

Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства
природокористування

Кафедра теоретичної механіки, інженерної графіки та
машинознавства

02-05-156М

Методичні вказівки

та варіанти завдань

для виконання індивідуальних графічних робіт та для
самостійної роботи з дисципліни «Інженерна графіка»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійною програмою «Гідротехнічне
будівництво, водна інженерія та водні технології»
спеціальності «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія
та водні технології» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості
ННІ енергетики, автоматики та
водного господарства
Протокол №12 від 30.08.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки та варіанти завдань для виконання індивідуальних графічних робіт та для самостійної роботи з дисципліни «Інженерна графіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» спеціальності «Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Сасюк З. К. – Рівне : НУВГП, 2024. – 42 с.

Укладач: Сасюк З. К., доцент, кандидат сільськогосподарських наук, доцент кафедри теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Відповідальний за випуск: Козяр М. М., доктор педагогічних наук, професор, завідувач теоретичної механіки, інженерної графіки та машинознавства.

Керівник ОПП

Хлапук М. М

Попередня версія МВ 02-05-140М

ЗМІСТ

1. Вступ	3
2. Точка	4
3. Пряма	10
4. Перетин площин	18
5. Способи перетворення проєкцій	23
6. Поверхні. Переріз поверхні площиною	30
7. Взаємний перетин поверхонь	37
8. Використана література	42

© З. К. Сасюк, 2024

© НУВГП, 2024

ВСТУП

Навчальний процес з дисципліни «Інженерна графіка» передбачає такі форми навчання: лекції, практичні заняття з контролем знань з усіх тем дисципліни, виконання графічних робіт, консультацій та екзамен, а також самостійну роботу студента.

Лекції. На лекціях студенти знайомляться з теоретичними основами дисципліни, методами геометричних побудов, способами вирішення геометричних задач на площині за допомогою креслярських інструментів, а також складають конспект лекцій.

Практичні заняття. На цих заняттях студенти показують викладачу виконані домашні завдання (графічні роботи, відповіді на питання) з даної теми, уточнюють і виправляють їх. З цієї теми проводиться контроль і студенти під керівництвом викладача виконують аудиторні завдання.

Графічні роботи виконують за індивідуальним варіантом згідно порядкового номеру в журналі викладача із застосуванням креслярських інструментів на аркушах креслярського паперу форматів А4 або А3.

Самостійна робота. Після лекцій проробляється теоретичний матеріал (методи проєціювання, метод Монжа, проєціювання точки, прямої, площини) за допомогою конспекту і навчальних посібників і підручників та методичних вказівок для самостійної роботи.

Тема: ТОЧКА

Мета роботи: вивчити основні властивості прямокутного проєціювання геометричних елементів (точок) на дві і три взаємоперпендикулярні площини; розв'язувати позиційні та метричні задачі.

Завдання:

Задача. Побудувати за даними у таблиці 1 координатами точок А, В, С, D їх комплексний кресленик у трьох проєкціях та наочне зображення у системі трьох площин проєкцій на аркуші креслярського паперу формату А3. Масштаб виконання 1:1. Зразок оформлення наведений на рис. 9.

Розв'язування задачі:

Побудова комплексного кресленика точок

1) Виконання комплексного кресленика точок А (20; 40; 50), В (10; 10; 20), С (55; 30; 40), D (70; 50; 0) розпочинаємо із побудови взаємоперпендикулярних координатних осей ОХ, ОУ, ОZ та сталої креслення – прямої к (рис. 1).

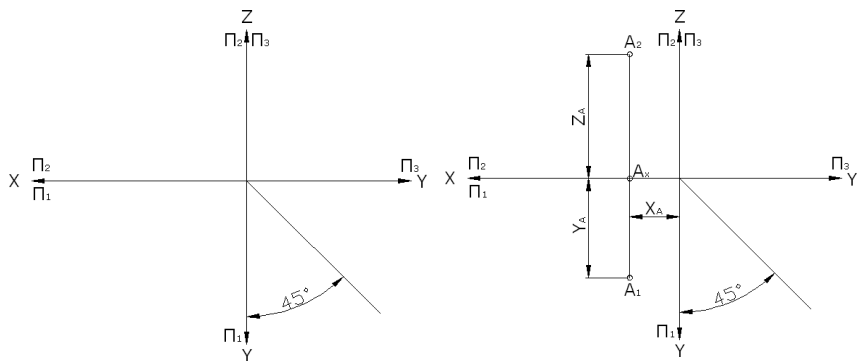


Рис. 1

Рис. 2

2) Спочатку на осі ОХ відміряємо координату $X=20$ точки А і відмічаємо точку A_x . Через т. A_x проводимо перпендикулярно

до осі OX тонку вертикальну лінію проєкційного зв'язку (рис. 2).

3) Координату $Y=40$ точки A відміряємо на лінії проєкційного зв'язку вниз від т. A_x і відмічаємо т. A_1 – горизонтальну проєкцію точки A на площині Π_1 (рис. 2).

4) Координату $Z=50$ точки A відміряємо на лінії проєкційного зв'язку вгору від т. A_x і відмічаємо т. A_2 – фронтальну проєкцію точки A на площині Π_2 (рис. 2).

5) Профільну проєкцію т. A_3 (рис. 3) отримуємо на площині Π_3 на перетині ліній проєкційного зв'язку, які проводимо: горизонтальну лінію - через т. A_2 перпендикулярно до осі OZ (на осі OZ відмічаємо точку A_z), горизонтально-вертикальну - через т. A_1 перпендикулярно до осі OY (на осі OY відмічаємо точку A_y) за допомогою сталої креслення – прямої k (рис. 4).

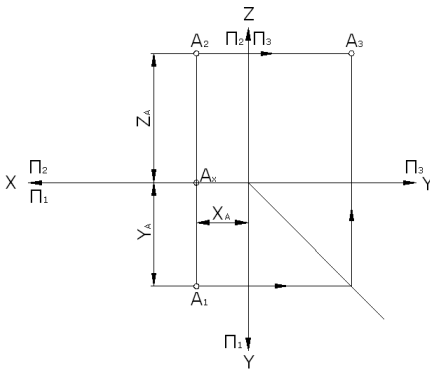


Рис. 3

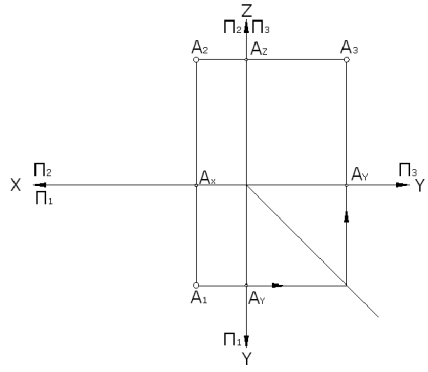


Рис. 4

б) комплексний кресленик точок B, C, D виконуємо аналогічно (рис. 5).

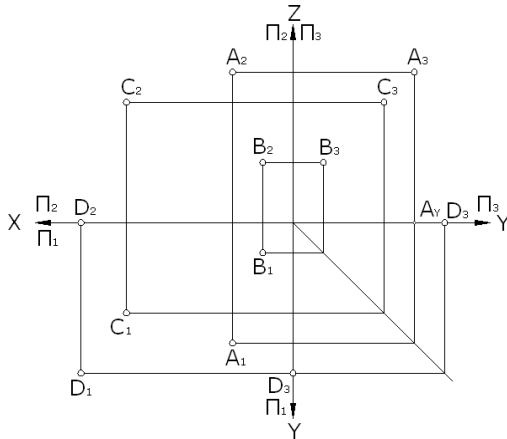


Рис. 5

Побудова наочного зображення точок в системі трьох площин проєкцій

1) Виконання наочного зображення точок у системі трьох площин Π_1, Π_2, Π_3 розпочинаємо із побудови координатних осей OX, OY, OZ . Осі OX та OZ є взаємноперпендикулярними при наочному зображенні, а вісь OY будемо під кутом 45 градусів до OX і OZ (рис. 6).

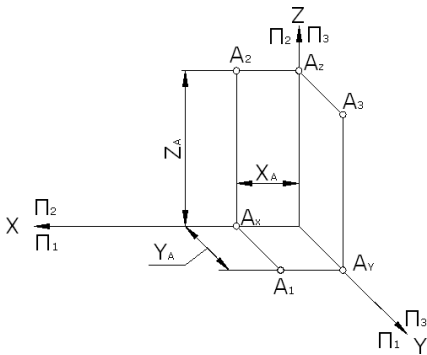


Рис. 6

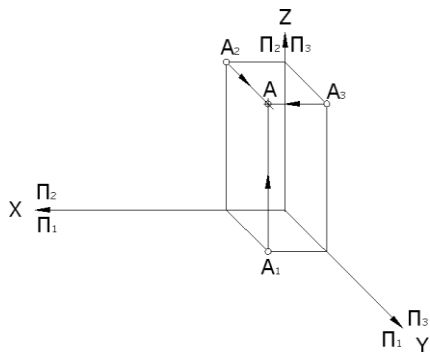


Рис. 7

2) Спочатку на осі OX відміряємо координату $X=20$ точки A і відмічаємо точку A_x . Через т. A_x проводимо паралельно до осі OY тонку лінію проєкційного зв'язку (рис. 6).

- 3) На отриманій лінії проєкційного зв'язку відміряємо координату $Y=40$ точки A і відмічаємо т. A_1 – горизонтальну проєкцію точки A на площині Π_1 . Пам'ятаємо, що вісь OY має кут 45 градусів і відстані на осі OY візуально будуть меншими у два рази. Отже, відміряти будемо 20мм замість 40мм (рис. 6).
- 4) Координату $Z=50$ точки A відміряємо на лінії проєкційного зв'язку вгору від т. A_x і відмічаємо т. A_2 – фронтальну проєкцію точки A на площині Π_2 (рис. 6).
- 5) Профільну проєкцію т. A_3 отримуємо на площині Π_3 на перетині ліній проєкційного зв'язку, які проводимо точку A_2 та точку A_y паралельно до координатних осей OX і OZ відповідно (рис. 6).
- 6) Наочне зображення точки A отримуємо на перетині проєціюючих променів, які проводимо із кожної проєкції A_1, A_2, A_3 паралельно до координатних осей OX, OY, OZ (рис. 7).
- 7) Наочне зображення точок B, C, D виконуємо аналогічно (рис. 8).

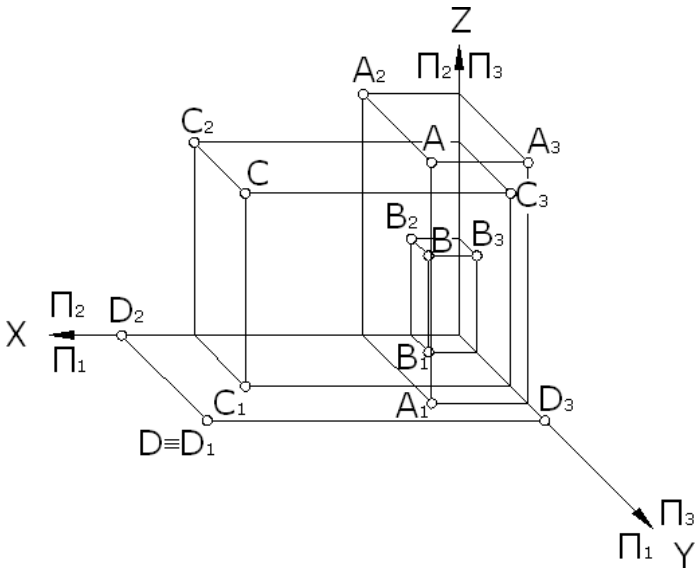
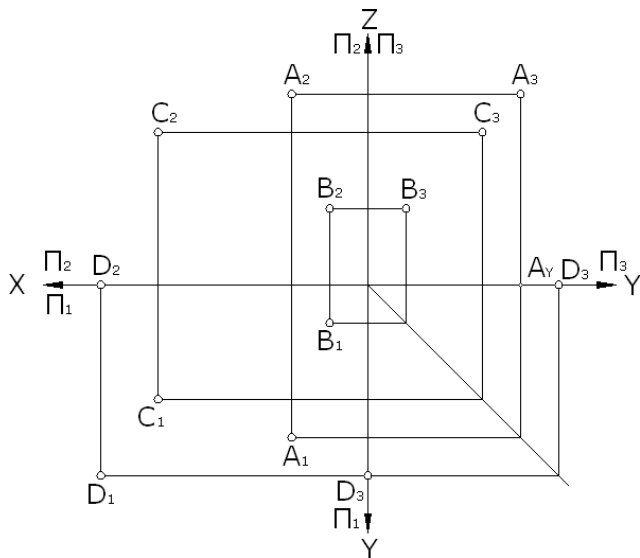
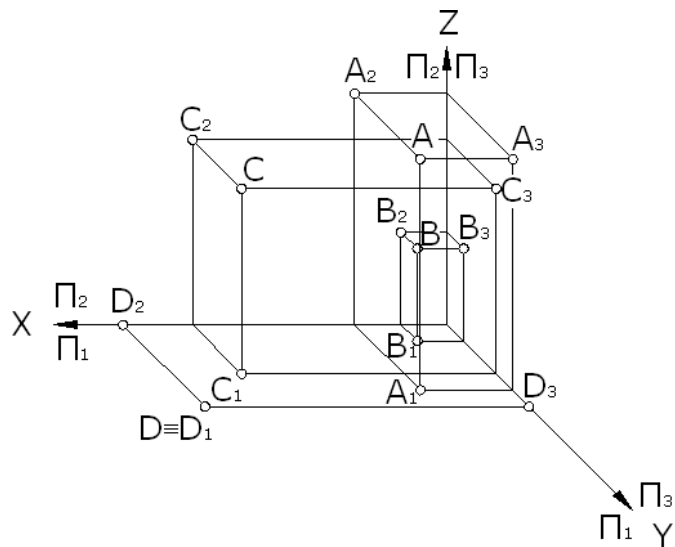


Рис. 8



а



б

Рис. 9. Комплексний кресленик у трьох проекціях (а)
точок А, В, С, D та їх начне зображення (б)

Питання для самостійної роботи за темою

«Методи проєціювання. Проєціювання точки».

1. Які ви знаєте площини проєкцій?
2. Які методи проєціювання на площину вам відомі?
3. В чому суть методу ортогонального проєціювання?
4. Як називаються проєкції точки на площинах Π_1 , Π_2 , Π_3 ?
5. Яка координата визначає віддаль від точки до фронтальної площини проєкцій?
6. Яка координата визначає віддаль від точки до горизонтальної площини проєкцій?
7. До якої площини проєкцій вказує віддаль від точки координата x ?
8. Яка віддаль від т.А (20;30;100) до горизонтальної площини проєкцій?
9. Яка віддаль від т.В (40;50;10) до площини Π_3 ?
10. Яка віддаль від т. С (25;45;11) до площини Π_2 ?
11. Скільки проєкцій необхідно для визначення положення точки в просторі?
12. Запишіть координати точки М, якщо вона віддалена від горизонтальної площини на 30мм, від фронтальної площини – на віддалі у 3 рази більшій, ніж від профільної площини. $X_M=15$ мм. $M(x;y;z)$.
13. Яка із заданих точок А, В чи С: А(20;30;100), В (40;50;10), С (25;45;11) знаходиться вище від горизонтальної площини Π_1 ?
14. Яка із заданих точок А, В чи С: А(20;30;100), В (40;50;10), С (25;45;11) знаходиться найближче до фронтальної площини Π_2 ?
15. Яка із заданих точок А, В чи С: А(20;30;100), В (40;50;10), С (25;45;11) найбільше віддалена від профільної площини Π_3 ?
16. Скільки ви знаєте квадрантів та октантів простору? Назвіть.
17. Чим будуть відрізнятися координати точок в різних октантах простору?
18. Який октант симетричний першому відносно профільної площини проєкцій?
19. Який октант симетричний першому відносно фронтальної площини проєкцій?
20. Який октант симетричний першому відносно горизонтальної площини проєкцій?

Тема: ПРЯМА

Мета роботи: навчитися будувати проекції відрізків прямих часткового та загального положення; розв'язувати позиційні та метричні задачі.

Завдання:

Задача 1. Побудувати за даними у таблиці 1 координатами точок А, В, С, D фронтальну і горизонтальну проекції піраміди DABC. Встановити видимість ребер на кожній проекції в конкуруючих точках.

Задача 2. Розділити ребро DA точкою E у відношенні 2:3;

Задача 3. Провести через точку E: *горизонталь* h до перетину з ребром АВ (або з його продовженням) та *фронталь* f до перетину з ребром АВ (або його продовженням);

Задача 4. Визначити натуральну величину одного із ребер загального положення і кут його нахилу до однієї із площин проекцій;

Задача 5. Провести через точку D пряму паралельну до ребра АВ.

Розв'язування задач:

Задача 1. За вихідними даними (табл. 1) координатами точок А, В, С, D побудуємо фронтальну і горизонтальну проекції піраміди DABC. Встановимо видимість мимобіжних ребер AC та DB за наступним алгоритмом:

1) на горизонтальній проекції піраміди $A_1B_1C_1D_1$ визначимо видимість проекцій ребер A_1C_1 та D_1B_1 (рис. 1). Для цього порівняємо відносно положення пари конкуруючих точок 1 і 2, горизонтальні проекції яких збігаються в одну точку ($1_1 \equiv 2_1$) – точку перетину горизонтальних проекцій ребер A_1C_1 та D_1B_1 . Точки 1 і 2 належать різним ребрам. В цьому ми переконаємося, коли побудуємо їх фронтальні проекції $1_2, 2_2$: 1_2 належить проекції ребра A_2C_2 ($1_2 \in A_2C_2$), а 2_2 – фронтальній проекції ребра D_2B_2 ($2_2 \in D_2B_2$). Це означає, що ребра AC та DB – мимобіжні. З двох конкуруючих точок видимою буде та, у якій друга (незбігаюча) проекція буде знаходитися далі від осі проекцій. Отже, з двох конкуруючих точок 1 і 2 видимою буде точка 1,

оскільки її фронтальна проекція 1_2 знаходиться далі від осі проєкцій, ніж фронтальна проекція 2_2 . Точка 1 належить прямій AC ($1 \in AC$), отже, горизонтальна проекція прямої A_1C_1 буде видимою (наводимо її суцільною товстою лінією), а горизонтальна проекція D_1B_1 – буде невидимою (наводимо її тонкою штриховою лінією) (рис. 1).

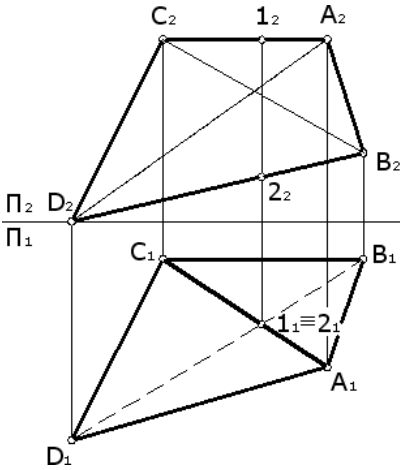


Рис. 1

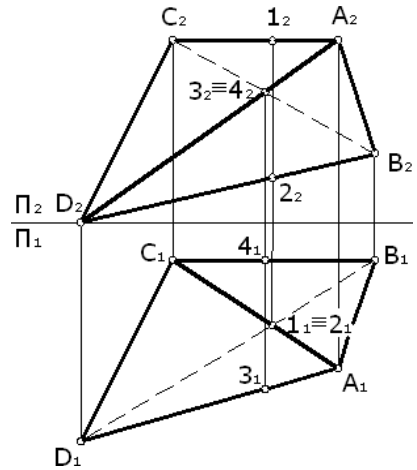


Рис. 2

2) на фронтальній проєкції піраміди $A_2B_2C_2D_2$ конкуруючими будуть точки 3 та 4 ($3_2 \equiv 4_2$) (рис.2) . Точка 3 належить ребру AD ($3 \in AD$), точка 4 - ребру BC ($4 \in BC$). Видимість зазначених точок будемо визначати по їх горизонтальних (незбігаючих) проєкціях 3_1 та 4_1 . Оскільки, горизонтальна проєкція 3_1 знаходиться далі від осі проєкцій OX , то проєкція 3_2 буде видимою, а, відповідно, і проєкція прямої A_2D_2 – буде видимою (наводимо її суцільною товстою лінією). Фронтальна проєкція B_2C_2 - буде невидимою (наводимо її тонкою штриховою лінією).

Задача 2. Потрібно розділити ребро DA точкою E у відношенні 2:3, тобто $\frac{DE}{EA} = \frac{2}{3}$.

Знаємо, що проєкції точки ділять проєкцію відрізка прямої у такому самому відношенні, в якому сама точка ділить відрізок прямої: $\frac{DE}{EA} = \frac{D_1E_1}{E_1A_1} = \frac{D_2E_2}{E_2A_2} = \frac{2}{3}$.

$$\frac{DE}{EA} = \frac{D_1E_1}{E_1A_1} = \frac{D_2E_2}{E_2A_2} = \frac{2}{3}$$

Отже, виконаємо внутрішній поділ ребра DA. Спочатку із проєкції D_1 у довільному напрямку проведемо пряму D_15_0 , довжина якої буде дорівнювати сумі рівних частин поділу відрізка, тобто $5=2+3$. З'єднаємо поділку 5_0 з A_1 (рис. 3). Через кожну поділку $4_0, 3_0, 2_0, 1_0$ проведемо прямі паралельні прямій 5_0A_1 (рис. 4) до перетину з проєкцією D_1A_1 і отримаємо горизонтальну проєкцію $E_1 \in D_1A_1$.

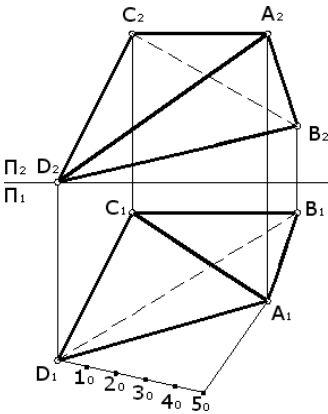


Рис. 3

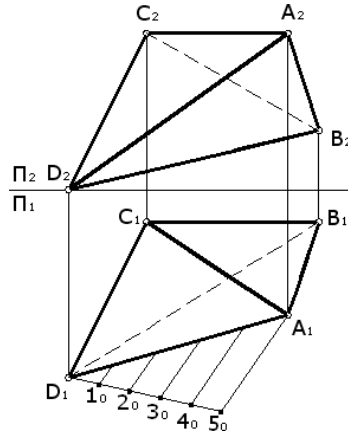


Рис. 4

Спираючись на правило, що точка належить прямій, якщо її проєкції належать однойменним проєкціям прямої, за допомогою лінії проєкційного зв'язку E_1E_2 будемо фронтальну проєкцію $E_2 \in D_2A_2$. Таким чином, ми розділили ребро DA точкою E у відношенні 2:3 (рис. 5).

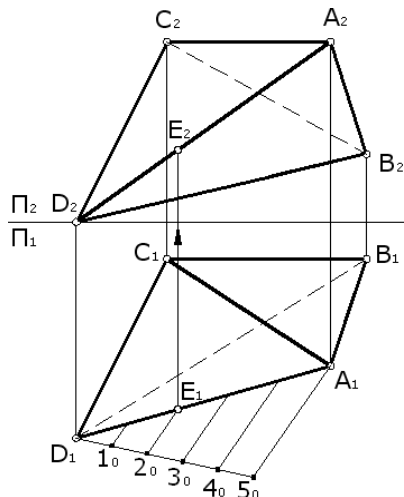


Рис. 5

Задача 3. Провести через точку E : горизонталь h до перетину з ребром AB (або з його продовженням) та фронталь f до перетину з ребром AB (або його продовженням).

1) Побудову фронталі f через точку E починаємо із її горизонтальної проекції f_1 , яку проводимо через точку E_1 паралельно осі OX ($f_1 \parallel OX$) до перетину із продовженням проекції ребра A_1B_1 . При перетині з AB отримаємо точку 5 ($5_1, 5_2$): ($f_1 \cap A_1B_1 = 5_1$, $5_2 \in A_2B_2$). Будуємо фронтальну проекцію f_2 фронталі f : $E_2 \cup 5_2 = f_2$ (рис. 6).

2) Побудову горизонталі h через точку E починаємо із її фронтальної проекції h_2 , яку проводимо через точку E_2 паралельно осі OX ($h_2 \parallel OX$) до перетину із проекцією ребра A_2B_2 . При перетині з прямою AB отримаємо точку 6 ($6_1, 6_2$): ($h_2 \cap A_2B_2 = 6_2$, $6_1 \in A_1B_1$). Будуємо горизонтальну проекцію горизонталі h_1 : $E_1 \cup 6_1 = h_1$ (рис. 7).

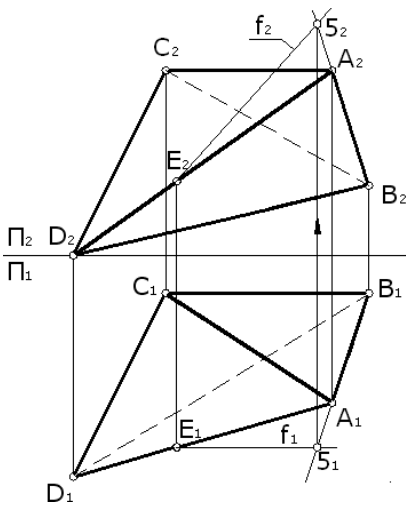


Рис. 6

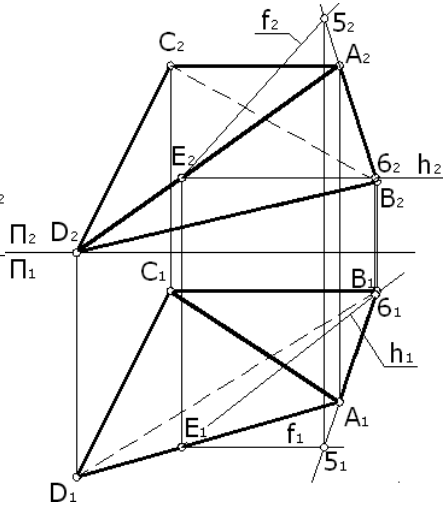


Рис. 7

Задача 4. Визначимо дійсну величину одного із ребер загального положення і кут його нахилу до однієї із площин проекцій (рис. 8).

Загальне положення займають ребра DC, DA, AB, тому що жодна із їх проекцій не паралельна і не перпендикулярна до площин проекцій. Визначимо дійсну величину ребра DC та кут β його нахилу до фронтальної площини проекцій Π_2 за правилом прямокутного трикутника. Правило: дійсна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого одним катетом є проекція на одну із площин проекцій, а другий катет дорівнює різниці відстаней кінців відрізка прямої від тієї самої площини проекцій.

1) оскільки будемо визначати кут β нахилу DC до фронтальної площини проекцій Π_2 , то побудови будемо виконувати на Π_2 . Першим катетом буде D_2C_2 . Від будь-якого одного із кінців D_2C_2 (оберемо проекцію C_2) проводимо напрям другого катета: $C_2C_0 \perp D_2C_2$.

2) Визначаємо на горизонтальній проекції D_1C_1 різницю координат Y точок D та C: $\Delta Y = \Delta Y_D - \Delta Y_C$ (ΔY – різниця відстаней

між кінцями відрізка DC і фронтальною площиною проєкцій Π_2).

3) Відкладаємо на прямій C_2C_0 від проєкції C_2 відрізок, який дорівнює ΔY ($C_2C_0 = \Delta Y$).

4) Сполучаємо точки C_0 і D_2 , отримуємо прямокутний трикутник $D_2C_2C_0$, у якому гіпотенуза D_2C_0 – дійсна величина відрізка DC загального положення: $D_2C_0 = |DC|$.

5) Кут між гіпотенузою D_2C_0 і катетом-проєкцією D_2C_2 дорівнює куту нахилу β прямої DC до фронтальної площини проєкцій Π_2 : $(D_2C_0 \wedge D_2C_2) = \beta$.

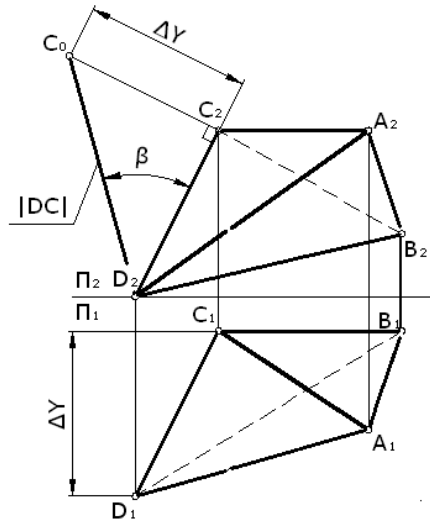


Рис. 8

Задача 5. Провести через точку D пряму паралельну до ребра АВ.

Використаємо властивість проєціювання двох паралельних прямих: проєкції паралельних прямих на будь-яку площину проєкцій, але не перпендикулярну до даних прямих, паралельні між собою або збігаються.

Отже, через точку D_1 проведемо горизонтальну проєкцію прямої t_1 паралельно A_1B_1 : $t_1 \parallel A_1B_1$, а через точку D_2 проведемо

фронтальну проекцію прямої t_2 паралельно A_2B_2 : $t_2 \parallel A_2B_2$ (рис. 9).

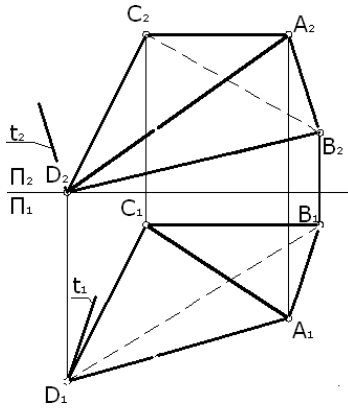


Рис. 9

Графічна робота виконується на аркуші формату А4.
Зразок виконання роботи наведений на рис. 10.

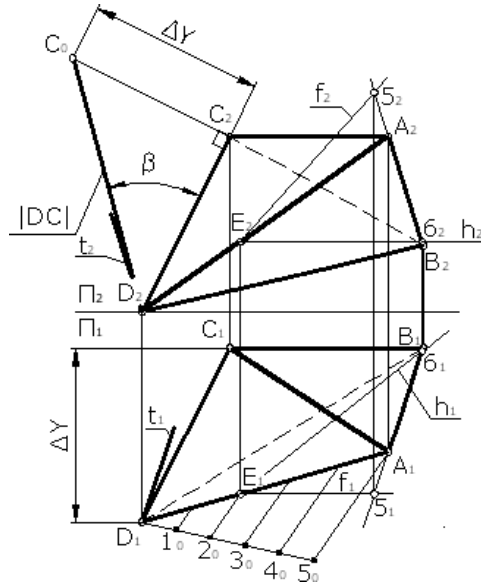
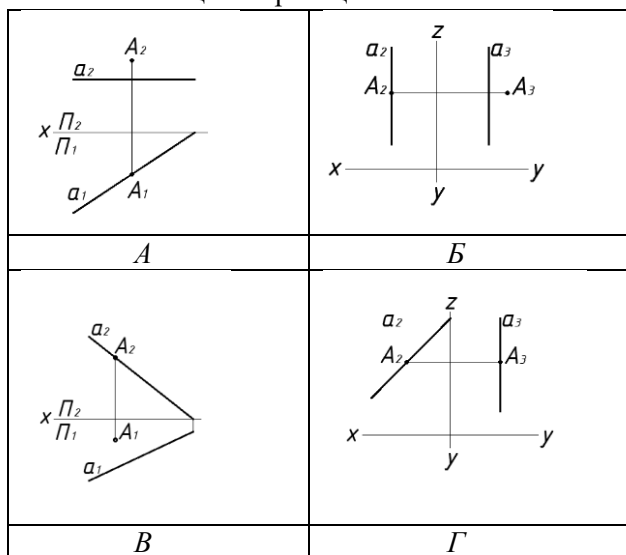


Рис. 10 Зразок виконання графічної роботи «Пряма»

Питання для самостійної роботи за темою «Проеціювання прямої. Точка на прямій. Взаємне положення двох прямих».

1. На якому рисунку А, Б, В чи Г задана фронтальна пряма?
2. На якому рисунку А, Б, В чи Г відрізок прямої проєкціюється в натуральну величину на горизонтальну площину проєкцій?
3. На якому рисунку А, Б, В чи Г задана проєкціуюча пряма?
4. На якому рисунку А, Б, В чи Г точка А належить заданій прямій?
5. На якому рисунку А, Б, В чи Г задана пряма загального положення?
6. На якому рисунку А, Б, В чи Г один кінець заданого відрізка прямої належить профільній площині проєкцій?
7. На якому рисунку А, Б, В чи Г точка А розміщена над прямою?
8. На якому рисунку А, Б, В чи Г пряма розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій?
9. На якому рисунку А, Б, В чи Г один кінець заданого відрізка прямої належить фронтальній площині проєкцій?
10. На якому рисунку А, Б, В чи Г задана пряма паралельна до горизонтальної площини проєкцій?



11. Яке взаємне положення у просторі можуть займати дві прямі?
12. Для яких прямих характерними є конкуруючі точки на кресленку?

Тема: ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

Мета роботи: закріплення знань студентів із побудови лінії перетину двох площин загального положення.

Завдання:

– побудувати за заданими (таблиця 1) координатами точок **A, B, C, D, S, K** горизонтальну та фронтальну проекції площин трикутників **ABC** і **DSK**;

– побудувати лінію взаємного перетину двох площин трикутників **ABC** і **DSK**;

– встановити видимість частин площин.

Графічна робота виконується на аркуші креслярського паперу формату А4. Зразок виконання роботи наведений на рис. 5.

Лінією перетину двох площин є пряма, для побудови якої необхідно визначити дві точки, спільні для обох площин, і через них провести пряму. Спільні точки у загальному випадку визначають способом допоміжних січних площин-посередників, якими є, як правило, площини рівня або проєціюючі площини.

Побудову лінії перетину двох площин загального положення (рис.1) виконуємо загальним способом, використовуючи площини рівня, у такій послідовності:

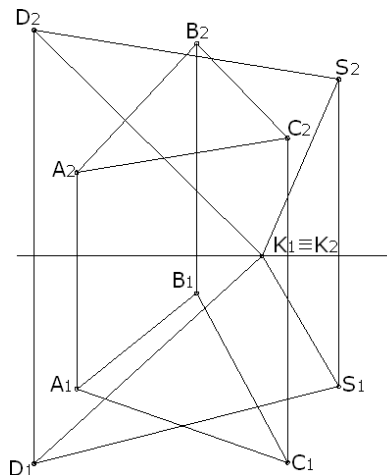


Рис. 1

1) Проведемо допоміжну січну площину – горизонтальну площину рівня Δ , яка буде задана фронтальним слідом Δ_2 ($\Delta \parallel \Pi_1$)

→ $\Delta_2 \parallel OX$). Площину Δ слід вводити так, щоб її фронтальний слід Δ_2 перетинав кожен із заданих площин трикутників ABC і DEK (рис. 2).

2) Відмічаємо фронтальні проекції точок лінії перетину площини Δ та трикутника DSK (рис. 2): точка 1 знаходиться на стороні DK ($1_2 \in D_2K_2$), точка S знаходиться на стороні SK ($S_2 \in S_2K_2$). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок $1_1, S_1$ ($1_1 \in D_1K_1, S_1 \in S_1K_1$) і з'єднуємо їх, причому лінія $1S$ є горизонталлю площини DSK , оскільки $\Delta \parallel \Pi_1$.

3) Відмічаємо фронтальні проекції точок лінії перетину площин Δ та ABC (рис.2): точка 2 знаходиться на стороні AB ($2_2 \in A_2B_2$), точка 3 знаходиться на стороні BC ($3_2 \in B_2C_2$). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок $2_1, 3_1$ ($2_1 \in A_1B_1, 3_1 \in B_1C_1$) і з'єднуємо їх, причому лінія 23 є горизонталлю площини ABC , оскільки $\Delta \parallel \Pi_1$.

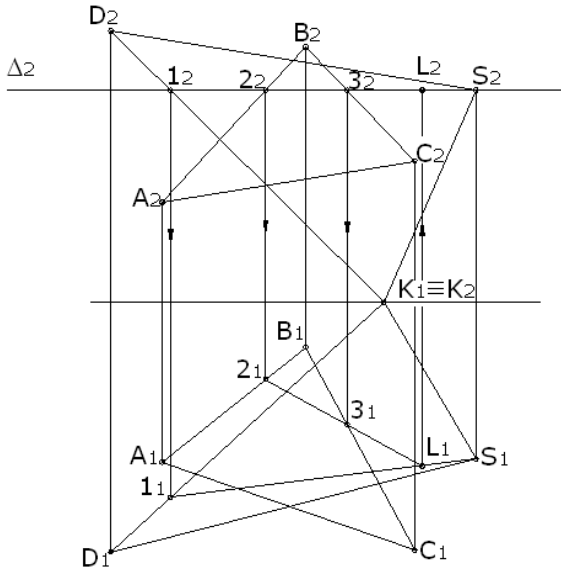


Рис. 2

4) Визначаємо **першу спільну точку L** для площин ABC і DEK . Точка L знаходиться на перетині ліній $1S$ та 23 , що чітко

видно на перетині горизонтальних проєкцій 1_1S_1 та 2_13_1 (рис. 2): $1_1S_1 \cap 2_13_1 = L_1$. Фронтальну проєкцію L_2 побудуємо у проєкційному зв'язку $L_1 \rightarrow L_2$ на фронтальному сліді Δ_2 , оскільки точка L належить площині Δ : $L_2 \in \Delta_2$.

5) Проведемо другу січну горизонтальну площину рівня β , яка буде задана фронтальним слідом β_2 ($\beta \parallel \Pi_1 \rightarrow \beta_2 \parallel OX$) і аналогічно виконуємо побудови (рис. 3).

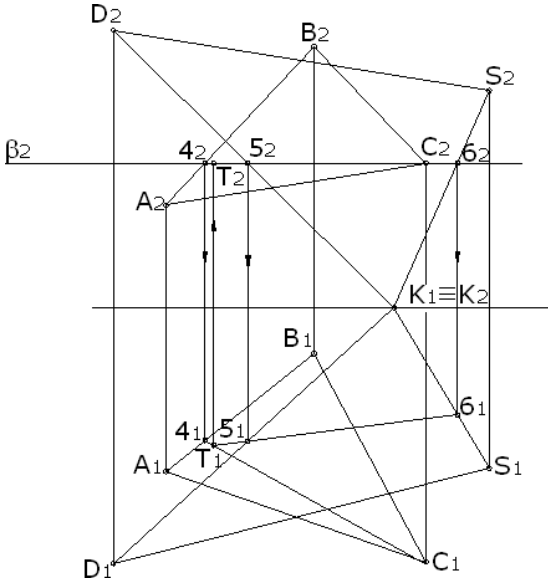


Рис. 3

6) Відмічаємо фронтальні проєкції точок лінії перетину площини β та трикутника DSK (рис. 3): точка 5 знаходиться на стороні DK ($5_2 \in D_2K_2$), точка 6 знаходиться на стороні SK ($6_2 \in S_2K_2$). Будуємо горизонтальні проєкції зазначених точок 5_1 , 6_1 ($5_1 \in D_1K_1$, $6_1 \in S_1K_1$) і з'єднуємо їх, причому лінія 56 є горизонталлю площини DSK , оскільки $\beta \parallel \Pi_1$.

7) Відмічаємо фронтальні проєкції точок лінії перетину площини β та трикутника ABC (рис. 3): точка 4 знаходиться на стороні AB ($4_2 \in A_2B_2$), точка C знаходиться на стороні BC

($C_2 \in B_2 C_2$). Будуємо горизонтальні проекції зазначених точок $4_1, C_1$ ($4_1 \in A_1 B_1, C_1 \in B_1 C_1$) і з'єднуємо їх, причому лінія $4C$ є горизонталлю площини ABC , оскільки $\beta \parallel \Pi_1$.

8) Визначаємо **другу спільну точку T** для площин ABC і DEK . Точка T знаходиться на перетині ліній $4C$ та 56 , що чітко видно на перетині горизонтальних проекцій $4_1 C_1$ та $5_1 b_1$ (рис. 3): $4_1 C_1 \cap 5_1 b_1 = T_1$. Фронтальну проекцію T_2 побудуємо у проекційному зв'язку $T_1 \rightarrow T_2$ на фронтальному сліді β_2 , оскільки точка T належить площині β : $T_2 \in \beta_2$.

9) Через точки L і T , які одночасно належать площинам DSK та ABC , проводимо пряму лінію, яка є **лінією LT перетину** вказаних площин (рис. 4).

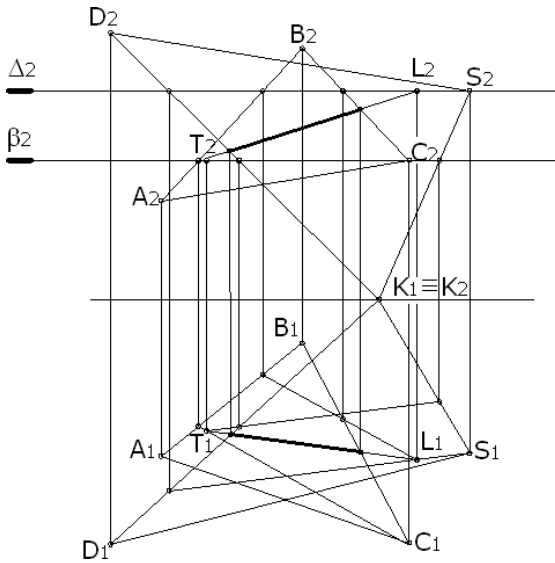


Рис. 4

10) Встановлюємо взаємну видимість заданих площин, оскільки прийнято вважати площину непрозорим об'єктом (рис.

5) Видимість встановлюємо методом конкуруючих точок, який детально розглянутий у роботі «Пряма».

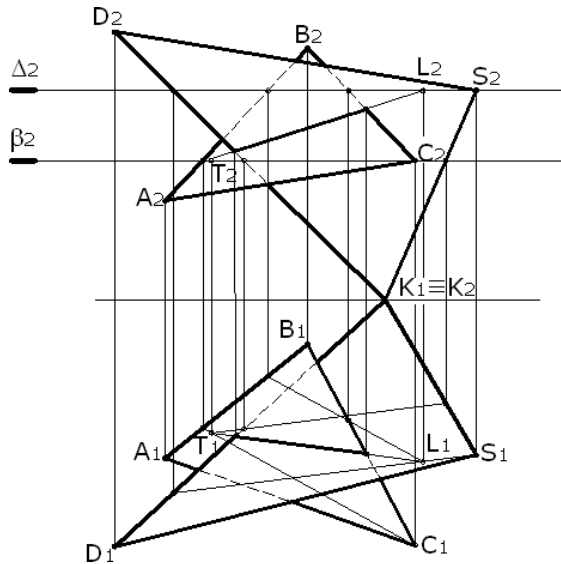


Рис. 5. Приклад виконання роботи «Перетин двох площин»

**Питання для самостійної роботи за темою
«Взаємне положення двох площин, прямої та площини».**

1. Яке взаємне положення можуть займати дві площини в просторі?
2. Які ознаки двох паралельних площин на епюрі, якщо вони задані двома прямим, що перетинаються?
3. Які ознаки двох паралельних площин на епюрі, якщо вони задані слідами?
4. Що є спільним для двох площин, що перетинаються?
5. Який алгоритм побудови прямої лінії перетину, якщо дві площини задано слідами?
6. Який алгоритм побудови прямої лінії перетину, якщо дві площини задано плоскою фігурою?
7. Скільки спільних точок для двох площин потрібно встановити, для побудови лінії перетину?
8. Яка умова взаємної перепендикулярності двох площин?

9. Як можуть бути взаємно розміщені у просторі площина і пряма?
10. Яка умова паралельності прямої і площини на епюрі?
11. Яка умова перпендикулярності прямої і площини на епюрі?
12. Сформулюйте правило проєціювання прямого кута на площину проєкцій.
13. В якому випадку прямий кут проєціюватиметься на площину проєкцій в натуральну величину (прямим кутом)?
14. Який алгоритм побудови точки перетину прямої і площини?

Тема: СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

Мета роботи: навчитися здійснювати перетворення проєкцій способом заміни площин проєкцій або плоскопаралельним переміщенням, розв'язування позиційних та метричних задач.

Задача: Визначити відстань від точки S до площини трикутника ABC способом заміни площин проєкцій (непарні варіанти) або способом плоскопаралельного переміщення (парні варіанти). Вихідні дані взяти з таблиці 1.

Для розв'язку даної задачі необхідно знати основні правила:

- 1) Відстань від точки до площини визначається по перпендикуляру, опущеному з точки до площини.
- 2) Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і лежать у цій площині.
- 3) Теорема проєціювання прямого кута: прямий кут проєціюється на площину проєкцій прямим кутом, якщо одна із його сторін паралельна до цієї площини проєкцій, а друга сторона – не перпендикулярна до цієї площини проєкцій.

Графічна робота виконується на аркуші креслярського паперу формату А4. Зразок виконання роботи наведений на рис. 1 та рис. 2.

Алгоритм побудов способом заміни площин проєкцій (рис. 1):

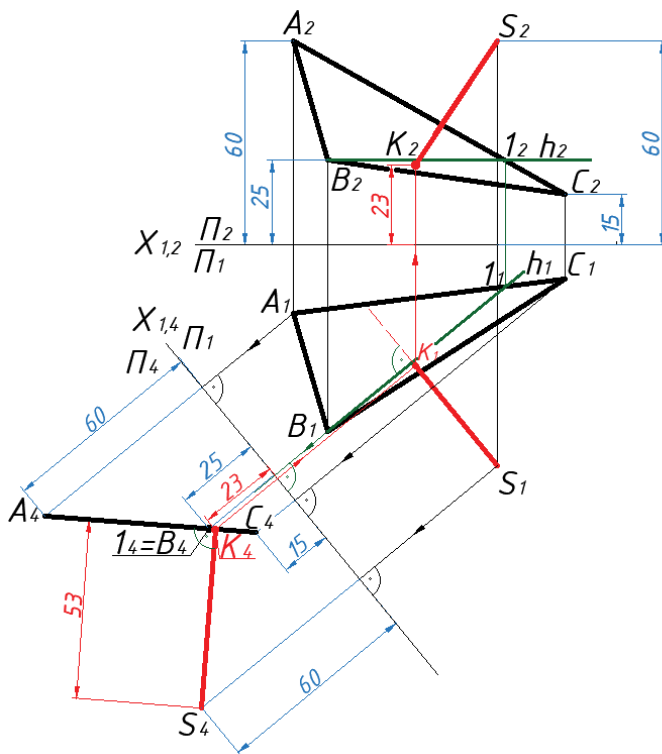


Рис. 1. Визначення віддалі від точки до площини способом заміни площин проєкцій

1) Для знаходження віддалі від точки S до площини $\Sigma(\triangle ABC)$ способом заміни площин проєкцій необхідно виконати одну заміну площин, щоб перетворити площину $\Sigma(\triangle ABC)$ загального положення у площину проєкціюючу. Це можна виконати заміною фронтальної площини проєкцій Π_2 на додаткову площину проєкцій Π_4 , яку розмістимо перпендикулярно до площини Π_1 ($\Pi_4 \perp \Pi_1$) $\rightarrow X_{1,4}$. Також обов'язковою умовою є перпендикулярність додаткової площини Π_4 до горизонталі h ($\Pi_4 \perp h_1$) площини $\Sigma(\triangle ABC)$.

2) Спочатку у площині $\Sigma(\triangle ABC)$ через точку B проводимо горизонталь h ($h \subset \Sigma, B \in h$). Фронтальну проєкцію горизонталі h_2 проводимо паралельно до осі OX ($h_2 \parallel OX$). При перетині з

прямою АС отримаємо точку 1 ($1_1, 1_2$): ($h_2 \cap A_2 C_2 = 1_2$, $1_1 \in A_1 C_1$).

Будуємо горизонтальну проєкцію горизонталі h_1 : $V_1 \cup 1_1 = h_1$ (рис. 1).

3) Керуємося правилом, що *площина буде перпендикулярною до іншої площини, якщо вона є перпендикулярною до прямої цієї площини*. Опираючись на теорему проєціювання прямого кута, додаткову площину Π_4 потрібно провести перпендикулярно до горизонталі h , а саме $X_{1,4} \perp h_1$. Таким чином, ми отримали нову систему площин проєкцій $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

4) Наступним кроком є креслення ліній проєкційного зв'язку у новій системі $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Відомо, що лінії проєкційного зв'язку повинні бути перпендикулярними до нової осі $X_{1,4}$. Отже, з кожної проєкції точок A_1, V_1, C_1, S_1 проведемо лінії проєкційного зв'язку $A_1 A_4 \perp X_{1,4}$, $V_1 V_4 \perp X_{1,4}$, $C_1 C_4 \perp X_{1,4}$, $S_1 S_4 \perp X_{1,4}$.

5) Віддали від нової осі $X_{1,4}$ до нових проєкцій точок A_4, V_4, C_4, S_4 дорівнюють віддалям від старої осі $X_{1,2}$ до старих проєкцій точок A_2, V_2, C_2, S_2 (рис. 1).

6) Коли з'єднаємо проєкції A_4, V_4, C_4 , то побачимо, що площина $\Sigma(\Delta ABC)$ виродилася у пряму лінію, тобто стала проєціюючою відносно площини Π_4 .

7) Тепер зручно знаходити віддаль від точки до площини, опутивши перпендикуляр із точки S на площину $\Sigma(\Delta ABC)$. При перетині перпендикуляра з площиною знайдемо точку K . Довжина проєкції перпендикуляра буде рівною дійсній відстані від точки S до площини $\Sigma(\Delta ABC)$.

8) Завершимо побудову інших проєкцій ($S_1 K_1, S_2 K_2$) перпендикуляра SK , використовуючи властивості проєціювання у зворотньому напрямку.

9) Встановлюємо видимість проєкцій перпендикуляра SK відносно площини $\Sigma(\Delta ABC)$ за конкуруючими точками.

Алгоритм побудов способом плоскопаралельного переміщення проєкцій (рис. 2):

1) *Плоскопаралельним переміщенням фігури* у просторі називається таке переміщення, при якому усі точки фігури переміщуються у площинах, паралельних між собою і паралельних до площини проєкцій. Так, у плоско-паралельному переміщенні відносно Π_1 усі точки фігури переміщуються у горизонтальних

площинах рівня.

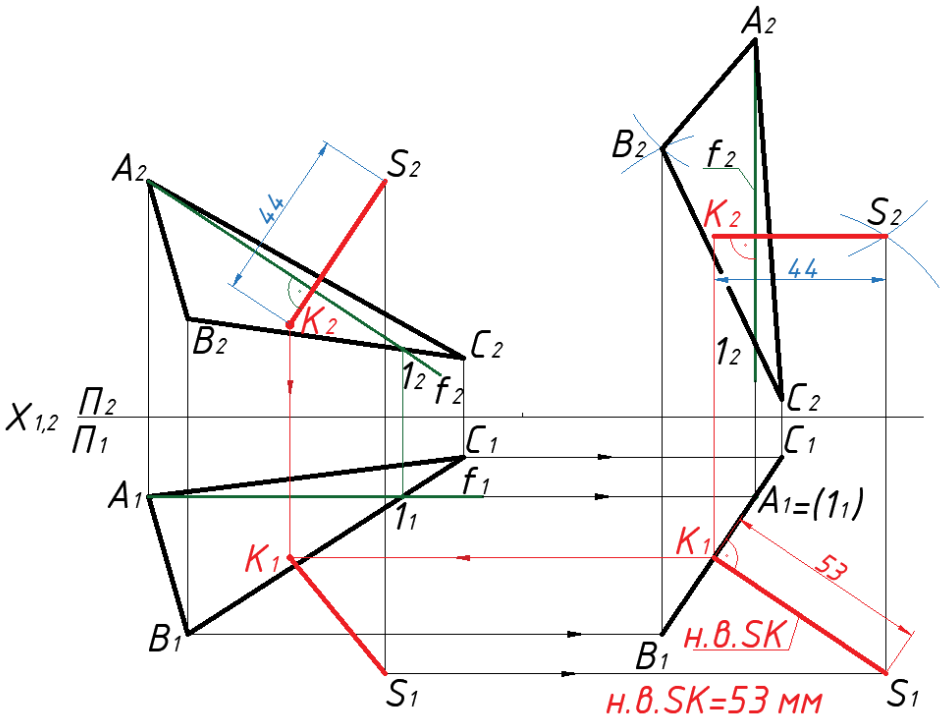


Рис. 2. Визначення віддалі від точки до площини способом плоскопаралельного переміщення

У плоско-паралельному переміщенні відносно Π_2 усі точки фігури переміщуються у фронтальних площинах рівня.

Правило 1. Якщо фігура здійснює плоско-паралельне переміщення відносно Π_1 , то фронтальні проекції її точок будуть рухатися по прямих, перпендикулярних до ліній зв'язку. У цей час горизонтальна проекція фігури рухається по площині проєкцій, залишаючись рівною самій собі (форма і розміри фігури незмінні).

Правило 2. Якщо фігура здійснює плоско-паралельного переміщення фігури відносно Π_2 горизонтальні проекції її точок рухаються по прямих, перпендикулярних до ліній зв'язку, а фронтальна проекція фігури переміщується по площині проєкцій, залишаючись рівною самій собі (форма і розміри фігури незмінні).

1) Для знаходження віддалі від точки S до площини $\Sigma(\triangle ABC)$ способом плоскопаралельного переміщення (рис. 2) виконаємо одне переміщення, щоб перетворити площину $\Sigma(\triangle ABC)$ загального положення у площину проєкціюючу. Перемістимо фронталь f у положення перпендикулярне до площини $\Pi_1 (f_2 \perp X_{1,2})$. Використаємо теорему 2 і перемістимо всі точки відносно площини Π_2 – фронтальні проєкції точок A_2, B_2, C_2, S_2 змінюватимуть свої положення, але розміри і форми фігур будуть незмінні. Отримати положення фронтальних проєкцій точок можна методом засічок, використовуючи циркуль.

2) Горизонтальні проєкції точок A_1, B_1, C_1, S_1 рухаються по прямих, перпендикулярних до ліній зв'язку і паралельних до осі $OX_{1,2}$, змінюючи при цьому положення, форму і розміри.

Перевірка: Якщо Ви виконали все правильно, то проєкції вершин трикутника A_1, B_1, C_1 мають лягти на одну пряму, яка і буде проєкцією $\Sigma(\triangle ABC)$.

3) Із проєкції S_1 точки S побудуємо пряму $SK \perp \Sigma(\triangle ABC)$ ($S_1K_1 \perp A_1B_1C_1$). Довжина перпендикуляра SK дорівнюватиме віддалі від точки S до площини $\Sigma(\triangle ABC)$.

4) У зворотньому напрямку побудуємо проєкції перпендикуляра SK , дотримуючись правил проєкціювання.

Питання для самостійної роботи за темою

«Взаємне положення двох площин, прямої та площини».

1. Які способи перетворення проєкцій вам відомі?
2. З якою метою використовують способи перетворення проєкцій?
3. Які чотири основні задачі можна розв'язувати способами перетворення проєкцій?
4. Яка суть способу заміни площин проєкцій?
5. Скільки додаткових площин потрібно ввести в систему Π_1/Π_2 , щоб визначити натуральну величину фігури, площина якої перпендикулярна до пл. Π_1 або до пл. Π_2 ?
6. Скільки і в якій послідовності потрібно ввести додаткових площин в систему Π_1/Π_2 , щоб задана пряма загального положення зайняла положення перпендикулярне до додаткової площини проєкцій?

7. Скільки і в якій послідовності потрібно ввести додаткових площин в систему Π_1/Π_2 , щоб задана площина загального положення зайняла положення перпендикулярне до додаткової площини проєкцій?
8. Яка суть способу плоскопаралельного переміщення?
9. Скільки переміщень необхідно виконати для перетворення в системі Π_1/Π_2 прямої загального положення у пряму рівня?
10. Скільки переміщень необхідно виконати для перетворення в системі Π_1/Π_2 прямої загального положення у пряму проєціюючу (перпендикулярну)?
11. Скільки переміщень і в якій послідовності необхідно виконати для перетворення в системі Π_1/Π_2 площини загального положення у площину рівня?
12. Скільки переміщень і в якій послідовності необхідно виконати для перетворення в системі Π_1/Π_2 площини загального положення у площину проєціюючу (перпендикулярну)?
13. Скільки переміщень і в якій послідовності необхідно виконати для знаходження в системі Π_1/Π_2 натуральної величини площини загального положення?
14. Як будуть переміщатися проєкції (горизонтальні та фронтальні), якщо фігура здійснює плоско-паралельне переміщення відносно Π_1 .
15. Як будуть переміщатися проєкції (горизонтальні та фронтальні), якщо фігура здійснює плоско-паралельне переміщення відносно Π_2 .

**Вихідні дані до графічних робіт
«Точка», «Пряма», «Перетин площин»,
«Визначення відстані від точки до площини»**

№ варіанту	А			В			С			D			S			K		
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	100	45	85	45	5	0	5	75	45	50	90	15	5	30	55	55	10	100
2	105	45	90	40	10	0	0	75	45	45	80	15	0	30	60	60	10	85
3	120	30	10	60	10	60	45	75	25	95	50	35	70	15	75	45	45	5
4	55	70	45	30	0	10	0	40	65	20	0	70	70	40	75	5	65	0
5	110	10	30	40	40	45	50	70	5	105	70	40	50	65	55	70	5	10
6	0	70	65	20	5	0	105	50	85	60	85	0	95	20	15	10	20	85
7	0	45	75	20	0	20	105	70	15	75	45	60	55	0	10	0	60	45
8	115	25	45	65	20	30	45	75	25	80	15	60	30	60	20	105	45	20
9	90	0	30	0	50	80	40	75	0	110	60	5	30	0	85	10	40	80
10	105	40	80	35	10	25	95	80	45	85	50	15	120	25	60	45	40	60
11	105	25	0	70	85	80	0	5	50	110	55	50	50	52	75	20	0	10
12	90	25	25	70	5	75	45	75	5	100	35	40	65	10	50	25	40	15
13	110	45	90	45	10	5	5	60	25	35	75	10	50	30	50	60	10	85
14	10	70	85	30	20	0	110	10	85	70	70	5	105	5	80	35	5	70
15	20	70	85	30	20	0	110	10	85	70	70	5	105	5	80	10	25	5
16	80	15	70	0	25	25	55	85	5	110	20	35	75	60	5	35	25	10
17	90	45	25	65	0	50	40	45	10	60	35	55	95	0	5	55	0	5
18	95	40	25	70	45	40	45	15	0	45	50	40	105	30	0	75	10	0
19	25	50	0	40	10	50	95	35	0	50	0	0	80	50	35	20	15	15
20	115	20	0	10	55	0	35	5	45	65	15	0	95	55	50	60	45	50
21	20	30	20	50	45	35	75	50	0	0	95	20	0	20	10	95	10	0
22	40	35	20	25	50	0	40	10	50	50	0	0	20	15	15	80	50	35
23	60	5	40	90	55	0	15	15	0	90	10	5	75	0	25	30	45	25
24	10	50	15	40	0	50	100	0	35	80	40	50	15	0	0	65	0	10
25	85	0	40	55	45	0	95	0	20	65	55	50	15	40	0	30	25	50
26	55	0	5	90	45	25	65	0	50	40	45	10	60	35	55	95	0	5
27	95	10	0	20	30	20	0	20	10	50	45	35	75	50	0	0	95	20
28	105	35	15	70	50	55	30	5	15	70	0	40	110	20	0	50	40	0
29	15	15	35	50	0	35	15	25	0	95	0	15	55	50	50	85	35	0
30	20	50	0	40	10	50	95	35	0	50	0	0	80	50	35	25	15	15

Тема: ПОВЕРХНІ. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ПЛОЩИНОЮ.

Мета роботи: навчитися виконувати зображення багатограних та криволінійних поверхонь, побудувати фігури перерізу поверхні площиною.

Задача: За даними таблиці 2 побудувати на аркуші креслярського паперу А4 або А3 три проекції поверхні, розсіченої проекціоюючою площиною. Відомим способом перетворення визначити дійсну величину фігури перерізу.

Приклади побудови лінії перетину різних поверхонь наведено на рис. 3 – рис. 6.

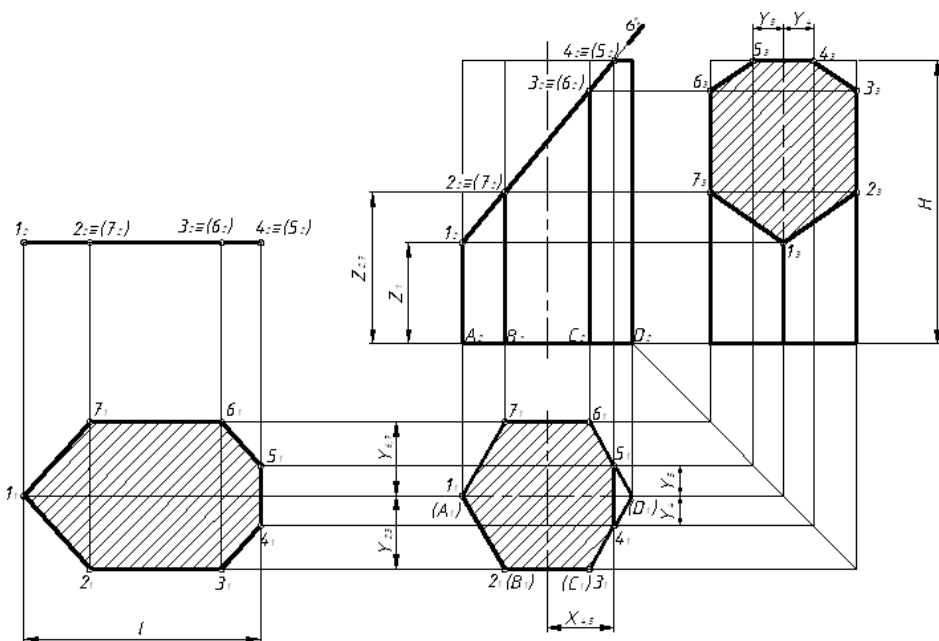


Рис. 3. Приклад виконання роботи «Переріз призми площиною, визначення дійсної величини фігури перерізу»

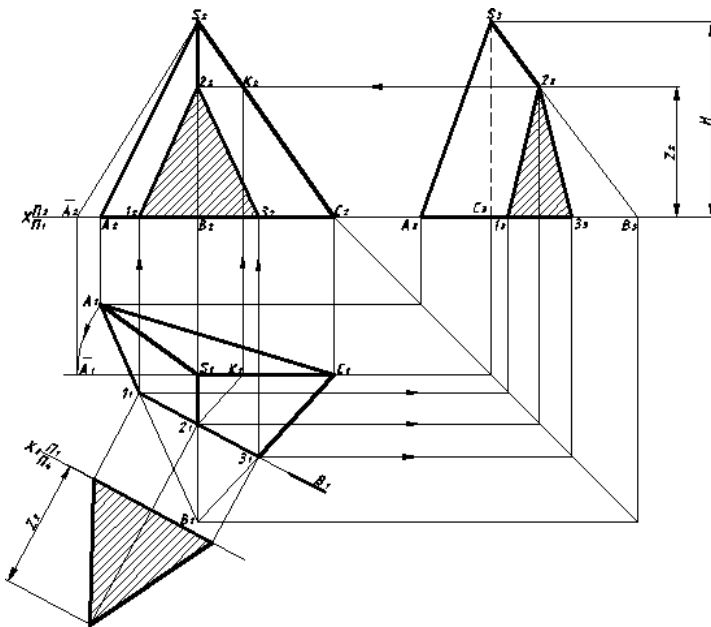


Рис. 4. Приклад виконання роботи «Переріз піраміди площиною, визначення дійсної величини фігури перерізу»

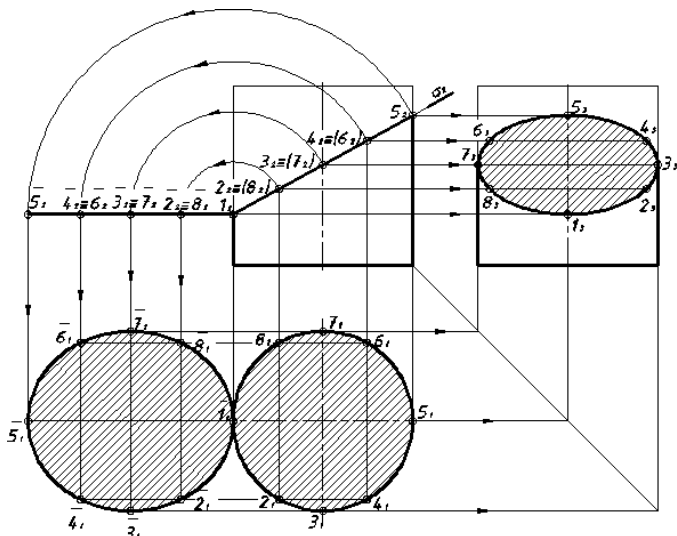


Рис. 5. Приклад виконання роботи «Переріз циліндра площиною, визначення дійсної величини фігури перерізу»

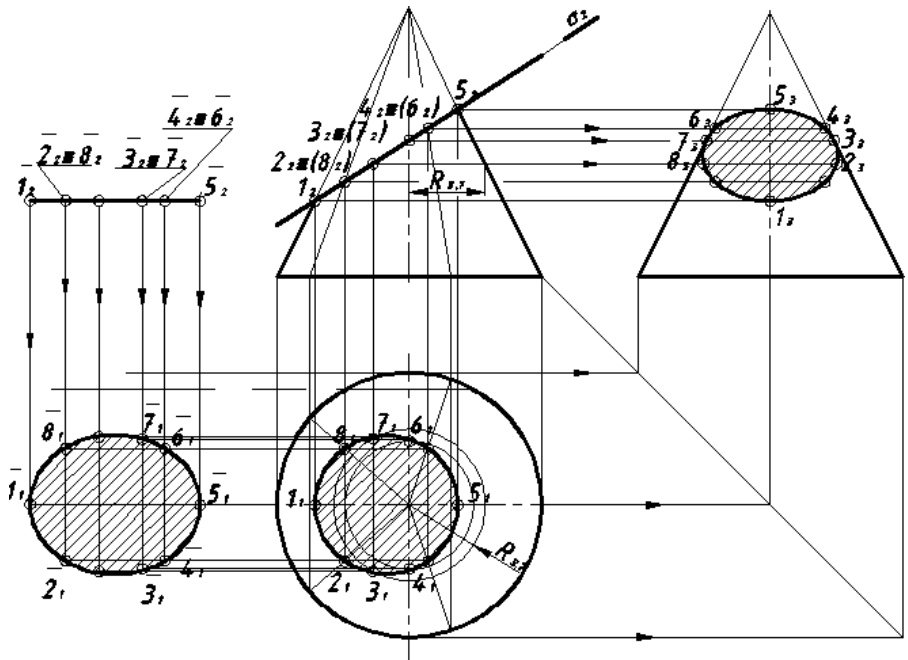
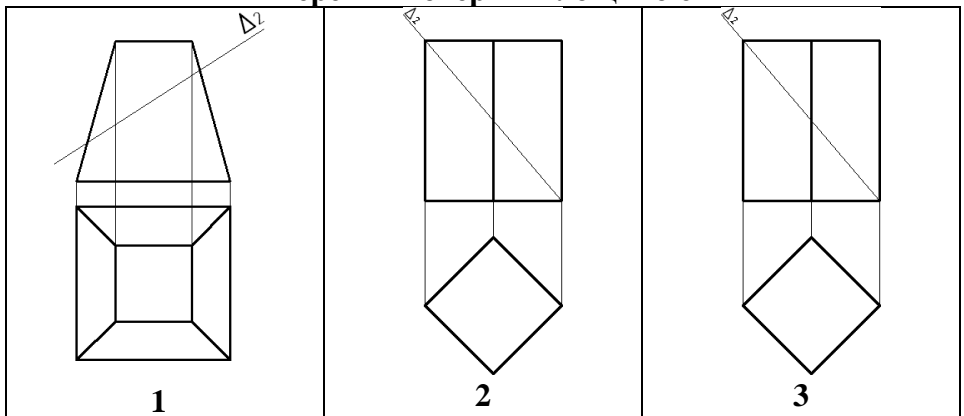
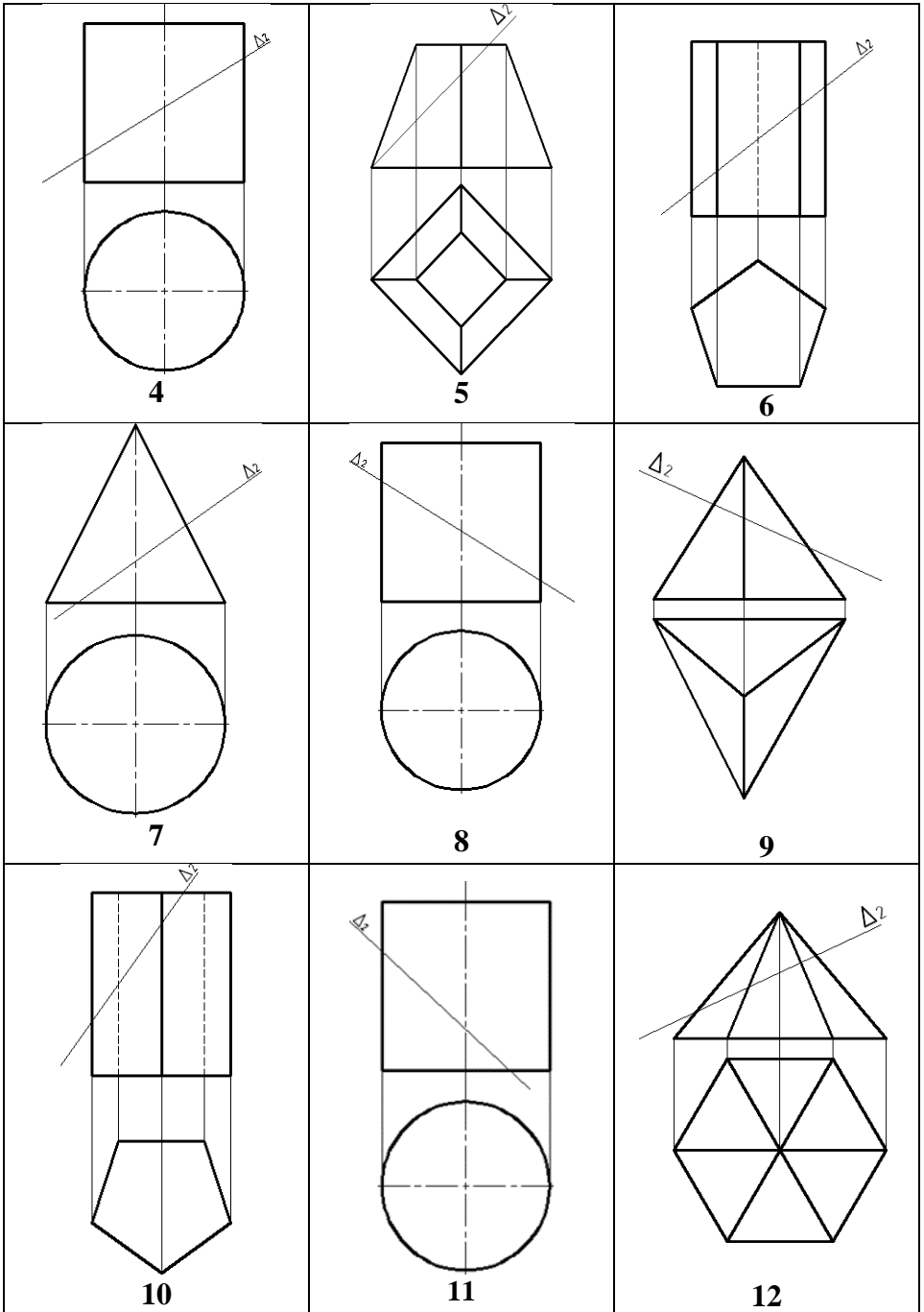


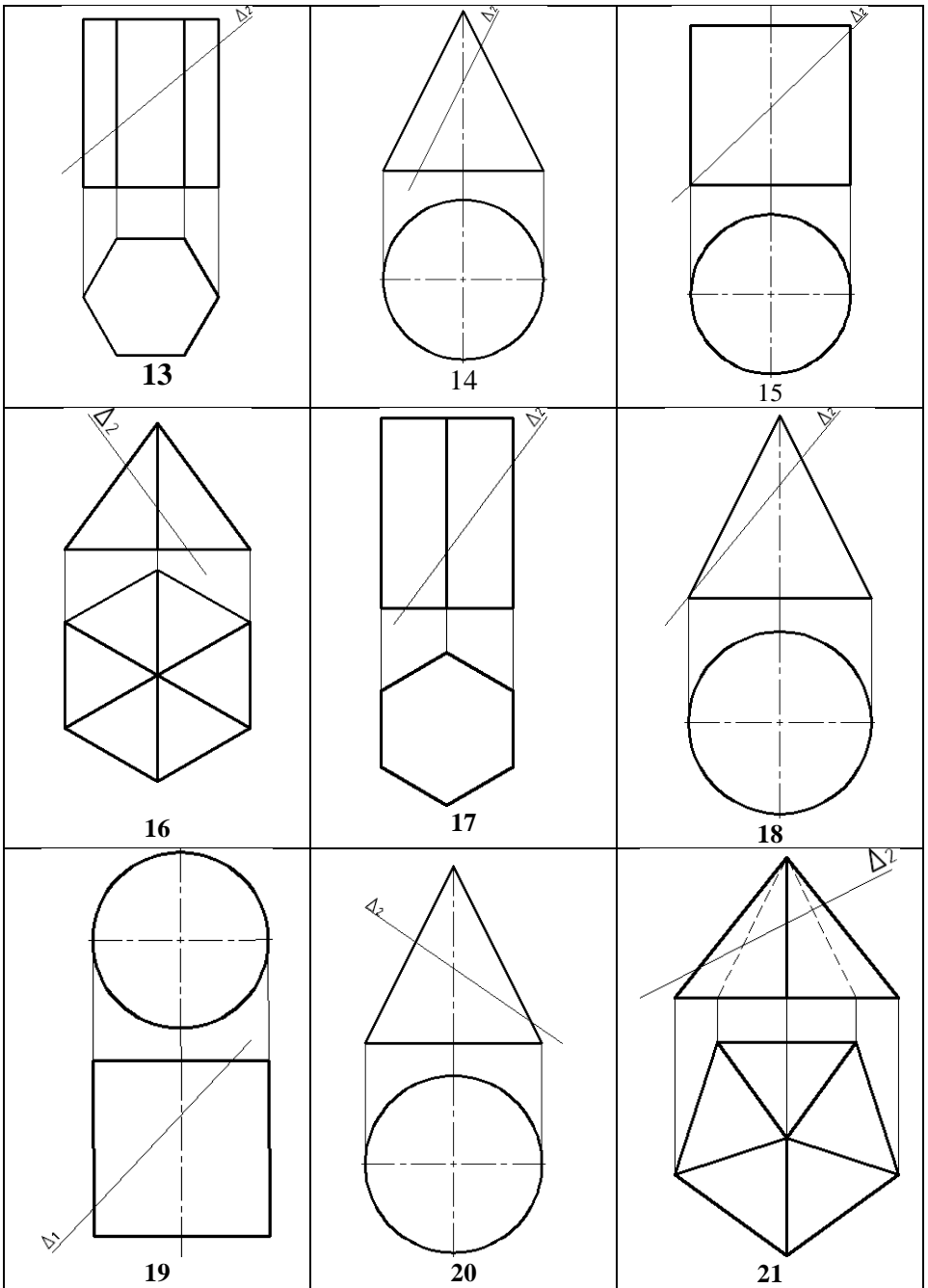
Рис. 6. Приклад виконання роботи «Переріз конуса площиною, визначення дійсної величини фігури перерізу»

Таблиця 2

**Варіанти завдань до графічної роботи
«Перетин поверхні площиною»**







Питання для самостійної роботи за темою

«Поверхні. Переріз поверхні площиною».

1. Які поверхні вам відомі?
2. Якими елементами на кресленику задається призматична поверхня?
3. Якими елементами на кресленику задається поверхня піраміди?
4. Яка поверхня називається тетраедром?
5. Які правильні багатогранники вам відомі?
6. Як будувати проекції фігури перерізу, яка утвориться при перерізі призми або піраміди площиною?
7. Як будуються точки перетину призми чи піраміди прямою лінією (точки входу і виходу)?
8. Яка фігура утвориться при перерізі призми площиною, яка паралельна до бокових ребер призми?
9. Яка фігура утвориться при перерізі призми площиною, яка паралельна до нижньої та верхньої основ призми?
10. Яка фігура утвориться при перерізі піраміди площиною, яка паралельна основі піраміди?
11. Яка фігура утвориться при перерізі піраміди площиною, яка проходить через вершину піраміди та перетинає її основу?
12. Які проекції має прямий круговий конус, висота якого перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій Π_1 .
13. Які криві лінії можуть утворюватися при перерізі конуса площиною?
14. Які проекції має прямий круговий циліндр, висота якого перпендикулярна до фронтальної площини проекцій Π_2 .
15. Які криві лінії можуть утворюватися при перерізі циліндра площиною?
16. Які проекції має куля (сфера)?
 17. Які криві лінії можуть утворюватися при перерізі сфери площиною?
18. Як називається поверхня зображена на рис. 1?
19. Вкажіть кількість ребер багатогранника (рис. 1).
20. Назвіть точки, які належать поверхні багатогранника (рис.1).

21. Як називається поверхня зображена на рис. 2?
22. Вкажіть кількість вершин та граней багатогранника (рис. 2).
23. Назвіть точки, які належать поверхні багатогранника (рис.2).
24. Назвіть, які ребра багатогранника (рис.2) займають положення рівня.
25. Назвіть, які ребра багатогранника (рис.2) займають загальне положення.
26. Як називається поверхня задана на рис. 3?
27. Як називається лінія AS на поверхні (рис. 3)?
28. Які точки належать поверхні на рис. 3?
29. Яка поверхня задана на рис. 4.?
30. Як називається лінія, на якій лежить т. В (рис. 4)?
31. Які точки належать поверхні на рис. 4?

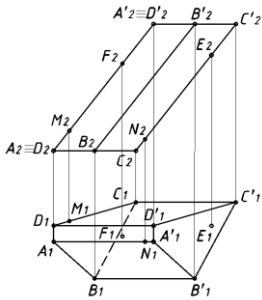


Рис.1

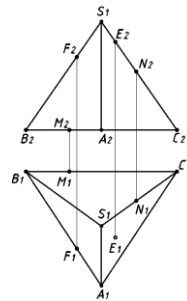


Рис.2

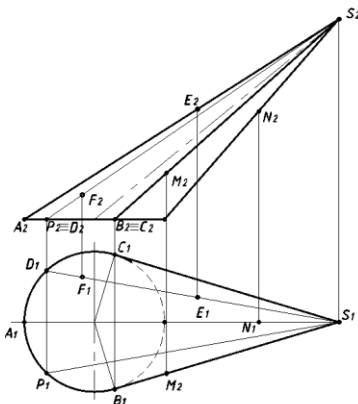


Рис. 3

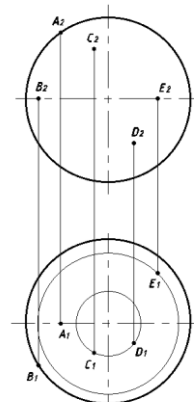


Рис. 4

Тема: ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ.

Мета роботи: закріпити знання, набути уміння та навички зображення ліній взаємного перетину багатограних та криволінійних поверхонь.

Завдання. Відповідно до варіанту завдання (таблиця 3) побудувати на аркуші креслярського паперу формату А3 три проекції заданої поверхні та лінію їх взаємного перетину. Встанови- ти видимість поверхонь та лінії їх перетину.

Загальні положення

Деталі машинобудівних конструкцій є поєднанням порівняно простих геометричних форм.

Виникає необхідність будувати на креслениках лінії перетину цих поверхонь між собою.

Спільна лінія для двох поверхонь є лінією їх перетину.

Для визначення точок, які утворюють лінію перетину поверхонь, використовують *спосіб допоміжних січних поверхонь* (спосіб посередників), сутність якого полягає у наступному:

а) задані поверхні перетинаються третьою, допоміжною поверхнею-посередником;

б) визначають лінії перетину поверхні-посередника із кожною із заданих поверхонь окремо;

в) знаходять точки перетину отриманих ліній, які і належать шуканій лінії перетину поверхонь.

Допоміжними поверхнями-посередниками слід обирати площини часткового положення (площини рівня або проєціючі площини) або сфери. *При виборі посередника слід виходити з того, щоб він в перетині із заданими поверхнями утворював графічно прості лінії – прямі чи кола.* Для розв'язування кожної задачі необхідно використовувати кілька поверхонь-посередників.

На лінії перетину двох поверхонь виділяють *точки характерні* (опорні) і *допоміжні* (випадкові). Насамперед визначають опорні точки: найвищу і найнижчу, крайню праву і крайню ліву, точки зміни видимості. Визначення цих точок дозволяє бачити, в яких розміщені проекції лінії перетину і де між ними потрібно визначати допоміжні точки для точнішої побудови лінії перетину поверхонь.

Пам'ятай! Чим більше визначено допоміжних точок, тим точніше буде побудована лінія перетину поверхонь.

Дві поверхні найчастіше перетинаються по одній чи двох замкнутих просторових лініях. Одна лінія буде в тому випадку, якщо взаємний перетин неповний і на поверхнях утворюються фігурні заглиблення. Такий перетин називають *врубкою*. Дві замкнуті просторові лінії будуть у тому випадку, якщо одна із поверхонь повністю проникає крізь другу поверхню. Такий перетин називають *повним*.

Вид лінії перетину залежить від виду поверхонь, що перетинаються:

1) при перетині двох багатогранників утворюються одна або дві замкнуті просторові ламані лінії, окремі відрізки яких є лініями перетину граней багатогранників. Вершинами цих ліній є точки перетину ребер одного багатогранника із гранями іншого;

2) при перетині багатогранника із тілом обертання утворюються одна або дві лінії, які складаються із ділянок кривих другого порядку, тобто із ділянок дугкіл, частин еліпса, параболи і т.д. Ці ділянки сходяться між собою на ребрах багатогранників;

3) при перетині двох кривих поверхонь другого порядку утворюються одна або дві просторові плавні криві, як правило, четвертого порядку, які в окремих випадках можуть розпадатися на криві другого порядку і навіть прямі лінії.

Побудувавши точки лінії перетину, необхідно послідовно їх з'єднати, врахувавши видимість окремих ділянок лінії перетину на різних площинах проєкцій.

На рис. 7 наведено приклад побудови лінії перетину поверхонь.

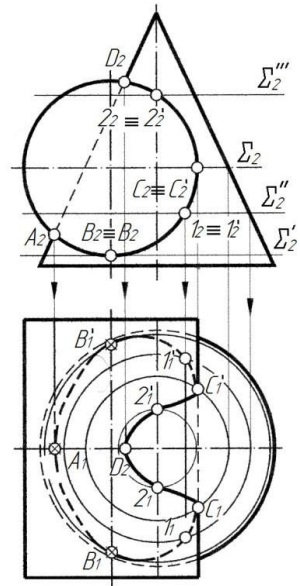
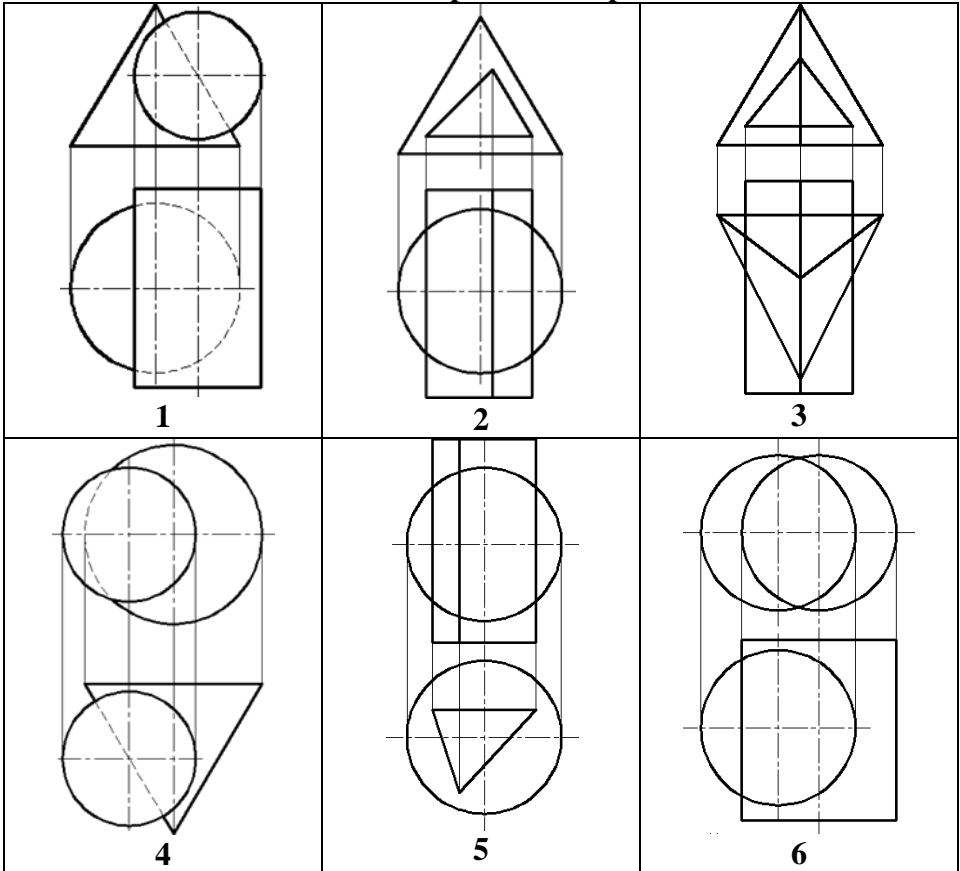
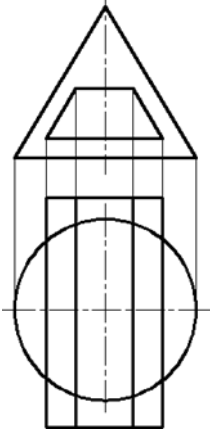


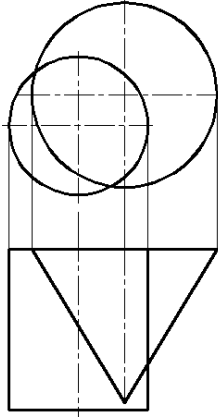
Рис. 7

Варіанти завдань до графічної роботи
«Взаємний перетин поверхонь»

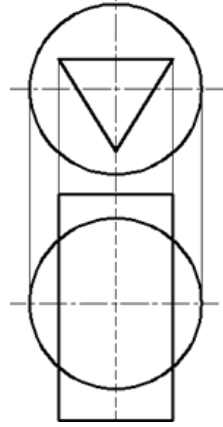




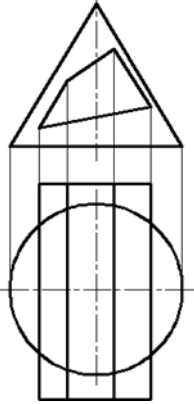
7



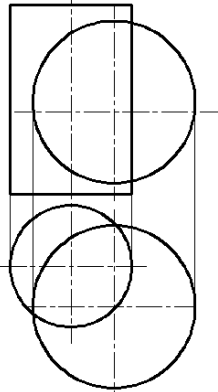
8



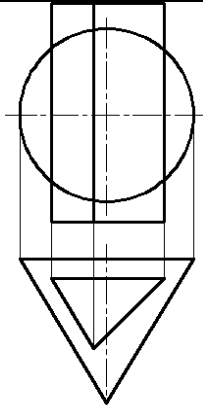
9



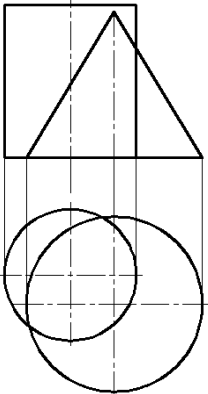
10



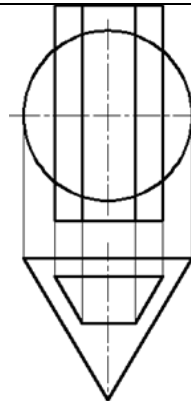
11



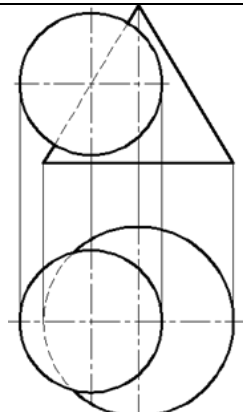
12



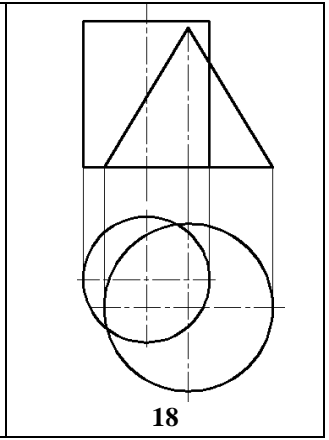
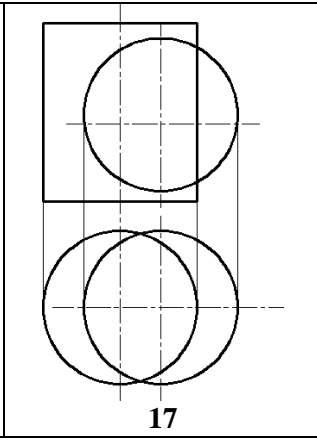
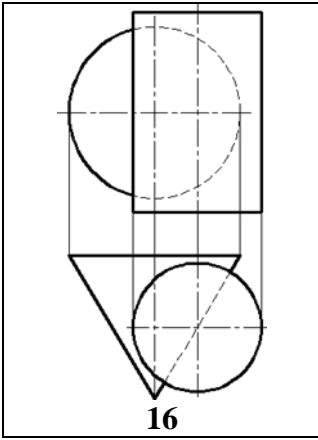
13



14



15



Питання для самостійної роботи за темою «Взаємний перетин поверхонь. Розгортки поверхонь».

1. Що є спільним для двох поверхонь, що перетинаються?
2. В чому полягає загальний спосіб побудови лінії перетину однієї поверхні іншою?
3. Який алгоритм побудови лінії перетину за допомогою допоміжних січних поверхонь-посередників?
4. Яка ключова умова при виборі допоміжних січних поверхонь-посередників?
5. Які точки на поверхнях визначають для побудови лінії їх взаємного перетину? Які з них визначають в першу чергу?
6. Які точки лінії взаємного перетину називаються «характерними» (опорними)?
7. Скільки точок потрібно визначити для побудови лінії перетину багатогранних поверхонь? для побудови лінії перетину криволінійних поверхонь?
8. Скільки ліній перетину може утворюватися про взаємному перетині двох поверхонь?
9. Чим відрізняється «повне проникнення» від «врубки (врізання)»?
10. Які види ліній перетину можуть утворюватися при взаємному перетині двох багатогранників? Багатогранної та криволінійної поверхонь? двох криволінійних поверхонь?
11. В якому випадку в якості посередників застосовують метод допоміжних січних площини?
12. В якому випадку можливо і доцільно застосовувати метод допоміжних січних сфер?
13. Сформулюйте теорему Г. Монжа про подвійне проникнення двох поверхонь другого порядку.

Література

1. Козяр М. М., Сасюк З. К. Нарисна геометрія : навч. посіб. / видання 2-ге, перероблене. [Електронне видання]. Рівне : НУВГП, 2024. 250 с.
2. Козяр М. М., Сасюк З. К. Нарисна геометрія : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2013. 235 с.
3. Кривцов В. В. Нарисна геометрія: навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2012. 240 с.