Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра вищої математики

04-02-64М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»**
з розділу **«Лінійна та векторна алгебра»**
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійними програмами спеціальностей
275 «Транспортні технології», 208 «Агроінженерія»,
184 «Гірництво», 131 «Прикладна механіка»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною
радою з якості ННМІ
Протокол № 10 від 29.05.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки та завдання до практичних занять та самостійного вивчення навчальної дисципліни **«Вища математика»** з розділу **«Лінійна та векторна алгебра»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами спеціальностей **275 «Транспортні технології», 208 «Агроінженерія», 184 «Гірництво»**, **131 «Прикладна механіка»** денної та заочної форм навчання [Електронне видання] / Іващук Я. Г. – Рівне : НУВГП, 2024. – 38 с.

Укладач: Іващук Я. Г., к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск: Тадеєв П. О., д.пед.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення спеціальностей:
275 «Транспортні технології»: Хітров І. О., к.т.н., доцент;
208 «Агроінженерія»: Бунза О. З., к.т.н., доцент;
184 «Гірництво»: Васильчук О. Ю., к.т.н., доцент.
131 «Прикладна механіка» Стрілець О. Р., к.т.н., доцент.

Голова науково-методичної ради
з якості ННМІ проф. Марчук М. М.

Зміст

Вступ

Основним завданням даних методичних вказівок є доступне та стисле розв’язання спеціально підібраних прикладів і прикладних задач до таких розділів вищої математики: елементи лінійної алгебри і елементи векторної алгебри.

Перед завданнями для самостійної роботи наведено зразки розв’язання цих завдань із детальним поясненням. Це допоможе студентам більш глибоко зрозуміти матеріал, виробити уміння самостійно розширювати свої знання з математики та застосовувати їх до розв’язання практичних та інженерних задач.

1. Матриці та визначники

1.1. Зразок розв’язання завдання.

Завдання 1. Дано дві матриці A і B. Знайдіть :

1) матрицю $2A+3B$;
2) добуток матриць $A\cdot B$;
3) добуток матриць $B\cdot A$;
4) визначник $\Delta(A)$ за правилом трикутників;
5) визначник $\Delta(A)$ за теоремою Лапласа.

Розв’язання. Нехай задано дві матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 6\end{pmatrix}.$$

1) Матриця $2A+3B$ =

$$=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & -6 & 4 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 6 & 15 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -10 & 9 \\ 8 & -9 & 13 \\ 16 & 15 & 20 \end{pmatrix};$$

2) Добуток матриць $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 4+(-2)\cdot 0+3\cdot 2 & -2+2+15 & 1-6+18 \\ 16-0+4 & -8+3+10 & 4-9+12 \\ 20+0+2 & -10-0+5 & 5+0+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 13 \\ 20 & 5 & 7 \\ 22 & -5 & 11 \end{pmatrix};$$

3) Добуток матриць $B\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 4-8+5 & -8+6+0 & 12-4+1 \\ 0-4+15 & 0+3+0 & 0-2+3 \\ 2+20+30 & -4-15+0 & 6+10+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 11 & 3 & 1 \\ 52 & -19 & 22 \end{pmatrix};$$

4) За правилом трикутників визначник

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot 1+4\cdot 0\cdot 3+(-2)\cdot 2\cdot 5-$$

$$-3\cdot(-3)\cdot 5-(-2)\cdot 4\cdot 1-2\cdot 0\cdot 1=-3+0-20+45+8-0=30.$$

5) Обчислимо визначник $\Delta(A)$ за теоремою Лапласа, розклавши його за елементами третього рядка

$$\Delta(A)=a_{31}\cdot A_{31}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33},$$

де алгебраїчні доповнення $A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-4+9=5$,

$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-(2-12)=10$, $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-3+8=5$.

Тоді $\Delta(A)=5\cdot 5+0\cdot 10+1\cdot 5=25+5=30$.

Визначник $\Delta(A)$ можна було обчислити, розклавши його за елементами другого стовпця, за формулою

$$\Delta(A)=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}.$$

**Зручно брати той рядок чи стовпець, що містить нуль.

1.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2\\ 3 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

5. $$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 1 & 5 & -2\\ 7 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix}6 & -3 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 7 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

7. $$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 6 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

8. $$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

9. $$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

10. $$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

11. $$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

12. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 5 & 0 & 3\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -2\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}9 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 5\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

26. $$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

2. Лінійні перетворення

2.1. Зразок розв'язання завдання.

Завдання 2. Задано два лінійних перетворення. З допомогою матричного числення знайти перетворення, яке виражає x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 3x_3, \\ x_2' = 4x_1 + 5x_2 + x_3, \\ x_3' = -2x_1 + 6x_2 + x_3; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 4x_3', \\ x_2'' = -2x_1' + 5x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 6x_2' + 7x_3'. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо обидва перетворення в матричній формі

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \text{ або } \quad X' = A\cdot X,$$

$$\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}, \text{ або } \quad X'' = B\cdot X'.$$

Тоді $X'' = B\cdot X' = B\cdot A\cdot X = C\cdot X$,

де $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}$, $C = B\cdot A$.

$$C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 5 & -2\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 6 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-12-8 & -1-15+24 & 3-3+4\\ 4+20+4 & -2+25-12 & 6+5-2\\ 6+24-14 & -3+30+42 & 9+6+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & 8 & 4\\ 28 & 11 & 9\\ 16 & 69 & 22\end{pmatrix}.$$

Отже, шукане лінійне перетворення задане системою:

$$\begin{cases}x_1'' = -18x_1 + 8x_2 + 4x_3,\\ x_2'' = 28x_1 + 11x_2 + 9x_3,\\ x_3'' = 16x_1 + 69x_2 + 22x_3.\end{cases}$$

2.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $\begin{cases}x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3,\\ x_2' = 6x_1 + 7x_2 + x_3,\\ x_3' = 9x_1 + x_2 + 8x_3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3',\\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3',\\ x_3'' = 3x_1' - 4x_2' + 5x_3'.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1' = x_1 - x_2 - x_3,\\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3,\\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3',\\ x_2'' = -2x_1' + 2x_3',\\ x_3'' = x_2' - x_3'.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x_1' = 7x_1 + 4x_3,\\ x_2' = 4x_2 - 9x_3,\\ x_3' = 3x_1 + x_2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1'' = x_2' - 6x_3',\\ x_2'' = -3x_1' + 7x_3',\\ x_3'' = x_1' + x_2' - x_3'.\end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = 2x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 4x_1 - x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + x_3', \\ x_2'' = 2x_2' + x_3', \\ x_3'' = -x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 2x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 3x_2' + x_3', \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = x_1' - 2x_2' + x_3'. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -2x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = 3x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = x_1' + 2x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 + 8x_3, \\ x_2' = 6x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 8x_2' - 2x_3', \\ x_2'' = -4x_1' + 3x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' - 8x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 4x_1' + 5x_2' - 3x_3', \\ x_2'' = x_1' - x_2' - x_3', \\ x_3'' = 7x_1' + 4x_3'. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - x_2' - 5x_3', \\ x_2'' = 7x_1' + x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = 6x_1' + 4x_2' - 7x_3'. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -3x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2', \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 3x_3, \\ x_2' = x_1 - 2x_2, \\ x_3' = 7x_2 - x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' + x_3', \\ x_2'' = x_2' - 5x_3', \\ x_3'' = 2x_1'. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_2' = -3x_2 - 4x_3, \\ x_3' = 3x_1 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' + 6x_2', \\ x_2'' = x_1' + x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = 5x_2' + 4x_3'. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + 8x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 4x_1 + 6x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -3x_1' + 2x_2' - x_3', \\ x_2'' = -3x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 4x_1' - 2x_2' + 6x_3'. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -2x_1' + 2x_2' - 3x_3', \\ x_2'' = -5x_1' + 2x_2' + x_3', \\ x_3'' = 6x_1' - 3x_2' + x_3'. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -2x_1' + x_2' - x_3', \\ x_2'' = -x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_3'' = 5x_1' - 4x_2' + 3x_3'. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = 7x_1 + 6x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 3x_2' + 2x_3', \\ x_2'' = 6x_1' - x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 4x_2' + x_3'. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 3x_2' + 2x_3', \\ x_2'' = -x_1' - x_2' + 3x_3', \\ x_3'' = -3x_1' + 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3, \\ x_3' = 5x_1 - x_2 + 3x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = 3x_1' - x_2' + 4x_3', \\ x_2'' = 6x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = 8x_1' - 2x_2' + x_3'. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x_2' = x_1 - 5x_2 + 4x_3, \\ x_3' = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -2x_1' - 3x_2' - x_3', \\ x_2'' = -x_1' + 3x_2' + 7x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - x_2' + 4x_3'. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3, \\ x_3' = 5x_1 - 3x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 2x_2' - 5x_3', \\ x_2'' = 4x_1' + 3x_2' - x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - 3x_2' + x_3'. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 - x_3, \\ x_3' = x_1 - 2x_2 + x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 4x_2' - 3x_3', \\ x_2'' = 3x_1' - x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + x_2' - 5x_3'. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 - x_2 - 3x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2 - 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' + 2x_2' - x_3', \\ x_2'' = x_1' - 3x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 2x_1' + 5x_2' + x_3'. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 2x_3, \\ x_3' = x_1 - 3x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = x_1' - 2x_2' + 3x_3', \\ x_2'' = x_1' + 3x_2' - x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - x_2' + 5x_3'. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 3x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + 5x_2 - 4x_3, \\ x_3' = -x_1 - x_2 + 2x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + x_2' + 6x_3', \\ x_2'' = 3x_1' + 3x_2' - x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - 5x_2' + x_3'. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 + x_3, \\ x_3' = x_1 - 5x_2 + 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3', \\ x_2'' = x_1' - 3x_2' + 4x_3', \\ x_3'' = 5x_1' + 2x_2' - 2x_3'. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 + x_3, \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 + 6x_3, \\ x_3' = x_1 - 3x_2 + 4x_3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1'' = -x_1' + 2x_2' + 3x_3', \\ x_2'' = 4x_1' - 5x_2' - 2x_3', \\ x_3'' = 2x_1' - 6x_2' + 2x_3'. \end{cases}$

3. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими

3.1. Зразок розв’язання завдання.

Завдання 3. Розв’язати неоднорідну систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими:

А) за формулами Крамера;

Б) матричним способом;

В) за методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23, \\ 3x + 7y = -5. \end{cases}$$

Розв’язання.

А) за формулами Крамера:

Основний визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 12 = 47 \neq 0 .$$

Обчислимо визначники Δ_x І Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 23 & -4 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 161 - 20 = 141 ,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -25 - 69 = -94 .$$

Тоді, за формулами Крамера, отримаємо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{141}{47} = 3 , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-94}{47} = -2 .$$

Відповідь. $x = 3$, $y = -2$.

Б) матричним способом:

Запишемо систему рівнянь у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Позначимо матриці: $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Тоді, система рівнянь у матричній формі матиме вигляд $A \cdot X = B$.

Звідси $X = A^{-1} \cdot B$,

де $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ - обернена матриця до матриці A, а

A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}. Знайдемо обернену матрицю.

$A_{11} = 7$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -(-4) = 4$, $A_{22} = 5$,

$$A^{-1} = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тоді, невідома матриця

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 161-20 \\ -69-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $x = 3$, $y = -2$.

В) за методом Гаусса:

Помножимо перше рівняння системи на 7, а друге рівняння на 4, отримаємо таку систему

$$\begin{cases} 35x - 28y = 161, \\ 12x + 28y = -20. \end{cases}$$

Додавши до першого рівняння друге, ми виключимо із системи змінну y, саму змінну y знайдемо з другого рівняння заданої системи, отримаємо

$$\begin{cases} 47x = 141, \\ 7y = -5 - 3x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{141}{47} = 3, \\ y = \dfrac{1}{7}(-5-3x) = \dfrac{1}{7}(-5-9) = -2. \end{cases}$$

Відповідь. $x = 3$, $y = -2$.

3.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ 5x - y = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 5y = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x + y = 9, \\ 7x - 2y = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - 5y = 9, \\ 4x + 3y = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x - 4y = 23, \\ 3x + 7y = -5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - 4y = 23, \\ 3x + 7y = -5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 9x - 2y = 23, \\ 4x + y = 14. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x + 3y = -2, \\ 6x - 2y = -20. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - 3y = 3, \\ 4x + y = 13. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x - y = 2, \\ 5x + 2y = 9. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 8y = 10, \\ 7x - y = 13. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 9x - 2y = 7, \\ 8x + 3y = 11. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 5x + y = 13, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 4y = 4, \\ 6x + y = 26. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - 7y = 20, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x - y = -6, \\ 5x - 3y = 3. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7x - 4y = 19, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 6x-5y=2, \\ 3x+2y=10. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+5y=9, \\ x-6y=-21. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+8y=-29, \\ 7x-2y=29. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x+4y=22, \\ 5x-6y=24. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x-5y=4, \\ 3x+y=23. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x-3y=18, \\ 5x+y=13. \end{cases}$

4. Неоднорідні системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими

4.1. Зразок розв'язання завдання.

Завдання 4. Розв'язати неоднорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

А) за формулами Крамера;

Б) матричним способом;

В) за методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x-2y+z=7, \\ 2x+y-3z=9, \\ x-y+z=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

А) за формулами Крамера $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

Основний визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-2+6-1-12+4=-1\neq 0.$$

Бачимо, що $\Delta \neq 0$, а це означає, що система сумісна і має єдиний розв’язок. Обчислимо визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 9 - 21 + 18 = -5,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 36 - 21 - 9 - 14 = -8,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -14 - 18 - 7 + 36 = -3.$$

Тоді за формулами Крамера ми отримаємо:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-8}{-1} = 8,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Відповідь. $(x;\, y;\, z) = (5;\ 8;\, 3)$.

Б) матричним способом

Запишемо систему в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X,\ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = B.$

Тоді система рівнянь в матричній формі через такі позначення матиме вигляд

$$A \cdot X = B.$$

Помножимо зліва обидві частини останньої рівності на обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Враховуючи рівність $A^{-1} \cdot A = E$, де E - одинична матриця та рівність $E \cdot X = X$, отримаємо

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Знайдемо обернену матрицю $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\; A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\; A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5,\; A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,\; A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3,\; A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\; A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

Обернена матриця матиме вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & 14 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

а розв'язок системи рівнянь

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & 14 \\ -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -14+9 \\ -35+27 \\ -21+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $x = 5$, $y = 8$, $z = 3$.

В) розв'язання за методом Гаусса

Виконаємо над даною системою такі елементарні перетворення.

Змінимо порядок рівнянь:

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y-3z=9, \\ 4x-2y+z=7. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на (-2) і складемо до другого рівняння, потім перше рівняння помножимо на (-4) і складемо до третього рівняння. Дістанемо

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 3y-5z=9, \\ 2y-3z=7. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на 2, а третє рівняння на 3, дістанемо

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 6y-10z=18, \\ 6y-9z=21. \end{cases}$$

Тепер, на місці третього рівняння, запишемо результат віднімання другого рівняння від третього. Друге рівняння залишимо

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 3y-5z=9, \\ z=3. \end{cases}$$

З останньої системи отримаємо

$$\begin{cases} x=y-z, \\ y=\dfrac{1}{3}\cdot(9+5z), \\ z=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8-3=5, \\ y=\dfrac{1}{3}\cdot(9+5\cdot 3)=8, \\ z=3. \end{cases}$$

Відповідь. $x=5$, $y=8$, $z=3$.

4.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 4x+y \quad =9, \\ 3x \quad -5z=-9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+4y \quad =9, \\ 2x-3y+z=-4, \\ 4x+y-2z=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-3z=3, \\ 2x-y+4z=0, \\ 3x+2y-5z=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y-4z=-13, \\ 2x \quad -3z=-10, \\ x+5y=11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y+3z=5, \\ 3x+2y \quad =6, \\ 2x-4y+z=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+z=3, \\ 3x-y+5z=11, \\ 4x+y-3z=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+4y+z=3, \\ 3x+2y \quad =6, \\ 5x \quad +z=11. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y-z=5, \\ 5x-y+2z=14, \\ 3x+4y \quad =13. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-3y+4z=0, \\ 5x+2y-2z=17, \\ 2x+y+3z=7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x \quad +2z=5, \\ 2x-3y=-6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-z=1, \\ 6x \quad -5z=-5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+4y-2z=6, \\ 6x+5y+z=11, \\ 4x+3y-4z=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+y-3z=5, \\ 3x-2y-z=4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+y-2z=-1, \\ 3x-2y+4z=16, \\ x+3y-z=2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x+3y-z=12, \\ 2x-y+4z=3, \\ x+y+z=5. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y-z=5, \\ x-2y+z=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 2x-3y-z=-4, \\ 3x \quad +4z=3. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+4y-3z=3, \\ 2x+y+5z=10. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-y+5z=-1, \\ 2x+y-3z=4, \\ 4x-2y+z=0. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x-y+z=0, \\ x+2y-3z=2, \\ 2x-3y+5z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x+2y-3z=4, \\ 3x \quad +5z=6, \\ 2x-3y+z=1. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x+3y \quad =2, \\ x-2y-4z=-2, \\ 5x-y+2z=12. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-4y+z=-1, \\ 4x+y-3z=-1, \\ 6x-2y-z=2. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x \quad -4z=-5, \\ 2x-3y-z=4, \\ 3x+5y+2z=13. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+y-z=3, \\ 5x+2y+z=15, \\ 3x-4y-3z=-5. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x-2y-2z=1, \\ 2x+4y-3z=4, \\ \quad 5y+2z=4. \end{cases}$

5. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

5.1. Зразок розв’язання завдання.

Завдання 5. Знайти загальний розв’язок системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \qquad\quad + 7x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

З допомогою елементарних перетворень знайдемо ранг матриці

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rang\left(A\right) = r\left(A\right) = 2$.

Розмірність підпростору розв’язків $k = n - r = 4 - 2 = 2$, тобто нам досить знайти довільні два лінійно незалежних розв’язки.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Бачимо, що мінор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, складений з коефіцієнтів при невідомих x_1 і x_2, не дорівнює нулю, тому систему запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4, \\ \quad - x_2 = 6x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Розв’язавши систему відносно невідомих x_1 і x_2 методом виключення, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 3x_4, \\ x_3 = 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4, \\ x_4 = 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4, \end{cases}$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_4 .$$

Вектори $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, а невідомі x_3 і x_4 є довільними сталими, тобто довільними параметрами.

Отже, загальний розв'язок системи однорідних рівнянь можна записати у вигляді

$$\vec{x} = \vec{a}_1 \cdot x_3 + \vec{a}_2 \cdot x_4 .$$

5.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 5x_1-8x_2-2x_3+8x_4=0, \\ -2x_1-x_2-10x_3-5x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+7x_2-6x_3+4x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+3x_4=0, \\ 5x_1-3x_2+4x_3+2x_4=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1-5x_2+10x_3-x_4=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1+5x_2-3x_3+x_4=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+8x_2+6x_3-6x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+6x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0, \\ 4x_1-x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-4x_3+5x_4=0, \\ x_1+4x_2+3x_3-5x_4=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1+x_2-5x_3-2x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1-3x_2+12x_3+x_4=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1+6x_2-x_3+3x_4=0, \\ 5x_1-2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+2x_3-5x_4=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3+2x_4=0, \\ 4x_1+2x_2+x_3+3x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-6x_3-x_4=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-3x_2+3x_3+5x_4=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-4x_4=0, \\ x_1+x_2-6x_3-9x_4=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+4x_4=0, \\ 3x_1+4x_2-4x_3+3x_4=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+4x_4=0. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=0, \\ 8x_1-6x_2-3x_3+5x_4=0, \\ 4x_1-14x_2+9x_3+x_4=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3-x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1-4x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+x_3-5x_4=0, \\ 3x_1-3x_2+3x_3-7x_4=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 6x_1-x_2+x_3+4x_4=0, \\ 5x_1-6x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3-5x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3-6x_4=0, \\ x_1+6x_2+3x_3-x_4=0. \end{cases}$

6. Вектори, та їх застосування

6.1. Зразок розв'язання завдання.

Завдання 6. Задані координати чотирьох точок A, B, C, D: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

Знайти:

1) вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{p}=\overrightarrow{AD}$;

2) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{c}$;

3) проекцію вектора $\vec{b}$ на вісь вектора $\vec{a}$, $np_{\vec{a}}\,\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$;

4) площу $\triangle ABC$ з допомогою векторного добутку:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|;$$

5) момент сили $\vec{F}=\vec{b}$, прикладеної до точки B, відносно точки A: $\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right)=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}=\vec{a}\times\vec{b}$;

6) об'єм V піраміди $ABCD$ і довжину її висоти H, опущеної з вершини D на грань ABC:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{p}\right|,\ \ H=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|}.$$

Розв'язання.

1) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\left(4-2;1-3;-2-1\right)=\left(2;-2;-3\right)$,

$\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\left(2;2;9\right)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}=\left(4;0;6\right)$,

$\vec{p}=\overrightarrow{AD}=\left(-7;-7;7\right)$;

2) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{c}=\left(2;-2;-3\right)\cdot\left(4;0;6\right)=$

$=2\cdot4+\left(-2\right)\cdot0+\left(-3\right)\cdot6=-10$;

3) обчислимо спочатку скалярний добуток

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot2+\left(-2\right)\cdot2+\left(-3\right)\cdot9=-27$

І довжину (модуль) вектора $\vec{a}$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{17}$.

Тоді $np_{\vec{a}}\,\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|}=-\dfrac{27}{\sqrt{17}}$;

4) обчислимо векторний добуток

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+$$

$$+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=4\left(-3;-6;2\right),$$

модуль $\left|\vec{a}\times\vec{c}\right| = 4\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2} = 4\cdot 7 = 28$.

Площа трикутника ABC

$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{c}\right| = \frac{28}{2} = 14$ (кв. од.);

5) момент сили

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{AB}\times\vec{F} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\cdot\vec{k} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} \text{ ;}$$

6) знайдемо спочатку мішаний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{p} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\cdot\left(0+6+6-0+6+4\right) = 14\cdot 22 = 308 \text{ .}$$

Об’єм V піраміди $ABCD$ буде:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{p}\right| = \frac{|308|}{6} = \frac{154}{3} = 51\frac{1}{3} \text{ (куб. од.)}$$

Довжина висоти H , опущеної з вершини D на грань ABC відповідно буде дорівнювати:

$$H = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{p}\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|} = \frac{308}{28} = 11 \text{ (лін. од.)}$$

6.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$, $D(-1;-6;3)$
2. $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(5;0;-6)$, $D(-10;9;-7)$.
3. $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$, $D(-1;1;1)$.
4. $A(-2;0;-4)$, $B(-1;7;1)$, $C(4;-8;-4)$, $D(1;-4;6)$
5. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$, $D(8;4;-9)$.
6. $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$, $D(-4;2;5)$.
7. $A(1;1;2)$, $B(-1;1;3)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;0;-2)$.
8. $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-2;7;3)$, $D(-4;8;-12)$.
9. $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$, $D(2;5;4)$.
10. $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$, $D(5;9;-8)$.
11. $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;2;-2)$, $D(3;4;5)$.
12. $A(4;-1;3)$, $B(-2;1;0)$, $C(0;-5;1)$, $D(3;2;-6)$.
13. $A(1;-1;1)$, $B(-2;0;3)$, $C(2;1;-1)$, $D(2;-2;-4)$.
14. $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(0;-5;-4)$.
15. $A(3;10;-1)$, $B(-2;3;-5)$, $C(-6;0;-3)$, $D(1;-1;2)$.
16. $A(-1;2;4)$, $B(-1;-2;-4)$, $C(3;0;-1)$, $D(7;-3;1)$.
17. $A(1;2;0)$, $B(1;-1;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(-3;0;1)$.

18. $A(1;0;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(2;-2;1)$, $D(2;1;0)$.

19. $A(2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$.

20. $A(0;-3;1)$, $B(-4;1;2)$, $C(2;-1;5)$, $D(3;1;-4)$.

21. $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$.

22. $A(7;2;4)$, $B(7;-1;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-4;2;1)$.

23. $A(1;-1;2)$, $B(2;1;2)$, $C(1;1;4)$, $D(6;-3;8)$.

24. $A(-2;-1;-1)$, $B(0;3;2)$, $C(3;1;-4)$, $D(-4;7;3)$.

25. $A(1;2;-3)$, $B(1;0;1)$, $C(-2;-1;6)$, $D(0;-5;-4)$.

26. $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$, $D(-4;3;5)$.

7. Розклад вектора за базисними векторами

7.1. Зразок розв’язання завдання.

Завдання 7. Показати, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис і знайти координати α, β, γ вектора $\vec{x}=(\alpha;\beta;\gamma)$ у цьому базисі.

$\vec{e}_1=(2;\ 4;1)$, $\vec{e}_2=(-2;3;\ -4)$, $\vec{e}_3=(1;\ -1;2)$,

$\vec{x}=(-6;3;-9)=-6\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-9\cdot\vec{k}$.

Розв’язання. Вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис тоді і тільки тоді, коли визначник, складений з координат цих векторів, не дорівнює нулю. Складаємо визначник і обчислюємо його

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 + 2 - 3 - 8 + 16 = 3 \neq 0 .$$

Отже, $\Delta \neq 0$, значить вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис. Знайдемо координати вектора $\vec{x}$ у цьому базисі, тобто знайдемо розклад вектора $\vec{x}$ через вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3,$$

або

$$\alpha \cdot (2;\ 4; 1) + \beta \cdot (-2;\ 3; -4) + \gamma \cdot (1;\ -1; 2) = (-6;\ 3; -9)$$

З рівності векторів випливає така система рівнянь відносно невідомих α, β, γ:

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta + \gamma = -6, \\ 4\alpha + 3\beta - \gamma = 3, \\ \alpha - 4\beta + 2\gamma = -9. \end{cases}$$

Основний визначник системи, як ми бачили вище $\Delta = 3$.

Розв'яжемо систему методом Крамера, обчисливши додатково визначники Δ_α, Δ_β, Δ_γ:

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -9 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -36 - 12 - 18 + 27 + 24 + 12 = -3,$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & -9 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 36 + 6 - 3 - 18 + 48 = 9,$$

$$\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & -9 \end{vmatrix} = -54 + 96 - 6 + 18 + 24 - 72 = 6 .$$

За формулами Крамера отримаємо:

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3,$$

$$\gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2.$$

Отже, вектор $\vec{x}$ у базисі векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ має такі координати

$$\vec{x} = \alpha \cdot \vec{e}_1 + \beta \cdot \vec{e}_2 + \gamma \cdot \vec{e}_3 = -1 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3.$$

7.2. Варіанти завдань для самостійної роботи:

1. $\vec{e}_1 = \left(2;\ 1; -1\right)$, $\vec{e}_2 = \left(2; -3;\ 0\right)$, $\vec{e}_3 = \left(1;\ 1; -1\right)$,

$\vec{x} = \left(5; -4; -2\right)$.

2. $\vec{e}_1 = \left(-3;\ 2; -2\right)$, $\vec{e}_2 = \left(3; -2;\ -1\right)$, $\vec{e}_3 = \left(1;\ 1; -1\right)$,

$\vec{x} = \left(4; -1; -5\right)$.

3. $\vec{e}_1 = \left(4;\ 1; -2\right)$, $\vec{e}_2 = \left(2; -3;\ 0\right)$, $\vec{e}_3 = \left(3;\ 1; -2\right)$,

$\vec{x} = \left(3;\ 8; -4\right)$.

4. $\vec{e}_1 = \left(2;\ 2; 1\right)$, $\vec{e}_2 = \left(1; -3;\ 1\right)$, $\vec{e}_3 = \left(-1;\ 0; -1\right)$,

$\vec{x} = \left(-1; 8; -2\right)$.

5. $\vec{e}_1 = \left(4;\ 2;\ 3\right)$, $\vec{e}_2 = \left(1; -3;\ 1\right)$, $\vec{e}_3 = \left(-2;\ 0; -2\right)$,

$\vec{x} = \left(4; -4; 3\right)$.

6. $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (3;\ 1;\ -1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 3;\ 2)$,

$\vec{x} = (7;\ 7;\ 0)$.

7. $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 1)$, $\vec{e}_2 = (0;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 3)$,

$\vec{x} = (1;\ 0;\ 2)$.

8. $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0;-3;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (2;\ 1;\ 1)$,

$\vec{x} = (3;\ 9;\ 1)$.

9. $\vec{e}_1 = (2;\ 2;\ 3)$, $\vec{e}_2 = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 1;\ 1)$,

$\vec{x} = (5;\ 7;\ 10)$.

10. $\vec{e}_1 = (3;\ 3;\ 1)$, $\vec{e}_2 = (2;-2;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (2;\ 1;1)$,

$\vec{x} = (9;\ 0;\ 4)$.

11. $\vec{e}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}_2 = (1;2;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 1)$,

$\vec{x} = (1;\ 0;\ 4)$.

12. $\vec{e}_1 = (1;\ 0;1)$, $\vec{e}_2 = (0;1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (2;\ 3;4)$,

$\vec{x} = (1;-3;-3)$.

13. $\vec{e}_1 = (3;\ 1;-3)$, $\vec{e}_2 = (-5;2;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (7;\ 3;\ 4)$,

$\vec{x} = (11;10;-1)$.

14. $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 1)$, $\vec{e}_2 = (2;\ 3;\ 3)$, $\vec{e}_3 = (3;\ 1;\ 7)$,

$\vec{x} = (3;\ 3;\ 5)$.

15. $\vec{e}_1 = (1;\ 2;\ 4)$, $\vec{e}_2 = (4; -3;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 1; -2)$,

$\vec{x} = (9; -4; 6)$.

16. $\vec{e}_1 = (1;\ 3; 2)$, $\vec{e}_2 = (-1; 2;\ -4)$, $\vec{e}_3 = (3;\ 0; 1)$,

$\vec{x} = (5; 6; 5)$.

17. $\vec{e}_1 = (1;\ 5; 3)$, $\vec{e}_2 = (2; -1;\ 4)$, $\vec{e}_3 = (-1;\ 2; 0)$,

$\vec{x} = (5; 14; 13)$.

18. $\vec{e}_1 = (1;\ 2; 6)$, $\vec{e}_2 = (-3; 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (2;\ -1; -5)$,

$\vec{x} = (-4; 1; -5)$.

19. $\vec{e}_1 = (1;\ 4; 3)$, $\vec{e}_2 = (-2; 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 0; -5)$,

$\vec{x} = (3; 9; -9)$.

20. $\vec{e}_1 = (1;\ 2; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 0;\ 5)$, $\vec{e}_3 = (-4; -3; 0)$,

$\vec{x} = (-13; -10; 11)$.

21. $\vec{e}_1 = (0;\ 1; 2)$, $\vec{e}_2 = (1; 0;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (-1;\ 2; 4)$,

$\vec{x} = (-2; 4; 7)$.

22. $\vec{e}_1 = (1;\ 3; 0)$, $\vec{e}_2 = (2; -1;\ 1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ -1; 2)$,

$\vec{x} = (6; 12; -1)$.

23. $\vec{e}_1 = (2;\ 1; -1)$, $\vec{e}_2 = (0; 3;\ 2)$, $\vec{e}_3 = (1;\ -1; 1)$,

$\vec{x} = (1; -4; 4)$.

24. $\vec{e}_1 = (4;\ 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 0;\ -3)$, $\vec{e}_3 = (-1;\ 2; 1)$,

$\vec{x} = (-9; 5; 5)$.

25. $\vec{e}_1 = (-2;\ 0; 1)$, $\vec{e}_2 = (1; 3;\ -1)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 4; 1)$,

$\vec{x} = (-5; -5; 5)$.

26. $\vec{e}_1 = (5;\ 1; 0)$, $\vec{e}_2 = (2; -1;\ 3)$, $\vec{e}_3 = (1;\ 0; -1)$,

$\vec{x} = (13; 2; 7)$.

Список рекомендованої літератури

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посібник К. : А.С.К., 2006. 648 с.

2. Шкіль М. І., Колесник Т. В., Котлова В. М. Вища математика: підручник: у 3-х кн. Кн. 1.: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. К. : Либідь,1994. 280 с.

3. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Видавництво Національного університету «Острозька академія», 2021. 432 с.

4. Вища математика: Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності122 «Комп’ютерні науки та інформаційні технології» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 112 с.

5. Посібник для розв'язування задач з вищої математики : навч. посіб. Ч. 1 : Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія / Н. С. Бутенко, О. Г. Нерух, Н. М. Ружицька, Н. П. Стогній; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 172 с.

6. Овчинников П. П. Вища математика: підручник: у 2-х ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П.Яремчук, В. М. Михайленко; За заг. ред. П. П. Овчинникова; пер. з рос. П.М. Юрченка. 3-тє вид., випр. К. : Техніка, 2003. 600 с.

7. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О. В. Кузьма, О. В. Суліма, Т. О. Рудик та інш. КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 127 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42310

8. Ярмуш Я. І., Самолюк І. В. Вища математика. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2015. 148 с. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/5632