

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та  
природокористування  
Навчально-науковий інститут енергетики, автоматики та  
водного господарства  
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-  
інтегрованих технологій

**04-03-391М**

### **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни  
«Автоматизація та оптимальне керування технологічними  
процесами» (частина 2) для здобувачів вищої освіти другого  
(магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою  
«Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та  
робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація,  
комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»  
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-  
методичною радою з якості  
ННІ ЕАВГ  
Протокол № 12 від 30.08.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Автоматизація та оптимальне керування технологічними процесами» (частина 2) для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Матус С. К. – Рівне : НУВГП, 2024. – 35 с.

Укладач: Матус С. К., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник групи забезпечення спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»:

Рудик А. В., д.т.н., професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій

© С. К. Матус, 2024  
© НУВГП, 2024

## Зміст

Лабораторна робота № 5. Дослідження роботи системи оптимальної за швидкістю .....	4
Лабораторна робота № 6. Синтез оптимального управління з повним зворотним зв'язком .....	12
Лабораторна робота № 7. Дослідження системи з вбудованою моделлю .....	22
Лабораторна робота № 8. Дослідження адаптивної системи управління .....	27
Література .....	35

## Лабораторна робота 5. Дослідження роботи системи оптимальної за швидкодією

### 5.1 Мета роботи

Вивчити методику дослідження оптимального керування, синтезувати оптимальне за швидкодією керування об'єктом другого порядку

### 5.2 Теоретичні відомості

Оптимальними системами називають системи, в яких забезпечується екстремальне значення заданого критерію оптимальності. Критеріями оптимальності можуть бути інтегральні оцінки якості, тривалість перехідного процесу, споживана потужність, економічність і інші. Критерії оптимальності є функціоналами від координат системи і керуючих дій.

Оптимальне за швидкодією керування широко використовується для керування об'єктами критичними до часу керування, наприклад, для двигунів ракетних установок тощо.

Математично задачу оптимального керування можна сформулювати наступним чином: для системи автоматичного керування, заданої системою рівнянь у просторі станів

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, f_1, f_2, \dots, f_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, f_1, f_2, \dots, f_n, t) \\ \frac{dx_n}{dt} &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, f_1, f_2, \dots, f_n, t)\end{aligned}\quad (5.1)$$

або у векторній формі рівнянням

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{\Phi}(\bar{X}, \bar{U}, \bar{F}, t), \quad (5.2)$$

де  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор координат,  $\bar{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  – вектор керуючої дії,  $\bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  – вектор збурення, та при заданих обмеженнях на координати і керування у вигляді нерівностей

$$\begin{aligned}x_i &\leq x_{i\max} \\ u_i &\leq u_{i\max}\end{aligned}\tag{5.3}$$

необхідно знайти таке  $\bar{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  керування, яке забезпечить мінімальне значення критерію оптимальності у вигляді функціоналу

$$Q = \int_0^{t_n} G(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n, f_1, f_2, \dots, f_n, t) dt = \min\tag{5.4}$$

В системах оптимальних за швидкістю  $G = 1$ , при цьому критерієм оптимальності є час перехідного процесу

$$Q = \int_0^{t_n} dt = t_n = \min\tag{5.6}$$

Для мінімізації функціоналів при накладенні обмежень на координати і керування використовують методи варіаційного числення, динамічного програмування Беллмана і принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.

Для знаходження алгоритму керування оптимального за швидкістю використовують принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.

Розглянемо суть цього методу для випадку керування системою другого порядку, коли фазовий простір системи зводиться до фазової площини. На рис. 5.1 показано початкове положення зображуючої точки  $M$  на фазовій площині. Задача оптимального керування полягає у тому, щоб перевести зображуючу точку із початкового стану в положення початку координат за мінімально можливий при заданих обмеженнях час.

Нанесемо на фазову площину ізохрони – лінії однакового часу переходу  $t_n$  системи в задану точку у процесі оптимального керування. Ізохрони є геометричним місцем точок із однаковим часом переходу зображуючої точки в кінцевий стан в процесі оптимального керування.

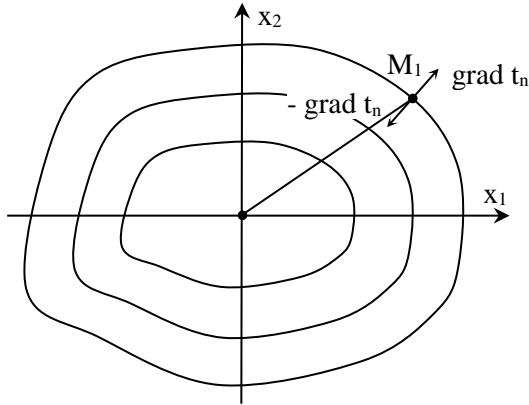


Рис. 5.1. Графічне представлення принципу максимуму Л. С. Понтрягіна

Напрямок найбільшої швидкості зростання часу переходу системи в кінцеву точку визначається градієнтом

$$\text{grad}t_n = \left( \frac{dt}{dx_1}, \frac{dt}{dx_2} \right) \quad (5.7)$$

Введемо функцію оберненого вектора градієнта часу переходу в кінцеву точку

$$\bar{\psi} = -\text{grad}t_n, \quad (5.8)$$

тоді вектор швидкості руху зображуючої точки на фазовій площині

$$\bar{V} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right) = (v_1, v_2) \quad (5.9)$$

За цих умов принцип оптимальності Л. С. Понтрягіна можна сформулювати так: керування буде оптимальним за швидкодією, якщо скалярний добуток вектора швидкості на обернений вектор градієнта часу переходу в кінцеву точку досягає максимуму на всій траєкторії руху системи, що можна записати так:

$$H = \sum_1^n \psi_i V_i = \max \quad (5.10)$$

Практична цінність методу Понтрягіна полягає у тому, що для знаходження оптимального керування не потрібно будувати ізохрони, а можна використати спряжені рівняння

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (5.11)$$

Для лінійних об'єктів керування за принципом максимуму дає необхідну і достатню умову оптимальності. Рівняння для фазової швидкості зображуючої точки лінійної керованої системи є лінійною комбінацією координат і керуючої дії

$$\bar{V} = \bar{\Phi}(\bar{X}) + \bar{B}\bar{U} \quad (5.12)$$

В цьому випадку Гамільтоніан лінійної керованої системи складається із двох доданків

$$H = \bar{\Psi}\bar{V} = \bar{\Psi}\bar{\Phi}(\bar{X}) + \bar{B}\bar{U}\bar{\Psi} \quad (5.13)$$

З рівняння (5.13) видно, що від керування залежить лише другий доданок функції Гамільтона. Цей доданок, а отже і функція  $H$ , досягають максимуму, коли керування приймає максимальне (граничне) значення та змінює знак у відповідності до зміни знаку допоміжної функції  $\psi$

$$\bar{U} = U_{\max} \text{sign}(\bar{B}\bar{\Psi}) \quad (5.14)$$

Аналіз рівняння (5.14) показує, що у загальному випадку лінійного об'єкта керування  $n$ -порядку оптимальне за швидкістю складається з  $n$  інтервалів, і на кожному керування приймає граничне значення та змінює знак. Це означає, що оптимальний регулятор може мати релейну характеристику і повинен включати до складу обчислювач моментів перемикання рис. 5.2.

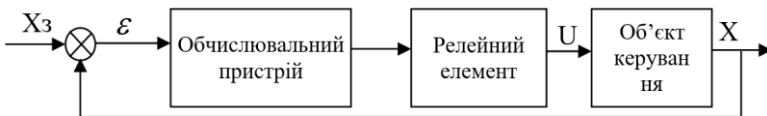


Рис. 5.2. Функціональна схема системи оптимальної за швидкістю

Як приклад розглянемо синтез оптимального керування лінійним об'єктом із передаточною функцією

$$W_o(s) = \frac{1}{s^2} \quad (5.15)$$

Подібна задача виникає тоді, коли необхідно за мінімально можливий час перемістити матеріальне тіло із однієї точки в іншу під дією керуючої сили  $u$  так, щоб швидкість тіла у кінцевій точці була рівна нулю.

Структурна схема системи оптимальної за швидкодією наведена на рис. 5.3. Оптимальний регулятор має релейну характеристику з  $U_{\max}(\varepsilon) = \pm 1$

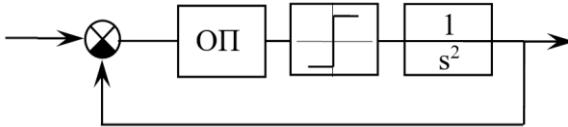


Рис. 5.3. Структурна схема системи оптимальної за швидкодією

Запишемо диференціальне рівняння системи в операторній формі

$$s^2 X = \pm u \quad (5.16)$$

Приведемо рівняння (5.16) до нормальної форми Коші

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \pm u \end{cases} \quad (5.17)$$

Функція Гамільтона для даної системи

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u \quad (5.18)$$

На основі спряжених рівнянь Гамільтона для допоміжних функцій  $\psi$  отримуємо

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 \end{cases} \quad (5.19)$$



Із системи рівнянь (5.19) знаходимо вирази для функцій  $\psi$

$$\psi_1 = c_1; \quad \psi_2 = -c_1 t + c_2.$$

де  $c_1$  і  $c_2$  - сталі інтегрування.

У силу принципу максимуму отримуємо вираз для оптимального закону керування в формі

$$u(t) = \text{sign} \psi_2 = \text{sign}(-c_1 t + c_2) \quad (5.20)$$

Звідси слідує, що кожне оптимальне керування є кусково-лінійною функцією, яке приймає значення  $\pm 1$  та має два інтервали постійності, так як у процесі керування функція  $\psi_2 = -c_1 t + c_2$  лише один раз може змінити знак.

Для знаходження оптимальних траєкторій і лінії перемикання в системі рівнянь (5.17) виключаємо час і розділяємо змінні:

$$dx_1 = \frac{x_2}{\pm U} dx_2$$

Після інтегрування отримуємо

$$x_1 = \pm \frac{x_2^2}{2U} + c \quad (5.21)$$

Отже фазовий портрет системи складається із сімейства парабол. В залежності від початкового положення точки на фазовій траєкторії керування  $u(t)$  спочатку, протягом деякого часу, дорівнює  $+1$ , а потім приймає значення  $-1$ . Оптимальна траєкторія складається із двох відрізків парабол, що примикають одна до другої, причому друга частина повинна проходити через початок координат рис. 5.4.

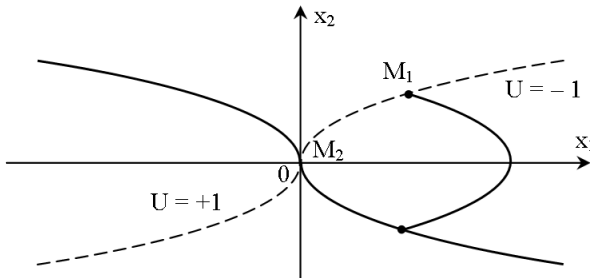


Рис. 5.4. Фазова траєкторія керування оптимального за швидкодією

Рівняння лінії перемикання

$$x_1 + \left( \operatorname{sign} x_2 \frac{x_2^2}{2U} \right) = 0 \quad (5.22)$$

За цих умов оптимальне за швидкодією керування складається із двох інтервалів, на яких керування змінює знак згідно з рівнянням

$$u = -U_{\max} \operatorname{sign} \left( x_1 + \left( \operatorname{sign} x_2 \frac{x_2^2}{2U} \right) \right) \quad (5.23)$$

Враховуючи, що для релейного регулятора

$$u = \operatorname{sign} \varepsilon \quad (5.24)$$

приходимо до остаточного виразу для оптимального керування

$$u = -U_{\max} \operatorname{sign} \left( \varepsilon + \dot{\varepsilon} \frac{|\dot{\varepsilon}|}{2U} \right) \quad (5.25)$$

У випадку, коли передаточна функція об'єкта керування має вигляд

$$W(s) = \frac{K_0}{(T_{01}s + 1)s}$$

оптимальний за швидкодією закон керування має вигляд

$$u = -U_{\max} \operatorname{sign} \left( \varepsilon + T_{01} \dot{\varepsilon} - K_0^2 T_{01} (\operatorname{sign} \dot{\varepsilon}) \ln \left( 1 + \frac{|\dot{\varepsilon}|}{K_0 T_{01}} \right) \right) \quad (5.26)$$

### 5.3 Програма роботи

1. Змоделювати перехідний процес в системі оптимальній за швидкодією у програмному середовищі MatLab.
2. Проаналізувати отримані результати.

### 5.4 Порядок виконання роботи

1. Завантажити комп'ютерну програму Matlab та запустити її головне розширення Simulink. У робочому вікні програми скласти схему моделювання перехідних процесів системи у відповідності з рис. 5.5. Провести моделювання та зберегти результати.

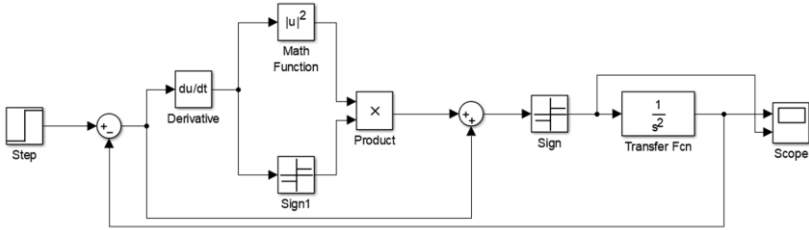


Рис.5.5. Схема моделювання процесів в системі, оптимальній за швидкодією

2. Зробити висновок про час регулювання та характер перехідного процесу при оптимальному керуванні.

3. Провести моделювання для вихідних даних. Для системи із завданням  $y_0(t) = g_1 t + g_2$  – варіанти для значень  $g_1$  і  $g_2$  :

- |                           |                           |                         |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 1. $g_1 = 0, g_2 = +10$   | 4. $g_1 = +10, g_2 = +10$ | 7. $g_1 = +5, g_2 = -5$ |
| 2. $g_1 = 0, g_2 = -10$   | 5. $g_1 = -10, g_2 = -10$ | 8. $g_1 = +5, g_2 = +5$ |
| 3. $g_1 = +10, g_2 = -10$ | 6. $g_1 = -10, g_2 = +10$ | 9. $g_1 = -5, g_2 = +5$ |

## 5.6 Контрольні запитання

1. Які системи автоматичного керування називають оптимальними?

2. Яке формулювання задачі оптимального керування?

3. Яке керування називається оптимальним за швидкодією?

4. Яке формулювання принципу максимуму Понтрягіна?

5. Яка методика синтезу керування на основі принципу максимуму для лінійних об'єктів?

6. Який вигляд має керування оптимальне за швидкодією об'єктом другого порядку?

7. Яка геометрична інтерпретація керування оптимального за швидкодією на фазовій площині?

8. Чим визначається алгоритм керування оптимального за швидкодією?

9. Як в роботі реалізоване оптимальне керування?

10. Що можна стверджувати про величину перерегулювання в оптимальному процесі?

## Лабораторна робота 6. Синтез оптимального управління з повним зворотним зв'язком

### 6.1 Мета роботи

Ознайомлення з методикою побудови лінійних оптимальних систем управління з повним зворотним зв'язком методом динамічного програмування Беллмана.

### 6.2 Теоретичні відомості

Нехай поведінка моделі об'єкта управління описується звичайним диференціальним рівнянням

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (6.1)$$

де  $x$  - вектор стану системи,  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  -  $n$ -вимірний евклідовий простір;  $u$  - вектор керування,  $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U$  - деяке задане з безлічі допустимих значень управління,  $t \in T = [t_0, t_1]$  - інтервал часу функціонування системи, моменти початку процесу  $t_0$  та закінчення процесу  $t_1$  задані,  $f(t, x, u): T \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Заданий функціонал якості управління

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_1)) \quad (6.2)$$

де  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  - задані безперервно диференційовані функції. Передбачається, що при керуванні використовується інформація про поточний час та вектор стану  $x$ .

Керування, що застосовується в кожний момент часу  $t \in T$ , має вигляд управління з повним зв'язком по всіх змінних вектора стану, рис. 6.1.

Потрібно знайти таку функцію  $u^*(t, x) \in U_n$ , що забезпечує

$$J = \min_{u \in U} J, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (6.3)$$

Функція  $u^*(t, x) \in U_n$  називається оптимальним керуванням з повним зворотним зв'язком. Для будь-якого початкового стану  $x_0$  із безлічі  $\mathbb{R}^n$  вона породжує відповідну

оптимальну пару, тобто оптимальну траєкторію  $x^*(t)$  та оптимальне програмне управління  $u^*(t)$

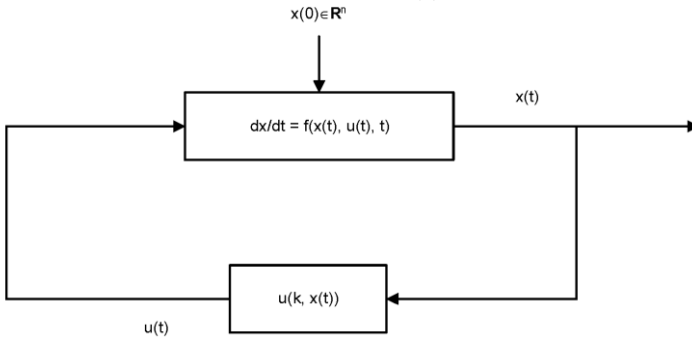


Рис.6.1. Схема керування з повним зворотним зв'язком по вектору стану

Достатньою умовою мінімуму функціоналу (6.2) є рівняння Беллмана для безперервних детермінованих систем.

Якщо існують функція  $\phi(t, x) \in C^{1,1}$ , яка задовольняє рівнянню Беллмана із граничною умовою:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0, \quad \forall (t, x), \quad (6.4)$$

$$\phi(t_1, x) = -F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

і керування  $u^*(t, x) \in U_n$ , що задовольняє умові

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\},$$

то  $u^*(t, x)$  є оптимальним керуванням з повним зворотним зв'язком. При цьому мінімальне значення функціонала (6.2)

$$\min_u J = -\phi(t_0, x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (6.5)$$

Нехай система, що описує поведінку моделі об'єкта управління, має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Нехай функціонал якості керування квадратичний

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)\Lambda x(t_1) \quad (6.7)$$

де  $S(t)\Lambda$  - невід'ємно визначені симетричні матриці розміру  $(n \times n)$ , а  $Q(t)$  - додатно визначена симетрична матриця  $(q \times q)$

Використовуємо відомі правила і позначення

$$\begin{aligned} 1. \frac{\partial(Ax)}{\partial x} &= A^T & 2. \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} &= Ax + A^T x & 3. (AB)^T &= B^T A^T \\ 4. x^T Ax \equiv 0 &\Leftrightarrow A + A^T = 0 & 5. \text{tr}A &= \sum_i a_{ii} \end{aligned}$$

Рівняння Беллмана для даної задачі має вигляд

$$\max_{u \in K^q} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right)^T [A(t)x + B(t)u] - \frac{1}{2} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] \right\} = 0$$

$$\varphi(t, x) = -\frac{1}{2} x^T \Lambda x \quad (6.8)$$

Звідси

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right)^T B(t)u - \frac{1}{2} u^T(t)Q(t)u(t) \right\}$$

Знайдемо максимум в останньому виразі по керуванню з використанням необхідних умов екстремуму та правила 1-3. Диференціюючи вираз у квадратних дужках по  $u$  та прирівнюючи результат до нуля, отримуємо структуру оптимального управління:

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \quad (6.9)$$

Рішення рівняння (6.8) шукається у вигляді

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} x^T K_2 x, \quad (6.10)$$

де  $K_2(t)$  невідома симетрична матриця  $(n \times n)$ .

Підставляючи (6.10) у рівняння (6.8), прирівнюючи нулю квадратичні форми, отримуємо:

$$\begin{aligned} \dot{K}_2(t) &= -A^T(t)K_2(t) - K_2(t)A(t) - K_2(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t) + S(t), \\ K_2(t_1) &= -\Lambda \end{aligned} \quad (6.11)$$

Розв'язуючи рівняння Рікатті (6.11), можна одержати явний вид оптимального керування (6.9) з повним зворотним зв'язком

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t)x \quad (6.12)$$

Мінімальна величина функціонала обчислюється за формулою

$$\min J = -\varphi(t_0, x_0) = -\frac{1}{2}x_0^T K_2(t_0)x_0$$

Розглянемо дискретний випадок

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

з початковою умовою

$$x(0) = x_0 \quad (6.14)$$

і функціоналом якості

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) + (x^T(N)\Lambda x(N)) \quad (6.15)$$

де  $Q(k)$ ,  $\Lambda$  невід'ємно визначені симетричні матриці розміру  $(n \times n)$ ,  $R(k)$  – позитивно визначена симетрична матриця  $(q \times q)$ . Потрібно знайти керування  $u^*(k, x)$  з повним зворотним зв'язком, що мінімізує функціонал.

Рівняння Беллмана набувають вигляду

$$B(k, x) = \min_u \left[ x^T Q(k)x + u^T R(k)u + B(k+1, A(k)x + B(k)u) \right] \quad (6.16)$$

Функція Беллмана  $B(k, x)$  шукається у формі

$$B(k, x) = x^T P(k)x, \quad (6.17)$$

де  $P(k)$  – невідома невід'ємно визначена симетрична матриця розміру  $(n \times n)$ .

Підставляючи (6.17) у (6.16) отримуємо, що в задачі (6.13)–(6.15) оптимальне управління визначається співвідношенням

$$u^*(k, x) = -K(k) = \overline{0, N-1}, \quad (6.18)$$

де  $K(k)$  - матриця коефіцієнтів підсилення регулятора розміру  $(q \times n)$ .

$$K(k) = [R(k) + B^T P(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k) P(k+1)A(k), \quad k = \overline{0, N-1} \quad (6.19)$$

а матриця  $P(k)$  розміру  $(n \times n)$  задовольняє рівнянню

$$P(k) = Q(k) + K^T(k)R(k)K(k) + [A(k) - B(k)K(k)]^T P(k+1)[A(k) - B(k)K(k)],$$

$$k = \overline{N-1, 0}$$

$$P(N) = \Lambda, \quad (6.20)$$

Мінімальна величина функціоналу визначається за формулою

$$\min J = x_0^T P(0) x_0, \quad (6.21)$$

Структурна схема регулятора системи управління з зворотним зв'язком за всіма змінними стану зображена на рис. 6.2

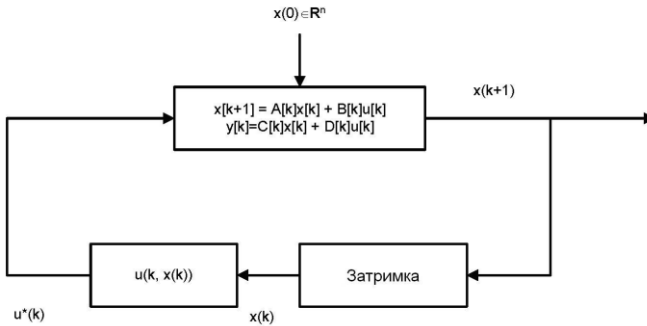


Рис. 6.2 Схема регулювання

Для кожного початкового стану  $x_0$  оптимальний лінійний регулятор створює оптимальне програмне управління  $u^*(x, k)$  і оптимальну траєкторію  $x^*(k)$ .



### 6.3 Порядок виконання роботи

1. В роботі представлена математична модель системи, що описує поведінку об'єкта керування

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\k &= 0, 1, \dots, N-1\end{aligned}$$

початкова умова  $x(0) = x_0$

заданий функціонал якості керування

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)$$

Знайти керування  $u^*(k, x)$  з повним зворотним зв'язком, що мінімізує функціонал.

Для синтезу оптимальних регуляторів лінійних стаціонарних систем в Control System Toolbox є функції розв'язків рівнянь Беллмана (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Синтаксис	Опис
[K P e] = lqr(A, B, Q, S)	Синтез неперервного регулятора
[K P e] = lqr(A, B, Q, S, N)	Синтез неперервного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R, N)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, Ts)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, N, Ts)	Синтез дискретного регулятора

Функція `lqr` обчислює матрицю коефіцієнтів регулювання  $K$  із середньоквадратичним функціоналом якості без термінального члена

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T S u + 2x^T N u] dt,$$

при цьому обчислюються матриця  $P$ , що є розв'язком рівняння Ріккати та власні значення  $e$  матриці  $(A - BK)$ .

Функція `dlqr` обчислює матрицю коефіцієнтів регулювання за всіма змінними стану  $K$  для дискретної системи з середньоквадратичним функціоналом якості без термінального члена:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + x^T(k)Nu(k))$$

при цьому обчислюються матриця  $P$ , що є розв'язком рівняння Ріккати та власні значення  $e$  матриці  $(A - BK)$ .

Функція `lqrd` призначена для синтезу оптимального дискретного регулятора неперервної системи із середньоквадратичним функціоналом якості:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Qx + u^T S u + 2x^T N u] dt$$

В якості параметра  $u$  функцію передається крок дискретизації  $T_s$ , повертаються значення матриці  $K$  дискретного керування, матриця  $P$ , що є розв'язком рівняння Ріккати та власні значення  $e$  матриці системи управління, отриманий в результаті дискретизації.

При використанні всіх команд синтезу оптимального лінійного регулятора за всіма змінними стану на вихідні дані накладаються такі обмеження:

- система, яка описана матрицями  $(A, B)$  повинна підлягати стабілізації;

- повинні виконуватися нерівності  $S > 0, Q - NR^{-1}N^T > 0$ ,

- пара матриць  $(Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}B^T)$  не повинна мати

спостережувані моди з власними значеннями на дійсній осі.

2. Завантажити комп'ютерну програму Matlab

3. Створити `ss`-об'єкт, відповідно до варіанту

4. Визначити матриці  $P(k)$ ,  $K(k)$

5. Побудувати оптимальний регулятор  $u^*(k, x) = -K(k)x$

6. Визначити значення функціонала при оптимальному

керуванні

## 7. Побудувати графіки динаміки системи при ненульових початкових умовах

### Приклад:

```
% Параметри системи
A=[1 0; -2 1];
B=[1 0; 1 0]';

% Параметри критерія якості керування
Q=[1/2 0; 0 1/2];
R=[1/2 0; 0 1/2];

% Час регулювання
T=10;
% Крок
SS=0.5;
% Кількість кроків
N=T/SS

% Обчислення параметрів регулятора
[k p e]= dlqr(A, B, Q, R)

x = zeros(2, N);
u= zeros(2, N-1);

% Початкові умови
x(1,1)=2;
x(2,1)=1;

% Побудова графіків динаміки системи
for i=1:N-1,
    u(:, i)= - k*x(:, i);,
    x(:, i+1)=A*x(:, i)+B*u(:, i);
end

x1= x(1,:);
x2= x(2,:);
t = 0:SS:T-SS;
subplot(4, 1, 1);
plot(t, x1, 'b');
subplot(4, 1, 2);
plot(t, x2, 'g');
```

```
subplot(4, 1, 3);  
plot(SS:SS:T-SS, u(1, :), 'y');
```

```
subplot(4, 1, 4);  
plot(SS:SS:T-SS, u(2, :), 'r');
```

Значення параметрів оптимального регулятора:

k =

0.8229 -0.1771

0.8229 -0.1771

p =

3.7343 -1.4114

-1.4114 1.1614

e =

0.1771 + 0.1771i

0.1771 - 0.1771i

#### **6.4 Контрольні запитання**

1. Сформулювати основне завдання оптимального керування.

2. Дати визначення критерію якості, привести приклади критеріїв.

3. Вивести необхідну умову оптимальності.

4. Показати, що для застосування методу необхідно, щоб систему можна було стабілізувати.

5. З'ясувати вплив затримки при синтезі дискретного регулятора неперервної системи.

Варіанти:

Модель системи	Функціонал якості керування
1. $x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_1(k) - u_1(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) - 2u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 3x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 2u_2^2(k) + 3x_2^1(k) + 7x_2^1(k)$
2. $x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) - u(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 2u(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 4u^2(k) + 8x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u^2(k) + 3x_2^1(k) + x_2^1(k)$
3. $x_1(k+1) = 3x_1(k) - u_1(k) + 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 3$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 8x_2^1(k) + 12x_2^1(k)$
4. $x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) - 2u_1(k) - 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 4u_1(k) - u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 7u_1^2(k) + u_2^2(k) + 5x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 9x_2^1(k) + x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 6x_2^1(k) + 8x_2^1(k)$

## **Лабораторна робота 7. Дослідження системи з вбудованою моделлю**

### **7.1 Мета роботи**

Вивчити питання доцільності застосування систем автоматичного регулювання з випереджувачем Сміта для об'єктів зі значним запізненням, проаналізувати вплив параметрів об'єкта на якість регулювання та визначити час запізнення шляхом застосування адаптивної системи автоматичного регулювання

### **7.2 Теоретичні відомості**

У практиці автоматизації технологічних процесів в енергетиці, металургії, хімії, промисловому комплексі та ряді інших галузей часто доводиться вирішувати завдання управління об'єктами зі значним транспортним запізненням. Часові затримки (тобто запізнення) призводять до того, що інформація про перебіг процесу надходить до регулятора пізніше, ніж це потрібно, що може призвести до втрати стійкості замкнутої системи регулювання. Складність управління об'єктами з часовими затримками характеризується відношенням величини запізнення до сталої часу об'єкта.

Підвищити якість керування таким об'єктом можна двома способами: зменшити запізнення в об'єкті шляхом зміни конструкції об'єкта або застосувати більш складні структури систем управління, що дозволяють зменшити негативний вплив запізнення. До таких структур відносяться системи автоматичного регулювання (САР) з випереджувачем Сміта. Його рекомендується застосовувати при відношенні

$$\frac{\tau}{\tau + T} = (0, 2 \dots 0, 5), \quad (7.1)$$

де  $\tau$  – час запізнення об'єкта,  $T$  – стала часу об'єкта.

Однак, для управління об'єктами із запізненням найчастіше застосовують традиційні ПД-регулятори, що не завжди забезпечує задану якість регулювання.

Випереджувач (предиктор) Сміта містить додатковий контур зворотного зв'язку з блоком моделювання, в якому

міститься модель об'єкта із запізненням, а також модель об'єкта без запізнення (рис. 7.1).

Регулюючий вплив в САР з випереджувачем Сміта розраховують за формулою

$$U = K \cdot \varepsilon(t) + \frac{K}{T_i} \int \varepsilon(t) dt - \frac{1}{T_i} \int (u(t) - u(t - \tau)) dt, \quad (7.2)$$

де  $K$  – коефіцієнт підсилення;  $T_i$  – стала часу інтегрування;  $\varepsilon(t)$  – розузгодження;  $\tau$  – запізнення.

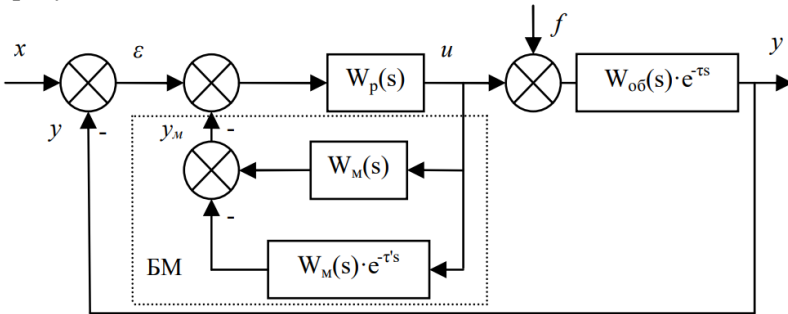


Рис. 7.1. Структура САР з випереджувачем Сміта:

$x$  – завдання;  $\varepsilon$  – розузгодження;  $u$  – регулюючий вплив;  $f$  – збурення;  
 $y$  – значення регульованої величини;  $W_p(s)$  – передаточна функція регулятора;  
 $W_{об}(s) \cdot e^{-\tau s}$  – передаточна функція об'єкта регулювання;  $W_m(s)$  – передаточна функція моделі об'єкт

Таким чином, на виході з блоку моделювання отримуємо сигнал такий самий, який згодом з'явиться на виході з системи, і подаємо його на вхід регулятора доки не з'явиться сигнал від головного зворотного зв'язку.

САР з випереджувачем Сміта не набули значного поширення, оскільки їхня реалізація є дещо складнішою, ніж САР з ПІД-регулятором, та потребує точної ідентифікації об'єкта регулювання. Найвища якість регулювання досягається при тотожній рівності передаточних функцій моделі (що міститься у предикторі Сміта) і реального об'єкта регулювання

$$W_m(s) e^{-\tau s} = W_{об}(s) e^{-\tau s}, \quad (7.3)$$

З метою виявлення переваг і недоліків традиційного ПІД-регулятора у порівнянні з ПІ-регулятором з випереджувачем

Сміта для САР об'єкта із запізненням проводиться моделювання в Simulink середовища Matlab. Структурні схеми досліджуваних САР наведені на рис. 7.3, 7.4. Для дослідження САР з випереджувачем Сміта обрали ПІ-регулятор, оскільки він простіший у налаштуванні, ніж ПІД-регулятор, та забезпечує високу точність регулювання, а предиктор Сміта – компенсацію запізнення.

Слід зауважити, що якість регулювання в САР з випереджувачем Сміта суттєво залежить від точності ідентифікації моделі об'єкта.

Зміна реального часу запізнення об'єкта, порівняно з тим, що закладений у моделі випереджувача Сміта призводить до суттєвого погіршення якості регулювання, виникнення коливань та може призвести до втрати стійкості системи. Тому необхідно застосовувати адаптивні САР (рис. 7.2), що містять блок адаптації (БА) для автоматичного визначення часу запізнення та вносять відповідну корекцію в модель об'єкта регулювання.

Алгоритми роботи блока адаптації можуть мати різну складність, але їх практична реалізація не становить особливих труднощів з урахуванням обчислювальних потужностей сучасних мікропроцесорних засобів автоматизації.

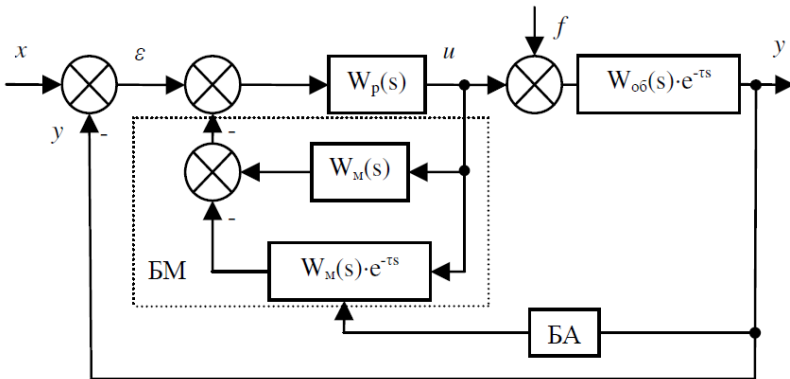


Рис. 7.2. Структура адаптивної САР з випереджувачем Сміта



### 7.3 Порядок виконання роботи

1. Для проведення досліджень використати модель об'єкта з передаточною функцією

$$W(s) = \frac{0,5}{350s + 1} e^{-300s}, \text{ тоді } \frac{\tau}{\tau + T} = \frac{300}{300 + 350} = 0,46$$

2. Скласти модель досліджуваної САР з ПІ-регулятором та випереджувачем Сміта в Simulink (рис. 7.3)

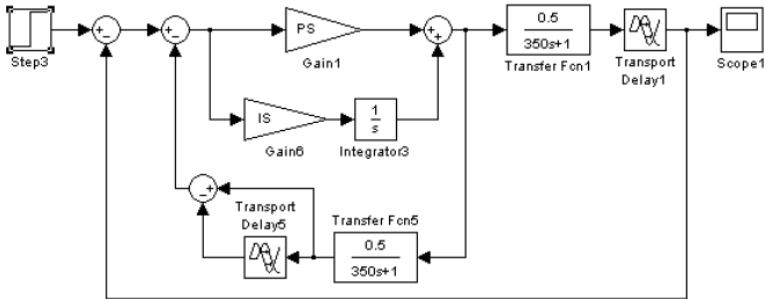


Рис. 7.3. Структурна схема досліджуваної САР з ПІ-регулятором та випереджувачем Сміта в Simulink

2.1 Підібрати оптимальні налаштування регулятора.

2.2 Визначити прями показники якості системи автоматичного регулювання.

3. Скласти модель досліджуваної САР з ПІД-регулятором в Simulink (рис. 7.4).

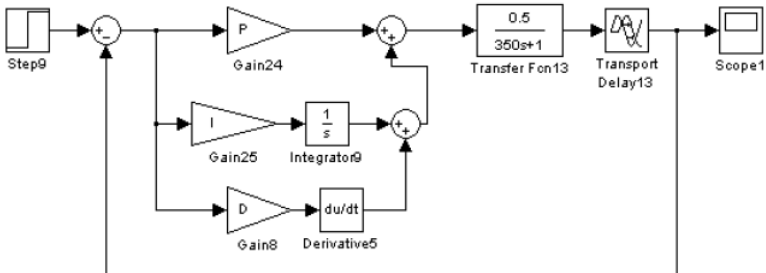


Рис. 7.4 Структурна схема досліджуваної САР з ПІД-регулятором в Simulink

3.1 Підібрати оптимальні налаштування регулятора

3.2 Визначити прями показники якості системи автоматичного регулювання.

4. Порівняти показники якості САР з ПІД-регулятором та з ПІ-регулятором і випереджувачем Сміта, у вигляді табл. 7.1

Таблиця 7.1

Показники якості САР

Показники якості Модель об'єкта	ПІД-регулятор		Випереджувач Сміта	
	$t_p, c$	$\sigma, \%$	$t_p, c$	$\sigma, \%$
Початкова модель об'єкта				
Модель об'єкта з $T = 1,15T_0$				
Модель об'єкта з $K = 1,15K_0$				
Модель об'єкта зі збуренням				

#### 7.4 Контрольні запитання

1. Особливості керування об'єктами зі значним запізненням.

2. Як підвищити якість керування об'єктами?

3. Предиктор Сміта та його модифікації.

4. За якою формулою розраховують регулюючий вплив в САР з випереджувачем Сміта?

5. Від чого залежить якість регулювання в САР з випереджувачем Сміта?

## **Лабораторна робота 8. Дослідження адаптивної системи управління**

### **8.1 Мета роботи**

Ознайомитися з методикою синтезу адаптивних систем з еталонною моделлю, дослідити динамічні характеристики адаптивної системи управління з еталонною моделлю

### **8.2 Теоретичні відомості**

Адаптивні системи управління використовують у тих випадках, коли початкової (апріорної) інформації про об'єкт недостатньо або динамічні характеристики об'єкта в процесі роботи змінюються непередбаченим чином у широких межах, а застосування звичайних систем управління не забезпечує необхідної якості управління і стійкості. Відмінною рисою адаптивних систем є організація додаткового отримання інформації про зміну динамічних властивостей в процесі її роботи і використання цієї інформації для якісного управління.

Застосування принципів адаптивного управління дозволяє:

- забезпечити оптимальний режим роботи системи управління в умовах неповної інформації;
- забезпечити функціональність системи при зміні динамічних властивостей системи в широких межах;
- створювати уніфіковані регулятори для широкого кола систем.

За способом вивчення об'єкта адаптивні системи управління поділяються на пошукові і непошукові. В пошукових адаптивних системах управління на об'єкт подаються спеціальні пробні сигнали. До пошукових адаптивних систем управління відносять широко розповсюджені екстремальні системи.

Непошукові адаптивні системи управління за способом отримання інформації для підстроювання регулятора діляться на адаптивні системи управління з еталонною моделлю і ідентифікатором.

В адаптивних системах з еталонною моделлю бажаний рух основної системи задається моделлю, що є зразком або еталоном і тому називається еталонною моделлю. Модель становить

стаціонарну динамічну ланку з відомими параметрами, на вхід якої подаються ті ж самі дії, що й на вхід об'єкта керування. Модель вибирається заздалегідь згідно з апріорною інформацією про входні дії і вимогами до якості управління. Для фізичної реалізації порядок моделі не може бути нижчим порядку вихідної системи.

Функціональна схема адаптивної системи управління з еталонною моделлю наведена на рис. 8.1. Вона складається з двох контурів. Основний контур утворюють регулятор (Р) і об'єкт (О), охоплені від'ємним зворотним зв'язком. Контур адаптації складається з еталонної моделі (ЕМ) механізму адаптації (А) і адаптивного регулятора (Р). Механізм адаптації обробляє різницю між вихідними сигналами основного контуру і моделі та здійснює цілеспрямоване підстроювання параметрів регулятора.

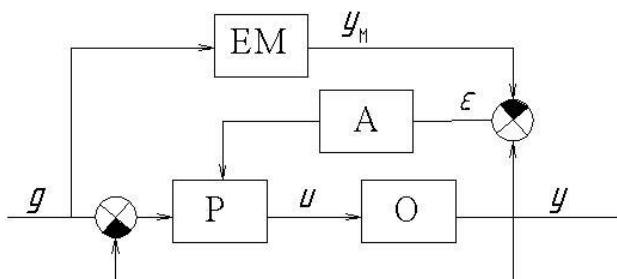


Рис. 8.1. Функціональна схема адаптивної системи управління з еталонною моделлю

Задачу синтезу адаптивної системи управління з еталонною моделлю можна сформулювати наступним чином. При заданих рівняннях об'єкта і моделі необхідно синтезувати алгоритм управління основного контуру і контуру адаптації такий при яких система абсолютно стійка, а похибка слідкування з плином часу збігається до нуля. У теорії адаптивних систем можна виділити два основні методи вирішення цієї задачі: градієнтний метод, що базується на основі теорії чутливості і прямий метод Ляпунова, що забезпечує стійкість процесів адаптації.

Розглянемо методику синтезу адаптивної системи

управління з еталонною моделлю на прикладі системи управління першого порядку (рис.8.2).

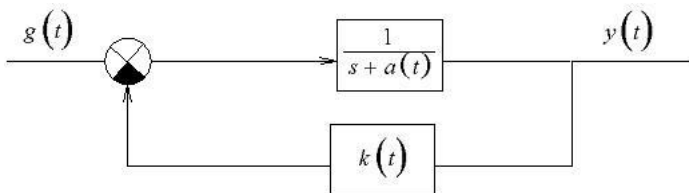


Рис. 8.2. Структурна схема адаптивної системи управління з еталонною моделлю

Нехай нестационарний об'єкт управління першого порядку має передаточну функцію

$$W_o(s) = \frac{1}{s + a(t)} \quad (8.1)$$

Змінний параметр об'єкта

$$a(t) = a_0 + \Delta a(t) \quad (8.2)$$

У цьому разі передаточна функція основного контуру замкнутої системи приймає вигляд:

$$W_s(s, a, k) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{s + a(t) + k(t)} \quad (8.3)$$

Передаточну функцію моделі візьмемо у вигляді:

$$W_m(s) = \frac{Y_m(s)}{G(s)} = \frac{1}{s + b}, \quad (8.4)$$

де  $b = a_0 + k_0$  – бажані значення параметрів моделі.

Настроювальний параметр регулятора, що підлягає зміні

$$k(t) = k_0 + \Delta k(t) \quad (8.5)$$

Рух системи описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dy(t)}{dt} + [b + \Delta a(t) + \Delta k(t)]y(t) = g(t) \quad (8.6)$$

Диференціальне рівняння руху моделі

$$\frac{dy_m(t)}{dt} + by_m(t) = g(t) \quad (8.7)$$

Розузгодження руху системи і моделі

$$\varepsilon = y - y_m \quad (8.8)$$

Віднявши (8.7) від (8.6) дістанемо диференціальне рівняння відносно розузгодження  $\varepsilon(t)$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + b\varepsilon(t) = -[\Delta a(t) + \Delta k(t)]y(t) \quad (8.9)$$

Величину

$$\gamma = \Delta a(t) + \Delta k(t) \quad (8.10)$$

можна розглядати як параметричне розузгодження рухів системи і еталонної моделі. Диференціюючи (8.10) отримуємо

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d\Delta a(t)}{dt} + \frac{d\Delta k(t)}{dt} \quad (8.11)$$

Для квазістаціонарних об'єктів за час перестроювання регулятора параметри об'єкта залишаються незмінними, тому приймаємо

$$\frac{d\Delta a(t)}{dt} = 0 \quad (8.12)$$

Введемо позначення

$$\frac{d\Delta k(t)}{dt} = \psi(t) \quad (8.13)$$

За цих умов функція  $\psi(t)$  виражає алгоритм адаптації.

Відомо, що алгоритмом адаптивного управління з еталонною моделлю, який забезпечує виконання цільової умови і глобальну стійкість системи є алгоритм

$$k(t) = k(\varepsilon)y \quad (8.14)$$

сумісно з алгоритмом адаптації

$$\psi(t) = -\lambda\varepsilon y \quad (8.15)$$

Візьмемо функцію Ляпунова у вигляді

$$V = \lambda\varepsilon^2 + \gamma^2 \quad (8.16)$$

Повна похідна функції Ляпунова

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} = 2\lambda\varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} + 2\gamma \frac{d\gamma}{dt} \quad (8.17)$$

З урахуванням (8.15)

$$\frac{dV}{dt} = -2\lambda\varepsilon^2 b \quad (8.18)$$

З (8.18) випливає, що похідна функції Ляпунова є від'ємною функцією від додатно-визначеної функції  $V$ . Отже, система є стійкою.

Таким чином, закон зміни коефіцієнта передачі в колі зворотного зв'язку основного контуру приймає вигляд:

$$k(\varepsilon) = k_0 + \Delta k(t) \quad (8.19)$$

де

$$\frac{d\Delta k(t)}{dt} = \lambda\varepsilon y \quad (8.20)$$

В результаті проведеного аналізу отримуємо структуру адаптивної системи управління з еталонною моделлю у вигляді:

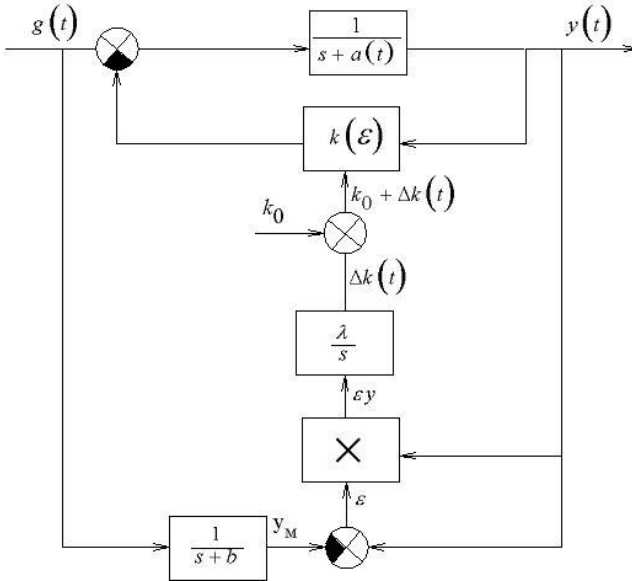


Рис. 8.3. Структура адаптивної системи управління з еталонною моделлю

Варіанти рекомендованих початкових параметрів ланок наведені в табл.8.1.

Таблиця 8.1

N п/п	Параметр	Варіант				
		1	2	3	4	5
1	$a_0$	2	1	1	2	3
2	$k_0$	2	1	2	1	3
3	$\lambda$	1	1	1	1	1

### 8.3 Програма роботи

1. Дослідити перехідні процеси в основному контурі системи при відсутності адаптації.
2. Дослідити перехідні процеси в адаптивній системі управління з еталонною моделлю.
3. Дослідити вплив параметрів на якість регулювання в адаптивній системі управління з еталонною моделлю.

### 8.4 Схема дослідження

Схема дослідження адаптивної системи управління з еталонною моделлю в середовищі MatLab наведена на рис.8.4.

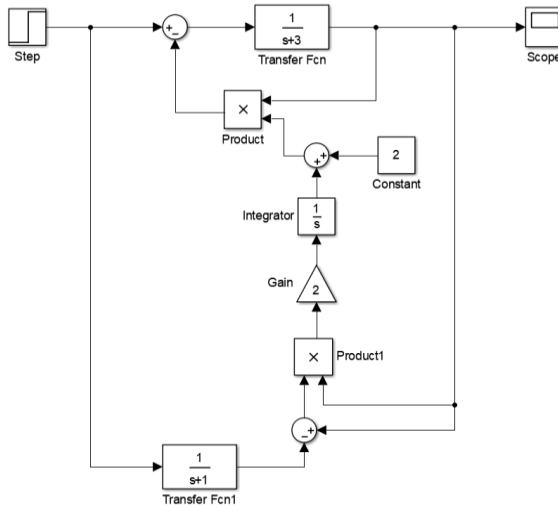


Рис. 8.4. Схема дослідження адаптивної системи управління з еталонною моделлю



## 8.5 Порядок виконання роботи

1. Завантажити комп'ютерну програму Matlab та запустити її розширення Simulink. У робочому вікні програми скласти схему моделювання перехідних процесів в системі без адаптації у відповідності з рис. 8.2 при  $a(t) = a_0$ ,  $k(t) = k_0$  та  $g(t) = 1(t)$ . Здійснити моделювання, зберегти результати та визначити прямі показники якості.

2. Скласти схему моделювання перехідних процесів в адаптивній системі управління з еталонною моделлю у відповідності з рис. 8.4. Задати параметри системи у відповідності з варіантом. Шляхом моделювання зняти перехідну характеристику системи з адаптацією. Визначити час адаптації та прямі показники якості. Порівняти якість регулювання в системах без адаптації і з адаптацією. Зробити висновки.

3. Для дослідження впливу параметрів на якість регулювання зняти ряд перехідних характеристик по чергово змінюючи параметри  $a_0$ ,  $k_0$  та  $\lambda$ . Проаналізувати вплив вказаних параметрів на характер перехідних характеристик, зробити висновки.

## 8.6 Контрольні запитання

1. Які системи автоматичного управління називають адаптивними?

2. Яка класифікація адаптивних систем управління?

3. Які принципи побудови безпошукових адаптивних систем управління існують?

4. Яка функціональна схема адаптивної системи управління з еталонною моделлю?

5. Які існують методи синтезу адаптивних систем управління з еталонною моделлю?

6. Як формулюється задача синтезу адаптивної системи управління з еталонною моделлю?

7. Які вимоги до еталонної моделі?

8. Яким чином задається бажаний рух в адаптивних

системах з еталонною моделлю?

9. Яка структура одновимірної адаптивної системи з еталонною моделлю?

10. Який вигляд має алгоритм настроювання параметрів регулятора в системах з еталонною моделлю?

## Література

1. Новицький І. В., Ус С. А. Сучасна теорія керування : навч. посіб. м-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. Дніпро : НГУ, 2017. 263 с.
2. Синтез лінійних оптимальних динамічних систем : навчальний посібник / Лозинський О. Ю. та ін. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 392 с.
3. Луцька Н. М., Ладанюк А. П. Оптимальні та робастні системи керування технологічними об'єктами : монографія. К. : Видавництво Ліра-К, 2019. 288 с.
4. Системи автоматичного керування технологічними комплексами : навчальний посібник / Сільвестров А. М. та ін. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 466 с.
6. Ладієва Л. Р. Оптимальні системи керування : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 211 с.
7. Мовчан А. П., Степанець О. В. Адаптивні та параметрично-оптимальні системи управління : навч. посіб. К. : НТУУ «КПІ», 2011. 108 с.
8. Методи сучасної теорії управління : підручник / Ладанюк А. П. та ін. Київ : Видавництво Ліра-К, 2019. 368 с.