

$$X = - \frac{\varepsilon l \sqrt{2} \cdot t EF}{l \sqrt{2} + l(2 + \sqrt{2})} = - \frac{\varepsilon t EF}{2 + \sqrt{2}}.$$

Тот же результат получится сразу, если в предыдущей формуле для рамы положить  $P = 0$ .

Принимая для железа:  $\varepsilon = 12,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$  кг./см.<sup>2</sup>, найдем, что при нагревании лишнего стержня на  $t = 10^\circ$ , напряжение его

$$\frac{X}{F} = - \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{3,415} = - 73 \text{ кг./см.}^2$$

**8. Способ Мора в применении к расчету балок.** а) Если балка имеет лишние опорные закрепления, то за 0-ое, действительное ее состояние следует принять основную балку, находящуюся под действием заданных грузов  $P$  и лишних реактивных сил, пока неизвестных. Фиктивное, 1-ое состояние получим, если вместо реактивной лишней силы поместим единицу.

Уже говорилось, что при составлении работы по Мору приходится брать не только внешние, но и внутренние силы балки; в данном случае это будут упругие силы, возникающие при изгибе, созданном обобщенной единицей: изгибающий момент, поперечная и продольная сила. Такие силы непрерывно распределены по некоторому закону, и поэтому приходится рассматривать явление элементарно.



Пользуясь принципом независимости, имеющим место при малых деформациях, рассмотрим отдельно влияние изгибающего момента. Разделим длину балки на ряд исчезающе малых элементов  $dx$ , проводя нормальные сечения по фиг. 175. Тогда для какого-нибудь элемента на расстоянии  $x$  получим вполне определенный изгибающий момент<sup>1)</sup>. Обозначим его  $M_{x1}$ . Соответствующим моменту перемещением в нулевом состоянии балки является угол взаимного поворота концов элемента  $dx$ , взятого на том же расстоянии  $x$ . И, если мы обозначим этот угол  $d\varphi$ , то, по Мору, работа будет:

$$M_{x1} \cdot d\varphi.$$

Но угол элемента выражается через дугу (приближенно — через хорду) и радиус кривизны:

$$d\varphi = dx : \rho_x,$$

или, принимая во внимание, что  $\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_{x0}}{EJ}$ :

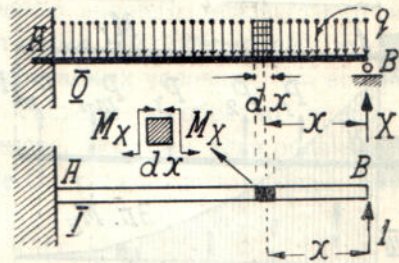
$$d\varphi = M_{x0} dx : EJ.$$

Поэтому работа элементарной внутренней силы I-го состояния на соответствующем перемещении 0-го выразится

$$M_{x1} \cdot \frac{M_{x0} dx}{EJ} = \frac{M_{x0} M_{x1} dx}{EJ}.$$

Очевидно, работа всех внутренних сил системы есть интеграл, распространенный на все элементы балки:

$$\int_0^l \frac{M_{x0} M_{x1} dx}{EJ} \text{ )}.$$



Фиг. 175.

Если к этому добавить работу единицы силы I-го состояния на соответствующем перемещении  $\delta$  в 0-м состоянии, то получится работа всех сил системы, которая должна быть равна нулю:

$$1 \cdot \delta - \int_0^l \frac{M_{x0} M_{x1} dx}{EJ} = 0 \quad \dots \dots \dots (242).$$

Имеем уравнение для решения задач о балках с лишними неизвестными. В дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем опускать подстрочный значок  $x$ , как общий для обоих моментов, т. е. будем писать:

$$1 \cdot \delta = \int_0^l \frac{M_0 M_1 dx}{EJ} \dots \dots \dots (242).$$

б) Применим это уравнение к балке, защемленной одним концом и опирающейся другим, при равномерно распределенной нагрузке  $q$ . Реакцию  $X$  считаем лишней неизвестной и на фиг. 1 помещаем, вместо  $X$ , единицу. Изгибающий момент:  $M_1 = 1 \cdot x$ .

1) Как доказывается в Сопротивлении материалов, это будут два равных противоположных момента, приложенных по концам исчезающе малого элемента балки  $dx$ .

2) Выражение, симметричное относительно внутренних сил обоих состояний системы  $M_0$  и  $M_1$  (сравни. § 16,3).



В 0-м состоянии момент  $M_0 = Xx - \frac{1}{2}qx^2$ , а перемещение, соответствующее силе единицы, равно нулю, так как опора  $B$  абсолютно неподатлива.

Поэтому уравнение (242) дает

$$\int_0^l \frac{\left( Xx - \frac{qx^2}{2} \right) x dx}{EJ} = 0.$$

Производя интегрирование:

$$X \int_0^l x^2 dx = \frac{q}{2} \int_0^l x^3 dx, \text{ или } X \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^l = \frac{q}{2} \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^l,$$

находим  $X = \frac{3}{8}ql$ , что совпадает с прежним решением § 10,26.

Таким же образом решается задача и относительно поперечной и продольной силы балки; но влияние их вообще говоря не велико и потому на них мы не останавливаемся.

с) Другой пример: влияние повышенной опоры. Положим, что по ошибке правая опора балки на фиг. 176 установлена выше положенного уровня на  $\delta$ , и определим лишнюю реакцию для этого случая. Как и в предыдущем случае, воспользуемся выражением:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_0 M_1 dx}{EJ}.$$

Но здесь будет иной изгибающий момент  $M$  вследствие другого характера нагрузки в виде ряда сосредоточенных сил  $P$ , а именно

$$M = Bx - M_n,$$

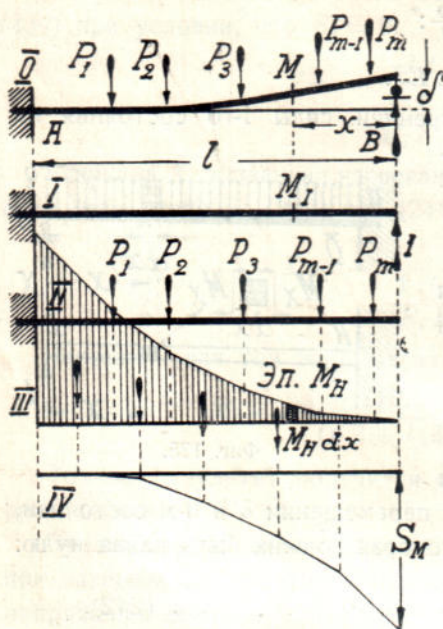
где  $M_n$  — момент одной только нагрузки относительно сечения  $x$ . Поэтому

$$\delta = \frac{1}{EJ} \int_0^l x(Bx - M_n) dx,$$

откуда при постоянном  $EJ$ :

$$B = \frac{\delta EJ + \int_0^l M_n x dx}{\int_0^l x^2 dx}.$$

Второй член числителя представляет момент относительно опоры  $B$ , получающийся от эпюры моментов. Действительно, элемент эпюры моментов  $M_n dx$  умножается здесь на расстояние  $x$  до опоры  $B$ . Поэтому для расчета лишней реакции, построим веревочный многоугольник только для грузов балки  $P$ , как сделано на фиг. III—это будет эпюра моментов  $M_n$ . Затем, принимая эту эпюру за грузовую площадь, построим второй веревочный многоугольник, как сделано на фиг. IV. Крайнюю ординату по-



Фиг. 176.



следнего надо подставить вместо второго члена в числителе дроби для  $B$ . Обозначая ее  $S_m$ , получим окончательно:

$$\bar{B} = \frac{3(\delta EJ + S_m)}{l^3}.$$

В частном случае, когда опора устроена на надлежащем уровне, перемещение ее  $\delta = 0$ , и реактивная сила  $B = 3S_m : l^3$ , как в предыдущем примере. Если же правую опору устроить ниже надлежащего уровня на величину  $\delta$ , то опорная реакция будет меньше, так как  $\delta$  придется считать отрицательной и перед первым членом числителя, т. е. перед  $\delta EJ$ , поставить знак минус.

**9. Обобщения.** В способе Мора лишние неизвестные всегда выражаются через внутренние усилия системы. Действительно, в фиктивном состоянии мы принимаем за единицу такой же тип обобщенной силы, каким представляется лишняя неизвестная. По этой единице определяются внутренние усилия фиктивного состояния. В действительном состоянии мы берем им соответствующие перемещения, которые определяются на основании тех же внутренних усилий, что и в фиктивном состоянии, только увеличенных, пропорционально значению лишнего неизвестного и заданной нагрузки. Но перемещения, с которыми мы оперируем, это—удлинения, углы поворота, сдвиги. В рассматриваемых условиях они всегда пропорциональны усилиям, длине элемента системы и обратно пропорциональны его жесткости в обобщенном смысле. Поэтому, если обозначим усилие действительного состояния системы  $C$ , то соответствующее ему перемещение будет:

$$\frac{Cdx}{EF}, \text{ либо } \frac{Cdx}{EJ}, \text{ либо } \frac{Cdx}{kGF} \text{ и т. п.}$$

Если в фиктивном состоянии сила 1 того же типа вызывает усилие соответствующего элемента системы  $C_1$ , то элементарная работа внутренних сил фиктивного состояния на соответствующих перемещениях действительного представится так:

$$\frac{CC_1 dx}{EF}, \text{ либо } \frac{CC_1 dx}{EJ}, \text{ либо } \frac{CC_1 dx}{GKF} \text{ и т. п.}$$

Обозначим жесткость в разных случаях напряженного состояния буквой  $\mathcal{H}$ , подразумевая под  $\mathcal{H}$ : при изгибе —  $EJ$ , при растяжении —  $EF$ , при кручении —  $GJ$ , при сдвиге —  $GkF$  и т. д. Тогда выражение элементарной работы внутренних сил, по Мору, для всех случаев напряженного состояния может быть написано в общей форме  $\frac{CC_1 dx}{\mathcal{H}}$ .

Работа внутренних сил для всей системы представится суммой таких членов, распространенною на все элементы системы, т. е.

$$\sum \frac{CC_1 l}{\mathcal{H}} \text{ или } \int \frac{C_1 C dx}{\mathcal{H}} \dots \dots \dots (243).$$

Эта формула учитывает все виды напряженного состояния, имеющие место в системе и все ее элементы. Конечно из нее вытекают и выше-



рассмотренные частные случаи, например: в стержневой ферме, где имеет место только растяжение и сжатие, формула дает члены одного рода, и, так как усилия постоянны по всей длине стержня  $l$ , то знак  $dx$  заменяется здесь  $l$ ; мы имеем

$$\sum \frac{SS_1 l}{EF} \dots \dots \dots (244) —$$

выражение, которым уже пользовались в § 16,<sub>3</sub> и § 19,<sub>4</sub>; если система представляет одну изогнутую балку, то получим

$$\int_0^l \frac{MM_1 dx}{EJ} \dots \dots \dots (245),$$

как это было уже в разделе 8.

Эта же формула говорит об общей симметрии выражения для работы внутренних сил двух сравниваемых состояний упругой системы и, таким образом, представляет общее основание для исключения внутренних сил из выражения взаимности перемещений.

Таким образом, общее уравнение равновесия по Морю может быть написано в следующей форме:

- 1) для определения перемещений, в соответствии с формулой (242):

$$1 \cdot \delta = \int \frac{CC_1 dx}{EI} \dots \dots \dots (246-a)$$

- 2) для определения лишнего неизвестного, соответственно формуле (236):

$$X = - \int \frac{CC_1 dx}{EI} : \int \frac{C_1^2 dx}{EI} \dots \dots \dots (246-b),$$

где 1—обобщенная единица вместо лишнего неизвестного  $X^1$ ), а  $\delta$ —ответствующая ей координата в действительном состоянии системы,  $C_1$ —обобщенная внутренняя сила при  $X=1$ .

Подобные уравнения можно написать и при нескольких лишних неизвестных.

**10. Практические указания.** При практическом выполнении решения, составление суммы (244) не встречает затруднений лишь в стержневых системах, работающих только продольными усилиями; мы убедились в этом на ряде примеров § 19,<sub>2,3</sub> и друг. Но в случае изгиба сумму (245) приходится составлять элементарно и производить интегрирование. Если при этом изгибающие моменты сложным образом изменяются вдоль бруска, то составление и вычисление интегралов представляет большую вычислительную работу.

Вычисления во всех случаях упрощаются, если воспользоваться графическим приемом:—

Интеграл (245) можно получить, как сумму произведений соответствующих элементов двух эпюр моментов: одной  $M_1$  из фиктивного состояния и другой,  $M$ —из действительного, когда основная система на-

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений со знаками, следует иметь в виду, что обобщенная единица назначается всегда в ту же сторону, куда и лишнее неизвестное.



гружена данными нагрузками и лишними неизвестными. Так как формы эпюры моментов сравнительно однообразны, то произведение их площадей может быть подготовлено предварительно. Составляя таблицу таких произведений для наиболее употребительных очертаний эпюры моментов, мы сведем расчет к простому выписыванию из таблицы подходящих готовых произведений. Рассмотрим для примера случай, когда одна из эпюр, например фиктивная, представляет трапецию: крайние ординаты ее  $M'$  и  $M''$ , высота трапеции по горизонтальному направлению  $l$  (фиг. 177-а). Очевидно, текущая ордината  $M_1$  на расстоянии  $x$  от левого основания:

$$M_1 = M' \frac{l-x}{l} + M'' \frac{x}{l}.$$

Поэтому:

$$\int_0^l MM_1 dx = \int_0^l MM' \frac{l-x}{l} dx + \int_0^l MM'' \frac{xdx}{l} = \frac{1}{l} \left[ M' \int_0^l M dx (l-x) + M'' \int_0^l M dx \cdot x \right].$$

Первый интеграл—это статический момент действительной эпюры моментов относительно конца эпюры  $B$ , а второй интеграл—такой же момент относительно начала  $A$ . Обозначая статические моменты  $S'$  и  $S''$ , можем написать:

$$\int_0^l MM_1 dx = \frac{1}{l} (M' S'' + M'' S') \dots \dots \dots (247).$$

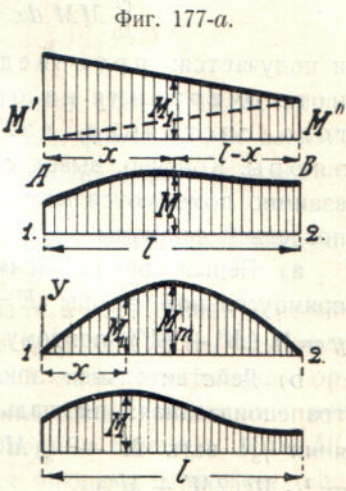
Следовательно, для получения интеграла, надо первое основание трапеции фиктивного состояния  $M'$  умножить на статический момент эпюры  $M$  действительного состояния относительно противоположного основания трапеции; надо сделать тоже со вторым основанием трапеции фиктивного состояния и оба произведения сложить, разделивши на высоту трапеции.

Внешний вид формулы (247) может быть еще более упрощен<sup>1)</sup>. Представим закон изменения моментов действительного состояния системы функцией  $F(x)$ , а именно, примем:  $M = F(x)$ ; уравнение линии моментов фиктивного состояния пусть будет  $M_1 = f(x)$ . Тогда:

$$\int_0^l MM_1 dx = \int_0^l F(x) f(x) dx.$$

И если вторая эпюра имеет линейное очертание, например  $a + bx$ , то:

$$\int_0^l MM_1 dx = \int_0^l F(x) f(x) dx = a \int_0^l F(x) dx + b \int_0^l F(x) x dx.$$



Фиг. 177-б.

<sup>1)</sup> См. А. Верещагин и Я. Риппенбейн. Новые методы расчета статически неопределимых систем. Строительная промышленность, 1925, № 9, стр. 650.

С. С. Волков. Вычисление деформаций на основании общей формулы решения интеграла вида  $\int MM_x ds$ . Труды Моск. инст. Инженеров транспорта 1927. вып. III.



Последний интеграл есть статический момент действительной эпюры, который можно представить площадью  $F$ , умноженной на координату центра  $x_c$ . Первый интеграл есть та же площадь  $F$ . Поэтому

$$\int_0^l MM_1 dx = aF + bFx_c = F(a + bx_c) = Fy_c \quad \dots (248),$$

и получается: произведение из площади эпюры произвольного очертания на ординату прямолинейной эпюры другого состояния, взятую под центром тяжести первой эпюры. Конечно, вывод сохраняет значение и в том случае, когда эпюры взаимно меняются местами. Рассмотрим несколько случаев применения последней формулы.

а) Первая эпюра прямоугольная, вторая—трапециoidalная: площадь прямоугольной эпюры  $F = Ml$ , ордината трапециoidalной по середине  $y = \frac{1}{2}(M' + M'')$ ; поэтому  $\int_0^l MM_1 dx = \frac{1}{2} Ml(M' + M'')$ .

б) Действительная эпюра—прямоугольный треугольник, фиктивная—трапециoidalная: площадь первой— $\frac{1}{2} Ml$ , ордината второй на расстоянии  $\frac{1}{3}l$  есть  $M' + \frac{1}{3}(M'' - M') = \frac{1}{3}(2M' + M'')$ ; поэтому  $\int_0^l MM_1 dx = \frac{1}{6} Ml(2M' + M'')$ .

При прямолинейном очертании обеих эпюр еще удобнее пользоваться выражением интеграла через поперечную силу и момент.

Такой случай—одновременно две прямолинейные эпюры моментов—получается при отсутствии на пролете местной нагрузки и соответствует постоянной поперечной силе, определяемой разностью опорных моментов. В этом случае оба текущие момента  $M$  и  $M_1$  подинтегрального выражения (245) представляют линейные функции от расстояния рассматриваемого сечения балки:

$$M_x = M' + Qx \quad \text{и} \quad M_{x_1} = M'_1 + Q_1x,$$

где  $M'$  и  $M'_1$ —левые опорные моменты двух состояний балки, а  $Q$  и  $Q_1$ —соответствующие поперечные силы, постоянные на протяжении пролета. Поэтому (245) дает:

$$\int MM_1 dx = \Sigma [M' M'_1 l + \frac{1}{2}(M' Q_1 + M'_1 Q) l^2 + \frac{1}{3} Q Q_1 l^3] \quad \dots (249).$$

Сравнительно несложное выражение получается для интеграла и в том случае, когда вторая эпюра очерчивается кривою второй степени. Так, при параболе  $f(x) = mx^2$ :

$$\int_0^l F(x) mx^2 dx = m \int_0^l F(x) x^2 dx = mJ_F -$$

получается момент инерции первой площади  $F$  относительно оси ординат второй.

Если очертание второй эпюры выражается параболою фиг. 177-б:

$$M_1 = \frac{4M_m}{l^2} x(l-x),$$

то таким же образом получим:

$$\int MM_1 dx = \frac{4M_m}{l^2} (lJ_F - J_F),$$



где  $S$  и  $J$  — статический момент и момент инерции площади произвольного очертания  $M$  относительно начала параболической эпюры 1.

В общем случае очертания эпюры кривою второго порядка

$$f(x) = a + bx + cx^2 -$$

получаем 
$$\int_0^l F(x)f(x)dx = F \cdot y_c + cJ_F,$$

т. е. интеграл выражается площадью произвольного очертания  $F$ , умноженной на ординату второй эпюры, взятую под центром тяжести первой, плюс момент инерции первой эпюры, умноженный на соответствующий параметр уравнения второй.

Ряд примеров, часто встречающихся при расчетах, приведен в следующей таблице (фиг. 178).

Так как интегралы (246) приходится составлять не только для моментов, но и для других обобщенных сил, то в таблице 178 мы приводим формы эпюр в общем виде, обозначая буквами  $h$  линейные размеры ординат, независимо от рода их единиц. Пользуясь этими таблицами при изгибе, мы вместо  $h'$  и  $h''$  будем подставлять опорные моменты  $M'$  и  $M''$ , если же надо будет пользоваться таблицей, как эпюрами поперечных сил, то вместо  $h'$  и  $h''$  придется подставлять концевые значения поперечной силы  $Q'$  и  $Q''$ .

Попутно мы приводим в таблице значения  $\int M^2 ds$ , так как они необходимы для вычисления лишних неизвестных по формуле (246-б). Для сокращения примем обозначения:

$$\int CC_1 dx = j \text{ и } \int C_1^2 dx = j_1.$$

11. Таблица интегралов  $j = \int CC_1 dx$  и  $j_1 = \int C_1^2 dx$  фиг. 178.

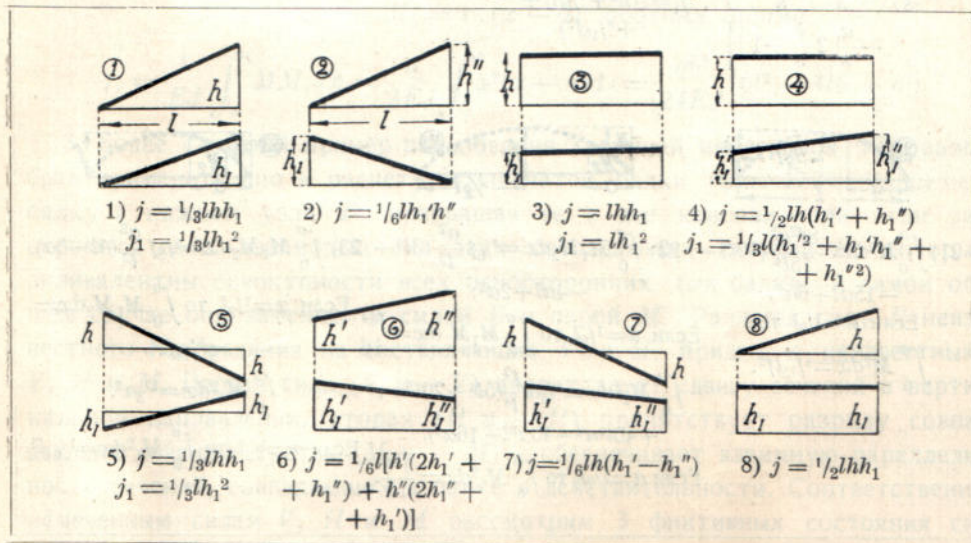
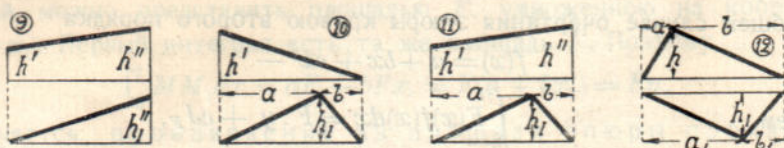
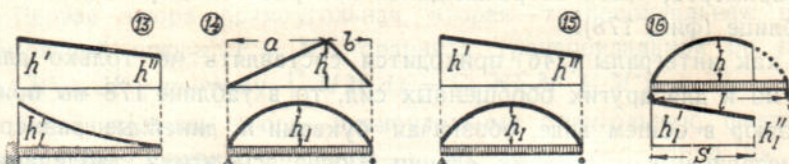




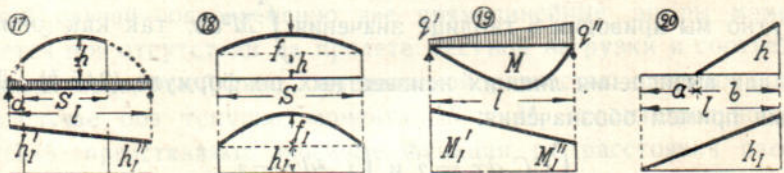
Таблица 178 (продолжение).



9)  $j = \frac{1}{6}lh_1''(h' + 2h'')$  10)  $j = \frac{1}{6}(l+b)h'h_1$  11)  $j = \frac{1}{6}h_1l[h'(1 + \frac{b}{l}) + h''(1 + \frac{a}{l})]$   
 Если  $h' = h''$ , то  $j = \frac{1}{2}lh'h$  12) Если  $a \leq a_1$ , то:  
 $j = \frac{1}{6}h_1h_1' \frac{l}{a_1}(l + a - \frac{1}{6}b_1^2)$



13)  $j = \frac{1}{12}lh_1'(3h' + h'')$  Если  $h' = 0$ , то  $j = \frac{1}{12}lh_1'h''$ . Если  $h'' = 0$ , то  $j = \frac{1}{4}lh_1'h'$  14)  $j = \frac{1}{3}lh_1(1 + \frac{ab}{l^2})$  15)  $j = \frac{1}{3}lh_1(h' + h'')$  Если  $h' = h'' = h$ , то  $j = \frac{2}{3}lhh_1$  16)  $j = \frac{1}{3}h \frac{s^2}{l^2}[h_1'(2l - s) + h_1''(4l - 3s)]$



17)  $j = h_1^2 \left[ \left( 1 + 2 \frac{a}{s} \right) \left( 4 \frac{l}{s} - 3 \frac{a}{s} - 3 \right) - \frac{a}{s} \left( 2 \frac{l}{s} - 1 \right) \right]$  18)  $j = s[lhh_1 + \frac{2}{3}(hf_1 + h_1f) + \frac{8}{15}ff_1]$   
 $j_1 = s(h^2 + \frac{4}{3}hf + \frac{8}{15}f^2)$  19)  $j = \frac{1}{330}l^3[q'(8M_1' + 7M_1'') + q''(7M_1' + 8M_1'')]$  20)  $j = \frac{1}{6}bh_1h_1'(2 + \frac{a}{l})$



21)  $\int_0^a M^2 dx = \frac{8f^2 a^3}{15l^4} (10l^2 - 15al + 6a^2)$  Если  $a = \frac{1}{2}l$  то:  $\int_0^a M^2 dx = \frac{1}{15}lf^2$  22)  $\int_0^a M_1 M_2 dx = \frac{1}{6}f \frac{a^2}{l^2} (3l^2 - 4al + 2a^2)$  Если  $a = \frac{1}{2}l$ , то  $\int_0^a M_1 M_2 dx = \frac{f^2}{16}$  23)  $\int_0^a M_1 M_2 dx = \frac{1}{3f} \frac{a^3}{l^2} (4l - 3a)$  Если  $x = \frac{1}{2}l$ , то  $\int_0^a M_1 M_2 dx = \frac{5}{48}fl^2$   
 $\int_0^a M_1^2 dx = \frac{1}{3} \alpha \frac{f^2}{l^4} (5l^4 - 20l^3 a + 40l^2 a^2 - 40l a^3 + 16a^4)$  Если  $a = \frac{1}{2}l$ , то  $\int_0^a M_1^2 dx = \frac{f^2 l}{10}$   $\int_0^a M_1^2 dx = \frac{1}{3} \alpha^3$  Если  $a = \frac{1}{2}l$ , то  $\int_0^a M_1^2 dx = \frac{1}{21}l^3$

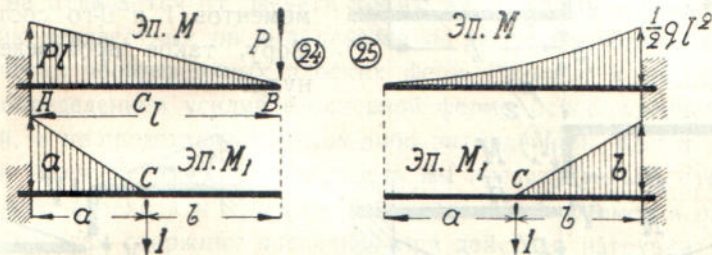


Примечания. 1. Во всех примерах криволинейных фигур имеется в виду парабола второй степени, соответствующая равномерно распределенной нагрузке балки: исключение составляет фиг. 19, где эпюра моментов — несимметричная парабола третьей степени, соответствующая трапециoidalной нагрузке.

2. Последние три фигуры дают интегралы от квадратов момента при параболическом очертании эпюры для обеих осей: горизонтальной и вертикальной. Этими интегралами нередко приходится пользоваться при расчете рам и арок.

**12. Примеры.** Рассмотрим несколько примеров пользования таблицей интегралов 178.

1. Прогиб середины консоли, нагруженной на конце сосредоточенным грузом  $P$  (фиг. 178—24).



Фиг. 178.

Чтобы определить прогиб точки  $C$ , поместим здесь силу 1, как показано внизу. Построивши эпюры  $M$  и  $M_1$ , по предыдущему напишем:

$$f_c = \frac{1}{EJ} \int_0^l MM_1 dx.$$

Пользуясь для этого случая формулой и фигурой 178<sub>20</sub>, непосредственно получим:

$$f_c = \frac{1}{6EJ} aaPl \left( 2 + \frac{b}{l} \right) = \frac{Pa^2l}{6EJ} \left( 2 + \frac{b}{l} \right).$$

2. При равномерно распределенной нагрузке консоли (фиг. 178<sub>25</sub>), имеем:

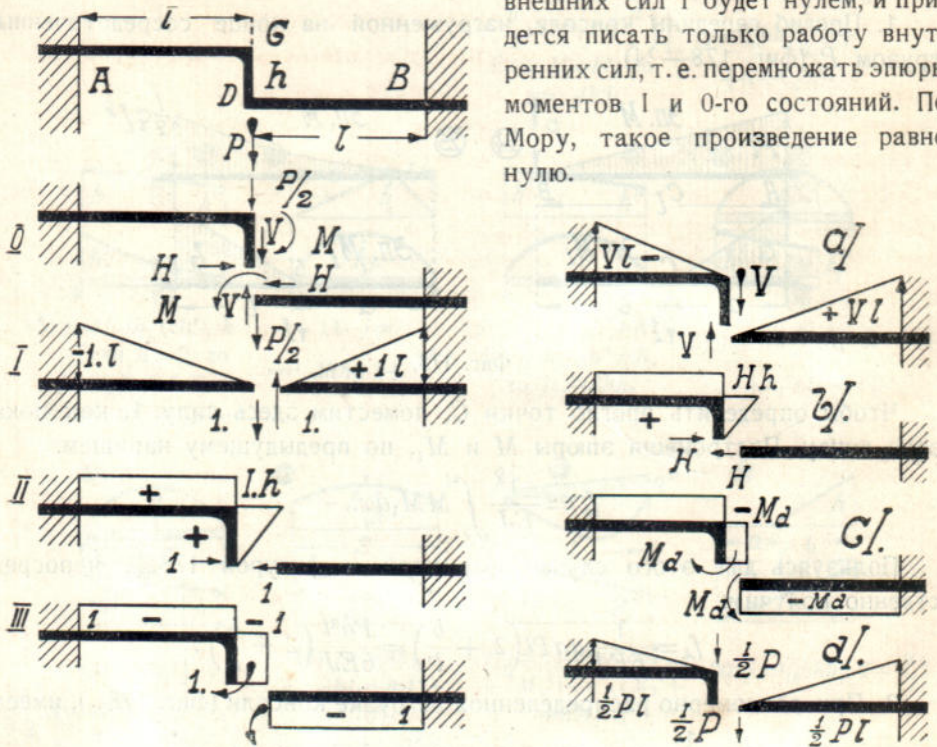
$$M = \frac{1}{2} qx^2 \text{ и } M_1 = 1 \cdot (x - a); \text{ поэтому прогиб}$$

$$f_c = \frac{1}{EJ} \int_a^l MM_1 dx = \frac{q}{2EJ} \int_a^l x^2(x - a) dx = \frac{ql^2}{24EJ} (6l^2 - 4lb + b^2).$$

3. Более сложный пример пользования таблицей интегралов 178 разобран применительно к расчету ступенчатой балки (фиг. 179). Разрежем балку в нижнем узле  $D$ , превращая ее в две консоли—при этом раскроются силы взаимодействия двух совпадающих сечений  $D$ , которые эквивалентны совокупности всех односторонних сил балки. В самом общем случае они заменяются силой  $R$  и парой  $M$ . Разлагая силу  $R$  неизвестного направления на составляющие  $V$  и  $H$ , придем к неизвестным:  $V$ ,  $H$  и  $M$ . Первая сила ( $V$  и  $-V$ ) препятствует сдвигу сечений в вертикальном направлении, вторая ( $H$  и  $-H$ ) препятствует разрыву совпадающих сечений, третья ( $M$  и  $-M$ ) — обеспечивает взаимную параллельность сечений, совпадающих в балке в действительности. Соответственно намеченным силам  $V$ ,  $H$  и  $M$  рассмотрим 3 фиктивных состояния си-



стемы: I, II и III с их эпюрами моментов. Составляя работу сил какого-нибудь из фиктивных состояний, например I, на перемещениях действительного состояния 0, мы должны принять в I-м, как внутренние, так и внешние силы. Но внешней обобщенной единице фиктивного состояния соответствует нулевая координата действительного состояния, ибо два вертикальных сечения, по которым раз'единены обе половины балки, в действительности сливаются и взаимно неподвижны. Следовательно, работа внешних сил 1 будет нулем, и придется писать только работу внутренних сил, т. е. перемножать эпюры моментов I и 0-го состояний. По Мору, такое произведение равно нулю.



Фиг. 179.

Чтобы удобнее пользоваться таблицей интегралов, представим нулевое состояние системы почленно, изображая эпюры отдельно для каждой из лишних неизвестных и отдельно для нагрузки  $P$ , как показано на фиг.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Тогда эпюры I придется умножить по очереди на все эпюры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  и сумму произведений приравнять нулю.

Сопоставляя I с  $a$ ) надо пользоваться формулой 1 из таблицы интегралов (178); сопоставляя I с  $b$ ), пользуемся формулой 8 и принимаем в произведении знак минус; для стойки  $h$  и для левой половины балки получаем нуль, и т. д.:

$$\frac{1}{3}l \cdot 1l \cdot Vl + \frac{1}{3}l \cdot 1l \cdot Vl - \frac{1}{2}lHh \cdot 1l + \frac{1}{2}l \cdot M \cdot 1l - \frac{1}{2}l \cdot M \cdot 1l + 0 + \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2}Pl^2 - \frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{2}Pl^2 = 0,$$

откуда  $V = \frac{3}{4}Hh:l \dots (250-a).$



Таким же образом для II и 0 состояний, получим:  $-\frac{1}{2} \cdot 1h \cdot Vl + l \cdot 1h \cdot Hh + \frac{1}{3} h \cdot 1h \cdot Hh - l \cdot 1h \cdot M - \frac{1}{2} h \cdot 1h \cdot M - \frac{1}{2} l \cdot 1h \cdot \frac{1}{2} Pl + 0 = -3Pl^2 - 6M(h+2l) + 4Hh(h+3l) - 6Vl^2 = 0 \dots (250-b)$ .

Для III и 0 имеем:  $-\frac{1}{2} l \cdot 1 \cdot Vl + \frac{1}{2} l \cdot 1 \cdot Vl - \frac{1}{2} h \cdot 1 \cdot Hh - l \cdot 1 \cdot Hh + l \cdot 1 \cdot M + h \cdot 1 \cdot M + l \cdot M \cdot 1 + \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} Pl \cdot 1 + \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} Pl \cdot 1 = Pl^2 + 2M(h+2l) - Hh(2l+h) = 0 \dots (250-c)$ .

Решение уравнений *a*, *b* и *c* не представляет затруднений.

**13. Расчет статически неопределимых пространственных ферм** по существу не отличается от расчета таких же плоских: в части разыскания лишних неизвестных он выполняется по рассмотренному уже правилу для статически неопределимых плоских ферм. Разница в расчете исчерпывается определением усилий в основной ферме, освобожденной от лишних связей, и не представляет каких-либо затруднений. Как и в плоских статически неопределимых фермах, здесь мы предварительно отбрасываем лишние связи, переходя к статически определимой ферме, и определяем усилия  $S_0$  во всех стержнях последней при действии нагрузки *P*. Затем, вместо лишней связи помещаем единицу и определяем усилия  $S_1$  в тех же стержнях. Составляя, по Мору, работу всех сил второго состояния: единицы и  $S_1$  на перемещениях первого состояния:  $\frac{Xl_x}{EF_x}$  и  $\frac{Sl}{EF}$ , мы приравняем ее нулю:

$$\Sigma S_1 \frac{Sl}{EF} + 1 \cdot \frac{Xl_x}{EF_x} = 0, \text{ или: } \Sigma \frac{S_1(S_0 + S_1 X)l}{EF} + 1 \cdot \frac{Xl_x}{EF_x} = 0,$$

$$\text{откуда } X = - \frac{\Sigma S_0 S_1 l}{\Sigma \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{EF_x}} \dots (a).$$

При нескольких лишних связях единица прикладывается вместо каждой из них в отдельности и получается ряд фиктивных состояний, доставляющих усилия  $S_x, S_y, S_z \dots$ . В соответствии с этим в действительном состоянии системы получается усилие  $S = S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z \dots$ , так что работа при первом сопоставлении состояний будет:

$$\Sigma S_x (S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) l : EF + 1 \cdot Xl_x : EF_x = 0;$$

при другом сопоставлении:

$$\Sigma S_y (S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) l : EF + 1 \cdot Yl_y : EF_y = 0 \text{ и т. д.}$$

Число таких уравнений совпадает с числом неизвестных, так что, последние определяются. Когда же найдены лишние неизвестные, усилие в любом из стержней основной фермы вычисляется по формуле:

$$S = S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z \dots (b),$$

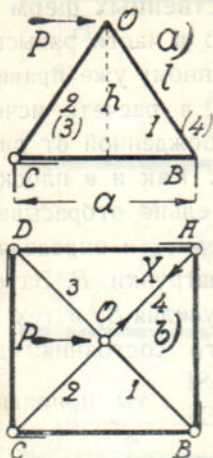
для которой уже подготовлены все необходимые величины.

Покажем применение этой программы расчета к четырехгранному шпицу фиг. 180. Шпиц опирается на квадратное стержневое кольцо, надлежащим образом прикрепленное к земле<sup>1)</sup>, и нагружен в вершине горизонтальной

<sup>1)</sup> См. § 94,2 выпуска: Системы без лишних стержней.



силой  $P$ , лежащей в плоскости одной из боковых граней шпика. Будем считать стержень  $OA$  лишним, отбросим его и для основной системы из трех стержней определим усилия от  $P$ <sup>1)</sup>. Называя их  $S_0$ , поместим в 3-ий столбец таблицы. Затем приложим единицу силы вместо  $X$ , получим 4-й столбец. По ним составляем 5-й и 6-й столбцы, необходимые для формулы (а). Суммируя строки в каждом из последних столбцов, получаем числителя и знаменателя дроби (а). Определив по ней  $X$ , вычисляем по (b) строки последнего столбца.



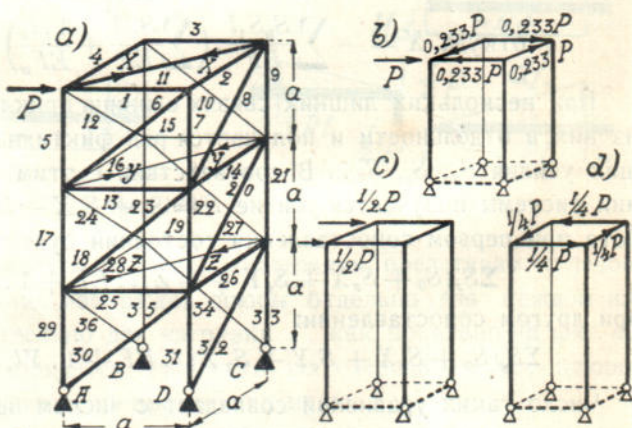
Фиг. 180.

Сечения всех стержней приняты одинаковыми.

№ стержня	Длина	$S_0$	$S_1$	$S_0 S_1$	$S_1^2$	$S$
1	$l$	$-\frac{Pl}{a}$	$-1$	$+\frac{Pl}{a}$	$1$	$-\frac{Pl}{2a}$
2	$l$	$+\frac{Pl}{a}$	$+1$	$+\frac{Pl}{a}$	$1$	$+\frac{Pl}{2a}$
3	$l$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$+\frac{Pl}{2a}$
4	$l$	лишний	стержень			$X = -\frac{Pl}{2a}$
$\Sigma = 2 \frac{Pl}{a}$					$\Sigma_1 = 3$	

Пример расчета призматического столба с 3-мя лишними стержнями приведен на фиг. 181.

Из теории пространственных ферм известно, что для статической определенности призматической фермы с двухстержневыми опорными узлами требуется отсутствие внутренних стержней и открытая вершина<sup>2)</sup>. Расчет таких систем не представляет затруднений. Поэтому данную ферму фиг. 181 приведем к этому основному типу, отбрасывая 3 внутренних стержня, идущие по диагоналям горизон-



Фиг. 181-a-d.

<sup>1)</sup> Конечно, для этого частного случая расположения груза, можно получить усилия и проще, а именно, пользуясь симметрией: не выбрасывая лишнего стержня, можно считать, что каждая из наклонных граней  $COB$  и  $DOA$  воспринимает половину груза  $P$ . Тогда придется только разложить  $1/2 P$  в фасаде, чтобы получить вертикальные составляющие усилий, и в плане—чтобы получить их горизонтальные составляющие. Каждый раз сила  $1/2 P$  раскладывается на 2 составляющие простым построением треугольника.

<sup>2)</sup> См. напр., § 94 нашего выпуска: „Системы без лишних стержней“.



тальных квадратных поясов; их усилия будем считать лишними неизвестными и обозначим  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Расчитывая основную ферму от груза  $P$ , действующего на вершину передней грани призмы, мы убедимся, что работает только эта грань<sup>1)</sup>, и получим усилия из плоской диаграммы. Эти усилия помещены во 2-м столбце нижеследующей таблицы.

Отбросим  $P$  и нагрузим ту же основную призму силой 1 вместо верхней горизонтальной диагонали. Простым разложением этой единицы на грани призмы снова сведем задачу на плоскость и получим усилия  $S_x$ , помещенные в 3-м столбце той же таблицы.

Таким же образом поступаем со средней и отдельно с нижней горизонтальной диагональю пространственной фермы—получим усилия  $S_y$  и  $S_z$ , помещенные в 4-м и 5-м столбцах таблицы (см. табл. на стр. 228).

Теперь уравнения Мора дадут:

$$\Sigma S_x(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) \frac{l}{EF} + 1 \cdot \frac{Xl_x}{EF_x} = 0$$

$$\Sigma S_y(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) \frac{l}{EF} + 1 \cdot \frac{Yl_y}{EF_y} = 0$$

$$\Sigma S_z(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) \frac{l}{EF} + 1 \cdot \frac{Zl_z}{EF_z} = 0,$$

а если, для простоты вычислений, допустить, что растяжимость, т. е.  $l:EF$  всех стержней одинакова и принять в  $45^\circ$  углы между стержнями то получим по таблице:

$$88X + 47Y + 15Z = -22\sqrt{2} P$$

$$47X + 32Y + 11Z = -12\sqrt{2} P$$

$$15X + 11Y + 8Z = -4\sqrt{2} P.$$

Решая эти уравнения, получим:

$$X = -0,2327\sqrt{2} P, \quad Y = -0,0215\sqrt{2} P \text{ и } Z = -0,0341\sqrt{2} P.$$

Все лишние стержни сжаты. Их влияние на основную ферму представлено на фиг. 181—*b*. Рассмотрим отдельное действие силы  $X$ . Разлагая ее по граням призмы на фиг. *b*), мы получаем такие же четыре стрелки, как при сдвиге. Очевидно, от лишних усилий основная призматическая ферма испытывает перекашивание. Сила  $P$ , приложенная к верхнему основанию призмы эксцентрично, производит скручивание. Совокупное действие лишнего неизвестного  $X$  и силы  $P$  можно представить приближенно, как две силы по  $1/2 P$  фигуры *c*) и две односторонние крутящие пары фигуры *d*). Действительно, складывая вместе группы сил *d*) и *c*), мы приближенно получим результат *b*); кроме того, сумма сил получается  $P$  и момент их относительно центральной оси— $1/2 Pa$ . Следовательно, полный расчет призматической фермы приводится к расчету двух плоских ферм по фигуре *c*) и четырех плоских ферм по фигуре *d*). Результаты расчета должны быть сложены.

<sup>1)</sup> См. § 93 нашего выпуска: „Системы без лишних стержней“.



№	$S_0$	$S_x$	$S_y$	$S_z$	$S_x^2$	$S_y^2$	$S_z^2$	$S_0 S_x$	$S_0 S_y$	$S_0 S_z$	$S_x S_y$	$S_x S_z$	$S_y S_z$
1	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$\sqrt{2}$	1	0	0	1	0	0	$\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
7	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	0
8	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
14	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
16	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0
18	$\sqrt{2}$	1	1	0	1	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	1	0	0



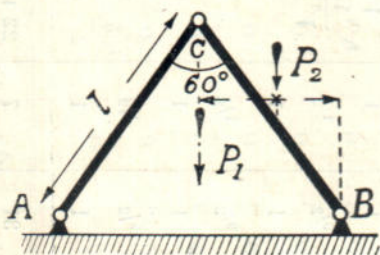
19	-2	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
20	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
21	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	0
22	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
23	0	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{8}{2}$	0	0
24	0	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
25	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
26	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
27	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
28	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
29	2	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{25}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$5\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
30	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1	1	1	1
31	-3	$-\frac{5}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{25}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
32	0	-1	-1	-1	1	1	-1	0	0	1	1	1	1	1
33	0	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{23}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
34	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
35	0	$-\frac{5}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{25}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
36	0	-1	-1	-1	1	1	-1	0	0	0	0	1	1	1
				$\Sigma =$	87	31	7	22	12	4	47	15	11	



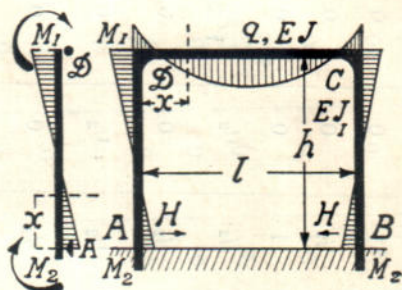
Сравним эти выводы с теми результатами, которые получаются при таком же расположении силы  $P$  в статически определимой призматической ферме. В последней работает только передняя грань; усилия остальных граней—нулевые. Нагрузка  $P$  полностью воспринимается передней гранью<sup>1)</sup>. В статически же неопределимой ферме, благодаря наличности лишних диагоналей в горизонтальных плоскостях, нагрузка  $P$  передается и на другую параллельную плоскую ферму и притом, при достаточной жесткости этих диагоналей,—едва ли не на половину. Благодаря тем же диагоналям, к работе привлекаются и перпендикулярные грани, отвечающие на крутящий момент эксцентричной нагрузки  $P$ .

**14. Задачи.** а) Определить изменение углов в трехшарнирной арке из прямых двух брусьев  $AC$  и  $CB$  фиг. 181-е, рассмотрев отдельно 2 случая нагрузки:

- 1) вертикальный груз  $P_1$  в ключе.
- 2) вертикальный груз  $P_2$  по середине полуарки.
- б) Определить угол поворота опорного сечения  $A$  крана фиг. 110.



Фиг. 181-е.



Фиг. 181-ф.

с) Определить прогиб конца ломанного бруса фиг. 66 при горизонтальной и отдельно при вертикальной нагрузке  $P$ .

д) Определить лишнюю реактивную силу  $A$  для того же бруса фиг. 110.

е) Определить лишние неизвестные в ломанном бруске фиг. 179, но при грузе  $P$ , расположенном по середине пролета  $l$  половины балки, либо при равномерной нагрузке  $q$  на одном из пролетов  $l$ .

ф) Определить угловые моменты для рамы фиг. 181-ф) при равномерной нагрузке. Указание. Рекомендуется разрезать балку  $CD$  по середине.

г) Ту же задачу сделать в предположении, что по середине балки  $CD$  имеется шарнир.

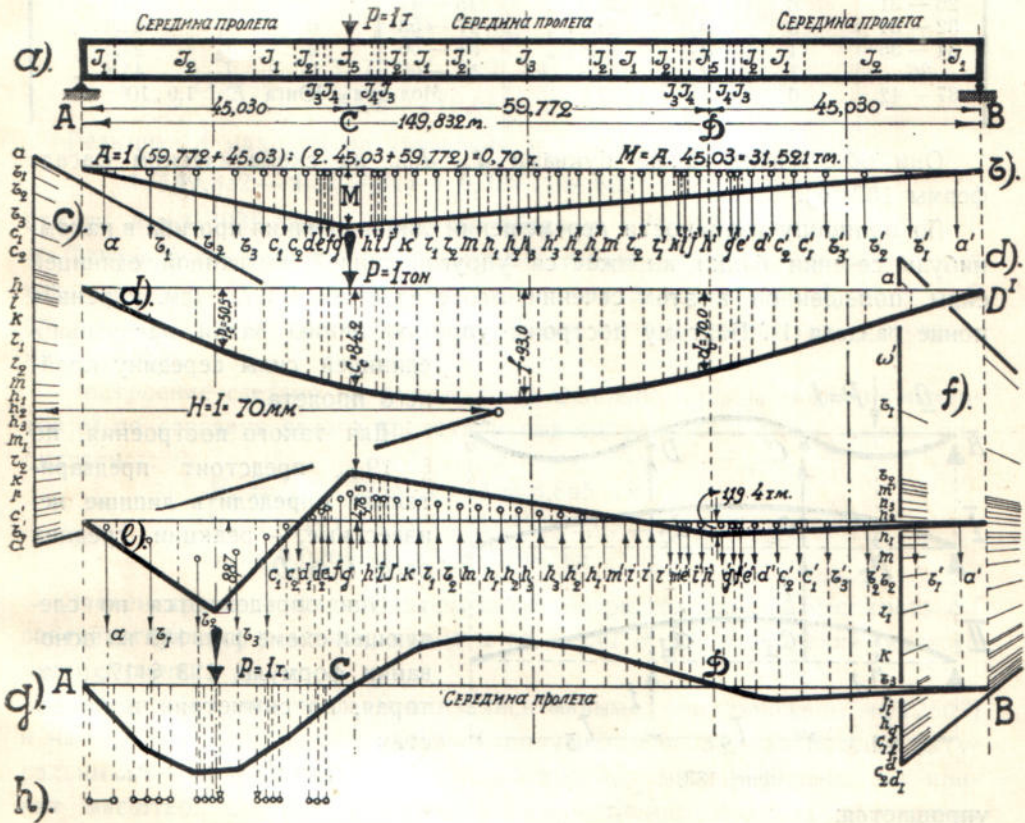
h) Определить, какое участие принимают продольные горизонтальные связи пролетного строения двухпутного моста с ездой по верху, когда поезд проходит по одному пути; другой же путь свободен от поезда. Рассмотреть случай фермы с параллельными поясами и треугольной решеткой, расположенной только по поверхности пролетного строения (статически определимая пространственная ферма) и опоры с наименьшим практикуемым числом лишних неизвестных (на одном конце: неподвижная

<sup>1)</sup> См. § 93 выпуска: «Системы без лишних стержней».



и цилиндрическая, а на другом две шаровые подвижные). Рассмотреть отдельно случай внутренних стержней (поперечные связи мостовых ферм) при статически определимых опорах.

§ 20. Примеры расчета стержневых ферм. 1. Расчет прогиба трех-пролетной фермы при подвижной нагрузке. Построим линию влияния для прогиба по середине крайнего пролета многошароватой неразрезной



Фиг. 182.

фермы жел. дорожного моста. На фиг. 182 показаны пролеты моста, общая длина которого составляет 149,832 метра. Число панелей: в крайних пролетах по 40, в среднем пролете — 50. Высота ферм 15,023 метра.

Сечения поясов этой фермы подобраны соответственно величине изгибающих моментов; они не одинаковы, и предстоит решить задачу о построении линии влияния для фермы переменной жесткости. В виду применения в этой ферме очень частой решетки при сравнительно жестких поясах и малых панелях, приближенно, принимают решетчатую ферму за балку, со сплошной стенкой, но пренебрегают моментом инерции стенки. Моменты инерции поясов относительно средней (нейтральной) оси фермы, в порядке номеров панелей, считая от левого конца фермы, приведены в следующей таблице:

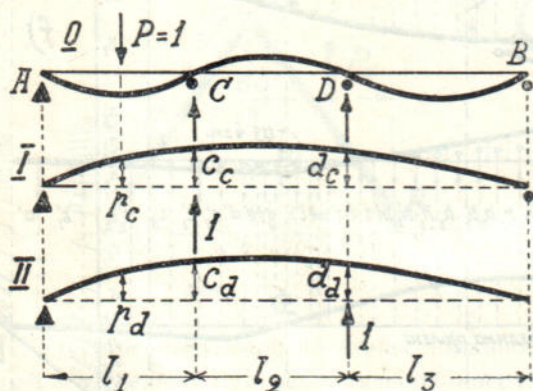


Таблица моментов инерции поясов.

№ панели	Число панелей	Момент инерции поясов см. <sup>4</sup>		№ панели	Число панелей	Момент инерции поясов см. <sup>4</sup>	
1 — 5	5	$J_1$	22,6 · 10 <sup>6</sup>	43	1	$J_4$	51,8 · 10 <sup>6</sup>
6 — 25	20	$J_2$	24,2 „	44	1	$J_3$	45,8 „
26 — 31	6	$J_1$	22,6 „	45 — 47	3	$J_2$	24,2 „
32 — 34	3	$J_2$	24,2 „	47 — 53	6	$J_1$	22,6 „
34 — 35	1	$J_3$	45,8 „	54 — 56	3	$J_2$	24,2 „
36	1	$J_4$	51,8 „	57 — 65	9	$J_3$	45,8 „
37 — 42	6	$J_5$	57,8 „	Мод. дуль Юнга $E$			1,9 · 10 <sup>6</sup>

Они обозначены также буквами  $J_1, J_2, \dots$  на схематическом фасаде фермы 182-а).

По принципу взаимности перемещений линия влияния прогиба в каком-нибудь сечении балки выражается упругой линией, вызванной единицей силы, помещенной в этом сечении; это следует из § 17,11, (см. курсив в конце раздела 1). Поэтому построим упругую линию балки, нагрузивши



Фиг. 183.

единицей силы середину крайнего пролета.

Для такого построения, по § 19,2с, предстоит предварительно определить лишние неизвестные, — реакции средних опор  $C$  и  $D$ .

Они определяются по следующей схеме фиг. 183 на основании формулы 213 § 17,7, которая, по симметрии и равенству

$$c_c = d_d \text{ и } d_c = c_d,$$

упрощается:

$$C = \frac{p_c d_d - p_d c_d}{c_c^2 - d_c^2} \text{ и}$$

$$D = \frac{p_d c_c - p_c d_c}{c_c^2 - d_c^2} \dots \dots \dots (251).$$

Чтобы определить необходимые для подстановки прогибы  $p, c$  и  $d$ , воспользуемся графическим приемом, наиболее удобным при переменном сечении. Построение сделано на фиг. 182.

На фиг. б) построена эпюра моментов (в виду простоты ордината под точкою  $C$ , а именно  $M = 31,521$  тм., вычислена, как показано над треугольной эпюрой б).

Каждую половину балки разбиваем на 20 участков с таким расчетом, чтобы в каждом участке был постоянный момент инерции и чтобы длина участков была более или менее однообразная для достаточного числа переломов веревочной кривой. Вычисляем площади  $\omega$  участков эпюры



моментов в тонно-метр-квadrатах и делим на соответствующие моменты инерции  $J$  и модуль  $E$ . Из полученных таким путем сил  $P'$  строим многоугольник фиг.  $c$ ) и веревочную кривую фиг.  $d$ ). Из нее непосредственно получаем в мм.:

$$p_c = 50,5, \quad p_d = 38,7, \quad c_c = 84,2 \text{ и } d_c = 70,0.$$

Следовательно:

$$C = \frac{50,5 \cdot 84,2 - 38,7 \cdot 70,0}{84,2^2 - 70,0^2} = 0,707 \text{ тонн.}$$

$$D = \frac{-50,5 \cdot 70,0 + 38,7 \cdot 84,2}{84,2^2 - 70,0^2} = -0,127 \text{ тонн}^1).$$

Реакцию  $A$  находим из уравнения моментов относительно  $B$ :

$$A \cdot 149,832 - 1 \cdot 127,317 + 0,707 \cdot 104,802 - 0,127 \cdot 45,03 = 0,$$

откуда  $A = 0,3935$  тонн. Таким же образом —  $B = 0,0265$  тонн.

Теперь уже может быть построена линия прогибов. Для известных внешних сил: 1 по середине левого пролета и реакций  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  строим эпюру моментов и по ней — второй многоугольник сил и веревочную кривую.

Построение сделано на фиг.  $e$ ,  $f$  и  $g$ . Основные ординаты эпюры моментов  $e$ ) по середине левого пролета и под опорами  $C$  и  $D$  вычислены; они оказались:

$$M_p = 1/2 \cdot 0,3935 \cdot 45,03 = 8,865 \text{ тм.}$$

$$M_c = 0,3935 \cdot 45,03 - 1 \cdot 1/2 \cdot 45,03 = -4,78 \text{ тм.}$$

$$M_d = 0,0265 \cdot 45,03 = 1,194 \text{ тм.}$$

Элементарные площади  $\omega$  эпюры моментов, разделенные на жесткость  $EJ$  соответствующих участков, приняты за грузы  $\Theta$  для построения силового многоугольника  $f$ ).

В виду того, что числа  $\Theta$  оказались малыми, они умножены на  $1250^2$ ) и на 30, так что прогибы должны получиться в 30 раз больше натуральных. При откладывании  $\Theta$  для построения многоугольника сил принят масштаб: единица = 40 мм., поэтому полюс взят на расстоянии  $H = 40$  мм., так как по § 25*d*, длина нормального луча составляет единицу. Следовательно, для вычисления числа миллиметров, которыми надо выражать в многоугольнике сил каждый элемент эпюры моментов, приходится пользоваться формулою;

$$\omega' = \frac{\omega}{EJ} \cdot 1250 \cdot 30 \cdot 40 = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\omega}{EJ} \text{ мм.}$$

Такие отрезки  $\omega'$  откладывались на фигуре  $f$ ) до пунктов  $a$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_2$ ,  $d_1$  — по ним и лучам, проведенным к полюсу (вышедшему из пределов чертежа вправо) построена веревочная кривая фиг.  $g$ ).

Контролем правильности построения служит одновременное прохождение замыкающей через 4 нулевые точки  $ACDB$  фиг.  $g$ ).

Чтобы вычислить прогиб от поезда, устанавливаем последний в опас-

<sup>1)</sup> Так как реакции определяются из соотношения, то масштаб не имеет значения.

<sup>2)</sup> Масштаб длины, в котором изготовлено клише для книги.



ное положение, руководствуясь критерием для общего случая очертания линий влияния<sup>1)</sup>: на фиг. *h*) над серединою средней панели поставлено переднее колесо второго паровоза. Прогиб оказался 20,5 мм.<sup>2)</sup>, что составляет  $20,5 : 45030 = 1 : 2198$  от пролета. Отдельные ординаты линии влияния достигают 0,38 миллиметра.

**2. Построение линий влияния для серповидной двухрешетчатой фермы фиг. 184.**

Пояса фермы постоянного сечения: нижний 70 см.<sup>2</sup>, верхний 80 см.<sup>2</sup>; длина панели нижнего пояса 3 м., верхнего — 3,76 м. Размеры решетки приведены в следующей таблице.

№ стержня . . . . .	17	18	19	20	21	22	23	24	25
длина, м. . . . .	1,7	3,8	4,2	4,5	4,9	5,0	5,2	5,0	5,2
поп. сечение, см. <sup>2</sup> . . . . .	30	40	40	30	30	30	30	30	30

а) Линия влияния для стержня решетки. Считаем стержень *PF* лишним и помещаем вместо него единицу (фиг. *b*); на фигуре *d*) строим диаграмму усилий. При этом имеем в виду, что опорные реакции *A* и *K*—нули, рассекаем ферму через стержни 13, 24 и 5 фигуры *a*) и единицу силы левой части фермы разлагаем, по Кульману, на 3 направления. На фиг. *b*) и *d*) для диаграммы усилий принято двойственное обозначение<sup>3)</sup> и масштаб: единица силы = 20 мм. Разложение выполняется на фиг. *d*) в таком порядке: штрих—пунктирная единица силы 12—13 разлагается на направления 13—1 и вспомогательное пунктирное *PE* = 12—1. затем вспомогательный вектор *PE* (12—1) разлагается на 1—11 и 12—11; Дальнейшее построение диаграммы для левой половины фермы не отличается от обычного<sup>4)</sup>. По аналогии строится диаграмма и для правой части фермы.

Полученные усилия дают таблицу для удлинений:

№ стержня . . . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
усилие в т. . . . .	0,0	2,0	-1,0	0,7	-0,7	1,0	-2,0	0	0	1,86
удлинение в мм. . . . .	0	0,043	-0,022	0,015	-0,015	0,022	-0,043	0	0	0,044

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
-0,78	0,62	-0,62	0,78	-1,86	0,0	1,64	-2,28	-2,32	1,28	1,26	-0,97
-0,018	0,015	-0,015	0,018	-0,044	0,0	0,035	-0,011	-0,122	0,090	0,103	-0,061

23	24	25	26	27	28	29	30
-1,0	0,97	1,0	-1,26	-1,28	2,28	2,32	-1,64
-0,087	0,061	-	-0,103	-0,090	0,011	0,122	-0,035

Построение диаграммы Виллио на фигуре *c*) начинают со стержня 17 фигуры *a*) и проходят по узлам *CMDNEP* и *R*.

Чтобы получить положение узла *F*, необходимо распорядиться изменением расстояния между *R* и *F*. Так как это изменение равно изменению расстояния между *N* и *D*, уже полученному на диаграмме, то проектируем точки *n* и *d* диаграммы на направление *ND*, перенесенное на диаграмму в положение *N'D'*. После этого *N'D'* переносим к точке *r*

<sup>1)</sup> См. Системы без лишних стержней § 56.<sub>1</sub>.

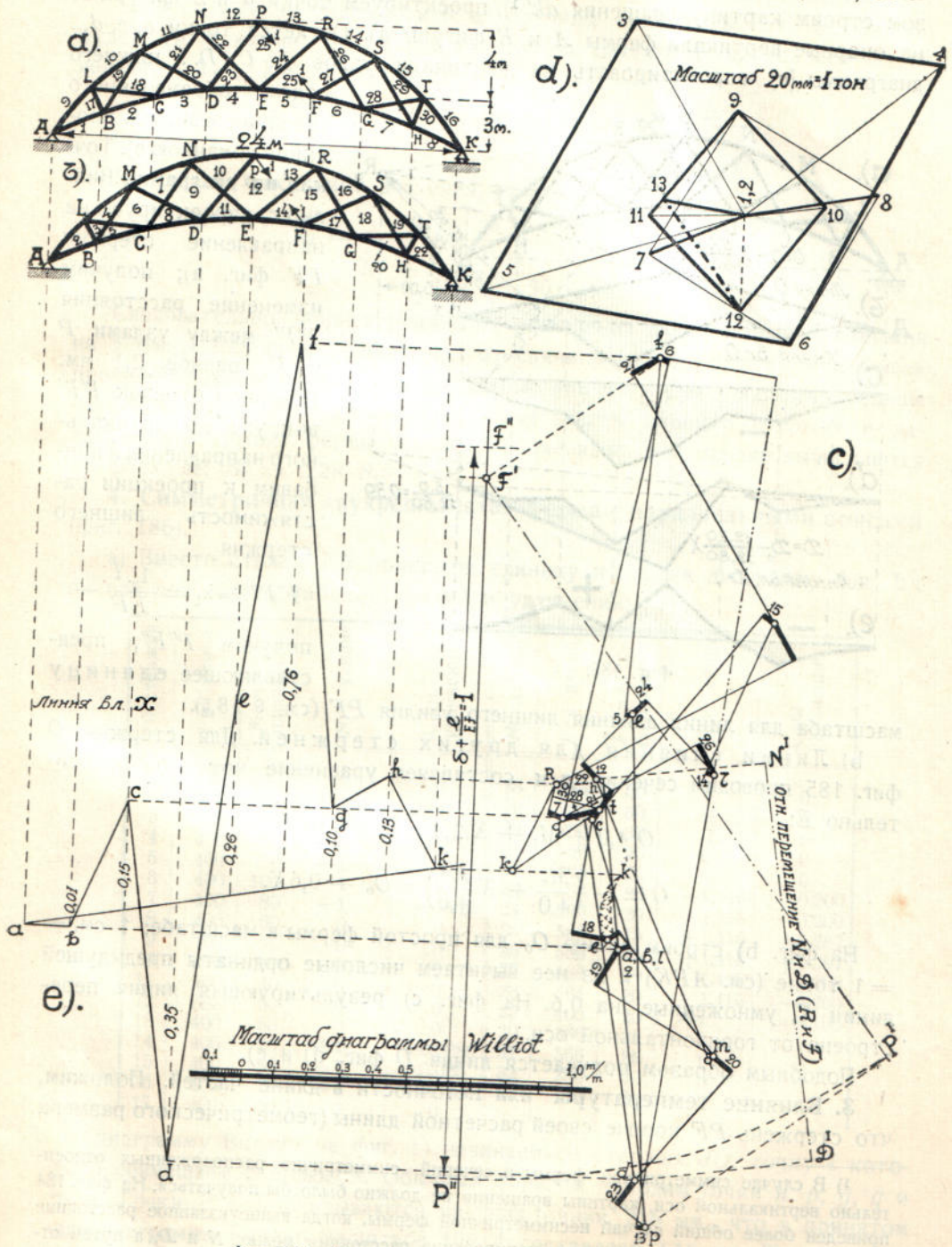
<sup>2)</sup> Не следует искать этого числа непосредственно на чертеже, так как оно получается путем суммирования по формуле  $\Sigma P y$ .

<sup>3)</sup> Согласно § 36.<sub>1</sub> наших „Систем без лишних стержней“.

<sup>4)</sup> См. наши „Системы без лишних стержней“ § 36.<sub>1</sub>.



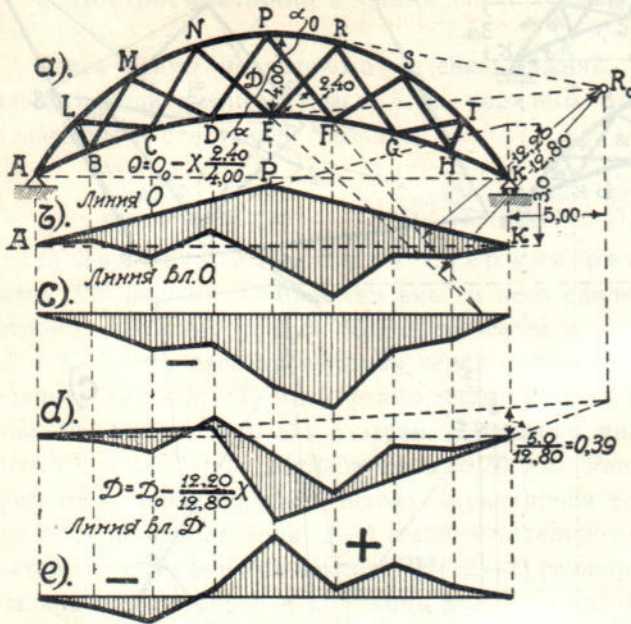
диаграммы, откладываям вверх, по направлению  $RF$  (штрих—бипунктирный вектор), и вверху восстанавливаем перпендикуляр; с другой стороны, от  $e$



Фиг. 184. Линия влияния для лишнего усилия.



откладываем удлинение ( $-5$ ) и восстанавливаем перпендикуляр. Получаем точку  $f$  и за ней — все последующие узлы до  $K$ . Наконец, обычным образом строим картину вращения  $ak'$ <sup>1)</sup>, проектируем точки  $a$  и  $k'$  фигуры  $c$ ) на опорные вертикали фермы  $A$  и  $K$  фигуры  $a$ ). Остается точки  $b, c, d...$  диаграммы  $c$ ) спроектировать на вертикали узлов  $B, C, D...$  нижнего



Фиг. 185.

масштаба для линии влияния лишнего усилия  $PF$  (см. § 18,2).

б) Линии влияния для других стержней. Для стержня  $O$  фиг. 185 проводим сечение  $a$  и составляем уравнение моментов относительно  $E$ :

$$0.4,0 + M_e + X.2,4 = 0, \text{ откуда:}$$

$$O = - \left( \frac{M_e}{4,0} + X \frac{2,4}{4,0} \right) = O_0 - 0,6X.$$

На фиг. б) строим линию  $O_0$  для простой фермы в масштабе: 1 см. = = 1 тонне (см.  $APK$ ) и из нее вычитаем числовые ординаты предыдущей линии  $X$ , умноженные на 0,6. На фиг. в) результирующая линия перестроена от горизонтальной оси.

Подобным образом получается линия  $D$  фиг. д) и е).

**3. Влияние температуры** или неточности в длине частей. Положим, что стержень  $PF$  короче своей расчетной длины (геометрического размера

<sup>1)</sup> В случае симметричной фермы и сечений, симметрично расположенных относительно вертикальной оси, картины вращения не должно было бы получаться. На фиг. 184 приведен более общий случай несимметричной фермы, когда вышеуказанное расстояние между  $R$  и  $F$  получается не путем копирования расстояния между  $N$  и  $D$ , а путем отдельного построения диаграммы для правой части фермы  $HTRF$ , начиная с бруска  $30$  фиг. а). При этих условиях появлялась картина вращения  $a'h'$  фиг. с).

пояса, обремененного ездой, и соединить проекции ломанной  $e$ ). Точки  $f$  и  $p$  диаграммы Виллио  $c$ ) спроектируем на направление стержня  $PF$  фиг. а); получим изменение расстояния  $P'F'$  между узлами  $P$  и  $F$ , равное 2,1 мм. Повернем отрезок  $P'F'$  вокруг  $F'$  до вертикального направления и прибавим к проекции растяжимость лишнего стержня

$$F'F'' = \lambda_1 = \frac{1 \cdot l}{EF} -$$

получим  $P''F''$ , представляющее единицу



по схеме фермы) на  $\Delta = 5$  мм. При помещении стержня в ферму получается усилие  $X_t$ , которое находится из следующего рассуждения:

Если сближение узлов  $P$  и  $F$  от единицы силы есть  $\delta$ , то от  $X_t$  оно будет  $X_t \cdot \delta$ ; кроме того, лишний стержень растягивается усилием  $X_t$  на величину  $X_t l_x : EF_x$ ; поэтому:

$$\Delta = X_t \delta + X_t l_x : EF_x; \text{ откуда } X_t = \frac{\Delta}{\delta + \frac{1 \cdot l_x}{EF_x}}$$

Подставляя численные значения, найдем:

$$X_t = \frac{5}{2,1 + \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 5200 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^2}} = 2,28.$$

Следовательно, лишнее усилие от изменения длины лишнего стержня на 5 мм. в 2,28 раза больше, чем от единицы силы. Поэтому и для всех прочих стержней фермы дополнительные усилия будут в 2,28 раз больше чем от единицы, применявшейся прежде вместо лишнего стержня и дававшей в стержнях фермы усилие  $S_1$ . Очевидно, эти усилия вычисляются по формуле:  $S_t = 2,28 S_1$ .

**4. Симметричная двухрешетчатая ферма с параллельными поясами** (фиг. 186).

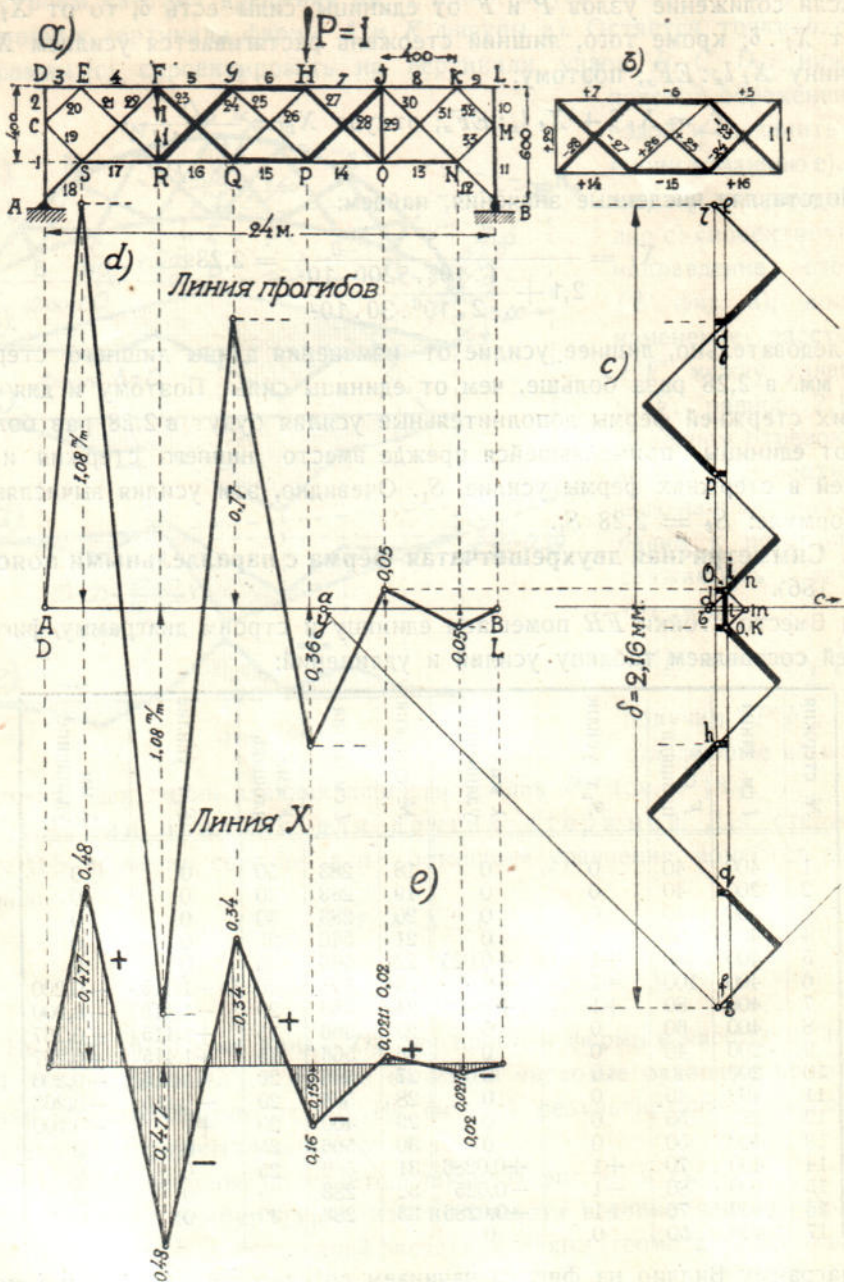
а) Вместо стойки  $FR$  помещаем единицу и строим диаграмму фиг. б); по ней составляем таблицу усилий и удлинений:

№ стержня	$l$ см. длина	$F$ см. <sup>2</sup> площадь	$S_1$ т. усилие	$\lambda$ мм удлинение	№ стержня	$l$ см. длина	$F$ см. <sup>2</sup> площадь	$S_1$ т. усилие	$\lambda$ мм удлинение
1	400	40	0	0	18	283	50	0	0
2	200	40	0	0	19	283	30	0	0
3	200	40	0	0	20	283	30	0	0
4	400	60	0	0	21	566	25	0	0
5	400	80	+1	+0,025	22	566	25	0	0
6	400	100	-1	-0,020	23	566	20	-1,415	-0,200
7	400	80	+1	+0,025	24	566	20	-1,415	-0,200
8	400	60	0	0	25	566	15	+1,415	+0,267
9	200	40	0	0	26	566	15	+1,415	+0,267
10	200	40	0	0	27	566	20	-1,415	-0,200
11	400	40	0	0	28	566	20	-1,415	-0,200
12	283	50	0	0	29	400	20	+1	+0,100
13	400	50	0	0	30	566	25	0	0
14	400	70	+1	+0,0286	31	566	25	0	0
15	400	80	-1	-0,025	32	283	30	0	0
16	400	70	+1	+0,0286	33	283	30	0	0
17	400	50	0	0					

Диаграмму Виллио на фиг. с) начинаем со стержня  $JO$ , точку  $i$  которого совмещаем с полюсом. Обычным образом находим точки  $h, p, g, q$  и т. д. Точки  $F$  и  $R$  оказываются на расстоянии 216 мм., что в принятом для диаграммы Виллио масштабе 100:1 составляет 2,16 мм. Точки  $a$  и  $b$  диаграммы оказываются на одном уровне, и на том же уровне находятся и точки  $d$  и  $l$  нагруженного верхнего пояса. Принимая на фиг. д) за ось



абсцисс прямую  $AB$  на уровне  $a$  и  $b$  диаграммы  $c$ ), получим линию прогибов. На фиг.  $d$ ) надписаны в мм. прогибы узлов верхнего нагруженного пояса.



Фиг. 186.

Чтобы получить линию влияния для лишнего стержня  $FR$ , делим ординаты фиг.  $d$ ) на число  $2,16 + \frac{1 \cdot l_x}{EF_x} = 2,16 + \frac{1000 \cdot 400 \cdot 10}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = 2,26$ . Результаты деления написаны на фиг.  $e$ ).



Чтобы определить знаки ординат, поместим груз  $P$  в одном из узлов фермы, например в  $H$  (фиг. а), и составим для этого случая примерное уравнение взаимности в предположении, что неизвестное  $X$  представляет растяжение:

$$+ Py + X \cdot \delta(FR) = -1 \cdot \frac{Xl_x}{EF_x} \dots (252).$$

Первые два члена положительны, так как сила и перемещение идут в одну сторону; в последнем члене, наоборот, они противоположны.

Из (252) находим отрицательный знак для  $X$ :

$$X = - \frac{Py}{\delta(FR) + \frac{1 \cdot l_x}{EF_x}}.$$

Следовательно, ордината фиг. е) под узлом  $H$  оказывается отрицательной. Ею определяются также знаки остальных ординат.

б) При построении линий влияния для других стержней фермы, теперь уже не содержащей лишних неизвестных, удобно пользоваться кинематическим способом<sup>1)</sup>. Мы отбрасываем стержень, для которого надо построить линию влияния и даем ему удлинение 1, как базу для построения диаграммы Виллио. Проектируя точки диаграммы на вертикали соответствующих узлов, получим линию для стержня основной фермы; остается сложить ее с линией для  $X$ , фигуры 186 — е), умноженную на число  $S_1$  из таблицы усилий, определенных при единице вместо лишнего неизвестного<sup>2)</sup>. Сложение выполняется по общим правилам сложения линий влияния.

Кинематический способ построения линий влияния для статически неопределимых двухрешетчатых ферм оказывается удобным, если требуется построить небольшое число линий влияния. При полном же расчете фермы, когда строят линии для всех стержней, потребуется построение столько диаграмм Виллио, сколько ферма имеет стержней или, в случае симметричной фермы,—на половину меньше. Поэтому при полном расчете двух решетчатых ферм скорее ведет к цели определение ординат линий влияния посредством диаграммы усилий при последовательной установке груза, как показано на фиг. 187<sup>3)</sup>.

Помещая груз 1 тонна последовательно в узлы II, III, IV... VII, строим диаграммы усилий, которые, в совокупности, дают сразу все ординаты для любого стержня фермы. Следовательно, мы имеем материал для построения линий всех стержней фермы.

Конечно, груз 1 т. надо поместить и в узлы I и VIII, хотя при этом усилия всех стержней равны нулю, кроме стержней 1 и 2, имеющих единицу при расположении груза в узле I, и стержней 10 и 11, также имеющих единицу, когда груз находится в узле VIII.

<sup>1)</sup> См. наши Системы без лишних стержней, § 62.<sub>2</sub>.

<sup>2)</sup> См. § 18.<sub>3</sub>.

<sup>3)</sup> Этот пример разработан инж. Н. Н. Жудиным.







На фиг. 187 построено 6 таких диаграмм усилий и по ним составлены таблицы ординат линий влияния.

Таблица ординат линий влияния основной фермы.

№ стержня	№ ординаты (диаграммы)							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	-1	-0,916	-0,75	-0,584	-0,416	-0,25	-0,0833	0
2	-1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	+0,02	-0,74	-0,57	-0,42	-0,25	-0,085	0
5	0	-0,83	-0,48	-1,15	-0,84	-0,50	-0,17	0
6	0	+0,25	-1,23	-0,75	-1,26	-0,75	-0,26	0
7	0	-0,67	+0,03	-1,32	-0,68	-1,00	-0,34	0
8	0	-0,08	-0,25	-0,42	-0,59	-0,75	+0,085	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-1
11	0	-0,0833	-0,25	-0,416	-0,584	-0,75	-0,916	-1
12	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	+0,08	+0,26	+0,42	+0,59	+0,75	+0,93	0
14	0	-0,34	+0,98	+0,33	+1,70	+1,00	+0,34	0
15	0	+0,75	+0,23	+1,74	+1,26	+0,75	+0,26	0
16	0	-0,16	+1,48	+1,16	+0,84	+0,50	+0,17	0
17	0	+0,92	+0,74	+0,57	+0,42	+0,25	+0,085	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	+0,65	+0,53	+0,41	+0,30	+0,18	+0,06	0
20	0	-0,65	-0,53	-0,41	-0,30	-0,18	-0,06	0
21	0	-0,76	+0,53	+0,41	+0,30	+0,18	+0,06	0
22	0	-0,65	-0,53	-0,41	-0,30	-0,18	-0,06	0
23	0	+0,65	-0,89	+0,41	+0,30	+0,18	+0,06	0
24	0	+0,76	-0,53	-0,41	-0,30	-0,18	-0,06	0
25	0	-0,76	+0,53	-0,99	+0,30	+0,18	+0,06	0
26	0	-0,65	+0,89	-0,41	-0,30	-0,18	-0,06	0
27	0	+0,65	-0,89	+0,41	-1,13	+0,18	+0,06	0
28	0	+0,76	-0,53	+0,99	-0,30	-0,18	-0,06	0
29	0	-0,50	+0,50	-0,50	+0,50	-0,50	+0,50	0
30	0	-0,06	-0,18	-0,30	-0,41	-0,53	-0,65	0
31	0	+0,06	+0,18	+0,30	+0,41	+0,53	-0,78	0
32	0	-0,06	-0,18	-0,30	-0,41	-0,53	-0,65	0
33	0	+0,06	+0,18	+0,30	+0,41	+0,53	+0,65	0

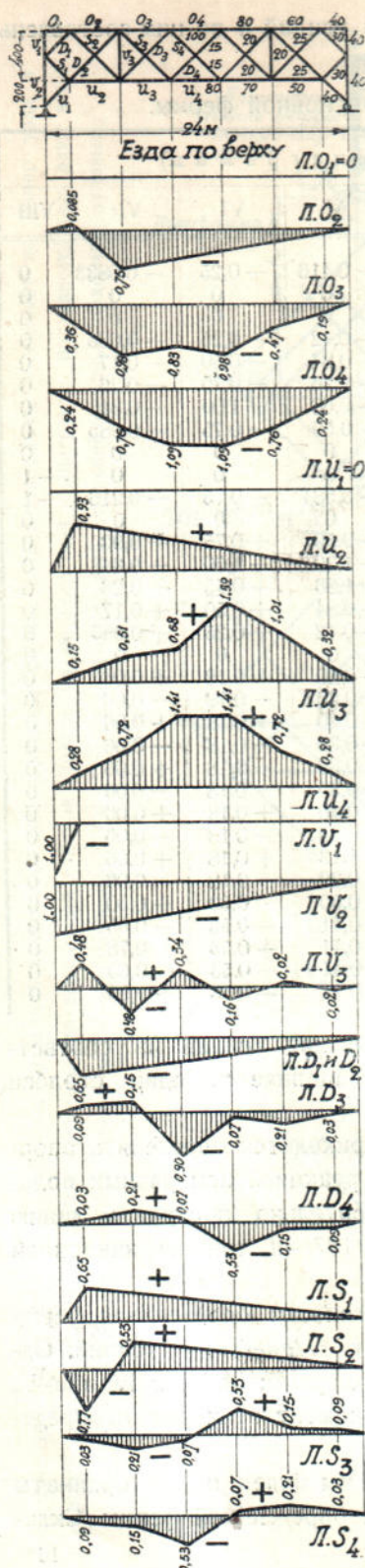
Таблица составлена путем простого вписывания усилий из соответствующих диаграмм: из каждой диаграммы заполняется один столбец таблицы.

Для каждой из диаграмм предварительно приходится определять опорную реакцию, т. е. приходится пользоваться реакцией при разных положениях груза; поэтому целесообразно предварительно построить линию влияния для реакции, как показано на фиг. 187—II тонкою наклонной прямой  $A_1B_1$ .

В рассматриваемом примере основная статически определяемая ферма несимметрична, и потому, обыкновенно, строят 6 диаграмм усилий. Однако можно ограничиться построением 3-х диаграмм: II, III и IV или V, VI и VII, если принять во внимание, что заданная статически неопределяемая ферма симметрична.

Построив, например, диаграммы II, III и IV, мы будем иметь ординаты левых половин всех линий влияния статически определяемой фермы. Скла-





Фиг. 188.

двая их с левой половиной линии влияния для  $X$ , умноженного на  $S_1$ , получим левые половины линий влияния всех стержней статически неопределимой фермы. Так как данная статически неопределимая ферма симметрична, то полные линии влияния получатся, если к левым половинам линий мы присоединим левые же половины симметричных стержней, но зеркально повернутые. Например, для стержня 28 получаем следующие ординаты линии влияния слева:

- 1) 0,
- 2)  $0,76 - 1,415 X = 0,76 - 0,67 = 0,09$ ,
- 3)  $-0,53 - 1,415 X = -0,53 + 0,68 = = 0,15$ ,
- 4)  $0,99 - 1,415 X = 0,99 - 0,46 = 0,53$ .

Для стержня, симметрично расположенного, получается:

- 1) 0,
- 2)  $0,65 - 1,415 X = 0,65 - 0,68 = -0,03$ ,
- 3)  $-0,89 - 1,415 X = -0,89 + 0,68 = = -0,21$ ,
- 4)  $0,41 - 14,15 X = 0,41 - 0,48 = -0,07$ .

Так что, окончательно:

- 1) 0, 2) 0,09, 3) 0,15, 4) 0,53, 5)  $-0,07$ ,
- 6)  $-0,21$ , 7)  $-0,03$ , 8) 0.

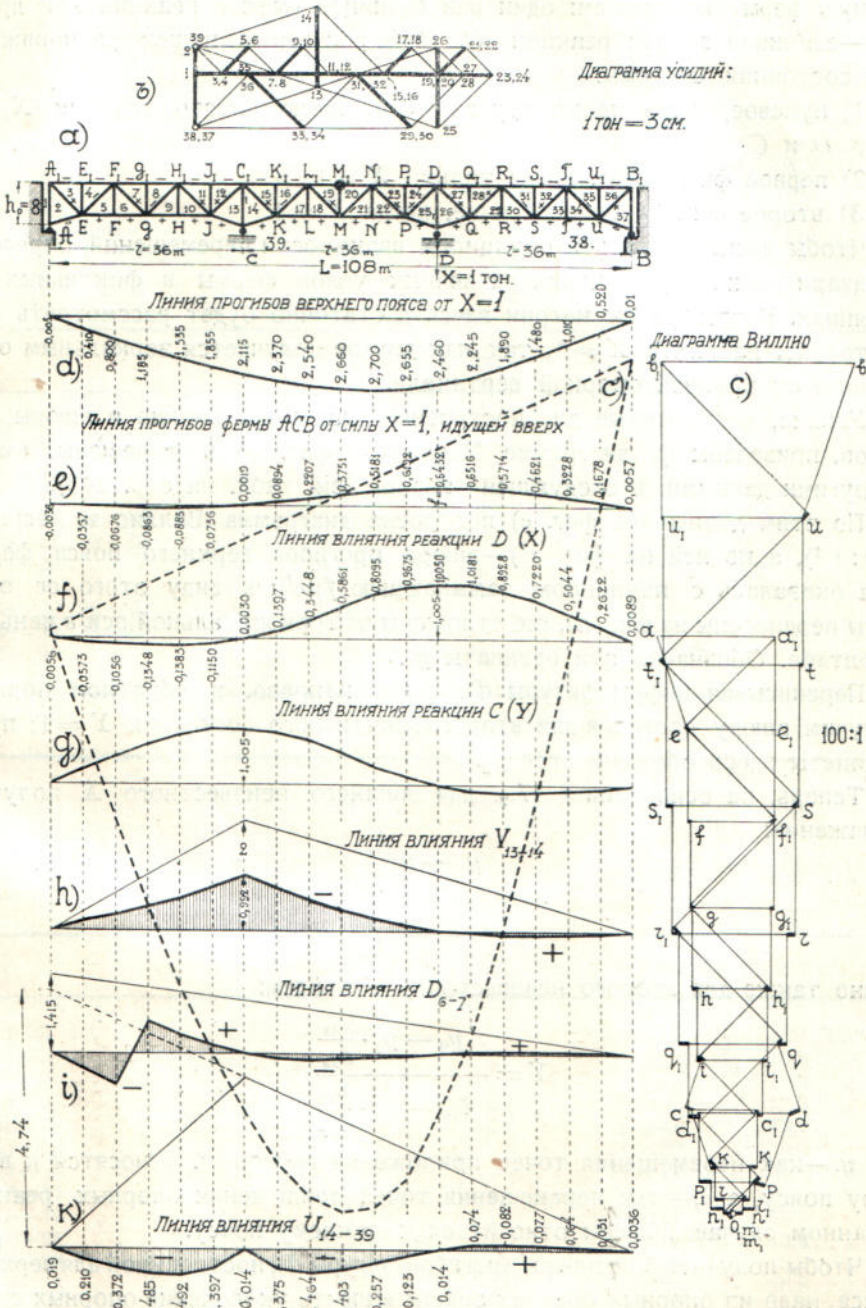
Складывая таким путем (или непосредственно по таблице при полном числе 8-ми диаграмм) ординаты линии основной фермы с ординатами линии лишнего стержня  $X$  фиг. 186-е, умноженными на усилие стержня  $S_1$ , полученное на фиг. 186-б при  $X=1$ , определим искомые ординаты для статически неопределимой фермы. Результаты сложения записаны на фиг. 188, где приведены линии влияния для всех стержней рассматриваемой фермы.

**5. Пример расчета дважды статически неопределимой системы <sup>1)</sup>.** На фиг. 189 представлена трехпролетная неразрезная балочная ферма для моста с ездой поверху. Покажем на примере этой фермы, как влияет на простоту и точность расчета выбор лишних неизвестных. Сначала воспользуемся

<sup>1)</sup> Этот пример разработан инж. Н. Д. Жудиными и А. А. Уманским.



обычным приемом, считая лишними реактивные силы двух промежуточных опор *C* и *D*, затем посчитаем лишними усилия в стержнях поясов, исхо-



Фиг. 189.

дящих из опорных узлов. Эти усилия пропорциональны опорным моментам, так что, представится возможность сравнить условия расчета при назначении лишними неизвестными опорных реакций и опорных моментов.



а) Лишними неизвестными считаются опорные реакции. Отбрасываем промежуточные опоры  $C$  и  $D$  и полученную простую разрезную ферму нагружаем: один раз единицей вместо реакции  $D$  и другой раз—единицей вместо реакции  $C$ . Для расчета в нашем распоряжении три состояния системы:

- 1) нулевое, когда кроме груза  $P=1$ , имеют место реакции  $X$  и  $Y$  опор  $D$  и  $C$ ,
- 2) первое фиктивное, когда только  $X=1$ , и
- 3) второе фиктивное состояние, когда  $Y=1$ .

Чтобы воспользоваться принципом взаимности перемещений, определим предварительно перемещения различных узлов фермы в фиктивных состояниях. Благодаря симметрии здесь достаточно будет рассмотреть одно состояние, например  $X=1$ , так как другое получается зеркальным отражением от крайней опорной вертикали.

Усилия, необходимые для построения диаграммы Виллио и эпюры прогибов, приведены на диаграмме Максвелля фиг.  $b$ ) и помещены, вместе с другими данными, в следующей таблице (см. табл. на стр. 245).

По этим данным на фиг.  $c$ ) построена диаграмма Виллио в масштабе  $100:1$ <sup>1)</sup>, а по ней на фиг.  $c'$ )—эпюра прогибов верхнего пояса фермы. Она оказалась с наклонною замыкающею  $f-c'$ ); в виду этого ее ординаты перенесены на фиг.  $d$ ), где отложены от горизонтальной оси в меньшем масштабе. Обозначим эти ординаты  $y_1$ .

Переписывая цифры фигуры  $d$ ), слева направо, в обратном порядке, получим эпюру прогибов для второго фиктивного состояния  $Y=1$ ; пусть ординаты здесь обозначаются  $y_2$ .

Теперь, на основании § 17,7, для лишнего неизвестного  $X$  получаем выражение:

$$X = \frac{y_1 - y_2 \frac{\delta_{yx}}{\delta_{yy}}}{\delta_{xx} - \delta_{xy} \frac{\delta_{yx}}{\delta_{yy}}};$$

точно также для второго неизвестного  $Y$  найдем:

$$Y = \frac{y_2 - y_1 \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}}}{\delta_{yy} - \delta_{yx} \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}}},$$

где  $y$ ,—как перемещения точек приложения грузов  $P$ , относятся к верхнему поясу, а  $\delta$ ,—как перемещения точек приложения опорных реакций, в данном случае, должны относиться к нижнему поясу.

Чтобы получить  $\delta$  из эпюры прогибов фигуры  $d$ ), построенной для верхнего пояса, надо из опорных ординат эпюры вычесть укорочение опорных стоек; так:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= 2,46 - 0,016 = 2,444, \\ \delta_{xy} &= 2,115 - 0,016 = 2,099; \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Клише сделано в  $\frac{2}{5}$  оригинала. Диаграмма начата со стержня  $MM_1$ , совмещенного с полюсом  $O$ .



Верхний пояс.

№№ стержней	$l$ м.	$F$ см <sup>2</sup>	$S_1$ тон.	$\lambda$ мм.
1-3, 1-4 . . . . .	6,00	2,50	- 0,33	$4 \cdot 10^{-3}$
1-7, 1-8 . . . . .	"	"	- 1,00	12. "
1-11, 1-12 . . . . .	"	"	- 1,67	20. "
1-15, 1-16 . . . . .	"	"	- 2,33	28. "
1-19, 1-20 . . . . .	"	"	- 3,00	36. "
1-23, 1-24 . . . . .	"	"	- 3,67	44. "
1-27, 1-28 . . . . .	"	"	- 3,33	40. "
1-31, 1-32 . . . . .	"	"	- 2,00	24. "
1-35, 1-36 . . . . .	"	"	- 0,67	8. "

Н и ж н и й п о я с .

39-2 . . . . .	6,33	250	0	0
39-5, 39-6 . . . . .	6,00	"	+ 0,67	$8 \cdot 10^{-3}$
39-9, 39-10 . . . . .	"	"	+ 1,33	16. "
39-13, 39-14 . . . . .	6,33	"	+ 1,58	20. "
39-17, 39-18 . . . . .	6,00	"	+ 2,67	32. "
39-21, 39-22 . . . . .	"	"	+ 3,33	40. "
39-25 . . . . .	6,33	"	+ 3,16	40. "
38-26 . . . . .	"	"	+ 3,16	40. "
38-29, 38-30 . . . . .	6,00	"	+ 2,67	32. "
38-33, 38-34 . . . . .	"	"	+ 1,33	16. "
38 37 . . . . .	6,33	"	0	0

С т о й к и .

1-2 . . . . .	8,00	250	- 0,33	$5,3 \cdot 10^{-3}$
13-14 . . . . .	"	"	- 1,00	16. "
25-26 . . . . .	"	"	- 1,00	16. "
37-1 . . . . .	"	"	- 0,67	10,7. "
3-4, 5-6... 35-36 . . . . .	6,00	"	0	0

Р а с к о с ы

2-3 . . . . .	8,50	150	+ 0,47	$13,3 \cdot 10^{-3}$
4-5 . . . . .	"	"	- 0,47	13,3. "
6-7 . . . . .	"	"	+ 0,47	13,3. "
8-9 . . . . .	"	"	- 0,47	13,3. "
10-11 . . . . .	"	"	+ 0,47	13,3. "
12-13 . . . . .	"	"	+ 0,22	6,2. "
14-15 . . . . .	"	"	+ 1,12	31,7. "
16-17 . . . . .	"	"	- 0,47	13,3. "
18-19 . . . . .	"	"	+ 0,47	13,3. "
20-21 . . . . .	"	"	- 0,47	13,3. "
22-23 . . . . .	"	"	+ 0,47	13,3. "
24-25 . . . . .	"	"	+ 0,95	26,8. "
26-27 . . . . .	"	"	+ 0,47	13,3. "
28-29 . . . . .	"	"	+ 0,95	26,8. "
30-31 . . . . .	"	"	- 0,95	26,8. "
32-33 . . . . .	"	"	+ 0,95	26,8. "
34-35 . . . . .	"	"	- 0,95	26,8. "
36-37 . . . . .	"	"	+ 0,95	26,8. "



а потому знаменатель для  $X$  будет:

$$\delta_{xx} - \delta_{yx} \frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}} = 2,444 - 2,099 \cdot \frac{2,099}{2,444} = 0,64.$$

По предыдущему <sup>1)</sup> числитель выражения для  $Y$  представляет эпюру прогибов для однажды статически неопределимой балки  $ACB$ , нагруженной единицей в точке  $D$ . На фиг.  $e$ ) он построен отдельно от знаменателя и получается из фигуры  $d$ ) путем вычитания из нее той же фигуры, но зеркально повернутой и умноженной в ординатах на отношение

$$\frac{\delta_{xy}}{\delta_{xx}} = \frac{2,099}{2,444} = 0,859.$$

Чтобы из этой линии прогибов получить линию влияния опорной реакции  $X$ , остается только разделить ординаты  $e$ ) на число 0,64; в результате получим фигуру  $f$ ).

Зеркально отраженная фигура  $g$ ) представляет линию влияния  $Y$  для опорной реакции  $C$ .

Когда определены лишние опорные реакции, без затруднения получатся линии влияния для любых стержней фермы. Мы построим их на основании формулы (237- $b$ ):

$$S = S_0 + S_x X + S_y Y,$$

где  $S_0$ —усилие намеченного стержня в основной ферме, освобожденной от лишних опор,

$S_x$ —усилие в той же ферме, но нагруженной одной только силой  $X=1$ ,

$S_y$ —тоже при  $Y=1$ .

Второе усилие выписывается непосредственно из вышеприведенной таблицы, а третье—из той же таблицы, но для симметрично расположенного стержня.

Очевидно, надо: 1) построить линию влияния для простой разрезной фермы  $S_0$ ,

2) помножить ординаты имеющейся линии  $X$  фиг.  $f$ ) на число  $S_1$ , взятое непосредственно из таблицы,

3) умножить ординаты линии  $Y$  фиг.  $g$ ) на число  $S_1$ , взятое из той же таблицы, но для симметрично расположенного стержня, и наконец,—

4) все три полученные линии в ординатах алгебраически сложить.

На фиг.  $h$ ) таким образом построена линия для стойки 13—14, на фиг.  $i$ )—для диагонали 6—7 и на фиг.  $k$ )—для нижнего пояса 14—39.

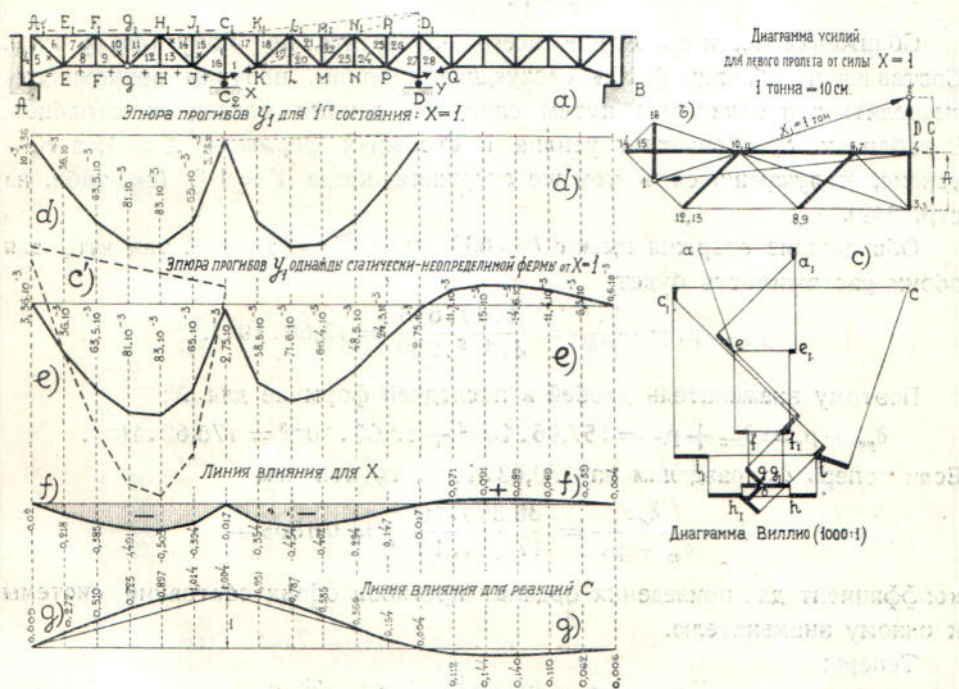
б) Лишними неизвестными считаются усилия опорных панелей нижнего пояса. Отбрасывая два стержня нижнего пояса, как показано на фиг. 190- $a$ ), мы получим основную систему из трех разрезных ферм. Предположим, что в отбрасываемых стержнях имеют место усилия  $X$  и  $Y$  и поместим вместо них единицы:  $X=1$  и  $Y=1$ .

В первом случае, т. е. при  $X=1$ , работают только два пролета  $AC$  и  $CD$ , причем эпюры прогибов их одинаковы. В этом можно убедиться обративши внимание на то, что при отсутствии грузов усилия  $X=1$

<sup>1)</sup> См. § 17,7.



создает одинаковый опорный момент относительно верхнего опорного узла  $C_1$ , как для среднего, так и для левого пролета, устанавливая симметрию в усилиях и в прогибах двух соседних пролетов. Поэтому достаточно построить диаграмму усилий фиг. б) и диаграмму перемещений фиг. в) только для одного пролета. На фиг. в) построение начато с узла  $G$  и исходного стержня  $GG_1$  и выполнено в масштабе  $1000:1$ ). Путем проектирования точек диаграммы Виллио на вертикали узлов левого про-



Фиг. 19J.

лета получена наклонная пунктирная эпюра прогибов фиг. в), а по ней — две симметричные ломанные на фиг. д). Так как при  $X=1$  и отсутствии нагрузок правый пролет не работает, то на нем — нулевые ординаты.

Для второго фиктивного состояния,  $Y=1$ , нет надобности в построениях, так как эпюра прогибов получится, если имеющуюся уже фигуру д) передвинуть вправо на один пролет.

Назовем, по предыдущему, ординаты первого состояния (фиг. д) —  $y_1$ , а ординаты второго состояния (фиг. д, передвинутая на один пролет вправо) —  $y_2$  и воспользуемся принципом взаимности перемещений.

Поместим во втором пролете груз  $P=1$  и сопоставим силы  $P, X, Y$  и реакции этого действительного состояния с перемещениями первого фиктивного, когда  $X=1$ :

$$Py_1 + X\delta_{xx} + Y\delta_{yx} = -1 \cdot \frac{X \cdot l_x}{EF_x}$$

1) Клише изготовлено в  $\frac{2}{5}$  оригинала.



Точно также при сопоставлении со вторым фиктивным состоянием когда  $Y=1$ , найдем:

$$Py_2 + X\delta_{xy} + Y\delta_{yy} = -1 \frac{Yl_y}{EF_y}.$$

Отсюда при  $P=1$  и  $\frac{1 \cdot l}{EF} = p$ :

$$X = - \left( y_1 - y_2 \frac{\delta_{yx}}{\delta_{yy} + p_y} \right) : \left( \delta_{xx} + p_x - \delta_{xy} \frac{\delta_{yx}}{\delta_{yy} + p_y} \right).$$

Сближения  $\delta_{yx}$  и  $\delta_{yy}$  лучше всего определять по Мору (см. § 19,2). Составляя по образцу § 19,2 следующие таблицы, получим возможность вычислить эти сближения путем сложения данных последних столбцов. В таблицах,  $S_x$  обозначает усилия в стержнях фермы от  $X=1$ , а  $S_y$  — усилия, получающиеся в тех же стержнях, когда  $Y=1$ <sup>1)</sup> (см. табл. на стр. 249).

Оба лишние стержня имеют  $l=633$  см. и  $F=250$  см<sup>2</sup>, так что, для обоих растяжимость будет:

$$p_x = p_y = \frac{1 \cdot l}{EF} = \frac{1000 \cdot 633}{2 \cdot 10^6 \cdot 250} = 12,66 \cdot 10^{-3}.$$

Поэтому знаменатель дробей в последней формуле для  $X$ :

$$\delta_{yy} + p_y = \delta_{xx} + p_x = 157,96 \cdot 10^{-3} + 12,66 \cdot 10^{-3} = 170,62 \cdot 10^{-3}.$$

Если теперь  $\delta_{xy}$  разделим на  $170,62 \cdot 10^{-3}$ , то получим

$$k = \frac{\delta_{xy}}{\delta_{yy} + p_y} = \frac{30,808 \cdot 10^{-3}}{170,62 \cdot 10^{-3}} = 0,1805 —$$

коэффициент для приведения ординат прогибов обоих состояний системы к одному знаменателю.

Теперь:

$$X = - (y_1 - ky_2) : (\delta_{xx} + p_x - k\delta_{xy}).$$

Числитель этой дроби  $(y_1 - ky_2)$  представляет эпюру прогибов для верхнего пояса фермы с одним лишним неизвестным  $Y$  при нагружении единицей вместо  $X$ . Очевидно, эпюра получится из фигуры *d*), если вычесть ту же фигуру, но сдвинутую на один пролет вправо и умноженную в ординатах на  $k$ .

Результат вычитания изображен на фигуре *e*).

Знаменатель последнего выражения для  $X$  представляет постоянное число.

$$m = \delta_{xx} + p_x - k\delta_{xy} = 170,62 \cdot 10^{-3} - 0,1805 \cdot 30,808 \cdot 10^{-3} = 165 \cdot 10^{-3}.$$

Если измерим прогибы масштабом  $m$ , т. е. разделим ординаты (фиг. *e*) на число  $165 \cdot 10^{-3}$ , то получится линия влияния для лишнего усилия  $X$ : эта линия представлена на фиг. *f*).

Остается установить знаки усилия.

Первоначально груз  $P=1$  принимался в среднем пролете и для лишнего усилия  $X$  — стрелки, идущие от узлов, т. е. соответствующие растяжению. В результате средний пролет получил отрицательный знак; оче-

<sup>1)</sup> Это те же усилия  $S_x$ , но смещенные на 6 строк ниже.



Название стержня		Длина $l$ см.	Площадь $F$ см. <sup>2</sup>	$S_x$ тонн	$\lambda = \frac{S_x l}{EF}$ мм.	$S_y$ тонн	$S_x \frac{S_x l}{EF}$	$S_y \frac{S_x l}{EF}$
Верхний пояс	4-6	600	250	0,21	- 2,52 · 10 <sup>-3</sup>	—	0,529 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-7	"	"	- 0,21	- 2,52 · 10 <sup>-3</sup>	—	0,529 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-10	"	"	- 0,63	- 7,56 · 10 <sup>-3</sup>	—	4,763 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-11	"	"	- 0,63	- 7,56 · 10 <sup>-3</sup>	—	4,763 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-14	"	"	- 1,05	- 12,60 · 10 <sup>-3</sup>	—	13,230 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-15	"	"	- 1,05	- 12,60 · 10 <sup>-3</sup>	—	13,230 · 10 <sup>-3</sup>	—
	4-17	"	"	- 1,05	- 12,60 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,21	13,230 · 10 <sup>-3</sup>	2,646 · 10 <sup>-3</sup>
	4-18	"	"	- 1,05	- 12,60 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,21	13,230 · 10 <sup>-3</sup>	2,646 · 10 <sup>-3</sup>
	4-21	"	"	- 0,63	- 7,56 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,63	4,763 · 10 <sup>-3</sup>	4,763 · 10 <sup>-3</sup>
	4-22	"	"	- 0,63	- 7,56 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,63	4,763 · 10 <sup>-3</sup>	4,763 · 10 <sup>-3</sup>
	4-25	"	"	- 0,21	- 2,52 · 10 <sup>-3</sup>	- 1,05	0,529 · 10 <sup>-3</sup>	2,646 · 10 <sup>-3</sup>
	4-26	"	"	- 0,21	- 2,52 · 10 <sup>-3</sup>	- 1,05	0,529 · 10 <sup>-3</sup>	2,646 · 10 <sup>-3</sup>
Нижний пояс	3-5	633	250	0	0	—	0	—
	3-8	600	"	+ 0,42	5,04 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,116 · 10 <sup>-3</sup>	—
	3-9	"	"	0,42	5,04 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,116 · 10 <sup>-3</sup>	—
	3-12	"	"	0,84	10,08 · 10 <sup>-3</sup>	—	8,464 · 10 <sup>-3</sup>	—
	3-13	"	"	0,84	10,08 · 10 <sup>-3</sup>	—	8,464 · 10 <sup>-3</sup>	—
	3-16	633	"	1,00	12,66 · 10 <sup>-3</sup>	—	12,660 · 10 <sup>-3</sup>	—
	2-19	600	"	0,84	10,08 · 10 <sup>-3</sup>	+ 0,42	8,464 · 10 <sup>-3</sup>	4,234 · 10 <sup>-3</sup>
	2-20	"	"	0,84	10,08 · 10 <sup>-3</sup>	0,42	8,464 · 10 <sup>-3</sup>	4,234 · 10 <sup>-3</sup>
	2-23	"	"	0,42	8,04 · 10 <sup>-3</sup>	0,84	2,116 · 10 <sup>-3</sup>	4,234 · 10 <sup>-3</sup>
	2-24	"	"	0,42	5,04 · 10 <sup>-3</sup>	0,84	2,116 · 10 <sup>-3</sup>	4,234 · 10 <sup>-3</sup>
2-27	633	"	0	0	1,00	- 0	—	
Стойки	4-5	800	250	- 0,21	- 3,36 · 10 <sup>-3</sup>	—	0,706 · 10 <sup>-3</sup>	—
	16-1	"	"	- 0,21	- 3,36 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,21	0,706 · 10 <sup>-3</sup>	0,706 · 10 <sup>-3</sup>
	27-28	"	"	- 0,21	- 3,36 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,21	0,706 · 10 <sup>-3</sup>	0,706 · 10 <sup>-3</sup>
	6-7	"	"	0	0	—	0	—
	...	600	"	...	0	—	0	—
	25-26	"	"	...0	0	—	0	—
Диагонали	5-6	850	150	+ 0,30	+ 8,5 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	—
	7-8	"	"	- 0,30	- 8,5 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	—
	9-10	"	"	+ 0,30	+ 8,5 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	—
	11-12	"	"	- 0,30	- 8,5 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	—
	13-14	"	"	+ 0,30	+ 8,5 · 10 <sup>-3</sup>	—	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	—
	15-16	"	"	+ 0,15	+ 4,25 · 10 <sup>-3</sup>	—	0,637 · 10 <sup>-3</sup>	—
	1-17	"	"	+ 0,15	+ 4,25 · 10 <sup>-3</sup>	+ 0,30	0,637 · 10 <sup>-3</sup>	+ 1,275 · 10 <sup>-3</sup>
	18-19	"	"	+ 0,30	+ 8,50 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,30	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	- 2,55 · 10 <sup>-3</sup>
	20-21	"	"	- 0,30	- 8,50 · 10 <sup>-3</sup>	+ 0,30	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	- 2,55 · 10 <sup>-3</sup>
	22-23	"	"	+ 0,30	+ 8,50 · 10 <sup>-3</sup>	- 0,30	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	- 2,55 · 10 <sup>-3</sup>
	24-25	"	"	- 0,30	- 8,50 · 10 <sup>-3</sup>	+ 0,30	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	- 2,55 · 10 <sup>-3</sup>
	26-27	"	"	+ 0,30	+ 8,50 · 10 <sup>-3</sup>	+ 0,15	2,55 · 10 <sup>-3</sup>	+ 1,275 · 10 <sup>-3</sup>
$\Sigma = \delta_{xx} =$							157,96 · 10 <sup>-3</sup>	
$\Sigma = \delta_{xy} =$								30,808 · 10 <sup>-3</sup>



видно, грузы среднего пролета вызывают в лишнем стержне сжатие, правые грузы — растяжение (фиг. *f*).

Линия влияния для другого лишнего стержня *Y* будет такая же, но зеркально повернутая.

Линии влияния остальных усилий и опорных реакций получаются, как и в предыдущем случае, по формуле:

$$S = S_0 + S_x X + S_y Y.$$

На фиг. *g*) таким образом построена линия для опорной реакции *U*.

с) Сравнение приемов расчета. Опорные моменты или пропорциональные им усилия, как лишние неизвестные, представляют следующие преимущества: 1) диаграмму усилий приходится строить только для одного пролета, так что, если занять ею на чертеже то же место, то можно повысить точность построения; кроме того, сберегается время; 2) диаграмма Виллио также строится для одной трети фермы, благодаря чему получается компактная фигура и — значительный выигрыш в точности; так, при увеличении масштаба в 10 раз против прежнего (фиг. 189), мы занимаем диаграммой Виллио всего только  $\frac{1}{3}$  прежнего места.

## ГЛАВА V.

### Метод потенциальной энергии.

#### § 21. Выражение потенциальной энергии. 1. Теорема Клапейрона.

При всякой упругой деформации, происходящей в пределах пропорциональности работа деформации может быть выражена одной общей формулой. Будем нагружать систему медленно и постепенно, так, что в каждый момент ее деформации сохраняется равновесие между внешними и внутренними силами; частицы материала при этом не получают заметных добавочных ускорений. Такой способ нагружения принято называть статическим. При нем можно считать, что работа внутренних сил равна работе внешних; хотя при деформации происходит некоторое нагревание и обмен тепла с окружающей средой, изменяются электромагнитные свойства, но связанная с этим потеря работы столь ничтожна, что не может иметь практического значения. Поэтому о работе внутренних сил при деформации можно судить по затраченной работе внешних сил.

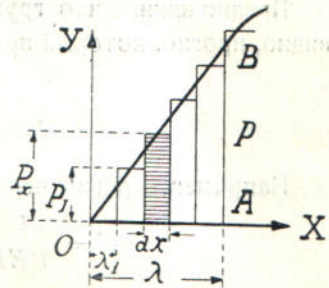
Для краткости, эту работу будем называть: работой деформации.

При графическом представлении работы будем по оси ординат откладывать величину силы, вызывающей деформацию, а по оси абсцисс — величину получающихся перемещений точки ее приложения (фиг. 191). Если процесс происходит в пределах пропорциональности, то работа выразится прямой линией. Это обязательно для всяких сил и соответствующих им пропорциональных деформаций. В элементарном курсе Сопротивления материалов мы встречали такую диаграмму при изображении процесса растяжения, когда по абсциссам откладывали удлинения  $\lambda$ , а на орди-



натах — растягивающие усилия  $P$ ; точно такую же картину мы получим, если при изгибе балки сосредоточенной силой  $P$  будем считать абсциссами прогибы  $f$ , а ординатами — вызывающие их значения силы  $P$ . При кручении соответствующая диаграмма получится, если откладывать углы закручивания  $\varphi$  и крутящие моменты  $M_k$ . Во всех этих случаях, в какой-нибудь момент времени, когда нагрузка достигнет значения  $P_x$ , материал получит приращение деформации  $dx$ . Элементарная работа силы будет  $P_x \cdot dx$ , как представлено на фиг. 191 заштрихованным прямоугольничком, а полная работа деформации в течение времени от  $O$  до  $B$  представится пределом суммы таких прямоугольничков, т. е.

$$T = \int_0^\lambda P_x dx, \text{ или — площадью треугольника } AOB: \dots \dots \dots (253).$$



Фиг. 191.

$T = 1/2 P\lambda$ , в другом случае —  $1/2 M\varphi$ , или  $1/2 Pf$  и т. д.

Таким образом, конечная работа деформации выражается половиною произведения из окончательного значения силы и окончательного значения деформации, если только статический процесс деформации происходит в пределах пропорциональности.

В этом заключается теорема Клапейрона.

**2. Теорема Ламэ<sup>1)</sup>.** Итак, работа внешних сил выражается произведением  $T = \frac{1}{2} CK$ , где  $C$  — сила,  $K$  — деформация.

С другой стороны, работа внешних сил  $T$  равняется работе внутренних сил  $T_i$ . Поэтому

$$\frac{1}{2} CK = T_i;$$

Следовательно:

$$K = \frac{2T_i}{C} \dots \dots \dots (254),$$

т. е. перемещение точки приложения нагрузки определяется удвоенной работой внутренних сил, разделенной на величину нагрузки.

В такой форме Ламэ предложил пользоваться формулой работы для определения величины деформации.

Применим эту формулу к стержневой ферме с идеальными шарнирами фиг. 192. Все стержни такой фермы только растянуты или сжаты, и работа внутренних сил представится суммой работ растяжения отдельных стержней фермы.

Работа растяжения одного стержня длиной  $l$  при усилии  $S$ , по основной формуле (253), есть:

$$T_i = \frac{S\lambda}{2};$$

<sup>1)</sup> L a m é. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides 1866. Стр. 79,



$$\text{но } \lambda = \frac{Sl}{EF}, \text{ — поэтому } T_i = \frac{S^2 l}{2EF} \dots \dots \dots (255).$$

Работа растяжения (и сжатия) всех стержней фермы

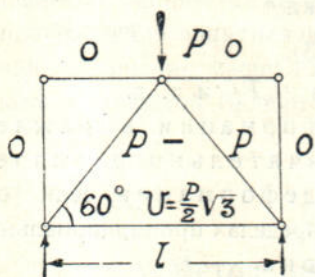
$$T = \Sigma T_i = \Sigma \frac{S^2 l}{2EF} \dots \dots \dots (256).$$

Предположим, что груз  $P$  статически устанавливается на ферму. Очевидно, прогиб, который получит последняя в точке приложения груза, будет:

$$K = \frac{2T}{C} = \frac{\Sigma \frac{S^2 l}{EF}}{P} \dots \dots \dots (257).$$

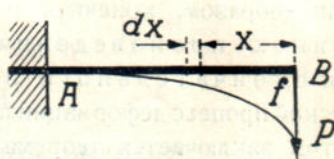
Например, прогиб верхнего узла фермы, изображенной на фиг. 192

$$K = \frac{l}{PEF} (P^2 + P^2 + \frac{3}{4} P^2) = \frac{2,75 Pl}{EF}.$$



Фиг. 192.

Для консоли, фиг. 193, нагруженной силой  $P$  прогиб конца  $f$  определится таким же образом.



Фиг. 193.

Чтобы подсчитать здесь работу внутренних сил, рассмотрим элемент  $dx$  на расстоянии  $x$  от конца  $B$ . Изгибающий момент  $M_x = Px$  надо умножить на  $\frac{1}{2} d\varphi$ , где  $d\varphi$  — взаимный поворот концов элемента. Но по (57),  $d\varphi = \frac{M_x dx}{EJ}$ . Поэтому  $T = \frac{M_x^2 dx}{2EJ}$ .

$$\text{Следовательно, } f = \frac{2T}{C} = \frac{2}{P} \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2}{PEJ} \int_0^l x^2 dx = \frac{Pl^3}{3EJ} —$$

— что известно из элементарного курса.

**3. Количество потенциальной энергии.** а) Если при деформации, производимой внешними силами, напряжения не превосходят предела упругости, то, по удалении этих сил, форма бруска восстанавливается полностью. При деформации, внутренние силы производили работу, противоположную работе внешних сил, ибо внутренние силы, подчиняясь тем же перемещениям, обращены были против внешних сил. Теперь, когда форма тела восстанавливается, внутренние силы производят обратную работу, т. е. положительную.

Но работа, обладающая свойством возвращаться при благоприятных условиях, есть потенциальная энергия; следовательно, деформированная система обладает потенциальной энергией<sup>1)</sup>. И так как в пре-

<sup>1)</sup> Конечно, это можно было предвидеть, так как упругие процессы представляют обратимые циклы и потому внутренние силы упругости, имеют потенциал.



делах упругости система в точности возвращается в свое первоначальное положение, т. е. возвращается к начальной своей энергии<sup>1)</sup>, то можно сказать, что вся затраченная прежде на деформацию работа возвращается полностью, т. е.: потенциальная энергия равна работе деформации<sup>2)</sup>.

Следовательно, потенциальная энергия также выражается полупроизведением силы и деформации:

$$П = 1/2 CK \dots \dots \dots (258).$$

В последующем часто придется пользоваться выражениями потенциальной энергии; поэтому остановимся на главнейших из них.

б) Потенциальная энергия растяжения, как было показано форм. (255):

$$П = 1/2 S \lambda = \frac{S \cdot l}{2EF} \dots \dots \dots (259).$$

Здесь энергия выражается через квадрат силы. Но сделавши в ту же формулу работы подстановку

$$\lambda = \frac{Sl}{EF}, \text{ получим также: } П = \frac{\lambda^2 EF}{2l} \dots \dots \dots (260),$$

т. е. выражение через квадрат деформации.

Если диаграмму процесса растяжения фиг. 191 строить для единичных размеров бруска, откладывая относительное удлинение  $e$  и напряжение материала  $n$ , то получим потенциальную энергию единицы объема. Ее называют удельной энергией.

Принимая для последней обозначение  $П_1$ , по аналогии с предыдущими формулами, получим:

$$П_1 = \frac{ne}{2}, \text{ а после подстановки } e = \frac{n}{E} :$$

$$П_1 = \frac{n^2}{2E}, \text{ или } П_1 = \frac{e^2 E}{2} \dots \dots \dots (261).$$

Такие же формулы получаются и для сжатия, вообще—для всякой продольной нормальной силы.

Энергию бруска, вызванную действием продольных (нормальных) сил будем обозначать буквою  $П_n$ .

с) Потенциальная энергия сдвига. Обозначим напряжение при сдвиге  $t$ , а относительный сдвиг, т. е. угол перекашивания, —буквою  $g$ ; тогда по предыдущему

$$П_1 = 1/2 t g.$$

1) Мы имеем здесь в виду общий случай, когда до опыта система имела некоторые начальные напряжения, нам неизвестные. В частном случае, когда начальная энергия была нулем, после нагрузки мы также вернемся к нулевому значению.

2) Можно было бы разве говорить о потере на работу гистерезиса. Но даже при многочисленных повторных нагрузках она не имеет практического значения, так как выражается величинами высокого порядка малости (Hopkinson A. Proc. Roy. Soc. Vol. 87 A. № 598).



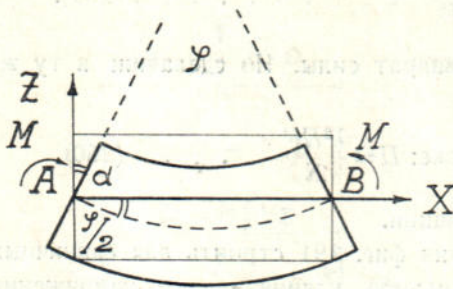
После подстановки величины  $g = \frac{t}{G}$ , это будет:

$$\Pi_1 = \frac{t^2}{2G} \dots \dots \dots (262);$$

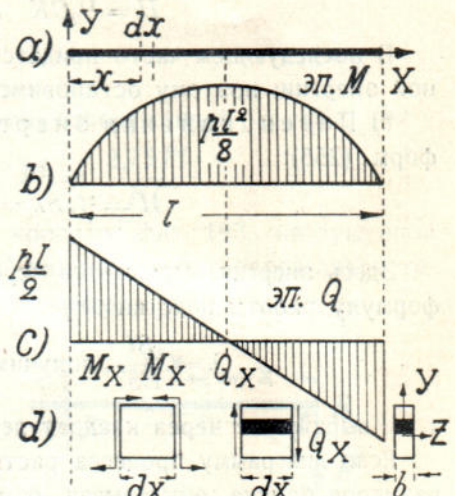
если же подставить  $t = gG$ , то получим  $\frac{1}{2} g^2 G \dots \dots \dots (263)$ .

Будем обозначать энергию сдвига буквою  $\Pi_s$ .

d) Энергия изгиба. Чистый изгиб. Пусть два равные и противоположные момента  $M$  изгибают брусок длины  $l$ , поворачивая концы взаимно на угол  $\varphi$  (фиг. 194). Тогда, по форм. (253), работа моментов будет  $T = \frac{1}{2} M\varphi = M\alpha$ , ибо  $\alpha = \frac{1}{2} \varphi$ . (264).



Фиг. 194.



Фиг. 195.

Но при чистом изгибе  $\alpha = \frac{Ml}{2EJ}$ ; поэтому потенциальная энергия

$$\Pi = M\alpha = \frac{M^2 l}{2EJ} \dots \dots \dots (265).$$

Чтобы выразить энергию через деформацию, вставим в (264) вместо  $M$  его выражение через  $\alpha$ , а именно:  $M = 2EJ\alpha/l$ ; тогда получим:

$$\Pi = M\alpha = \frac{2EJ\alpha^2}{l}, \text{ или } \Pi = \frac{EJ\varphi^2}{2l}, \text{ так как } \alpha = \frac{1}{2}\varphi \dots \dots (266).$$

e) Изгиб силами перпендикулярными к оси балки. Здесь изгибающий момент изменяется вдоль длины балки, так что, приходится рассматривать малые элементы длины  $dx$ , на протяжении которых момент можно считать постоянным<sup>1)</sup>. Например, при равномерно распределенной нагрузке  $p$  (фиг. 195), выделим элемент  $dx$  во всю высоту балки, как показано на фиг. d). Как известно, такой элемент находится под действием моментов  $M_x$  и поперечных сил  $Q_x$ . Каждое из этих воздействий деформирует элемент бруска, накапливая в нем потенциальную энергию. Рассмотрим эти влияния в отдельности, основываясь на принципе Сен-Венана.

<sup>1)</sup> Если на элементе  $dx$  нет сосредоточенной силы, то моменты для краев элемента могут отличаться лишь на исчезающе малую величину. Пренебрегая этой величиной, мы имеем чистый изгиб элемента. Если же эту разницу принять во внимание, то получится случай с касательными силами, рассмотренный в этом же разделе, ниже.



Энергия от момента  $M_x$ . Для элемента  $dx$  мы считаем момент постоянным и пользуемся формулой чистого изгиба:

$$d\Pi = \frac{M_x^2 dx}{2EJ}.$$

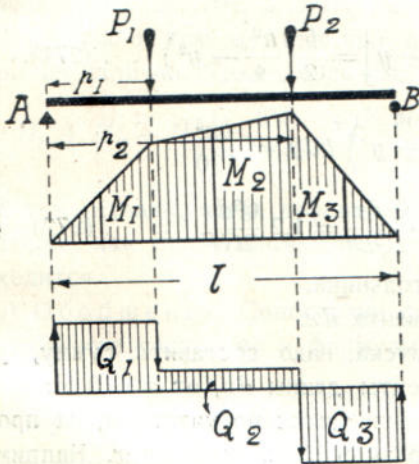
Энергия, накапливаемая бруском длиной  $l$ , очевидно, будет

$$\Pi = \int_0^l d\Pi = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} \dots \dots \dots (267).$$

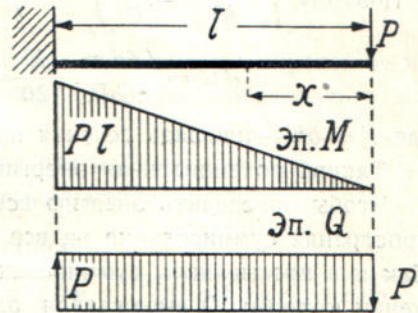
Так как при равномерной нагрузке балки  $M_x = \frac{1}{2} px(l-x)$ , то:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{p^2}{8EJ} \int_0^l x^2(l-x)^2 dx = \frac{p^2}{8EJ} \int_0^l (l^2 x^2 dx - 2lx^3 dx + x^4 dx) = \\ &= \frac{p^2}{8EJ} \left( \frac{l^5}{3} - \frac{l^5}{2} + \frac{l^5}{5} \right) = \frac{p^2 l^5}{240EJ} \dots \dots \dots (268). \end{aligned}$$

Если балка нагружена несколькими сосредоточенными силами, то изгибающий момент, как функция от  $x$ , изменяется с переходом через каждую сосредоточенную силу—это наглядно показывает эпюра моментов. В этом случае интегрирование приходится производить по участкам, на



Фиг. 196.



Фиг. 197.

протяжении которых  $M$  выражается одною и тою же функциею, т. е.— между сосредоточенными силами.

Так, на фиг. 196 получаем 3 интеграла:

$$\Pi = \int_0^{r_1} \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \int_{r_1}^{r_2} \frac{M_2^2 dx}{2EJ} + \int_{r_2}^l \frac{M_3^2 dx}{2EJ} \dots \dots (269).$$

Для консоли, нагруженной одним сосредоточенным грузом, потенциальная энергия (фиг. 197):

$$\Pi = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 l^3}{6EJ} \dots \dots \dots (270).$$

Будем обозначать энергию изгиба моментом —  $\Pi_m$ .

Энергия от поперечной силы  $Q_x$ . Касательное напряжение изменяется по высоте поперечного сечения; поэтому в элементе  $dx$  фиг. 195— $\bar{a}$ ) выделим небольшой горизонтальный слой с площадью попе-



речного сечения  $dF$  (этот слой на фиг.  $d$  показан жирной полоской). Потенциальная энергия сдвига этого слоя получится, если удельную энергию сдвига  $t^2 : 2G$  умножить на объем слоя  $dFdx$ :

$$\delta \Pi = \frac{t^2}{2G} dF dx.$$

Сумма энергий всех элементарных слоев от низа до верха элемента  $d$ ) составляет энергию элемента:

$$d\Pi = \int_F \frac{t^2 dF dx}{2G} = \frac{dx}{2G} \int_F t^2 dF.$$

$$\text{Но обычно } t = \frac{QS}{J \cdot b}, \text{ поэтому } d\Pi = \frac{dx}{2G} \int_F \frac{Q^2 S^2}{J^2 b^2} dF = \frac{Q^2 dx}{2G J^2} \int_F \frac{S^2 dF}{b^2}.$$

Интеграл последнего выражения зависит от формы поперечного сечения; если сечение дано, то без затруднений находится результат интегрирования. Например, в прямоугольном сечении  $b$  — постоянно; статический момент относительно нейтральной оси  $Z$  для части сечения, находящейся выше рассматриваемого слоя  $y$ :

$$S = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left[ \left( \frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} + y \right] = \frac{b}{2} (h^2 - y^2) \quad \dots (271).$$

$$\text{Поэтому } \int_F \frac{S^2 dF}{b^2} = \frac{2}{b^2} \int_0^h \frac{b^2}{4} (h^2 - y^2)^2 b dy = \frac{bh^5}{120}$$

$$\text{и } d\Pi = \frac{Q^2 dx}{2G J^2} \cdot \frac{bh^5}{120} = 1,2 \frac{Q^2 dx}{2G bh} = 1,2 \frac{Q^2 dx}{2GF} \quad \dots (272),$$

где  $F = bh$  — площадь сечения прямоугольника.

Такова потенциальная энергия элемента  $dx$ .

Чтобы определить энергию всего бруска, надо составить сумму, распространяя суммирование на все элементы длины  $dx$ , от  $x=0$  до  $x=l$ . Как и в предыдущем, суммирование производится по участкам, на протяжении которых  $Q$  выражается однообразной функцией от  $x$ . Например, на фиг. 197 надо взять:

$$\Pi = \int_0^l d\Pi = 1,2 \frac{Q^2}{2Gbh} \int_0^l dx = 1,2 \frac{P^2 l}{2GF} \quad \dots (273).$$

На фиг. 196 надо взять:

$$\Pi = [Q_1^2 p_1 + Q_2^2 (p_2 - p_1) + Q_3^2 (l - p)] \frac{1,2}{2GF}.$$

В том случае, когда  $Q$  выражается в функции от  $x$ , составляют интеграл

$$\Pi = \int_0^l d\Pi = 1,2 \int_0^l \frac{Q_x^2 dx}{2GF} \quad \dots (274).$$

Например, на фиг. 195, где  $Q_x = \frac{2x}{l} \cdot \frac{pl}{2} = px$ ; пишут:

$$\Pi = 2 \cdot 1,2 \int_0^{l/2} \frac{p^2 x^2 dx}{2GF} = \frac{p^2 l^3}{20GF} \quad \dots (275).$$

1) Если  $x$  отсчитываем от середины пролета.



Другая форма поперечного сечения бруска приведет к иному коэффициенту в формуле (272)<sup>1)</sup>, но во всех случаях останется, вообще говоря, подинтегральная функция (274).

Называя коэффициент, зависящий от площади, коэффициентом площади и обозначая буквой  $k$ , получим следующее общее выражение для энергии касательных напряжений при изгибе:

$$W = k \int \frac{Q_x^2 dx}{2GF} \dots \dots \dots (276).$$

Будем обозначать эту энергию буквой  $W_k$ .

f) Полная потенциальная энергия бруска при плоской его деформации складывается, вообще говоря, из энергии растяжения (либо сжатия) нормальными силами, энергии изгиба моментами и энергии перекашивания от касательных сил. По принципу независимости действия сил, энергии могут быть сложены. Действительно, поперечная сила перемещает сечения перпендикулярно к нормальным усилиям, так что, последние не производят работы, и потенциальная энергия перекашивания оказывается одной и той же, как при отсутствии изгибающих моментов, так и при их наличии. Таким образом, полная энергия:

$$W = W_n + W_m + W_k = \frac{S^2 l}{2EF} + \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} + k \int_0^l \frac{Q_x^2 dx}{2GF} \dots (277^2).$$

В тех случаях, когда деформации зависимы, а также при неустойчивой их форме, как продольный изгиб, принципом сложения пользоваться не приходится.

g) Обобщения. Сопоставим формулы для работы в разных случаях напряженного состояния и формулы потенциальной энергии.

Работа деформации.

Напряженное состояние	Растяжение и сжатие	Изгиб моментом		Изгиб касат. силами	
		постоянным	в функции от $x$	постоянными	в функции от $x$
Формула работы $T$	$\frac{Sl}{2}$	$\frac{M\varphi}{2}$	$\int \frac{Md\varphi}{2}$	$\frac{Qs}{2}$	$\int \frac{Q_x ds}{2}$

При кручении:  $T = \frac{M_k \varphi}{2}$ .

Оказывается, что все формулы составлены одинаково — они представляют половину произведения двух множителей. Один из множителей — это внешнее воздействие на упругое тело, например: сила, момент., второй множитель есть деформация, вызванная этим воздействием. Обозначая внешнее воздействие, как обобщенную силу, буквой  $C$ , а дефор-

<sup>1)</sup> Для прямоугольника в форм. (272) получился коэффициент 1,2; такое же точно исследование для двутаврового сечения приводит к коэффициентам от 2,4 до 2,0 в зависимости от номера балки. Большой коэффициент получается для № 8, малый — для № 50.

<sup>2)</sup> Здесь рассматриваются только прямые бруски.



мацию, как обобщенную координату, — буквой  $K$ , можем написать общую формулу для работы во всех случаях напряженного состояния:

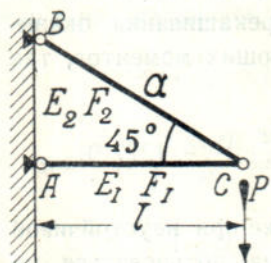
$$T = \frac{1}{2} CK.$$

Те же обобщенные силы и координаты служат и для выражения потенциальной энергии:

Потенциальная энергия.

Напряженное состояние	Растяжение и сжатие	Изгиб моментом		Изгиб касат сил	
		постоян.	функц. $x$	постоян.	функц. $x$
Потенциальная энергия . .	$\frac{S^2 l}{2EF}$	$\frac{M^2 l}{2EJ}$	$\int \frac{Mx^2 dx}{2EJ}$	$k \frac{Q^2 l}{2GF}$	$k \int \frac{Qx^2 dx}{2GF}$
При кручении постоянным моментом: $\Pi = \frac{M^2 k \varphi}{2GJ_p}$					

но здесь еще добавляются множители жесткости  $EF, EJ, GF...$  Принимая во внимание, что все эти множители имеют одинаковое значение противодействия внешним воздействиям и находятся в полном соответствии с последними, а именно: поступательным силам соответствуют площади, вращающим моментам — моменты инерции, — мы дадим множителям  $EF, EJ...$  название обобщенной жесткости и будем обозначать  $\mathcal{H}$ . Тогда потенциальная энергия во всех случаях напряженного состояния выразится такой простой схемой:



Фиг. 198.

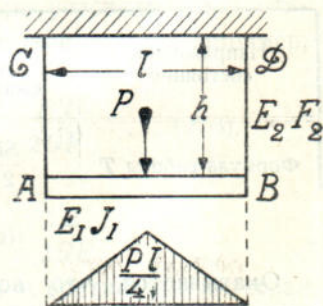
$$\Pi = \int \frac{C_x^2 dx}{2jK} \dots \dots \dots (278).$$

В частном случае, когда обобщенна сила постоянная на протяжении бруска длиной  $l$ , как это бывает при простом растяжении, кручении, чистом изгибе, — мы получаем

$$\Pi = \frac{C^2 l}{2jK} \dots \dots \dots (279),$$

т. е. потенциальная энергия выражается половиною квадрата силы, умноженной на длину элемента и разделенной на его жесткость.

h) Потенциальная энергия системы складается из энергии ее отдельных брусков. Например, в консоли из двух стержней фиг. 198 она составляется из суммы:



Фиг. 199.

1) энергия сжатия стержня AC:  $\Pi_{AC} = \frac{AC \cdot l}{2E_1 F_1}$  плюс

2) энергия растяжения стержня BC:  $\Pi_{BC} = \frac{BC \cdot a}{2E_2 F_2}$

Так что:  $\Pi = \Pi_{AC} + \Pi_{BC} = \frac{AC \cdot l}{2E_1 F_1} + \frac{BC \cdot a}{2E_2 F_2}$



И, так как  $a = l \cdot \cos 45^\circ = l\sqrt{2}$ ,  $AC = P$  и  $BC = P\sqrt{2}$ ,

то 
$$\Pi = \frac{P^2 l}{2E_1 F_1} + \frac{P^2 \sqrt{2}}{E_2 F_2}.$$

Для балки фиг. 199, подвешенной на нитях  $CA$  и  $DB$ , энергия составит из энергии растяжения нитей  $h$  и изгиба балки  $AB$ :

$$\Pi = 2 \left( \frac{P^2 h}{4.2 E_2 F_2} + \int_0^{1/2 l} \frac{P^2 x^2 dx}{4.2 E_1 J_1} \right) = \frac{P^2}{4} \left( \frac{h}{E_2 F_2} + \frac{l^3}{24 E_1 J_1} \right).$$

Энергия всякой стержневой фермы с идеальными шарнирами при узловой нагрузке, очевидно, будет:

$$\Pi = \sum \frac{S^2 l}{2EF} \dots \dots \dots (280),$$

где  $S$  — символ усилия в стержне фермы.

**§ 22. Начало наименьшей работы. 1. Элементарное доказательство.** В дальнейшем мы будем иметь в виду только устойчивые формы равновесия упруго деформированной системы. Вопросам неустойчивого равновесия посвящаются отдельные исследования, не входящие в программу настоящего курса.

Если внутренние силы упругости составляют систему, уравновешивающуюся с внешними, то должны удовлетворяться условия устойчивости равновесия. Для консервативных сил, какими являются силы упругости, эти условия выражаются теоремой Дирикле (Dirichlet), которая говорит, что виды равновесия соответствуют максимуму и минимуму потенциальной энергии:

устойчивое — минимуму,  
неустойчивое — максимуму <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> К сожалению, в некоторых институтах не проходят теоремы Дирикле, хотя она может быть получена непосредственно из Начала возможных перемещений и имеет большое практическое значение.

Начало возможных перемещений говорит, что при равновесии вообще работа сил на малых возможных перемещениях равна нулю, так что, — если составляющие сил вдоль 3-х осей обозначить  $X, Y, Z$ , а соответствующие проекции перемещений —  $\delta x, \delta y, \delta z$ , то:

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

В применении же к силам упругости получается дополнительная зависимость. Эти силы имеют потенциальную функцию, т. е. такую функцию, производная от которой по какой-нибудь координате равна проекции соответствующей силы (см. § 16<sub>2</sub>):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Z; \dots \dots \dots (a);$$

поэтому

$$\Sigma \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z \right) = 0.$$

Но это — полный дифференциал функции  $\Pi$ , так что имеем:

$$d\Pi = 0$$

Приращение функции может быть нулем только при переходе ее через минимум или максимум; следовательно, равновесие упругой системы определяется минимумом либо максимумом потенциальной энергии. (Продолж. см. на след. стр.).



Следовательно, устойчивые упругие деформации соответствуют такому значению внутренних сил, при котором потенциальная энергия становится минимальной. Это следует понимать так: если в упругой системе нет лишних стержней, то она может получать разнообразные перемещения, как по величине, так и по направлению; к этому нет никаких препятствий со стороны системы, ибо перемещения зависят исключительно от внешних сил. Но свобода перемещений исчезает, как только вводится лишняя связь. Из всех возможных отклонений упругая система получает одно определенное, соответствующее лишней связи: задача последней — уничтожить то перемещение, которое имеет система в случае отбрасывания связи, возратить систему в определенное состояние равновесия. Такими чертами отличается устойчивое равновесие вообще.

Но минимум потенциальной энергии характеризуется тем, что производная ее равна нулю, так что если мы выразим энергию в функции силы  $X$ , то должны принять, что

$$\frac{d\Pi}{dX} = 0 \dots \dots \dots (281).$$

В этом заключается Начало наименьшей работы, найденное Менамбреа еще в 1857 г.<sup>1)</sup>

Это Начало говорит, что в системах с лишними связями силы распределяются, удовлетворяя минимальной энергии, требующейся на деформацию при данной нагрузке. Поэтому в прежнее время оно называлось еще принципом наименьшего действия.

Начало наименьшей работы, как рассматривающее упругое равновесие системы сил, обладающих потенциалом, представляет новое уравнение, которым мы можем распорядиться сверх уравнений Статики. Во многих задачах Строительной механики оно оказывает большие услуги.

Уже самая форма Начала указывает, каким образом им следует пользоваться при решении задач: очевидно, надо составить выражение потен-

Возьмем случай максимума и отклоним систему от этого состояния равновесия на конечную, но малую величину. Потенциальная энергия системы уменьшится и чтобы возратить систему в ее первоначальное состояние, нам придется затратить дополнительную работу. Здесь система не имеет собственной тенденции возвращаться в первоначальное состояние, для этого требуется некоторое воздействие извне — мы имеем случай неустойчивого равновесия.

Максимуму потенциальной энергии соответствует неустойчивое равновесие. Обратное, минимуму энергии соответствует устойчивое равновесие. В этом и заключается теорема Дирикле.

Очевидно, теорема относится ко всяким силам, имеющим потенциал, (свойства (а), каковы: сила тяжести, электромагнитные силы и т. п. и, вообще, — ко всем силам, величина которых обуславливается исключительно расстоянием. Для всех таких консервативных систем, где величина сил взаимодействия определяется только расстоянием между частицами и не зависит от пути, по которому совершается изменение системы, достигающей данного расположения частиц, имеет место потенциальная функция (а), и обратно: если система имеет потенциальную функцию (а), то она консервативна.

<sup>1)</sup> Menambrea. Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique (1868), а также доклад в заседании Парижской L'Académie des Sciences, 31 мая 1858 г. (Comptes rendus, t. XLVI, p. 1056).



циальной энергии, как функцию лишнего неизвестного, и продифференцировать по этому неизвестному; приравнявая производную нулю, получим уравнение для отыскания неизвестного.

**2. Другое доказательство** Начала наименьшей работы. Возьмем выражение потенциальной энергии при каком-нибудь значении лишних неизвестных; дадим неизвестным произвольное приращение и проследим, какое приращение получит потенциальная энергия. Если приращение энергии всегда положительное и не зависит от величины и знака приращения переменных, то в рассматриваемом состоянии потенциальная энергия имеет наименьшее значение, и теорема будет доказанной.

Все члены выражения потенциальной энергии по структуре одинаковы, или отличаются коэффициентом площади  $k$ . Поэтому доказательство будем вести в общей форме, включая в обобщенное выражение потенциальной энергии (278) все члены форм. (277). Совершенно ясно, что вывод, сделанный для одного члена формулы (277), например, для нормальной силы, полностью будет относиться и ко всем остальным ее членам, а следовательно, будет справедлив и вообще.

Для конкретности возьмем случай двух лишних неизвестных  $X$  и  $Y$ .

Итак, напишем выражение  $\Pi = \sum \frac{N^2 dx}{2EF}$  и дадим  $X$  и  $Y$  приращение  $\delta X$  и  $\delta Y$ . Тогда нормальная сила бруска  $N$  получит приращение, как от  $X$ , так и от  $Y$ , и окажется теперь:  $N + \delta N_x + \delta N_y$ .

Потенциальная энергия также получит приращение, и новое ее значение будет:

$$\Pi + \delta \Pi = \sum \frac{(N + \delta N_x + \delta N_y)^2 dx}{2EF}.$$

Раскроем скобки:

$$\Pi + \delta \Pi = \sum \frac{(N^2 + \delta N_x^2 + \delta N_y^2 + 2N\delta N_x + 2N\delta N_y + 2\delta N_x\delta N_y) dx}{2EF}.$$

Из обеих частей равенства исключим потенциальную энергию, для чего слева зачеркнем  $\Pi$ , а справа —  $N^2$ . Затем 2, 3 и 6-ой члены справа сгруппируем вместе:

$$\delta \Pi = \sum \frac{(\delta N_x + \delta N_y)^2 dx}{2EF} + \sum \frac{(N\delta N_x + N\delta N_y) dx}{EF} \dots (282).$$

Последний интеграл напоминает выражения, составлявшие по Мору в § 19,3 и 19,6 (см. форм. 233 и 237). Его мы получим, рассматривая, кроме действительного состояния системы, еще два фиктивных: одно, когда вместо  $X$  стоит приращение  $X$ , т. е.  $\delta X$ ; а другое, когда вместо  $Y$  находится его приращение  $\delta Y$ . В этих фиктивных состояниях нормальное усилие бруска будет  $\delta N_x$  и  $\delta N_y$ . Составляя теперь по форм. (237) работу сил первого фиктивного состояния на перемещениях действительного, получим уравнение:

$$\sum \delta N_x \frac{N dx}{EF} = 0^1).$$

1) Здесь суммирование распространено и на лишний стержень, так как теперь нет надобности выделять его в виде особого члена, как сделано было в форм. (237).



То же получится и для второго фиктивного состояния:

$$\Sigma \delta N_y \frac{N dx}{EF} = 0.$$

Очевидно, сумма  $\sum \frac{(\delta N_x N + \delta N_y N) dx}{EF}$  также равна нулю.

Следовательно, второй член выражения (282) отпадает и получается:

$$\delta \Pi = \sum \frac{(\delta N_x + \delta N_y)^2 dx}{2EF}.$$

Но справа находится потенциальная энергия, вызванная приращением нормального усилия. Независимо от знака приращения, потенциальная энергия всегда положительна.

Очевидно  $\delta \Pi > 0$ , т. е. имеет место минимум потенциальной энергии.

**3. Приложения** Начала наименьшей работы к определению лишних неизвестных. а) Определение лишних усилий. Для приложения Начала наименьшей работы надо дифференцировать по силе потенциальную энергию, выраженную в функции от силы.

В виду этого освобождают систему от лишней связи и вместо последней помещают неизвестную  $X$ ; для каждого элемента системы составляют выражение усилия, как функцию данной нагрузки и неизвестного  $X$ ; по усилиям составляют элементарную потенциальную энергию и берут сумму элементов. Суммирование распространяют на всю систему, включая и лишний стержень. Наконец, дифференцируют по  $X$  и приравнивают нулю. Из полученного уравнения определяют  $X$ .

Применим это правило к фиг. 173, разбиравшейся в § 19,5. Отбрасывая одну из диагоналей и заменяя ее лишним усилием  $X$ , мы получаем основную ферму, и без затруднения находим усилия от нагрузки. Пусть  $S_0$  усилие какого-нибудь стержня по диаграмме Максвелля. Чтобы получить усилие от  $X$ , предварительно, вместо  $X$ , приложим единицу и построим диаграмму при этой единичной нагрузке. Найденные из последней диаграммы усилия  $S_1$ , очевидно, надо умножить на  $X$ , чтобы получить истинные. Теперь, в каждом стержне фермы мы имеем два рода усилий:  $S_0$  и  $S_1 X$ ; сумма их представляет то действительное усилие, которое имеет место в рассматриваемой основной ферме:

$$\Pi_0 = \frac{S^2 l}{2EF} = \frac{(S_0 + S_1 X)^2 l}{2EF}.$$

Лишний стержень имеет одно только усилие  $X$ , и его энергия

$$\Pi_x = \frac{X^2 l_x}{2E_x F_x}.$$

Энергия всей системы:

$$\Pi = \Sigma \Pi_0 + \Pi_x = \sum \frac{(S_0 + S_1 X)^2 l}{2EF} + \frac{X^2 l_x}{2E_x F_x}.$$



При дифференцировании по  $X$  следует обратить внимание на то, что сумма первого члена составлена из одинаковых слагаемых и возможно дифференцирование под знаком  $\Sigma$ . Кроме того, потенциальная энергия— это квадратичная функция усилия, а усилие, в свою очередь, есть функция от  $X$ . Поэтому дифференцировать придется функцию от функции.

Произведя такое дифференцирование, получаем нуль:

$$\frac{d\Pi}{dX} = \sum \frac{2(S_0 + S_1 X) S_1 l}{2EF} + \frac{2X l_x}{2E_x F_x} = 0.$$

Отсюда, по раскрытии скобок и преобразовании:

$$X = - \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} : \left( \sum \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} \right) \dots (283).$$

Это выражение совпадает с тем, что было получено по Мору в § 19,4 форм. (234).

б) Определение реакций. Если лишней связью служит опорное закрепление и притом абсолютное, то второй член знаменателя надо отбросить, так как жесткость  $E_x F_x = \infty$ . Для расчета лишних реактивных сил получается формула:

$$X = - \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} : \sum \frac{S_1^2 l}{EF} \dots (284).$$

в) Обобщения и примеры. То, что сделано здесь для стержневой системы, можно буквально повторить и для брусков другого напряженного состояния. Так, в балке фиг. 175, работающей на изгиб, для какого-нибудь элемента  $dx$ , находящегося на расстоянии  $x$ , надо написать выражение изгибающего момента в функции от  $X$ :

$$M_x = Xx - q \frac{x^2}{2}.$$

Потенциальная энергия будет:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{\left( Xx - q \frac{x^2}{2} \right)^2 dx}{2EJ};$$

а равная нулю производная:

$$\frac{d\Pi}{dX} = \int_0^l \frac{2 \left( Xx - q \frac{x^2}{2} \right) x dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{Xx^2 dx}{EJ} - q \int_0^l \frac{x^3 dx}{2EJ} = 0.$$

Отсюда  $X \frac{l^3}{3} = q \frac{l^4}{8}$ , или  $X = \frac{3}{8} ql$  — прежний результат.

При разыскании опорного момента  $M_B$  двухпролетной балки фиг. 99 разобьем балку на два отдельных пролета; определим потенциальную энергию каждого пролета в отдельности и сложим:

$$\Pi = \Pi' + \Pi''.$$

Дифференцируя по искомому опорному моменту, получим уравнение, из которого определится этот момент.



Замечая, что потенциальная энергия есть функция от изгибающего момента  $M_x$ :

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ},$$

а последний есть в свою очередь функция от  $M_B$ :

$$M_x = \frac{ql}{2}x - q\frac{x^2}{2} + \frac{M_B x}{l}, \quad 1)$$

мы будем дифференцировать  $\Pi$  как функцию от функции, т. е. писать

$$\frac{d\Pi}{dM_B} = \frac{d\Pi}{dM_x} \cdot \frac{dM_x}{dM_B}.$$

Для левого пролета это будет:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi'}{dM_B} &= \frac{d\Pi'}{dM_x} \cdot \frac{dM_x}{dM_B} = \int_0^{l_1} \frac{2M_x}{2EJ} \cdot \frac{dM_x dx}{dM_B} = \int_0^{l_1} \left( \frac{ql_1 x}{2} - \frac{qx^2}{2} + \frac{M_B x}{l_1} \right) \frac{dx}{l_1} = \\ &= q \frac{l_1^3}{6} - q \frac{l_1^3}{8} - \frac{M_B l_1}{3} = q \frac{l_1^3}{24} - \frac{M_B l_1}{3}. \end{aligned}$$

По аналогии для правого пролета

$$\frac{d\Pi''}{dM_B} = q \frac{l_2^3}{24} - \frac{M_B l_2}{3}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{d\Pi'}{dM_B} + \frac{d\Pi''}{dM_B} = \frac{q}{24} (l_1^3 + l_2^3) - \frac{M_B}{3} (l_1 + l_2) = 0;$$

$$\text{Откуда } M_B = \frac{q}{8} \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2}, \text{ что при } l_1 = l_2 \text{ дает: } M_B = q \frac{l^2}{8}.$$

**4. Случай многих неизвестных.** Если в системе есть несколько лишних связей, то все они составляют условия для минимума потенциальной энергии, Поэтому производная по каждой из лишних неизвестных сил должна быть равна нулю. Мы должны здесь потенциальную энергию выразить в функции всех лишних неизвестных и взять частные производные по каждой из них. Приравнявая эти производные порознь нулю, получим столько уравнений, сколько имеется лишних неизвестных.

Положим, что ферма содержит три лишних стержня, взамен которых помещены неизвестные усилия  $X, Y, Z$ . Тогда в каждом из прочих ее стержней усилие  $S = S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z$ , где:  $S_x$  — усилие стержня, вызванное единицей вместо  $X$ ,  $S_y$  — усилие от единицы вместо  $Y$  и т. д.

Потенциальная энергия системы будет

$$\Pi = \sum \frac{S^2 l}{2EF} + \frac{X^2 l_x}{2E_x F_x} + \frac{Y^2 l_y}{2E_y F_y} + \frac{Z^2 l_z}{2E_z F_z}.$$

Для определения 3 неизвестных получаются следующие 3 уравнения

$$\frac{d\Pi}{dX} = 0 = \sum \frac{S \frac{dS}{dX} l}{EF} + \frac{X l_x}{E_x F_x} = \sum \frac{(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) S_x l}{EF} + \frac{X l_x}{E_x F_x};$$

1) Предварительно неизвестный момент  $M_B$  считаем положительным.



$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0 = \sum S \frac{dS}{dY} l + \frac{Y l_y}{E_y F_y} = \sum \frac{(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) S_y l}{EF} + \frac{Y l_y}{E_y F_y};$$

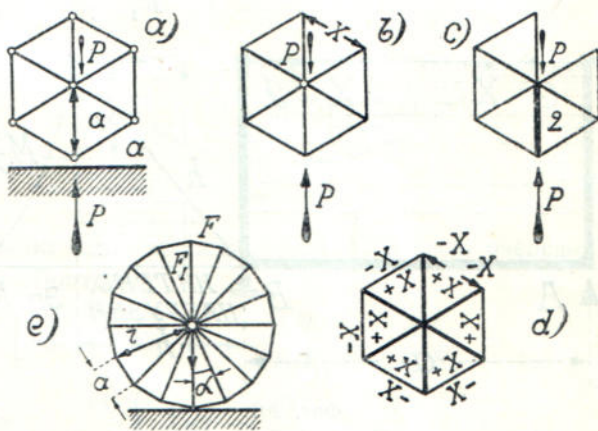
$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z} = 0 = \sum S \frac{dS}{dZ} l + \frac{Z l_z}{E_z F_z} = \sum \frac{(S_0 + S_x X + S_y Y + S_z Z) S_z l}{EF} + \frac{Z l_z}{E_z F_z} \quad (285).$$

Эти уравнения совпадают с полученными по Мору (238).

Таким образом, Начало наименьшей работы одинаково применяется для разыскания одного и многих лишних неизвестных. При расчете реакций и усилий оно приводит к таким же результатам, как и способ Мора.

**5. Примеры.** а) Круглый вал длиной  $l$ , диаметром  $d$  зашпелен обоими концами; в расстояниях  $a$  и  $b$  от концов приложен крутящий момент  $M_k$ . При определении реактивных моментов  $M_A$  и  $M_B$  обратим внимание на то, что сумма их должна быть  $M_k$ , и достаточно разыскать один из реактивных моментов. Примем  $M_A$  за лишнюю неизвестную.

Так как справа и слева от плоскости действия  $M_k$  крутящие моменты постоянны, но различны, а именно:  $M_A$  и  $M_k - M_A$ , то потенциальная энергия составитсЯ из двух членов:



Фиг. 200.

$$\Pi = \frac{M_A^2 a}{2GJ_p} + \frac{(M_k - M_A)^2 b}{2GJ_p}.$$

Приравнивая нулю производную по  $M_A$ :

$$\frac{d\Pi}{dM_A} = \frac{M_A a}{GJ_p} + \frac{(-M_k + M_A) b}{GJ_p} = 0,$$

найдем

$$M_A = M_k \frac{b}{l} \text{ и } M_B = M_k \frac{a}{l} -$$

формулы, как для реакций простой балки.

б) Колесо экипажа, если его рассматривать, как стержневую шарнирную систему, всегда имеет один лишний стержень. Примем за лишнее одно звено обода и определим усилия во всех элементах получившейся таким образом основной фермы фиг. 200: 1) сначала — усилия  $S_0$  от нагрузки  $P$  (сжатою оказывается лишь одна спица, изображенная жирной линией на фиг. с), 2) затем — усилия от  $X$ , как показано на фиг. d) — оказывается, что все стержни работают одинаково, только обод работает на сжатие, спицы же — растянуты. Сложение усилий  $S_0$  и  $S_x$



происходит лишь в одной спице фиг. с); поэтому потенциальная энергия системы

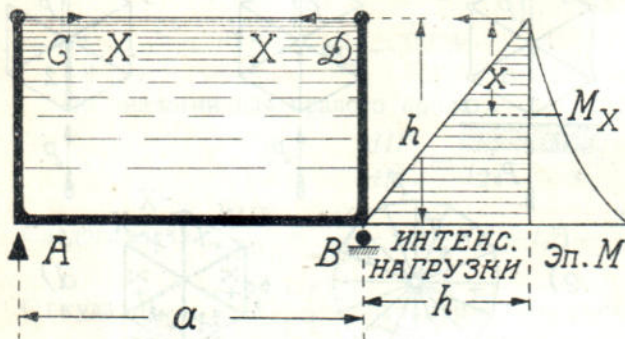
$$\Pi = \frac{(P - X)^2 a}{2EF} + \frac{11 X^2 a}{2EF}.$$

Из  $\frac{d\Pi}{dX} = 0 = -(P - X) + 11X$ , находим:  $X = \frac{1}{12} P$

В этом заключается выгода колеса — этого замечательного образца техники.

Предлагаем читателю решить задачу при большем числе спиц, показанных на фиг. е). В этом случае, обозначая угол между двумя соседними спицами  $\alpha = 2\pi : N$ , где  $N$  — число спиц, получим для усилия в ободе:

$$X = Pr : \left( 8a \frac{F}{F_1} + 32 \sin^2 \frac{\pi}{N} r \right).$$



Фиг. 201.

с) Акведук из жестких ребер П — образной формы, стянутых стяжкой CD (фиг. 201). Ребра на расстоянии 1 м. друг от друга стоят на главных балках А и В, которые служат опорами. Давление воды, наполняющей желоб, передается ребрам через обшивку.

Обозначая усилие затяжки X, составляем выражение потенциальной энергии и ее производной:

1) для обеих стоек  $\Pi' = \frac{2}{2EJ} \int_0^h \left( \frac{x^3}{6} - Xx \right)^2 dx,$

$$\frac{d\Pi'}{dX} = \frac{2}{EJ} \int_0^h \left( -\frac{x^4}{6} + Xx^2 \right) dx = \frac{2}{EJ} \left( -\frac{h^5}{30} + \frac{Xh^3}{3} \right);$$

2) для днища  $\Pi'' = \frac{1}{2EJ} \int_0^a \left( \frac{ha}{2} x - \frac{hx^2}{2} - \frac{h^3}{6} + Xh \right)^2 dx,$

$$\frac{d\Pi''}{dX} = \frac{h^2}{EJ} \int_0^a \left( \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{h^2}{6} + X \right) dx = \frac{h^2}{EJ} \left( \frac{a^3}{12} - \frac{h^2 a}{6} + Xa \right);$$

3) для стяжки  $\Pi''' = \frac{X^2 a}{2E_1 F_1}$  и  $\frac{d\Pi'''}{dX} = \frac{Xa}{E_1 F_1}$ . Теперь

$$0 = \frac{d\Pi'}{dX} + \frac{d\Pi''}{dX} + \frac{d\Pi'''}{dX} = \frac{h^5}{15EJ} - \frac{h^2 a^3}{12EJ} + \frac{h^4 a}{6EJ} - X \left( \frac{2h^3}{3EJ} + \frac{h^2 a}{EJ} + \frac{a}{E_1 F_1} \right) \dots \dots \dots (286).$$



Отсюда при  $E = E_1$ :

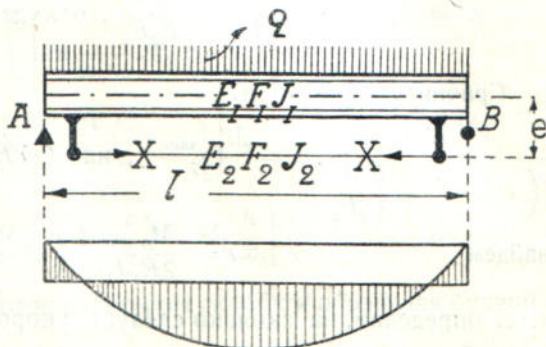
$$X = \frac{\frac{h^3}{5} + \frac{h^2 a}{2} - \frac{a^3}{4}}{2h + 3a + \frac{3aJ}{h^2 F_1}}$$

Усилием  $X$  определяется и расхождение верхних концов желоба  $\delta = \frac{Xa}{E_1 F_1}$ .

д) Подпружная балка фиг. 202. Для облегчения работы балки, ее снабжают струной  $XX$ , помещенной с эксцентриситетом  $e$ . Чтобы определить усилие струны при равномерной нагрузке  $q$ , составим выражение потенциальной энергии системы  $\Pi = \Pi' + \Pi''$ .

Если обозначить  $M_0$  — изгибающий момент простой балки, то момент  $M$  данной шпренгельной балки будет:

$$M = M_0 - Xe.$$



Фиг. 202.

Кроме изгиба моментом, балка сжимается усилием  $X$ ; в свою очередь струна испытывает растяжение. Поэтому

$$\Pi = \Pi' + \Pi'' = \frac{1}{2E_1 J_1} \int_0^l (M_0 - Xe)^2 dx + \frac{X^2 l}{2E_1 F_1} + \frac{X^2 l}{2E_2 F_2},$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{e}{E_1 J_1} \int_0^l M_0 dx + \frac{e^2}{E_1 J_1} \int_0^l X dx + \frac{Xl}{E_1 F_1} + \frac{Xl}{E_2 F_2} = 0$$

Отсюда

$$X = \frac{e \int_0^l M_0 dx}{l \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right)}$$

По экономическим соображениям целесообразно подобрать эксцентриситет так, чтобы максимальные моменты: положительный и отрицательный оказались равными, т. е. сделать:

$$\frac{ql^2}{8} - Xe = Xe, \text{ или } X = \frac{ql^2}{16e}, \text{ вообще: } X = \frac{M_{0 \text{ макс}}}{2e} \dots (287).$$

Сравнивая это с предыдущим, получаем:

$$\frac{M_{0 \text{ макс.}}}{2e} = \frac{e \int_0^l M_0 dx}{l \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right)}, \text{ откуда определяется } e.$$

Но того же результата можно достигнуть при заданном эксцентриситете, если надлежащим образом подтянуть струну. Если струну стянуть на величину  $\lambda$ , то это укорочение сложится: 1) из укорочения балки

1) Длина струны считается равной пролету  $l$ ,  $i^2 = J/F$  — радиусы инерции сечения в квадрате.



от сжатия:  $\lambda_1 = \frac{Xl}{E_1 F_1}$ ; 2) из укорочения струны вследствие поворота концевых сечений балки под влиянием моментов  $Xe$ ; это укорочение  $\lambda_2 = 2 \frac{Xel}{2E_1 J_1} \cdot e = \frac{Xe^2 l}{E_1 J_1}$ , и 3) из удлинения самой струны:  $\lambda_3 = \frac{Xl}{E_2 F_2}$ .

Таким образом:

$$\lambda = \frac{e^2 Xl}{E_1 J_1} + \frac{Xl}{E_1 F_1} + \frac{Xl}{E_2 F_2}, \text{ откуда } X = \frac{\lambda E_1 J_1}{l \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right)}.$$

Сравнивая это с (287):

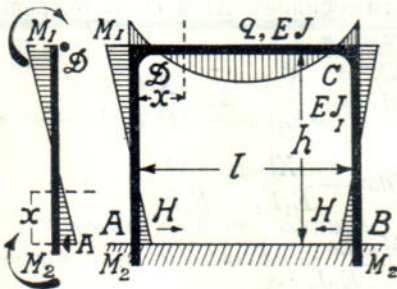
$$\frac{\lambda E_1 J_1}{l \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right)} = \frac{M_o \text{ макс.}}{2e}, \text{ или } 2e\lambda E_1 J_1 = M_o \text{ макс.} l \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right),$$

найдем

$$\lambda = \frac{M_o \text{ макс.} l}{2E_1 J_1 e} \left( e^2 + i^2 + \frac{E_1 J_1}{E_2 F_2} \right),$$

т. е. определим, на сколько следует укоротить струну, работая стяжной муфтой.

е) Рама с жесткими углами и защемленными стойками (фиг. 203).



Фиг. 203.

Благодаря симметрии, вместо 3-х, здесь оказывается 2 лишних неизвестных: момент  $M_1$ , стесняющий свободное вращение конца балки  $DC$  и момент защемления  $M_2$ .

Стойка  $AD$  находится под действием двух моментов, вращающих в одну сторону; поэтому реакция

$$A = - \frac{M_1 + M_2}{h}.$$

Изгибающий момент  $M_x = M_2 + Ax = M_2 - \frac{M_1 + M_2}{h} x =$

$$= M_2 \left( 1 - \frac{x}{h} \right) - M_1 \frac{x}{h},$$

и производные:

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_1} = - \frac{x}{h}; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_2} = 1 - \frac{x}{h}.$$

Потенциальная энергия одной стойки:

$$\Pi' = \int_0^h \frac{M_x^2 dx}{2EJ_1}, \text{ а производные:}$$

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial M_1} = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h \left[ M_1 \frac{x}{h} - M_2 \left( 1 - \frac{x}{h} \right) \right] \frac{x dx}{h}$$

и

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial M_2} = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h \left[ M_2 \left( 1 - \frac{x}{h} \right) - M_1 \frac{x}{h} \right] \left( 1 - \frac{x}{h} \right) dx.$$



Балка  $AB$  имеет:  $M_x = 1/2 qx(l-x) - M_1$  и  $\frac{\partial M_x}{\partial M_1} = -1$ .

Поэтому  $\Pi'' = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ}$  и производные:

$$\frac{\partial \Pi''}{\partial M_1} = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[ -\frac{qx}{2}(l-x) + M_1 \right] dx \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi''}{\partial M_2} = 0$$

Начало наименьшей работы для двух стоек и одной балки дает:

$$2 \frac{\partial \Pi'}{\partial M_1} + \frac{\partial \Pi''}{\partial M_1} = \frac{2}{EJ_1} \int_0^h \left[ M_1 \frac{x}{h} - M_2 \left( 1 - \frac{x}{h} \right) \right] \frac{x}{h} dx + \\ + \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[ M_1 - \frac{qx}{2}(l-x) \right] dx = 0 \quad \dots \quad (288)$$

$$\text{и} \quad 2 \frac{\partial \Pi'}{\partial M_2} + \frac{\partial \Pi''}{\partial M_2} = \frac{2}{EJ_1} \int_0^h \left[ M_2 \left( 1 - \frac{x}{h} \right) - M_1 \frac{h}{x} \right] \left( 1 - \frac{x}{h} \right) dx = 0.$$

Произведя интегрирование после раскрытия скобок и обозначая буквой  $k$  отношение

$$\frac{J}{J_1} \cdot \frac{h}{l} = k,$$

решим уравнения относительно  $M_1$  и  $M_2$ .

Оказывается:

$$M_2 = ql^2 : 12(2+k) \quad \text{и} \quad M_1 = ql^2 : 6(2+k).$$

После этого из уравнений Статики определятся реакции:

$$V = ql : 2 \quad \text{и} \quad H = ql^2 : 4h(2+k),$$

моменты в балке:  $M_x = 1/2 qx(l-x) - ql^2 : 6(2+k)$

и  $M_{\text{макс.}} = ql^2(2+3k) : 24(24+k).$

**6. Расчет решетчатых стоек** (фиг. 134). Рассмотрим среднюю панель, достаточно удаленную от концов стойки. Усилие диагонали принимаем за лишнюю неизвестную  $X$ .

При равномерном распределении сжимающей силы  $P$  между обоими ветвями стойки  $U$  и при обозначениях фиг. 133 расчетные длины будут

стержень	длина	сечение	усилие	потенц. энергия $\Pi$
основной ветви	$d$	$F$	$U - X \cos \alpha$	$(U - X \cos \alpha)^2 d : EF$
диагонали . . .	$l$	$F_r$	$X$	$X^2 l : EF_r$
распорки . . .	$b$	$F_r$	$X \sin \alpha$	$(X \sin \alpha)^2 b : EF_r$

Дифференцируя члены последнего столбца по  $X$  и приравнявая сумму производных нулю, получим:

$$-\frac{U \cos \alpha}{F} + \frac{X \cos^2 \alpha \cdot d}{F} + \frac{lX}{F_r} + \frac{bX \sin^2 \alpha}{F_r} \cdot 2 = 0;$$



откуда:

$$X = U d \cos \alpha : F \left( \frac{d \cos^2 \alpha}{F} + \frac{l}{F_r} + 2 \frac{b \sin^2 \alpha}{F_v} \right) =$$

$$= U : \left( \cos \alpha + \frac{F}{F_r \cos^2 \alpha} + 2 \frac{F}{F_v} \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right).$$

Обычно  $F_r = F_v$ , так что, обозначая их  $F_r$  и принимая

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{\sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \beta,$$

получим:

$$X = U : \left( \cos \alpha + \beta \frac{F}{F_r} \right).$$

В мостовой практике отношение  $F : F_r$  всегда велико, доходит до 40 и более<sup>1)</sup>; при таких условиях и обычных размерах  $\alpha$ , первым членом в скобках можно пренебречь, оставаясь в пределах точности в 1%. Тогда

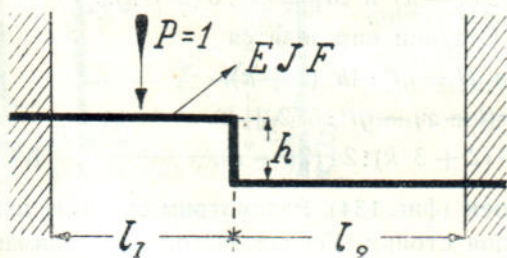
$$\frac{X}{F_r} = \frac{U}{\beta F}, \text{ или } n_r = \frac{1}{\beta} n.$$

Если для решетки принять египетский треугольник,

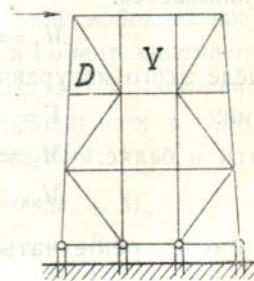
то  $\beta = 2,23$  и  $n_r = 0,45 n$ , как в § 14,2 . . . (290).

7. Задачи. а) Пользуясь Началом наименьшей работы, определить реактивную силу  $A$  на фиг. 110.

б) На фиг. 100 вместо пружины поместить упругую стойку длиной  $h$  при жесткости  $E, F, J$ , и определить ее усилие, пользуясь Началом наименьшей работы.



Фиг. 204.



Фиг. 205.

с) определить взаимодействие между двумя перекрестными балками на фиг. 101.

д) Найти реактивные опорные моменты балки, защемленной двумя концами, на фиг. 112.

е) Определить моменты в ступенчатой балке фиг. 204, защемленной двумя концами.

ф) Определить усилие в стойке (бабке) треугольного шпренгеля при грузе  $P$ , сосредоточенном в четверти пролета балки.

г) Определить усилия  $D$  и  $V$  в фермах деревянного мостового быка фиг. 205. Нижние опорные точки считать шарнирными.

<sup>1)</sup> В поясах Квебекского моста через р. Св. Лаврентия это отношение еще больше. Мост обрушился при постройке в 1908 г. по причине слабости решетки. Более подробное исследование см. в литературных источниках, приведенных в § 14,2.



**§ 23. Теорема Кастильяно. 1.** Начало наименьшей работы найдено еще в 1857 году итальянским генералом Менамбреа (Menambrea) и было первым общим методом решения статически неопределенных задач. Оно оказалось весьма плодотворным в приложениях и создало эпоху в Истории Строительной механики. Между тем более популярным оказался другой итальянский ученый, Кастильяно, опубликовавший свою теорему, относящуюся к тем же вопросам, лишь в 70-х годах<sup>1)</sup>. Мы изложим эту теорему сначала на основании элементарных соображений.

Разобьем элементы системы с лишними связями на две группы: необходимые элементы основной системы и лишние связи. В соответствии с этим обозначим потенциальную энергию частей системы  $\Pi_0$  и  $\Pi_A$ .

На основании Начала наименьшей работы  $\frac{d\Pi_0}{dX} + \frac{d\Pi_A}{dX} = 0$ .

Здесь  $X$  есть какая-нибудь лишняя неизвестная сила. Когда система разбивается на две части, то эта сила входит в одну часть противоположно другой, и если в первой мы считаем ее положительной, то во второй должны считать отрицательной. На основании этого предыдущее равенство переписывается

$$\frac{d\Pi_0}{dX} + \frac{d\Pi_A}{d(-X)} = 0, \text{ или } \frac{d\Pi_0}{dX} = \frac{d\Pi_A}{dX} \dots \dots \dots (291).$$

Такие же результаты получатся и при дифференцировании по другим переменным. Отсюда следует, что производная от потенциальной энергии по лишней силе для основной системы, освобожденной от лишних связей, есть вполне определенная величина, равная производной для лишней связи. Посмотрим, что выражает эта последняя в общем случае потенциальной энергии связи.

Каково бы ни было напряженное состояние лишнего стержня, его энергия выражается через продольную и поперечную силу и изгибающий момент<sup>2)</sup>.

На основании (277), потенциальная энергия бруска вообще

$$\Pi = \int \frac{N_x^2 dx}{2EF} + k \int \frac{Q_x^2 dx}{2GF} + \int \frac{M_x^2 dx}{2EJ} \dots \dots \dots (292).$$

Но для лишнего бруска все эти члены выразятся исключительно только через лишние неизвестные, которые составляют для него продольную или поперечную силу или изгибающий момент, притом, по условиям выбора, они совершенно независимы. Поэтому, дифференцируя потенциальную энергию по одному из этих неизвестных, мы получим всегда:

$$\text{либо } \int \frac{N dx}{EF}, \quad \text{либо } k \int \frac{Q dx}{GF}, \quad \text{либо } \int \frac{M dx}{EJ}.$$

<sup>1)</sup> Castigliano Alberto. Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici. Turin, 1879. В Туринской Академии Наук доклад сделан в 1875 г. (См. Actes de l'Académie de Turin 1875).

<sup>2)</sup> Мы рассматриваем здесь только плоскую деформацию, отбрасывая кручение. Но конечно, вывод распространяется и на случай кручения. Точно также он может быть распространен и на кривые бруски.



А это есть деформация, соответствующая какой-либо из принятых лишних неизвестных, это:—

либо удлинение  $\frac{Xdx}{EF}$ , соответствующее лишней нормальной силе,

либо угол поворота  $\frac{M_x dx}{EJ}$ , соответствующий лишнему моменту,

либо абс. сдвиг  $\frac{Q_x dx}{GF}$ , соответствующий лишней поперечной силе.

Следовательно, в правой части равенства (291) стоит координата, соответствующая той обобщенной силе, по которой в левой части равенства произведено дифференцирование потенциальной энергии основной системы, освобожденной от лишних связей. Таким образом равенство (291) говорит, что производная по какой-нибудь силе от потенциальной энергии основной системы равна соответствующей координате.

В этом и состоит теорема Кастильяно.

В частном случае лишний стержень может быть абсолютно жестким—такой случай представляет земля, если она входит как стержень образования системы.

В этом случае лишними будут опорные реактивные силы. В правой части равенства (291) окажется нуль, и мы приходим к Началу наименьшей работы для основной системы без лишних стержней, но с лишними опорными закреплениями:

$$\frac{d\Pi}{dX} = 0^1).$$

**2. Другой способ доказательства.** Если обобщенным силам:  $A, B, C, \dots$  соответствуют координаты:  $a, b, c, \dots$ , то в пределах пропорциональности по теореме Клапейрона:

$$\Pi = 1/2(Aa + Bb + Cc + \dots).$$

Это выражение потенциальной энергии справедливо для всякого напряженного состояния системы. Перепишем его так:

$$2\Pi = Aa + Bb + Cc + \dots \dots \dots (293).$$

Мы считаем обобщенные силы независимыми переменными; при их изменении изменяются координаты, являющиеся, вообще говоря, функциями от всех обобщенных сил. Действительно, изменяя какую-нибудь одну из обобщенных сил, мы изменяем деформацию всей системы, так что, вообще говоря, все координаты получают приращение,—все координаты суть функции от каждой из обобщенных сил.

Итак, считая координаты  $a, b, c, \dots$  функциями от силы  $A$ , продифференцируем выражение потенциальной энергии по  $A$ :

<sup>1)</sup> Начало Наименьшей работы в таком изложении представляет по существу принцип уравнивания деформаций: по теореме Кастильяно, производная от потенциальной энергии для основной системы есть ее деформация, равная деформации лишнего стержня. Мы имеем здесь равенство деформаций, только выраженное через потенциальную энергию.



$$2 \frac{\partial \Pi}{\partial A} = a \cdot 1 + A \frac{\partial a}{\partial A} + B \cdot \frac{\partial b}{\partial A} + C \frac{\partial c}{\partial A} + \dots \dots \dots (294).$$

Но при статическом развитии деформации приращение потенциальной энергии равно приращению работы:

$$\delta \Pi = \delta T, \text{ или } \frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{\partial T}{\partial A}.$$

А так как при изменении силы  $A$  на  $\delta A$  элементарная работа

$$\delta T = (A + \delta A)\delta a + B\delta b + C\delta c + \dots,$$

то в пределе:

$$\frac{\partial T}{\partial A} = \frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{A\delta a}{\delta A} + \frac{\partial A \delta a}{\partial A} + \frac{B\delta b}{\delta A} + C \frac{\partial c}{\partial A} + \dots$$

Отбрасывая второй член правой части, как малую величину, имеем:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = A \frac{\partial a}{\partial A} + B \frac{\partial b}{\partial A} + C \frac{\partial c}{\partial A} + \dots \dots \dots (295).$$

Вычитая это из (294), находим:

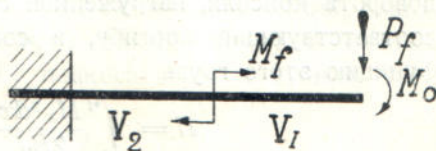
$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = a, \dots \dots \dots (296),$$

т. е. производная от потенциальной энергии по обобщенной силе, равна соответствующей координате.

Так как переменная  $A$  выбрана произвольно и высказанное рассуждение можно было бы буквально повторить про всякую другую из обобщенных сил, то вывод имеет общее значение и относится ко всякому числу обобщенных сил. Одно только условие налагается на этот результат: это—линейный закон деформации и совершенная упругость процесса. То же условие иначе выражают требованием, чтобы потенциальная энергия была однородной функцией координат во второй степени (сравн. § 16,2b).

**3. Приложения.** Теорема Кастильяно представляет средство для разыскания координат, так как по этой теореме всякая координата равна производной от известной потенциальной энергии.

Очевидно, надо составить выражение для потенциальной энергии, как функцию от соответствующей силы и продифференцировать по этой силе. Полученная производная представит требуемую координату.



Фиг. 206.

Покажем это на ряде примеров.

а) Прогиб консоли от сосредоточенного груза на конце консоли (фиг. 206). Прогиб  $y$  есть координата, соответствующая сосредоточенной силе; поэтому составим потенциальную энергию, как функцию от груза  $P$ , стоящего на консоли. Потенциальная энергия изгиба:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ}.$$



Но так как для какого-нибудь  $x$ —сечения консоли момент  $M_x = Px$ , то

$$\Pi = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EJ}, \quad \text{и} \quad \frac{d\Pi}{dP} = \frac{P}{EJ} \int_0^l x^2 dx = \frac{Pl^3}{3EJ} = y.$$

Это—известный прогиб конца консоли.

б) Угол поворота конца консоли, нагруженной моментом  $M_0$ . В этом случае изгибающий момент не изменяется по всей длине консоли; потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{M_0^2 l}{2EJ}, \quad \text{а потому угол поворота} \quad \varphi = \frac{d\Pi}{dM_0} = \frac{M_0 l}{EJ}.$$

с) Если требуется определить угол поворота той же консоли, но в каком-нибудь промежуточном сечении, то потенциальную энергию надо составлять и дифференцировать по обобщенной силе, соответствующей углу в этом сечении. Поэтому надо вообразить здесь некоторый момент.

Так, для разыскания угла поворота посередине, вообразим здесь пару сил с фиктивным моментом  $M_f$  (фиг. 206). При составлении потенциальной энергии придется разбить балку на 2 участка, отличающиеся изгибающим моментом. Момент правой половины не зависит от обобщенной силы  $M_f$ , по которой производится дифференцирование, и достаточно взять только левую половину балки. Для нее

$$\Pi = \frac{(M_0 + M_f)^2 l/2}{2EJ} \quad \text{и} \quad \varphi_{1/2} = \frac{d\Pi}{dM_f} = \frac{(M_0 + M_f)l}{2EJ}.$$

Но так как в действительности мы имеем тот частный случай, когда  $M_f = 0$ , ибо момента  $M_f$  посередине балки не существует, то посередине пролета угол  $\varphi = \frac{M_0 l}{2EJ}$ , т. е. вдвое меньше, чем на конце.

д) Тем же приемом введения фиктивных сил приходится пользоваться и в том случае, когда требуется определить какую-нибудь координату, которая вообще не соответствует имеющейся силе, например: найти прогиб консоли, обремененной концевым моментом  $M_0$ ; или наоборот—найти угол поворота консоли, нагруженной силой  $P$ . В первом случае вводим груз  $P_f$ , соответствующий прогибу, и составляем потенциальную энергию, как функцию этого груза:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{(M_0 + P_f x)^2 dx}{2EJ}.$$

Тогда

$$\frac{d\Pi}{dP_f} = \int_0^l \frac{(M_0 + P_f x) x dx}{EJ} \quad \text{при} \quad P_f = 0 = \int_0^l \frac{M_0 x dx}{EJ} = \frac{M l^2}{2EJ}.$$

Предлагаем читателю определить для той же консоли угол поворота при нагрузке  $P$ .

е) Правило. Для разыскания какой-нибудь деформации упругой системы вводят соответствующую ей обобщенную силу, (если таковая отсутствует), составляют и дифференцируют потенциальную энергию по этой



обобщенной силе; результат приводят к действительному состоянию системы, приравнявая нулю фиктивную силу, если она была введена для дифференцирования.

Теорема Кастильяно представляет еще один способ для определения деформаций упругих систем, которым можно пользоваться наряду с описанными в §§ 5—9.

**4. Примеры.** а) Желоб акведука. Определим расхождение свободных концов желоба, наполненного водою (фиг. 201). Так как здесь нет силы, соответствующей искомому расхождению  $\delta$ , то вообразим фиктивные силы  $X$ .

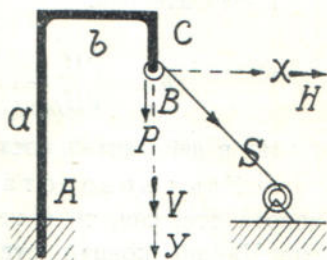
Потенциальная энергия стойки и днища уже приводилась для фиг. 201, и достаточно в сумме производных (286) фиктивную силу  $X$  приравнять нулю. При этом получится:

$$\delta = \frac{d\Pi}{dX} \text{ при } X=0 = \frac{h^2}{60EJ} (4h^3 + 10h^2a - 5a^3).$$

б) Прогиб ломанного бруса, напр., изображенного на фиг. 207. Равнодействующую сил  $P$  и  $S$  блока  $B$  раскладываем на горизонтальную и вертикальную составляющие  $H$  и  $V$ ; тогда явится возможность определить перемещение точки  $B$  по обеим осям координат. Для примера определим горизонтальное перемещение  $x$  от составляющей  $H$  и угол поворота конца крана. В случае постоянной жесткости без затруднения найдем:

$$x = \frac{H}{EJ} \left( \frac{a^3}{3} - ca^2 + \frac{c^3}{3} + ac^2 + bc^2 \right)$$

$$\varphi = \frac{H}{2EJ} (a^2 - 2ac - 2bc - c^2).$$



Фиг. 207.

в) Шпренгельная балка. Пользуясь теоремой Кастильяно, определим сближение концов стоек шпренгельной балки фиг. 163 от действия усилия  $X$ . Потенциальная энергия здесь сложится из трех частей, благодаря растяжению подкоса, сжатию стойки, а также изгибу и сжатию балки. Обозначая жесткость балки  $EJ, F$ , подкоса  $E_1F_1$  и стойки  $E_2F_2$ , получим:

$$\Pi_\sigma = \frac{5}{6} \cdot \frac{X^2 h^2 l}{EJ} + \frac{3X^2 l}{2EF},$$

$$\Pi_n = \frac{X^2 l}{\cos^3 \alpha E_1 F_1} \quad \text{и} \quad \Pi_c = \frac{X^2 l \operatorname{tg}^2 \alpha h}{E_2 F_2}.$$

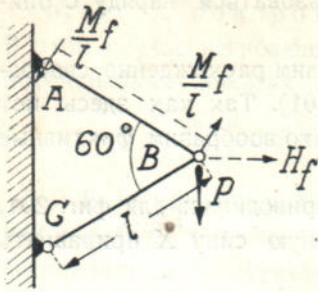
А потому сближение

$$\delta = \frac{d\Pi}{dX} = \frac{d\Pi_\sigma}{dX} + \frac{d\Pi_n}{dX} + \frac{d\Pi_c}{dX} = \left( 2 \cdot \frac{1 \cdot l}{E_1 F_1 \cos^3 \alpha} + 2 \cdot \frac{1 \cdot l \operatorname{tg}^2 \alpha}{E_2 F_2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1 \cdot h^2 l}{EJ} + \frac{3 \cdot l}{EF} \right) X.$$



В виду того, что площадь сечения балки  $F$ , обыкновенно, во много раз больше площади сечения струны (подкоса), последним членом в скобках можно пренебречь<sup>1)</sup>.

д) Прогиб стержневой системы. Для простоты возьмем кронштейн из двух стержней, образующих равно-  
 сторонний треугольник. При вертикальном грузе  $P$  усилия в стержнях также будут  $\pm P$ , а по-  
 тому потенциальная энергия



$$\Pi = 2 \frac{P^2 l}{2EF}, \text{ и прогиб } y = \frac{d\Pi}{dP} = \frac{2Pl}{EF}.$$

Чтобы получить горизонтальное перемещение  $h$ , введем фиктивную силу  $H_f$ . Тогда усилия в стержнях, при одновременном действии  $P$  и  $H_f$ , будут:

$$\text{для стержня } AB \text{ — растяжение } P + \frac{H_f}{\sqrt{3}};$$

$$\text{» » } BC \text{ — сжатие } P - \frac{H_f}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно:

$$h = \frac{d\Pi}{dH_f} = \frac{\left(P + \frac{H_f}{\sqrt{3}}\right)l}{EF\sqrt{3}} - \frac{\left(P - \frac{H_f}{\sqrt{3}}\right)l}{EF\sqrt{3}} = \frac{2H_f l}{3EF}.$$

Но в действительности  $H_f = 0$ ; поэтому и  $h = 0$ .

е) Угол поворота стержня. Если требуется определить угол поворота стержня, то к нему прикладывают фиктивный момент в виде двух сил  $M_f/l$  по концам стержня. Искомый угол поворота  $\varphi$  — представляет координату, соответствующую этому моменту. Далее, на общих основаниях, определяют усилия в стержнях при одновременном действии нагрузки  $P$  и сил  $\frac{M_f}{l}$  и  $-\frac{M_f}{l}$ ; они оказываются (по фиг. 208):

$$\text{растяжение стержня } AB: P - \frac{M_f}{l} \operatorname{tg}30^\circ = P - \frac{M_f}{l\sqrt{3}};$$

$$\text{сжатие » } BC: P - \frac{M_f}{l \cos 30^\circ} = P - \frac{2M_f}{l\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } \varphi &= \frac{d\Pi}{dM_f} = \left[ -\frac{P - \frac{M_f}{l\sqrt{3}}}{l\sqrt{3}EF} - \frac{2\left(P - \frac{2M_f}{l\sqrt{3}}\right)}{lEF\sqrt{3}} \right] l = \\ &= -\frac{3Pl}{EF\sqrt{3}} + \frac{5M_f l}{3EF l^2}. \end{aligned}$$

При  $M_f = 0$  получаем окончательно:

$$\varphi = -3P : EF\sqrt{3}.$$

<sup>1)</sup> Сравни. форм. 226.



Знак минус указывает на то, что угол идет обратно предположенному, т. е. — по часовой стрелке.

**5. Задачи.** а) Определить изменение угла  $B$  в кронштейне из стержней фиг. 208.

б) Определить прогиб конца крана фиг. 110.

в) Определить прогиб балки равного сопротивления изгибу, свободно лежащей на 2-х опорах, при постоянной высоте ее прямоугольного поперечного сечения и сосредоточенном грузе  $P$ , приложенном посередине пролета.

Ответ. Если сравнивать две прямоугольные балки с одинаковым сечением по середине, но одну постоянного сечения на всем протяжении пролета, а другую сделать балкою равного сопротивления, то прогиб второй будет в  $1\frac{1}{2}$  раза больше первого.

д) Определить прогиб конца консоли равномерно нагруженной двух-консольной балки.

е) Определить прогиб середины рамы, изображенной на фиг. 203.

Ответ:  $q \frac{l^4}{48EJ} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{2+k} \right)$ , где  $k = \frac{J}{J_1} \cdot \frac{h}{l}$ .

ф) Сравнить потенциальную энергию балки: 1) простой и 2) двумя концами защемленной, при той же нагрузке.

Указание: сравнить прогибы.

г) Сравнить потенциальную энергию балки равного сопротивления и балки постоянного сечения, при одинаковых напряжениях<sup>1)</sup>.

Ответ: для консоли постоянной высоты, обремененной на конце грузом  $P$ , первая втрое больше второй.

h) Два стальных бруска, у которых предел упругости приближается к временному сопротивлению, свободно лежат на 2-х опорах, но пролет первого вдвое больше, чем у второго. Оба бруска испытываются на излом силой, приложенной по середине. Который из брусков сломается при меньшей затрате работы?

Ответ. При элементарном решении, длинный требует работы в 2 раза больше, чем короткий. В действительности явление сложнее.

и) Опровергнуть софизм: По теореме Клапейрона,  $\Pi = \frac{1}{2} A \cdot a$ , и потому  $\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{2} a$ . Но по теореме Кастильяно  $\frac{d\Pi}{dA} = a$ .

Следовательно:  $\frac{1}{2} a = a$ ?

## ГЛАВА VI.

### Общие вопросы расчета систем с лишними неизвестными.

**§ 24. Задачи со многими неизвестными. 1. Система основных линейных уравнений деформации.** Все методы решения задач со многими лишними неизвестными приводят к одной и той же системе линейных уравнений с коэффициентами, представляющими соответствующие перемеще-

<sup>1)</sup> При решении задач, обыкновенно, считают, что в пределах пропорциональности энергия равномерно распределяется по объему тела, хотя явление гораздо сложнее.



ния. Таковы системы 145, 238 и 285. В самой общей форме мы можем получить ту же систему уравнений, пользуясь принципом взаимности перемещений.

Положим, что стержневая ферма или балка имеет ряд промежуточных, т. е. лишних опор:  $A, B, C, \dots$ . Под влиянием приложенных к ней грузов  $P_1, P_2, P_3, \dots$  в опорах возникают реактивные силы, которые для простоты назовем буквами опор:  $A, B, C, \dots$

Кроме этого, действительного состояния системы, рассмотрим ряд фиктивных, когда вместо одной из промежуточных реакций поставлена единица. Таких фиктивных состояний будет, по числу промежуточных опор, очевидно, столько, сколько имеется лишних неизвестных. Сопоставляя каждое из них с действительным состоянием и составляя принцип взаимности, мы получим столько уравнений, сколько находится неизвестных. Если перемещения писать в общей форме, имея в виду впоследствии, при подстановке численных значений, принимать во внимание и знак, то, по аналогии с (212), получим такую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma P_m \delta_{ma} + A \delta_{aa} + B \delta_{ba} + C \delta_{ca} + \dots &= 0 \\ \Sigma P_m \delta_{mb} + A \delta_{ab} + B \delta_{bb} + C \delta_{cb} + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (297).$$

Здесь  $\delta$  — общее обозначение перемещений, соответствующих наменным силам  $P, A, B, \dots$ ; первый индекс обозначает место, к которому относится  $\delta$ , а второй — точку приложения, и вместе с тем название, единичной силы, приложенной вместо лишнего неизвестного. Перемещения  $\delta$  определяются по деформации основной системы при какой-нибудь единичной силе и потому считаются известными.

Неизвестные силы  $A, B, C, \dots$ , вообще говоря, входят во все уравнения системы; определение их при большом числе уравнений обыкновенно связано с затруднениями, как в отношении потери времени на вычисления, так и вследствие накопления погрешностей (см. § 11,<sub>4</sub> и § 26,<sub>5</sub>). Искусственный способ механизмов, рассмотренный в § 18,<sub>6</sub>, при большом числе неизвестных также неудовлетворителен. Более целесообразными надо считать приемы, приводящие сложную задачу к ряду более простых. Эти вполне естественные приемы уже намечались при рассмотрении отдельных примеров § 11,<sub>5</sub>, § 17,<sub>8</sub>. Мы стремимся сложный вопрос расчленить на ряд уже решенных, или понизить общее число неизвестных  $n$  хотя бы на единицу, чтобы перейти к решению более простой системы уравнений с  $n-1$  неизвестными, либо, как это делает М. Levy (см. § 13), — к систематическому решению двух уравнений, связанных известной последовательностью. В последнее время в связи с сосредоточением внимания исследователей на системах с большим числом неизвестных, — материал систематизируется, и появляются общие способы решения. Ограниченный объем курса не позволяет рассмотреть эти способы с надлежащей полнотой; приходится ограничиваться общими соображениями, подыскивая при этом наиболее простую форму изложения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Нас побуждает к этому также и сравнительно ограниченный круг инженеров, которые пользуются решением задач со многими лишними неизвестными в пределах Союза. Материал этот для наших технических школ сравнительно нов, и требуется предвари-



**2. Способ последовательного усложнения.** Принцип взаимности перемещений приводит к выводу, что какое-нибудь из неизвестных системы определяется путем построения эпюры для деформации, которую получает система, если ее освободить от этого неизвестного и вместо него поместить соответствующую единицу (см. § 18 и пример 1 из § 20).

Это справедливо для систем не только с одним, но и со многими неизвестными.

Отбрасывая одно неизвестное, мы определяем деформацию более простой системы, так как число неизвестных стало на 1 меньше. Следовательно, определение неизвестных сил в случае  $n$ -раз неопределенной задачи приводится таким образом к решению задачи об  $n - 1$  лишних неизвестных; только вместо сил разыскиваются деформации. Определив деформацию, мы тотчас же считаем и значение прежде отброшенной неизвестной силы, ибо оно равно отношению уже теперь известных деформаций (см. § 17,4 форм. 204).

Теперь система содержит уже  $n - 1$  лишних неизвестных сил.

Поступивши точно таким же образом со второй из неизвестных, мы приходим к системе с  $n - 2$  неизвестными и т. д. Очевидно, можно дойти и до основной системы. В этом заключается систематический прием упрощения задачи.

тально расположить к нему студенческие массы. Интересующимся вопросом за пределами нашей программы указываем литературу:

Müller S. Zur Berechnung mehrfach Statischunbestimmte Tragwerke. Centralblatt der Bauverwaltung. 1907.

Hertwig A. Über die Berechnung mehrfach statischunbestimmter Systeme und verwandte Aufgabe in der Statik der Baukonstruktion. Zeitschrift für Bauwesen 1910.

Hertwig A. Die Lösungen linearen Gleichungen durch unendliche Reihen. Festschrift Müller—Breslau 1912.

Grube A. Berechnung eines mehrfach gerwungenen Trägers mittels des Stufenverfahrens. Zeitschrift für Bauwesen. 1911.

Kirchhoff. Beitrag zur Berechnung dreifach statischunbestimmter Systeme mit Hilfe von Elastizitätsgleichungen. Z. f. B. 1911.

Bendixsen Axel. Die Methode der  $\alpha$ -Gleichungen. 1914.

Gehler W. Dreiwinkelverfahren в книге: „Otto Mohr. Zum achtzigsten Geburtstag“, 1916.

Ostenfeld. Die Deformationsmethode.

Pirlet J.—статья в „Der Eisenbau“ 1910, 14 и 15, а также в курсе: Compendium der Statik der Baukonstruktionen, 1 и 2 часть II-го тома, 1921—23 г.

Suter. Die Methode der Festpunkte.

Мюллер—Бреслау. Графическая статика сооружений т. II, ч. 2, перев. Г. Г. Кривошеина 1913.

Стрелецкий Н. С. К расчету сложных статически неопределимых систем. М. 1922.

Башинский В. В. Новый метод расчета балок и жестких рамных систем. 1913.

Филоненко—Бородич М. М. Общее решение системы основных уравнений для неразрезной балки, М. 1921.

Иванов А. А. Теория ошибок и способ наименьших квадратов. Лен-град 1921.

Об экспериментальном приеме расчета статически неопределимых систем. См.:

Annales des ponts et chaussées 1913 (Mesnager).

Beton und Eisen 1923 (F. Kann).

Buildings 1922—23 (Beggs).

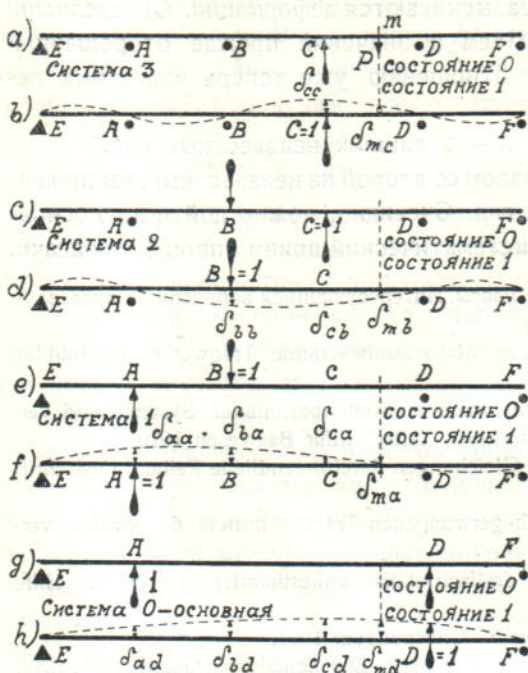
Rieckhof Chr. Nupubest. Experimentelle Lösung statisch unbestimmter Systeme für den Gebrauch in der Praxis. 1925.



Положим, для примера, что на пятипролетной балке фиг. 209 находится один груз  $P$ ; балка имеет 4 промежуточных опоры, следовательно, — 4 лишних неизвестных. Отбросим одну из них, например  $C$  и поместим вместо нее 1, как показано на фиг.  $b$ ). Работа сил  $\bar{0}$ -го состояния на перемещениях 1-го будет  $P\delta_{mc3} + C\delta_{cc3}$ <sup>1)</sup>; она равна нулю, так как единица 1-го состояния не встречает перемещения 0-го состояния:

$$P\delta_{mc3} + C_3\delta_{cc3} = 0, \text{ т. е. } C_3 = -P \frac{\delta_{mc3}}{\delta_{cc3}} \dots \dots \dots (298).$$

Таким образом, для разыскания реакции  $C$ , надо уметь определить прогибы балки на 3-х лишних опорах при  $C=1$ . Но чтобы определить эти прогибы, необходимо рас-



Фиг. 209.

порядка реакциями лишних опор  $A, B$  и  $D$  при нагрузке  $C=1$ . Предпримем их определение, пользуясь тем же приемом, например, определим сначала реакцию  $B$ .

Мы пришли к новой задаче: определить реакцию  $B$  при действии груза 1 в точке  $C$ . Это новое действительное состояние системы представлено на фиг.  $c$ ).

Как и прежде, отбросим опору  $B$ , поместим вместо нее единицу силы, как показано на фиг.  $d$ ), и определим прогибы балки с двумя лишними опорами. Составляя принцип взаимности для двух состояний  $c$ ) и  $d$ ), мы, конечно, придем к формуле вида (298), только

вместо  $P$  в ней будет 1 и вместо вторых индексов  $c$ —будут  $b$ , ибо теперь фиктивное состояние определяется силой  $B=1$ . Следовательно:

$$B_2 = -1 \frac{\delta_{cb2}}{\delta_{bb2}} \dots \dots \dots (299).$$

Теперь является возможность прогибы прежнего состояния системы  $b$ ) выразить через новые прогибы из состояния  $d$ ), рассматривая состояние  $b$ ) как балку  $c$ ) на 2-х лишних опорах, нагруженную группой из двух внешних сил: единица в точке  $C$  и сила  $B_2 = -\frac{\delta_{cb2}}{\delta_{bb2}}$  в точке  $B$ .

1) Мы прибегаем к третьему индексу для отметки, что перемещения определяются из системы с 3 лишними опорами.



Прогибы являются результатом сложения действия сил  $B$  и  $1$  на систему  $c$ ), а потому:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{mc3} &= \delta_{mc2} + B_2 \delta_{mb2} = \delta_{mc2} - \frac{\delta_{cb2}}{\delta_{bb2}} \cdot \delta_{mb2} \text{ и} \\ \delta_{c3} &= \delta_{cc2} + B_2 \delta_{cb2} = \delta_{cc2} - \frac{\delta_{cb2}}{\delta_{bb2}} \cdot \delta_{cb2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (300).$$

Все выражено через прогибы системы с двумя лишними неизвестными. Воспользуемся тем же приемом для дальнейших упрощений. Будем исходить из системы  $d$ ) и поступим, как с системой  $a$ ): освободим ее от опоры  $A$ , заменяя неизвестную силой  $A$  (фиг.  $e$ ), и сопоставим с фиктивным состоянием  $A=1$  на фиг.  $f$ ).

Как и прежде, получим выражение для реакции:

$$A = - \frac{\delta_{ba1}}{\delta_{aa1}} \dots \dots \dots (301).$$

Кроме того, по линии влияния  $f$ ) найдем также и реакцию  $A$  от груза  $1$ , находящегося в точке  $C$ :

$$A_1 = - \frac{\delta_{ca1}}{\delta_{aa1}} \dots \dots \dots (302).$$

Все выражено через перемещения системы с одним лишним неизвестным. После этого прогибы системы  $d$ ) можно получить по фиг.  $f$ ), считая, что балка с одной лишней опорой нагружена группой двух сил: единицей в  $B$  и силой  $A_1$  в точке  $A$  (фиг.  $e$ ).

Те прогибы системы  $b$ ), определение которых было намечено в начале расчета, также могут быть выражены через прогибы системы  $f$ ), но эту последнюю надо нагрузить группой трех сил: единицей в точке  $C$ , силой  $B_2$  в точке  $B$  и силой  $A_1$  в точке  $A$ . При такой нагрузке последовательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{mc2} &= \delta_{mc1} + \delta_{ma1} \cdot A_1 = \delta_{mc1} - \frac{\delta_{ac1}}{\delta_{aa1}} \cdot \delta_{ma1}, \\ \delta_{cb2} &= \delta_{cb1} + \delta_{ca1} \cdot A_1 = \delta_{cb1} - \frac{\delta_{ab1}}{\delta_{aa1}} \cdot \delta_{ca1}, \\ \delta_{bb2} &= \delta_{bb1} + \delta_{ba1} \cdot A_1 = \delta_{bb1} - \frac{\delta_{ab1}}{\delta_{aa1}} \cdot \delta_{ba1}, \\ \delta_{mb2} &= \delta_{ma1} + \delta_{ma1} \cdot A_1 = \delta_{mb1} - \frac{\delta_{ab1}}{\delta_{aa1}} \cdot \delta_{ma1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (303)$$

Отсюда  $\delta_{mc3} = \delta_{mc1} + \delta_{ma1} \cdot A_1 + \delta_{mb1} \cdot B_2 + \delta_{ma1} \cdot B_2 A_1$ .

Величины  $B$  и  $A$  уже выражены через прогибы фигуры  $f$ ).

Применяя те же рассуждения к балке  $f$ ) и заменяя ее системой  $g$ ) и  $h$ ), приходим к основной балке без лишних опор  $h$ ), а следовательно, будем иметь возможность выразить лишнюю реакцию  $D$  и прогибы балки  $f$ ) через прогибы основной балки  $EF$ .

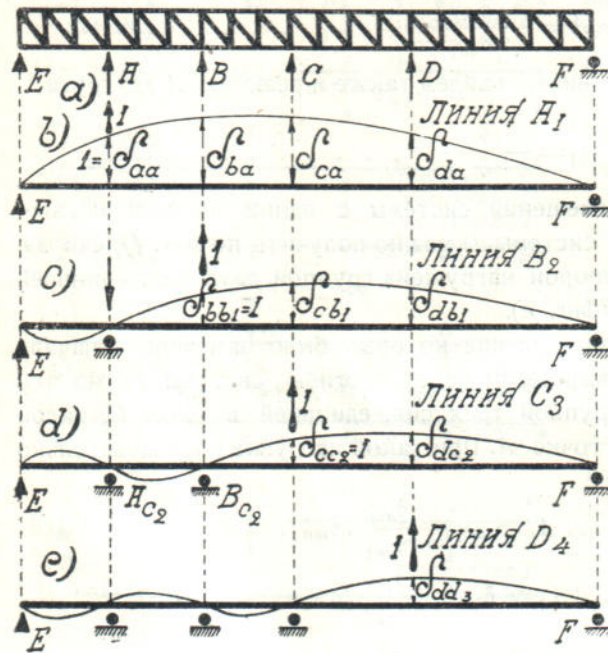
Таким образом, задача с 4-мя лишними неизвестными приведена к простой балке на двух опорах. Определивши прогибы этой балки, мы без затруднения решаем следующую более сложную задачу: по фиг.  $g$ ) тотчас же определяется реакция  $D$  балки с одной лишней опорой  $D$ , для



чего берут минус отношение прогибов под точкой  $A$  и под точкой  $D$  из фиг.  $h$ ); все прогибы балки  $f$ ), по предыдущему, также выражаются через прогибы фигуры  $h$ ). Затем, переходим к балке с двумя лишними неизвестными  $d$ ), определяя ее реакции и прогибы, как указывалось формулами (303), далее—к балке с 3-мя и, наконец,—к балке с 4-мя лишними опорами.

Практически, решение заключается в последовательном усложнении задачи путем введения каждый раз одного лишнего неизвестного, пока все они не будут исчерпаны, поэтому и способ решения может быть назван последовательным усложнением системы.

**3. Пример построения линий влияния по способу последовательного усложнения.** На фиг. 210 примем за лишние неизвестные реакции промежуточных опор  $A, B, C$  и  $D$  (фиг.  $a$ ) и рассмотрим сначала балку на



Фиг. 210.

двух опорах  $E$  и  $F$  (фиг.  $b$ ), нагруженную единицей в точке  $A$ . Строим эпюру прогибов, как показано на фиг.  $b$ . Если на ее ординате  $A$  написать «единица», то эпюра превратится в линию влияния реакции  $A$  для балки с одной лишней опорой; она же будет и линией влияния для прогиба точки  $A$  простой балки  $EF$  (сравн. § 17,1).

Усложним систему введением опоры  $A$  и эту новую систему с одной лишней опорой нагрузим единицей в точке  $B$ . Если мы построим упругую линию для этой новой системы  $e$ )

с одной лишней неизвестной, то получим линию влияния для второй опорной реакции  $B$ , показанную на фиг.  $c$ ).

Построение упругой линии осуществляется, как для простой балки  $EF$ , когда известна сила  $A$ ; действительно в этом случае на балке  $EF$  будет две известных силы  $A$  и  $1$  и построение упругой линии не представит затруднений. Силу же  $A$  мы получаем на основании следующих рассуждений.

Мы хотим определить реакцию  $A$  в двухпролетной балке, нагруженной единицей в точке  $B$ . Но реакция  $A$  от всякого груза определяется по линии влияния, построенной для  $A$ ; поэтому под грузом  $1$  надо взять ординату  $\delta_{ba}$  из фиг.  $b$ , конечно, измеренную в соответствующем масштабе, т. е.

$$A = - \frac{\delta_{ba1}}{\delta_{aa1}}.$$



Общее очертание упругой линии показано на фиг. *c*). Чтобы ее превратить в линию влияния, очевидно, необходимо ординаты измерять масштабом того прогиба, где была единица силы, т. е. на этом прогибе  $\delta_{bb}$  просто написать 1.

Введем теперь вторую лишнюю опору *B* и, как прежде, нагрузим систему единицей в точке *C*. Если для этой новой системы фиг. *d*) нам удастся построить упругую линию, то мы получим линию влияния для третьей лишней опоры *C*. Для построения же упругой линии на фигуре *d*), кроме груза 1 в точке *C*, мы имеем в распоряжении:

$$\text{силу } B_{c_2} = - \frac{\delta_{cb_1}}{\delta_{bb_1}},$$

вызванную единицей в двухпролетной балке фиг. *c*), которую мы берем непосредственно из линии влияния фигуры *c*), и кроме того—силу  $A_{c_2}$ , которую можно рассматривать, как реакцию двухпролетной балки *EF*, нагруженной силами  $B_{c_2}$  и 1 в точке *C*. Эта реакция также непосредственно определяется по линии влияния для *A* фиг. *b*):

$$A_{c_2} = -1 \cdot \frac{\delta_{ca_1}}{\delta_{aa_1}} - B_{c_2} \frac{\delta_{ba_1}}{\delta_{aa_1}} = - \frac{\delta_{ca_1}}{\delta_{aa_1}} + \frac{\delta_{cb_1}}{\delta_{bb_1}} \cdot \frac{\delta_{ba_1}}{\delta_{aa_1}}.$$

Прикладывая три известные груза: 1 в *C*,  $B_{c_2}$  в *B* и  $A_{c_2}$  в *A* к простой балке *EF*, мы получим упругую линию *d*), а если напишем на ее ординате  $\delta_{cc}$  число 1, то будем иметь и линию влияния для *C*.

Точно таким же образом получается и линия влияния для последней лишней реакции *D*: простую балку *EF* мы нагружаем 1 в точке *D* и тремя лишними реакциями, величину которых определяем из предыдущих линий влияния. Конечно, можно принять и независимое решение: построить упругую линию для балки с тремя лишними опорами *A*, *B* и *C*.

Рассматриваемый здесь прием разделения лишних неизвестных не связывается условием сосредоточения их в одной точке, как требовалось в § 18,7 и потому представляет определенные преимущества даже при 3-х лишних неизвестных; при многих же неизвестных преимущества его перед способом вспомогательных механизмов очевидны.

**4. Аналитический способ.** а) Прием Гаусса. Разделение неизвестных в системе линейных уравнений может быть произведено различно. Из многих сделанных предложений, старый способ Гаусса оказывается наиболее совершенным. Мы напомним его схематически, как основание для дальнейших приемов. Чтобы конкретизировать мысль, рассмотрим пример системы 3-х уравнений вида уравнений деформации (297):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} X + \delta_{ab} Y + \delta_{ac} Z + \delta_{an} &= 0 \\ \delta_{ba} X + \delta_{bb} Y + \delta_{bc} Z + \delta_{bn} &= 0 \\ \delta_{ca} X + \delta_{cb} Y + \delta_{cc} Z + \delta_{cn} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (304).$$

Коэффициенты при неизвестных, обозначенные теми же буквами, но поставленными в другом порядке: *ab* и *ba*, или *ac* и *ca*..., равные между собою, называются нормальными, а коэффициенты из одних и тех же букв; *aa* или *bb*... называются главными.



Уравнения деформации именно и обладают нормальными коэффициентами, так как, по принципу взаимности перемещений:

$$\delta_{ab} = \delta_{ba} \text{ и, вообще } \delta_{mi} = \delta_{im}.$$

Вместо обычного исключения неизвестного  $X$  путем умножения первого уравнения на  $\delta_{ba}$ , а второго—на  $\delta_{aa}$  и последующего вычитания уравнений, Гаусс предложил всегда умножать только первое уравнение на отношение коэффициентов: чтобы вычесть, например, из второго уравнения, надо первое умножить на отношение  $\delta_{ba} : \delta_{aa}$ , при вычитании из третьего уравнения—снова первое умножают на отношение  $\delta_{ca} : \delta_{aa}$ . При этом исключается  $X$ . Действительно: первая операция дает,

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{bb} - \frac{\delta_{ab}\delta_{ab}}{\delta_{aa}}) Y + (\delta_{bc} - \frac{\delta_{ac}\delta_{ab}}{\delta_{aa}}) Z + (\delta_{bn} - \frac{\delta_{an}\delta_{ab}}{\delta_{aa}}) &= 0, \\ \text{вторая операция приводит к:} \\ (\delta_{bc} - \frac{\delta_{ac}\delta_{ab}}{\delta_{aa}}) Y + (\delta_{cc} - \frac{\delta_{ac}\delta_{ac}}{\delta_{aa}}) Z + (\delta_{cn} - \frac{\delta_{ac}\delta_{an}}{\delta_{aa}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (305),$$

если воспользоваться принципом взаимности и принять, что  $\delta_{im} = \delta_{mi}$ .

В последних уравнениях примем обозначение, отмечающее, что, после исключения одной неизвестной  $X$ , остается еще 2, а именно, обозначим через  $\delta_{bb_2}$  коэффициент при  $Y$  со вторыми значками  $b$ :

$$\delta_{bb} - \frac{\delta_{ab}\delta_{ab}}{\delta_{aa}} = \delta_{bb_2}.$$

Точно также обозначим соответственно коэффициенты с иными вторыми значками  $c, n$  и проч.:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{bc} - \frac{\delta_{ac}\delta_{ab}}{\delta_{aa}} = \delta_{bc_2}; \quad \delta_{bn} - \frac{\delta_{an}\delta_{ab}}{\delta_{aa}} = \delta_{bn_2}; \\ \delta_{cc} - \frac{\delta_{ac}\delta_{ac}}{\delta_{aa}} = \delta_{cc_2} \text{ и } \delta_{cn} - \frac{\delta_{ac}\delta_{an}}{\delta_{aa}} = \delta_{cn_2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (306).$$

Тогда уравнения (305) переписутся в простой форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{bb_2} Y + \delta_{bc_2} Z + \delta_{bn_2} &= 0 \\ \delta_{cb_2} Y + \delta_{cc_2} Z + \delta_{cn_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (307).$$

С этой системой поступаем, как с предыдущей: умножаем первое уравнение на  $\delta_{bc_2} : \delta_{bb_2}$  и вычитаем из второго. Если при этом введем обозначение, указывая, что после исключения двух неизвестных остается одна:

$$\delta_{cc_2} - \frac{\delta_{bc_2}\delta_{bc_2}}{\delta_{bb_2}} = \delta_{cc_1} \text{ и } \delta_{cn_2} - \frac{\delta_{bc_2} \cdot \delta_{bn_2}}{\delta_{bb_2}} = \delta_{cn_1} \dots \dots \dots (308),$$

то получим следующее уравнение с неизвестным  $Z$ :

$$\delta_{cc_1} Z + \delta_{cn_1} = 0, \text{ откуда: } Z = - \frac{\delta_{cn_1}}{\delta_{cc_1}} \dots \dots \dots (309).$$

Теперь, подставляя в верхнее из уравнений (307) найдем:

$$Y = - \frac{\delta_{bc_2}}{\delta_{bb_2}} Z - \frac{\delta_{bn_2}}{\delta_{bb_2}} = \frac{\delta_{bc_2}}{\delta_{bb_2}} \cdot \frac{\delta_{cn_1}}{\delta_{cc_1}} - \frac{\delta_{bn_2}}{\delta_{bb_2}} \dots \dots \dots (310).$$



Наконец, из первого уравнения системы (304) определяем  $X$ :

$$X = -\frac{\partial_{ab}}{\partial_{aa}} Y - \frac{\partial_{ac}}{\partial_{aa}} Z - \frac{\partial_{an}}{\partial_{aa}} \dots \dots \dots (311).$$

Таким же образом решаются и системы со многими неизвестными.

б) Преимущества способа. По первому впечатлению способ Гаусса мало отличается от обычного, но в действительности он имеет несомненные преимущества:

1) Если не производить фактически умножения тех членов, которые впоследствии отпадут, и принять во внимание, что система (307) диагонально симметрична и два коэффициента ее одинаковы, то по обычному способу исключения неизвестных потребуется

$$2(2 \times 3 - 2) = 8 \text{ умножений};$$

по Гауссу же, надо выполнить

$$2 \text{ деления и } 2 \times 3 - 2 = 4 \text{ умножения.}$$

Экономия в количестве вычислений становится еще более ощутительной при большом числе неизвестных, например, при 4 неизвестных по первому способу требуется  $2(3 \times 4 - 3) = 18$  умножений, тогда как по Гауссу достаточно: 3 деления и  $3 \times 4 - 3 = 9$  умножений.

2) При обычном способе коэффициенты при неизвестных все увеличиваются, по Гауссу же они уменьшаются. В практике решения задач Строительной механики это имеет большое значение, ибо нередко здесь получаются числа с десятками знаков<sup>1)</sup>. Благодаря такой особенности приема Гаусса сравнительно доступной оказывается необходимая точность, тогда как обычно для обеспечения даже сравнительно невысокой точности при большом числе уравнений приходится оперировать с многозначными числами, для которых даже семизначные логарифмы оказываются недостаточными, и требуются счетные машины.

3) В способе Гаусса лишние неизвестные Строительной механики выражаются через главные координаты и требуют для своего определения сравнительно простых действий.

4) Как будет показано в разделе 10, решение задач по схеме Гаусса легко обзревается и проверяется. После каждого исключения, посредством проверки, легко обнаруживается ошибка, что особенно важно при большом числе неизвестных.

Разобранный в предыдущем разделе способ последовательного усложнения, по существу, есть осуществление схемы Гаусса для решения системы уравнений (297). Полученные при этом выражения для лишних неизвестных (298) — (301) совпадают с решениями Гаусса (309 — 311) даже по форме.

Итак, схема Гаусса вполне разрешает вопрос о разделении лишних неизвестных в уравнениях деформации. Она говорит, что для разделения неизвестных достаточно исключение их вести по предложенной схеме, и

<sup>1)</sup> Так, Суран в „Zeitschr. d. Ver. deutscher Ingenieure“ за 1910 г. на стр. 438 утверждает, что при решении задачи с 6 неизвестными дело доходило до 80 знаков.



для последнего из неизвестных мы приходим к выражению (309). Здесь получится деформация от нагрузки простой системы, не зависящей от лишних неизвестных (числитель) и нормальная деформация более простой системы при одном единичном типе нагрузки (знаменатель). Схема Гаусса приводит сложную систему уравнений к виду более простых выражений, которые остаются осуществимыми путем соответствующего нагружения наших упругих систем, чтобы собрать деформации, необходимые для подстановки в эти выражения. В предыдущих разделах было показано, как это может быть осуществлено.

Несмотря на это за последнее время в Строительной механике усиленно разрабатываются другие приемы разделения неизвестных. Эти приемы оказываются более популярными, чем способ Гаусса, несмотря на его большую простоту и изящество. Вероятно, причиной служит большая конкретность изложения и иллюстрирование примерами Строительной механики, так как предложения исходят от инженеров.

Мы рассмотрим здесь вкратце прием, разработанный С. Мюллером, А. Гертвигом, Н. С. Стрелецким и другими, прием, которым пользуется Мюллер-Бреслау, Пирле, С. П. Тимошенко и другие авторы курсов по статически неопределенным системам <sup>1)</sup>.

**5. Способ неопределенных коэффициентов.** Лишние неизвестные силы  $A, B, C, \dots$  в системе линейных уравнений (297) могут быть разделены посредством специальной подстановки неопределенных линейных коэффициентов. Пользуясь произвольностью этих коэффициентов, мы распорядимся ими так, чтобы произошло намеченное разделение неизвестных.

Введем новую систему переменных  $X, Y, Z, \dots$ , выражая лишние неизвестные  $A, B, C, \dots$  системы (297) через новые переменные и некоторые, пока произвольные коэффициенты, которыми впоследствии можно было бы распорядиться, чтобы избавиться от некоторых из лишних неизвестных. Например, примем:

$$\left. \begin{aligned} A &= X\alpha_{ax} + Y\alpha_{ay} + Z\alpha_{az} + \dots \\ B &= X\alpha_{bx} + Y\alpha_{by} + Z\alpha_{bz} + \dots \\ C &= X\alpha_{cx} + Y\alpha_{cy} + Z\alpha_{cz} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (312).$$

Эти новые переменные суть также лишние неизвестные, только иначе принятые, и если  $A, B, C, \dots$  были простыми реакциями, то  $X, Y, Z, \dots$  могут быть группами их, т. е. обобщенными силами. Чтобы получить представление о характере этих новых переменных, возьмем для них первое фиктивное состояние, т. е. положим:

$$X = 1, \quad Y = Z = \dots = 0.$$

Тогда получим из выражений (312):

$$A = 1 \cdot \alpha_{ax}; \quad B = 1 \cdot \alpha_{bx}; \quad C = 1 \cdot \alpha_{cx} \dots \dots \dots (313),$$

т. е. обобщенной силе  $X = 1$  соответствует в действительном состоянии группа сил  $A, B, C, \dots$ , пропорциональных

$$\alpha_{ax}, \quad \alpha_{bx}, \quad \alpha_{cx} \dots \dots \dots (314).$$

<sup>1)</sup> См. выноску в начале §.











Решая теперь уравнения (318), получим соответственно более простые выражения для коэффициентов  $\alpha$ , так как многие из членов, согласно условию (321) равны нулю:

$$\alpha_{bx} = \alpha_{cx} = \alpha_{cy} = \dots = 0. \dots \dots (322).$$

Например, из первого уравнения (318), в соответствии с (319), получим:

$$\begin{aligned} \delta_{xy} = \delta_{yx} &= \alpha_{ax}\delta_{ay} + \alpha_{bx}\delta_{by} + \alpha_{cx}\delta_{cy} + \dots = \\ &= \alpha_{ay}\delta_{ax} + \alpha_{by}\delta_{bx} + \alpha_{cy}\delta_{cx} + \dots = \\ &= \delta_{ay} = \alpha_{ay}\delta_{ax} + 1 \cdot \delta_{bx} = 0. \end{aligned}$$

Откуда:

$$\delta_{ay} = 0 \text{ и } \alpha_{ay} = -\frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \dots \dots \dots (323).$$

Таким образом, во первых, — определена вторая обобщенная сила  $Y$ , ибо найдены ее координаты  $\alpha_{ay}$  и 1 для уравнений (321), и во-вторых, — установлено, что она не вызывает координат, соответствующих предшествующей силе, приложенной в точке  $A$ , ибо

$$\delta_{ay} = 0.$$

Остается определить коэффициенты  $\alpha_{az}$  и  $\alpha_{bz}$  для третьей неизвестной  $Z$ . С этой целью возьмем следующее из выражений (318). Составляя третье из уравнений (318):

$$\delta_{yz} = \delta_{zy} = \alpha_{az}\delta_{ay} + \alpha_{bz}\delta_{by} + \alpha_{cz}\delta_{cy} + \dots = \alpha_{ay}\delta_{az} + \alpha_{by}\delta_{bz} + \alpha_{cy}\delta_{cz} + \dots = 0$$

и подставляя (320, 322 и 323), получим:

$$\alpha_{bz}\delta_{by} + \delta_{cy} = -\frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} \delta_{az} + \delta_{bz} = 0, \dots \dots (324);$$

откуда:

$$\alpha_{bz} = -\frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \dots \dots \dots (325).$$

Второе из уравнений (318) даст:

$$\delta_{xz} = \delta_{zx} = \alpha_{ax}\delta_{az} = \alpha_{az}\delta_{ax} + \alpha_{bz}\delta_{bx} + 1 \cdot \delta_{cx} = 0;$$

откуда:

$$\delta_{az} = 0 \text{ и по (313): } \delta_{bz} = 0 \dots \dots \dots (326),$$

а также

$$\alpha_{az} = -\frac{\alpha_{bz}\delta_{bx}}{\delta_{ax}} - \frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}}, \text{ что по (325) } = -\frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} + \frac{\delta_{bx}\delta_{cy}}{\delta_{ax}\delta_{by}} \dots \dots (327).$$

Коэффициентами  $\alpha_{az}$  и  $\alpha_{bz}$  вполне определяется сила  $Z$ , так как третий коэффициент ее в уравнениях (318) принят за 1. Кроме того, оказывается, что сила  $Z$  не вызывает перемещений, соответствующих  $A$  и  $B$ , так как по (326):

$$\delta_{az} = 0 \text{ и } \delta_{bz} = 0.$$

Таким же образом определяются и остальные неизвестные обобщенные силы; например, для следующей силы  $U$  можно получить уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{uz} = 0 &= \dots + \alpha_{cu}\delta_{cz} + 1 \cdot \delta_{dz} = 0 \\ \delta_{uy} = 0 &= \dots + \alpha_{bu}\delta_{by} + \alpha_{cu}\delta_{cy} + 1 \cdot \delta_{dy} = 0 \\ \delta_{ux} = 0 &= \alpha_{au}\delta_{ax} + \alpha_{bu}\delta_{bx} + \alpha_{cu}\delta_{cx} + 1 \cdot \delta_{dx} = 0 \dots (328). \end{aligned}$$



Кроме того, из условий:

$$\delta_{xu} = \delta_{yu} = \delta_{zu} = 0$$

устанавливается, что  $\delta_{au} = \delta_{bu} = \delta_{cu} = 0$ .

Вообще, каждая последующая обобщенная сила не вызывает перемещений, соответствующих всем предыдущим, и определяется на основании данных, полученных для предыдущих. Сначала мы намечаем одну обобщенную силу  $X$ ; оказалось, она совпадает с  $A$ . По ней определяем другую силу  $Y$ , которая уже оказывается двойной:  $A$  и  $B$ ; далее определяем  $Z$ , охватывающую уже три первоначальных неизвестных:  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и т. д. Покажем, как это связывается с построением линий влияния на примере предыдущей пятипролетной фермы.

**6. Примеры.** а) Фиг. 211. За лишние неизвестные принимаем реакции опор  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , как обычно поступают при расчете многопролетных балок (см. фиг. а). Согласно изложенному, обобщенная сила  $X$  представится одной силой  $A$ ; поэтому за 1-ое фиктивное состояние системы принимаем ферму  $EF$ , нагруженную единицей на опоре  $A$ . Для этой нагрузки строим эпюру прогибов (фиг. с). Чтобы получить линию влияния, устанавливаем масштаб, принимая прогиб под  $A$  за единицу, т. е. просто на ординате,  $\delta_{ax} = \delta_{ax}$  надписываем 1.

Пользуясь этой линией влияния, можно получить вторую обобщенную силу  $Y$ . Для этого определяем коэффициент  $\alpha_{ay}$ . По (323) имеем:

$$\alpha_{ay} = - \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}},$$

где числитель и знаменатель находятся по линии  $X$ ; если же  $\delta_{ax}$  обозначено единицей, то непосредственно:

$$\alpha_{ay} = - \delta_{bx}.$$

На основании изложенного, второй обобщенной силе  $Y=1$  отвечают две силы, действующих в точках  $A$  и  $B$ : одна из них 1, а другая  $\alpha_{ay}$ , теперь уже известная, равная  $-\delta_{bx}$  (фиг. е).

Для этого фиктивного состояния  $Y=1$  и надо построить по общим правилам линию прогибов.

Итак, нагрузим ферму  $EF$  силой 1 на опоре  $B$  и на опоре  $A$  — противоположной ей силой

$$-\delta_{bx},$$

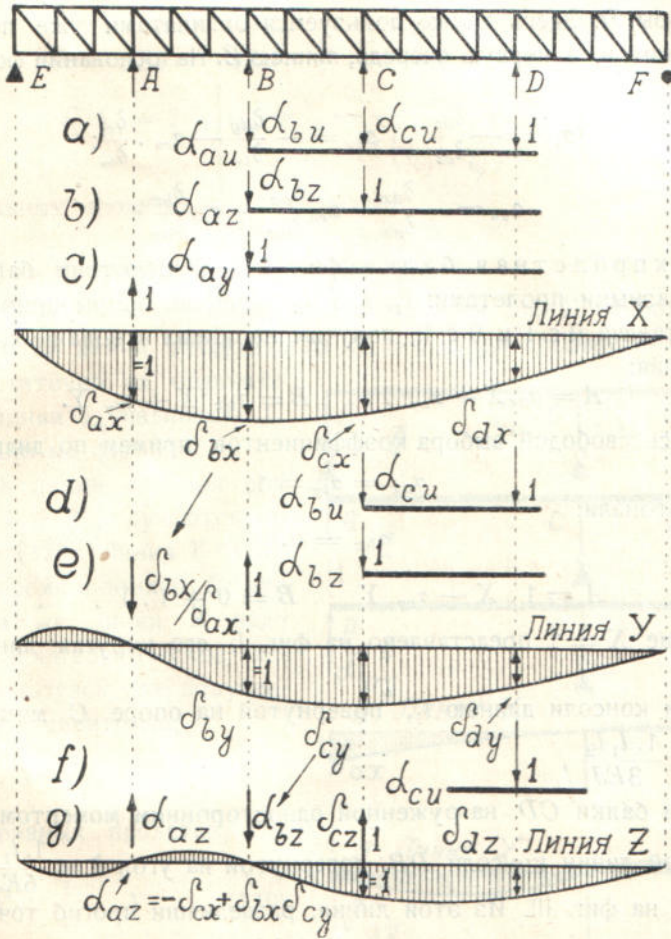
взятой непосредственно из предыдущей линии влияния под опорой  $B$ . Для такой нагрузки, показанной на фиг. е), построим эпюру прогибов. Если на ее ординате под опорой  $B$  обозначенной  $\delta_{by}$  напишем 1, то получится линия влияния для обобщенной силы  $Y$ . Если построение безошибочно, то под опорой  $A$  получится нуль, ибо обобщенная сила  $Y$  не вызывает перемещений, соответствующих предыдущей силе  $X$ :  $\delta_{ay} = 0$ .

Вторая линия влияния дает материал для определения третьей обобщенной силы  $Z$ . В самом деле: для  $Z$  требуются коэффициенты  $\alpha_{az}$  и  $\alpha_{bz}$ ; но по (325) и (327) они суть:

$$\alpha_{bz} = - \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}} \quad \text{и} \quad \alpha_{az} = - \frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} - \frac{\delta_{bx}\delta_{cy}}{\delta_{ax}\delta_{by}}.$$



Первый из них непосредственно получается по линии  $Y$  фиг. е) путем измерения ординаты  $\delta_{cy}$  масштабом  $\delta_{by} = 1$ ; второй же коэффициент получается путем вычисления из ординат двух уже построенных линий:  $X$  и  $Y$ , а именно: отрицательный член берется непосредственно под точку  $C$  линии  $X$ , а положительный получается путем перемножения двух ординат, расположенных накрест под опорами  $B$  и  $C$ .



Фиг. 211.

Обратим внимание на то, что  $\delta_{bz}$ , которая относится к точке  $B$  (фиг. g) берется из линии  $Y$  под точку  $C$ , а сила  $\delta_{az}$ , относящаяся к точке  $A$  (фиг. g), берется под той же опорой  $C$  линии  $X$  и под опорами  $B$  и  $C$  линий  $X$  и  $Y$ .

Теперь третья обобщенная сила  $Z=1$  представляется следующими тремя силами:

- 1) единицей, приложенной в  $C$ ,
- 2) противоположной ей  $\delta_{bz}$ , приложенной в  $B$ , и взятой из линии  $X$  под опорую  $C$ ,



3) силой  $a_{az}$ , приложенной в  $A$  и взятой из линии  $X$  под опорю  $C$  и из линий  $X$  и  $Y$  под опорами  $B$  и  $C$ .

Прикладывая эти силы, строим эпюру прогибов, как сделано на фиг.  $g$ ), и снова наблюдаем, чтобы под  $A$  и  $B$  получились нулевые точки. На ординате эпюры под опорю  $C$ , обозначенной  $\delta_{cz}$  надписываем 1; тогда эпюра превращается в линию влияния для  $Z$ .

Подобным же образом получаем и линию  $U$  для четвертой промежуточной опоры  $D$ . Здесь также пользуемся ординатами уже построенных линий влияния и, в первую очередь, линию  $Z$ . На основании формул (328), получаем:

$$a_{cu} = -\frac{\delta_{dz}}{\delta_{cz}}; \quad a_{bu} = -\frac{\delta_{dy}}{\delta_{by}} - a_{cu} \cdot \frac{\delta_{cy}}{\delta_{by}},$$

$$a_{au} = -\frac{\delta_{dx}}{\delta_{ax}} - a_{cu} \frac{\delta_{cx}}{\delta_{ax}} - a_{bu} \frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}}.$$

б) Трехпролетная балка фиг. 212. Рассмотрим балку на 4-х опорах с разными пролетами:  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ . Крайние опоры примем за лишние. Сопоставляя 0 с I и 0 с II, получим, на общих основаниях, следующие два уравнения:

$$A = a_{ax}X + a_{ay}Y, \quad B = a_{bx}X + a_{by}Y.$$

Пользуясь свободой выбора коэффициентов, примем по диагонали:

$$a_{ax} = a_{by} = 1,$$

а левее диагонали:

$$a_{bx} = 0.$$

Получим:

$$A = 1 \cdot X + a_{ay}Y \quad B = 0 + 1 \cdot Y \quad \dots (329).$$

Состояние  $X=1$  представлено на фиг. I; его упругая линия, составленная из:

1) Линии консоли длиной  $l_1$ , повернутой на опоре  $C$  моментом 1,  $l_1$  на угол  $\gamma = \frac{1 \cdot l_1 l_2}{3EJ}$ ,

2) Линии балки  $CD$ , нагруженной односторонним моментом  $M_c = 1 \cdot l_1$ ,

3) Прямой линии консоли  $DB$ , повернутой на угол  $\delta = \frac{1 \cdot l_1 l_2}{6EJ}$ , — изображена на фиг. III. Из этой линии, разделивши прогиб точки  $B$ :

$$\delta_{bx} = \frac{l_3 \cdot 1 \cdot l_1 l_2}{6EJ}$$

на прогиб точки  $A$ :

$$\delta_{ax} = \frac{1 \cdot l_1^3}{3EJ} + \frac{1 \cdot l_1 l_2}{3EJ} l_1,$$

т. е. измеривши прогиб точки  $B$  масштабом прогиба точки  $A$ ,

получим, по (323):  $a_{ay} = -\frac{\delta_{bx}}{\delta_{ax}} = -\frac{l_2 l_3}{2l_1(l_1 + l_2)}$ .

Нагрузим теперь балку обобщенной силой  $Y=1$ , т. е. группой из 1 на опоре  $B$  и  $a_{ay}$  — на опоре  $A$ . Такая группа представлена на фиг. II. Упругая линия, ею вызванная, при измерении масштабом прогиба точки  $B$ ,



дает линию влияния для  $Y$  (см. фиг. IV). Ординаты ее находим, пользуясь принципом сложения:

$$\delta_{ay} = -\frac{\alpha_{ay}l_1^3}{3EJ} - \frac{\alpha_{ay}l_1l_2}{3EJ} \cdot l_1 + \frac{1 \cdot l_3l_2}{6EJ} \cdot l_1, \text{ или:}$$

$$6EJ\delta_{ay} = l_1l_2l_3 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{l_1}{l_2}} - \frac{1}{1 + \frac{l_2}{l_1}} \right) = 0;$$

$$\delta_{by} = \frac{1 \cdot l_3^3}{3EJ} + \frac{1 \cdot l_3l_2}{3EJ} \cdot l_3 - \frac{\alpha_{ay}l_1l_2}{6EJ} l_3, \text{ или:}$$

$$6EJ\delta_{by} = 2l_3^2 \left[ l_2 + l_3 - \frac{l_2}{4 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right)} \right].$$

При равных пролетах это составляет

$$\delta_{by} = \frac{5}{8} \frac{1 \cdot l^3}{EJ}$$

Чтобы разыскать уравнение линии влияния для  $Y$ , необходимо уравнение упругой линии разделить на  $\delta_{by} = \delta_{yy}$ , при графическом же пользовании достаточно на ординате упругой линии  $\delta_{by}$  надписать 1, как сделано на фиг. IV.

Теперь линии влияния для реакций  $A$  и  $B$  получаются по формулам (329). Линия  $Y$  будет в то же время и линией  $B$ ; для получения же линии  $A$  надо произвести алгебраическое сложение, пользуясь уже полученным коэффициентом  $\alpha_{ay}$ .

$$A = 1 \cdot X - \frac{l_2l_3}{2l_1(l_1 + l_2)} \cdot Y.$$

При равных пролетах, это дает

$$A = 1 \cdot X - \frac{1}{4} 1 \cdot Y \dots (330).$$

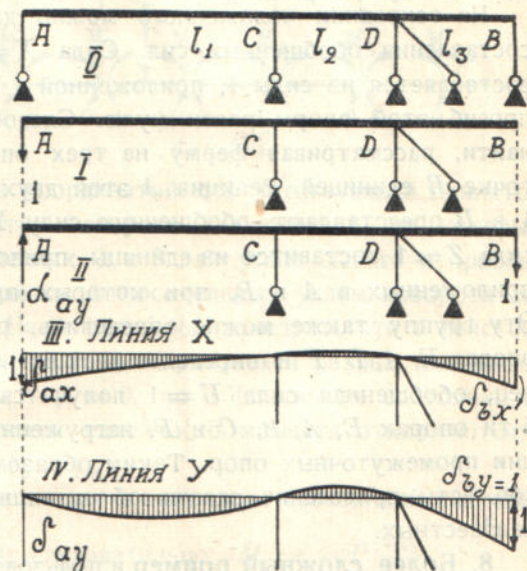
Применим это выражение к точке  $B$ , т. е. посмотрим, какова будет реакция  $A$ , когда груз находится в  $B$ : по линии  $X$  ордината

$$\delta_{bx} = \frac{l_2l_3}{2l_1(l_1 + l_2)}, \text{ что при равных пролетах } = \frac{1}{4};$$

по линии  $Y$  ордината  $\delta_{by} = 1$ ; следовательно

$$A = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Складывая линии фиг. III и IV в пропорции (330), получим линию влияния  $A$ , которая дает опорную реакцию при всех прочих положениях груза.



Фиг. 212.



**7. Правило построения линий влияния.** Обратим внимание на то, что при построении последующей эпюры прогибов для балки мы берем ординаты предыдущих линий, непосредственно или перемножая их, как показано на фиг. 211, и эти произведения принимаем за нагрузку для построения эпюры. Эти действия наглядно представляются, если мы вообразим линию влияния, нагруженную коэффициентами, как грузами, например: чтобы для фиг. 211 составить последнее выражение  $\alpha_{au}$ , заметим, что все члены его имеют множители со значками  $x$ , следовательно, они берутся из линии  $X$ , но первый умножается на 1, второй — на  $\alpha_{cu}$ , третий — на  $\alpha_{bu}$ . Поэтому, если над линией  $X$  фиг. *b*) поместить грузы 1,  $\alpha_{cu}$  и  $\alpha_{bu}$  и составить обычную для линии влияния  $\Sigma Py$ , то и получится в точности  $\alpha_{au}$ . Точно также получается выражение  $\alpha_{bu}$ , если над линией  $Y$  поместить грузы 1 и  $\alpha_{cu}$  (фиг. *d*). Наконец  $\alpha_{cu}$  получается по линии  $Z$  при нагружении ее одной только 1 (фиг. *f*).

На фиг. *b*) *d*) и *f*) показано соответствующее расположение воображаемых грузов  $P$  также и для разыскания других коэффициентов:  $\alpha_{az}$  и  $\alpha_{bz}$ , а также  $\alpha_{ay}$ . Каждая из полученных „ $\Sigma Py$ “ откладывается на предшествующей опоре в виде силы для построения последующей линии влияния.

На основании изложенного можно дать следующее описание способа составления обобщенных сил. Сила  $X=1$  совпадает с  $A$ . Сила  $Y=1$  составляется из силы 1, приложенной в  $B$  и такой силы  $A$ , при которой прогиб этой опоры равен нулю. Следовательно, группу  $Y=1$  можно найти, рассматривая ферму на трех опорах  $E$ ,  $A$  и  $F$ , нагруженную в точке  $B$  единицей. Реакция  $A$  этой двухпролетной фермы вместе с грузом 1 в  $B$  представляют обобщенную силу  $Y=1$ . Точно также обобщенная сила  $Z=1$  составит из единицы, приложенной в  $C$ , и таких, двух сил, приложенных в  $A$  и  $B$ , при которых прогибы этих опор равны нулю. Эту группу также можно определить, рассматривая ферму на четырех опорах  $E$ ,  $A$ ,  $B$  и  $F$  и определяя реакции  $A$  и  $B$  от нагрузки 1 в  $C$ . Наконец, обобщенная сила  $U=1$  получится, если рассматривать ферму на 5-ти опорах  $E$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$ , нагруженную 1-ей в  $D$ , и определить реакции промежуточных опор. Таким образом, по существу, изложенный способ есть приведение задачи об  $n$  лишних реакциях к задаче об  $n-1$  неизвестных.

**8. Более сложный пример и пользование номограммами<sup>1)</sup>.** а) Общие соображения об опорных моментах. Семипролетная балочная ферма фиг. 213 имеет 6 промежуточных опор, следовательно, — 6 лишних неизвестных. В предыдущих примерах лишними считались опорные реакции и для них были построены линии влияния, но при систематическом расчете всех стержней фермы целесообразнее считать лишними опорные моменты. Помимо большей простоты и большей точности результата, уже отмечавшихся в § 20,<sup>5</sup> лишние моменты проще учитываются при построении линий влияния для основной фермы; действительно, если пользоваться лишними реакциями, то, при построении моментов или поперечных сил в каком-

<sup>1)</sup> Разделы 8-10 разработаны инж-ми: Б. Н. Горбуновым и А. А. Уманским.



нибудь сечении  $m$ , нам придется суммировать ординаты нагрузки с ординатами линий для всех лишних реакций, расположенных с одной стороны от  $m$ ; если же лишними служат опорные моменты, то линия влияния в каждом пролете всегда получается путем суммирования только 3-х ординат:

1) линии влияния простой балки,

2) линии ее левого и

3) линии правого опорных моментов. Кроме того, самое построение линий моментов проще; поэтому при расчете многопролетных стержневых ферм рекомендуется за лишние неизвестные принимать опорные моменты так же, как это указывалось для балок.

Рассмотрим построение линии влияния для какого-нибудь опорного момента, например, для  $M_5$ . Разрежем балку над 5 опорой и в месте

разреза поместим 2 равных и противоположных момента  $M_5$ , как показано на фиг. 213—с).

Кроме действительного состояния системы, когда действует груз  $P=1$  и неизвестный момент  $M_5$ <sup>1)</sup>, рассмотрим фиктивное, когда вместо лишнего неизвестного  $M_5$

приложена единица. Обобщенной координатой, соответствующей принятой силе, является относительный угол поворота тех сечений, по которым произведен разрез. При обозначениях  $\alpha$  и  $\beta$  для углов левого и правого конца каждого из смежных пролетов относительным углом поворота сечений надо считать  $\alpha_n - \beta_{n-1}$ . Надо при этом заметить, что в действительном состоянии  $b$ ) сечения, по которым произведен разрез, сливаются в одно нераздельное, так что,  $\alpha_6 - \beta_5 = 0$ , но в фиктивном состоянии  $c$ ) сечения раз'единены и под давлением единичного момента отклоняются в разные стороны, составляя  $\alpha_6 - \beta_5 = \varphi_{55}$ .

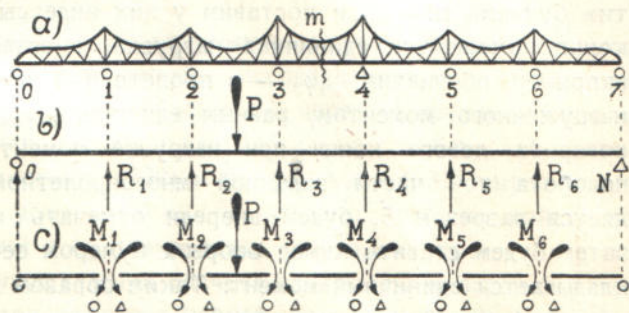
Применим принцип взаимности к намеченным двум состояниям системы:

$$P \delta_{m5} + M_5 \cdot \varphi_{55} = 1.0 = 0, \text{ следовательно: } M_5 = -P \frac{\delta_{m5}}{\varphi_{55}}.$$

Как и прежде, в § 17, <sup>в</sup> и <sup>с</sup> оказалось, что линией влияния момента  $M_5$  будет упругая линия двух неразрезных балок 0—5 и 5—7, обусловленная единичной нагрузкой  $M=1$ , приложенной к концам балок 5, если измерять ординаты масштабом  $\varphi_{55}=1$ . Следовательно необходимо построить упругую линию для неразрезной балки, нагруженной на 5 опоре единичным моментом.

Совершенно очевидно, что, если бы были известны опорные моменты

1) Здесь имеется в виду обобщенный момент из двух противоположных пар, из которых одна действует на левую часть фермы 0—5, а другая—на правую 5—7, а также из всех реактивных сил, вызванных этими парами.



Фиг. 213.



$M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$ , вызванные моментом  $M_5 = 1$ , то представилась бы возможность получить упругую линию из рассмотрения простых разрезных балочек 0—1, 1—2, 2—3...

Поэтому остановимся на определении опорных моментов.

Их обычно получают на основании теоремы о 3 моментах. Но чтобы не решать системы совместных уравнений, воспользуемся способом последовательного усложнения и будем стремиться углы поворота  $\varphi$  системы 0—5 выразить через углы более простой системы 0—4<sup>1)</sup>. Для этого сначала выразим эти углы через повороты концов отдельных пролетов, как простых разрезных балок.

Примем обозначение каждого отдельного пролета нумерами его опор, например: 0—1, 1—2, 2—3...; правый и левый концы пролета отметим буквами  $n$  и  $l$ , и поставим у них индексы, показывающие, на каком конце помещается единичная нагрузка, вызвавшая угол поворота, так, например, обозначим:  ${}_{01}\varphi_{ll}$  — в пролете 0-1 угол поворота левого конца, нагруженного моментом, равным единице,  ${}_{01}\varphi_{ln}$  — в пролете 0-1 угол поворота левого конца при нагрузке моментом правого конца; угол поворота той части заданной многопролетной балки, которая отделяется разрезом 5, будем впереди отмечать индексами длины 0-5, а затем будем ставить номер опоры с номером сечения 5, к которому прикладывается единичный момент. Таким образом получим: для первого пролета 0-1 левый угол системы 0-5,

$${}_{05}\varphi_{05} = {}_{01}\varphi_{ln} \cdot M_1 - {}_{01}\varphi_{ll} \cdot 0,$$

ибо  ${}_{01}\varphi_{ln}$  — обозначен левый угол балочки 0—1, вызванный моментом 1, приложенным к правому концу, так что, если справа будет не 1, а  $M_1$ , то и угол станет  ${}_{01}\varphi_{ln} \cdot M_1$ . Таким же образом для части балки 1-5 поворот левого конца 1 при нагрузке  $M_5 = 1$  в сечении 5:

$${}_{05}\varphi_{15} = {}_{12}\varphi_{ln} \cdot M_2 - {}_{12}\varphi_{ll} \cdot M_1.$$

Так выражаются через концевые повороты простых балочек и все прочие углы для любой из последовательно сокращаемых неразрезных балок: 05, 15, 25, 35, 45, и составляется следующая таблица углов:

$$\begin{array}{l|l} {}_{05}\varphi_{05} = {}_{01}\varphi_{ln}^2 M_1 - {}_{01}\varphi_{ll} \cdot 0 & {}_{05}\varphi_{15} = {}_{01}\varphi_{nn} M_1 - {}_{01}\varphi_{ln} \cdot 0 \\ {}_{05}\varphi_{15} = {}_{12}\varphi_{ln} M_2 - {}_{12}\varphi_{ll} \cdot M_1 & {}_{05}\varphi_{25} = {}_{12}\varphi_{nn} M_2 - {}_{12}\varphi_{ln} M_1 \\ {}_{05}\varphi_{25} = {}_{23}\varphi_{ln} M_3 - {}_{23}\varphi_{ll} \cdot M_2 & {}_{05}\varphi_{35} = {}_{23}\varphi_{nn} M_3 - {}_{23}\varphi_{ln} M_2 \dots (331), \\ {}_{05}\varphi_{35} = {}_{34}\varphi_{ln} M_4 - {}_{34}\varphi_{ll} \cdot M_3 & {}_{05}\varphi_{45} = {}_{34}\varphi_{nn} M_4 - {}_{34}\varphi_{ln} M_3 \\ {}_{05}\varphi_{45} = {}_{45}\varphi_{ln} M_5 - {}_{45}\varphi_{ll} \cdot M_4 & {}_{05}\varphi_{55} = {}_{45}\varphi_{nn} \cdot 1 - {}_{45}\varphi_{ln} M_4 \end{array}$$

в которой слева находятся все левые углы поворота отдельных пролетов, а справа — правые углы.

<sup>1)</sup> Известно, что теорема о 3-х моментах получается из уравнивания опорных углов поворота двух смежных пролетов. Упрощая выражение для углов, мы тем самым упростили и решение уравнений 3-х моментов.

<sup>2)</sup> По принципу взаимности перемещений  $\varphi_{ln} = \varphi_{nl}$ .



Теперь переходим к определению опорных моментов. Вслед за принятым единичным моментом  $M_5$ , можем определить  $M_4$  из уравнения:

$${}_{04}\varphi_{44} = {}_{45}\varphi_{4n} \cdot 1 - {}_{45}\varphi_{4l} \cdot M_4 \quad \dots \quad (332),$$

где  ${}_{04}\varphi_{44}$  — угол поворота правого конца 4 части 04 под действием единичного момента. Когда же определено  $M_4$ , то мы приходим к предыдущей задаче, но более простой, ибо вместо 5 пролетов 05 имеем 4. Повторяя предыдущие рассуждения, мы таким же образом понизим число неизвестных еще на 1. Выразим для этого через известный уже теперь  $M_4$  углы поворота:

$$\begin{array}{l|l} {}_{05}\varphi_{45} = {}_{04}\varphi_{44} M_4 & {}_{05}\varphi_{15} = {}_{04}\varphi_{14} M_4 \\ {}_{05}\varphi_{35} = {}_{04}\varphi_{34} M_4 & {}_{05}\varphi_{05} = {}_{04}\varphi_{04} M_4 \quad \dots \quad (333); \\ {}_{05}\varphi_{25} = {}_{04}\varphi_{24} M_4 & \end{array}$$

тогда все в системе 05 окажется выраженным через углы поворота системы 04. Далее повторим программу первого исследования: выражаем углы постепенно сокращаемых балок системы 04 через концевые повороты отдельных простых балочек  $ln$ ,  $ll$  и  $nn$ , составляя столбцы (331); определим момент  $M_3$  по уравнению (332) и по формулам (333) выразим все углы системы 04 через углы системы 03, и т. д., пока не дойдем до отдельной простой балочки с ее поворотами:  $\varphi_{ll}$ ,  $\varphi_{nn}$  и  $\varphi_{ln}$ .

При практическом осуществлении расчета начинают с простой балочки 0-1 и последовательно присоединяют к ней новые пролеты, усложняя все более и формулы расчета.

б) Численный пример. Положим, что пролеты фермы возрастают, от 10 до 24 м. посередине. Ферма—переменной жесткости, но можно считать, что на протяжении пролета жесткость постоянна; выразим жесткость пролетов через крайнюю, как показано на фиг. 214—0). По симметрии, можно было бы написать:  $\varphi_{ll} = \varphi_{nn}$ , кроме того:  $\varphi_{ln} = \varphi_{nl}$ <sup>1)</sup>.

$$\text{Далее: } \varphi_{nl} = \varphi_{ln} = \frac{1 \cdot l}{6EJ} \text{ и } \varphi_{nn} = \varphi_{ll} = \frac{1 \cdot l}{3EJ}.$$

Обозначая  $\frac{1 \cdot l}{6EJ_1}$  буквой  $\tau$ , и принимая отношение между жесткостями по фиг. 214, имеем:

$$\begin{array}{l|l} {}_{01}\varphi_{nl} = {}_{67}\varphi_{nl} = \tau, & {}_{01}\varphi_{nn} = {}_{67}\varphi_{nn} = 2\tau, \\ {}_{12}\varphi_{nl} = {}_{56}\varphi_{nl} = 0,8\tau & {}_{12}\varphi_{nn} = {}_{56}\varphi_{nn} = 1,6\tau, \\ {}_{23}\varphi_{nl} = {}_{45}\varphi_{nl} = 0,7\tau, & {}_{23}\varphi_{nn} = {}_{45}\varphi_{nn} = 1,4\tau, \\ {}_{34}\varphi_{nl} = 0,6\tau. & {}_{34}\varphi_{nn} = 1,2\tau. \end{array}$$

Так как уравнения для лишних неизвестных однородны относительно координат  $\varphi$ , то их заранее можно сократить на общего множителя  $\tau$ .

На основании вышеизложенного намечаем следующую программу:

1) Мы приняли, что жесткость на протяжении отдельного пролета постоянна, составляя среднее из жесткости концов и середины пролета; поэтому считаем, что  $\varphi_{ll} = \varphi_{nn}$ . В действительности при неразрезных фермах нередко жесткости боковых пролетов несимметричны относительно середины пролета и  $\varphi_{ll} \geq \varphi_{nn}$ .



1) построение эпюры моментов, при нагрузке правого конца единичным моментом, последовательно для систем: 0—1, 0—2, 0—3 и т. д.; получаются фигуры *a*), *b*), *c*)...

2) построение по моментам упругих линий; на основании § 3, они получаются, как моменты от моментных площадей фиг. *a*), *b*), *c*)... и имеют вид фиг. *g*), *h*)...

3) получение по упругим линиям линий влияния для различных опорных моментов; для этого придется соединить попарно эпюры прогибов для тех систем, которые располагаются слева и справа от рассматриваемого опорного момента, например, для момента  $M_5$ , надо соединить систему 05 с 5—7, заимствуя последнюю из симметрично расположенной эпюры 0—2; кроме того, надо назначить масштаб для измерения ординат, принимая за 1 относительный поворот концов двух смежных систем.

Перейдем к выполнению программы.

1) Эпюра моментов для балочки 0-1 имеет вид треугольника, изображенного на фиг. 214—*a*).

Для построения эпюры системы 0—2, определяем ординату  ${}_{02}M_1$  из уравнения:  ${}_{01}\varphi_{nn} \cdot {}_{02}M_1 = {}_{12}\varphi_{ln} \cdot 1 - {}_{12}\varphi_{ll} \cdot {}_{02}M_1$ , откуда:

$${}_{02}M_1 = \frac{{}_{12}\varphi_{ln}}{{}_{01}\varphi_{nn} + {}_{12}\varphi_{nn}} = \frac{2}{9} = 0,2222.$$

По моментам второго пролета  $\frac{2}{9}$  и 1 определяем положение фокуса  $f_2$ , так как он делит пролет на пропорциональные части; отношение между отрезками 1-*f* и *f*-2, обозначаемое *k*, составляет 0,2222.

В последующем придется пользоваться величиной  ${}_{02}\varphi_{22}$ ; определим ее из выражения:

$${}_{02}\varphi_{22} = {}_{12}\varphi_{nn} \cdot 1 - {}_{02}M_1 \cdot {}_{12}\varphi_{nl} = 1,6 - \frac{2}{9} \cdot 0,8 = 1,4222.$$

Для системы 03 (фиг. *c*) ординату  ${}_{03}M_2$  получаем из выражения, аналогичного предыдущему:

$${}_{03}M_2 = \frac{{}_{23}\varphi_{ln}}{{}_{02}\varphi_{22} + {}_{23}\varphi_{nn}} = \frac{0,7}{1,4222 + 1,4000} = 0,2478.$$

Опорными моментами балки 2—3, т. е. 1 и 0,2478 определяется положение фокуса  $f_3$ . Фокус предыдущего пролета не смещается, так что, ординаты эпюры моментов на протяжении системы 0—2 будут пропорциональны ординатам эпюры *b*. После этого определяется

$${}_{03}\varphi_{33} = {}_{23}\varphi_{nn} \cdot 1 - {}_{23}\varphi_{nl} \cdot {}_{03}M_2 = 1,1,4 - 0,248 \cdot 0,7 = 1,2264.$$

Переходим к системе 0-4 (фиг. *d*):

$${}_{04}M_3 = \frac{{}_{34}\varphi_{ln}}{{}_{03}\varphi_{33} + {}_{34}\varphi_{nn}} = \frac{0,6}{1,2264 + 1,2} = 0,2473.$$

Отрезок 4- $f_4 = l_4: \left(1 + \frac{{}_{04}M_3}{1}\right) = 0,802l_4$ .

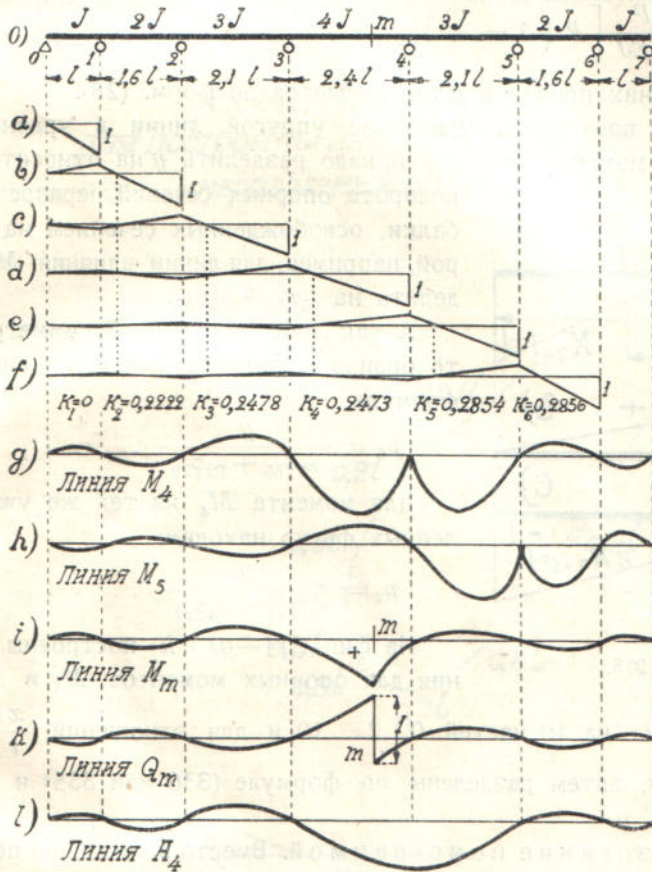
Далее:  ${}_{04}\varphi_{44} = {}_{34}\varphi_{nn} \cdot 1 - {}_{34}\varphi_{nl} \cdot {}_{04}M_3 = 1,1,2 - 0,2473 \cdot 0,6 = 1,0517$ .



Переходим к системе 0-5 (фиг. e):

$${}_{05}M_4 = \frac{45\varphi_{лн}}{04\varphi_{44} + 45\varphi_{нн}} = \frac{0,7}{1,0517 + 1,4} = 0,2855.$$

$${}_{05}\varphi_{55} = 45\varphi_{нн} \cdot 1 - 45\varphi_{нл} \cdot {}_{05}M_4 = 1 \cdot 1,4 - 0,2855 \cdot 0,7 = 1,2001.$$



Фиг. 214

Наконец, для системы 0-6 (фиг. f):

$${}_{06}M_5 = \frac{56\varphi_{лн}}{05\varphi_{55} + 56\varphi_{нн}} = \frac{0,8}{1,2001 + 1,6} = 0,2857.$$

$${}_{06}\varphi_{66} = 56\varphi_{нн} \cdot 1 - 56\varphi_{нл} \cdot {}_{06}M_5 = 1 \cdot 1,6 - 0,2857 \cdot 0,8 = 1,3714.$$

По этим данным построены фиг. a), b)... f).

Во всех пролетах положение фокусов—постоянное, так как определяется отношением моментов, зависящим только от номера пролета. Следовательно, эпюры моментов для разных систем 01, 02... 05 в соответствующих пролетах пропорциональны.

На этом основании должны быть пропорциональными и ординаты упругих линий соответствующих пролетов, и для каждого из них достаточно построить только одну линию.



2) Ординаты упругой линии определяются по эяграмм моментов для каждого пролета в отдельности. Эюра же моментов—это всегда тип фигуры 215, представляющей алгебраическую сумму двух треугольников *b*) и *c*). Поэтому, по § 1,4, уравнение упругой линии может быть написано в форме:

$$y = \frac{l^2}{6EJ} \left[ k \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \left( 2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} - \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \right] \quad (334).$$

Для крайних пролетов *y* определяется по форм. (28).

3) Чтобы превратить уравнение упругой линии в уравнение линии влияния для момента над опорой, надо разделить *y* на относительный угол поворота опорных сечений неразрезных частей балки, освобожденных сечением над этой опорой, например, для линии влияния *M*<sub>5</sub> надо разделить на  $05\varphi_{55} + 07\varphi_{55}$ .

А так как линия 5—7 симметрична 0—2, то ординаты линии влияния *p* вычисляются по формуле:

$$p_5 = \frac{y}{05\varphi_{55} + 02\varphi_{22}} \dots \dots \dots (335).$$

Для момента *M*<sub>4</sub> из тех же уже подготовленных фигур находим:

$$p_4 = \frac{y}{04\varphi_{44} + 03\varphi_{33}} \dots \dots \dots (336).$$

На фиг. 214—*g*) и *h*) построены линии влияния для опорных моментов *M*<sub>4</sub> и *M*<sub>5</sub>: каждый пролет разбит на 10 частей 0,1,2... 10 и для отношений,  $\frac{x}{l} = \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots$

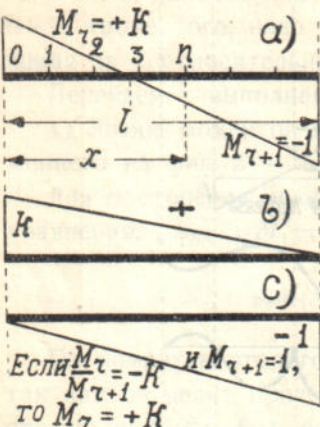
вычислены *y*, затем разделены по формуле (336 или 335) и отложены в виде ординат *p*.

с) Пользование номограммой. Вместо вычислений по форм. 334 можно пользоваться номограммой, приведенной на фиг. 216. Левая ось номограммы градуирована для значений *k* от 0 до 1, значения *x/l* надо брать на замкнутой кривой. На правой шкале помещаются прогибы, увеличенные в 1000*EJ*:*l*<sup>2</sup> раз. Чтобы прочесть значение *y*, прикладываем скошенный край линейки к точкам шкал *k* и *x*; на том же краю по правой шкале находим *y*,—остается разделить его на 1000*EJ*:*l*<sup>2</sup>.

Вычислим для примера ординату, соответствующую *x* = 0,4*l*<sub>2</sub> пролета 1—2 линии *M*<sub>4</sub> (фиг. 214—*g*). Для этого пролета *k* = 0,2222; по номограмме для *x* = 0,4*l* прочтем—42,1. Это число умножаем на коэффициент, постоянный для всех ординат пролета 1—2:

$$\alpha_2 = \frac{k_4 k_3 l_2^2}{1000EJ_2} \cdot \frac{1}{04\varphi_{44} + 03\varphi_{33}}$$

Если подставим *k*<sub>4</sub> = 0,2473, *k*<sub>3</sub> = 0,2478, *l*<sub>2</sub> = 1,6*l*<sub>1</sub>, *J*<sub>2</sub> = 2*J*<sub>1</sub>,  $04\varphi_{44} + 03\varphi_{33} = (1,0517 + 1,2264)\tau = 2,2781\tau$ , *l*<sub>1</sub> = 1000 см., то



Фиг. 215.

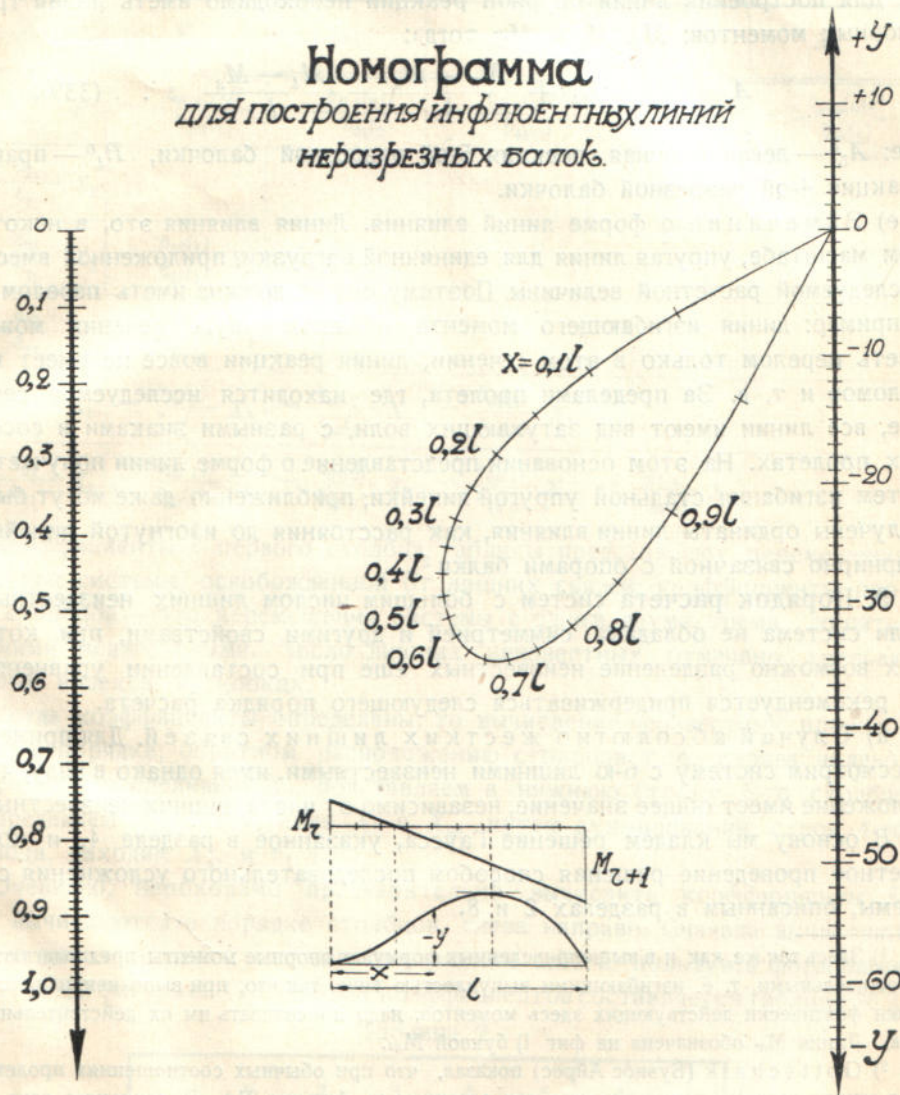


$$\alpha_2 = \frac{k_1 k_3 l_2^2}{1000 E J_2} \cdot \frac{1}{0_4 \varphi_{44} + 0_8 \varphi_{33}} = \frac{0,2473 \cdot 0,2480 \cdot 1,6^2 \cdot l_1^2 \cdot 6 E J_1}{1000 \cdot E \cdot 2 J_1 \cdot 2,2781 l_1} = 0,2068 \text{ и}$$

$$p = 42,1 \cdot 0,2068 = 8,706 \text{ см.}$$

д) Линии влияния других расчетных элементов. Имея линии опорных моментов, построим и другие линии, пользуясь принципом

### Номограмма для построения инфлюентных линий неразрезных балок.



Фиг. 216.

сложения, как в § 18,3. Например, линия изгибающего момента в сечении  $x$  от левой опоры 4 пролета 3—4 определяется по формуле:

$$M_x = M_x^0 + \left( 1 - \frac{x}{l_4} \right) M_3 + \frac{x}{l_4} M_4 \dots \dots (337),$$

где  $M_x^0$  — момент для простой разрезной балочки 3—4,  $M_3$  и  $M_4$  — те-



кущие ординаты линий влияния опорных моментов<sup>1)</sup>. Когда груз  $P=1$  находится вне пролета 3—4, то  $M_x^0=0$ .

Линия влияния поперечной силы определится формулой:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_4}{l_4} - \frac{M_3}{l_3} \dots \dots \dots (338).$$

Для построения линии опорной реакции необходимо иметь линии трех опорных моментов:  $M_3$ ,  $M_4$  и  $M_5$ ; тогда:

$$A_4 = A_5^0 + B_4^0 + \frac{M_5 - M_4}{l} - \frac{M_4 - M_3}{l} \dots \dots (339),$$

где:  $A_5^0$  — левая опорная реакция 5-ой разрезной балочки,  $B_4^0$  — правая реакция 4-ой разрезной балочки.

е) Замечание о форме линий влияния. Линия влияния это, в некотором масштабе, упругая линия для единичной нагрузки, приложенной вместо исследуемой расчетной величины. Поэтому она не должна иметь переломов, например: линия изгибающего момента в каком-нибудь сечении может иметь перелом только в этом сечении, линия реакции вовсе не имеет переломов и т. д. За пределами пролета, где находится исследуемое сечение, все линии имеют вид затухающих волн, с разными знаками в соседних пролетах. На этом основании представление о форме линии получается путем изгиба стальной упругой линейки; приближенно даже могут быть получены ординаты линии влияния, как расстояния до изогнутой линейки, шарнирно связочной с опорами балки<sup>2)</sup>.

**9. Порядок расчета систем с большим числом лишних неизвестных.** Если система не обладает симметрией и другими свойствами, при которых возможно разделение неизвестных еще при составлении уравнений, то рекомендуется придерживаться следующего порядка расчета.

а) Случай абсолютно жестких лишних связей. Для примера рассмотрим систему с 6-ю лишними неизвестными, имея однако в виду, что изложение имеет общее значение, независимо от числа лишних неизвестных.

В основу мы кладем решение Гаусса, указанное в разделе 4, и конкретное проведение решения способом последовательного усложнения системы, описанным в разделах 2 и 8.

<sup>1)</sup> Здесь так же, как и в вышеприведенных формулах опорные моменты предполагаются положительными, т. е. изгибающими выпуклостью вниз, так что, при выполнении подстановки фактически действующих здесь моментов, надо присваивать им их действительный знак. Линия  $M_x$  обозначена на фиг. i) буквой  $M_m$ .

<sup>2)</sup> Gottschalk (Буэнос-Айрес) показал, что при обычных соотношениях пролетов угол между ветвями линии влияния над сечением  $m$  фигуры 214—i) сохраняет едва ли не постоянную величину 127°. Поэтому, если мы под таким углом скрепим две гибких линейки на нескольких опорах и будем перемещать вершину угла 127° в положения  $x/l = 1/10, 2/10, 3/10 \dots$  какого-нибудь из пролетов, то получим линии влияния для всех сечений этого пролета, как ординаты линеек.

В последнее время появился прибор для построения линий влияния. Он называется „Nupubest“ (Nylpunkt-Bestimmung) и описан в брошюрке:

Chr. Rieckhof. Nupubest. Experimentelle Lösung statisch unbestimmter Systeme für den Gebrauch in der Praxis. Darmstadt.



Назовем лишние неизвестные  $X_1, X_2, X_3 \dots X_6$  и распространим на них формулы Гаусса 309, 310 и 311, полученные применительно к трем неизвестным. Сохраняя тот же закон построения формул для неизвестных, получим для каждого из них один вертикальный столбец следующей таблицы.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6
$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$-\frac{\partial p_1}{\partial_{11}} P$	$-\frac{\partial p_2(1)P}{\partial_{22(1)}}$	$-\frac{\partial p_3(2)P}{\partial_{33(2)}}$	$-\frac{\partial p_4(3)P}{\partial_{44(3)}}$	$-\frac{\partial p_5(4)P}{\partial_{55(4)}}$	$-\frac{\partial p_6(5)P}{\partial_{66(5)}}$
$-\frac{\partial_{21}}{\partial_{11}} X_2$					
$-\frac{\partial_{31}}{\partial_{11}} X_3$	$-\frac{\partial_{32(1)}}{\partial_{22(1)}} X_3$				
$-\frac{\partial_{41}}{\partial_{11}} X_4$	$-\frac{\partial_{42(1)}}{\partial_{22(1)}} X_4$	$-\frac{\partial_{43(2)}}{\partial_{33(2)}} X_4$			
$-\frac{\partial_{51}}{\partial_{11}} X_5$	$-\frac{\partial_{52(1)}}{\partial_{22(1)}} X_5$	$-\frac{\partial_{53(2)}}{\partial_{33(2)}} X_5$	$-\frac{\partial_{54(3)}}{\partial_{44(3)}} X_5$		
$-\frac{\partial_{61}}{\partial_{11}} X_6$	$-\frac{\partial_{62(1)}}{\partial_{22(1)}} X_6$	$-\frac{\partial_{63(2)}}{\partial_{33(2)}} X_6$	$-\frac{\partial_{64(3)}}{\partial_{44(3)}} X_6$	$-\frac{\partial_{65(4)}}{\partial_{55(4)}} X_6$	

Коэффициенты  $\delta$  первого столбца таблицы представляют перемещения основной системы, освобожденной от лишних связей; коэффициенты прочих столбцов — это перемещения системы с одним, двумя, тремя... до пяти, лишними неизвестными. Число лишних неизвестных отмечено третьей цифрой индекса, в скобках.

Когда коэффициенты определены, то вычисление неизвестных производится в порядке, обратном расположению столбцов т. е. справа налево. Например, определивши  $X_6$ , подставляем в нижнюю строку 5-го столбца и определяем  $X_5$ . Затем, имея  $X_5$  и  $X_6$ , путем суммирования строк 4-го столбца, находим  $X_4$ , и т. д.

Очевидно, необходимо предварительно вычислить коэффициенты  $\delta$ . Они вычисляются в порядке столбцов, слева направо. Сначала вычисляются перемещения основной системы без лишних связей, пользуясь формулами типа (245) и фигурами 178. Из этих коэффициентов составляется таблица № 2.

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6	$P$
1	$\delta_{11}$	$\delta_{21}$	$\delta_{31}$	$\delta_{41}$	$\delta_{51}$	$\delta_{61}$	$\delta p_1$
2		$\delta_{22}$	$\delta_{32}$	$\delta_{42}$	$\delta_{52}$	$\delta_{62}$	$\delta p_2$
3			$\delta_{33}$	$\delta_{43}$	$\delta_{53}$	$\delta_{63}$	$\delta p_3$
4				$\delta_{44}$	$\delta_{54}$	$\delta_{64}$	$\delta p_4$
5					$\delta_{55}$	$\delta_{65}$	$\delta p_5$
6						$\delta_{66}$	$\delta p_6$



Первая строка этой таблицы дает все коэффициенты для 1-го столбца таблицы № 1; следующие строки предназначаются для вычисления коэффициентов других столбцов.

Перемещение любого столбца ( $r$ ) таблицы 1 может быть получено из соответствующего ( $r - 1$ ) перемещения более простой системы по формуле:

$$\delta_{mn(r)} = \delta_{mn(r-1)} - \frac{\delta_{rm(r-1)}}{\delta_{rr(r-1)}} \cdot \delta_{rn(r-1)} \quad (340),$$

в которой: 1) первый член справа имеет те же индексы, что слева, но берется из системы, менее усложненной лишними неизвестными, 2) знаменатель второго члена — это главное перемещение менее усложненной системы и притом для того неизвестного, которое имеет номер  $r$ . 3) Оказывается, что если отбросить в формуле значки  $\delta$  и третьи индексы в скобках, то результат алгебраических действий с основными индексами будет нулем:

$$m.n - \frac{r.m.r.n}{r.r} = 0 \dots \dots \dots (341).$$

Эти замечания подсказывают мнемоническое правило для составления коэффициентов  $\delta$ .

В таблице 3 помещены перемещения  $\delta_{(1)}$  для системы, усложненной одним лишним стержнем; они вычислены по значениям  $\delta$  таблицы 2 по формуле (340).

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	$P$
1							
2		$\delta_{22(1)}$	$\delta_{32(1)}$	$\delta_{42(1)}$	$\delta_{52(1)}$	$\delta_{62(1)}$	$\delta_{p 2(1)}$
3			$\delta_{33(1)}$	$\delta_{43(1)}$	$\delta_{53(1)}$	$\delta_{63(1)}$	$\delta_{p 3(1)}$
4				$\delta_{44(1)}$	$\delta_{54(1)}$	$\delta_{64(1)}$	$\delta_{p 4(1)}$
5					$\delta_{55(1)}$	$\delta_{65(1)}$	$\delta_{p 5(1)}$
6						$\delta_{66(1)}$	$\delta_{p 6(1)}$

Верхняя строка этой таблицы дает коэффициенты для 2-го столбца 1-ой таблицы; остальные строки служат для вычисления перемещений  $\delta_{(2)}$  следующей более усложненной системы. Пользуясь той же формулой (340) и таблицей 3, определим перемещения  $\delta_{(2)}$  и поместим их в таблицу 4.

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	$P$
1							
2							
3			$\delta_{33(2)}$	$\delta_{43(2)}$	$\delta_{53(2)}$	$\delta_{63(2)}$	$\delta_{p 3(2)}$
4				$\delta_{44(2)}$	$\delta_{54(2)}$	$\delta_{64(2)}$	$\delta_{p 4(2)}$
5					$\delta_{55(2)}$	$\delta_{65(2)}$	$\delta_{p 5(2)}$
6						$\delta_{66(2)}$	$\delta_{p 6(2)}$



Таким же образом составляются перемещения и для следующих более усложненных систем  $\delta_{(3)}$ ,  $\delta_{(4)}$  и т. д. Очевидно, мы можем распространить такое исследование на какое угодно число лишних неизвестных. Следует однако иметь в виду, что включение в расчет более 6 лишних неизвестных, вообще говоря, не имеет практического значения.

б) Случай податливых связей. Составляя общие уравнения упругости, как уравнения деформации, мы в правой их части пишем нуль в том случае, когда в действительном состоянии системы равна нулю координата, соответствующая принятой обобщенной единице силы фиктивного состояния; такому случаю соответствует абсолютно неподатливая опора, полное защемление и т. п. (см. уравнения 145 и 238). Если же лишние связи податливы, то правая часть уравнений не будет нулем. Здесь придется различать два случая.

1 случай. Перемещения, соответствующие лишним связям, не зависят от сил системы. Сюда относится неупругая осадка опоры, например, от расстройства грунта под фундаментом, а также — влияние температуры. В этом случае в правой части уравнения находится определенное перемещение  $\Delta$ , так что, если перенести его в левую часть, получится вместо  $P\delta_{pn}$  выражение:  $P\delta_{pn} - \Delta$ .

В остальном решение не отличается.

2 случай. Перемещения лишних связей зависят от соответствующих лишних неизвестных. Примерами могут служить: заделка конца бруска в жестком клепанном узле, усилие лишнего стержня, соединяющего узлы статически определенной системы, упругая опора балки и проч. В этом случае в правой части уравнений перемещение  $\Delta = X_n \delta_n$ , например, если лишней связью служит стержень, то:

$$\Delta_n = \frac{X_n l_n}{EF_n}.$$

Переносим и в этом случае  $\Delta$  в левую часть уравнения, получим при неизвестном  $X$  коэффициент:

$$\delta_{nn} - \Delta_n \text{ вместо прежнего } \delta_{nn}.$$

Общая же схема решения не изменится.

Таким образом, при податливых связях изменяется только величина масштаба, которым измеряются перемещения отдельных фиктивных состояний для получения множителей у неизвестных сил (сравн. § 18,2).

с) Построение линий влияния. При построении линии влияния для лишнего неизвестного приходится вычислять перемещения

$$\delta_{p1}, \delta_{p2(1)}, \delta_{p3(2)}, \dots$$

для разных положений груза  $P = 1$ , обыкновенно, через каждую десятую долю пролета, и надо иметь линии прогибов для последовательно усложняемых систем с 1, 2, 3... лишними неизвестными. Так как для каждого положения груза  $P = 1$  будут иметь место, вообще говоря, все лишние неизвестные, то ордината линии влияния получится, как сумма столбцов таблицы 1.



**10. Проверка вычислений** имеет большое значение при расчете статически неопределимых систем и тем большее, чем больше лишних неизвестных. Очень важно иметь в распоряжении средства для контролирования вычислений в процессе их производства, так как во-время не обнаруженная погрешность может сильно исказить результат.

Прежде всего проверяют таблицу 2, относящуюся к основной системе без лишних связей. Проверка производится по столбцам: составляют сумму членов какого-нибудь столбца, например 1:

$$\delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{31} + \delta_{41} + \dots + \delta_{61} = \delta_{s1} \quad (342).$$

Эта сумма может быть истолкована, как перемещение точки 1, происходящее при одновременном действии единичных сил вместо всех лишних неизвестных системы, т. е. при одновременном действии сил:

$$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 \dots X_6 = 1 \quad (343).$$

С другой стороны перемещение вычисляется непосредственно, например по примеру форм. (250).

Совпадение результатов служит признаком правильности вычислений. Проверить рекомендуется все столбцы.

Иногда ограничиваются проверкой всех перемещений, не зависящих от груза  $P$ :

$$\delta_{s1} + \delta_{s2} + \delta_{s3} + \dots + \delta_{s6} = \delta_{ss} \quad (344),$$

где  $\delta_{ss}$  — есть сумма всех чисел таблицы 2, не зависящих от  $P$ ; она представляет обобщенное перемещение под действием обобщенной группы сил (343), и может быть вычислена независимо, по теореме Кастильяно, как производная от потенциальной энергии. Остается результаты сравнить.

Таким же образом проверяется таблица 3. Сумма чисел какого-нибудь вертикального столбца, например 2-го <sup>2)</sup>, представляет перемещение точки 2 в системе с одной лишней связью при нагружении всеми единичными грузами (343). С другой стороны к перемещению этой системы применима формула (340), связывающая перемещение простой системы с перемещением системы, усложненной одной дополнительной связью. В рассматриваемом случае:

$$\delta_{s2(1)} = \delta_{s2} - \frac{\delta_{s1}}{\delta_{11}} \cdot \delta_{s1} \quad (345),$$

где  $\delta_{s2}$  и  $\delta_{s1}$  правой части равенства уже вычислены при проверке предыдущей таблицы 2. Следовательно, здесь мы имеем возможность проверять свои вычисления, которые производятся для заполнения таблицы 3, попутно пользуясь контрольными суммами предыдущих проверок.

Для полной проверки всей 3-ей таблицы, суммируют все ее числа и сравнивают с результатом, получающимся по формуле

$$\delta_{ss(1)} = \delta_{ss} - \frac{\delta_{s1}}{\delta_{11}} \cdot \delta_{s1} = \delta_{ss} - \frac{(\delta_{s1})^2}{\delta_{11}} \quad (346).$$

<sup>1)</sup> При этом, конечно, дополняют таблицу, располагая по другую сторону от диагонали взаимно симметричные члены, например против  $\delta_{ik}$  помещают соответственно  $\delta_{ki}$ . Буква  $\delta_{si}$  — обозначает сумму членов столбца 1.

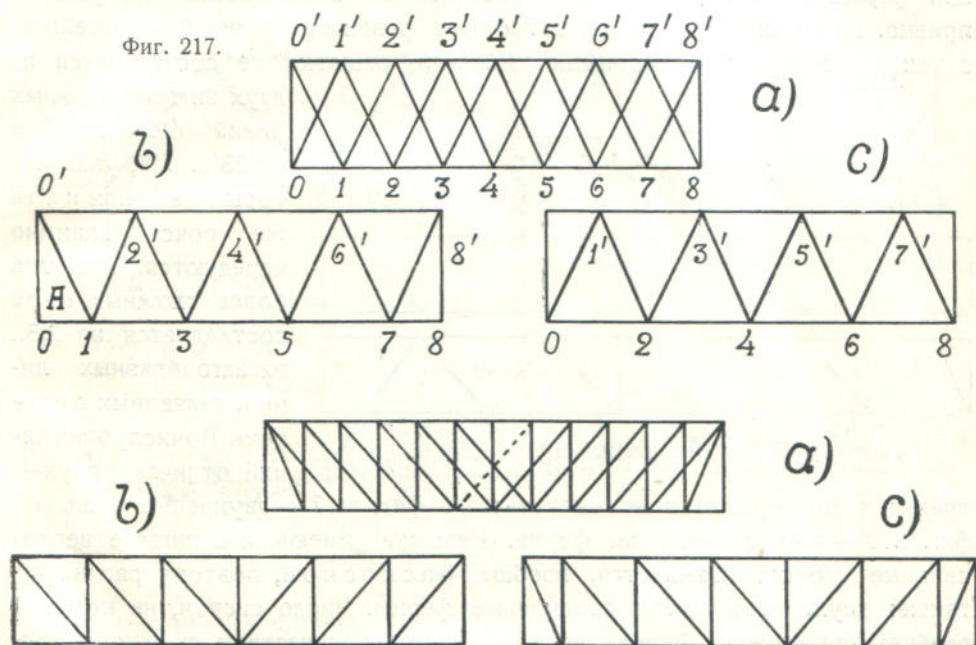
<sup>2)</sup> Перемещение точки 1 для этой системы равно нулю.



Проверка остальных таблиц производится таким же образом.

Для проверки перемещений, зависящих от груза  $P$ , точно также суммируем члены вертикальных столбцов и пользуемся формулами (342) и (345).

**§ 25. Приближенный расчет ферм с лишними стержнями. 1. Разложение на простые фермы.** Рассмотренные способы расчета значительно сложнее, чем способы, относящиеся к статически определимым фермам, в особенности в случае многих лишних неизвестных. Поэтому практики часто пользуются приближенным расчетом, разбивая сложную ферму на ряд простых, усилия которых находятся без затруднений. Про-



Фиг. 218.

стые системы подбирают так, чтобы каждая из них сама по себе была неизменяемой для той части нагрузки, которая ей предназначается; все же простые фермы вместе должны в точности составить данную сложную ферму, выдерживающую полностью всю нагрузку. Здесь как бы пользуются тем приемом выделения шпренгелей, к которому нередко прибегают при расчете статически определимых ферм<sup>1)</sup>. Но там прием в установленном смысле был точным в то время, как здесь его приходится считать приближенным. Эта разница обуславливается влиянием изменения длины отдельных стержней; поясним ее примером фиг. 217.

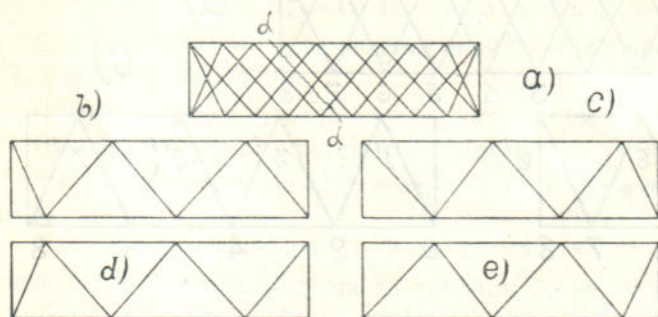
Положим, что нагрузка простой фермы фиг. б) укорачивает стойку  $A$ . Если ферма не содержит лишних стержней, то это укорочение не влияет на усилия прочих стержней фермы, будет ли простейшая ферма б) снабжена шпренгелями или усложнена иным образом, например соединена

<sup>1)</sup> См. напр. наши: Системы без лишних стержней § 53.



с другой подобной фермой *c*); если только число стержней сложной фермы не превышает необходимого, укорочение *A* не имеет значения. Но пусть опорный стержень *A* укоротится на фиг. *a*), — тотчас возникнут усилия во всех стержнях обеих простых систем *b*) и *c*), на которые разбивается данная сложная. Разбивка сложной фермы на простые предполагает независимость действия последних, между тем, в статически неопределимой системе зависимость, наоборот, существует.

Из всех возможных способов разбивки сложной фермы следует выбрать такой, который приводит к более точному результату. Существующие фермы старых мостов были рассчитаны на основании следующего приема. Применительно к фиг. 217 ферма разбивается на 2 простейшие с тем же контуром и опорными стойками; решетка же составляется из



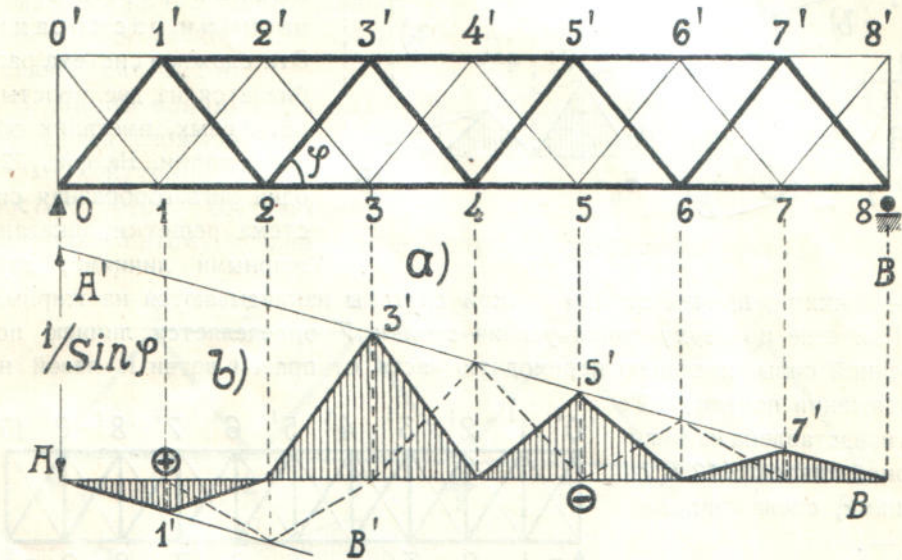
Фиг. 219.

двух зигзагообразных линий  $0'1'2'3... 7'8'$  и  $01'2'3'... 7'8'$ , узлы которых на одном и том же поясе взаимно чередуются. Решетка более сложных ферм составляется из 2, 3.. зигзагообразных линий, связанных с опорами. Почислуэтих линий отличают двух— трех — и многорешетчатые системы: на фиг. 217 — двухрешетчатая, на фиг. 219 — многорешетчатая ферма. Решетка, имеющая в зигзаге вертикальные стойки, называется, вообще, раскосной, поэтому различают также: двух, трех и многораскосные фермы. Число систем, на которые разбивается сложная ферма, легко установить посредством сквозного разреза: в какой-нибудь панели проводят сечение, параллельное диагонали; число пересеченных диагоналей другого направления указывает на число систем. Так, на фиг. 218 двухраскосная ферма, а на фиг. 219 — четырехрешетчатая, ибо в разрез, параллельный нисходящей диагонали, попадает 4 восходящих.

При расчете усилий принимают, что каждая зигзагообразная линия (одна система) работает только от той нагрузки, которая приходится на ее собственные узлы, например: система *b*) фиг. 217 воспринимает только грузы  $0'2'4'6'8'$ , всякий же промежуточный груз  $1'3'5'7'$  целиком воспринимается второй системой *c*). Следовательно, перемещая груз  $P=1$  последовательно от узла к узлу, как это делается при построении линий влияния, надо целиком передавать его то на одну систему, то на другую: когда груз стоит на узле  $1'$  — надо принять его на вторую систему *c*) и считать, что во всех стержнях первой системы нули; когда груз перейдет на узел  $2'$  — он целиком передается первой системой *b*), и нулями будут все усилия второй системы *c*). Рассмотрим несколько примеров построения линий влияния.



2. **Линии влияния для решетки.** а) Двухрешетчатая ферма. При построении линии влияния для раскоса 23' фиг. 220 выделяем ту простейшую ферму, к которой принадлежит раскос; на фигуре 220 эта ферма обчерчена жирными линиями, другая простейшая—показана тонкими. Не обращая внимания на тонкую систему, строим обычную линию диагонали  $AA'BB'$  фиг. б), состоящую из двух ветвей  $BA'$  и  $AB'$ . После того намечаем положения груза в узлах нагруженного пояса. При езде по верху груз, ставший в узлах 1', 3', 5', 7' воспринимается первой «жирной фермой»; поэтому надо взять значения ординат 1', 3', 5', 7' на линии влияния фиг. б). В то время, когда груз стоит в узлах 2', 4', 6', он восприни-



Фиг. 220.

мается «тонкой фермой», так что диагональ 23' жирной фермы не работает, и надо под узлами 2', 4', 6'—принять нулевые ординаты. Таким образом получится заштрихованная фиг. б).

Точно такая же форма линии получится для нисходящего раскоса 1'2, ибо сквозные сечения, которые проводятся для расчета обоих усилий 23' и 1'2, проходят через одну и ту же нагруженную панель 1'3'. Только знаки ординат будут обратные.

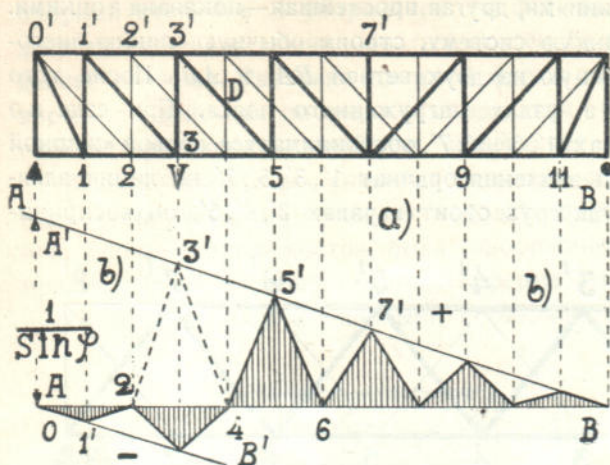
Для диагонали 2'3 второй системы получается пунктирная линия влияния.

Не трудно убедиться, что, при езде по низу, заштрихованная линия соответствует диагоналям второй простой фермы, сходящимся в верхнем узле 2', а линия, вычерченная пунктиром, соответствует раскосам первой фермы, сходящимся в верхнем узле 3'.

б) Двухраскосная ферма фиг. 221. Линия влияния для нисходящего к середине раскоса  $D$  очерчивается по фиг. б), ибо раскос принадлежит «жирной» простейшей ферме и работает только при нагружении ее узлов 1, 3, 5, 7, 9, 11. Как и в простых раскосных фермах, форма линии для диагонали не зависит от расположения езды: по верху или по низу



Линия влияния для стойки  $V$  при езде по низу имеет ту же линию, как  $D$ , только опорная ордината ее 1, вместо  $1/\sin\varphi$ , и знаки противоположные. При езде по верху нагруженную панелью, рассекаемой



Фиг. 221.

при расчете, становится  $1/3'$  и потому линия стойки  $V$  получает пунктирное добавление; она очерчивается зигзагом  $A 1'23'45'67'...$  фиг.  $b$ ).

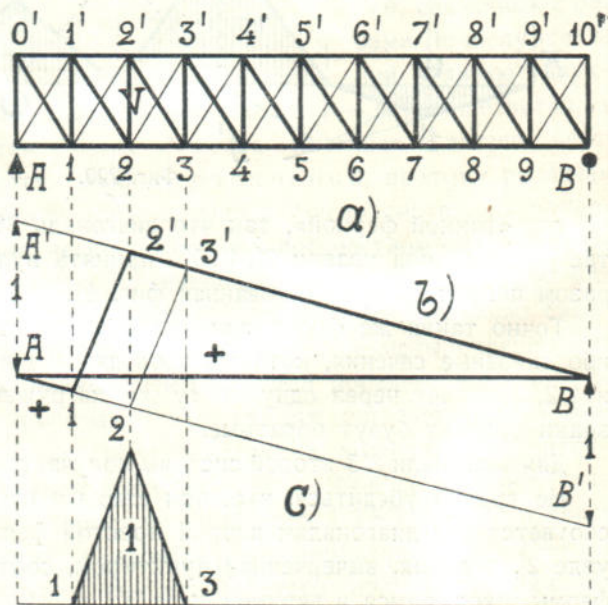
с) Двойная раскосная ферма с обратными раскосами. Эта сложная система разбивается на две простых раскосных, имеющих общие стойки. На фиг. 222 одна зигзагообразная система решетки показана жирными линиями, дру-

гая—тонкими, причем стойки тонкой системы накладываются на жирные.

При езде по верху линия усилия стойки  $V$  определяется линией поперечной силы, имеющей переходную часть от правой ветви к левой на протяжении панели  $1' 2'$ ; она представлена на фиг.  $b$  жирной линией  $A12'B$  со знаками, слева направо:  $+$ ,  $-$ .

Но та же стойка  $V$  принадлежит и второй, тонкой системе. При езде по верху переходную панелью от правой ветви ее линии влияния к левой должна быть  $2' 3'$ . Кроме того, знаки линии противоположны предыдущим, так как при восходящих тонких раскосах второй простой системы стойка  $V$  теперь оказывается нисходящим элементом зигзага в то время, как в первой системе она была восходящим <sup>1)</sup>.

Линия влияния для стойки, как элемента тонкой системы, отмечена на фиг.  $b$ ) тонкой линией  $A23'B$  со знаками:  $- +$ .



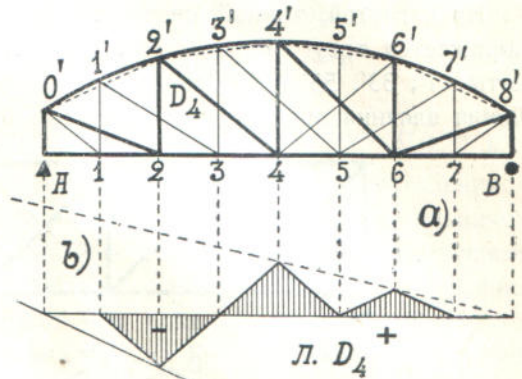
Фиг. 222.

<sup>1)</sup> См. Системы без лишних стержней § 72, 3.



Так как стойка  $V$  принадлежит обоим системам зигзага, то усилия ее алгебраически складываются. Очевидно, в результате получится  $12' 3' 2$ , а после перечерчивания— $1 2 3$  фигуры  $c$ ).

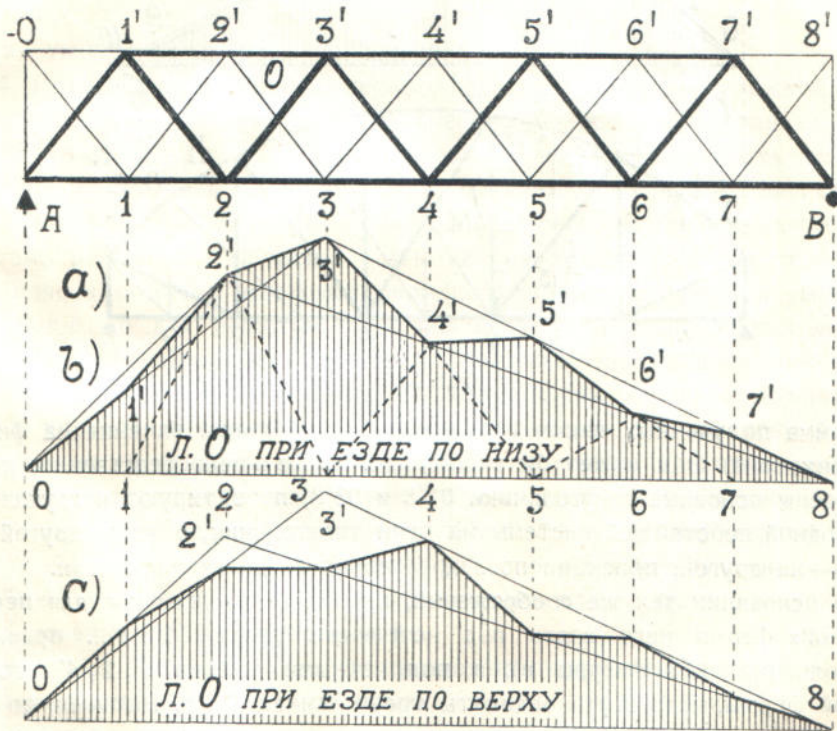
д) Решетка криволинейных ферм. Элементы поясов простых ферм на которые разбивается сложная, не совпадают с очертанием кривого пояса сложной фермы, например, на фиг. 223:  $0'2'$ ,  $2'4'$ . Но правило построения сохраняется, если пользоваться хордами  $0'2'$ ,  $2'4'$ ... Пример линии влияния для раскоса  $2'4'$  представляет фиг. 223-б).



Фиг. 223.

**3. Линии влияния для поясов.** Пояса сложной фермы образуют контур, общий для всех простых ферм, составляющих сложную. Поэтому усилия поясов, полученные в простых фермах необхо-

димому сложить, подобно тому, как это выполняется в фермах со шпренгелями<sup>1)</sup>. Пример построения линии для двухрешетчатой фермы приведен



Фиг. 224.

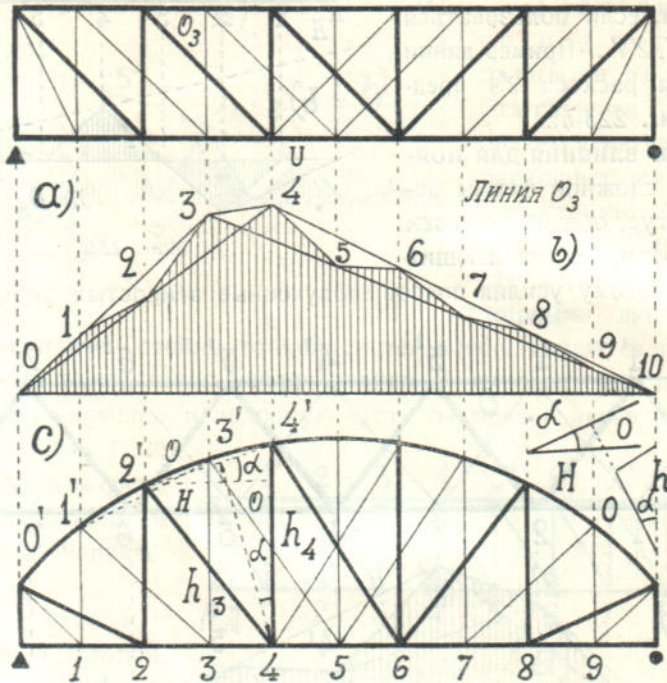
димому сложить, подобно тому, как это выполняется в фермах со шпренгелями<sup>1)</sup>. Пример построения линии для двухрешетчатой фермы приведен

<sup>1)</sup> См. Системы без лишних стержней, § 53.



на фиг. 224-б). Стержень  $O$  принадлежит панели  $1'3'$  первой «жирной» системы; поэтому на фиг. б) строим треугольник  $02'8$ . Нагрузка узлов 2, 4, 6 дает ординаты  $22'$ ,  $44'$ ,  $66'$ , а нагрузка узлов 1, 3, 5, 7—нули. Линия влияния очерчивается пунктиром.

Но в другой, тонкой системе, усилие  $O$  принадлежит панели  $2'4'$  и выражается треугольником  $03'8$  фиг. б). Здесь рабочими являются ординаты  $11'$ ,  $33'$ ,  $55'$  и  $77'$ , а в промежутках между ними должны быть нули. Линия влияния представляет площадки  $012'1'$ ,  $2'34'3'$ ,  $4'56'5'$  и  $6'787'$ .



Фиг. 225.

Сумма полученных таким образом площадей линий влияния на фиг б) заштрихована. Она может быть получена также и непосредственно: когда построены основные треугольники  $02'8$  и  $03'8$ , проектируют нагруженные узлы одной простейшей системы на один треугольник, а узлы другой системы—на другой; проекции последовательно соединяют прямыми.

На основании тех же соображений, при езде по верху для первой «жирной» фермы надо взять под нечетными узлами  $1'3'5'...$  ординаты треугольника  $02'8$  фигуры с), а под четными узлами  $0', 2', 4'$  второй, тонкой фермы, надо взять ординаты треугольника  $03'8$ . Наконец, по предыдущему, концы ординат надо последовательно соединить прямыми отрезками. Пример построения линий влияния для поясов двухраскосной фермы приведен на фиг. 225. Здесь не имеет значения, по какому поясу происходит езда.

Если пояс криволинейный, как на фиг. 225-с), то вообще говоря, проще строить линию влияния для горизонтальной проекции этого пояса, а от



нее перейти к действительной величине. Например, на фиг. 225-с), где направление панели  $O$  ( $2'3'$ ) не совпадает ни с  $2'4'$  первой ни с  $1'3'$  второй из простых ферм, линию влияния строят на основании следующих соображений. Для первой простой фермы усилие  $O_{24} = M_4 : o$ ; но горизонтальная составляющая  $H = O_{24} \cos \alpha$ , плечо усилия  $O_{24}$  относительно точки 4  $o = h_4 \cos \alpha$ ; поэтому:  $O_{24} = \frac{H}{\cos \alpha} = \frac{M_4}{h_4 \cos \alpha}$ , или  $H_{24} = \frac{M_4}{h_4}$ .

Таким же образом, для усилия  $O_{13}$  второй из простых ферм:  $H_{13} = \frac{M_3}{h_3}$ .

Следовательно, горизонтальная составляющая выражается треугольником  $0-4-10$  фиг. б) для элемента  $O$  первой жирной фермы и треугольником  $0-3-10$  для второй простой фермы. Теперь, по аналогии с предыдущими примерами, берем проекции узлов жирной фермы на бока треугольника  $0-4-10$ , и проекции узлов тонкой—на бока треугольника  $0-3-10$ . Соединивши эти проекции последовательно прямыми, получим заштрихованную линию  $H$  для элемента  $2'3'$ . Чтобы получить линию влияния усилия  $O_{23}$ , надо ординаты линии  $H$  разделить на  $\cos \alpha$ , т. е. измерить более мелким масштабом:

$$O_{23} = H : \cos \alpha$$

где  $\alpha$ —угол наклона пояса к горизонту.

**4. Другие приемы приближенного расчета.** Разложение сложной фермы на простые приводит решение статически неопределенной задачи к методам Статики. Уже это одно указывает на произвольность решения, которое может быть более или менее близким к истинному в зависимости от условий системы. Кроме того, погрешность решения для разных стержней системы различна и не может быть, вообще говоря, указана расчетом<sup>1)</sup>. Для поясов обычных мостовых ферм погрешность получается удовлетворительной, но для решетки она очень велика и доходит иногда до 50%.

Более определенные условия погрешностей получаются при других приемах приближенного расчета. Расчет производят по описанным методам упругой деформации, но делают допущения для простоты расчета. В зависимости от значения тех факторов, которыми при этом пренебрегают, получается более или менее точное решение. Обыкновенно, пренебрегают деформацией решетки, учитывая полностью деформацию поясов. Погрешность в этом случае зависит от относительного значения решетки в общей деформации системы и обыкновенно может быть предусмотрена на основании общих соображений.

В 1912 г. D. Schander<sup>2)</sup> предложил определять деформацию ферм, принимая для всех стержней одинаковое удлинение, например 1. На ряде примеров он показывает, что при этом получаются небольшие погрешности, до 10—12%, но расчет оказывается значительно проще.

<sup>1)</sup> Мюллер-Бреслау приводит несколько примеров погрешности, к сожалению, имеющих лишь частное значение (см. Графическая статика сооружений. Перевод Г. Г. Кривошеина. СПб. 1910. Том II, часть 1, стр. 413 и следующие).

<sup>2)</sup> См. Bruckenbau 1912 г. стр. 240.



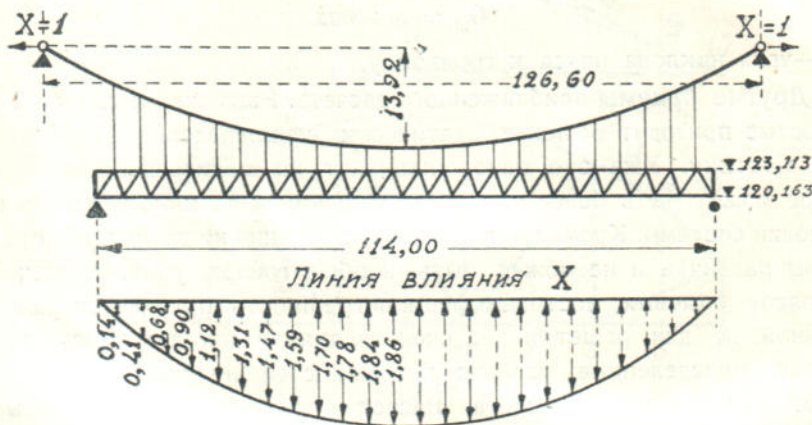
Рассмотрим один пример, на котором упрощения особенно ощутительны—цепь, усиленную жесткой балкой по фиг. 226<sup>1)</sup>.

Считаем пояса горизонтальными и удлинения всех стержней постоянными; влиянием решетки и цепи будем пренебрегать. Благодаря последнему упрощению вертикальные прогибы получаются меньше, но вместе тем станет меньше и горизонтальное перемещение конца цепи, где приложено  $X = 1$ , так как мы пренебрегаем и удлинением цепи. А так как  $X$  определяется из соотношения перемещений, то результат должен мало уклониться от истинного значения. Приводим для сравнения таблицу ординат тинии влияния для  $X$ .

Приближенное значение	0,14	0,41	0,68	0,90	1,12	1,31	1,47	1,59	1,70	1,78	1,84	1,86
Точное значение ординат	0,13	0,38	0,63	0,86	1,07	1,26	1,44	1,59	1,70	1,81	1,88	1,91

Погрешность первых трех столбцов достигает 8%.

В этом примере оказалось возможным пренебречь деформацией цепи и решетки благодаря тому, что лишняя неизвестная  $X$  определяется из



Фиг. 226.

соотношения двух величин, погрешность которых одного знака. Во многих случаях задач с одним лишним неизвестным получающееся при этом приближение оказывается удовлетворительным. Очевидно, точность результата зависит от соотношения расчетных деформаций и от влияния на каждую из них в отдельности деформации решетки. Поэтому усилие в цепи, в затяжке и вообще в длинных лишних стержнях общего значения определяется с иной точностью, чем усилие в каком-нибудь коротком стержне местного значения.

При определении деформации фермы решетка, вообще говоря, оказывает существенное влияние, в особенности при высоких фермах с большой

<sup>1)</sup> Мост Кайзера в Берлине (см. Мюллер-Бреслау том II, ч. I, стр. 259 и след. Также: Der Eisenbau, 1911, стр. 55.



длиной раскосов и стоек; поэтому например, в мостах с ездой по низу, имеющих обыкновенно высокие фермы, не следует пренебрегать деформацией решетки. В § 9,10<sub>b</sub> было показано, что в одном примере погрешность достигла 350%. В таких случаях может оказать услугу приближенный способ, предложенный в § 9,10<sub>g</sub>.

**§ 26. Особенности статически неопределимых систем. 1. Распределение сил.** Статически неопределимые системы отличаются некоторыми особенностями в распределении усилий, а также влиянием на это распределение изменения температуры, влиянием точности в пригонке частей и в расположении лишних опор и проч. Кроме того, они отличаются условиями проектирования поперечных размеров.

Реакции и усилия системы без лишних связей не зависят от материала и размеров отдельных ее частей, например: реакция  $A$  простой балки  $AB$  при сосредоточенном грузе  $P$  всегда выражается одинаково,  $A = Pb : l$ , и не зависит ни от размеров и материала опорных частей ни от тех же элементов балки. То же можно сказать и про усилия в стержнях ферм. При отсутствии лишних связей они всегда выражаются одинаково — только через нагрузку и геометрические параметры, например:

$$U = \sum M_R : u, \text{ или } U = \sum P : \sin \varphi \dots \dots \dots (347)$$

и вовсе не зависят от материала и толщины стержней.

Иные условия в статически неопределимых системах. Лишняя реактивная сила по (284):

$$X = - \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} : \sum \frac{S_1^2 l}{EF} \dots \dots \dots (348);$$

она зависит и от модуля упругости материала системы и от толщины отдельных частей  $F$ . То же говорит и формула (283) для лишнего усилия стержня:

$$X = - \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} : \left( \sum \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} \right) \dots \dots (349).$$

Так как усилия всех прочих стержней фермы выражаются через  $X$ :

$$S = S_0 + S_1 X = S_0 - S_1 \left[ \sum \frac{S_1 S_0 l}{EF} : \left( \sum \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l}{E_x F_x} \right) \right] \dots \dots (350),$$

то они также связаны с материалом и толщиной всех стержней фермы.

В каком направлении выражается влияние размеров, легко усматривается из формулы (349).

Если при прочих равных условиях увеличивается жесткость лишнего стержня  $E_x F_x$ , то делитель в скобках формулы (349) уменьшается, т. е. увеличивается  $X$ : усилие лишнего стержня зависит от его жесткости; оно тем больше, чем жестче стержень. Фигурально выражаясь, — лишний стержень берет на себя большую или меньшую нагрузку, сообразно своей жесткости.

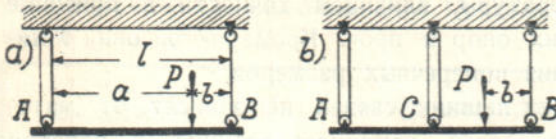
А так как, по (350), усилие всякого стержня системы выражается через  $X$ , то про все вообще стержни можно сказать, что они работают в соответствии со своей жесткостью, тогда как в основных системах



стержни работают только в соответствии с расположением груза. Два параллельных примера наглядно иллюстрируют эту мысль:

1) весьма жесткая балка на двух подвесках, тонкой и толстой (фиг. 227—*a*); усилие подвески *B* здесь всегда будет больше, чем *A*, коль скоро  $b < a$ , так что, подвеска *B* даже может разорваться;

2) наоборот в балке на 3-х опорах фигуры *b*) на тонкую подвеску *B* приходится сравнительно малое усилие, несмотря на то, что груз *P* находится на близком расстоянии *b*.



Фиг. 227.

Следует еще отметить неравномерность распределения усилий при некоторых частных случаях нагрузки, характерную для фермы без лишних

связей, и — более равномерное их распределение в статически неопределимых фермах. Нередко в первых встречаются нулевые усилия, чего не бывает в последних. Так, если на фиг. 133—*b* удалить одну из диагоналей, превращая панель стойки в основную систему, то работать будут только ноги *S* и *S*, во всех же элементах решетки окажутся нули. Но как только мы введем лишнюю диагональ *X*, тотчас начинают работать все стержни системы.

**2. Влияние неточности в длине частей.** Другой особенностью систем с лишними связями является влияние неточностей сборки частей. В системах без лишних связей усилия зависят только от нагрузки, и при ее отсутствии не существуют; изменение длины одного или нескольких стержней только изменит немного расположение узлов фермы, благодаря чему несколько изменятся плечи моментов, тригонометрические параметры, которые входят в выражение для усилий (347); при малом же изменении длины стержней изменение параметров — ничтожно, и не влияет на величину усилий. Поэтому то при перерасчете старых, осевших и даже провисших ферм получаются те же усилия, что были в новых фермах при первоначальном их проектировании. С этой точки зрения не имеет значения небольшая потеря строительного подема старых мостов, а также — не вполне точное восстановление формы обрушенных мостов<sup>1)</sup>.

Положим, что лишний стержень на  $\Delta$  короче, чем расстояние между теми узлами основной фермы, которые он соединяет. Очевидно, лишний стержень надо предварительно растянуть, чтобы поместить между назначенными узлами. Но будучи растянут, стержень стремится сблизить узлы, действуя на них некоторой силой *X*, так что, основная ферма оказывается нагруженной.

В результате узлы *A* и *B* фермы (фиг. 228) несколько сблизятся, на  $\lambda_2$ , а сам лишний стержень — удлинится на  $\lambda_1$ . Таким образом, разница  $\Delta$  в длине лишнего стержня и пролета фермы *AB* составит  $\lambda_1 + \lambda_2$ , т. е. будет:

$$\Delta = \lambda_1 + \lambda_2 \dots \dots \dots (351).$$

<sup>1)</sup> Эти дефекты старых мостов имеют значение в других отношениях, например, как причина дополнительных динамических эффектов.



Но  $\lambda_1 = X l_x : E_x F_x$ ; с другой стороны, сближение концов основной стержневой фермы под действием силы  $X$ , по § 23) —

$$\lambda_2 = \frac{d\Pi}{dX}, \text{ где } \Pi = \Sigma(S_1^2 X^2 l : 2EF);$$

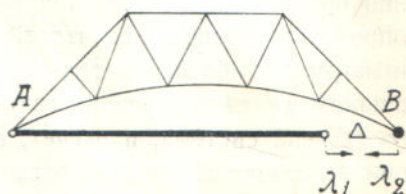
поэтому:

$$\Delta = \frac{Xl}{E_x E_x} + X \sum \frac{S_1^2 l}{EF}, \text{ откуда } X = \frac{\Delta}{\sum \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x}} \dots (352).$$

Усилия в прочих стержнях будут:

$$S = S_1 X = S_1 \Delta : \left( \sum \frac{S_1^2 l}{EF} + \frac{1 \cdot l_x}{E_x F_x} \right) \dots (353).$$

Таким образом, неточность в длине одного стержня вызывает усилия, как в нем самом, так и в прочих стержнях системы. То же можно сказать и про неточность в пригонке опорных частей, например, про понижение уровня средней опоры в балках на 3 опорах и проч.



Фиг. 228.

При изготовлении частей фермы на заводах практикуются определенные „допуски“, т. е. нет чности в размерах. Очевидно, в собранной ферме существуют какие-то начальные усилия, обусловленные допусками. Мы не знаем этих усилий и лишены возможности определить теоретически. Если бы их требовалось установить, то пришлось бы прибегнуть к фактическому выявлению в момент удаления лишних связей. Положим, что требуется определить начальные усилия фермы с тремя лишними стержнями по фиг. 169. Разрежем эти стержни и измерим, каковы будут взаимные расхождения в местах разреза, например:  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ . Если лишние силы, соответствующие этим перемещениям, обозначим  $X, Y, Z$ , то, по Мору, (§ 19,9), получим три уравнения:

$$\Delta_1 = \sum \frac{S_x S l}{EF}, \Delta_2 = \sum \frac{S_y S l}{EF}, \Delta_3 = \sum \frac{S_z S l}{EF} \dots (354).$$

где  $S = S_x X + S_y Y + S_z Z \dots$

Конечно, обыкновенно такого расчета не делают, оставляя начальные напряжения неизвестными.

**3. Влияние температуры** уже рассмотрено в § 19,7. Здесь следует лишь отметить, что причина влияния температуры заключается в изменении длины стержня. Поэтому расчет температурных усилий по существу совпадает с предыдущим; разница заключается лишь в определении удлинения. Неточность сборки, длины, установки, опор определяется путем измерения в натуре фактических величин  $\Delta$ , удлинение же от температурного изменения может быть вычислено предварительно по коэффициенту расширения  $\epsilon$ , так что мы можем предсказать, каковы будут дополнительные усилия от изменения температуры на определенное число градусов.



Следует также иметь в виду, что влияние температуры тем сильнее, чем жестче нагреваемый стержень. Влияние лишних опорных закреплений больше, чем влияние отдельных лишних стержней.

Если температура стержней изменяется таким образом, что форма системы не искажается, оставаясь подобной, и если опорные закрепления не препятствуют такому изменению формы, то температура не вызывает дополнительных напряжений. Во всех остальных случаях они обязательно появляются. Поэтому нагревание неразрезной прямой балки на обычных опорах, расположенных точно на прямой линии, не вызывает ни дополнительных напряжений, ни дополнительных реакций, но изогнутая или ломанная балка, так же, как и неправильное расположение опор — сопровождаются влиянием температуры.

**4. Проектирование** статически неопределимых систем. При составлении проекта фермы без лишних связей нет надобности предварительно определять толщину ее частей; достаточно иметь лишь схему в линиях и нагрузку, ибо все остальное получается, как результат расчета. При лишних же связях усилия зависят от размеров и материала, из которого составлена система, и расчет, вообще, говоря не может начинаться, если они не известны предварительно. Описанные выше приемы позволяют сделать только поверочный расчет уже имеющейся фермы; если же готовой фермы нет, то надо предварительно ею задаться, ощупью предугадывая необходимые размеры и делая поверку по известным уже правилам. Чтобы облегчить эту работу и уменьшить число проб, можно руководствоваться следующими приемами:

1) В качестве первой проектной системы рассматривают подходящую основную, отбрасывая лишние стержни и подбирая для нее подходящую толщину частей. Имея в виду последующее влияние лишних связей, принимают несколько уменьшенную толщину, соответственно тому перераспределению усилий, которое ожидается от связей. Как уже было сказано, введением лишних связей можно вызвать перераспределение усилий и тем большее, чем жестче эти связи. Чтобы целесообразно их использовать, можно задать предварительно подходящую жесткость и изучить ее влияние на основании примерного расчета, а затем — изменить жесткость в том направлении, какое требуется для проектирующего. Конечно, при всех предварительных соображениях достаточно пользоваться приближенным расчетом.

2) Рассматривают данную систему, задавая ей предварительно подходящие размеры путем сравнения с существующими статически неопределимыми системами. Проверяют эти размеры, пользуясь приближенным способом расчета и в результате делают соответствующие изменения.

3) При возможности, лучше однако воспользоваться разложением статически неопределимой фермы на простые, по § 25. При этом для расчета не требуется распоряться площадями поперечных сечений: по схеме фермы непосредственно определяют усилия и подбирают сечения. Эти сечения принимают, как исходные для более точного расчета.



При всех предварительных расчетах вполне целесообразно пользоваться и другими упрощениями, как в частях фермы, так и в нагрузке, если они слабо отражаются на результате, например: удалять шпренгеля, заменять сложные бруски (фермочки) простыми стержнями и т. п. К числу таких упрощений относится и замена криволинейного пояса ферм полигональным, пользование постоянным средним сечением поясов во всех панелях взамен переменного сечения, иногда уравнивание жесткости обоих поясов: верхнего и нижнего, или уравнивание удлинения всех стержней фермы, как сделано в § 25,4.

Нагрузку фермы обыкновенно сосредоточивают на одном поясе, по которому происходит езда, сосредоточенные грузы заменяют эквивалентной равномерно распределенной нагрузкой<sup>1)</sup> и проч.

На основании перечисленных соображений подбирают предварительные сечения частей фермы и подвергают ее более точному расчету. Если при вторичном расчете напряжения оказались удовлетворительными, расчет считается окончательным; в противном случае, по исправлении сечений требуется повторение. Обыкновенно этих двух расчетов бывает достаточно. Проектирование неразрезных балок находится в более благоприятных условиях. В том случае, когда балка имеет постоянное сечение по всей длине и опирается на абсолютно неподатливые опоры, расположенные на одном уровне, мы определяем опорные моменты, а следовательно—и реакции и поперечные силы, не прибегая к размерам балки и ее модулю упругости. То же можно сказать и про балки с одним защемленным концом, а также про балки с двумя защемленными концами при условии, что отбрасываются осевые продольные усилия. Следовательно, для расчета таких балок не требуется предварительное знание их размеров и материала.

**5. Погрешности расчета.** При большом числе неизвестных их определение представляет утомительную вычислительную работу и притом нередко связанную с другими дефектами вычислений. Существенною особенностью этих вычислений является накопление ошибок, неизбежное по самой природе задачи. Ошибки происходят, во-первых, от полной взаимной зависимости всех упругих элементов расчета: и сил и деформаций, благодаря чему все неизвестные входят во все уравнения системы (143), и приходится решать систему  $n$  совместных уравнений. Так как решения выражаются разностями и нередко составленными из близких чисел, то результат неизбежно получается неточным (сравн. § 11,4). Как было показано в § 24, от этого недостатка решений в известной мере можно освободиться, прибегая к разделению неизвестных по способу Гаусса или по способу последовательного усложнения. Однако, такими приемами мы по существу не освобождаем себя от зависимости между неизвестными, а лишь систему совместных уравнений приводим к решению каждого из них в отдельности. Мы достигаем здесь разделения благодаря тому, что предварительно находим зависимости между коэффициентами уравнений упругости. Мы пользуемся, так сказать, цепной зависимостью последую-

<sup>1)</sup> См. Системы без лишних стержней § 74,2.



щих коэффициентов от предыдущих и неизбежно накапливаем ошибки вычислений. Вообще ошибки неизбежны, и можно говорить лишь об условиях, при которых они менее значительны.

Выбор искомых данной задачи в нашем распоряжении. Мы имели случай считать ими реактивные силы и опорные моменты. Кроме того, мы можем определить искомые непосредственно из уравнений, пользуясь определителями, либо можем выразить неизвестные через перемещения, как например, через отношение прогибов, углов поворота и проч. Все это оказывает известное влияние на точность вычислений. При выборе неизвестных надо отдавать предпочтение тем, которые вычисляются наиболее простым образом, функциями более низкого порядка от длины. В этом отношении момент имеет преимущества перед реактивной силой.

По поводу частного примера в § 20,<sub>5</sub> и в § 24,<sub>8a</sub> мы уже имели случай говорить о преимуществах лишних моментов в отношении простоты вычислений. Обратимся теперь к точности.

1) Когда за лишнее неизвестное мы принимаем силу, то соответствующим перемещением служит длина например, прогиб. Нам приходится в уравнениях деформаций (143):

$$\begin{aligned} \delta_{ax} X + \delta_{ay} Y + \delta_{az} Z + \delta_{ap} &= \Delta_a \\ \delta_{bx} X + \delta_{by} Y + \delta_{bz} Z + \delta_{bp} &= \Delta_b \quad \dots \quad (355) \end{aligned}$$

пользоваться прогибами, т. е. выражениями 3-ей степени длины. Это доказывается в общем виде выражениями Мора <sup>1)</sup>:

$$\delta = \int \frac{1}{EJ} MM_1 dx \quad \text{или} \quad \delta = \int \frac{1}{EF} NN_1 dx \quad \dots \quad (356).$$

Чтобы это перемещение получилось размерностью первой степени, интеграл должен быть функцией третьей степени от длины, так как он делится на жесткость  $EJ$ . Итак, лишняя неизвестная сила определяется по коэффициентам  $\delta$ , выраженным третьей степенью длины.

2) Когда за лишнее неизвестное мы принимаем момент, то в качестве перемещения получаем соответствующий угол поворота, т. е. нулевую размерность.

Через момент этот угол поворота выражается функцией первой степени от длины <sup>2)</sup>.

Очевидно, если перемещение определено с некоторой погрешностью, то в первом случае ошибка результата будет значительнее, чем во втором.

Применяя все эти указания, можно получить более или менее удовлетворительный результат. Но в сложных вычислениях обыкновенно накапливаются ошибки вследствие отбрасывания знаков, возможны и случай-

<sup>1)</sup> См. § 19,<sub>9</sub>.

<sup>2)</sup> Осуществляя единичный момент, мы нагружаем систему фиктивными силами минус первой размерности, а потому и коэффициенты  $\delta$  также получают минус первую размерность. А чтобы по форм. (356) получить  $\delta$  минус первой степени, необходимо иметь интеграл (356) в первой степени. Следовательно, лишний момент вычисляется по коэффициентам  $\delta$ , выраженным первой степенью длины (см. § 17,<sub>8</sub> и 19,<sub>3</sub>).



ные ошибки. Для своевременного их обнаружения рекомендуется перемещения определять двумя разными путями и параллельно сравнивать. Это создает уверенность и освобождает от неблагоприятной работы по переделке всех вычислений сначала в случае обнаружения ошибки в конечном результате. Пример проверки в сложных вычислениях мы показали в § 24,10.

**6. Теорема Lèvy** о теоретическом объеме ферм<sup>1)</sup>. Стержневая ферма без лишних стержней может быть сделана фермой равного сопротивления, т. е. такой во всех стержнях которой напряжения одинаковы и достигают одновременно допускаемого безопасного предела. Это следует из того, что усилия в стержнях не зависят от их толщины и определяются исключительно данной нагрузкой. Мы определим эти усилия, пользуясь одной только схемой фермы в линиях, и подберем такие площади  $F$ , какие требуются по формуле  $n = S : F$ , чтобы напряжения  $n$  везде достигали допускаемого предела. Такая ферма будет иметь минимум материала, так как ни в одном ее пункте не сделано материального перерасхода, сверх требуемого формулою

$$F = S : n.$$

Распределение сил в фермах с лишними стержнями иначе; оно зависит от сечений самих стержней. Можно показать, что такие фермы не всегда удается сделать системами равного сопротивления.

Будем исходить из условия, что допускаемые напряжения на растяжение и сжатие одинаковы. Представим себе стержневую ферму с лишними стержнями, в которых находятся усилия  $X, Y, Z, \dots$ ; усилия необходимых стержней пусть будут  $S$ . Тогда на основании Начала наименьшей работы, можно написать для потенциальной энергии системы

$$U = \sum \frac{S^2 l}{2EF} + \frac{X^2 l_x}{2EF_x} + \frac{Y^2 l_y}{2EF_y} + \dots$$

что  $\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \dots$ , т. е.:

$$\sum \frac{Sl}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} + \frac{Xl_x}{EF_x} = 0, \sum \frac{Sl}{EF} \frac{\partial S}{\partial Y} + \frac{Yl_y}{EF_y} = 0 \dots$$

Мы желаем достигнуть одинаковых напряжений во всех стержнях, как необходимых, так и лишних, т. е. равенства между

$$\frac{S}{F}, \frac{X}{F_x}, \frac{Y}{F_y} \dots$$

Поэтому можем на эти множители сократить; тогда приходим к условиям:

$$\sum l \frac{\partial S}{\partial X} + l_x = 0, \sum l \frac{\partial S}{\partial Y} + l_y = 0 \dots \quad (357).$$

Усилия  $S$  основной фермы без лишних стержней всегда представляют линейные функции от нагрузки, и если нагрузкой такой фермы будет

<sup>1)</sup> M. Lèvy. La statique graphique. 1874. Мы руководствуемся здесь более простым изложением проф. В. Л. Кирпичева из „Лишние неизвестные Строительной механики“, Киев 1903, стр. 177.



лишнее усилие  $X$ , то производная  $\frac{\partial S}{\partial X}$  представит усилие от единицы вместо  $X$ . Усилия от единицы груза во всех стержнях основной фермы — это вполне определенная величина, от нас не зависящая и мы не можем ею распорядиться, чтобы удовлетворить условиям (357); следовательно, условия не удовлетворяются, за исключением, быть может, некоторых частных случаев. Таким образом, ферма с лишними стержнями не всегда может быть сделана фермой равного сопротивления.

Уже отсюда, как следствие, вытекает заключение об объеме фермы. Очевидно, вообще говоря, такая ферма не может быть системой минимального веса, а становится ею лишь в исключительных случаях, иначе сказать: ферма с лишними стержнями имеет больший объем, либо в исключительных случаях — такой же, как у фермы без лишних стержней. В этом и заключается теорема Lévy.

Эта теорема говорит лишь о теоретическом объеме фермы; кроме того, она выведена в предположении, что допускаемые напряжения на растяжение и сжатие одинаковы. В действительности вес фермы больше теоретического в 1,5 — 2,0 раза, что зависит от пролета и конструкции моста, от разницы между допускаемыми напряжениями на сжатие и на растяжение. Поэтому нельзя считать теорему Леви вполне исчерпывающей вопрос о сравнительном объеме ферм, однако при одинаковых пролетах и подходящей конструкции она отмечает, что в смысле затраты материала ферма с лишними стержнями не представляет преимуществ.

**7. Общее значение систем с лишними связями.** Расчет и проектирование систем с лишними связями значительно сложнее, чем при фермах из одних только необходимых стержней; на них сказывается также влияние температуры, неточность в изготовлении частей и проч. При расчете таких ферм мы не можем учесть начальных напряжений, неизбежно допускаем погрешности вычислений и в известной мере поэтому должны понижать допускаемые напряжения. С другой стороны такие фермы не представляют преимуществ в отношении затраты материала. Естественно поэтому задаться вопросом, что же побуждает строителей пользоваться ими?

Мы уже говорили, что введением лишних стержней достигается то или иное перераспределение усилий основной фермы. Этим может воспользоваться инженер, чтобы достигнуть более целесообразной игры сил. Введением лишних стержней можно иногда побудить принять участие в работе те элементы фермы, которые в основной системе имели нулевые усилия; пример представляет решетчатая стойка фиг. 133. Этим же свойством лишних стержней можно пользоваться для усиления существующих ферм без удаления их из сооружений. Введение лишней затяжки в стропильных, а иногда и мостовых фермах, добавление лишнего пояса и проч. иногда позволяет увеличить грузоподъемность ферм. Но не следует переоценивать этого способа усиления. Как показывает формула (283), лишний стержень входит одним из членов в знаменателя дроби и изменение его жесткости



сравнительно слабо отражается на усилиях остальных стержней. Следует также иметь в виду, что значительного облегчения работы основной фермы можно достигнуть только путем значительной затраты материала на лишний стержень (см. § 26,1). Подвешивание существующих жестких ферм вантами к дополнительным пилонам, обыкновенно, дает незначительные результаты и тем меньшие, чем длиннее ванты и жестче ферма.

Обстоятельства изменяются при переходе к лишним опорным закреплениям. Лишние опоры создают стержни бесконечной жесткости, и теорема Лёву перестает иметь отношение к таким системам. Опоры обыкновенно вносят существенное изменение в изгибающие моменты, а, следовательно, и в усилия ферм; известно, например, что изгибающий момент балки, защемленной двумя концами, на 50% меньше, чем у простой, свободной; в многопролетной балке при равномерно распределенной сплошной нагрузке он уменьшается на 33% и т. п. Поэтому применение многопролетных балок и ферм приводит к ощутительному сбережению материала. Конечно, в действительности подбор сечений приходится производить не при сплошной равномерно распределенной, а при местной нагрузке, чаще даже по сосредоточенным грузам, но и в этих случаях общая экономия материала ферм нередко достигает 20%. Поэтому в последнее время многопролетные системы сосредоточивают на себе все больше внимания; они рекомендуются во всех тех случаях, где обеспечена незыблемость опор, подготовленных естественными условиями местности, либо имеются подходящие готовые стены здания; они также уместны при возможности устроить вполне надежные опоры без перерасхода средств.

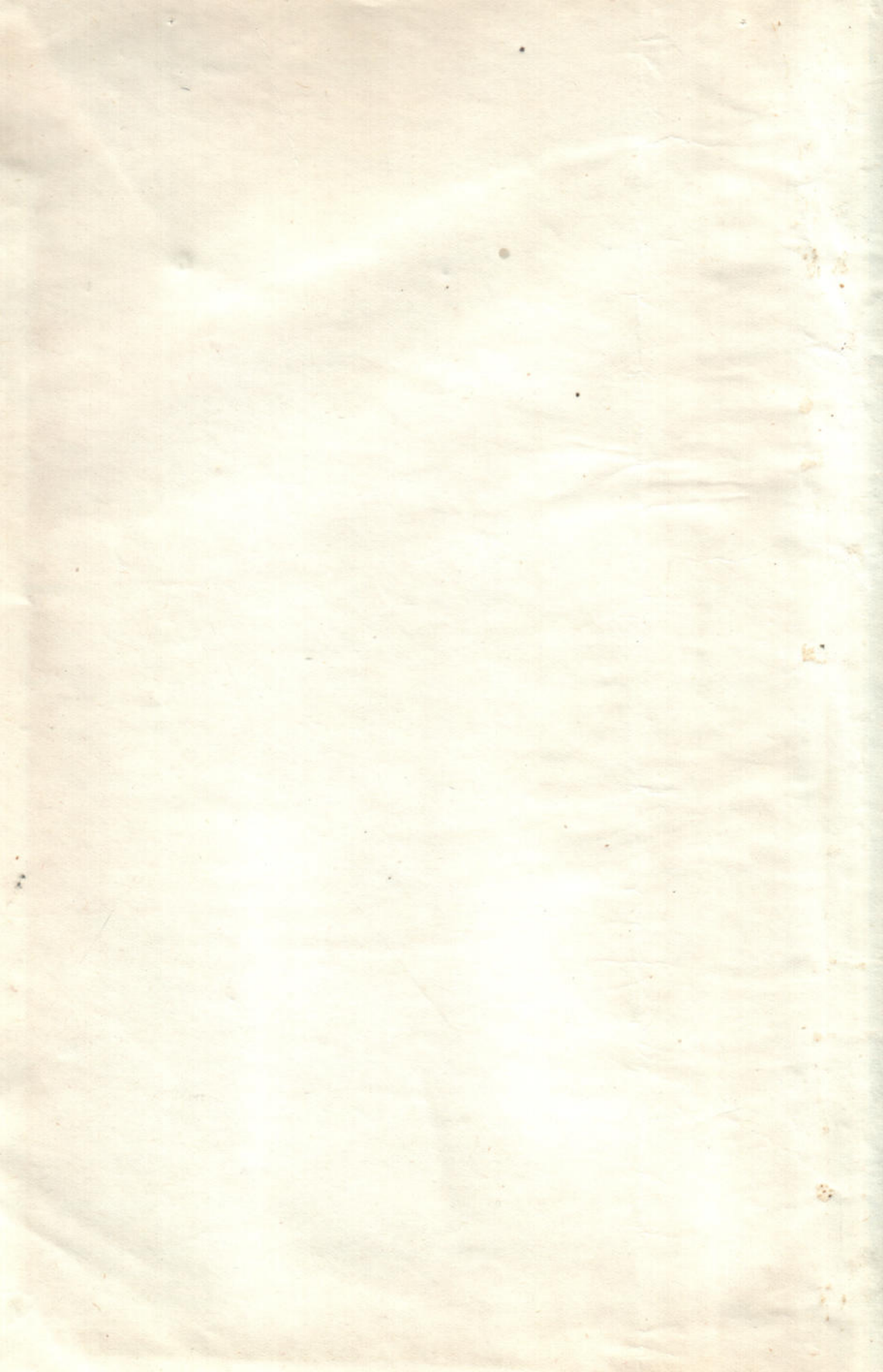
Бывают случаи, где многопролетные фермы и балки приобретают исключительное значение — в понтонных мостах, в мостах на пловучих опорах, в корпусе судна и проч. Иногда применение их тесно связано с материалом, как это имеет место в железобетонных зданиях.

---

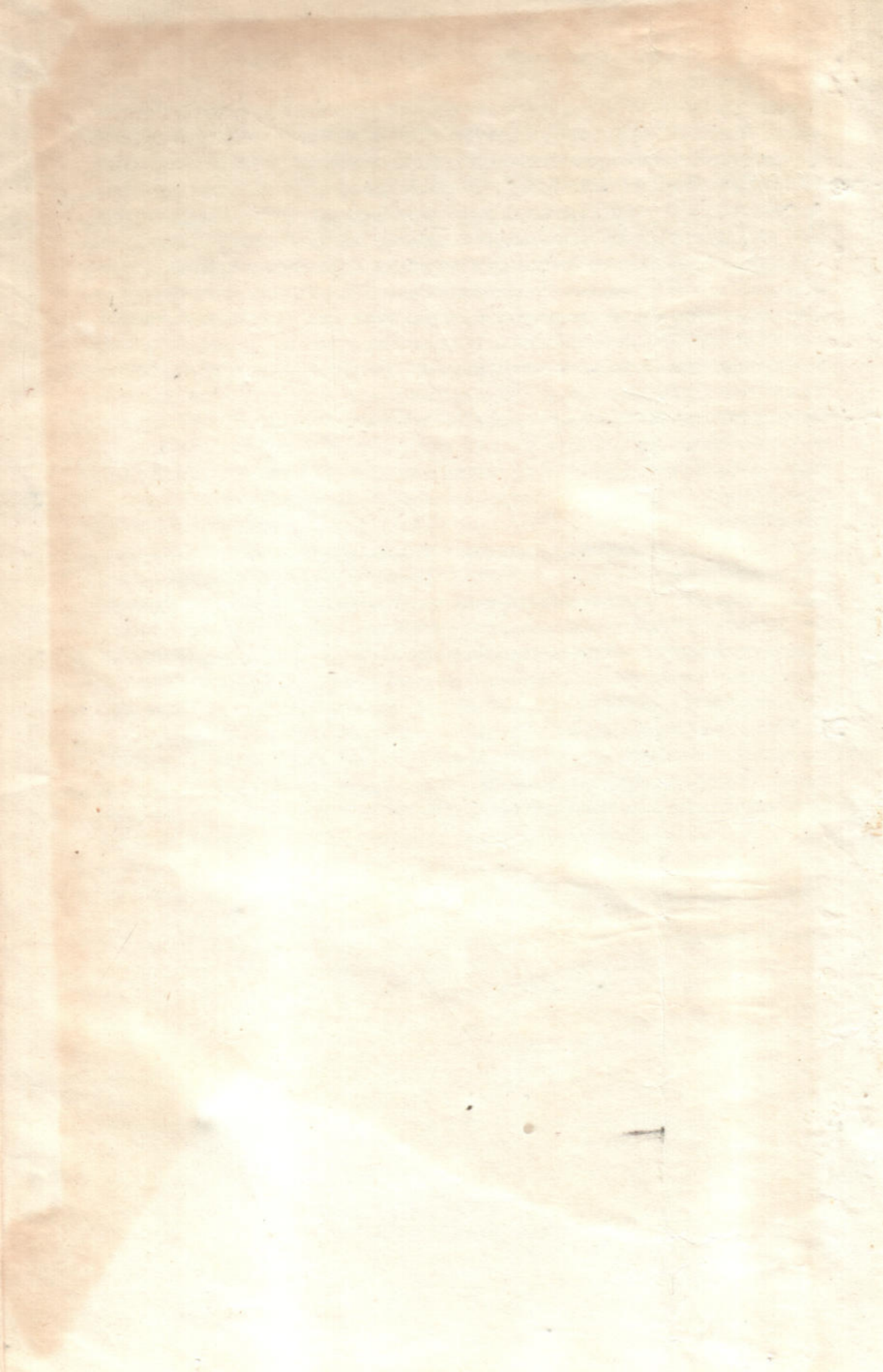




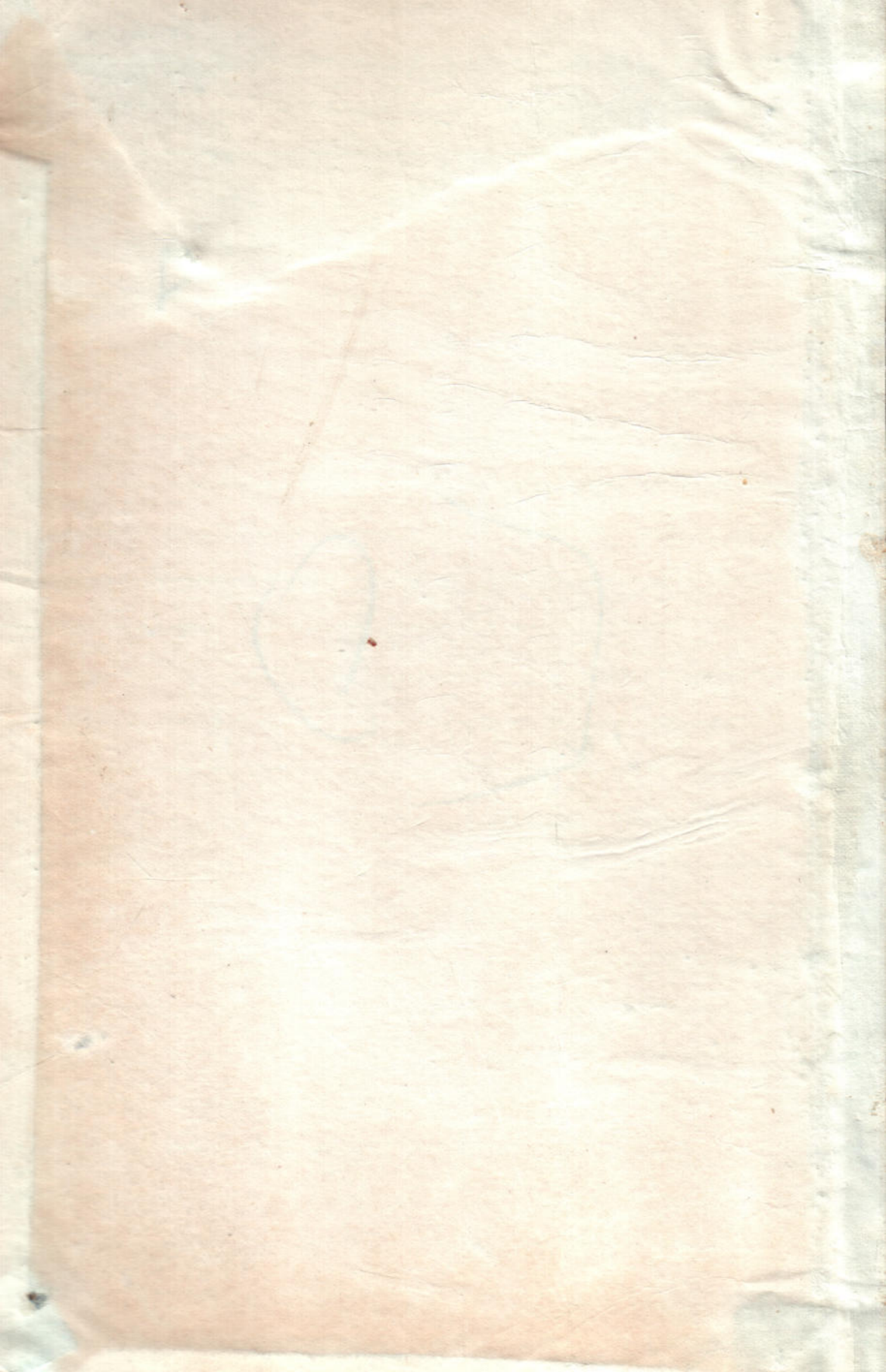














# ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО КУБУА

бывш. Изд. Исполбюро К. П. И.

Киев, ул. Жертв Революции 4, (б. Михайловский монаст.)

Корпус 7. КУБУЧ тел. 25—90.

**Склад изданий—книжный и писчебумажный магазин Из-ва**

Киев, ул. Воровского 41.

Издательство выполняет заказы на любую книгу, имеющуюся на рынке по цене издательств.

**Генеральное представительство на правобережьи Украины издательств:**

ТЕХНИКА и ПРОИЗВОДСТВО (Ленинград).

ОРГА-МЕТАЛЛ (Москва).

ТЕХНИЧЕСКАЯ КНИГА (Харьков).

ОНТУ ВСНХ (Одесса).

НАУЧНОЕ ХИМИКО-ТЕХНИЧ. Из-во ВСНХ СССР  
(Ленинград).

---

**Заказы выполняются наложенным платежом без задатка.**

При заказе на сумму свыше 5 руб. пересылка за счет издательства.

**КАТАЛОГИ ВЫСЫЛАЮТСЯ БЕСПЛАТНО ПО ПЕРВОМУ ТРЕБОВАНИЮ.**

**КНИГОТОРГУЮЩИМ ОРГАНИЗАЦИЯМ ОБЫЧНАЯ СКИДКА.**

## **ПРЕДСТАВИТЕЛИ:**

В г. МОСКВЕ—Н. И. Лапидкая, Никитский бульвар 12, кв. 78.

В г. ЛЕНИНГРАДЕ—Издательство „Техника и Производство“, ул. 25 октября, 64.

В г. ХАРЬКОВЕ — Издательство „Техническая книга“, ул. Либкнехта, 17/19.

В г. ОДЕССЕ—Одесский Отдел Н. Т. У. В. С. Н. Х. Украины (ОНТУ), ул. Р. Люксембург 20.

В г. ТИФЛИСЕ—Н. П. Думченко, ул. Рустанели.