

Проф. К. СИМИНСКИЙ.

621(075)
С-37

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

ОБЩИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

с элементами графостатики.

Издание 2-ое переработанное.



К И Е В.

Типография Киевского Политехнического Института.

1922.

СПРАВОЧНИК.

Метрическая система.

Метрич. меры.	Русские.	Метрич. меры.	Русские.
1 тон.	61,048 пд.	1 кв. м.	{ 0,220 кв. сж. 10,764 кв. фт.
1 кг.	2,442 фн.	1 кв. см.	{ 0,051 кв. врш. 0,155 кв. дм.
1 км.	0,937 верс.	1 куб. м.	{ 0,103 кв. сж. 35,315 кв. фт.
1 м.	{ 0,469 сж. 3,281 фт. 1,406 арш.	1 литр.	{ 0,081 вед. 1,626 бут.
1 см.	{ 0,225 врш. 0,394 дм.		

Обратный перевод.

Русск. меры.	Метрические.	Русск. меры.	Метрические.
1 пд.	16,38 кг.	1 кв. сж.	4,552 кв. м.
1 фн.	409,512 гр.	1 кв. фт.	0,093 кв. м.
1 верс.	1,067 км.	1 кв. врш.	19,758 кв. см.
1 сж.	2,134 м.	1 кв. дм.	6,452 кв. см.
1 арш.	0,711 м.	1 кв. сж.	9,713 кв. м.
фт.	0,305 м.	1 кв. фт.	0,028 кв. м.
врш.	4,445 см.	1 ведро	12,299 лт.
дм.	2,544 см.	1 бут.	0,615 лт.

Сокращенные французские обозначения для мер и весов.

	а.	Поверхность.	Объем.	Масса.
m	р.	а — ар.	l — литр.	g — грам.
km	дометр.	ha — гектар.	hl — гектолитр.	t — тонна.
dm	дециметр.	m ² — кв. метр.	dl — децилитр.	kg — килограм.
cm	сантиметр.	km ² — кв. километр.	m ³ — куб. метр.	dg — дециграм.
mm	миллиметр		cm ³ — кв. сантимет.	cg — сентиграм.
μ	микрон = 0,001 mm.	cm ² — кв. сантимет. mm ² — кв. миллиметр.	mm ³ — куб. миллиметр.	mg — миллиграм.

С — джоуль; приняты международной электротехнической комиссией.
 Д — джоуль; масса m, M; время t, T; ускорение силы тяжести g; работа A, W;
 э — эрг; W, U; мощность P; отдача η; число оборотов в единицу времени n;
 те — температура Цельсия t; абсолютная температура T; период T; угловая ско-
 г — f; джоуль J; ватт W; киловатт kW; киловатт-час kWh

Проф. К. СИМИНСКИЙ.

У 621/075
С-37

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.

ОБЩИЙ КУРС

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

для Техникумов и Самообразования.

1711

проверено
1920 г.

Издание 2-ое переработанное.

фа



КИЕВ.

Типография Киевского Политехнического Института.

1922.

ПУБЛ. №2
НАУКОВА
БІБЛІОТЕКА

✓

Р. Ц.—КИЕВ.

Типография Киевского Политехнического Института.

1922.

Предисловие

к I-му изданию.

Техническая механика представляет первую книгу из задуманной мною серии книг по расчету прочности построек и машин. В ней излагается тот материал, который в некоторых новейших курсах назван теоретической механикой, например, у профессора И. В. Мещерского*), у других, например, у Н. Б. Дэлоне, называется механикой технической (**).

Обыкновенно при изложении курса механики отделяют аналитический метод от графического; последнему посвящают даже особые курсы, например курс графической статики. Мы полагаем, что в некоторых случаях изложение проще, убедительнее и нагляднее при пользовании графическим методом наряду с аналитическим.

Большинство курсов механики, даже предназначенных для высших технических школ, ограничиваются изложением теоретических основ предмета; авторы их мало внимания уделяют приложениям. В этой книге, написанной для техников, изложение носит прикладной характер.

При этом, приложения всегда идут за теоретическими основаниями и потому не понижают значения теории. Можно полагать, что они содействуют лучшему усвоению основ предмета. Примеры, которыми мы здесь пользуемся, просты и не выходят из пределов общего курса. Более сложные примеры из области мостов и механизмов здесь

*) Профессор И. В. Мещерский. Курс теоретической механики. СПб. 1912. Изд. литограф.

***) Делоне Н. Б. Техническая механика. Киев, 1910 г.

неуместны, так как основательнее будут разобраны в последующих книгах, предназначенных для специального изучения этих задач механики.

Чтобы сделать книгу доступной даже для лиц с ограниченными знаниями высшей математики, здесь принято в большинстве случаев элементарное изложение; иногда, параллельно с элементарным дается вывод, которым могут воспользоваться знакомые с анализом. Полагаем, что при таких условиях книга могла бы найти применение, как в техникумах, так и в других технических институтах.

Первый опыт составления книги по намеченной программе предпринимается в надежде, что читатели своими указаниями и советом помогут автору из материала, здесь изложенного, создать полезное пособие. Указания и поправки принимаются с глубокой благодарностью.

Киев. Май 1918 года.

К о 2-м у и з д а н и ю.

Второе издание Технической механики выходит при чрезвычайно неблагоприятных условиях.

Поэтому в нем, быть может, не уничтожены все недочеты первого издания. Тем не менее сделаны многие исправления и изменения, а также дополнения. Курс становится более полным и приспособленным к условиям времени.

К числу главнейших дополнений относится Статика упругого тела и примеры трения в машинах.

Приношу глубокую благодарность Киевскому Политехническому Институту, издавшему книгу в то время, когда меня покинули все надежды на возможность издания.

Май 1922 г.

К. Симинский.

Введение.

МЕХАНИКА — это наука о силах и следствиях, ими вызываемых.

§ 1. **Сила.** 1. О силе мы судим по способности вызвать движение или изменить движение. Так, о силе человека мы судим по способности поднять большой груз, о силе лошади — по способности привести в движение тяжелый воз.

Когда железнодорожный машинист желает изменить скорость поезда, он „поддает пару“, т. е. выпускает в цилиндр новую порцию пару. От этого скорость поезда увеличивается, например, вместо 30 верст в час становится 40. Отсюда мы заключаем, что пар представляет некоторую силу, от действия которой поезд получает *ускорение* движения.

Скоростью называется длина пути, проходимого в единицу времени, например: в 1 секунду.

Ускорением называется прибавка скорости, получающаяся в единицу времени (в 1 секунду).

Изменение движения выражается не только в ускорении, но может состоять также и в перемене направления движения. Представим себе точку, движущуюся равномерно по прямой линии. Если в какой-нибудь момент она вдруг свернет с этого пути, то мы обязательно припишем это некоторой причине. Не будь причины, точка продолжала бы свое прямолинейное равномерное движение. Причину, отклоняющую точку в сторону от прямого пути, также называют силой.

Но сила не только вызывает или изменяет движение. Если в телегу, которую везет лошадь, впречь столь же сильную лошадь в противоположную сторону, то, когда обе лошади потянут, — телега останется на месте. Груз, положенный на чашку весов, вызывает движение, но такой же груз, добавленный на другую чашку останавливает движение; наступает покой или *равновесие*. Таким образом система сил может быть в покое, или равновесии.

Вообще, силой называется причина, вызывающая или останавливающая движение, или его изменяющая.

Не касаясь природы сил, без затруднения можно установить их свойства, представляющие интерес в механике.

2. Разбивая тела на части, мы наблюдаем, что даже самые мелкие частицы, переходящие в пределе в точки, падают на землю. Очевидно, сила притяжения земли, или сила тяжести, имеет определенные точки приложения.

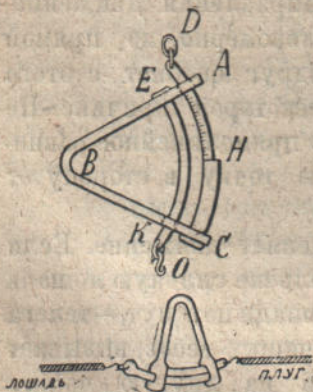
Падение происходит всегда отвесно, по вертикальному направлению. Отсюда надо заключить, что сила имеет определенное направление, или линию действия.

По направлению силы движение происходит в ту или иную сторону, например: сила тяжести всегда идет вниз, ветер дует вправо или влево, поезд идет вперед или назад и т. д. Это свойство называется течением сил; говорят: течение силы вниз или вверх, вправо или влево и т. д. Наконец, мы всегда представляем себе величину силы, ибо говорим, что одна сила больше другой, что ветер сегодня сильнее, чем был вчера.

3. Силы измеряются путем сравнения, причем одна определенная сила принимается за единицу. Измеряемая сила содержит несколько единиц или частей единицы и выражается целым или дробным числом. В технике за единицу сил принимают силу тяжести 1 килограмма, так что измеряемые силы содержат несколько килограммов или частей килограмма.

Для измерения сил, кроме весов, служат приборы, называемые динамометрами.

Динамометр Понсле (фиг. 1) состоит из крепкой стальной пружины ABC . В C укреплена шкала, которая свободно проходит сквозь отверстие в пружине A . В E прикреплена пластинка EK , свободно скользящая в отверстии K .



Фиг. 1 и 2.

Если динамометр прикрепить кольцом D , а к крючку O приложить какую-нибудь силу, например, привесить груз, то пружина ABC согнется.

Конец пружины A , скользя по шкале $ДС$, остановится на каком-нибудь делении шкалы, где поставлено число единиц силы.

Величину силы в технике выражают в килограммах, как грузы на весах. Поэтому на шкале $ДС$ динамометра (фиг. 1) отмечают черточками, как стоит пружина при действии на нее 1, 2, 3... килограммов, и на этих черточках ставят 1, 2, 3...

Если динамометром желают определить силу, которую затрачивает лошадь при работе плугом, то между упряжкой лошади и плугом помещают динамометр, как показано на фиг. 2.

Таким образом, сила определяется точкою приложения, направлением, течением и величиной.

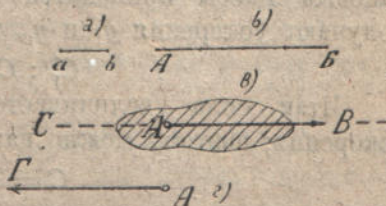
Точкою приложения силы называется материальная точка (частица), на которую сила действует непосредственно.

Направлением или линией действия силы называется линия, по которой сила побуждает перемещаться точку приложения. Течение указывает, в какую сторону действует сила по данному направлению.

Величина силы определяется числом единиц, которые в ней содержатся.

4. Графическое представление о силе. При помощи чертежа можно выразить одновременно все указанные элементы силы: точку приложения, направление, течение и величину.

Отрезок прямой линии ab принимают за единицу силы (фиг. 3-а). Тогда сила в 4 единицы выражается прямою в четыре раза длиннее, чем ab , а именно: отрезком AB (фиг. б). Этот отрезок AB откладывают от точки приложения силы A (фиг. в) по направлению силы CB и в сторону действия силы, т. е. по течению, например, вправо. Если в машине сила действует справа налево, то надо отложить отрезок AB от точки A влево, как показано на фиг. г) стрелкой AG .



Фиг. 3.

Течение силы отмечается стрелкой.

Отрезок AB , построенный от точки приложения силы, идущий по направлению и течению силы, и в принятом масштабе

($ab=1$) выражающий величину силы, представляет графическое изображение силы (*вектор силы*).

5. **Сила тяжести.** Всякое тело, помещенное в пространстве над поверхностью земли, падает. Очевидно есть сила, вызывающая это движение. Эта сила называется *силой тяжести*. Она идет по вертикальному направлению вниз. Ее можно ощутить, поместив на пути препятствие; сила давит на это препятствие. Давление силы тяжести называется *весом*.

На весах мы постоянно измеряем давления, т. е. силы тяжести, сравнивая их с давлением силы, принятой за единицу, именно, килограмма.

Чем больше берется вещества, тем больше давление на чашку весов, так что: сила тяжести тем больше, чем больше вещества.

Количество вещества называется *массою*; поэтому: сила тяжести тем больше, чем больше масса. Если взять два тела с массами m_1 и m_2 , на которые действуют силы C_1 и C_2 , то

$$C_1 : C_2 = m_1 : m_2.$$

Поэтому говорят, что *силы пропорциональны массам*.

Кроме того, о существовании силы мы судим по тому, изменяется ли движение. Естественно считать, что сила тем больше, чем большее изменение она вызывает в движении. Но изменение движения есть ускорение, так что силу надо считать тем больше, чем больше ее ускорение. Отсюда, если две одинаковые массы приводятся в движение силами C_1 и C_2 , и получают ускорения y_1 и y_2 , то напомним:

$$C_1 : C_2 = y_1 : y_2.$$

Итак, сила увеличивается вместе с увеличением массы и ускорения; поэтому можно написать

$$C = m \cdot y, \quad \dots \dots \dots (1),$$

выражая этим, что, как при увеличении массы m , так и при увеличении ускорения, сила пропорционально возрастает.

Опыты и наблюдения показывают, что сила тяжести ускоряет движение падающего тела на 9,8 метра в секунду, так что:

Сила тяжести $C \cdot t = v = m \cdot y = m \cdot 9,8$,
где буквой v обозначен вес тела. Отсюда масса тела

$$m = \frac{v}{9,8} \quad \dots \dots \dots (2).$$

Вес одного и того же тела в разных местах земли меняется, и точно во столько же раз изменяется и ускорение падения тела, так что

$$\text{отношение } \frac{v}{y} = m \dots \dots \dots (3)$$

есть всегда число неизменное. Следовательно, масса—постоянна. Это не то, что вес.

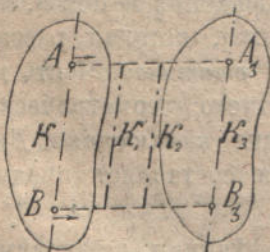
Массу измеряют, сравнивая ее с другой массой, принятой за единицу. Посмотрим, какова должна быть единица массы из предпоследней формулы. Чтобы в формуле было $m=1$, надо сделать $v=9,8$; тогда

$$m = \frac{v}{9,8} = \frac{9,8}{9,8} = 1 \dots \dots \dots (4)$$

Таким образом, единица массы это такая масса, вес которой равен 9,8 килограмма.

§ 2. Движение. Было указано, что следствие действия сил есть движение или покой. Движение есть перемена положения тела в пространстве. Путь, по которому движется точка, называется траекторией. Камень, брошенный наклонно вверх, имеет криволинейную траекторию; траектория камня, выпущенного свободно из рук,—прямолинейна (вертикальная прямая).

1. Простейшее движение тела—*поступательное*. Так называется движение, при котором любая плоскость тела перемещается параллельно самой себе, т. е. без поворота. Такое движение имеет, например, паровоз на прямом пути; его передняя грань, и боковые, и верх и низ, перемещаются параллельно, без поворота. При поступательном движении всякая прямая тела также перемещается параллельно.



Фиг. 4.

Если при поступательном движении одна из точек тела перемещается по прямой линии, то и все точки перемещаются по прямым, параллельным этой линии. Фигура 4 убеждает в этом.

Если прямая линия AB тела K переместится в параллельное положение A_2B_2 , при чем точка A пройдет по прямому пути AA_2 , то точка B совершит также прямой путь $BB_2 \parallel AA_2$. Этот путь BB_2 равен AA_2 .

так как отрезки BB_3 и AA_3 между равными параллельными AB и A_3B_3 также равны и параллельны.

Отсюда следует, что при поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы.

2. *Вращение* это такое движение тела, при котором сохраняется неподвижность какой-нибудь прямой линии.

Неподвижную прямую называют *осью вращения*.

При вращении все точки тела описывают окружности кругов, перпендикулярных к оси вращения. Когда любая точка тела при вращении опишет полную окружность, говорят, что тело сделало полный *оборот* вокруг оси.

По числу оборотов в минуту судят о скорости вращения тел, например: валов, колес, шкивов и т. п.

Время, в течение которого совершается полный оборот, называется *периодом* оборота, например, $\frac{1}{10}$ мин.

Обратная величина называется *частотой* оборотов:

$$\frac{10}{1} = 10 \text{ оборотов в минуту.}$$

3. *Сложные движения* получаются от сочетания указанных простых: поступания и вращения. Пример представляют колеса повозки на ходу.

Если тело, вращающееся вокруг оси, совершает поступание вдоль этой же оси, то получается *винтовое движение*. Все сложные движения машин и тел природы приводятся к некоторому винтовому движению, так что это самый общий вид движения.

4. **Механика** занимается изучением движения и покоя, как результатов действия сил. Та часть механики, которая рассматривает покой или равновесие, называется *статикой*. Часть механики, рассматривающая движение с чисто геометрической стороны, независимо от сил, носит название *кинематики*. Движение в связи с вызывающими его силами составляет предмет *кинетики*.

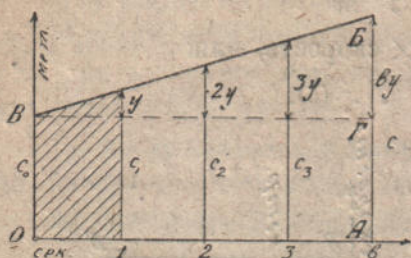
Прежде изучения указанных частей механики, остановимся вкратце на элементах движения и на основных принципах механики.

Вообще скорость: $c = c_0 + vy \dots \dots \dots (6).$

Отсюда ускорение $y = \frac{c - c_0}{v} \dots \dots \dots (7).$

и время $v = \frac{c - c_0}{y} \dots \dots \dots (8).$

Равноускоренное движение представляется графически, подобно равномерному (Фиг. 6).



Фиг. 6.

На горизонтальной оси абсцисс откладывают время (1, 2, 3 . . . сек.) и восставляют перпендикуляры, на которых отмечают величину скоростей, соответствующих точкам времени.

Так, на 1-ой секунде откладывают скорость $c_1 = c_0 + y$,

на 2 секунде — $c_2 = c_0 + 2y$

„ 3 „ $c_3 = c_0 + 3y$ и т. д.

Получается трапеция $OABV$. Путь, проходимый точкою при таком движении, равняется площади этой трапеции:

$$n = \frac{c_0 + c}{2} \cdot v \dots \dots \dots (9).$$

Его можно представить еще иначе. Разобьем трапецию на прямоугольник $OAGV$ и треугольник BGB . Площадь первого есть vc_0 ; площадь второго есть $\frac{1}{2} v \cdot vy = \frac{v^2 y}{2}$. Поэтому площадь тра-

пеции, или путь движущейся точки $n = vc_0 + \frac{1}{2} v^2 y \dots \dots (10a).$

При равно-замедленном движении получим соответственно:

$$n = c_0 v - \frac{1}{2} v^2 y \dots \dots \dots (10б).$$

Применим эти формулы к троганию с места, т. е. к случаю, когда начальная скорость c_0 равна нулю; получим (при $c_0 = 0$):

$$y = \frac{c}{v}; n = \frac{1}{2} cv, \text{ или } n = \frac{1}{2} v^2 y \dots \dots (11).$$

Подставляя из первого выражения во второе величину времени t , т. е.

$$t = \frac{c}{y},$$

получим еще одну формулу для пути

$$n = \frac{1}{2} \frac{c^2}{y} \dots \dots \dots (12),$$

и для скорости:

$$c = \sqrt{2yn} \dots \dots \dots (12a).$$

7. Примеры. 1. Камень, пущенный в шахту глубиною 60 м., достигает ее дна через 3,5 сек. Каково ускорение падения камня? Последняя из формул (11) дает:

$$60 = \frac{1}{2} y \cdot 3,5^2,$$

$$\text{Откуда } y = \frac{2 \cdot 60}{3,5^2} = \approx 9,8 \text{ м./сек.}^2$$

2. До какой высоты долетает камень, брошенный вертикально вверх со скоростью 10 метров в 1 секунду.

По форм. (12), принимая замедление силы тяжести равным 9,8 м./сек.², находим

$$n = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,8} = 5,2 \text{ м.}$$

§ 3. Принципы механики. Механика может быть построена на небольшом числе аксиом и постулатов, называемых законами механики.

1. *Аксиома.* Две силы, равные и прямо противоположные, приложенные к точке или телу, уравниваются, так как нет основания, чтобы движение произошло в одну сторону преимущественно перед другой.

2. *Закон инерции.* Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока действие каких-нибудь сил не заставит его изменить это состояние. Этот закон механики называется *I-м законом Ньютона*.

Этот закон понятен сам по себе; мы убеждены, что если тело из покоя переходит в движение или изменяет движение, то это вызывается какими-нибудь причинами. Без причины тело

оставалось бы в своем прежнем состоянии. Свойство тела оставаться в покое и без причины не выходить из этого состояния называется *козностью* или *инерцией*.

Закон инерции указывает, что само по себе тело не может создать таких сил, которые вызывают его движение; если силы появляются, то извне, от действия или прикосновения других тел.

3. *Закон движения*. Изменение движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению и течению силы. Это 2-й закон Ньютона. Мы говорили, что изменение движения есть ускорение, так что этот закон есть выражение того, что сила пропорциональна ускорению и может быть выражена формулой

$$C = m \cdot y,$$

где m — есть масса тела, y —его ускорение.

4. *Закон противодействия* (3-й закон Ньютона). Действие всегда сопровождается равным и противоположным противодействием, или: действие двух тел друг на друга всегда равны и прямо противоположны. Любое механическое явление подтверждает это положение. Когда мы надавливаем рукою какой-нибудь предмет, мы чувствуем, что он оказывает соответствующее действие на нашу руку, и тем большее, чем мы сильнее жмем предмет. Когда лошадь потянет телегу, то испытывает на себе сопротивление телеги: это телега действует на лошадь некоторой силой.

5. *Закон независимости действия сил*. (Закон Галилея). Если к телу приложено несколько сил, то каждая действует независимо от других, т. е. так, как будто других сил вовсе нет. Действительно, силу вдвое, втрое... большую, мы представляем себе, как соединение двух, трех... одинаковых сил, так что мы убеждены, что каждая сила действует независимо от других, как самостоятельная единица; от присоединения к другим силам она не теряет и не приобретает.

Точно также: действие силы на тело не зависит от того, находилось ли оно перед тем в покое, или в движении.

Отсюда следует, что, не нарушая действия данной системы сил, к ней можно присоединить две равные и прямо противоположные силы. Действительно, две такие силы, по 1 аксиоме, уравниваются сами по себе; конечно, они будут у равнове-

шиваться и в том случае, когда мы присоединим их к какой-нибудь другой системе сил. А если силы уравниваются, то никакого действия они не произведут на ту систему, к которой присоединяются.

Этот вывод обобщается на всякую систему уравнивающихся сил. Любую систему уравнивающихся сил можно вводить, не нарушая состояния данного тела: если тело было в покое, оно и будет оставаться в покое, а если тело двигалось, — то сохранит свое движение. Справедливо и обратное положение, ибо если можно прибавлять систему уравнивающихся сил, то конечно, можно и отнять обратно.

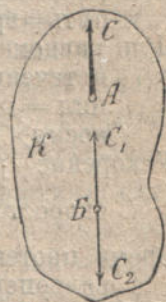
6. *Теорема о перенесении точки приложения силы.* Не нарушая действия силы, можно переносить точку ее приложения по направлению силы. Докажем это на фиг. 7, где к телу K приложена сила C .

Возьмем на направлении силы C произвольную точку B и приложим к ней две противоположные силы C_1 и C_2 , равные C . От прибавления такой системы сил состояние тела не нарушится.

С другой стороны, на основании 1 аксиомы, силы C и C_2 уравниваются, и мы можем их удалить, на основании последних строк предыдущего раздела 5. Следовательно, остается сила C_1 вместо прежней силы C .

Итак, сила C , приложенная в A , может быть заменена силой C_1 , равной C , но приложенной в точке B .

Изучение механики мы начнем с абсолютно *твердых тел*. Так называются тела, расстояние между частицами которых — постоянно и не изменяется при действии сил. В действительности таких тел нет, но их рассматривают для облегчения изучения механики. Сначала изучаются абсолютно твердые тела, а потом в теорию вводятся некоторые поправки и получается представление о физических телах действительности.



Фиг. 7.

ПРИЛОЖЕНИЕ.

Главнейшие формулы.

- Сила = массе \times ускорение: $C = my$ (1).
- Масса = весу : ускорение: $m = \frac{g}{y}$ (3).
- Ускорение силы тяжести: $y = 9,8 \text{ м/сек.}^2$
- Масса = весу : 9,8: $m = \frac{g}{9,8}$ (2).
- Частота есть число оборотов в един. врем: $\mathcal{C} = \mathcal{u}$.
- Период = 1 : число оборотов: $\Pi = \frac{1}{\mathcal{C}} = \frac{1}{\mathcal{u}}$
- При равномерном движении
 путь = времени \times скорость: $n = v.c$ (5).
- При равномерном движении скорость c по
 истечении времени v от начала движе-
 ния = начальной скорости $c_0 +$
 время \times ускорение: $c = c_0 + v.y$ (6).
- Ускорение = разности конечной и начальной
 скоростей, разделенной на время . . . $y = \frac{c - c_0}{v}$ (7).
- Время, протекшее между двумя моментами
 равнопеременного движения, равно раз-
 ности скоростей в эти моменты, раз-
 деленной на ускорение $v = \frac{c - c_0}{y}$ (8).
- Путь = полусумме начальной и конечной
 скоростей \times время: $n = \frac{c_0 + c}{2} . v$ (9).
- Путь = времени \times скорость начала плюс либо
 минус $\frac{1}{2}$ ускорения \times квадрат времени: $n = v.c \pm \frac{1}{2} y.v^2$ (10).
- При трогании с места равно-перем. движе-
 нием, путь = $\frac{1}{2}$ ускорения \times квадрат
 времени $n = \frac{1}{2} y.v^2$ (11),
- или: $\frac{1}{2}$ квадр. скорости : ускорение $n = \frac{1}{2} \frac{c^2}{y}$ (12).
- Скорость при тех же условиях равна квад-
 ратному корню из удвоенного произ-
 ведения ускорения на путь $c = \sqrt{2yn}$ (12a).

Часть I.

Равновесие (Статика).

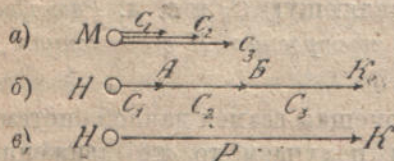
Глава I.

Статика абсолютно твердого тела.

§ 4. Действие сил на точку. 1. Равнодействующая. Если под влиянием нескольких сил точка движется, то движение ее происходит всегда в одну определенную сторону. Такого движения можно было бы достигнуть посредством одной силы, приложенной к той же точке: вместо двух слабых лошадей впрягают одну, более сильную, достигая того же результата.

Сила, действие которой равно действию нескольких сил, называется *равнодействующей*, а те силы, которые она заменяет, называются *слагаемыми* или *составляющими*. Получение равнодействующей по данным составляющим называется *сложением сил*, а обратное действие: по данной равнодействующей нахождение составляющих—называется *разложением сил*.

2. Силы одного направления. Сложение сил. Положим, что на точку M фиг. 8-а действует 3 силы одного направления C_1 , C_2 и C_3 . Оставим силу C_1 у точки M , а силу C_2 перенесем по ее направлению в конец силы C_1 , т. е. в точку



Фиг. 8.

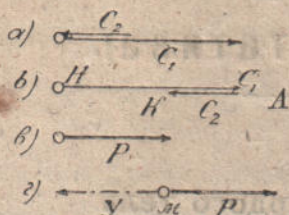
A , как показано на фиг. б). Силу C_3 перенесем в B , соблюдая направление, как требуется по 6 теореме § 3-го.

Тогда получим отрезок $HK=HA+AB+BK$. Если бы взяли одну силу P , выражаемую графически отрезком HK (фиг. в), то

ея действие на точку M было бы то же, что действие 3-х сил C_1, C_2, C_3 . Очевидно, равнодействующая P равна сумме сил C_1, C_2, C_3 . Отсюда правило: равнодействующая сил одного направления равна сумме составляющих. Это выражается формулой:

$$P = C_1 + C_2 + C_3 \dots \dots \dots (13).$$

Когда составляющие имеют разные течения, например, C_1 идет вправо, а C_2 —влево, то задача решается так (фиг. 9-а):



Перенесем C_2 по направлению ее действия в конец силы C_1 , т. е. к точке A (фиг. б), и построим здесь силу C_2 . Тогда часть AK силы HA пропадет, и останется только HK . В этом случае равнодействующая равна разности сил C_1 и C_2 , т. е.

$$P = C_1 - C_2 \dots \dots \dots (14).$$

Фиг. 9.

Но с алгебраической точки зрения, разность можно рассматривать, как сумму, только принимать во внимание знаки слагаемых: плюс или минус; поэтому последнюю формулу можно назвать алгебраической суммой сил, и написать вообще:

$P =$ алг. сумме сил, или символически:

$$P = \Sigma C \dots \dots \dots (15).$$

где греческая буква Σ (сигма) обозначает сумму.

На чертеже равнодействующая получается непосредственно, если строить линию сил по такому правилу: от какой-нибудь точки H построить одну составляющую C_1 , к концу ее пристроить другую C_2 , соблюдая течение этой последней, к концу последней пристроить третью составляющую C_3 и т. д. *Равнодействующая всегда соединяет начало построения H с его концом K* (см. фиг. 8 и 9-б и в).

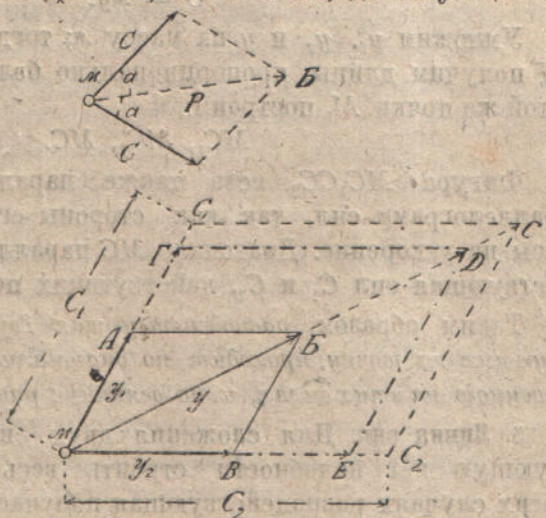
3. Уравновешивающая сила. Помещая взамен данной системы сил их равнодействующую P , мы получаем то же движение, что и от данной системы (фиг. 9-г). Приложим теперь к точке M силу Y , равную и прямопротивоположную равнодействующей P . Тогда на точке будет две равные и прямопротивоположные силы. По 1-й аксиоме § 3, точка остановится и будет в покое. Введенная нами сила Y уравновешивает равнодействующую. Конечно, она с таким же успехом может уравновесить и ту систему

сил, взамен которых поставлена равнодействующая. Таким образом, если к данной системе сил прибавить силу, равную и прямо противоположную равнодействующей, то наступит равновесие. Такая сила называется *уравновешивающей*.

Уравновешивающая сила равна и прямо противоположна равнодействующей.

На фиг. 9-б и в равнодействующая есть *НК*. Обратная сила, *КН*, будет уравновешивающая двух сил *C₁* и *C₂*. *Уравновешивающая соединяет конец линии сил К с ее началом Н* (фиг. 9-б).

4. **Силы под углом** (фиг. 10). Если силы, действующие под углом на точку *М*, равны между собою, то равнодействующая их пройдет посередине между силами и в ту же сторону, куда идут силы *C* и *C*. Иначе сказать, равнодействующая проходит по диагонали ромба, построенного на составляющих. Это очевидно.



Фиг. 10 и 11.

Если же силы, приложенные к точке *М*, неравны, то равнодействующая не будет делить угла *C* и *C* пополам; но как она пройдет? На этот вопрос мы ответим, рассматривая ускорения.

Положим, что на фиг. 11 точка *М* имеет одновременно два ускорения: *МГ* = *y₁* и *МЕ* = *y₂*; каково будет результирующее ускорение точки *М*?

По формуле (11), путь, проходимый точкою в единицу времени, например, 1 секунду:

$$n = \frac{1}{2} y_1 t^2 = \frac{1}{2} y_1 \cdot 1 = \frac{1}{2} y_1 \dots \dots \dots (16).$$

На этом основании мы можем описать наше движение так: благодаря ускорению *y₁*, точка *М* в 1 секунду проходит путь

MA ; но в то же время, благодаря ускорению y_2 прямая MA , двигаясь своею точкою M по ME , прошла путь MB . В результате точка M оказалась в B , т. е. точка совершила путь MB .

По форм. (16), путь $MB = n = \frac{1}{2} y$. Следовательно, ускорение y будет MD .

Таким образом, результирующее ускорение точки M равно диагонали параллелограмма, построенного на составляющих ускорениях.

Сила есть произведение массы на ускорение, т. е.

$$C = my.$$

Умножим y_1 , y_2 и y на массу m ; тогда вместо MG , ME и MD получим длины, пропорционально большие. Откладывая их от той же точки M , построим:

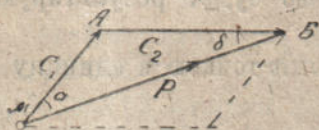
$$MC_1, MC_2, MC.$$

Фигура MC_1CC_2 есть также параллелограмм и притом параллелограмм сил, так как стороны его суть произведения массы на ускорение. Диагональ MC параллелограмма есть равнодействующая сил C_1 и C_2 , действующих по его сторонам.

Таким образом, равнодействующая двух неравных сил, действующих на точку, проходит по диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, и по величине равна этой диагонали.

5. Линия сил. Для сложения двух сил в одну равнодействующую нет надобности строить весь параллелограмм. Во многих случаях равнодействующая получается проще и быстрее, если воспользоваться треугольником сил, показанным на фиг. 12.

Для определения равнодействующей сил C_1 и C_2 фиг. 12 от произвольной точки M вычерчивают отрезок $MA = C_1$, выражающий в определенном масштабе величину силы C_1 и идущий в ту же сторону, что и сила C_1 ; от конца A таким же образом вычерчивают отрезок AB , равный и параллельный C_2 . Тогда равнодействующая получается в виде отрезка MB , дающего направление, величину и течение. Это следует из того, что треугольник $MAБ$ фигуры 12 равняется треугольнику MC_1C фигуры 11, составляя половину параллелограмма.



Фиг. 12.

Равнодействующая есть отрезок, соединяющий начало построения M с концом построения B .

Если к данным силам C_1 и C_2 фиг. 11 прибавить силу $У$, равную P , совпадающую с P по направлению, но противоположную, то система трех сил C_1 , C_2 и $У$ уравнивается:

сила $У$ есть уравнивающая данные силы. На фиг. 12 эти три уравнивающиеся силы $МА$, $АВ$ и $ВМ$ представляют треугольник с течением в одну сторону.

Таким образом, уравнивающая для двух сил C_1 и C_2 представляет замыкающую сторону треугольника, построенного на силах C_1 и C_2 , причем под замыкающей подразумевается прямая, которая соединяет конец второй силы с началом первой и имеет течение, которое служит продолжением течения данных сил C_1 и C_2 . Другими словами:

уравнивающая сила есть отрезок, соединяющий конец построения B с началом построения M .

Отсюда следует, что если из совокупности трех уравнивающихся сил дана величина, направление и течение двух сил, то третья сила вполне определится замыкающей стороной треугольника, построенного на данных силах. Обратное: если дана одна из трех уравнивающихся сил, то две другие могут быть найдены путем построения треугольника на данной силе, понятно, при условии, что известны другие геометрические элементы, определяющие этот треугольник.

Построение треугольника или параллелограмма по данным силам называется геометрическим сложением сил, а замыкающая их диагональ — называется геометрической суммой сил.

При большом числе сил, пересекающихся в одной точке, (фиг. 13) построение треугольника сил можно применить последовательно для

двух сил, напр: сначала построить равнодействующую P_1 сил C_1 и C_2 (фиг. 13-б); затем сложить P_1 с силою C_3 в



Фиг. 13.

равнодействующую P_2 ; далее P_2 сложить с C_4 . В результате

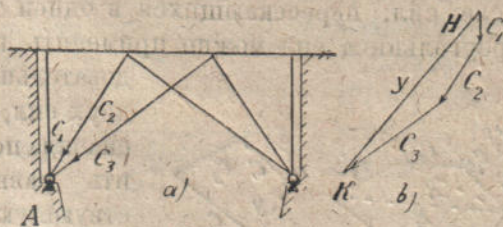
получится равнодействующая P . Противоположная ей сила U , по величине, направлению и течению представит уравнивающую системы данных сил.

Не трудно видеть, что для получения уравнивающей нет надобности вычерчивать промежуточные отрезки P_1 и P_2 . Можно найти U на фиг. 13-б, откладывая лишь последовательно одну за другою силы C_1, C_2, C_3 и C_4 , а именно: от произвольной точки H на фиг. 13-б начертить C_1 , через конец ее начертить C_2 в сторону течения силы C_2 , через конец отрезка C_2 начертить C_3 в сторону течения силы C_3 и у конца последнего отрезка—поместить начало силы C_4 и, по течению ее, отложить величину C_4 . Тогда замыкающая, идущая от конца отрезка C_4 к началу C_1 по величине, направлению и течению представит уравнивающую данных сил C_1, C_2, C_3 и C_4 . Точка приложения равнодействующей совпадает с общей точкой M пересечения данных сил (фиг. 13-а).

Следует иметь в виду, что порядок, в котором совершается геометрическое сложение сил, не имеет значения. Вместо того, чтобы складывать силы в порядке C_1, C_2, C_3 и C_4 , как на фиг. 13-б, их можно соединить в порядке C_1, C_3, C_4 и C_2 , как на фиг. 13-в.

Фигуры б) и в) будем называть *линиями сил*. Проведя замыкающую, — получим многоугольник сил. В многоугольнике сил, как и в линии сил, стороны могут случайно и перекрещиваться (фиг. в).

Пример. Устой деревянного подкосного моста фиг. 14 уравнивает усилия всех трех подкосов, упирающихся в подушку A , так как подушка находится в покое. Требуется найти уравнивающую силу, если усилие стойки = 1 т., усилие среднего подкоса = 3 т., усилие наружного — 5 т.

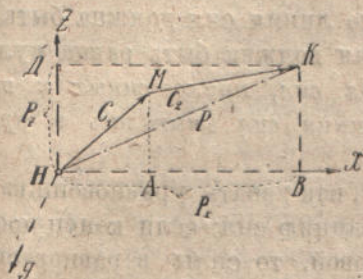


Фиг. 14.

Для определения силы устоя строим на фиг. б отрезки C_1, C_2, C_3 , которые выражают в принятом масштабе сил (1 т. = 5 мм.) величину данных усилий, имеют направления, параллельные соответствующим усилиям, и идут в ту же сторону, что и

данные усилия. При этом начало каждого последующего отрезка совмещаем с концом предыдущего. Получим разомкнутую линию $C_1 C_2 C_3$. Искомая сила есть замыкающая сторона этой линии сил, по величине равная 8,6 т., имеющая направление $У$ и течение от K к H .

6. **Формула для равнодействующей.** Геометрическая теорема: проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих (фиг. 15).



Фиг. 15.

Проекцией силы C_1 на ось X называется отрезок оси X между перпендикулярами, опущенными из концов силы на ось X , т. е. отрезок HA . Проекция силы C_2 на ту же ось X есть отрезок оси AB . Таким же образом, проекция

равнодействующей P есть отрезок HB .

Непосредственно по чертежу напишем: $HB = HA + AB$, — т. е. строку, доказывающую предложенную теорему:

$$\text{пр. } P = \text{пр. } C_1 + \text{пр. } C_2 \dots \dots \dots (17).$$

Обозначим проекцию равнодействующей: пр. P через P_x , проекцию силы C_1 через X_1 , проекцию C_2 через X_2 ; тогда теорема напишется в форме:

$$P_x = X_1 + X_2, \text{ или символически: } P_x = \Sigma X, \dots \dots (18),$$

где знак Σ (сигма) обозначает сумму.

То же можно написать для оси Z :

$$P_z = Z_1 + Z_2 = \Sigma Z \dots \dots \dots (19).$$

Из фиг. 15 ясно, что равнодействующая P служит диагональю прямоугольника $HAKB$, построенного на проекциях P_x и P_z ; а потому $HK^2 = HB^2 + BK^2$, или

$$P^2 = P_x^2 + P_z^2, \text{ откуда } P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2},$$

$$\text{или } P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Z^2} \dots \dots \dots (20).$$

7. **Многоугольник сил. Условия равновесия.** При определении равнодействующей для системы нескольких сил мы строим линию сил путем прикладывания начала каждой следующей силы к концу предыдущей. Равнодействующая равна отрезку, соеди-

няющему начало линии сил с ее концом. Но может случиться, что конец линии сил упадет в начало; тогда равнодействующая равна нулю. Здесь не будет причины, побуждающей точку к движению; точка окажется в покое. Силы сами собою уравновешиваются.

Итак, если линия сил сама собою замыкается, то система сил—в равновесии. Конечно, справедливо и обратное положение: если система сил в равновесии, то линия сил должна быть замкнутою, так как равнодействующая должна быть равна нулю.

Таким образом, для равновесия сил, приложенных к точке, необходимо и достаточно, чтобы линия сил смыкалась и превращалась в многоугольник сил.

Отсюда приходим к правилу, как узнать, уравновешиваются ли данные силы: надо построить линию сил; если конец последней силы попадет в начало первой, то силы в равновесии, в противном случае—они в движении.

Условия равновесия можно получить также и по формуле для равнодействующей (20). Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы $P = 0$, т. е., чтобы было:

$$P = V \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Z^2} = 0$$

Квадраты—всегда числа положительные; поэтому сумма их может быть нулем лишь при условии, что

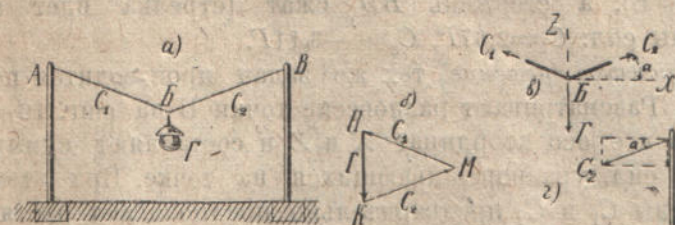
$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Z = 0 \dots \dots \dots (21).$$

В этом и заключаются условия равновесия сил для точки.

8. Разложение сил. Когда мы складываем две силы C_1 и C_2 на фиг. 12, то получаем равнодействующую, идущую от начала M до конца B линии сил C_1 , и C_2 . Если бы нам была дана равнодействующая MB и требовалось отыскать составляющие C_1 и C_2 , то одну из них надо было бы вести от начала равнодействующей, а другую с конца, до взаимного пересечения A . На этом основании, для разложения данной силы P , через начало ее M проводят линию MA , параллельную одной из искомым составляющих; через конец B равнодействующей проводят линию BA , параллельную другой составляющей. Линии продолжают до взаимного пересечения A .

Это действие есть построение треугольника по данной стороне P и направлению двух других сторон MA и BA , иначе сказать: построение треугольника по стороне P и двум прилежащим к ней углам a и b (фиг. 12).

9. **Примеры.** а). Груз Γ (фиг. 16 а) подвешен на проволоках BA и BV к столбам A и B . Так как груз в покое, то вес его уравновешивается



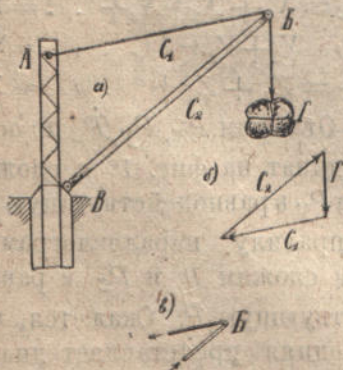
Фиг. 16.

силами натяжения проволок в точке B . Здесь уравновешивается 3 силы, из которых одна, именно груз Γ , вполне известна; для двух прочих сил C_1 и C_2 известны направления, и требуется найти только их величину.

На фиг. б от произвольной точки H строим груз Γ ; через его начало H проводим линию HM параллельную искомой силе C_1 , через конец K груза Γ проводим KM , параллельную другой искомой C_2 . Получим треугольник уравновешивающихся сил.

Течение этих сил должно быть в одну сторону; поэтому, приняв на фиг. б, течение данного груза Γ вниз, идем от H к K , продолжаем течение по C_2 от K к M , наконец идем по C_1 от M к H . Делая этот обход треугольника $\Gamma C_2 C_1$, отмечаем течение сил стрелками, как сделано на фиг. б).

Полученные стрелки суть силы, уравновешивающиеся на точке B ; поэтому относим их к точке B , как сделано на фиг. в). Становится ясным, что проволоки BA и BV растянуты, так как стрелки идут от узла B ; по измерению усилие их равно $1,6 \Gamma$.



Фиг. 17.

б) Кран для поднятия грузов, изображенный на фиг. 17.

Груз Γ удерживается стержнями BV и BA , так что узел B — в равновесии. Из трех сил узла одна Γ вполне известна, а для двух прочих дано направление BV и BA . Задача напоминает предыдущую. Строим на фиг. б груз Γ и через начало и конец проводим линии, параллельные искомым усилиям C_1 и C_2 . Обходим треугольник $\Gamma C_1 C_2$ (фиг. б) по течению груза Γ , и стрелки сил переносим на фиг. а)

к узлу В, равновесие которого мы рассматриваем (см. фиг. 6). Тогда убедимся, что стержень BA растянут (стрелка на фиг. 6 идет от узла В), а стержень BB сжат (стрелка идет к узлу). Величины сил: $C_1 = 2,67G$, $C_2 = -3,11G$.

в) Аналитическое решение тех же задач производится по формулам (21). Рассматривают равновесие точки В на фиг. 16-в, проводят через нее оси координат X и Z и составляют сумму проекций всех сил, уравнивающих на точке. При этом неизвестные силы C_1 и C_2 предварительно предполагают растягивающими и выражают это стрелками, идущими от узла. Первое из уравнений (21) дает:

$$\Sigma X = 0 = -C_1 \cos a + C_2 \cos a, \text{ или по сокращении на } a: \\ C_1 = C_2.$$

Второе уравнение из (21): $\Sigma Z = 0 = C_1 \sin a + C_2 \sin a - G$ дает после подстановки $C_2 = C_1$:

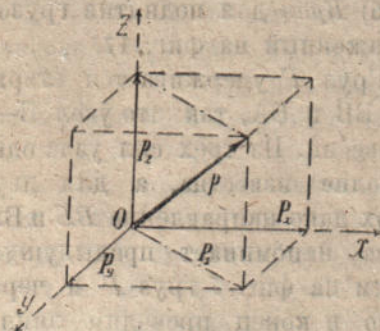
$$2C_1 \sin a = G; \text{ откуда } C_1 = \frac{G}{2 \sin a} \dots \dots \dots (22).$$

10. **Силы в пространстве.** Вообразим несколько сил, действующих на точку, в пространстве. Отнесем их к осям координат $OXYZ$ (фиг. 18). Построим мысленно из этих сил линию сил, как в предыдущем случае, т. е. прикладывая начало каждой последующей силы к концу предыдущей и соблюдая течение. Тогда, соединяя начало линии сил с концом, получим равнодействующую.

На основании предыдущей теоремы раздела 6, проекции равнодействующей выразятся через сумму проекций составляющих:

$$P_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma X; \\ P_y = Y_1 + Y_2 + \dots = \Sigma Y; \\ P_z = Z_1 + Z_2 + \dots = \Sigma Z.$$

Отложим P_x, P_y, P_z по осям координат на фиг. 18 и сложим P_x и P_y в равнодействующую P_1 по правилу параллелограмма; затем сложим P_1 и P_z в равнодействующую P . Окажется, что последняя представляет диагональ параллелепипеда, построенного на проекциях



Фиг. 18.

наль параллелепипеда, построенного на проекциях

$$P_x, P_y, P_z.$$

Известно, что диагональ прямоугольника

$$P^2 = P_1^2 + P_z^2; \text{ в свою очередь } P_1^2 = P_x^2 + P_y^2, \text{ поэтому}$$

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2, \text{ или } P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2} \dots (23).$$

Равновесие сил будет в том случае, когда равнодействующая окажется равной нулю, так как в этом случае не будет никакой причины, побуждающей точку к движению:

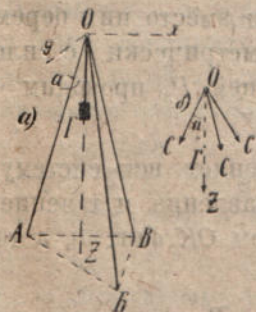
$$\sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2} = 0.$$

Квадраты всегда числа положительные; сумма их может быть нулем, лишь при условии, что

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0 \dots \dots \dots (24).$$

Таковы условия равновесия сил в пространстве. Они заключаются в том, что сумма проекций всех сил на 3 оси координат равна нулю. Пользуясь ими, мы легко определим, находятся ли данные силы точки в равновесии: надо спроектировать все силы на ось X и взять сумму проекций; то же надо сделать для других осей Y и Z . Если сумма проекций для всех трех осей порознь равна нулю, то силы — в равновесии; в противном случае — точка приложения сил движется.

Разложение силы. Три уравнения (24) решаются задачи о равновесии сил, в числе которых может быть 3 неизвестных.



Фиг. 19.

Пример. Определим, какие силы AO BO и BO' удерживают груз Γ , подвешенный к вершине треноги фиг. 19. Направим ось OZ вертикально вниз и спроектируем на нее все силы точки O . Полагая, что ноги сооружения идут по ребрам правильной пирамиды, заключаем, что усилия их одинаковы. Обозначим эти усилия C ; тогда уравнение $\Sigma Z = 0$ даст:

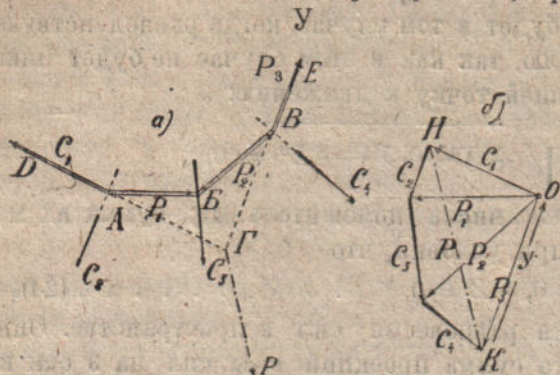
$$3 C \cdot \cos a + \Gamma = 0; \text{ откуда } C = -\frac{\Gamma}{3 \cos a} \dots \dots (25).$$

Знак минус указывает, что предположенное течение сил C

на фиг. б) надо изменить на обратное: стрелки C надо повернуть к узлу O . Таким образом убеждаемся в том, что ноги сооружения сжаты.

§ 5. Плоская система сил, не пересекающихся в одной точке.

1. Сложение сил. Равнодействующую сил, произвольно расположенных на плоскости, можно найти путем последовательного сложения двух сил.



Фиг. 20.

которую берем на фиг. б) путем построения треугольника $C_1C_2P_1$.

Силы C_1 и C_2 отбрасываем и заменяем их равнодействующею P_1 ; продолжаем ее до пересечения B , чтобы сложить с силою C_3 в равнодействующую P_2 . (Для получения величины и направления равнодействующей P_2 строим у конца силы P_1 фиг. б) слагаемую C_3 и замыкаем линию P_1C_3 прямою P_2).

Теперь отбрасываем силы C_3 и P_1 и вместо них берем равнодействующую P_2 . Складываем ее геометрически с силою C_4 на фиг. б) и направление равнодействующей P_3 проводим через точку пересечения B фигуры а).

Мы пришли к силе P_3 , которая заменяет всю систему данных сил C_1, C_2, \dots, C_4 . Величина, направление и течение этой равнодействующей определяется отрезком OK фиг. б), а точкою приложения служит B фигуры а).

Если в точке B фиг. а, вместо силы P_3 приложить силу U , противоположную и равную P_3 , то система сил уравнивается. Как и в предыдущих примерах, все уравнивающиеся силы образуют на фиг. б) сомкнутый многоугольник сил с непрерывным течением в одну сторону $OHC_2C_3C_4UO$.

Продолжаем силы C_1 и C_2 фиг. 20, до взаимного пересечения их в точке A ; через A проводим равнодействующую P_1 ,

которую берем на фиг. б) путем построения треугольника $C_1C_2P_1$.

2. **Веревочная линия.** При сложении сил указанным способом получается величина, направление и точка приложения их равнодействующей. Однако этим способом не всегда удобно и возможно пользоваться. Если углы между силами малы, то точки их пересечения A, B, B могут оказаться за пределами чертежа или же, хотя и помещаются на чертеже, но силы пересекаются под таким острым углом, при котором нельзя точно указать точку их пересечения. При параллельных же силах этот способ вовсе неприменим.

Есть другой способ нахождения равнодействующей; это— построение *веревочной линии*, или многоугольника Вариньона.

Сила Y , приложенная в точке B (фиг. 20-а), есть уравнивающая данных сил C_1, C_2, C_3, C_4 ; следовательно, присоединяя ее к данным силам, мы получим систему уравнивающих сил.

Если система сил в равновесии, то одна какая-нибудь группа из этих сил уравнивает все остальные силы; можно сказать, что силы C_1 и Y уравнивают группу сил C_2, C_3, C_4 , т. е. действия двух групп сил C_1, Y и C_2, C_3, C_4 одинаковы.

Отсюда следует, что равнодействующая одной группы C_2, C_3, C_4 равна и прямо противоположна равнодействующей другой группы C_1 и Y , и потому, можно найти равнодействующую более простой системы двух сил C_1 и Y , вместо того, чтобы определять равнодействующую сил C_2, C_3 и C_4 .

Направление, течение и величина равнодействующей P получится, если соединить точки H и K (фиг. б). Положение же равнодействующей на плане сил (фиг. а) определяется тем, что она проходит через точку пересечения составляющих C_1 и Y ; поэтому: продолжаем C_1 и Y до взаимного пересечения в точке G и через эту точку проводим равнодействующую P , для которой направление, течение и величину берем с фиг. б).

Это рассуждение приводит к заключению, что три силы C_2, C_3, C_4 могут быть уравновешены двумя: C_1 и Y . Так уравниваются силы C_2, C_3, C_4 на веревке $ДАВВЕ$, прикрепленной к точкам D и E .

При действии на веревку сил C_2, C_3, C_4 в ее частях возникают усилия C_1, P_1, P_2, Y . Оказывается, что если продолжить

первое C_1 и последнее $У$ усилия веревки до взаимного пересечения Γ , то определится положение равнодействующей P .

Будем называть чертеж, где находятся данные силы C_2, C_3, C_4 (фиг. а), *планом сил*; линию ДАВВЕ назовем *веревочной линией*, а фигуру б), где строится линия сил и определяются величины сил, назовем *диаграммой сил*. Точку O , откуда расходятся силы $C_1, P_1, P_2, У$, — назовем *полюсом*, а линии этих сил — *лучами*. Тогда все сделанное построение можно будет описать так: для определения равнодействующей нескольких сил C_2, C_3, C_4 фиг. а) строим на фиг. б) линию сил от точки H до точки K . Отрезок HK , соединяющий начало с концом линии сил, дает направление, величину и течение равнодействующей. Чтобы определить положение равнодействующей на плане сил, избираем на фиг. б) произвольный полюс O и проводим из него лучи к вершинам линии сил; затем, на плане сил (фиг. а) строим веревочную линию ДАВВЕ из сторон, параллельных лучам фигуры б). Равнодействующая пройдет через точку пересечения Γ первой и последней стороны полученной таким образом веревочной линии.

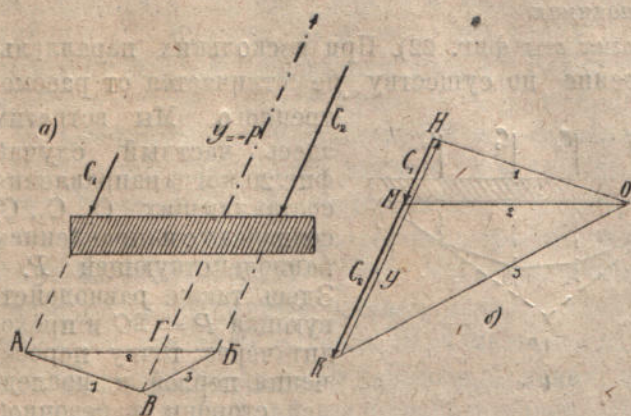
Линию сил можно начинать с любой точки H (фиг. б); точно также произвольным может быть и начало веревочной линии на фигуре а), ибо если можно перемещать силы по их направлению, то возможно перемещать вдоль них и веревочную линию, надо только следить за тем, чтобы прямые, образующие с какой-нибудь силой треугольник равновесия на фиг. б), пересекались с тою же силою фигуры а) в одной общей точке. Это вытекает из начальных рассуждений § 5,1, в которых отмечалось, что для сил, пересекающихся в одной точке фигуры а), мы строим на фиг. б) треугольник сил.

§ 6. **Параллельные силы.** 1. Изложенное в предыдущем 2-ом разделе § 5 относится ко всякой системе сил, расположенных в одной плоскости; оно относится также и к частному случаю, к параллельным силам.

Чтобы найти уравновешивающую двух параллельных сил C_1 и C_2 фиг. (21), строим из них линию сил HMK на фиг. б). Так как силы параллельны, то линия сил представляет прямую. Уравновешивающая соединяет конец K этой линии с ее началом. Очевидно, она равна сумме сил:

$$У = C_1 + C_2 \dots \dots \dots (26).$$

Направление уравнивающей параллельно направлению



данных сил; течение же — обратное. Положение уравнивающей определяется точкою *B* пересечения первой и последней стороны веревочной линии^{*)}.

Фиг. 21.

АГВ и *НОМ* находим: $C_1 : MO = GB : AG$, или $C_1 \cdot AG = MO \cdot GB$.

Из треугольников *ВГБ* и *МОК* имеем:

$$C_2 : MO = GB : GB, \text{ или } C_2 \cdot GB = MO \cdot GB.$$

Так как правые части этих равенств равны, то

$$C_1 \cdot AG = C_2 \cdot GB. \dots \dots \dots (27).$$

Отсюда пропорция: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{GB}{AG}$, или $\frac{C_1}{GB} = \frac{C_2}{AG}$:

составляющие обратно пропорциональны расстояниям из до равнодействующей, или: отношение силы к расстоянию между двумя другими силами есть величина постоянная.

Составим производную пропорцию для суммы членов предыдущих и последующих:

$$\frac{C_1 + C_2}{GB + AG} = \frac{C_1}{GB}, \text{ или по (26): } \frac{P}{AB} = \frac{C_1}{GB}.$$

Присоединяя к предыдущей пропорции, получаем

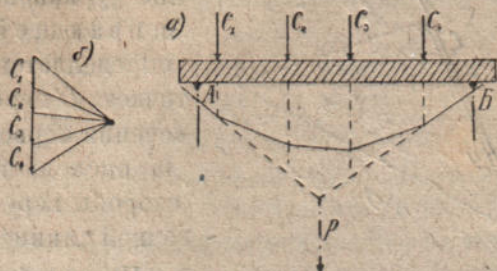
$$\frac{C_1}{GB} = \frac{C_2}{AG} = \frac{P}{AB} : \dots \dots \dots (28)$$

более общую зависимость между силами и расстояниями; она устанавливает, что отношение любой из трех параллельных уравни-

*) Согласно последнему правилу § 5, 2, из произвольного полюса *O* (фиг. б) проводим лучи 1, 2, 3 к вершинам *H, M, K* линии сил. Так как лучи 1 и 2 образуют с силой C_1 треугольник, то они должны пересекаться с C_1 на фиг. а в одной точке; поэтому проводим параллели к лучам 1 и 2: одну до пересечения *A* с силой C_1 , а другую — от точки *A* дальше, до силы C_2 . Наконец от точки пересечения *B* проводим параллель к лучу 3. Получаем веревочную линию 1, 2, 3 (фиг. а).

повешивающихся сил к расстоянию между двумя другими силами есть величина постоянная.

2. *Случай многих сил* (фиг. 22). При нескольких параллельных силах построение по существу не отличается от рассмотренного.

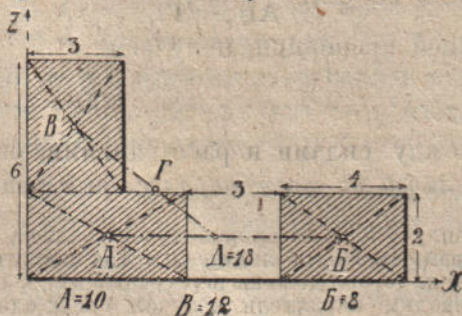


Фиг. 22.

Мы встретим здесь частный случай фиг. 20, когда направления составляющих C_2, C_3, C_4 совпадают с направлением равнодействующей P . Здесь также равнодействующая $P = \Sigma C$ и проходит через точку пересечения первой и последней стороны веревочной линии.

3. **Центр параллельных сил.** Любую точку на направлении силы P можно принять за точку приложения равнодействующей. Из всех этих точек одна точка Γ обладает особым свойством: при всех поворотах системы сил она сохраняет свое положение, так как всегда должна удовлетворять условию (28). Если систему сил C_1 и C_2 повернуть на некоторый угол, то и равнодействующая повернется на тот же угол (ибо она всегда параллельна составляющим), но всегда будет проходить через точку, разделяющую расстояние между точками приложения сил C_1 и C_2 на части, обратно пропорциональные этим силам. Эта особенная точка называется *центром параллельных сил*.

4. **Центр тяжести.** Силы тяжести частиц какого-нибудь тела параллельны между собой, так как все они вертикальны. Центр сил тяжести всех частиц тела называется *центром тяжести тела*.



Фиг. 23.

Покажем, как находится центр тяжести площадей или пластинок, например, центр тяжести цилиндрической чугунной отливки, профиль которой изображен на фиг. 23.

Разобьем профиль на 3 прямоугольника и в центрах тяжести их A, B, B вообразим силы, численно равные площадям этих

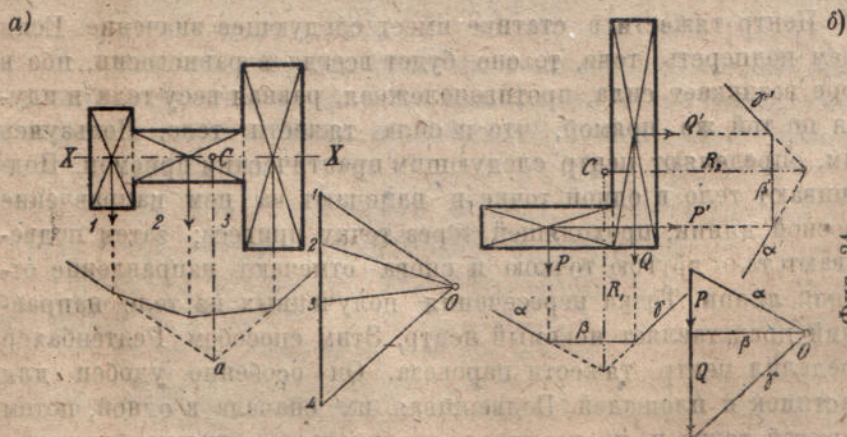
прямоугольников: силу $A=10 \text{ см.}^2$, силу $B=8 \text{ см.}^2$ и силу $C=12 \text{ см.}^2$. Найдем центр двух сил A и B , для чего соединим их точки приложения прямою AB и разделим длину AB на части, обратно пропорциональные величинам сил A и B . Получим точку D . Здесь вообразим силу, равную сумме $A+B$, т. е. 18 см.^2 .

Соединяя D и C прямою DC и разделяя ее на части, обратно пропорциональные числам 12 и 18 , определим требуемый центр тяжести G данного профиля.

Ту же задачу можно решить графически. Разбивши профиль на элементарные прямоугольники, вообразим в их центрах силы, численно равные площадям этих прямоугольников. Проведем все эти силы сначала параллельно одной из осей, например, Z ; путем построения веревочной линии, как в § 5,2 и § 6,2, определяем положение равнодействующей. Затем проведем те же силы и через те же точки, но параллельно другой оси, X , и снова определим положение равнодействующей. Центр должен находиться на обеих линиях равнодействующей. Очевидно, он лежит в их пересечении.

При таком построении мы как бы повернули параллельные силы на прямой угол: от оси Z до оси X . По § 6,3 при поворачивании системы неподвижным оказывается центр сил. Он и является центром тяжести профиля. Таким же образом находится центр тяжести для любой плоскости фигуры.

На фиг. 24 показано определение центра тяжести для симметричного (фиг. а) и для несимметричного (фиг. б) профиля железа.



Фиг. 24

Мы нашли центр тяжести площади. Но разобьем любое

призматическое тело сечениями, перпендикулярными к его ребрам; получим в сечениях одинаковые плоские фигуры и в них — одинаковые положения центра тяжести. Вообразим теперь последовательно расположенными близкие сечения призмы с их центрами тяжести и соединим центры мысленно линией. Линия окажется прямою. Сосредоточим на этой прямой вес призматических элементов — получим ряд параллельных сил. Очевидно, центр их будет посередине прямой. Таким образом, *центр однородной призмы находится посередине прямой, соединяющей центры тяжести оснований призмы.*

Тоже можно сказать и о цилиндре.

Прямой тонкий стержень представляет частный случай призмы, когда сечение мало. Очевидно: *центр тяжести однородного прямого стержня находится посередине его.*

Путем таких же рассуждений придем к следующим выводам.

Центр тяжести окружности, эллипса, периметра правильного многоугольника лежит в геометрическом центре этих фигур. Там же находится и центр тяжести площадей этих фигур.

Центр тяжести шара и эллипсоида также совпадает с геометрическим центром.

Центр тяжести пирамид и конусов лежит на их оси.

Определению центров тяжести других фигур и общим теоремам о центре тяжести будет посвящен отдельный параграф. Здесь мы ограничимся лишь общими замечаниями.

Центр тяжести в статике имеет следующее значение. Если в нем подпереть тело, то оно будет всегда в равновесии, ибо в опоре возникает сила, противоположная, равная весу тела и идущая по той же прямой, что и сила тяжести тела. Пользуясь этим, определяют центр следующим практическим приемом. Подвешивают тело в одной точке и намечают на нем направление отвесной линии, проходящей через точку привеса; затем подвешивают тело другою точкою и снова отмечают направление отвесной линии. Точка пересечения полученных на теле направлений представляет искомый центр. Этим способом Редтенбахер определил центр тяжести паровоза. Он особенно удобен для пластинок и площадей. Подвешивая их сначала в одной, потом в другой точке и прочерчивая вертикальные прямые, находим центр тяжести, как пересечение этих прямых.

Следующий общий способ определения центра тяжести представляет вычисление координат.

5. Координаты центра тяжести, как центра параллельных сил. Рассмотрим сначала две силы: C_1 и C_2 , равнодействующая которых есть P (фиг. 25). Положим, что координаты точек приложения составляющих C_1 и C_2 есть x_1, z_1 и x_2, z_2 и обозначим координаты искомого центра B через x и z . Тогда по (27) напишем:



Фиг. 25.

$C_1 : C_2 = BB_1 : AB_1$.

А так как расстояния BB_1 и AB_1 пропорциональны B_1V_1 и AB_1 , то

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{BB_1}{AB_1} = \frac{B_1V_1}{AB_1} = \frac{z_2 - x}{x - x_1}$$

Точно также $\frac{C_1}{C_2} = \frac{BB_1}{BB_1} = \frac{z_2 - z}{z - z_1}$.

Решая эти уравнения относительно x и z , найдем:

$C_1x - C_1x_1 = C_2x_2 - C_2x$ и $C_1z - C_1z_1 = C_2z_2 - C_2z$,
или $(C_1 + C_2)x = C_1x_1 + C_2x_2$ и $(C_1 + C_2)z = C_1z_1 + C_2z_2$.

Заметявши, что $C_1 + C_2 = P$, или—сумме сил ΣC , можем переписать

$x\Sigma C = Px = C_1x_1 + C_2x_2$ и $z\Sigma C = Pz = C_1z_1 + C_2z_2$.

В правых частях этих равенств написаны суммы произведений силы и расстояния ее точки приложения до оси. Такие суммы произведений называются статическими моментами относительно оси, а именно:

$C_1x_1 + C_2x_2$ есть статический момент относительно оси Z ,

$C_1z_1 + C_2z_2$ — статический момент относительно оси X .

Обозначим их знаками ΣCx и ΣCz ; тогда последние равенства дадут

$x\Sigma C = \Sigma Cx$ и $z\Sigma C = \Sigma Cz$.

Отсюда координаты центра параллельных сил:

$x = \frac{\Sigma Cx}{\Sigma C}$ и $z = \frac{\Sigma Cz}{\Sigma C}$ (29).

Распространим вывод на случай многих сил. Положим, что действует на точки тела несколько параллельных сил $C_1, C_2, C_3 \dots$ приложенных в точках 1, 2, 3... с координатами $x_1, z_1; x_2, z_2; x_3, z_3 \dots$. Применяя к каждому двум силам последовательно предшествующие рассуждения и формулы, получим координаты центра. Например, по отношению к оси Z , найдем расстояние

$$x = \frac{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \dots}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} = \frac{\Sigma Cx}{\Sigma C}$$

$$\text{Расстояние до оси } X \text{ будет } z = \frac{\Sigma Cz}{\Sigma C}.$$

Таким образом, чтобы определить координату центра тяжести, надо статический момент разделить на равнодействующую.

Пример. Применим этот способ к примеру фиг. 23; придется в формулу (29) лишь подставить числа фигуры 23. Получим:

$$x = \frac{10 \cdot 2,5 + 8 \cdot 10 + 12 \cdot 1,5}{10 + 8 + 12} = 4,1 \text{ см.}$$

$$z = \frac{10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 4}{10 + 8 + 12} = 2,8 \text{ см.}$$

Проводя на расстояниях 4,1 и 2,2 см. перпендикуляры к осям X и Z , получим точку пересечения Γ — центр тяжести фигуры 23.

§ 7. Противоположные параллельные силы. 1. Три силы фигуры 21: C_1, C_2, U взаимно уравниваются. Можно сказать, что любая из них уравнивает две другие, например: сила C_2 уравнивает силы U и C_1 . И если бы мы задались целью найти уравнивающую для двух сил C_1 и U , то неизбежно пришли бы к силе C_2 .

Отсюда ясно, что уравнивающая C_2 для двух противоположных сил находится из той фигуры, которая была построена для сил параллельных, но идущих в одну сторону. Очевидно, все зависимости, которые были выведены по фиг. 21, сохраняются и для противоположных сил. Следовательно:

а) уравнивающая двух противоположных параллельных сил U и C_1 равна разности сил: $U - C_1 = C_2$, ибо было показано, что $U = C_1 + C_2$;

б) отношение уравнивающей C_2 к расстоянию между

двумя составляющими $АГ$ равно отношению между любой силой и расстоянием между двумя другими составляющими, т. е.

$$\frac{C_2}{АГ} = \frac{C_1}{ГБ}. \text{ Отсюда находим } ГБ = АГ \cdot \frac{C_1}{C_2},$$

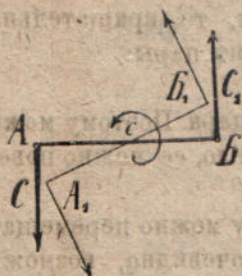
расстояние, определяющее положение искомой уравнивающей силы.

2. Пара сил. Если противоположные параллельные силы равны между собою, то по форм. $C_2 = Y - C_1$, получаем

$$C_2 = Y - C_1 = C_1 - C_1 = 0,$$

т. е. нет одной такой силы, которая уравнивает две противоположные параллельные силы. Очевидно, они всегда производят движение. Рассмотрим, каково это движение.

Свяжем две силы C и C_1 фиг. 26



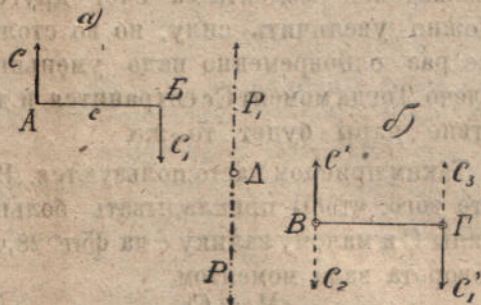
Фиг. 26.

перпендикуляром c и положим, что система свободна. Тогда левая сила C , перемещая точку A вниз, в положение A_1 , стремится вращать перпендикуляр c вниз. Точно также правая сила C_1 вращает другой конец перпендикуляра вверх. Таким образом, вся система вращается обратно часовой стрелке.

Система двух равных противоположных сил называется *парой сил*. Перпендикулярное расстояние между силами называется *плечом пары*. Произведение из силы на плечо наз. *моментом пары*; оно характеризует способность пары производить вращение и обозначается буквою M .

3. Параллельный перенос пары. Действие пары на тело не

изменяется от параллельного ее перемещения. Положим, что на тело действует пара $C-C_1$ фиг. 27-а. Возьмем на фиг. б отрезок $ВГ$, равный и параллельный $АВ$ фигуры а. Приложим к концам этого отрезка по две противоположные силы, равные силам C .



Фиг. 27.

Силы C_1 и C_2 заменяются равнодействующею P , приложен-

ною посередине между силами, в точке D , и равную сумме сил $C_1 + C_2 = 2C$. Точно также силы C и C_3 заменяются равнодействующей P_1 , равную сумме $C + C_3 = 2C$ и приложенною в той же точке D .

Силы P и P_1 , как равные и противоположные, взаимно уничтожаются. Следовательно, на теле остаются только две силы C' и C'_1 , образующие пару с плечом BG . В этой новой паре силы и плечо равны соответственно силам и плечу данной пары; поэтому можно считать, что данная пара из положения AB перенесена в положение BG .

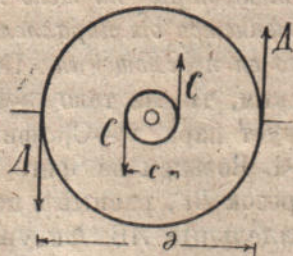
4. Поворот пары. Действие пары не изменяется от вращения ее в своей плоскости. Действительно, если расстояние между силами (плечо) и величина сил не изменяется, и прямой угол между плечом и силами также сохраняется, то вращательная способность пары остается неизменной. Момент пары:

$$M = Cc$$

не зависит от того, на сколько повернется пара. Поэтому можно сказать, что, не изменяя действия пары на тело, ее можно повернуть на любой угол.

5. Произвольный перенос пары. Если пару можно перемещать поступательно и можно поворачивать, то, очевидно, возможно всякое перемещение пары в ее плоскости.

6. Преобразование пар. В паре сил нас всегда интересует момент пары, определяющий способность пары производить вращение. Мы говорим также, что моменты вращения равны, если у двух пар произведения C на c одинаковы. При этом силы и плечи могут быть различны. Это позволяет изменять один из множителей момента за счет другого. Можно увеличить силу, но во столько же раз одновременно надо уменьшить плечо. Тогда момент Cc сохранится, и действие пары будет то же.



Фиг. 28.

Таким приемом часто пользуются. Вместо того, чтобы прикладывать большие силы C к малому валику c на фиг. 28, для поворота вала моментом

$$M = Cc,$$

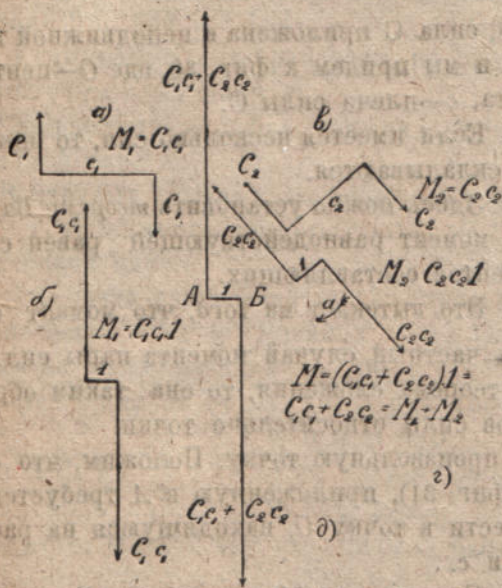
прикладывают значительно меньшие силы D к колесу большого диаметра, наглухо прикрепленному к валу. При этом силы D

могут быть во столько раз меньше C , во сколько диаметр d больше диаметра c . Например, если d в 10 раз больше c , то сила D составляет $1/10$ силы C .

Такое действие называется преобразованием пары; оно выражается следующей теоремой: *всякую пару сил можно заменить другою парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент; действие пары от этого не изменится.*

7. Сложение пар. Положим, даны пары сил $C_1—C_1$ и $C_2—C_2$ (фиг. 29); моменты их $M_1=C_1c_1$ и $M_2=C_2c_2$. Преобразуем обе пары так, чтобы плечи их порознь были равны единице. В первой паре фиг. а) придется плечо уменьшить в c_1 раз; чтобы сохранить момент M_1 надо силу соответственно увеличить в c_1 раз, т. е. сделать силы фигуры б) равными C_1c_1 . Таким же образом, на фиг. в) и г), надо силы сделать C_2c_2 .

Повернем пару M_2 фиг. г) на угол α до положения, параллельного первой паре. Затем переместим



Фиг. 29.

вторую пару до совпадения плеч обеих пар. Плечи 1 совпадут. Мы получим пару, представленную на фиг. д).

На плечо пары AB действуют суммы сил $C_1c_1 + C_2c_2$. А так как плечо равно единице, то момент полученной пары

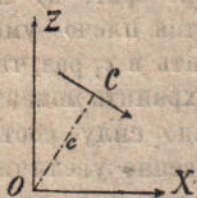
$$M = (C_1c_1 + C_2c_2) \cdot 1 = M_1 + M_2,$$

т. е. момент равнодействующей пары равен сумме моментов составляющих пар.

Конечно, если пары вращают в разные стороны, то момент равнодействующей пары равняется разности моментов составляющих, или алгебраической сумме этих моментов.

§ 8. Общий прием решения задач на плоскости. 1. Момент силы относительно точки. Положим, что точка A пары сил неподвижна (фиг. 26.); тогда плечо AB будет вращаться вокруг этой точки. В этом случае момент вращающей пары называют моментом силы C_1 относительно точки A , а плечо пары называют плечом момента силы относительно точки. Точку A называют центром вращения или центром момента. Итак, моментом силы относительно точки называется произведение силы на перпендикуляр, опущенный из точки на силу. Точка называется центром момента, а перпендикуляр — плечом момента.

Так как на фиг. 26 сила C приложена к неподвижной точке, то ее можно отбросить, и мы приходим к фиг. 30, где O — центр момента, c — плечо силы C .



Фиг. 30.

Если имеется несколько сил, то моменты их складываются.

Здесь можно установить теорему Вариньона: момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

Это вытекает из того, что момент силы относительно точки есть частный случай момента пары сил. Так как для пар доказана теорема сложения, то она таким образом доказана и для моментов силы относительно точки.

2. Перенос силы в произвольную точку. Положим, что силу C (фиг. 31), приложенную в A требуется перенести в точку O , находящуюся на расстоянии c .



Фиг. 31.

— пара сил $(C, -C_1)$ с моментом $M=Cc$.

Поместим в O две противоположные силы C_1 и C'_1 , параллельные и равные C . От этого состояние тела не изменится, но получится сила C'_1 в точке O и, кроме того,

Таким образом, чтобы, при параллельном перенесении силы, не изменилось ее действие на тело, надо, кроме силы, приложить момент, равный произведению силы на нормальное расстояние ее до точки, куда переносится сила, иначе сказать: кроме силы, надо приложить момент относительно точки переноса.

3. Приведение любой системы сил к одной силе и одной паре. Вообразим на плоскости произвольные силы C_1, C_2, \dots, C_n ,

приложенные в разных точках $1, 2 \dots n$. Примем произвольную точку O за центр приведения. Перенесем силу C_1 из точки ее приложения 1 в центр приведения O ; при этом, кроме силы C_1 , в точке O_1 появится пара сил, момент которой равняется моменту силы C_1 относительно O . Обозначим этот момент M_1 .

Поступим таким же образом со всеми данными силами. Получим в точке O систему сил $C_1, C_2 \dots C_n$ и систему пар $M_1, M_2 \dots M_n$.

Геометрически сложим все силы, пересекающиеся в одной точке O , и заменим их равнодействующую P . Сложим также все пары. Так как все они лежат в одной плоскости, то их придется суммировать алгебраически, по правилам § 7.7. В результате получим одну пару M .

Следовательно, любая система сил приводится к одной силе P и одной паре M .

В частных случаях, конечно, одна из них может превратиться в нуль; тогда система сил приводится или к одной силе или к одной паре.

4. Условия равновесия сил на плоскости. Силы находятся в равновесии, если нет никаких побуждений к движению. Так как любая система сил может быть заменена силой P и парой M , то движения не будет, когда одновременно:

$$P = 0 \text{ и } M = 0.$$

Но по (20): $P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Z^2}$, поэтому должно быть:

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Z = 0.$$

Кроме того, $M = \Sigma M$, так что, должно быть и

$$\Sigma M = 0.$$

Получается всего 3 условия равновесия:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M = 0 \dots \dots \dots (30);$$

они выражают, что для равновесия любой системы сил на плоскости необходимо и достаточно, чтобы не было поступательного движения вдоль двух взаимно перпендикулярных осей X и Z и чтобы не было вращения вокруг любой точки на плоскости этих осей.

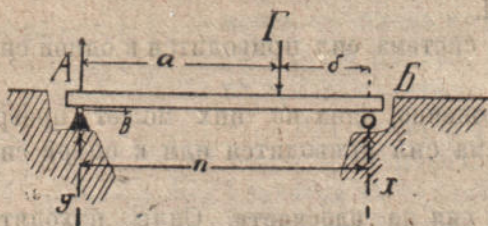
5. Разложение силы на составляющие. Силы, находящиеся в равновесии, должны удовлетворять 3 условиям предыдущего раздела: $\Sigma X = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M = 0$. Некоторые из этих сил могут быть заданы; остальные не должны быть произвольны, а должны удовлетворять этим трем условиям, и могут быть най-

дены из этих условий. Мы имеем для этого 3 уравнения, из которых можно найти 3 неизвестных.

Это показывает, что статика позволяет розыскать 3 силы, уравнивающие данную систему, конечно, если известно направление сил. Мы обозначим неизвестные буквами x, y, z , придавая им первоначально положительное течение, составим 3 уравнения, включая все данные силы и искомые неизвестные, и решим их относительно неизвестных.

Если решение приведет к отрицательному результату, то надо изменить течение, принятое при первоначальных предположениях. На последующих примерах мы разъясняем эту мысль.

Балка. Положим, что груз Γ лежит на балке, свободно лежащей на опорах A и B . Он уравнивается противодействиями опор, которые принято называть *реакциями*. Определим эти реакции, пользуясь уравнениями равновесия (30):



Фиг. 32.

$$\Sigma X = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M = 0.$$

Направление реакции правой опоры A может быть только вертикальным, так как балка лежит на цилиндрическом катке, который от всякой горизонтальной силы пришел бы в движение. Если каток в покое, то нет горизонтальной силы, следовательно, реакция B вертикальна.

Точкою A балка опирается неподвижно; и здесь может появиться реакция любого направления. Разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие; назовем первую A , а вторую B .

Составим теперь сумму проекций всех сил балки на горизонтальную ось AB ; получим $\Sigma X = B + 0 + 0 + 0 = 0$; откуда $B = 0$.

Составляя сумму проекций на вертикальную ось, найдем $\Sigma Z = A - \Gamma + B = 0$, или $A + B = \Gamma$.

Напишем сумму моментов относительно точки A :

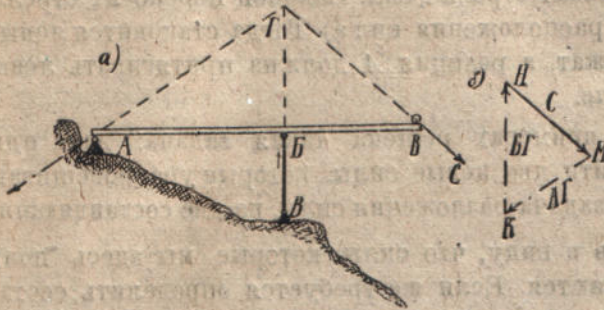
$$\Sigma M_a = \Gamma a - B n = 0; \text{откуда } \Gamma a = B n, \text{ или } B = \frac{\Gamma a}{n} \dots (31).$$

Вставляя значение B в предыдущее равенство, найдем:

$$A + B = \Gamma = A + \frac{\Gamma a}{n}, \text{ откуда } A = \frac{\Gamma n - \Gamma a}{n} = \frac{\Gamma b}{n} \dots \dots \dots (32).$$

Графический способ. Задача об определении реакций опор

еще проще решается графически. Когда на балку ABV (фиг. 33) действует нагрузка C , то возникают реакции A и B , уравнивающие эту нагрузку.



Фиг. 33.

Три силы уравниваются на теле.

Можно доказать для этого случая следующую теорему: если три силы уравниваются на теле, то они обязательно пересекаются в одной точке.

Действительно, при равновесии все силы должны приводиться к двум равным и прямо противоположным силам, т. е. к силам, действующим по одной прямой.

Равнодействующая двух сил рассматриваемой системы проходит через точку их пересечения. Чтобы третья сила шла по одной прямой с этой равнодействующей, она должна проходить обязательно через ту же точку. Следовательно, три силы пересекаются в одной точке.

На этом основании задачу о розыскании реакций балки A и B решают так.

Направление нагрузки C дано, направление одной из реакций именно B , также известно: оно идет по стержню VB ; поэтому устанавливается точка их пересечения Γ . Так как через эту точку должна пройти третья сила A , то соединяют A с Γ прямою. Эта прямая представляет направление реакции A , ранее неизвестное.

Величину реакций определяют построением треугольника сил на фиг. б). Строят силу C ; через ее начало H проводят

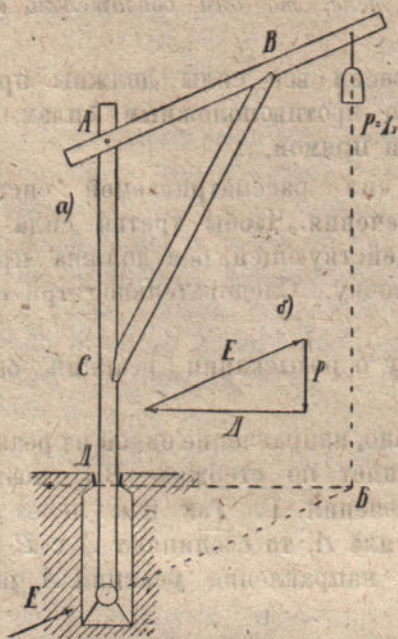
линию, параллельную одной из искомых сил, например B , через конец M проводят линию, параллельную другой искомой A . Продолжают линии до взаимного пересечения K и обходят треугольник $НМКН$ по течению данной силы C .

По течению ставят стрелки сил. Наконеч переносят стрелки с фиг. б) на план расположения сил а). Тогда становится ясным, что стержень $ВВ$ сжат, а реакция A должна притягивать левый конец балки к земле.

В обоих этих примерах решена такая задача: дана одна сила; требуется найти две новые силы, которые уравнивают одну данную. Это — задача разложения силы, на две составляющие.

Следует иметь в виду, что силы, которые мы здесь получили, уравниваются. Если же требуется определить составляющие данной силы, т. е. такие две силы, для которых данная является равнодействующей, то по § 4,3, надо изменить лишь течение на противоположное.

6. **Примеры.** а) Кран для поднятия грузов (фиг. 34). Кран



Фиг. 34.

представляет систему трех брусьев, связанных между собою так, что образуется твердое тело. Нижняя часть колонны крана помещается в цилиндрический колодезь фундамента, опираясь пятою на шаровой шарнир E и скользя в шайбе D .

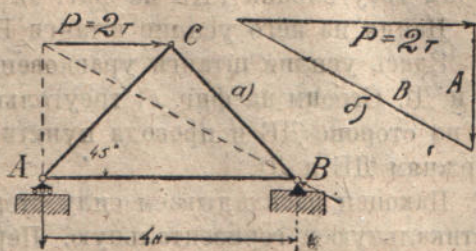
Требуется определить реакции опор D и E , вызываемые грузом $P = 1$ т.

Так как в шайбе D свободное скольжение, то реакция горизонтальна; поэтому на фиг. а) проводим через D горизонтальную прямую до пересечения B с грузом P . Центр шарового шарнира E соединяем с B

прямою. По установленным таким образом направлениям 3 сил

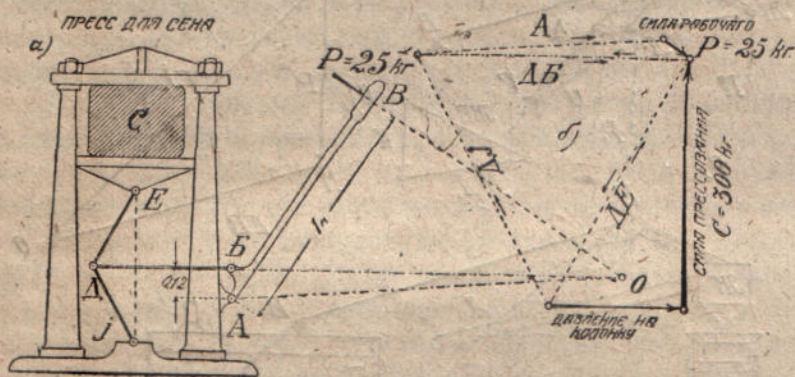
Р, Д, Е строим треугольник фиг. б, откуда получаем величину и стрелки сил.

б) Крыша треугольной системы опирается на стены посредством цилиндрического неподвижного шарнира В и катков А. К коньку крыши приложена горизонтальная сила $P = 2$ тонны.



Фиг. 35.

Для определения реакций А и В, проводим через середину катков перпендикуляр к плоскости их катания, до пересечения с силой Р и точку пересечения соединяем с В. Потом строим треугольник



сил фиг. б).

Фиг. 36.

в) Пресс для сена, торфа и проч. состоит из двух вертикальных колонн, связанных по верху прочной балкой и прикрепленных к фундаменту I. Между колоннами помещается тяжелая плита прессы E, поддерживаемая системой двух стержней ED и DJ. Шарнир Д этой системы связан штангой ДВ с рычагом АБВ, на рукоятку В которого действует рабочий.

Определим, какую силу прессования С он развивает, надавливая на рычаг силою $P = 25$ кг.

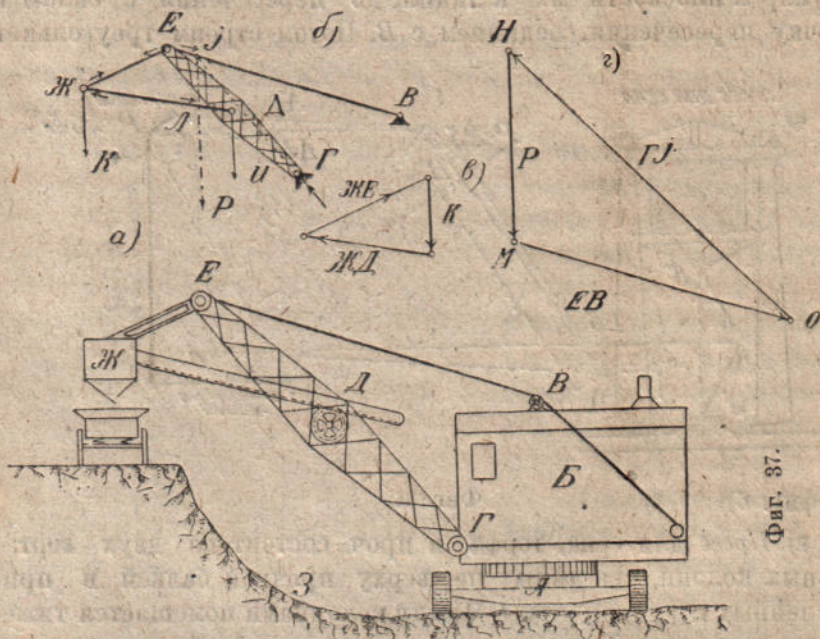
Рассмотрим сначала равновесие рычага АБВ, на который действуют 3 силы: Р, В и А. Так как они должны пересекаться

в одной точке, то из A проводим прямую на точку O . Затем строим треугольник PAB на фиг. δ).

Найдя из него усилие штанги BD , переходим к шарниру D .

Здесь усилие штанги уравнивается силами стержней DE и DI . Строим на фиг. δ) треугольник равновесия, основывая его на стороне DB и проводя пунктирные стороны параллельно стержням DE и DI .

Наконец раскладываем силу стержня DE на составляющие: вертикальную и горизонтальную. Первая производит прессование, вторая давит на колонну, не участвуя в прессовании. Эти составляющие изображены жирными стрелками на фиг. δ ; они показывают, что сила прессования раз в 12 больше силы рабочего. Таким образом, пресс дает значительный выигрыш в силе.



Фиг. 37.

г) *Экскаватор Мариона*, или механическая лопата для работки и погрузки земли или торфа (фиг. 37). На тележке A устанавливается двигатель $Б$, к зданию которого шарнирно присоединяется балка $ГЕ$. Верхний конец этой балки подвешивается канатом $ЕВ$ таким образом, что может подниматься или опускаться. Черпак $Ж$ прикрепляется к балке посредством бруска $ДЖ$ и канатов $ЕЖ$. Отпуская более или менее канаты, можно

по желанию придать черпаку любое положение, например: опустить черпак до положения Z и зачерпнуть здесь земли; затем приподнять черпак и выпустить балку $ГЕ$ влево на столы, чтобы черпак мог выгрузить содержимое на подставленную погрузочную платформу. Поворачивая весь механизм на 180° вокруг вертикальной оси A , можно производить разработку на другой стороне выемки.

Определим силы, действующие в частях этой машины (фиг. 6).

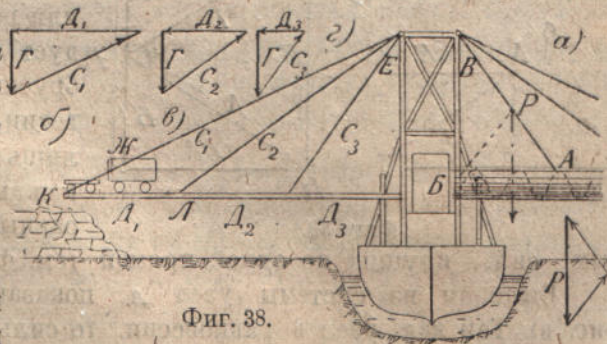
Груз K уравновесим силами $ЖЕ$ и $ЖД$ для чего построим треугольник сил фиг. 6), уравнивающийся на точке $Ж$. Из треугольника находим величину и течение сил, отмеченные стрелками у точки $Ж$ фиг. 6).

Переходя к балке $ЕГ$, заменим стрелки обратными, как показано на фиг. 6 у точек E и D . Это делается потому, что стержни $ЖЕ$ и $ЖД$ в равновесии и каждый из них находится под действием противоположных равных сил. Найдем равнодействующую P всех известных сил, приложенных к балке $ЕГ$, а именно: собственного веса балки $И$, приложенного в D , и усилий $ЖЕ$ и $ЖД$, равнодействующая которых есть K . Отбросим составляющие K и $И$ и заменим их равнодействующей P . Тогда на балке будет всего 3 силы: P , усилие струны $ЕВ$ и реакция $Г$. По предыдущему, эти три силы должны пересекаться в одной точке. Продолжая P до пересечения со стержнем $ЕВ$, находим точку I , в которую должна идти реакция $Г$. Остается построить треугольник сил P , E и $Г$. Это сделано на фиг. 2), где от H до M построена сила P , через начало её H проведена параллельная направлению $ГI$ (фигуры 6) и через конец M — параллельная струне $ЕВ$.

д) *Машина Годжа* (фиг. 38). Рассмотрим части, предназначенные для транспортировки торфа или земли.

По трубе $АВ$, подвешенной канатом

$АВ$, перемещается торфяная масса. Определим, каково усилие каната, когда в трубе находится определенный груз?



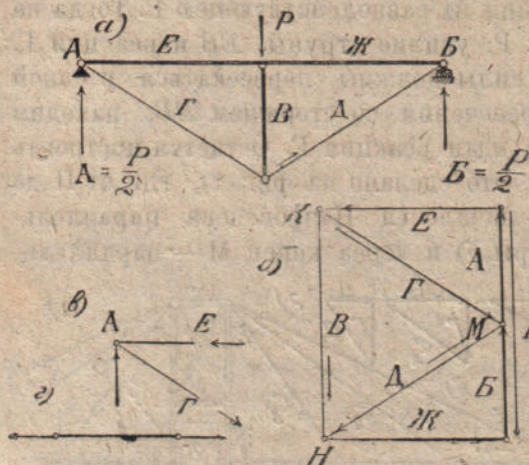
Фиг. 38.

Сложим вес торфяной массы с собственным весом трубы; получим силу P . Труба окажется под действием трех сил: P , AB и реакции B , которая должна идти в точку Γ пересечения первых двух сил P и AB . Остается построить треугольник сил P , AB , $B\Gamma$.

Чтобы машина не опрокидывалась вправо, с левой ее стороны прикрепляется балка $ДДД$, подвешенная к башне машины E . По балке перемещается балансирующая вагонетка $Ж$. Увозя ее более или менее вправо или влево, достигают полного равновесия системы.

Найдем усилия канатов C при разных положениях вагонетки. Поставим сначала вагонетку в крайнее положение слева. Тогда груз будет уравниваться в точке K усилиями C_1 и D_1 . Величину и течение сил найдем построением треугольника на фиг. 6 (сравни фиг. 17). Затем поставим вагонетку в узле L и построим фиг. в) и т. д. Оказывается, что усилия канатов C и балки D уменьшаются при сдвигании вагонетки вправо.

е) Шпрингальная или подпружная балка (фиг. 39). Предположим, что внешние силы приложены только в узлах, и бруски системы невесомы. При



Фиг. 39.

таких условиях, выделивши любой брусок из системы, придем к заключению, что внешние силы бруска идут по его оси, т. е. бруски системы испытывают или сжатие или растяжение. Это следует из того, что все бруски системы в равновесии, что может быть лишь при действии на каждый из них двух равных и противоположных сил, идущих по одной прямой (см. фиг. 39—2).

Выделим из системы узел A , показанный отдельно на фиг. в). Так как узел в равновесии, то силы A , E и Γ должны составлять треугольник. Построим этот треугольник на фиг. б), пользуясь известной вертикальной реакцией $A = \frac{1}{2} P$, и про-

вода через начало и конец ее прямые E и Γ , параллельные брускам E и Γ фигуры a). Стрелки, полученные при обходе треугольника сил (фиг. б) перенесем на узел A (фиг. в); найдем сжатие E и растяжение Γ .

То же можно сделать с узлом B . Уравновешивая здесь реакцию B , найдем усилия \mathcal{H} и \mathcal{D} .

Выделим после этого нижний узел системы, в котором известные уже теперь силы Γ и \mathcal{D} уравновешивают неизвестную пока силу B . Чтобы определить последнюю, построим растягивающую силу \mathcal{D} , т. е. примем стрелку, идущую от узла. (Эта сила уже была построена на фиг. б), и надо только установить ее течение, как показано отдельной короткой стрелкой). От конца M силы \mathcal{D} построим силу Γ . Так как эта сила растягивающая, то она должна идти от узла системы влево. Поэтому на фиг. б) следовало бы построить силу Γ влево. Но она оказывается уже построенною, и остается лишь отметить течение отдельной короткой стрелкой.

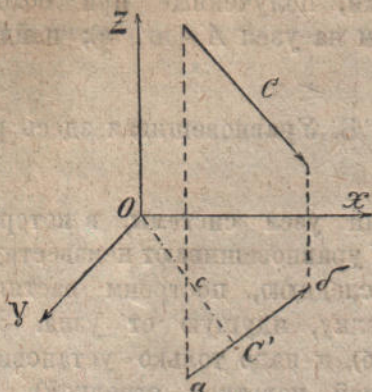
Теперь отрезок B , соединяющий K с H , представляет уравновешивающую, т. е. искомое усилие B . Он идет вниз, к узлу, выражая сжатие.

Таким образом, найдены усилия во всех брусках системы, которая находит многочисленные применения в постройках. На фиг. 39 эта система представляет балку AB , поддерживаемую бабкой, подтянутой струнами Γ и \mathcal{D} ; она называется *шпрингельной балкой* и применяется в мостах, кранах. Если систему повернуть на 180° вокруг оси AB , то она найдет применение для устройства крыш, представляя простейшую систему висячих стропил.

§ 9. Произвольные силы в пространстве. 1. Момент силы относительно оси. Моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к оси, и притом момент, взятый относительно точки пересечения оси с плоскостью.

В этом определении точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью служит центром момента.

Например, на фиг. 40, момент силы C относительно оси OZ



Фиг. 40.

есть момент проекции ab относительно центра O , т. е.:

$$M_z = Cc.$$

Так как момент силы относительно оси приводится к моменту проекции относительно центра, то оправдывается:

Теорема Вариньона, что момент равнодействующей равен сумме моментов составляющих.

Кроме того, можно показать, что: а) момент не изменяется от перенесения силы по ее направлению, ибо при этом не изменяется ни проекция силы, ни нормальное расстояние ее c до центра O ; б) произведение Cc становится равным нулю в двух случаях: во-первых, когда C равно нулю и, во-вторых, когда $c=0$. Первый случай возможен, когда сила равна нулю, или когда она параллельна оси; во втором случае сила пересекает ось.

2. Условия равновесия. Положим, что дана система сил, произвольно расположенных в пространстве. Построим для этой системы линию сил, как указывалось в § 4,5. Как и на плоскости, нам придется строить силы одна за другою, соблюдая направление, течение и величину, и прикладывая начало каждой последующей силы к концу предыдущей. Но так как здесь силы не лежат в одной плоскости, то полученная ломанная линия сил не будет плоской.

Соединяя начало и конец линии сил, мы получаем их равнодействующую.

Спроектируем на ось X стороны ломанной линии сил и замыкающую ее, равнодействующую. На основании теоремы, что проекция замыкающей стороны равна сумме проекций сторон ломанной, мы можем написать:

$$P_x = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \Sigma X \dots \dots (33).$$

То же напишем для двух других осей Y и Z :

$$P_y = \Sigma Y \text{ и } P_z = \Sigma Z \dots \dots \dots (33).$$

Переходим к моментам.

Составим момент относительно оси X для каждой из сил системы и возьмем сумму этих моментов, распространяя суммирование на все силы. Обозначим эту сумму ΣM_x .

Таким же образом получим

$$\Sigma M_y \text{ и } \Sigma M_z \dots \dots \dots (84).$$

Это показывает, что рассматриваемая система сил вращает вокруг каждой из трех осей координат X, Y, Z .

Наличие проекций (33) показывает, что система приводится к равнодействующей силе, которая дает поступательное перемещение, проектирующееся по тем же осям X, Y, Z .

Если при некоторых величинах и расположениях сил все проекции сил

$$\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$$

и все моменты

$$\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$$

окажутся нулями, то не будет никакого движения; система—в равновесии.

Обратно, если система в равновесии, то нет ни поступательного, ни вращательного перемещения; и равнодействующая сила, и результирующий момент системы порознь равны нулю, а потому будут нулями

$$\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z \text{ и } \Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z.$$

Следовательно, условия:

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0 \text{ и } \Sigma M_x=0, \Sigma M_y=0, \Sigma M_z=0 \dots (35)$$

суть необходимые и достаточные условия для равновесия сил в пространстве.

Итак, для равновесия необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на прямоугольные оси координат равнялась нулю и чтобы сумма моментов всех сил относительно тех же осей также равнялась нулю.

3. Разложение силы на составляющие в пространстве. Будем искать несколько таких сил, которые в совокупности уравновешивают одну заданную.

Так как все силы вместе, а именно, заданная и искомые уравновешиваются, то они должны удовлетворять условиям равновесия (35).

Мы напишем уравнения (35), введя в них искомые силы и решим систему этих уравнений.

Для определенности задачи число неизвестных должно быть равно числу уравнений. Поэтому, имея в распоряжении 6 уравнений, мы можем разыскать лишь 6 неизвестных сил. Остальные силы должны быть даны или определены предварительно из каких-нибудь других соображений, независимо от Статики абсолютно твердого тела.

4. Определение реакции опор. Неизвестными силами, которые уравнивают заданную нагрузку, могут быть реакции опор. Следовательно, если число неизвестных в опорах тела, расположенных в пространстве трех измерений, не более 6, то все они

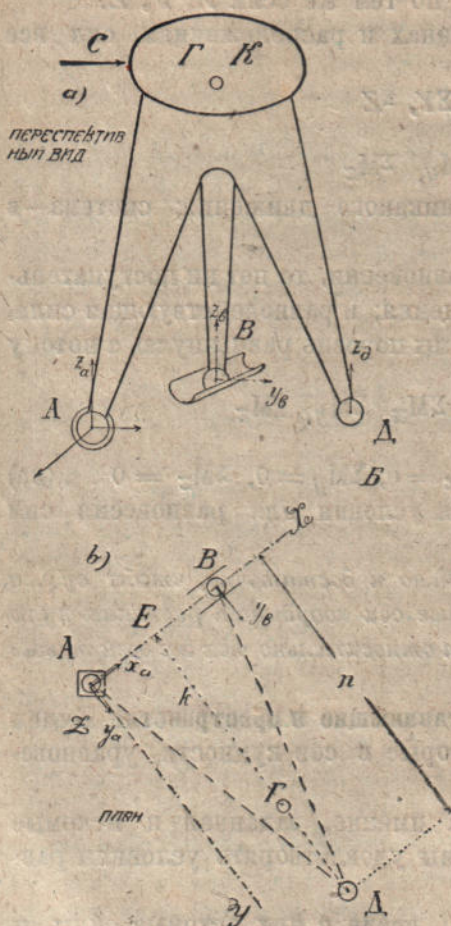
определяются из уравнений Статики (35). При большем числе неизвестных они представляются статически неопределимыми.

Опоры Томсона (Лорда Кельвина). На плоскости $АВВ$ опоры твердого тела $К$ сделаем шаровое углубление A , в которое поместим обточенную соответствующим образом шариковую ножку тела $К$. Другую ножку тела B поместим в цилиндрический желобок. Третью ножку D , не лежащую на прямой с первыми двумя, обопрем свободно на плоскости $АВВ$.

Так как ножка D свободно скользит по плоскости, то реакция D может быть только вертикальна; неизвестною оказывается в ней одна только величина Z_D .

В желобке B может быть противодействие движению только в плоскости, перпендикулярной к оси желобка, в дан-

ном случае, — в плоскости, параллельной к ZAY . Но в этой плоскости



Фиг. 41.

реакция может иметь любое направление. Представим себе ее разложенною на две составляющия: Z_6 и Y_6 .

В неподвижном шарике A возможна реакция любого направления. Разложим мысленно ее на составляющие X_a, Y_a, Z_a .

Таким образом, во всех трех опорах тела K находится в совокупности 6 неизвестных:

$$X_a, Y_a, Z_a, Y_6, Z_6, Z_0 \dots \dots \dots (36).$$

Положим, что на теле K лежит груз Γ , проектирующийся на высоту DE —равнобедренного треугольника ABD , стороны которого AD и BD равны. Расстояние груза от основания AB есть κ .

Полагая, что реакции идут вверх, составим уравнение моментов относительно оси AX :

$$\Sigma M_x - \Gamma \kappa + Z_0 n = 0 \dots \dots \dots (37).$$

Остальных сил группы (36) не пишем, так как плечи их относительно оси X равны нулю.

Решая (37) относительно Z_0 , находим:

$$Z_0 = \Gamma \frac{\kappa}{n} \dots \dots \dots (38).$$

Составим сумму проекций на вертикальную ось:

$$\Sigma Z = -\Gamma + Z_a + Z_0 + Z_6 = 0.$$

Так как груз лежит на высоте равнобедренного треугольника, то $Z_a = Z_6$; поэтому

$$-\Gamma + Z_0 + 2Z_a = 0; \text{ откуда } \Sigma_a = \Gamma \frac{n - \kappa}{2n} \dots \dots \dots (39).$$

Составим сумму моментов относительно оси Z :

$$\Sigma M_z = Y_6 \cdot AB = 0; \text{ откуда } Y_6 = 0 \dots \dots (40).$$

Другие силы группы (36) не входят в уравнение (40), так как параллельны оси Z (Z_a, Z_6, Z_0) или пересекаются с нею и имеют плечо, равное нулю (X_a, X_6).

Наконец, из уравнения $\Sigma X = 0$ находим $X_a = 0$, и из уравнения $\Sigma Y = 0$ находим $Y_a = 0$. Оказалось, что вертикальная нагрузка стола вызывает только вертикальные реакции.

Задача. Предлагаем читателю найти реакции опор, вызываемых горизонтальной силой C (фиг. 41), идущей параллельно высоте ED ; затем,—рассмотреть произвольную силу.

5. Тела, не вполне прикрепленные. Уравнения равновесия выражают, что все силы, приложенные к телу, не вызывают никаких его перемещений: тела тогда в равновесии, когда нет

поступательного движения вокруг трех осей координат и нет вращения вокруг тех же осей.

Если применить шесть связей, подобравши их таким образом, чтобы каждая из них уничтожала одно из указанных возможных перемещений тела, то при абсолютно твердых связях тело будет всегда в покое, каковы бы ни были активные силы, к нему приложенные. При таких условиях тело называется *прикрепленным*.

Для прикрепления тела в пространстве необходимо не менее шести связей. Соответственно этому для прикрепления тела на плоскости необходимо не менее трех. Если хоть одна из связей отсутствует, то телу предоставляется соответствующая свобода перемещения, например: поступательное движение по оси X или вращение вокруг этой оси. При таких условиях будем называть тела *не вполне прикрепленными*, имеющими некоторое число *степеней свободы*. Если отсутствует одна необходимая связь,—тело имеет одну степень свободы, недостает двух связей—имеем тело с двумя степенями свободы и т. д.

Когда тело не вполне прикреплено, то могут найтись такие активные силы, которые приведут его в движение. Чтобы это тело находилось в равновесии, нельзя прикладывать произвольных сил, а только некоторые, удовлетворяющие определенным условиям, а именно, можно приложить *такую систему сил, которая на перемещениях тела, дозволяемых ему связями, не производит движения*. Например, если есть свобода движения вдоль оси X , то система приложенных сил не должна давать суммы проекций на ось X , т. е. должно быть: $\Sigma X = 0$.

Вообще, чтобы получить условия равновесия для несвободного тела, надо выяснить, какие свободы дозволяются связями; для каждой из этих свобод надо составить уравнение, которое выражает, что причины могущие вызвать перемещения, в совокупности, дают нулевой эффект. Приведем примеры.

а) *Тело имеет одну неподвижную точку* (шаровой шарнир). Здесь не может быть поступательного движения; тело может лишь вращаться. Поэтому условия равновесия будут:

$$\Sigma M_x = 0; \Sigma M_y = 0; \Sigma M_z = 0. \quad \dots (41).$$

б) *Тело лежит на плоскости* (на столе, на наклонной плоскости и т. п.). Здесь предоставлена свобода передвижения по

двум осям координат на плоскости и возможно вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости. Условия равновесия:

$$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma M_z = 0. \dots (42).$$

в) Тело скользит вдоль оси и вращается вокруг нее (цилиндрическая трубка на внутреннем стержне, кольцо на палке и проч.). Условия равновесия:

$$\Sigma X = 0; \Sigma M_x = 0. \dots (43).$$

г) Ползун в направляющих только скользит, не имея возможности вращаться. Должно быть только одно условие равновесия:

$$\Sigma X = 0. \dots (44).$$

д) Колесо только вращается вокруг оси. Имеем:

$$\Sigma M_x = 0. \dots (45).$$

Таким образом, на теле, не вполне прикрепленном, могут уравновеситься только некоторые нагрузки, а именно такие, которые удовлетворяют приведенным условиям. Из этих условий, как уравнений, и могут определяться нагрузки, уравновешивающиеся на данном теле. Если статика дает больше уравнений, чем телу предоставлено свобод, то часть этих уравнений служит для определения прочих сил, уравновешивающихся на теле, а именно, реакций связей, так как они уравновешиваются на теле совместно с нагрузками и совместно с последними должны удовлетворять всем уравнениям статики.

Так, в пространстве,—если для удовлетворения нагрузок требуется 2 уравнения, то для определения реакций останется 4 из общего числа 6 уравнений статики. Посредством них является возможность определить 4 реакции связей. Таким образом представляется два пути для решения задач о равновесии тел, не вполне прикрепленных:

1) отдельно определять активные силы из уравнений а, б, в, г, д, относящихся к свободам, а затем, пользуясь оставшимися уравнениями статики, относящимися к связям,—определять реакции, или

2) написать все уравнения статики для всех сил, действующих на тело, как активных нагрузок, так и пассивных

реакций, и решать систему уравнений одновременно относительно всех неизвестных.

§ 10. Устойчивость равновесия. 1. Виды равновесия. Тела, не вполне прикрепленные, находятся в равновесии лишь при системе сил, удовлетворяющих определенным условиям (§ 9,5). Приложивши иные силы, мы можем вывести тело из равновесия, например: отклонить спокойно висящий маятник, опрокинуть стоящий на плоскости карандаш и т. д. Рассмотрим небольшие отклонения тела от состояния равновесия и положим, что, выведя тело из этого состояния, мы тотчас удалили причину, нарушившую равновесие; так, после отклонения маятника или карандаша мы тотчас удалили руку, вызвавшую отклонение.

Поведение тела может быть различное.

1) По удалении отклоняющей причины тело стремится к первоначальному состоянию, и обыкновенно, возвращается к нему после нескольких колебаний. Такое состояние равновесия называется *устойчивым*. Примером служит маятник в нижнем из возможных для него положений, или шарик на дне шарового сосуда (фиг. 42-б).

2) Тело еще более отклоняется от первоначального состояния. Равновесие называется *неустойчивым*. Пример представляет карандаш, вертикально поставленный на столе, или шарик, помещенный в верхней точке на сферической поверхности (фиг. 42-в).

3) Тело остается в отклоненном состоянии; по удалении отклоняющей причины оно не стремится ни вернуться, ни удалиться от этого состояния. Шар на горизонтальной плоскости



Фиг. 42.

представляет всем известный пример равновесия в любом положении (фиг. 42-а).

Вид равновесия, вообще говоря, обуславливается характером связей и направлением перемещений, возможных для тела. Так, шарик в горизонтальном желобке остается в безразличном

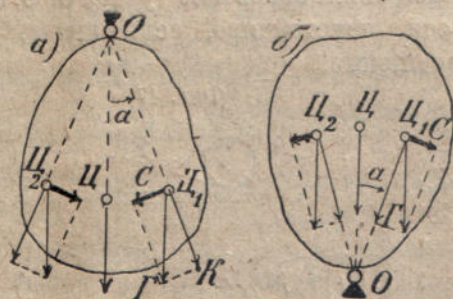
равновесии при перемещении вдоль и в устойчивом при перемещении поперек желобка. На седлообразной поверхности (фиг. 42-2) равновесие в одном направлении $АГБ$ устойчиво, но неустойчиво в другом $ВГД$.

Рассмотрим признаки равновесия тяжелых тел.

2. Тело, связанное одной точкой. Такое тело может быть в равновесии лишь в том случае, когда вертикальная сила тяжести тела проходит через точку его опоры. Действительно, по § 8,1, только в этом случае вращающий момент равен нулю, ибо плечо веса будет нулем. Если же тяжесть тела не проходит через точку опоры, то образуется момент, равный произведению из силы тяжести и перпендикуляра из точки на силу. Этот момент будет вращать тело вокруг точки опоры.

Будем различать следующие 3 случая расположения центра тяжести и точки опоры на одной вертикальной прямой.

1 случай: центр тяжести Π занимает самое низкое из возможных для него положений (фиг. 43-а). Отклоним тело на угол α и в новом положении разложим вес тела Γ на две составляющие:



Фиг. 43.

одну K по линии $О\Pi_1$ и другую C , перпендикулярную. Первая уравнивается прямопротивоположной реакцией точки опоры O . Остается вторая, которая будет

возвращать тело к первоначальному положению. Это будет устойчивое равновесие.

Заметим, что в положении равновесия центр тяжести занимает здесь самое низкое положение, доступное при данных связях (при точке опоры O); при отклонении, центру приходится подниматься.

2 случай: центр тяжести занимает самое высокое из возможных для него положений (фиг. 43-б). Отклонивши немного

тело и разлагая теперь вес его Γ на направления $OЦ$, и перпендикулярное, приходим к силе C , отклоняющей тело еще более. Следовательно здесь *равновесие неустойчивое*, так как тело не стремится к первоначальному положению, а еще более удаляется.

Заметим, что в положении равновесия центр тяжести занимает здесь самое высокое положение, допускаемое связями (точкою опоры O); при отклонении ему приходится понижаться.

Впоследствии, во 2-ой части книги, будет показано, что самое высокое положение центра тяжести соответствует наибольшей потенциальной энергии тела, а самое низкое—наименьшей. Поэтому, можно сказать, что наибольшая энергия соответствует неустойчивому равновесию, а наименьшая—устойчивому.

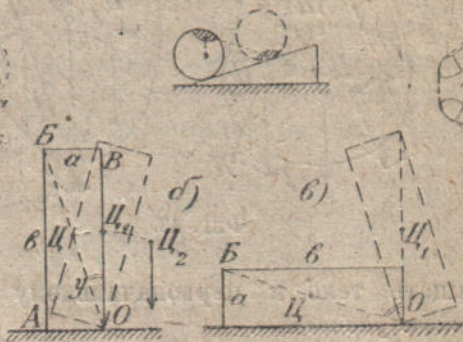
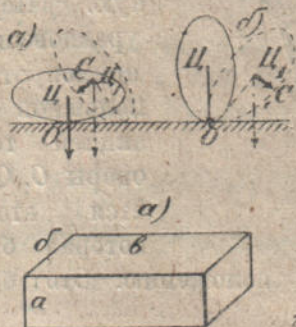
3 случай: центр тяжести совпадает с точкою опоры. Равновесие здесь безразличное; при любом отклонении тело остается в отклоненном состоянии, так как нет никаких поводов к движению: единственная сила тяжести уравнивается реакцией опоры.

3. Тело, связанное в двух точках (тело с осью вращения). Равновесие возможно лишь в том случае, когда сила тяжести проходит через ось вращения. Равновесие устойчиво, если центр тяжести лежит ниже оси, неустойчиво, если выше, и—безразлично, когда на оси вращения.

Фиг. 44.

Фиг. 47.

Фиг. 46.



Фиг. 45.

4. Тело на горизонтальной плоскости. Если тело опирается одною точкою, как на фиг. 44, то равновесие возможно лишь в том случае, когда вертикальная прямая, идущая от центра тяжести, проходит через точку опоры. На фиг. 44-а) и б) такие положения овального тела показаны сплошными линиями.

При этом равновесие устойчиво (фиг. а), если, при отклонениях, центру тяжести приходится приподниматься, и неустойчиво (фиг. б),—если при этих отклонениях центр понижается.

Однородный шар на горизонтальной плоскости представляет безразличное равновесие, так как центр его остается на одной высоте.

То же можно сказать и о теле, опирающемся на плоскость двумя точками, например, ребром призмы.

Опираемое тело тремя точками равнозначно опиранию плоскостью, ибо плоскость определяется тремя точками. Положим, что параллелепипед *abc* (фиг. 45 а) стоит на горизонтальной плоскости (фиг. 45-б). Центр тяжести его *Ц*—на середине диагонали *OB*. При отклонении вправо центр подымается и достигает наибольшей высоты в *Ц₁*, когда диагональ вертикальна, т. е. проходит через ребро опоры *O*. При дальнейшем отклонении тела центр тяжести опускается (см. *Ц₂*). Следовательно, в положении *Ц*, равновесие устойчиво, в положении *Ц₁* оно уже неустойчиво. Можно сказать: равновесие устойчиво, когда сила тяжести тела проходит через плоскость опоры.

Если тело опирается не сплошной подошвою, а несколькими точками, или площадью с входящими углами, то за плоскость опоры надо считать площадь, заключенную в ближайшем выпуклом контуре. Так, для человека, плоскостью опоры служит пунктирная фигура 46).

Теперь становится понятным, почему человек, держа в одной руке тяжелый груз, должен перегнуться туловищем на другую сторону, или: вынеся ногу вперед, почему он должен несколько поддаться назад. Не сделавши этих движений, человек не сохранил бы равновесия, так как площадь контура его ноги незначительна.

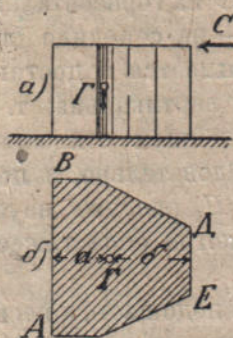
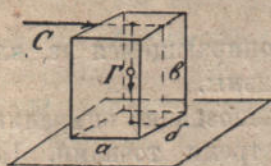
5. Коэффициент устойчивости. Чтобы вывести данное тело из устойчивого равновесия и привести в неустойчивое, опрокинуть, требуется отклонить на больший или меньший угол; так, на фиг. 45-б, надо отклонить тело на угол *y*, тангенс которого есть *a/v*; на фиг. 45-в этот угол больше, а именно, *v/a*. Углы относятся—

$$\frac{v}{a} : \frac{a}{v} = v^2 : a^2,$$

как квадраты высот. Следовательно, чем ниже тело, тем оно устойчивее.

При устройстве стен, столбов, плотин и других сооружений устойчивость определяют теми внешними силами, которые требуются для опрокидывания. Так, на фиг. 48, где действуют силы

Фиг. 48.



Фиг. 49.

С и Г, вычисляют два момента, вращающих вокруг ребра б:

- 1) опрокидывающий момент силы С и
- 2) удерживающий момент силы тяжести Г.

Первый есть $+C \cdot b$,
второй — $-G \cdot \frac{a}{2}$

Чтобы столб не опрокидывался, необходимо и достаточно сделать:

$$C \cdot b < G \cdot \frac{a}{2}, \text{ или}$$

$$C < G \cdot \frac{a}{2} : b = G \cdot a : 2b.$$

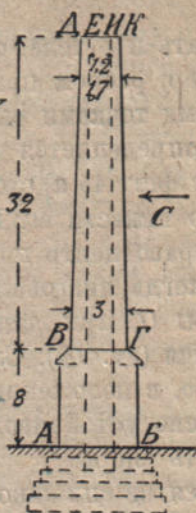
Вообще опрокидывающий момент должен быть меньше момента удерживающих сил. Обозначая первый M_0 , а последний M_y , получим $M_0 < M_y$.
Обыкновенно M_y делают в несколько раз больше M_0 , например в 2, 3 раза. Число 2, 3 . . . называется коэффициентом устойчивости. Обозначим его κ , тогда получится

$$M_y = \kappa M_0, \text{ или } M_y : M_0 = \kappa \dots \dots (46).$$

В столбах многоугольной формы коэффициент устойчивости может изменяться с переменной направления опрокидывающей силы. Например, на фиг. 49 он наименьший при действии сил С справа, так как a есть наименьшее расстояние центра тяжести от контура плоскости опоры.

6. **Примеры:** 1. Устойчивость каменной фабричной трубы (фиг. 50). Найдем коэффициент устойчивости квадратной трубы, подверженной давлению ветра в 200 кг. на 1 кв. м. поверхности трубы, принимая удельный вес кирпичной кладки 1,6.

Фиг. 50.



Горизонтальная сила C ветра, дующего справа, стремится опрокинуть трубу влево, вращая вокруг ребра A . Найдем опрокидывающий момент. Площадь, подверженная давлению ветра $P=3,3,8+1/2(3+1,7)32=102 \text{ м.}^2$.

Сила ветра $C=200.102=20400 \text{ кг.}$

Точка приложения равнодействующей силы ветра найдется по формуле (29) и (51):

$$y = \left[\left(3,3,8 \right) 4 + \left(\frac{3+1,7}{2} \cdot 32 \right) \left(8 + \frac{3+2,1,7}{3+1,7} \right) \frac{32}{3} \right] : 102 = 17,7 \text{ м.}$$

Опрокидывающий момент

$$M_0 = C.y = 20400.17,7 = 360000 \text{ кг. м.} = 360 \text{ т. м.}$$

Для определения удерживающего момента предварительно находим вес трубы

$$G = 1,6 \left[3,3^2,8 + \left(3^2 + 3 \cdot 1,7 + 1,7^2 \right) \frac{32}{3} - \left(1,8^2 + 1,8 \cdot 1,2 + 1,2^2 \right) \frac{40}{3} \right] = 283000 \text{ кг.}$$

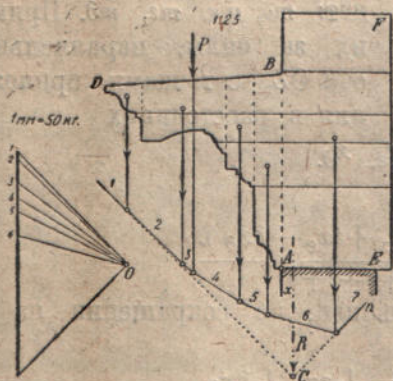
Момент веса относительно ребра A

$$M_u = G \cdot \frac{1}{2} AB = 283 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,3 = 468 \text{ т. м.}$$

Следовательно, коэффициент устойчивости

$$k = M_u : M_0 = 468 : 360 = 1,3.$$

2 Пример представлен на фиг. 51. Здесь графически, построением веревочной линии 1, 2 7, определена точка C , через которую проходит общий вес карниза каменного здания. Оказывается, что сила тяжести не выходит из пределов опорной плоскости AE . Карниз устойчив.



Фиг. 51.

Задачи: 1. На наклонной плоскости фиг. 47, помещен неоднородный шар, деревянный со свинцовым сегментом. Свинец вверх; шар положен так, что сила тяжести его проходит правее точки опоры.

Покажите, что шар самостоятельно, без посторонней помощи взберется на некоторую высоту вверх по наклонной плоскости.

*) Здесь 3,3—ширина цоколя трубы, а 1,8—ширина канала внизу.

Докажите, что на наклонной плоскости человек не может устоять прямо и перпендикулярно к плоскости, а должен наклониться к под'ему.

§ 11. О центре тяжести. 1. Общий прием определения центра тяжести. Координаты центра могут быть определены по формулам статического момента (29):

$$x = \frac{\Sigma Cx}{\Sigma C}; \quad y = \frac{\Sigma Cy}{\Sigma C}; \quad z = \frac{\Sigma Cz}{\Sigma C}.$$

Чтобы воспользоваться ими, разбиваем тело на элементы; сосредоточиваем вес каждого элемента в его центре тяжести, устанавливаем для каждого элемента координаты его центра, наконец, составляем выражение (29). Следующие примеры служат иллюстрацией.

2. Многоугольник из стержней, или периметр ломанной линии (фиг. 52). Центр Π тяжести периметра правильной ломанной лежит на оси симметрии OX .

Для определения расстояния $O\Pi$, разобьем периметр на отрезки:

$$AB = \delta, \quad BV = \epsilon, \quad VD = \zeta, \\ DE = \theta.$$

Если вес единицы длины обозначим m , то вес отрезков будет: $m\delta$, $m\epsilon$, $m\zeta$, $m\theta$. Примем их за силы, параллельные оси OZ , с точками приложения в расстояниях

$$x_\delta, \quad x_\epsilon, \quad x_\zeta, \quad x_\theta.$$

Тогда по (29) найдем:

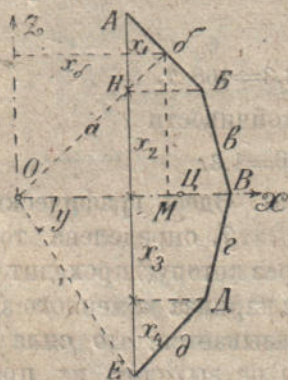
$$O\Pi = \frac{m(\delta x_\delta + \epsilon x_\epsilon + \zeta x_\zeta + \theta x_\theta)}{m(\delta + \epsilon + \zeta + \theta)}.$$

Для правильного многоугольника, по сокращении на m , получим:

$$O\Pi = \frac{\delta x_\delta + \epsilon x_\epsilon + \zeta x_\zeta + \theta x_\theta}{4}.$$

Тр-ки $O\delta M$ и ABH —подобны по перпендикулярности соответствующих сторон; поэтому:

$$O\delta : AB = OM : AH.$$



Фиг. 52.

Замечая, что $OM = x_6$ и обозначая апофему Ob буквою a , а проекцию отрезка AB на хорду AE буквою x_1 , перепишем последнюю пропорцию так:

$$a : \bar{b} = x_6 : x_1, \text{ или } ax_1 = \bar{b}x_6.$$

Таким же образом получим $ax_2 = \bar{b}x_6$ и $ax_3 = \bar{b}x_6$. . .

Подставим в выражение для OC :

$$OC = \frac{a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4\bar{b}} = \frac{ax}{4\bar{b}},$$

где буквою x обозначена хорда AE , стягивающая рассматриваемую ломаную $ABVDE$.

Эту формулу можно написать символически:

$$ц. т. = \frac{\text{апофема} \cdot \text{хорда}}{\text{периметр}}, \text{ или короче: } ц. т. = \frac{ax}{n} \dots (47).$$

3. Дуга круга есть предел для периметров; поэтому для нее имеет место выражение:

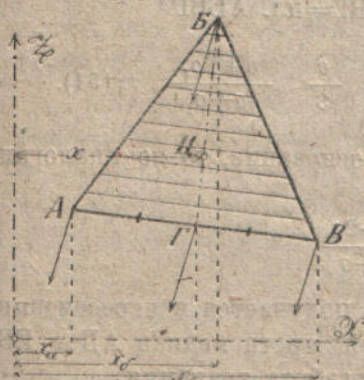
$$ц. т. = \frac{\text{хорда} \cdot \text{радиус}}{\text{дуга}}, \text{ или: } ц. т. = \frac{x \cdot r}{\delta} \dots (48).$$

Обозначим центральный угол $2y$; тогда хорда будет $2r \sin y$, дуга — $2r \cdot y$, и

$$OC = \frac{2r \cdot \sin y \cdot r}{2r \cdot y} = \frac{r \cdot \sin y}{y} \dots (49).$$

4. **Треугольная пластинка** (фиг. 53.) Разобьем пластинку на

узкие полоски, параллельные основанию. Центр каждой из них будет посередине. Общий центр фигуры должен быть на линии, соединяющей эти середины. Отсюда теорема: ц. т. тр-ка находитесь на прямой, соединяющей середину основания с вершиной, т. е. на медиане.



Фиг. 53.

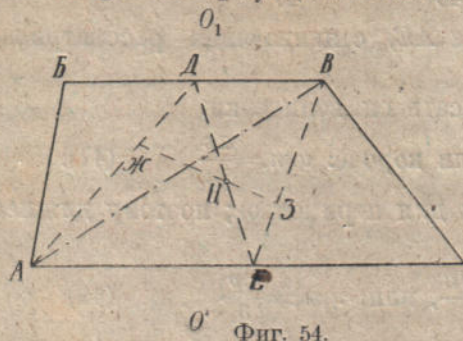
Конечно, это заключение относится к каждой медиане тр-ка очевидно, центр тяжести лежит на пересечении медиан.

Но из геометрии известно, что пересечение медиан приходится на $\frac{1}{3}$ длины каждой из них. Следовательно, центр тяжести лежит на медиане в расстоянии $\frac{1}{3}$ от основания.

Приложим к вершинам тр-ка три равные силы, составляющие в сумме вес пластинки, например, если вес пластинки Γ , то приложим по $\frac{1}{3}\Gamma$. Отнеся тр-к к осям $OXYZ$, применим к приложенным силам форм. (29). Получим

$$\Pi = \frac{\frac{1}{3}\Gamma (x_a + x_b + x_v)}{\frac{1}{3}\Gamma + \frac{1}{3}\Gamma + \frac{1}{3}\Gamma} = \frac{1}{3}(x_a + x_b + x_v) \dots \dots (50),$$

т. е. координата центра тяжести треугольной пластинки выражается средним арифметическим координат ее вершин.



Фиг. 54.

Центр параллельных сил, равных площадям этих треугольников, будет центром трапеции. Найдем расстояние этого центра от основания трапеции $AG=0$.

$$\text{По форм. (29): } \Pi = \frac{\text{пл. АБВ} \cdot \frac{2}{3}\sigma + \text{пл. АВГ} \cdot \frac{1}{3}\sigma}{\text{пл. АБВ} + \text{пл. АВГ} = \text{пл. АВГ}}$$

$$\left(\frac{\sigma\sigma^2}{3} + \frac{\sigma_1\sigma^2}{6} \right) : \frac{(\sigma + \sigma_1)\sigma}{2} = \frac{\sigma}{3} \cdot \frac{\sigma + 2\sigma_1}{\sigma + \sigma_1} \dots (51).$$

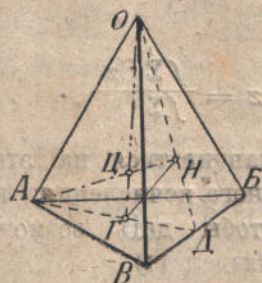
Если за ось X принять верхнее основание, то по аналогии напишется:

$$\Pi' = \frac{\sigma}{3} \cdot \frac{\sigma_1 + 2\sigma}{\sigma_1 + \sigma}$$

Графически центр тяжести Π получается в пересечении оси DE и прямой JZ , соединяющей трети медиан AD и BV для двух треугольников, на которые разбита трапеция.

6. Тетраэдр. (фиг. 55). Разделим тетраэдр на тонкие слои, параллельные основанию. Центры тяжести всех слоев окажутся на прямой OG , проходящей из вершины O к центру основания тетраэдра G . Очевидно, на той же прямой будет и центр тетраэдра.

То же можно сказать и о прямой АН, проходящей из вершины А к центру Н основания ОВВ. Очевидно, искомый центр тетраэдра находится в пересечении Ц прямых ОГ и АН.



Фиг. 55.

Из подобия тр-ков АОД и ГНД известно, что $АО = 3НГ$, поэтому из тр-ков АЦО и ГЦН напомним: $ЦО = 3ЦГ$, или $ГО = 4ЦГ \dots (52)$.

Пирамида обладает тем же свойством. Конус, как предел для пирамид, также подходит под рассматриваемую категорию тел.

Подобно тому, как для треугольника, и здесь можно показать, что центр тяжести совпадает с центром 4-х равных параллельных сил, приложенных к вершинам. Поэтому формулы для координат центра тяжести будут (сравн. 50):

$$x = \frac{1}{4} (x_o + x_a + x_b + x_d) \dots \dots \dots (53)$$

где $x_o, x_a \dots$ координаты вершин тетраэдра.

7. Объем какого угодно тела. Для определения центра тяжести тела, ограниченного произвольной поверхностью, разбивают его на элементы, для которых центры тяжести известны; в этих частных центрах сосредоточивают силы, равные весу элементов, и применяют к ним форм. (29).

Многогранники допускают разбивку на элементы известной геометрической формы. При этом объем каждого элемента и центр его находятся по известным уже правилам. Применение форм. (29) не представит затруднений. Тела же, ограниченные кривыми поверхностями, приходится рассматривать, пользуясь пределами. Разбивают тело на малые элементы, обыкновенно спрямляя их криволинейное очертание, например, разбивают на параллелепипеды со сторонами ax, ay, az ; составляют выражение (29), распространяя суммирование Σ на все элементы тела.

Полученное решение будет приближенным. Для точного решения элементы надо сделать весьма малыми и перейти к пределу. Таким образом, для координат центра тяжести получим

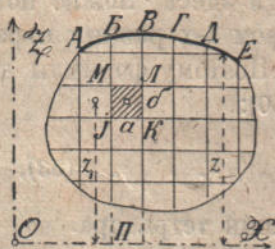
$$x = \frac{\text{пред. } \Sigma Cx}{\text{пред. } \Sigma C}; y = \frac{\text{пред. } \Sigma Cy}{\text{пред. } \Sigma C}; z = \frac{\text{пред. } \Sigma Cz}{\text{пред. } \Sigma C} \dots \dots (54)$$

Нахождение таких пределов сумм весьма большого числа исчезающе малых слагаемых составляет предмет интегрального исчисления. В нем пределы (54) обозначаются и называются интегралами \int , так что пишут:

$$x = \frac{\int \Sigma Cx}{\int \Sigma C} ; y = \frac{\int \Sigma Cy}{\int \Sigma C} ; z = \frac{\int \Sigma Cz}{\int \Sigma C} .$$

Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом вопросе, излагаемом в курсах Интегрального исчисления; приведем лишь результаты вычислений, чтобы дать возможность пользоваться ими в приложениях (см. раздел 11).

9. Теорема Гюльдена. (Guldin): *если вращать плоскую фигуру около какой-нибудь оси, то она опишет объем, равный произведению площади фигуры и пути, пройденного центром тяжести (фиг. 56).*



Фиг. 56.

Разобьем площадь фигуры на прямоугольнички со сторонами a и b и будем вращать ее около оси OX . При вращении прямоугольничек, отмеченный штрихами, опишет кольцо. Объем его равен разности объемов двух цилиндров:

$$\Delta \text{об} = \pi \cdot \Pi M^2 \cdot a - \pi \cdot \Pi J^2 \cdot a = \pi (\Pi M^2 - \Pi J^2) a = \pi a (\Pi M - \Pi J) \cdot (\Pi M + \Pi J) = \pi ab \cdot 2z_1, \text{ где } z_1 \text{ — расстояние центра элемента } ab \text{ до оси } OX, \text{ равное } \frac{1}{2} (\Pi M + \Pi J).$$

Объем, описываемый всей фигурой, равен сумме объемов элементарных колец, так что:

$$\text{об} = \Sigma \Delta \text{об} = \Sigma 2 \pi z_1 ab = 2 \pi \Sigma abz_1.$$

Под знаком Σ стоит сумма моментов элементарных площадей относительно оси X ; она равна моменту равнодействующей. Если обозначим площадь всей фигуры буквой Π , а расстояние ее центра тяжести η , то $\Sigma abz_1 = \eta \Pi$, и

$$\text{об} = \Pi \cdot 2 \pi \eta \dots \dots \dots (55).$$

Это есть формулировка теоремы. Воспользуемся ею для определения центра полукруга. Представим, что полукруг вра-

щаясь вокруг диаметра, описывает шар. Обозначая φ расстояние центра тяжести полукруга до диаметра, напишем по теореме:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot 2 \pi \varphi; \text{ отсюда: } \varphi = \frac{4r}{3\pi} \dots (56).$$

10. Вторая теорема Гюльдена: вращением кривой линии вокруг оси образуется поверхность, равная длине кривой, умноженной на путь, пройденный ее центром тяжести.

Положим, что вокруг оси OX вращается кривая $AB \dots DE$. Разобьем кривую на малые элементы $AB, BV \dots$, которые можно было бы принять за отрезки прямых. Какой-нибудь из элементов, например DE , при вращении около OX , опишет поверхность усеченного конуса; обозначим ее Π_1 :

$$\Pi_1 = 2 \pi z \cdot DE.$$

Такие же выражения получатся и для всех других элементов кривой. Очевидно, вся поверхность, описанная кривою $AB \dots DE$, равна сумме элементарных поверхностей.

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum \Pi_1 = 2 \pi z \cdot DE + 2 \pi z^1 \cdot GD + \dots \\ &= 2 \pi (ED \cdot z + DG \cdot z^1 + \dots BA \cdot z^n). \end{aligned}$$

В скобках написаны моменты относительно оси OX для всех элементов кривой. Так как сумма их равна моменту равнодействующей, то

$$\Pi = 2 \pi \cdot \text{AE} \cdot \varphi = \text{AE} \cdot 2 \pi \varphi \dots (57).$$

Это и требовалось доказать.

По теореме Гюльдена определим центр тяжести полукружности. Представим, что окружность вращается около диаметра и применим (57):

$$4 \pi r^2 = \pi r \cdot 2 \pi \varphi; \text{ тогда получим } \varphi = \frac{2r}{\pi} \dots (58).$$

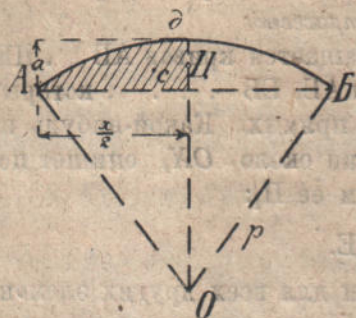
11. Формулы других частных случаев.

а) *Круг.* Для кругового сектора OAB (ф. 57): $\varphi = \frac{2}{3} \frac{\text{хорда} \cdot \text{радиус}}{\text{дуга}} =$
 $= \frac{2}{3} r \frac{\sin a}{a} = \frac{r^2 \cdot \text{хорда}}{3 \text{ площадь}} = \frac{38,2 r \sin a}{a^3} \dots (59).$

*) Подробнее см. Chr. Nehls. Ueber den Flächen—und Rauminhalt der Durchbewegung von Kurven und Flächen erzeugten Flächen—und Raumgrößen. Archiv der Mathematik und Physik. 2 Reihe, B XIII, 1894.

Для кругового квадранта $\eta = \frac{4p\sqrt{2}}{3\pi} \dots (60)$.

Для кругового сегмента АБВ: $\eta = \frac{\text{хорда}}{12 \text{ площадь}} =$
 $= \frac{4p \sin^3 \alpha}{3(2a - \sin 2\alpha)} \dots (61)$.



Фиг. 57.

Площадь сегмента $\Pi =$
 $= \frac{1}{2} r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)$.

Для кольцевого отрезка:

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{R_{\text{н}}^3 - R_{\text{в}}^3}{R_{\text{н}}^2 - R_{\text{в}}^2} \frac{\sin \alpha}{a} =$$

$$= 38,2 \frac{R_{\text{н}}^3 - R_{\text{в}}^3}{R_{\text{н}}^2 - R_{\text{в}}^2} \frac{\sin \alpha}{a^2} \dots (62)$$

где индекс n относится к наружному, а v — к внутреннему размерам.

б) *Парабола*. Площадь параболического сегмента типа АБВ фиг. 57 составляет $\frac{2}{3}$ прямоугольника, основание которого есть хорда АБ и высота равна стрелке c подъема дуги АБВ, т. е.

$$\Pi = \frac{2}{3} x \cdot c \dots (63)$$

Для половины сегмента координаты центра тяжести суть:

$$\eta_c = \frac{3}{5} c \text{ (вдоль стрелки } c), \quad \eta_x = \frac{3}{8} \frac{x}{2} \dots (64)$$

Для фигуры, дополняющей полусегмент до прямоугольника, соответственно будет;

$$\eta_c = \frac{3}{10} c \text{ и } \eta_x = \frac{3}{4} \frac{x}{2} \dots (65)$$

в) *Пирамида и конус*. Ц. т. боковой поверхности находится на $\frac{1}{3}$ прямой, соединяющей вершину с центром тяжести периметра основания.

Для усеченной пирамиды и конуса центр тяжести находится от большого основания на расстоянии:

$$\eta = \frac{v}{3} \cdot \frac{a_1 + 2a_2}{a_1 + a_2} \dots (66)$$

$$\text{Ц. т. объема: } \eta = \frac{v}{3} \cdot \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + 3a_2^2}{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2} \dots (67).$$

где v — высота тела, a_1 и a_2 — апофема большего и меньшего основания.

г) Шар. Ц. т. объема шарового сегмента находится от центра шара на расстоянии

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{(2r - v)^2}{3r - v} = \frac{\pi \vartheta^4}{64 \text{ объема}}, \dots (68),$$

где ϑ — диаметр основания, v — высота сегмента.

$$\text{Для полушара} \quad \eta = \frac{3}{8} r \dots (69).$$

Для полого полушара, наружный и внутренний радиусы которого — R_H и R_B :

$$\eta = \frac{3}{8} \frac{R_H^4 - R_B^4}{R_H^3 - R_B^3} \dots (70).$$

Ц. т. шарового сектора находится на середине высоты шарового сегмента, лежащего внутри данного сектора и описанного из его центра радиусом, равным $\frac{3}{4}$ радиуса данного сектора, или:

$$\eta = \frac{3}{8} r (1 + \cos a) = \frac{3}{8} (2r - c), \dots (71),$$

где c — стрелка под'ема дуги сектора над окружностью его основания.

д) *Параболоид вращения*. Координата центра тяжести, считая от вершины:

$$\eta = \frac{2}{3} c \dots (72).$$

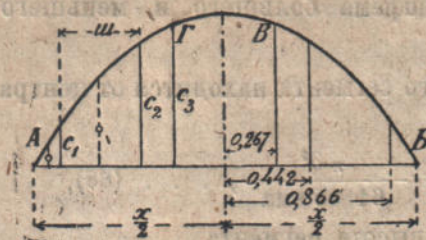
е) *Эллипсоид*. Для октанта координаты суть

$$\frac{3}{8} a, \frac{3}{8} b \text{ и } \frac{3}{8} c, \dots (73),$$

где a , b и c — полуоси эллипсоида.

12. **Приближенные способы.** При произвольном очертании площади, разбивают ее на полоски равной ширины m (фиг. 58) и измеряют средние ординаты полосок o . Произведение $m \cdot o$ дает площадь полоски, а сумма таких произведений: $\Sigma m \cdot o = m \Sigma o$ есть приближенное значение для площади всей фигуры АБВГА.

Правило Симпсона. Симпсон предложил разбивать площадь на четное число полосок и вычислять площадь по следующей формуле:



Фиг. 58. 3

Формула дает удовлетворительные результаты лишь при очертаниях, со слабо изменяющейся кривизной. Более точна формула Чебышева *):

$$\Pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{X}{2} (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6), \dots (75),$$

для применения которой надо взять ординаты C на расстояниях, указанных на чертеже, и сумму ординат умножить на $1/3$ половины хорды.

Расстояние центра тяжести от начальной ординаты получается соответственно: По Симпсону

$$\Pi_X = \Pi \frac{1 \cdot 4c_1 + 2 \cdot 2c_2 + 3 \cdot 4c_3 + \dots + (2n-1) 4c_{2n-1} + 2n \cdot 1c_{2n}}{1 \cdot c_0 + 4c_1 + 2c_2 + 4c_3 + \dots + 4c_{2n-1} + 1 \cdot c_{2n}} \dots (76).$$

По Чебышеву:

$$\Pi_X = \frac{X}{2} \frac{0,134c_1 + 0,578c_2 + 0,733c_3 + 1,267c_4 + 1,422c_5 + 1,866c_6}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6} \dots (77).$$

Глава II.

Статика упругого тела.

§ 12. **Растяжение и сжатие. 1. Общие замечания.** Тела, которые встречаются в действительности и материалы, применяемые в технике, не представляют абсолютно твердых тел. Они более или менее изменяют свою форму под влиянием внешних воздействий; и если приложить к ним систему взаимно уравновешивающихся сил, то она вначале не остается в покое. Тело сначала изменяет свою форму, деформируется, благодаря чему

*) Чебышев П. Л. (1821—1894)—гениальный русский математик.

точки приложения сил перемещаются. Но через некоторое время деформация тела останавливается, и силы на нем уравниваются так, как на абсолютно твердом теле.

Смотря по тому, какого рода воздействие испытывает тело извне, оно растягивается, либо сжимается, искривляется, скручивается и т. д. Одни материалы деформируются при этом больше, другие меньше; поэтому упругие свойства приходится изучать для каждого материала в отдельности. Опыт и испытание материалов дают нам характеристические коэффициенты для каждого из них—это физические постоянные числа, которыми всегда один материал отличается от другого.

Но при деформации всех материалов обнаруживаются также и общие черты,—определенные зависимости между деформацией и вызывающим ее внешним воздействием. Эти зависимости называются законами деформаций.

Законы деформации рассматриваются в „Сопроотивлении материалов“ и в „Теории Упругости“. Мы коснемся их здесь лишь вкратце, сколько необходимо для сознательного отношения к последующему материалу курса и другим предметам, тесно с ним связанным.

2. Законы растяжения Если к концам призматического бруска приложить растягивающие силы, то он немного удлинится (фиг. 59). При увеличении сил, будет возрастать и удлинение. Уже в глубокой древности заметили, что удлинение пропорционально силе, и на этом принципе построили пружинные весы. В 1676 г. Гук (Hooke) выразил это правилом: „какова сила, таково и растяжение,“ которое называется *Законом Гука*.



Фиг. 59.

Кроме того, опыты показывают, что удлинение y возрастает вместе с длиной бруска, так что, вдвое более длинный брусок при той же нагрузке C удлинится также вдвое более т. е. *удлинение пропорционально длине*. Наоборот, более толстый брусок удлинится меньше, чем тонкий, и во столько раз, во сколько больше его площадь поперечного сечения: *удлинение обратно пропорционально площади поперечного сечения бруска*.

Вообще, можно написать

$$y = \frac{C d}{E \cdot \Pi} \dots \dots \dots (78)$$

где y —удлинение, C —растягивающая сила, d —длина, Π —пло-

щадь поперечного сечения, E —коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом упругости* (Модуль Юнга).

Из многочисленных опытов растяжения найдены следующие коэффициенты упругости:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для железа, стали} \dots E = 20 \cdot 10^3 \text{ кг./мм}^2 \\ \text{„ чугуна белого} \dots \text{ „ } 10 \cdot 10^3 \text{ „} \\ \text{„ дерева (сосны, дуба} \dots \text{ „ } 1 \cdot 10^3 \text{ „} \end{array} \right\} \dots (79).$$

Применение формулы (78) рассмотрим на примере.

Пример. К железной штанге рудничной шахты длиной 400 м. и сечением 2.2. см. подвешивают вагонетку с грузом, общим весом 3 тонны. Определить удлинение штанги, вызванное этой нагрузкой.

По (78) имеем:

$$y = \frac{3000 \cdot 4000 \cdot 00}{20 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 20} = 150 \text{ мм.} = 15 \text{ см.}$$

Опытами же установлено, что пропорциональность между силой и удлинением остается лишь при сравнительно небольших силах; при переходе же через определенный предел пропорциональность нарушается. Оказывается, что при больших нагрузках удлинение растет быстрее, чем сила, и в результате брусок разрывается на 2 части.

Наибольшая сила, которую еще можно наблюдать при целости бруска и после которой брусок разрывается, называется *разрывающим усилием*. Будем обозначать его C_p (сила разрывающая).

Для сравнения крепости разных материалов определяют разрывающее усилие одного квадратного миллиметра поперечного сечения. Очевидно, это усилие будет зависеть не от размеров бруска, а исключительно от физических свойств материала, и мы будем уверены, что чем больше выдерживает один квадратный миллиметр бруска, тем материал крепче.

Усилие единицы площади поперечного сечения называется вообще *напряжением*. Если силу полного сечения бруска обозначим буквою C , площадь сечения Π , а напряжение буквою n , то вообще:

$$n = \frac{C}{\Pi} \dots \dots \dots (80).$$

Разрывающее напряжение есть разрывающее усилие, разделенное на площадь поперечного сечения

$$n_p = \frac{C_p}{\Pi} \dots \dots \dots (81);$$

его принято называть *временным сопротивлением разрыву*.

Таким образом, временное сопротивление характеризует крепость материала.

Приводим таблицу наиболее употребительных материалов:

Рессорная сталь	80 кг./мм ²	} . . . (82).
Литое железо	37—38 „ 40	
Чугун белый	20 „	
Дерево (дуб, хорошая сосна) . 8	„	

Разрыв сопровождается большим или меньшим удлинением бруска, по которому судят о *пластичности* (тягучести) материала.

Так, для железа, удлинение при разрыве составляет 25%, тогда как для чугуна оно не достигает и 2%.

Стальной тросс, ременный приводной пас растягиваются до 5%.

При больших удлинениях материалы называются *пластичными*; при малых—*хрупкими*.

3. Допускаемое напряжение. Временное сопротивление и удлинение—суть разрывающие эффекты. Если брусок железа растянуть до 25% его первоначальной длины или нагрузить растягивающей силой 40 кг./мм.², то он разрывается. В постройках и машинах нельзя допустить этого. Очевидно, нельзя допускать временного сопротивления или разрывающего удлинения, а только некоторую часть его.

Напряжение, которое допускается в постройках, называется *допускаемым напряжением* (или прочным сопротивлением).

Оно в несколько раз меньше временного сопротивления. Число, показывающее во сколько раз,—называется *запасом прочности* (или коэффициентом безопасности).

Для железа, стали и металлов вообще, при спокойной нагрузке, принято допускать лишь четверть временного сопротивления, так что, обеспечен *четверной запас прочности*.

В деревянных, каменных и других разнородных постройках при переменном или ударном действии нагрузок допускается меньшее напряжение, т. е. требуется больший запас прочности, например 8 и даже 12.

Пример. Груз Γ фигуры 17 подвешивается к стальному тросу. Определить диаметр троса, необходимый для безопасного поднятия груза $\Gamma=2,4$ тонны, если допускаемое напряжение троса составляет 10 кг./мм.²

Обозначим искомый диаметр в миллиметрах буквой δ ; тогда площадь поперечного сечения троса будет

$$П = \pi r^2 = \frac{\pi \delta^2}{4} \text{ кв. мм.}$$

Если на 1 кв. мм. допускается нагрузка 10 кг., то на площадь $П = \frac{\pi \delta^2}{4}$ можно допустить $10П = 10 \cdot \frac{\pi \delta^2}{4}$

Подымаемый груз Γ не должен превосходить $10 \cdot \frac{\pi \delta^2}{4}$, т. е. можно написать

$$\Gamma < 10 \cdot \frac{\pi \delta^2}{4}, \text{ или } \delta^2 > \frac{4\Gamma}{10\pi}$$

$$\text{Отсюда } \delta \geq 2\sqrt{\frac{\Gamma}{31,4}} = \approx 17,5 \text{ мм.}$$

4. Предел упругости. Опыты растяжения многих материалов показывают, что при небольших растягивающих силах получают удлинения, которые исчезают по удалении растягивающих сил. Такие удлинения называются *упругими удлинениями*.

Но если растягивающее напряжение постепенно увеличивать, то можно дойти до такого, при котором удлинение уже не исчезает полностью, а только отчасти, часть удлинения остается и после удаления растягивающих сил.

То наибольшее напряжение, при котором еще не получается остаточных удлинений, а за пределами которого они уже обнаруживаются, называется *пределом упругости*.

Предел упругости для железа лежит вблизи предела пропорциональности. У других материалов остаточные удлинения получают уже при малых напряжениях; так что, первоначально предел упругости не существует. Но после предварительного растяжения он устанавливается, и в пределах упругости можно многократно растягивать брусок, не вызывая в нем заметных остаточных удлинений.

5. Сжатие получается, если силы S фиг. 59, повернуть внутрь бруска. При сжатии *сравнительно коротких брусков* наблюдаются

те же зависимости между уменьшением длины бруска и сжимающей нагрузкой: для укорочения $-y = \frac{C\delta}{E\Pi}$ и для напряжения

$$-n = \frac{C}{\Pi} \text{ или } C = n\Pi \dots \dots \dots (83).$$

При этом коэффициент упругости E при сжатии обыкновенно равняется коэффициенту при растяжении.

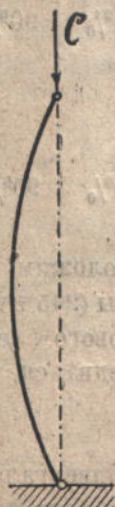
Но при сжатии длинных и тонких брусков легко происходит выпучивание в сторону. Так, чертежная тонкая линейка искривляется уже при незначительном надавливании пальцами ее концов (фиг. 60). Поэтому при сжатии высоких колонн, стоек, стержней допускают значительно меньшую нагрузку, чем при растяжении или при сжатии коротких брусков.

Уменьшение допускаемого напряжения зависит от толщины сжимаемого бруска и его длины и определяется на основании особой формулы Эйлера или из опытов. Имеются таблицы, составленные по этим данным, на основании которых

производят расчет допускаемых напряжений.

Приводим таблицу допускаемых напряжений для употребительных материалов при сжатии коротких брусков. . . (84).

Материал	Допускаемое напряжение в кг. на 1 кв. мм.
Чугун	7,5
Дерево на торец (сосна)	0,5—0,7, смотря по качеству. Для временных сооружений до 1 кг./мм. ²
Кирпичная кладка	0,05 на воздушном растворе; 0,07 на цементном.
Бетон	0,25
Хороший грунт	0,02—0,03



Фиг. 60.

Для длинных деревянных круглых стоек допускают меньше, как показано в следующей таблице (85).

При отношении длины к диаметру	20	30	40	50	60
Напряжение уменьшают на	50%	70%	80%	85%	90%
Для железных стоек соответственно на					
	30%	50%	75%	85%	90%

Пример: тренога для под'ема грузов (фиг. 19). Положим, что тренога предназначается для поднятия груза в 4 тонны (245 пуд.) Длина ног $\delta=6$ метров; они круглые, из 6 вершкового леса. Угол $\alpha=20^\circ$. Требуется проверить прочность, т. е. убедиться, что напряжение ног не превосходит допускаемого.

Во-первых, вычислим, сколько допускается.

Если бы нога не была столь длинной и не подвергалась опасности вынучивания, то на сжатие можно было бы допустить до 1 кг. на кв. мм. (см. 84) Но для ноги, длиной 6 мет.=600 см. и толщиной всего 6 вершков=6.4,44=26,6 см., напряжение необходимо уменьшить. Так как отношение длины к диаметру равно

$$\frac{600}{26,6} = 22,5,$$

то по таблице (85) уменьшение должно составлять 55%.

Следовательно, допускаемое напряжение может быть только 45% от 1 кг. на кв. мм., т. е.

$$n_{\delta} = 0,45 \text{ кг. на 1 кв. мм.}$$

Теперь найдем, какое имеется напряжение ноги в действительности.

На фиг. 19 было показано, что сила, сжимающая ногу, $S=G:3 \cos \alpha$. Так как $G=4$ тоннам=4000 кг., $\cos \alpha = \cos 20^\circ = 0,94$, то

$$S=4000:3 \cdot 0,94=1417 \text{ кг.}$$

Эта сила давит на площадь поперечного сечения

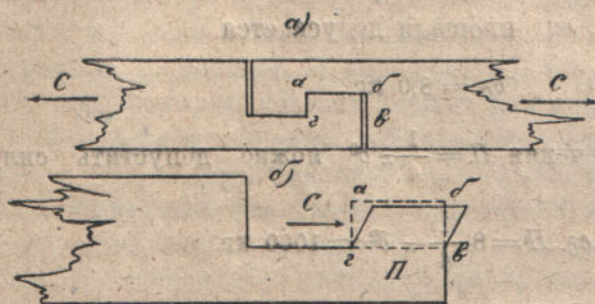
$$П = \frac{\pi \delta^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 26,6^2}{4} = 556 \text{ см.}^2 = 55600 \text{ мм.}^2$$

На единицу площади приходится усилие

$$n = \frac{C}{\Pi} = \frac{1417}{55600} = 0,0254 \text{ кг. на 1 кв. мм.}$$

Это напряжение значительно меньше допускаемого 0,45 и потому устойчивость ног под'емника вполне обеспечена.

§ 13. Сдвиг и кручение. 1. Сдвиг получается в том случае, когда одна часть материала стремится поступательно сдвигаться



Фиг. 61.

вдоль другой. Так действует зуб деревянной врубki на фиг. 61. Под действием силы C пунктирный зуб $абвг$ (фиг. б) стремится сдвинуться вправо по плоскости $гв$. Если сила C невелика, то произойдет лишь перекашивание зуба. Если же C значительно, то может произойти отделение зуба $абвг$ и разрушение. Такое разрушение называется *срезыванием* или *скалыванием*.

Принимают, что срезывающая сила C равномерно распределяется по площади сдвига Π , так что на единицу площади приходится сила

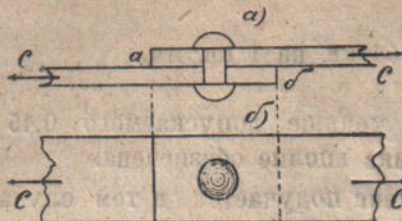
$$c = \frac{C}{\Pi} \dots \dots \dots (86)$$

Она называется *срезывающим напряжением* или *временным сопротивлением срезыванию*.

Сопротивление материалов срезыванию значительно меньше, чем сопротивление растяжению или сжатию. Особенной слабостью отличается дерево при скалывании вдоль волокон, как во врубках фигуры 61.

Временное сопротивление скалыванию сосны составляет 0,25, 0,30 кг. на 1 кв. мм. Поэтому, желая обеспечить 5-ти или 6-ти кратный запас прочности, можно допускать лишь 0,05 кг. на 1 кв. мм.

Пример: определить диаметр заклепки, скрепляющей две



Фиг. 62.

железных полосы, растягиваемых силами $C=1т$ (фиг. 62), если допускаемое напряжение заклепки

$$c_d = 8,0 \text{ кг. на 1 кв. мм.}$$

Заклепка сопротивляется срезыванию по плоскости ab .

Если на 1 кв. мм. ее площади допускается

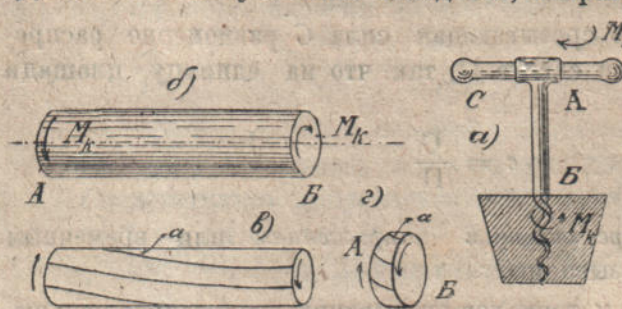
$$c_d = 8,0 \text{ кг.,}$$

то на площадь ее сечения $\Pi = \frac{1}{4} \pi d^2$ можно допустить силу

$$C = c_d \cdot \Pi = 8 \cdot \frac{1}{4} \pi d^2 = 1000 \text{ кг.}$$

$$\text{Отсюда } d = \sqrt{\frac{500}{\pi}} = 12,6 \text{ мм. } \approx \frac{1}{2} \text{ дюйма.}$$

2. Кручение. Кручением называется действие двух противоположных пар сил, плоскости которых перпендикулярны к оси бруска. В таких условиях находится, например ствол штопора



Фиг. 63.

(фиг. 63-а). При действии на рукоятку AC заворачивающей пары пальцев $+M_k$ приходится преодолеть сопротивление пробки— M_k , так что, часть

AB находится под действием двух равных и противоположных горизонтальных пар M_k . В таких же условиях находятся валы машин (фиг. б).

Момент пары, скручивающей брусок называется *крутящим моментом*. Угол, на который поворачивается одно сечение бруска B относительно другого A , называется *углом кручения* или *углом закручивания* (см. a на фиг. в или з).

Кручение по существу отличается от растяжения и сдвига. Растяжение и сдвиг вызываются силами, действующими на площадь и стремящимися вызвать поступательное перемещение этой площади. Но масса материала площади и сцепление частиц с соседней площадью сопротивляются этому поступанию. Мы пишем равновесие между действующими силами и сопротивлением площади:

$$C = n \cdot \Pi,$$

говоря, что, если каждая единица площади выдерживает n килограммов, то площадь Π выдержит в Π раз больше. Получается расчетная формула, которая служит для проверки прочности.

В кручении внешним воздействием на брусок является не сила, а момент пары сил M_k , стремящийся поворачивать сечения относительно оси бруска. Сопротивляться этому вращению будет также момент внутренних сил сцепления. Каждая элементарная площадка, сдвигаясь, образует момент вращения относительно оси. Общее сопротивление материала сложится из суммы всех таких элементарных сопротивлений. Оно составит некоторый результирующий момент, который принято называть моментом сопротивления.

Этот момент составляется из элементарных площадок, умноженных на расстояние до оси вращения; поэтому он выражается длиною в 3-ой степени. Для круглого сечения это

будет $\frac{1}{2} \pi r^3$. Обозначим его буквой W_k .

Теперь, по аналогии с предыдущими, напишем расчетную формулу

$$M_k = c W_k \dots \dots \dots (87).$$

Мы пишем здесь напряжение сдвига, так как при кручении элементы материала испытывают сдвиг; это ясно из фиг. 63-г. Вместо силы C и сопротивляющейся ей площади Π (форм. 80) мы пишем здесь действующий момент и момент сопротивления.

Пример: Определим диаметр вала, скручиваемого силою $C = 3$ тонны, приложенной на расстоянии $r = 25$ см. от оси вала, если допускается на срезывание $c\vartheta = 6$ кг. на 1 кв. мм.

Из формулы $M_k \leq c\vartheta \cdot W_k$ определяем:

$$W_k \geq \frac{M_k}{c \vartheta} = \frac{3000 \cdot 250}{6} = 125000 \text{ мм.}^3$$

А так как $W_k = \frac{1}{2} \pi p^3$, то

$$\frac{1}{2} \pi p^3 \geq 125000, \text{ откуда}$$

$$p \geq \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi}} = 35 \text{ мм.}$$

Следовательно, диаметр $\vartheta \geq 2 \cdot p = 70 \text{ мм.}$

§ 14. Изг. 1. Изгибом называется искривление, происходящее в плоскости продольной оси бруска. Он вызывается моментами, действующими в продольной плоскости и называемыми *изгибающими*.

Для какого-нибудь сечения 1 балки фиг. 64, справа действует момент $M_u = Cx$, вращающий эту часть балки вокруг горизонтальной оси сечения вниз, по часовой стрелке. Этот момент и принято называть *изгибающим моментом* для сечения 1:

$$M_1 = Cx.$$

Вообще, *изгибающим моментом* для какого-нибудь сечения балки называется момент всех сил, лежащих с одной стороны от этого сечения, и притом момент, составленный относительно центра тяжести этого сечения.

Под действием изгибающего момента происходит искривление бруска, причем, на выпуклой части, сечения раздвигаются (+), а на вогнутой сближаются (-). Вообще изгибающий момент стремится вращать сечения. Этому сопротивляются внутрен-



Фиг. 64, 65, 66 и 67.

ние силы сцепления между сечениями, образуя противоположный момент. Его называют *моментом сопротивления* W_u .

Как и при кручении, мы напишем уравнение равновесия между внешним воздействием M_u и сопротивлением материала:

$$M_u = n \cdot W, \dots \dots \dots (88),$$

где n — есть напряжение растяжения и сжатия, появляющееся между сечениями ab и $вг$ при изгибе.

Пример. Применим эту формулу для случая *балочной балки* (фиг. 64), если длина ее $\vartheta = 2$ м., сечение круглое, диаметром 6 вершков, и материал — сосна. Нагрузка $C = 1/2$ тонны = 500 кг. Изгибающий момент

$$M_u = Cx \text{ приобретает наибольшее значение при } x = \vartheta,$$

и будет

$$M_u = C\vartheta,$$

или:

$$M_u = 500 \cdot 200 = 100000 \text{ кг. см.}$$

Момент сопротивления

$$W = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3,14 \cdot 13,3^3}{4} *) = 1853 \text{ см.}^3$$

Подставляя в расчетную формулу (88),

$$M_u = nW, \text{ или } C\vartheta = nW, \text{ имеем: } \dots \dots \dots (89):$$

$$100000 = n \cdot 1853, \text{ откуда:}$$

$$n = 100000 : 1853 = 54 \text{ кг. на 1 кв. см.} = 0,54 \text{ кг. на 1 кв. мм.}$$

Это напряжение меньше допускаемого для сосны (0,75 кг./мм.²). Следовательно, прочность обеспечена.

2. **Балка, свободно опирающаяся** двумя концами на опоры А и В (фиг. 65) и *нагруженная посередине*. Реакции опор:

$$A = B = \frac{1}{2} \Gamma.$$

Рассмотрим среднее сечение балки. Слева от него имеется одна сила; это реакция А. Момент ее

$$M_u = A \cdot \frac{1}{2} \vartheta = \frac{1}{2} \Gamma \cdot \frac{1}{2} \vartheta = \frac{1}{4} \Gamma \vartheta. \dots \dots (90).$$

Поэтому расчетная формула $M_u = n \cdot W$ переписется

$$\frac{1}{4} \Gamma \vartheta = nW, \text{ или } W = \frac{\Gamma \vartheta}{4n}, \text{ или } n = \frac{\Gamma \vartheta}{4W}.$$

Применим формулу к балке прямоугольного сечения шириной w и высотой v из сосны с допускаемым напряжением на изгиб $n\vartheta = 1$ кг. на кв. мм. Вычисления показывают, что мо-

*) 13,3 есть радиус бревна в см., так как $3 \cdot 4,44 = 13,3$.

мент сопротивления прямоугольного сечения $W = \frac{wb^2}{6}$ *).

Подставляя W и n_d в расчетную формулу, получим

$$\frac{1}{4} \Gamma \delta = 1 \cdot \frac{wb^2}{6}.$$

По этой формуле, зная 3 из 4-х входящих в нее величин, всегда сумеем найти четвертую.

Если груз Γ не по середине балки (фиг. 66), то реакции будут:

$$A = \frac{\Gamma b}{\delta} \text{ и } B = \frac{\Gamma a}{\delta} \dots \dots (91).$$

Момент для сечения 1 под грузом составляем из всех сил, лежащих слева от 1:

$$M_1 = Aa = \frac{\Gamma ba}{\delta} \dots \dots (92).$$

Вставляя в расчетную формулу (88), находим результат для балки фиг. 66:

$$M_u = n \cdot W, \text{ или } \Gamma \frac{ab}{\delta} = nW, \text{ или } \Gamma = \frac{n \cdot W \cdot \delta}{a \cdot b}. (93).$$

Равномерно-распределенная нагрузка κ тон. на 1 метр длины балки вызывает реакции $A=B=1/2 \kappa \delta$ (фиг. 67).

Если взять сечение балки посередине и рассмотреть момент всех сил, лежащих слева от середины, то получим: момент реакции A , вращающий относительно середины по часовой стрелке, и момент нагрузки, вращающий обратно. Первый момент дает

$$A \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \kappa \delta \cdot \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{4} \kappa \delta^2; \text{ второй—}$$

$$\frac{1}{2} \kappa \delta \cdot \frac{1}{4} \delta = \frac{1}{8} \kappa \delta^2.$$

Следовательно, в результате

$$M_u = \frac{1}{4} \kappa \delta^2 - \frac{1}{8} \kappa \delta^2 = \frac{1}{8} \kappa \delta^2 \dots \dots (94).$$

Замечая, что $\kappa \delta$ есть полный груз, лежащий на балке и обозначая его Γ , представим последнее выражение так:

$$M_u = \frac{1}{8} \kappa \delta \cdot \delta = \frac{1}{8} \Gamma \delta \dots \dots (95).$$

*) Моменты сопротивления различных сечений можно найти в справочниках, например в: Hutte. Справочная книга для инженеров,

Сравним с моментом при сосредоточенном грузе (90).

$$M_u = \frac{1}{4} G \delta.$$

Оказывается, что изгибающий момент при распределенной нагрузке вдвое меньше, чем при сосредоточении ее посередине пролета.

3. **Примеры.** а) *Изгиб столба* фигуры 16. Положим, что сосновый столб диаметром 6 верш. имеет свободную длину 10 м. К вершине столба прикреплена проволока, натянутая, как было показано, силой $G : 2 \sin a$.

Требуется проверить прочность столба, если угол $a = 10^\circ$ и груз $G = 50$ кг.

Определяем, какая сила C действует на столб $C_2 = G : 2 \sin a = 50 : 2 \sin 10^\circ = 50 : 2 \cdot 0,174 = 144$ кг.

Эта сила идет под углом к столбу. Разлагая ее вдоль и поперек столба, находим, что изгиб производит составляющая

$$C = C_2 \cos a = 144 \cos 10^\circ = 144 \cdot 0,985 = 142 \text{ кг.}$$

Этот случай изгиба соответствует фиг. 64. Поэтому для расчета надо пользоваться первым примером § 14, а именно, формулой (89), или

$$C = \frac{nW}{\delta}.$$

$$\text{Здесь } W = \frac{\pi p^3}{4} = \frac{3,14 \cdot 13,3^3}{4} = 1853 \text{ см.}^3$$

$$\delta = 10 \text{ м.} = 1000 \text{ см. и } C = 142 \text{ кг.}$$

Подставляя W в формулу для C , находим

$$142 = \frac{n \cdot 1853}{1000}; \text{ откуда } n = \frac{142}{1,853} = 76,2 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2} = 0,762 \text{ кг. на 1 кв. мм.}$$

Это напряжение не превосходит допускаемого при изгибе соснового дерева (0,7—0,8); следовательно, прочность столбов обеспечена.

б) *Потолочная балка* при равномерной нагрузке. Положим, что нагрузка потолка составляет 500 кг. на 1 метр длины балки. Балки—сосновые, сечением 4×6 вершков. Ширина помещения, перекрываемого балками—4 метра. Требуется проверить прочность балок.

Здесь случай фигуры 67.

Для основной расчетной формулы (88) определяем предварительно изгибающий момент. По (94):

$$M_u = \frac{1}{8} \kappa \delta^2.$$

Но так как $\kappa=500$ кг. на 1 м. = 5 кг. на 1 см. и

$$\delta=4 \text{ м.} = 400 \text{ см.}, \text{ то}$$

$$M_u = \frac{1}{8} \cdot 5 \cdot 400^2 = 100000 \text{ кг. см.}$$

Для той же формулы (88) вычисляем момент сопротивления

$$W = \frac{w \cdot \sigma^2}{6} = \frac{4.6^2}{6} \text{ вершк.}^3 = \frac{4.6^2}{6} \cdot 4.44^3 \text{ см.}^3 = 2100 \text{ см.}^3.$$

Подставляя в (88), получаем

$$100000 = n \cdot 2100;$$

$$\text{Откуда } n = 1000:21 = 47,7 \text{ кг. на 1 кв. см.} = 0,477 \frac{\text{кг.}}{\text{мм.}^2}.$$

Это напряжение меньше допускаемого (0,7 до 0,8). Прочность балок обеспечена.

В заключение приводим таблицу допускаемых напряжений для часто встречающихся материалов (96).

Материал	Допускаемое напряжение в кг. на 1 кв. мм.			
	На растяжение	Сжатие	Изгиб	Срезывание
Сосна	1—1,2	0,6	0,7-0,8	0,06-0,1
Дуб	1,4	0,7	1,0	0,15
Кирпичная кладка	—	0,07	—	—
„ на цементе	—	0,10	—	—
Чугун. отливки	—	7,5	4	2
Стальные отливки	—	10	10	7,5
Железо	10	10	10	5—8
Грунт слабый илистый	—	0,005	—	—
Плотный, слежавшийся грунт	—	0,025	—	—

Глава III.

Гидростатика.

§ 15. **Равновесие жидкостей.** 1. **Определения.** Жидкость с механической точки зрения можно рассматривать, как систему частиц, не вполне свободных. Частицы идеальной жидкости имеют все свободы перемещения, кроме одной: их можно отрывать друг от друга, не встречая со стороны жидкости никакого сопротивления; частицы жидкости можно сдвигать одна по другой, и при этом тоже не встретится никаких препятствий; но частицы жидкости не вдавливаются друг в друга; вот почему сосуд, наполненный жидкостью и подверженный наружному давлению, сохраняет свой объем. Сжатие жидкости так ничтожно, что им пренебрегают, и считают жидкости несжимаемыми. *Жидкость сопротивляется одному только сжатию и не оказывает никакого сопротивления растяжению и сдвиганию.*

Под влиянием силы тяжести каждая частица жидкости стремится занять самое низкое из возможных положений, не встречая препятствий со стороны соседних частиц. Поэтому жидкости разливаются по поверхности земли, наполняя углубленные места и принимая форму этих мест.

Часть поверхности жидкости, не прилегающая к стенкам бассейнов или сосудов, носит название *свободной поверхности уровня*. Легко убедиться, что при равновесии это будет *горизонтальная плоскость* *).

В самом деле, в идеальной жидкости, при равновесии, частицы располагаются на поверхности, нормальной к действующим на них силам.



Фиг. 68.

Если на фиг. 68 предположить, что сила P ненормальна к поверхности жидкости, то получим составляющую T , которая перемещает частицу C ,—и равновесие будет невозможно.

Силы тяжести всех частиц вертикальны, поэтому поверхность жидкости, как нормальная к этим силам, должна быть горизонтальной.

*) При рассмотрении малых поверхностей по сравнению с поверхностью земли; в кругу же больших величин это будет поверхность эллипсоида вращения.

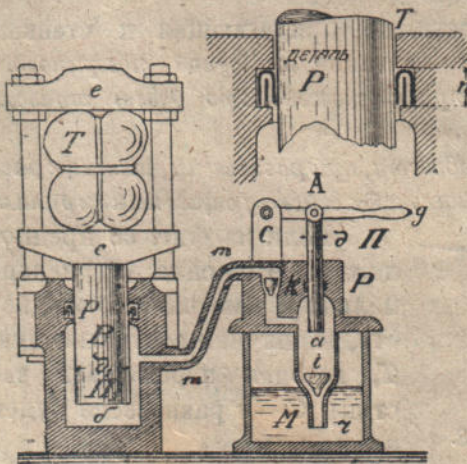
2. Закон Паскаля. Жидкость несжимаема; поэтому, если на нее в закрытом сосуде произвести давление в каком-нибудь месте, то это давление передается во все точки жидкости и сосуда. На основании первого раздела настоящего §, это давление может быть только нормально к стенкам сосуда.

В этом заключается закон Паскаля, открытый им в 1653 г.: *давление сообщаемое извне передается во все точки жидкости и нормально к стенкам сосуда.*

Обозначим давление на единицу поверхности буквой a (его выражают в кг. на 1 кв. см. и называют *интенсивностью* давления). В таком случае, на площадь Π придется сила давления $D = a\Pi$; на другую площадь Π_1 придется сила $D_1 = a\Pi_1$. Возьмем отношения между силами давления D и D_1 :

$$\frac{D}{D_1} = \frac{a\Pi}{a\Pi_1} = \frac{\Pi}{\Pi_1} \dots \dots \dots (97).$$

3. Гидравлический пресс. На форм. (97) основано устройство гидравлического пресса. Посредством этой машины небольшим усилием можно произвести значительное давление. Схема устройства пресса приведена на фиг. 69.



Фиг. 69.

Узкий сосуд a содержит сплошной поршень A , приводимый в движение рычагом Cd . Снизу трубкой $ч$ сосуд соединен с резервуаром масла M , а сбоку, посредством трубки $ктт$, он соединен с цилиндром $б$. Трубки $ч$ и $т$ закрываются клапанами $и$ и $к$.

При качании рычага Cd масло подымается из сосуда M в насос a , а отсюда перегоняется в цилиндр $б$. Здесь масло выталкивает поршень B , который подымаясь, производит давление на предмет T , находящийся между досками пресса $с$ и $е$.

Диаметр поршня Aa назовем δ , и диаметр поршня B — δ_1 ; давления, приходящиеся на поршни, назовем соответственно D и D_1 .

Тогда (по 97) получим:

$$\frac{D}{D_1} = \frac{P}{P_1} = \frac{\pi d^2}{4} : \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{d^2}{d_1^2} \dots \dots \dots (98),$$

т. е. давление на поршни пропорционально квадратам их диаметров.

Если, например, диаметр d_1 в 10 раз больше диаметра d насоса, то давление, передаваемое поршнем, в 100 раз больше силы насоса.

Гидравлический пресс применяется очень часто: для пресования хлопка, сена, на сахарных, маслобойных и других заводах. Он является также основной машиной для испытания прочности материалов.

§ 16. Давление жидкости на стенки и дно сосудов. 1. Определим давление жидкости в каком-нибудь горизонтальном слое AB на глубине z (фиг. 70). Выделим в этом уровне небольшой элемент ab , по площади равный единице, и обозначим давление, приходящееся на этот элемент, буквою a . Пусть плотность жидкости (вес 1 куб. см.)— n ; тогда вес элементарного параллелепипеда, стоящего на ab будет:

$$1 \cdot z \cdot n.$$

Если жидкость в равновесии, то в равновесии будут все ее части и, в их числе,—параллелепипед $обвд$.

Давления между частицами жидкости нормальны, и составляя уравнение проекций на горизонтальную ось X_0 :

$$\Sigma X = a_x \cdot z \cdot 1 - a_x' \cdot z \cdot 1 = 0,$$

найдем, что

$$a_x = a_x',$$

т. е. что боковые давления на параллелепипед $обвд$ —равны.

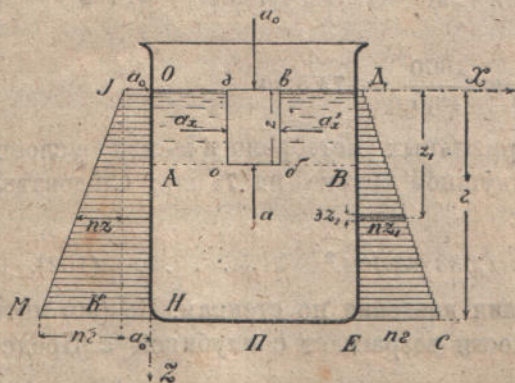
Из уравнения проекций на вертикальную ось Z :

$$\Sigma Z = nz1 + a_0 - a = 0,$$

найдем:

$$a = a_0 + nz \dots \dots (99).$$

Это можно написать для всякого элемента на рассматриваемом уровне AB глубиною z , так что вообще:



Фиг. 70.

емом уровне AB глубиною z , так что вообще:

давление жидкости на глубине z одинаково во всех элементах этой глубины и равно давлению a_0 на свободную поверхность жидкости плюс вес столба жидкости высотой z и площадью основания, равной элементу.

По той же формуле (99) находится та глубина, где возникает определенное, предварительно заданное, давление. Эта глубина

$$z = \frac{a - a_0}{n} \dots \dots \dots (100).$$

В частном случае, a_0 может быть мало по сравнению с a , и им пренебрегают; тогда

$$z = \frac{a}{n} \dots \dots \dots (101).$$

Глубина z называется высотой напора или просто, *напором*.

Пользуясь формулой напора, решим задачу: какой напор воды надо создать, чтобы получить давление в 1 кг. на 1 кв. см.?

В (101) принимаем

$$n = 1 \text{ гр./см.}^3 \text{ и } a = 1 \text{ кг./см.}^2 = 1000 \text{ гр./см.}^2$$

тогда получается

$$z = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ см.}$$

Если вместо воды взять ртуть, плотность которой = 13,6, то для получения того же давления в 1 кг./см.² потребуется высота напора

$$z = \frac{1000}{13,6} = 73,5 \text{ см.}$$

Атмосфера при нормальных метеорологических условиях поднимает ртуть в безвоздушной трубке на 76 см.; следовательно, давление атмосферы:

$$\text{атм.} = 76 : 73,5 = 1,033 \text{ кг./см.}^2 \dots \dots \dots (102).$$

2. Закон распределения давления по стенкам. По (99) интенсивность давления жидкости возрастает с глубиной z . Представим это графически.

В форм. (99) первый член a_0 не зависит от глубины, и для всех элементов стенки сосуда он может быть представлен постоян-

ными горизонтальными ординатами a_0 ; распределение давления, вызываемое первым членом (99), выражается прямоугольником ЮНК.

Второй член выражения (99) изменяется пропорционально глубине z и может быть представлен наклонною прямою: Эта прямая определяется следующими двумя точками:

при $z = 0$ — член равен нулю,

при $z = z$ — он равен nz .

Таким образом, полная картина распределения давления вдоль стенки сосуда выражается трапецией ЮНМ.

Определим величину давления на всю стенку, предполагая, что $a_0 = 0$, т. е. найдем давление одной только жидкости, без участия атмосферного. Распределение при $a^0 = 0$ — будет треугольник ДЕС, показанный справа. Сначала вычислим величину давления на элемент стенки, находящийся на глубине z_1 и имеющий высоту z_1 и ширину, равную единице в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа.

Интенсивность давления на глубине z_1 есть по (101)

$$a_1 = nz_1;$$

поэтому, на площадку $1 \cdot z_1$ давление будет

$$a_1 \cdot (1 \cdot z_1) = nz_1 \cdot z_1 = (nz_1) \cdot z_1.$$

Из чертежа видно, что это — площадь элементарного, косо заштрихованного прямоугольничка.

На каждый элемент стенки давление составляет площадь такого прямоугольничка, взятого из диаграммы ДЕС; очевидно, давление на всю стенку, как сумма давлений на ее элементы, составит из суммы таких элементарных прямоугольничков, т. е. оно равно площади, очерченной ступенчатой линией ДС. При уменьшении размеров элемента z_1 и увеличении числа этих элементов, в пределе, получится площадь треугольника:

$$D = \frac{1}{2} СБ. z = \frac{1}{2} nz. z = \frac{1}{2} n z^2 \dots \dots (103).$$

Конечно, для левой части фигуры 70 давление представится площадью трапеции

$$D = \frac{1}{2} (nz + a_0 + a_0) z = \frac{1}{2} (2a_0 + nz).$$

Центр давления. Положение равнодействующей давления жидкости может быть определено по общим правилам § 6,4 и 2.

Для графического определения, приложим в середине каждого элементарного прямоугольничка (фиг. 70 справа) силу, равную

$$(nz) \varepsilon z$$

и нормальную к стенке, в данном случае—горизонтальную; для всех таких сил построим веревочную линию, как указывалось в § 6,4 и § 6,3.

Это—равносильно отысканию центра тяжести треугольника. Очевидно, центр давления жидкости лежит на $\frac{1}{3}$ глубины сосуда, считая от дна, или на $\frac{2}{3}$ от свободной поверхности.

3. Давление на дно сосуда получается из той же формулы (99). Положим, что дно горизонтально и примем $z=z$; тогда

$$a=a_0+nz.$$

На все дно площадью Π придется давление

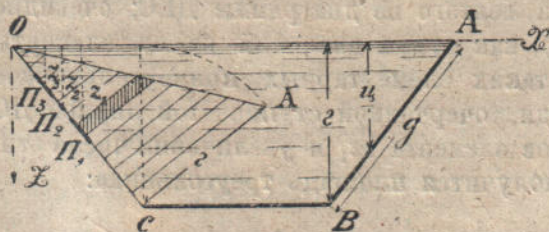
$$D=a\Pi=a_0\Pi+nz\Pi \dots \dots (104).$$

Следовательно, давление на дно сосуда равно весу призматического столба жидкости, площадь основания и высота которого равны площади дна и глубине сосуда; если свободная поверхность жидкости несет нагрузку интенсивности a_0 , то давление на дно увеличивается произведением интенсивности a_0 на площадь дна Π .

4. Давление на наклонную стенку. Разобьем поверхность наклонной стенки канала фиг. 71 на малые элементы.

Сделаем элементы настолько малыми, чтобы интенсивность

давления на протяжении элемента можно было считать постоянной; например, для элемента Π_1 интенсивность считать nz_1 , для элемента Π_2 интенсивность считать nz_2 и т. д. Отложим интенсивности по нормальям



Фиг. 71.

к элементам и соединим концы ординат линией; получим прямую OA. Закон изменения интенсивности давления выражается треугольником, у которого основание AC равно глубине сосуда, а высота CO равна длине стенки.

По предыдущему, полное давление на стенку сосуда шириной единица выражается площадью этого треугольника, т. е.

$$D = \frac{1}{2} AC \cdot CO \cdot n = \frac{1}{2} ngd,$$

где d —длина стенки.

Если же ширина стенки в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, не 1, а u , то давление

$$D = \frac{1}{2} ngdu \dots \dots \dots (105).$$

Обобщение. Рассмотрим сосуд произвольной формы. Разобьем поверхность стенки на малые элементы $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \dots$, расстояние которых до свободной поверхности жидкости есть:

$$z_1, z_2, z_3 \dots$$

Тогда давление на какой-нибудь элемент стенки Π_1 будет:

$$nz_1 \Pi_1,$$

а полное давление на всю стенку составит из суммы таких давлений:

$$D = nz_1 \Pi_1 + nz_2 \Pi_2 + nz_3 \Pi_3 + \dots = n(z_1 \Pi_1 + z_2 \Pi_2 + z_3 \Pi_3 + \dots).$$

В скобках оказался статический момент площади стенки относительно оси X (см. § 6, 5); известно, что он равен моменту равнодействующей относительно той же оси. Обозначая

Π —площадь всей стенки,

u —расстояние ее центра тяжести до оси X , получим:

$$z_1 \Pi_1 + z_2 \Pi_2 + \dots = u \cdot \Pi \text{ и } D = nu \Pi \dots (106),$$

т. е. полное давление жидкости на наклонную стенку сосуда равно весу столба жидкости с основанием, равновеликим площади стенки, и высотой, равной глубине центра тяжести стенки.

В частном случае прямоугольной стенки

$$u = \frac{1}{2} z, \text{ и } D = \frac{1}{2} n \Pi z = \frac{1}{2} n d h g \dots (107).$$

Если свободная поверхность несет нагрузку a_0 , то давление на элемент стенки, по (99) будет:

$$a_0 \Pi_1 + a_1 \Pi_1 = a_0 \Pi_1 + nz_1 \Pi_1,$$

а на всю стенку—

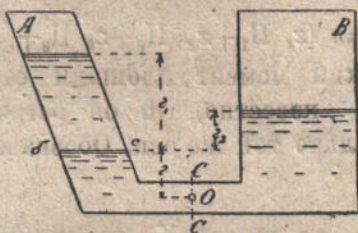
$$\begin{aligned} D &= a_0 \Pi_1 + n z_1 \Pi_1 + a_0 \Pi_2 + n z_2 \Pi_2 + \dots = \\ &= a_0 (\Pi_1 + \Pi_2 + \dots) + n (\Pi_1 z_1 + \Pi_2 z_2 + \dots) = \\ &= a_0 \Pi + n \Sigma Pz = a_0 \Pi + n Pz \dots \dots \dots (108). \end{aligned}$$

Это давление больше предыдущего на величину внешнего давления, приходящегося на стенку, как будто нагрузка a_0 непосредственно приложена к стенке.

Полученные результаты не зависят от угла наклона стенки; они пригодны также и для горизонтального дна. Действительно, форм. (104) представляет частный случай (108), когда $z = z_0$.

Следует иметь в виду, что если на поверхность жидкости давит атмосфера a^0 и такая же атмосфера давит снаружи стенки, то оба эти давления уравниваются; в результате стенка находится под влиянием одного только давления $n Pz$ по форм. (106), или площади треугольника OAC фиг. (71).

5. **Сообщающиеся сосуды.** Если жидкость свободно проникает из одного сосуда в другой, то сосуды называются сообщающимися (фиг. 72).



Фиг. 72.

Положим, что две несмешивающиеся жидкости, например ртуть и масло, налиты в сосуд. Конечно, более тяжелая ртуть окажется внизу, легкое масло наверху.

Жидкость — в равновесии.

Рассмотрим какой-нибудь

вертикальный, весьма тонкий слой CC , на котором возьмем элемент у центра тяжести. Так как элемент в покое, то давление на слой слева равно давлению справа.

Но слева давление обуславливается жидкостями плотностью n_1 и n_2 , и интенсивность давления будет $n_1 z_1 + n_2 z$; справа же интенсивность давления — $n_2 (z + z_2)$.

Поэтому

$$n_1 z_1 + n_2 z = n_2 z + n_2 z_2, \text{ или: } n_1 z_1 = n_2 z_2,$$

откуда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{n_2}{n_1} \dots \dots \dots (109).$$

Высоты напора над плоскостью, разделяющей жидкостей, обратно пропорциональны плотностям жидкостей.

Если плотности одинаковы,—

$$n_1 = n_2,$$

то жидкости стоят на одном уровне, ибо по (109) будет:

$$z_1 = z_2.$$

Этим пользуются в нивелирах.

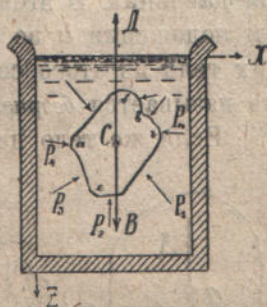
§ 17. **Равновесие тел в жидкостях. 1. Закон Архимеда.** Если жидкость в равновесии, то в равновесии будет и всякая ее большая или меньшая часть. Давление частиц жидкости на эту часть нормально к поверхности. Таким образом, всякую часть жидкости можно представить себе, как тело, находящееся в равновесии под действием нормальных сил; например, часть жидкости *абвге* фиг. 73.

Кроме нормальных сил наружного давления, к выделенному объему *абвге* приложен его собственный вес. Назовем его *в*.

Из равновесия следует, что все силы рассматриваемого объема приводятся к двум равным, противоположным силам, действующим по одной прямой, т. е., что равнодействующая давления жидкости *Д* вертикальна, проходит через центр *С* тяжести объема *абвге* и равна весу *в*:

$$Д = -в.$$

Давления жидкости на объем *абвге*, следовательно, и их равнодействующая, не изменятся, если заполнить этот объем не жидкостью, а каким-нибудь другим телом той же формы, например телом веса *В*. Таким образом, давление жидкости на поверхность погруженного тела равно весу вытесненной телом жидкости, идет вверх и приложено в центре тяжести вытесненной жидкости.



Фиг. 73.

Давление жидкости на тело равно *в* и идет вверх в то время, как вес тела *В* действует вниз. Очевидно, тело, погруженное в жидкость будет находиться под влиянием равнодействующей, равной *В—в*, что формулируется так: *тело теряет в весе столько, сколько весит вытесненный им объем жидкости.*

В этом состоит закон Архимеда.

Но последняя формулировка этого закона не вполне точна. Вес тела постоянен, только часть его уравновешивается давлением жидкости, и происходит кажущаяся потеря.

Эту потерю веса в технике называют *подъемной силой воды*.

2. **Виды равновесия** плавающих тел. Если тело плавает на поверхности жидкости, то его объем не равен объему вытесненной жидкости. Положим, что тело объема O и плотности n_m вытесняет объем o в жидкости плотностью $n_{ж}$; тогда вес тела $B = On_m$ и давление жидкости $D = on_{ж}$. Равнодействующая этих сил

$$P = On_m - on_{ж} \dots \dots \dots (110).$$

Если тело вполне погружено, то

$$O = o \text{ и } P = O(n_m - n_{ж}) = o(n_m - n_{ж}) \dots (111).$$

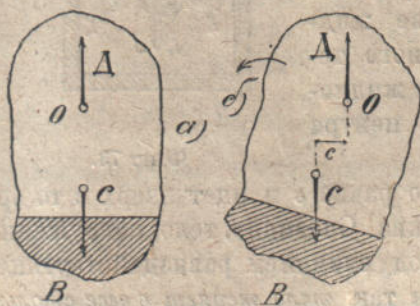
Величина и знак силы зависит от разности $n_m - n_{ж}$. Здесь может быть 3 случая.

1 случай: $n_m > n_{ж}$. P — положительна, т. е. идет вниз. В этом случае P не равна нулю, и равновесие невозможно: тело будет опускаться.

2 случай: $n_m = n_{ж}$. $P = 0$. Тело одинаковой плотности с жидкостью остается в равновесии.

Если тело однородно, то центр тяжести совпадает с центром давления. В этом случае тело сохраняет равновесие во всяком положении и во всяком месте, так как нет причин, выводящих тело из этого состояния. По предыдущему, такое равновесие называется *безразличным*.

Если же тело неоднородно, то может быть два случая.

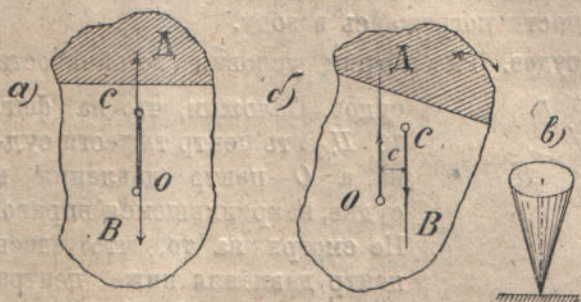


Фиг. 74

получим пару сил $(B, -D)$; вращающую влево и стремя-

а) Центр тяжести тела ниже геометрического центра объема тела. Такой случай представляет, например, деревянный поплавок с железным концом (фиг. 74). Здесь равнодействующая D давлений жидкости, идущая кверху, приложена выше, чем вес тела B . Отклоним тело немного вправо, как на фиг. 74-б;

щуюся восстановить состояние тела а). Такое же стремление возвращаться в первоначальное состояние мы обнаружим и в том



Фиг. 75.

б) Если центр тяжести C выше центра объема тела O , то может быть *неустойчивое равновесие*. Действительно, на фиг. 75, при малейшем случайном отклонении тела вправо (фиг. 75-б), появляется пара сил ($D, -B$), также вращающая вправо, т. е. продолжающая начавшееся отклонение. При таких условиях тело может быть в равновесии лишь мгновение; но достаточно какой-либо случайной причины, весьма малого отклонения, и тело опрокинется. Этот случай того же порядка, как и случай равновесия конуса или карандаша, поставленного вершиной вниз (фиг. 75-в). Мы имеем неустойчивое равновесие.

Следует заметить, что при расположении C выше O неустойчивость необязательна; в следующем разделе 3 приводится тому пример. Она обязательна лишь при наибольшей потенциальной энергии системы.

3 случай: $n_m < n_{ж}$. В этом случае сила P , по (111), — отрицательна, и тело должно подыматься кверху. Равновесие наступает в момент, когда $P=0$, т. е. когда (по 110) будет:

$$O n_m = o n_{ж}, \text{ или } o = O \frac{n_m}{n_{ж}} : \dots (112).$$

Но так как, по условию, $\frac{n_m}{n_{ж}} < 1$,

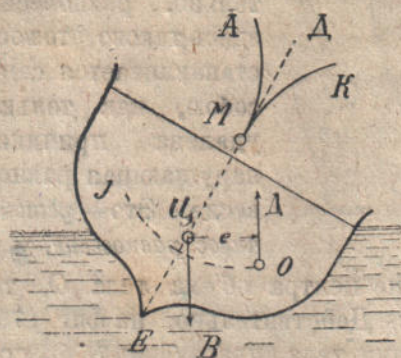
то равновесие наступает, когда

$$o < O, \quad \text{составляя от } O \text{ часть } \frac{n_m}{n_{ж}}.$$

случае, если попробуем отклонить тело а) влево. Следовательно, равновесие здесь таково, что восстанавливается само собою, как только удалена причина, нарушающая равновесие. Это — *устойчивое равновесие*.

Итак, свободно в жидкости может плавать тело, лишь отчасти в нее погруженное. В таких условиях находятся суда. Средняя плотность их меньше плотности воды, и они плавают на ее поверхности, отчасти погружаясь в воду.

3. Устойчивость судов. Рассмотрим условия устойчивости



Фиг. 76.

Такое равновесие будет иметь место до тех пор, пока центр тяжести Γ находится влево от вертикали, проходящей через центр давления O . Но если, при увеличении крена, Γ перейдет вправо от O , то получится право вращающая пара, и судно опрокинется.

При разных положениях судна, положения центра давления O также различны; центр O перемещается по некоторой кривой IO . Нормали к этой кривой, пересекаясь между собою, образуют плавную кривую из двух ветвей AM и MK , расположенных симметрично относительно оси судна ED . Точка M , общая для оси симметрии и обеих ветвей, называется *метацентром*.

Судно оказывается устойчивым всегда, когда центр тяжести лежит ниже метацентра, ибо в этом случае сила тяжести накренившегося судна всегда пройдет левее силы давления.

Если центр тяжести оказывается выше метацентра, то судно становится неустойчивым. *).

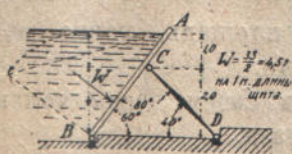
Примеры. 1. Плотина системы Шаноана (Chanoine). Щит для

судов. Положим, что на фиг. 76 Γ есть центр тяжести судна, а O —центр давления в судне, накренившемся вправо. Не смотря на то, что здесь центр давления ниже центра тяжести, силы B и D образуют лево вращающую пару, которая стремится вернуть судно в первоначальное положение.

Равновесие устойчивое.

*) Подробнее см. 1) Pollard et Dubeout. Théorie du navir, 2) Schmidt. Stabilität von Schiffen, 3) Крылов А. Теория корабля.

поддержания воды в плотинах системы Шаноана прикреплен к



Фиг. 77.

земле посредством шарнира B и стержня DC . Поэтому реакции его опор B и C могут быть найдены обычным путем (см. фиг. 33). Для определения направления реакций продолжают давление воды W до пересечения со стержнем CD и точку пересечения соединяют с B . Величины реакций получают путем построения треугольника на основании силы W , которая считается теперь уже известной. Она равна

$$W = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 : \cos 30^\circ = 5,2 \text{ тонны}$$

на 1 метр ширины щита, считая в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа.

2. Ворота шлюза снабжены прямоугольным затвором, высота которого 70 см., ширина 60 см. Верхний край затвора расположен на глубине 1 м. под поверхностью воды. Определим давление воды на затвор, считая, что плотность воды = 1.

Площадь затвора $70 \cdot 60 = 4200 \text{ см.}^2$

Расстояние центра тяжести этой площади от поверхности воды $u = 100 + \frac{1}{2} \cdot 70 = 135 \text{ см.}$

Пренебрегая давлением атмосферы, находим по форм. (106):

$$D = 1.4200 \cdot 135 \text{ гр.} = 567 \text{ кг.}$$

Глава IV.

Аэростатика.

§ 18. Общие законы газов. 1. Основные положения. Газы обладают всеми свойствами жидкостей, кроме постоянства объема. При изменении давления объем газов изменяется; газы вообще стремятся к расширению, и их можно удержать лишь под определенным давлением в закрытых сосудах. Но при данном давлении и данной температуре механические свойства газов, таковы же, как и у жидкостей. Поэтому газы подчиняются всем тем законам, которые были выведены для жидкостей, а именно:

1. Давление, произведенное на газ, распространяется по всем направлениям и притом без потерь.

2. Давление газа на какую-нибудь площадь, равно весу столба газа, покоящегося на этой площади.

3. Тело, погруженное в газ, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненный телом объем газа.

Но кроме этих законов, для газов найден ряд других, вытекающих из свойства газов расширяться от изменения давления и температуры.

2. **Закон Мариотта.** (1676 г.). На основании опытов Мариотт нашел следующие зависимости между давлением газа и занимаемым им объемом в сосуде: *для данной массы газа объемы обратно пропорциональны давлениям.*

Положим, что данная масса газа m при давлении D_1 занимает объем O_1 . Если ту же массу m мы сожмем до объема O_2 , то она окажет давление D_2 . По закону Мариотта

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{O_1}{O_2} \dots \dots \dots (113),$$

или $D_2 O_2 = D_1 O_1$ — есть постоянная величина.

Следует иметь в виду, что этот закон оправдывается лишь при постоянной температуре. При изменении же температуры нарушается объем газа даже при постоянном давлении; если же газу нет свободы расширения, то при нагревании его повышается давление. Зависимость между этими изменениями установлена Гей-Люссаком в 1802 г.

3. **Закон Гей-Люссака.** При постоянном давлении *приращение единицы объема газа пропорционально повышению температуры*, при чем коэффициент пропорциональности есть $\frac{1}{273}$.

Это следует понимать так: единица объема получает приращение $\kappa = \frac{1}{273}$ при нагревании на 1°C ; при нагревании на m° , она получит приращение

$$\frac{1}{273} \cdot m, \text{ или вообще } - \kappa \cdot m.$$

Объем O расширится в O раз больше, т. е. на $O\kappa m$ и превратится в некоторый объем O_1 , равный

$$O_1 = O + O\kappa m = O(1 + \kappa m) \dots \dots \dots (114),$$

где $\kappa = \frac{1}{273} = 0,00367$.

Вообразим, что одна и та же масса газа нагревается, один раз до температуры t_1 и другой раз до температуры t_2 : тогда получим:

$$\text{для первого случая } O_1 = O(1 + \kappa t_1)$$

$$\text{для второго случая } O_2 = O(1 + \kappa t_2).$$

Разделивши одно на другое, имеем:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{1 + \kappa t_1}{1 + \kappa t_2} \dots \dots \dots (115).$$

Чтобы получить зависимость между всеми обстоятельствами: объемом, давлением и температурой, сравним два состояния массы газа с третьим, которое имеет давление, как в первом, а температуру, — как во втором:

Состояние массы газа	Объем	температура	давление
1-ое	O_1	t_1	∂_1
2-ое	O_2	t_2	∂_2
3-ье	O	t_2	∂_1

Для первого и третьего состояния напомним (115):

$$\frac{O_1}{O} = \frac{1 + \kappa t_1}{1 + \kappa t_2}$$

Для второго и третьего:

$$\frac{O}{O_2} = \frac{\partial_2}{\partial_1}$$

Перемножим равенства и сократим:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{\partial_2 (1 + \kappa t_1)}{\partial_1 (1 + \kappa t_2)}$$

Если подставим $\kappa = \frac{1}{273}$, то после преобразований получим:

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{\partial_2}{\partial_1} \cdot \frac{273 + t_1}{273 + t_2} \dots \dots \dots (116).$$

Отношение объемов можно заменить отношением плотностей.

Так как

$$m = O \rho_1,$$

то для одной и той же массы

$$O_1 n_1 = O_2 n_2, \text{ или } \frac{O_1}{O_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{273 + m_1}{273 + m_2}, \text{ или } \frac{d_2}{n_2(273 + m_2)} = \frac{d_1}{n_1(273 + m_1)} \dots (117),$$

т. е. отношение давления газа к плотности его и к двучлену $273 + m$ есть постоянная величина.

Вычислим эту величину для воздуха при температуре $m=0^\circ$ и нормальной плотности его $n=0,001293$ гр./см.³.

Если трубку, с одной стороны запаянную, наполнить ртутью (фиг. 78-а) и, прикрывши открытый конец пальцем, опрокинуть в чашку со ртутью (фиг. б), то, по удалении пальца, ртуть не выльется, а только отчасти опустится. Оказывается, что атмосферный воздух удерживает ртуть на высоте

$$n=76 \text{ см.},$$

если опыт производится на уровнях, близких к уровню океана, и на меньшей высоте—в горах. Очевидно, атмосфера оказывает на ртуть такое же давление, как колонна ртути n . Рассчитаем это давление на 1 кв. см. поверхности ртути ab .

На каждом квадратном сантиметре поверхности ab покоится объем ртути

$$1.n=76 \text{ см.}^3$$

А так как плотность ртути

$$n=13,6 \text{ гр./см.}^3,$$

то вес колонны с основанием равным 1 кв. см. будет

$$1.n.n=1.76.13,6=1033 \text{ грамма}=1,033 \text{ кг.} \dots (118).$$

Таково же будет и давление атмосферы.

Итак, давление атмосферы на уровне океана составляет 1,033 кг. на 1 кв. см. и выражается напором ртути 76 см.

Подставим эти числа

$$m=0, n=0,001293 \text{ и } d=1033$$

в форм. (117); получим для размеров в см. и граммах:



Фиг. 78.

$$\frac{1033}{0,001293(273+0)} = 2927, \text{ или } 29,27 \text{ для метр. и кг.}$$

Пользуясь этим постоянным числом, можно решать задачи об определении любой из 3-х величин ρ , n , t , если остальные две даны.

4. **Новая атмосфера.** Интенсивность давления атмосферного воздуха на уровне океана при температуре 0° и нормальном барометрическом состоянии принимается за единицу для измерения других давлений. Эту единицу кратко называют *атмосферой* A если в баллоне давление газа превосходит эту интенсивность в n раз, то это давление определяют числом „ n атмосфер“. Если воздух в закрытом сосуде разрежается вдвое, то говорят, что давление его $—\frac{1}{2}$ атмосферы.

В формуле 118 показано, что принятая единица, „атмосфера“, есть по существу давление

$$1,033 \text{ кг. на } 1 \text{ кв. см.} = \infty 16,2 \text{ фунт./дм.}^2.$$

Это число неудобно для технических расчетов. Условились заменять его близким числом

$$1 \frac{\text{кг.}}{\text{см.}^2} \dots \dots \dots (119),$$

и эту интенсивность давления называть атмосферой. Будем отличать эту атмосферу от 1,033 названием *новой атмосферы*.

Как указывалось в приложениях формулы (101), новая атмосфера выражается напором воды 10 метров или ртути 73,5 см.

5. **Примеры.** а) *Пар в цилиндре паровой машины.* Обозначим полный ход поршня в цилиндре паровой машины буквой x , диаметр цилиндра— d . Положим, что на $\frac{1}{5}$ части своего хода поршень получает свежий пар давления $=a$ атмосфер, и определим, каково давление пара в конце хода поршня, если температура постоянна.

В момент впуска пар давления a атм. занимает об'ем

$$O_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot x.$$

В конце хода поршня он расширится до полного об'ема цилиндра

$$O_2 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot x.$$

Отношение между объемами $O_1 : O_2 = 1/5$.

По закону Мариотта (113) таково же будет отношение и между обратными величинами давлений $a_2 : a_1 = 1/5$, т. е.

$$a_2 = 1/5 a_1.$$

б) *Воздухопроводы с нагреванием.* Часто приходится подогреть воздух прежде, чем пользоваться им для процессов производства или горения. Прибор представляет трубу, по которой проводится холодный воздух из воздухоудвки в нагревающий аппарат, и другую трубу, отводящую из аппарата горячий воздух. Определим, как должны относиться диаметры воздухопроводных труб, чтобы скорость движения воздуха была одинаковой, если температура холодного воздуха $t_1 = 10^\circ$ а температура горячего $t_2 = 500^\circ$.

Обозначим диаметр холодной трубы d_1 , горячей— d_2 ; скорость— c .

При скорости c в секунду пройдут объемы воздуха:

$$O_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot c \quad \text{и} \quad O_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot c.$$

$$\text{Отсюда} \quad \frac{O_2}{O_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

С другой стороны по закону Гей-Люссака (115):

$$\frac{O_2}{O_1} = \frac{1 + \kappa t_2}{1 + \kappa t_1},$$

$$\text{поэтому} \quad \frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{1 + \kappa t_2}{1 + \kappa t_1}} = \sqrt{\frac{273 + 500}{273 + 10}} = 1,65,$$

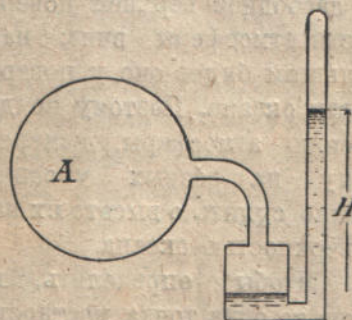
т. е. диаметр горячей трубы должен быть на 65 % больше, чем у холодной.

в) *Вспышка в газовом двигателе.* От зажигания и сгорания взрывчатой смеси газового двигателя температура поднялась с 300° до 1500° . Сжатие—6 атмосфер. Каково напряжение после взрыва?

По форм. $\frac{d_1}{d_2} = \frac{273 + m_1}{273 + m_2}$ напишем:

$$\frac{6}{d_2} = \frac{273 + 300}{273 + 1500}, \quad \text{откуда} \quad d_2 = \frac{1773 \cdot 6}{573} = 18,6 \text{ атм.}^{\ast}$$

§ 19. **Приложения. 1. Барометры и манометры.** Барометр—это прибор для измерения давления атмосферы. Трубка, опрокинутая в сосуд со ртутью, есть простейший ртутный барометр. (Фиг. 78).



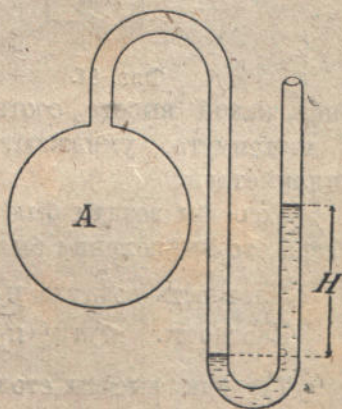
Фиг. 79.

Манометр служит для измерения давления газов, паров и жидкостей. *Сифонный* манометр представляет изогнутую трубку, соединенную с газовым резервуаром. Трубка может быть закрытая (фиг. 79) или открытая (фиг. 80).

Если давление в резервуаре А равно атмосферному, то уровни ртути в обоих коленах трубки одинаковы. При увеличении давления в резервуаре ртуть в одном колене трубки опускается, а в другом соответственно подымается. Превышение H — одного уровня над другим есть избыток давления газа в резервуаре над атмосферным.

При очень больших давлениях ртутные манометры оказались бы очень высокими и тяжелыми, поэтому их сменяют металлическими. На фиг. 81 изображен манометр

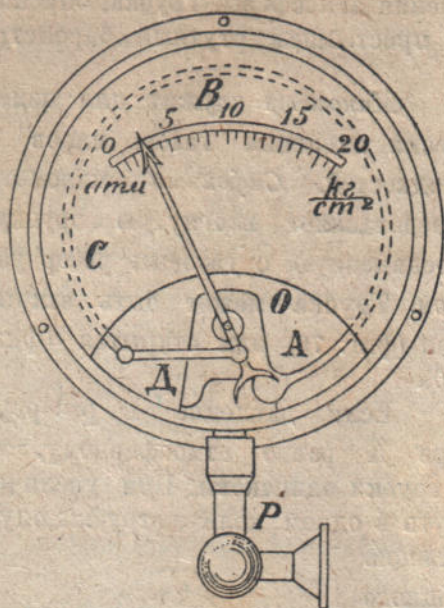
Бурдона. Это металлическая сплюснутая трубка, согнутая по дуге круга или спирали АБСД. Открытый конец ея А соединяется с резервуаром газа, а закрытый Д действует на стрелку, вращающуюся вокруг оси О по циферблату прибора. Если в трубку впустить газ высокого давления, то трубка распрямляется, и стрелка поворачивается. Давление прочитывается непосредственно по циферблату в атмосферах, или в кг. на 1 кв. см.



Фиг. 80.

2. *Барометрическое нивелирование.* Давление воздуха уменьшается по мере поднятия над уровнем океана. Это становится

понятным, если представить себе воздух, как весомую жидкость, наполняющую атмосферу на подобие сосуда. Давление возрастает по мере углубления от свободной верхней поверхности атмосферы вниз; наибольшим будет оно у поверхности океана. Поэтому по давлению атмосферы, измеренному на разных уровнях, можно судить о высоте их над поверхностью океана.



Фиг. 81.

Чтобы определить, на сколько одна точка местности, например вершина горы, выше другой, подошвы,—измеряют барометром давление атмосферы на вершине и у подошвы. Получают разницу высот ртути в миллиметрах.

Зная, какой высоте соответствует падение ртутного столба на 1 миллиметр, умножают эту высоту на полученное число миллиметров.

Если бы воздух был одной плотности во всей толще атмосферы, то вычисление было бы элементарным:

Плотность воздуха $\rho_a = 0,001293 \text{ гр./см.}^3$.

Плотность ртути $\rho_r = 13,6 \text{ „}$

Так как высоты столбов воздуха и ртути:

$$\text{----- } h_a \text{ и } h_r \text{ -----}$$

должны быть обратно пропорциональны плотностям ρ_a и ρ_r , то:

$$\frac{h_a}{h_r} = \frac{\rho_r}{\rho_a} = \frac{13,6}{0,001293} = 10500,$$

$$\text{или } h_a = h_r \cdot 10500.$$

Таким образом, 1-му миллиметру столба ртути соответствует высота воздушного столба:

$$h_a = 1 \cdot 10500 = 10500 \text{ миллиметров} = 10,5 \text{ метр.}$$

Следовательно, если мы понизимся в атмосфере на 10,5 м., то давление прибавится на 1 мм. ртутного столба. Если барометр на вершине и подошве дает разницу в 20 мм., то высота горы равна $20 \cdot 10,5 = 210$ метр.

Но в действительности плотность воздуха уменьшается с высотой. Кроме того, на показаниях барометра отражается температура, влажность, широта места и другие обстоятельства. Поэтому при барометрическом нивелировании приходится пользоваться более сложными формулами, например:

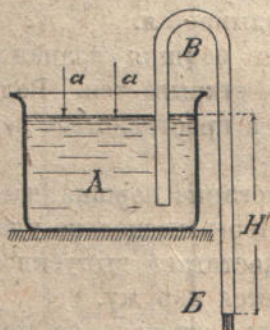
формулой Лапласа:

$$h = 18393 \left[1 + 0,002837 \cos a \left(1 + 2 \frac{m + m_1}{1000} \right) \text{Лог} \frac{\delta}{B} \right],$$

где h — превышение в метрах верхней стоянки барометра над нижней, B и δ — высоты столбов барометра в тех же стоянках, m и m_1 — соответствующие температуры стоянок, a — географическая широта стоянки;

или более простой формулой $h = 18400 \text{Лог} \frac{B}{\delta}$, или:

$$h = 18400 (\text{Лог} B - \text{Лог} \delta) \dots \dots \dots (120).$$



Фиг. 82.

3. Сифон (фиг. 82). Если из согнутой трубки, коротким коленом погруженной в воду, вытянуть воздух и держать конец B закрытым, то вода под давлением атмосферы подымется до высшей точки B^* и будет опускаться вниз по колену BB . Если теперь открыть конец B то вода выливается, увлекая с собою все новые массы из сосуда A . Таким способом можно вылить из сосуда всю

воду, не подымая сосуда. Скорость операции тем больше, чем больше h .

*) Конечно, если она не выше 1033 см., т. е. напора, равного напору 76 см. ртути, ибо $76 \cdot 13,6 = 1033$ см.

4. **Геронов шар** или воздушная камера (фиг. 83). Это герметически замкнутый сосуд со вставленной до дна трубкой, заканчивающейся суживающимся наконечником. Если сосуд отчасти наполнить водой и сжать воздух, то вода выбрасывается через наконечник трубки и бьет фонтаном.

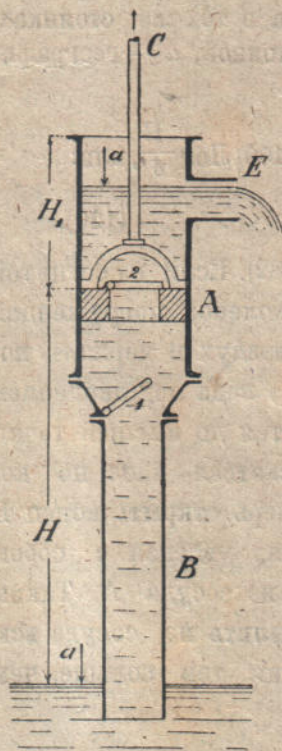


Фиг. 83.

Этой мыслью постоянно пользуются в насосах.

5. **Всасывающий насос** (84) состоит из цилиндра А, в котором находится поршень, приводимый в движение посредством штока С. Поршень снабжен клапаном 2.

Цилиндр соединяется со всасывающей трубой В, немного погруженной в воду и сверху закрывающейся клапаном 1.



Фиг. 84.

Оба клапана открываются только вверх.

Если поднимать поршень, то воздух под ним разрежается, вследствие чего открывается клапан 1, клапан же 2 плотно закрывается.

Так как давление воздуха в трубе В становится меньше, то атмосферой a вода в ней приподымается.

При опускании поршня клапан 1 закрывается, а 2—открывается. Вода свободно проходит в пространство над поршнем.

Вторичное опускание поршня дает тот же результат. Через несколько ударов поршня вода достигает выпускной трубки Е и изливается наружу.

Действие насоса основано на том, что наружное атмосферное давление a , поддерживает столб воды H в безвоздушном пространстве В. Поэтому насос достигает цели только в том случае, если высота всасывающего клапана над

поверхностью водоема не будет превышать определенной вели-

чины. Она будет во столько раз больше барометрической высоты ртутного столба, во сколько раз плотность воды 1 меньше плотности ртути 13,6, т. е. будет равна

$$n_0 = 76 \cdot 13,6 = 1033 \text{ см} = 10,33 \text{ м.} \dots (121)$$

На практике, благодаря разным причинам, высота под'ема воды редко превышает 7—8 метров.

Расчитаем силу, требуемую для подымания поршня во время работы насоса. Обозначим площадь поршня Π . Тогда в какой-нибудь момент работы поршня, когда он находится на n от водоема, давление на поршень сверху вниз будет

$$D_1 = a\Pi + n\Pi n_1.$$

Давление, производимое водяным столбом n_0 -н снизу вверх на поршень

$$D_2 = n\Pi (n_0 - n).$$

Равнодействующая их, идущая вниз

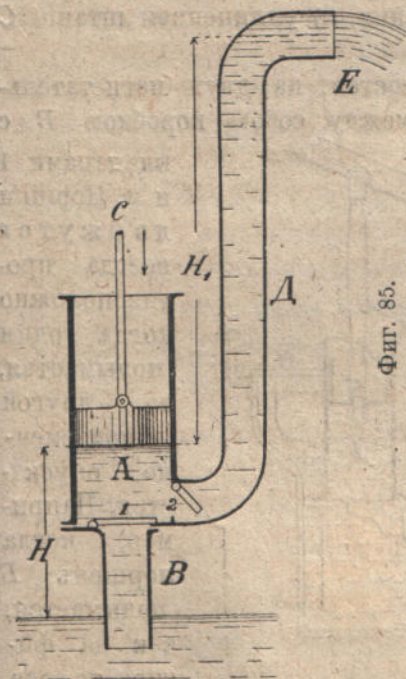
$$P = D_1 - D_2 = a\Pi + n\Pi n_1 - n\Pi (n_0 - n).$$

Но $n_0 n_1 = a$; поэтому

$$P = n\Pi (n + n_1) \dots (122).$$

Силу S , превышающую P и требуется приложить к штоку для подытия поршня, т. е.: сила штока равна весу столба воды от уровня водоема до выпускной трубы с основанием, равным площади поршня.

6. Нагнетательный насос (фиг. 85) отличается от всасывающего тем, что поршень его без клапана, а отводящая труба находится под поршнем; клапаном 2 снабжена при основании под'емная труба D . Клапан 1 называется всасывающим, а 2 — питательным.



Фиг. 85.

После нескольких подытий поршня, сопровождающихся открываниями клапана 1, вода вступает в цилиндр A .

При опускании поршня открывается клапан 2, и вода выжимается из под поршня в трубу *Д*, как показано на фигуре. В результате нескольких качаний вода достигает выпускного отверстия *Е* и, при последующей работе поршня, выливается.

Сила, необходимая для поднятия поршня, определенная, как и в предыдущем случае, оказывается

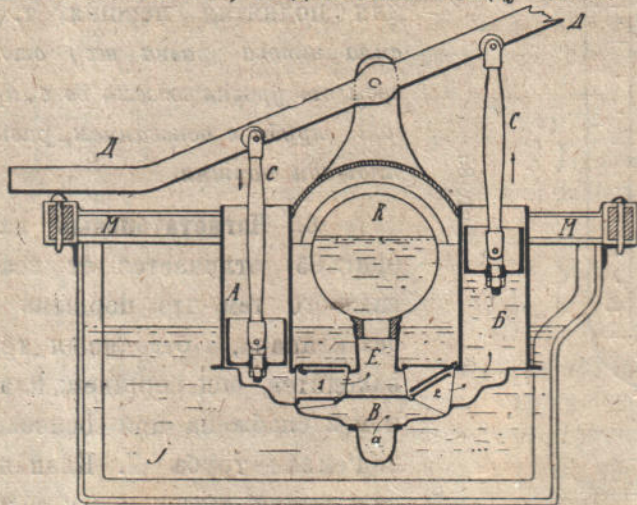
$$C = n\Pi n \dots \dots \dots (123).$$

Для опускания поршня требуется сила, равная весу столба воды вышиною n_1 , т. е.

$$C_1 = n\Pi n_1 \dots \dots \dots (124).$$

Нагнетательные насосы устанавливаются обыкновенно близко от уровня воды. Теоретически длина всасывающей трубы *В* не должна превосходить 10,3 м., но практически она не более 7—8 м. Длина подъемной трубы теоретически может быть неограниченной, но в действительности она ограничивается: 1) силой двигателя, которому приходится поднимать столб воды и преодолевать дополнительные сопротивления, 2) удлинением штанг *С* и проч.

7. Пожарный насос (фиг. 86) состоит из двух нагнетательных насосов *А* и *Б*, соединенных между собою коробкой *В* с



клапанами 1 и 2. Поршни движутся всегда противоположно когда один подымается, то другой одновременно опускается. Например, когда поршень *Б* подымается, как на фигуре, то вода

Фиг. 86.

из всасывающей трубы *а* через открытый клапан 2 устремляется в цилиндр *Б*; в этот период клапан 1 закрыт,

При опускании поршня, показанном на фиг. 86 слева, клапан 2 закрывается, и вода поступает в воздушную камеру K (сравни фиг. 83).

Насос находится в баке с водой I и подвешен вместе с баком к раме из балок M .

Насос может быть и без воздушной камеры K ; тогда E соединяется непосредственно с отводящим рукавом. Но насос с камерой имеет большое преимущество. Благодаря сжатию воздуха в камере K , вода выбрасывается из пожарного рукава не толчками в ритм с ударами поршня, а постоянной сплошной струей. Объем воздушной камеры принято делать в 4—5 раз больше объема цилиндра насоса.

При выборе или проектировании насосов обыкновенно бывают заданы следующие величины: высота струи B , вырывающейся из насоса через рукав, расход воды в 1 секунду P , скорость точки приложения рабочей силы C_p и размах ее (амплитуда) A . Выведем формулы, по которым можно рассчитать все эти величины для данного насоса.

В форм. (12) § 2,6 было показано, что путь, проходимый выбрасываемыми материальными частицами, зависит от скорости выбрасывания. Поэтому, если дан путь то, можно определить скорость по (12 а). В безвоздушном пространстве высота подъема частиц воды была бы

$$B' = \frac{c^2}{2y},$$

где y —ускорение силы тяжести. Вследствии же сопротивления воздуха, она процентов на 20 меньше:

$$B = 0,8B', \text{ или } B' = B : 0,8 = 1,25B \dots (125).$$

Чтобы достигнуть высоты B в воздухе, потребуется развить несколько большую скорость, рассчитанную на высоту $1,25 B$.

По формуле (12 а) это будет:

$$c = \sqrt{2y \cdot 1,25B} = 4,95 \sqrt{B} \dots (126).$$

При данной скорости c расход воды зависит от диаметра выпускной медной трубки. Так как расход P задан, то определяется диаметр трубки из формулы:

$$\frac{\pi \partial^2}{4} c = P_1 \text{ или } \partial = \sqrt{\frac{4P}{\pi c}} = \sqrt{\frac{4P}{\pi \cdot 4,95 \sqrt{B}}} \dots (127).$$

Скорость поршня c_n меньше скорости c_p силы рабочего пропорционально длине плеч рычага D . Если это отношение κ , то

$$c_n = \frac{c_p}{\kappa} \dots \dots \dots (128).$$

Ход поршня соответственно будет

$$x = \frac{A}{\kappa} \dots \dots \dots (129).$$

Теперь определяем диаметр поршня d_n по условию, что количество воды, доставляемой поршнем, равно расходуемой через медную трубку рукава, а именно:

$$\frac{\pi d_n^2 c_n}{4} = \frac{\pi d^2 c}{4}, \text{ откуда } d_n = d \sqrt{\frac{c}{c_n}} \dots \dots \dots (130).$$

Остается вставить в эту формулу: d из (127), c из (126) и c_n из (128).

8. **Аэростат.** Чтобы воздушный шар мог подняться над землей, необходимо среднюю его плотность сделать меньше плотности воздуха; об этом говорит форм. (111) и 3-й случай равновесия, рассмотренный в § 17,2. Поэтому шар наполняют газом, значительно более легким, чем воздух, например, водородом. Определим подъемную силу шара, наполненного газом плотности n_2 .

Положим, что O есть объем шара, n_1 — плотность воздуха у земли; тогда сила, действующая на шар снизу вверх (подъемная сила воздуха), будет

$$O n_1;$$

Сила тяжести газа будет

$$O n_2.$$

Если вес шара с принадлежностями, корзиной и поднимаемым грузом обозначим Γ , то общая сила, идущая вниз будет

$$O n_2 + \Gamma.$$

Равнодействующая, идущая кверху, —

$$P = O n_1 - (O n_2 + \Gamma) = O(n_1 - n_2) - \Gamma \dots \dots (131).$$

С такою силой шар устремляется кверху.

Но с высотой подъемная сила воздуха падает вследствие уменьшения плотности воздуха.

На некоторой высоте шар остановится. Это произойдет, когда делается

$$P=0=(n'_g - n_2) - \Gamma, \text{ т. е. когда}$$

$$n'_g = n_2 + \frac{\Gamma}{0}, \dots \dots \dots (132),$$

где n'_g — есть плотность воздуха на высоте.

Высоту, где плотность воздуха равна данной малой величине можно определить барометрически. Действительно, по (120) превышение точки с малым давлением барометра b над точкою с большим давлением B равно

$$h = 18400 \text{ Лог} \frac{B}{b};$$

или: так как по (117) отношение давлений, при постоянной температуре, равно отношению плотностей, то

$$h = 18400 \text{ Лог} \frac{n_g}{n'_g}.$$

На этой приблизительно высоте и остановится шар. Мы вычислим ее по данным, находящимся в распоряжении, так как по (132):

$$n'_g = n_2 + \frac{\Gamma}{0}.$$

Подставляя, получаем:

$$h = 18400 \text{ Лог} \frac{n_g}{n_2 + \frac{\Gamma}{0}} = 18400 [\text{Лог} n_g - \text{Лог} (n_2 + \frac{\Gamma}{0})] \dots (133).$$

Пример. Шар объема 1800 м.³ наполнен водородом, плотность которого $n_2 = 0,093$ кг./м.³; оснастка, корзина и балласт вместе с собственным весом оболочки шара составляют 1,2 тонны. Определим подъемную силу шара и высоту подема.

По (131), подъемная сила

$$P = 1800 (1,29 - 0,09) - 1200 = 978 \text{ кг.}$$

Плотность воздуха в конце подема шара по (132):

$$n'_g = 0,09 + \frac{1200}{1800} = 0,76;$$

поэтому

$$h = 18400 (\text{Лог} 1,29 - \text{Лог} 0,76) = 4290 \text{ м.} = 4,29 \text{ км.}$$

Главнейшие формулы Статики.

Равнодействующая сил одного направления равна алгебраической сумме сил: $P = \Sigma C \dots \dots \dots (15).$

Равнодействующая сил, действующих на точку под углом в одной плоскости, равна геометрической сумме сил

$$P = \wedge \Sigma C \dots \dots \dots (15a),$$

или: квадратному корню из суммы квадратов от суммы проекций всех данных сил на две оси координат

$$P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Z^2} \dots \dots \dots (20).$$

Условия равновесия сил, приложенных к точке и действующих в одной плоскости

$$\Sigma X = 0 \text{ и } \Sigma Z = 0 \dots \dots \dots (21).$$

То же для пространства 3 измерений:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0 \dots \dots (24).$$

Равнодействующая сил в пространстве:

$$P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2} \dots \dots \dots (23).$$

Для параллельных сил на плоскости: составляющие обратно пропорциональны расстояниям до равнодействующей:

$$C_1 : C_2 = p_2 : p_1,$$

где p_2 и p_1 — расстояния второй и первой составляющей до равнодействующей, или:

$$C_1 p_1 = C_2 p_2 \dots \dots \dots (27),$$

$$\text{или: } \frac{C_1}{p_2} = \frac{C_2}{p_1} = \frac{P}{p_1 + p_2} \dots \dots \dots (28).$$

Координаты центра параллельных сил:

$$x = \frac{\Sigma Cx}{\Sigma C}, \quad z = \frac{\Sigma Cz}{\Sigma C} \dots \dots \dots (29).$$

Условия равновесия сил, как угодно расположенных на плоскости:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Z = 0, \quad \Sigma M = 0 \dots \dots (30).$$

То же для пространства:

$$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0 \text{ и } \Sigma M_x=0, \Sigma M_y=0, \Sigma M_z=0 \dots (35).$$

Равнодействующая сил, расположенных произвольно в пространстве

$$P = \sqrt{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2 + \Sigma Z^2}.$$

Первая теорема Гюльдена: объем, образуемый при вращении площади, равняется произведению площади и пути, описанному ее центром тяжести:

$$O = \Pi \cdot 2\pi \varrho \dots (55).$$

Вторая теорема Гюльдена: поверхность, образованная вращением линии, равна произведению длины линии и пути ее центра тяжести:

$$\Pi = L \cdot 2\pi \varrho \dots (57).$$

Закон Паскаля: давления жидкости на площади пропорциональны площадям; для круглых поршней они пропорциональны квадратам диаметров

$$D : D_1 = \Pi : \Pi_1 = \partial^2 : \partial_1^2 \dots (97 \text{ и } 98).$$

Интенсивность a давления жидкости *) плотностью n на глубине z равняется наружному давлению атмосферы a_0 плюс вес столба жидкости высотой z :

$$a = a_0 + nz \dots (99).$$

При $a_0 = 0$: $a = nz$.

Напор n , требующийся для получения давления a атмосфер в жидкости плотностью n , равняется числу атмосфер, разделенному на плотность: $n = a : n \dots (101).$

Атмосфера $a_0 = 76$ см. ртутного столба = 1033 см. водяного столба = 1,033 кг/см.² = 16,2 фунт./дм.².

Новая атмосфера $a_0 = 1$ кг./см.² = 73,5 см. ртути. столба = 1000 см. = 10 м. водяного столба.

*) Интенсивность, т. е. давление на единицу площади, будем называть просто давлением, а давление на некоторую площадь будем называть полным давлением, или давлением на площадь.

Полное давление на стенку сосуда равно $1/2$ произведения квадрата глубины и плотности жидкости:

$$D = 1/2 \, n g^2 \dots \dots \dots (103).$$

Центр давления на стенку погружен на $2/3$ глубины, т. е.

$$y_0 = 2/3 \, z.$$

Полное давление на дно сосуда с площадью Π :

$$D = a_0 \Pi + n g \Pi \dots \dots \dots (104).$$

Полное давление на наклонную прямоугольную стенку ширины m и длины δ : $D = 1/2 \, n g d m \dots \dots \dots (105).$

На стенку произвольной формы полное давление равно весу столба жидкости с основанием, равновеликим площади стенки, и высотой, равной глубине центра тяжести фигуры стенки:

$$D = n \, \Pi y \dots \dots \dots (106).$$

При наружном давлении атмосферы a_0 :

$$D = a^0 \Pi + n \Pi y \dots \dots \dots (108).$$

В сообщающихся сосудах высоты напора обратно пропорциональны плотностям:

$$n_1 : n_2 = n_2 : n_1 \dots \dots \dots (109).$$

Погруженный объем o плавающего тела составляет от общей величины объема всего тела O часть, равную отношению плотностей: тела n_m и жидкости $n_{ж}$:

$$o = O \frac{n_m}{n_{ж}} \dots \dots \dots (112).$$

Закон Мариотта: давления обратно пропорциональны объемам газа:

$$p_2 : p_1 = O_1 : O_2 \dots \dots \dots (113).$$

Закон Гей-Люссака: приращение единицы объема газа пропорционально повышению температуры:

$$O_1 : O_2 = (1 + k t_1) : (1 + k t_2) \dots \dots \dots (115).$$

Отношение давления газа к биному расширения есть величина постоянная, для воздуха равная 2927:

$$\frac{p_2}{n_2(273 + t_2)} = \frac{p_1}{n_1(273 + t_1)} = 2927 \dots \dots (117).$$

Формула барометрического нивелирования

$$h = 18400 (\text{Лог. } B - \text{лог. } b) \dots \dots \dots (120).$$

Наибольший напор воды, доставляемый всасывающим насосом:

теоретически—10,33 м., практически—7—8 м.

Часть II.

Простые машины.

Глава V.

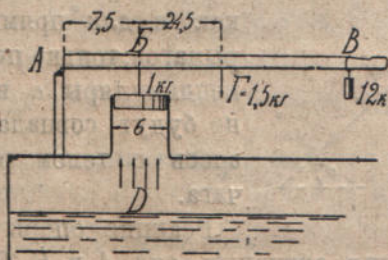
Равновесие машин в идеальных условиях.

§ 20. Рычаги. 1. Рычаг — это брусок, вращающийся вокруг неподвижной оси. Он — в равновесии, когда нет причин, вызывающих вращение вокруг этой оси, т. е. когда

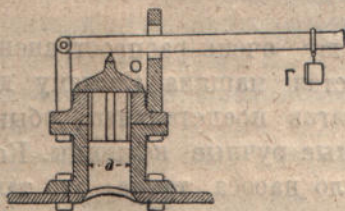
$$\Sigma M = 0 \dots \dots \dots (134).$$

В случае прямых рычагов и параллельных сил имеют место

все зависимости, выведенные в § 6. Применим их, например, к расчету предохранительного клапана, устраиваемого, обыкновенно, в паровых котлах и изображенного на фиг. 87 а) и б).



Фиг. 87-а.



Фиг. 87-б.

Клапан (фиг. а) диаметром 6 см. должен открываться в тот момент, когда давление пара в котле превышает наружное давление воздуха на 3 атмосферы. Необходимо определить, на каком расстоянии АВ надо поместить противовес $B = 12$ килограммов, если вес клапана В равняется 0,8 кг., приложен на расстоянии АВ, равном 7,5 см.,

собственный вес рычага Г составляет 1,5 кг. и приложен на расстоянии АГ, равном 32 см.

уравновесить большую силу, если последнюю приложить к короткому плечу, ибо по (27) произведение силы на плечо есть постоянная величина:

$$Aa = Bb.$$

Выигрыш в силе может быть еще более увеличен, если применить систему рычагов, передавая действующую силу с малого плеча одного рычага на большое плечо другого. Один из примеров такой передачи приведен на фиг. 89.

Давление в Γ составляет (по 27):

$$\overline{\Gamma} = \overline{D} \cdot \frac{DE}{GE}.$$

В свою очередь давление в B составляет

$$\overline{B} = \overline{\Gamma} \cdot \frac{AB}{AB}.$$

После подстановки сюда значения Γ , это будет

$$\overline{B} = \overline{D} \cdot \frac{DE}{GE} \cdot \frac{AB}{AB}.$$

Если отношение между длиной плеч рычагов в обоих случаях сделать 10, то выигрыш получится в 100 раз, ибо

$$\overline{B} = \overline{D} \cdot 10 \cdot 10 = 100\overline{D}.$$

Следовательно, надавливая ногою в D силою 1 пуд, мы прессуем кирпичи, брикеты и т. п. в B силою 100 пудов.

4. „Золотое правило“. Рычаг дает выигрыш в силе; одного и того же давления можно достигнуть тем меньшей силою, чем на большее плечо она действует. Но, выигрывая в силе, мы теряем в величине пути, проходимого этой силою. Например, на фиг. 87 а, при повороте рычага вокруг точки A , путь, проходимый точкою B , меньше пути, проходимого грузом B . Так как эти пути пропорциональны плечам AB и AB , то потеря в пути равна выигрышу в силе. Это выражается правилом Аристотеля:

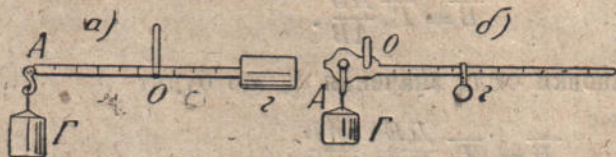
сколько выигрывается в силе, столько теряется в пройденном пути, во времени и в скорости.

5. **Классификация рычагов.** Различают рычаги 1-го и 2-го рода. Рычагом 1-го рода называется такой, в котором точка опоры

помещается между действующими силами. На фиг. 88 и на фиг. 90—91 приведены примеры таких рычагов. Систему двух рычагов 1-го рода представляют обыкновенные ручные ножницы. В рычагах 2-го рода обе действующие силы приложены по одну сторону от точки опоры, как например, в предохранительном клапане фиг. 87, в рычагах фиг. 89 и т. п.

Система рычагов, связанных таким образом, что каждый последующий продолжает увеличение силы, достигнутое предыдущим, называется сложным рычагом. На фиг. 89 приведен двойной рычаг; не трудно представить себе развитие системы в тройной и более сложный рычаг. Общий выигрыш в силе сложного рычага равняется произведению выигрышей, достигаемых на отдельных рычагах системы.

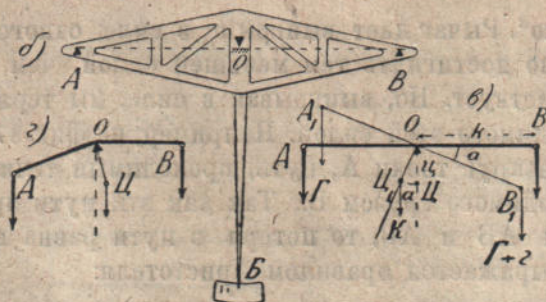
§ 21. Весы. 1. Виды рычажных весов. Весы представляют



Фиг. 90.

применение рычага к взвешиванию. Пользуются простыми и сложными рычагами, прямыми и коленчатыми. Рычаг фиг. 90-а с подвижной опорой O и постоянным весом гири g называется *безменом*. Рычаг с постоянной опорой O и перемещающейся гирей g (фиг. б) представляют *римские весы* (местное название: *кантор*).

2. Химические весы. Наиболее совершенные однорычажные

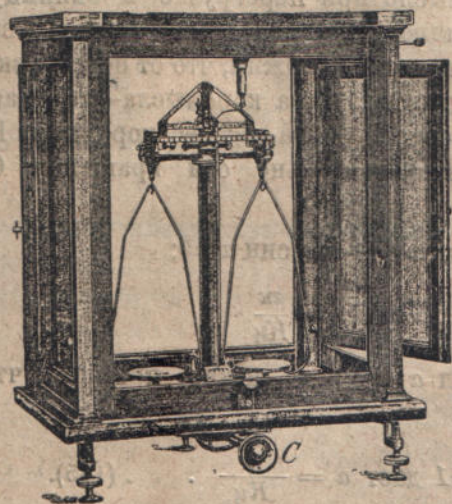


Фиг. 91—б, в, г.

весы это химические (фиг. 91). Рычаг их равноплечий с опорой O посередине; он называется *коромыслом*. Опора представляет стальную трехгранную призму, опирающуюся ребром на горизонтальную агатовую пластинку*). К концам коромысла подвешиваются *чашки весов*. Для этого, на концах

*) Агат—твердый камень.

коромысла укрепляются стальные призмы A и B ребром кверху и притом так, чтобы все 3 ребра A , O и B находились в одной плоскости. На каждую из призм A и B накладывается стремя поддерживающее чашку весов. Стремя также снабжено агатовой пластинкой для опирания на ребро призмы.



Фиг. 91-а.

Одна гайка служит для перемещения ц. т. по вертикали, а другая—для приведения ц. т. на перпендикуляр к оси вращения коромысла.

Чтобы уменьшить изнашивание призм, под коромыслом расположена поперечина, которая посредством вилок поднимает одновременно коромысло и стремени A и B . Хвост этой поперечины проходит внутри колонки весов и опирается посредством ролика на эксцентрик (см. § 48,1), приводимый во вращение пуговкой C (фиг. а).

Поверка весов. Весы должны удовлетворять трем условиям: верности, устойчивости и чувствительности. Для верности необходимо, чтобы одно коромысло без чашек и грузов было в равновесии, линия призм ACB (фиг. б) была прямая и горизонтальная. Горизонтальность должна сохраняться и при навешивании чашек; это покажет, что чашки одинаковы.

Для *устойчивости*, центр тяжести коромысла располагают ниже опорного ребра призмы O . Если при этом добавочная гирька g (фиг. в) на правой чашке весов опускает эту чашку и соот-

Благодаря опиранию стремени на ребро призмы коромысла груз, положенный на чашку весов, всегда передается в одну и ту же линию коромысла, и длина плеча остается постоянной.

К коромыслу посередине приделывается стрелка, конец которой движется, не касаясь, по градуированной дуге. Стрелка обращена вниз. Сверху помещается навинтованный стерженек с гайками для регулирования центра тяжести коромысла.

ответственно подымает левую, то центр тяжести коромысла $Ц$ перемещается в $Ц_1$, образуя момент, уравновешивающий перегрузку z : устанавливается равновесие коромысла в наклонном положении.

Чувствительность весов. Весы считаются тем чувствительнее, чем больше отклоняется коромысло при перегрузке в единицу, например: 1 грамм или 1 миллиграмм. Определим обстоятельства, влияющие на чувствительность весов. Положим, что от перегрузки z коромысло отклонилось на угол a ; длина коромысла— 2κ , расстояние центра тяжести до опорного ребра— κ ; вес коромысла K . Составляя уравнение моментов относительно оси вращения O : $\Sigma M_0 = 0$, получим:

$$(G+z)\kappa \cos a - G\kappa \cos a - K\kappa \sin a = 0;$$

$$\text{откуда: } \tan a = \frac{z\kappa}{K\kappa}$$

Так как обыкновенно угол a —мал, то можно принять, что $\tan a = a$, и написать:

$$a = \frac{z\kappa}{K\kappa}, \text{ что при } z=1 \text{ дает } a = \frac{\kappa}{K\kappa} \dots (135).$$

Следовательно, чувствительность пропорциональна длине коромысла и обратно пропорциональна весу его и расстоянию опоры O до центра тяжести.

Увеличение длины с одной стороны повышает чувствительность, но с другой—уменьшает ее, так как неизбежно ведет к увеличению веса и, притом, непропорционально быстрее.

Кроме того, длинное коромысло при той же толщине сильнее прогибается, чем короткое, а это понижает точность взвешивания. Поэтому предпочитают делать короткое коромысло, но значительно облегчают его вес. На фиг. 91—б представлена наиболее целесообразная форма коромысла для самых точных весов.

На основании форм. (135) чувствительность не зависит от нагрузки чашек G . Но это справедливо лишь при безусловной прямолинейности теоретического коромысла AOB . Если же коромысло изогнуто, как на фиг. 91-г, то нагрузка левой перегруженной чашки оказывается действующею на меньшее плечо до опоры O , чем нагрузка правой чашки (перпендикуляр из O на силу A короче, чем полукоромысло κ), а при таких условиях вращающий момент слабее: весы менее чувствительны. Таким

образом, благодаря изгибу коромысла чувствительность падает вместе с увеличением нагрузки коромысла. Если коромысло изогнуто в обратную сторону, то чувствительность с увеличением нагрузки возрастает.

Правила взвешивания. Чтобы избавиться от ошибки, происходящей от неравенства плеч коромысла, применяют *двойное взвешивание* (Гаусса). Кладут взвешиваемый груз Γ на левую чашку весов и уравнивают разновесками p_2 на правой чашке. Если плечи коромысла обозначим κ_1 и κ_2 , то уравнение моментов (134) относительно оси вращения O

$$-\Gamma\kappa_1 + p_2\kappa_2 = 0 \quad \text{даёт: } \Gamma\kappa_1 = p_2\kappa_2 \dots (136).$$

Затем кладут тот же груз на правую чашку и уравнивают разновесками p_1 на левой. Тогда по уравнению моментов (134) получится:

$$p_1\kappa_1 = \Gamma\kappa_2 \dots (137).$$

Разделив одно на другое, находим:

$$\frac{\Gamma}{p_1} = \frac{p_2}{\Gamma}, \quad \text{или } \Gamma = \sqrt{p_1 p_2} \dots (138),$$

т. е. что *истинный вес выражается средним геометрическим из двух наблюдавшихся.*

Последнее выражение позволяет найти отношение между плечами коромысла κ_1 и κ_2 . Разделим обе части выражения на p_1 :

$$\frac{\Gamma}{p_2} = \frac{\sqrt{p_1 p_2}}{p_2} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}};$$

и примем во внимание, что по (136)

$$\frac{\Gamma}{p_2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}; \quad \text{тогда получим } \frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Когда же найдем это отношение, то истинный вес груза Γ может быть определен и из одиночного взвешивания. По (136)

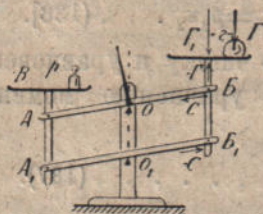
$$\Gamma = p_2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \dots (139).$$

Оказывается, что каждый раз при одиночном взвешивании показание разновесок правой чашки надо умножать на отношение правого плеча к левому.

Другой способ взвешивания представляет *тарирование* (Борда). Уравнивают данный груз дробью, песком или другою тарою.

Потом груз снимают и, вместо него, кладут разновески до уравновешения той же тары. При этом, независимо от длины плеч вес груза и разновесок—одинаковы. Этот способ не требует вычислений.

3. **Весы Роберваля** (1602—1675) представляют систему двух равных параллельных равноплечих рычагов AB и A_1B_1 с точками опоры O и O_1 на одной вертикальной прямой (фиг. 92). Концы рычагов шарнирно связаны посредством стержней AA_1 и BB_1 . На стержни плотно насаживаются чашки B и G .



Фиг. 92.

Так как OBB_1O_1 —параллелограмм, то при движении чашек прямая BB_1 —всегда вертикальна; следовательно, чашка—всегда горизонтальна, независимо от положения груза G . Очевидно, грузы и разновески можно класть в любом месте чашки, если только обеспечено прочное соединение ее со стержнем BB_1 . Покажем, что где бы ни лежал груз на чашке, его стремление отклонять рычаг такое же, как у груза, непосредственно положенного на стержень.

Приложим по оси стержня две противоположные силы: G_1 и $-G$, численно равные грузу G , и рассмотрим равновесие стержня с чашкой. Здесь действуют с одной стороны:

- 1) груз G_1 по оси стержня и
- 2) пара сил $(G, -G)$ с плечом z и моментом $M = +Gz$;

с другой стороны:

две параллельные силы рычагов OB и O_1B_1 .

Последние две силы реакций опорных точек O и O_1 образуют пару сил $(C_1, -C_1)$,

уравновешивающую

вращающий момент M .

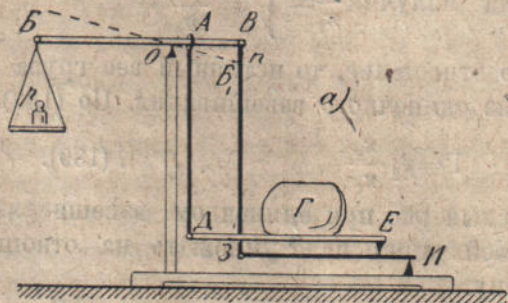
Остается лишь груз G , активно действующий непосредственно по оси стержня.

4. **Десятичные весы**

Квинтенца служат для

взвешивания больших

тяжестей (фиг. 93). Они представляют систему рычагов,



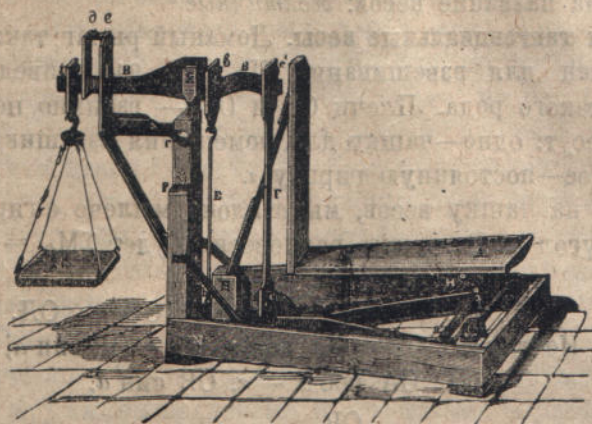
Фиг. 93-а.

задуманную с таким расчетом, чтобы поддержать большую

платформу для тяжести и чтобы место, занимаемое тяжестью на платформе, не влияло на результат взвешивания.

Схема расположения рычагов показана на фиг. а, а конструктивный вид — на фиг. б.

Рычаг 1-го рода



Фиг. 93-б.

БВ, с точкою опоры О, на одном конце Б снабжен платформой для разновесок р, а на другом — двумя вертикальными подвесками АД и ВЗ. Подвеска ВЗ поддерживает рычаг 2-го рода ЗИ с опорой И, а подвеска АД — рычаг-платформу 2-го рода ДЕ с опорой Е на рычаге ЗИ.

Если сделать $\frac{ЕИ}{ЗИ} = \frac{ОА}{ОВ}$, например $\frac{1}{5}$. . (140),

то платформа ДЕ всегда перемещается горизонтально.

Покажем это.

Положим, что от тяжести Г рычаг БВ наклоняется и точка В проходит путь $n = BB_1$. Такой же путь n совершит и точка З нижнего рычага ЗИ, так как она связана стержнем ВЗ. Точки А и Е пройдут меньшие пути и притом в одинаковое число раз, в нашем примере, — в 5. Так как пятые доли одинаковых путей В и З равны между собою, то перемещения А и Е также одинаковы. Точка Д повторяет движение точки А. Очевидно, Д и Е опускаются одинаково; следовательно, платформа перемещается параллельно самой себе, независимо от положения груза Г.

Где бы на платформе мы ни положили груз Г, действие его будет одинаково; поэтому можно рассмотреть крайнее положение в точке Д. Прикладывая груз Г в точке Д, или А, мы получаем действие сил на простой рычаг 1-го рода БОА.

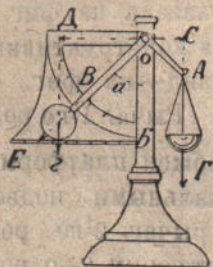
Отношение между весом р и Г в таком рычаге равно отношению ОА к ОВ, так что, сделавши

$ОВ : ОА = 10$, — (141),

мы имеем на платформе груз Γ , в 10 раз превышающий вес разновесок p . Отсюда название весов: *десятичные*.

5. **Угловые или тангенциальные весы.** Ломаный рычаг также может быть применен для взвешивания. На фиг. 94 приведен один из примеров такого рода. Плечи OA и OB — взаимно перпендикулярны и несут: одно — чашку для помещения взвешиваемых грузов Γ , другое — постоянную гирьку z .

Помещая груз на чашку весов, мы отклоняем плечо с гирькой на некоторый угол a . В момент равновесия будет $\Sigma M_0 = 0$, а именно:



Фиг. 94.

$\Gamma \cdot OC - z \cdot OD = 0$, или $\Gamma \cdot OC = z \cdot OD$.
Но так как $OC = OA \cos a$, $OD = OB \sin a$, то
 $\Gamma \cdot OA \cos a = z \cdot OB \sin a$.

Отсюда $\Gamma = z \cdot \frac{OB}{OA} \cdot \tan a$ (142).

В данных весах z , OB , OA — постоянные величины; поэтому взвешиваемый груз пропорционален тангенсу угла отклонения стрелки весов OB . Обозначая коэффициент пропорциональности $z \cdot \frac{OB}{OA}$ буквой κ , перепишем формулу:

$$\Gamma = \kappa \cdot \tan a \dots \dots \dots (143).$$

Если дугу BD , измеряющую углы отклонения, разделить на градусы, то для вычисления по формуле (143), придется пользоваться таблицами тангенсов. Для удобства, на дуге пишут результаты вычисления, т. е. тот груз, который вызывает каждое намеченное на дуге отклонение. Так как тангенсы не пропорциональны углам, то шкала BD оказывается разделенной неравномерно. Чтобы получить равномерность делений, достаточно вместо дуги BD , поместить касательную к ней шкалу BE , ибо отношение $BE : BO$ есть тангенс угла a .

6. **Пружинные весы.** Взвешивание рычажными весами по существу не есть взвешивание, а измерение массы. Действительно, на рычажных весах мы сравниваем давление взвешиваемого тела с давлением на тот же рычаг разновесок, принятых за единицу. Каждое из этих давлений, т. е. сила тяжести, равно произведению массы и ускорения. Перенеся тело и разновески в другую широту, мы получим тот же результат, ибо ускорение силы тяжести, хотя и изменилось, но изменилось одинаково и для тела

и для разновесок. Весы покажут прежний вес тела, между тем, как вес изменяется с переменной широты.

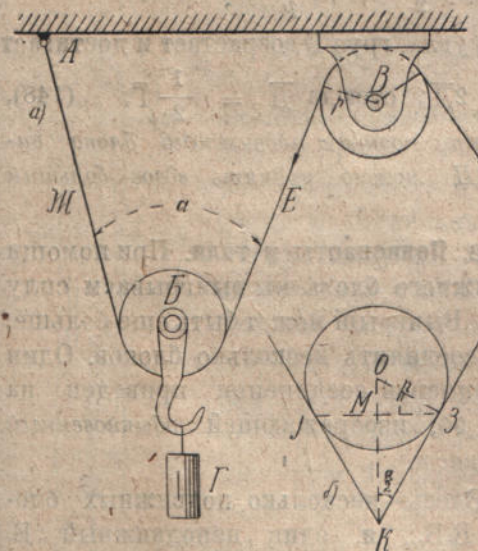
Вес, как силу притяжения тела землей, можно измерить пружинными весами. Спиральная пружина растягивается тем больше, чем больше действующая на нее сила; поэтому величина удлинения пружины может служить мерою тяжести тел, притягиваемых землей. Еще в глубокой древности было известно, что удлинение пружины пропорционально подвешенному грузу, и были устроены всем известные пружинные весы с равномерно разделенной шкалой. Так что, пружинный прибор можно назвать весами со всею строгостью термина. Но разница в ускорениях на разных широтах так не велика*, что не имеет практического значения в технике и торговом деле. Поэтому наравне с пружинными весами и рычажные приборы для измерения массы также называются весами.

§ 22. Блоки. 1. Блок—это диск с желобком на ободу для помещения веревки или каната.

Ось вращения диска устанавливается в ободу. В зависимости от того, укреплен ли ободу неподвижно, или она подвижная, различают неподвижный и подвижный блок.

Неподвижный блок В (фигура 95) по существу представляет рычаг, у которого плечи равны радиусу r ; поэтому и силы должны быть равны. Действительно по (134): $D_0 - E_r = 0$, или $D_r = E_r$; откуда $D = E \dots (144)$.

Реакция оси блока В получится, как сила, уравновешивающая две силы Е и



Фиг. 95.

Д. Из уравнения проекций на вертикальную ось находим:

*) Ускорение силы тяжести на полюсе—983,11 см./сек.², на широте 45°—980,61, на экваторе—978,10. Отклонения от среднего значения не превосходят $\frac{1}{4}\%$.

$$B = 2\bar{D} \cos \frac{a}{2}.$$

При уменьшении угла a реакция возрастает, и при $a = 0$:

$$\bar{B} = 2D \dots \dots \dots (145).$$

Подвижной блок подвешивается на веревке, как показано BB на фиг. а). Принимая, что $H = E$ и составляя сумму вертикальных проекций всех сил, приложенных к блоку B :

$$\bar{H} \cos \frac{a}{2} + \bar{E} \cos \frac{a}{2} - \bar{B} = 0, \text{ найдем:}$$

$$\Gamma = 2 \bar{D} \cos \frac{a}{2} \dots \dots \dots (146).$$

Заметим, что $\cos \frac{a}{2} = \frac{MЗ}{OЗ} = \frac{IЗ}{2p}$ (фиг. б).

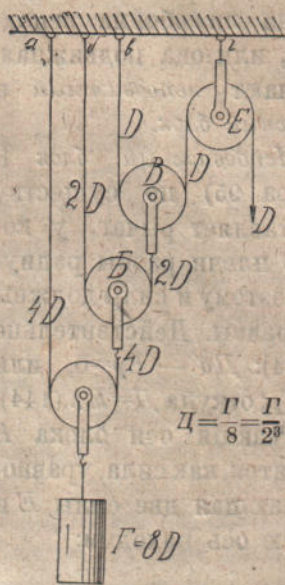
Если обозначим x — хорду блока, обнимаемую веревкой, то $\cos \frac{a}{2} = \frac{x}{2p}$, и потому

$$\bar{\Gamma} = 2\bar{D} \cos \frac{a}{2} = \bar{D} \frac{x}{p} \dots \dots \dots (147).$$

По (146) при уменьшении угла, груз Γ возрастает и достигает

$$\bar{\Gamma} = 2\bar{D}; \text{ отсюда } \bar{D} = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}, \dots (148),$$

т. е. при помощи подвижного блока силу D можно поднять вдвое больший груз.



2. Полиспасты и тали. При помощи подвижного блока мы выигрываем силу вдвое. Выигрыш может быть еще больше, если соединить несколько блоков. Один из примеров соединения приведен на фиг. 96, изображающей обыкновенный полиспаст.

Здесь — несколько подвижных блоков B, B, \dots и один неподвижный E . К нижнему из подвижных блоков подвешивается груз Γ , а через верхний неподвижный E перекидывается канат D .

Найдем зависимость между силою

каната D и величиною груза Γ , поддерживаемого канатом.

Фиг. 96.

Канат «ВЕД» имеет одно натяжение D . По условию равновесия блока В требуется, чтобы внизу этого блока была сила $2D$.

Блок В поддерживается с боков двумя одинаковыми силами $2D$; очевидно, внизу должна быть сила $4D$.

Нижний блок поддерживается с двух сторон двумя одинаковыми силами $4D$; очевидно, вниз действует сила $8D$.

Следовательно, силою D можно удержать груз Γ , в 8 раз больший силы D , или:

$$D = \frac{\Gamma}{8} = \frac{\Gamma}{2^3}.$$

При n блоках подвижных и одном неподвижном получится бы

$$D = \frac{\Gamma}{2^n} \dots \dots \dots (149).$$

Следовательно, сила поднимающая груз, равна грузу, разделенному на 2 в степени, равной числу подвижных блоков.

Тала. Другой вид полиспаста, представленный на фиг. 97, носит название *тала*. Рассечем его горизонтальным разрезом *а-а* в какой-нибудь момент равновесия и будем считать веревки параллельными между собой. Тогда из суммы вертикальных проекций всех сил C , приложенных к нижней части системы

$$6C - \Gamma = 0$$

найдем: $\Gamma = 6C$, или $C = \frac{1}{6}\Gamma$, т. е. усилие каната равно шестой части веса груза. Такую же силою $D = C = \frac{1}{6}\Gamma$, надо тянуть веревку, чтобы удерживать груз Γ . Если бы блоков было n , то силою D можно было бы удерживать груз

$$\Gamma = nD \dots \dots \dots (150).$$

Следовательно, выигрыш в силе рав-



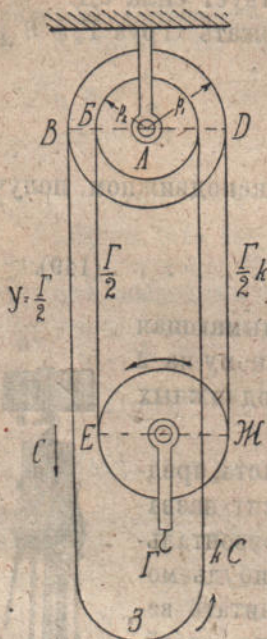
Фиг. 97-а.



Фиг. 97-б.

няется числу всех блоков тала.

3. **Дифференциальный блок.** В обыкновенном полиспасте при большом числе блоков веревки трутся одна о другую; кроме того, значительно возрастает трение веревки в желобах блоков. Чтобы устранить эти недостатки *Вестон* предложил систему, изображенную на фиг. 98.



Фиг. 98.

Неподвижный блок имеет два срощенных обода разных диаметров, причем ободья снабжены зубцами; цепь звеньями попадает на эти зубцы. Она поддерживает подвижной блок ЕЖ с грузом Г. Цепь спускается с неподвижного блока от точки В малого обода, охватывает подвижной блок ЕЖ, идет на большой обод неподвижного блока ДВ, опускается, образуя свободную петлю СЗ, и снова поступает на малый обод, доходя до исходной точки В.

Если тянуть цепь С, то на неподвижном блоке уравниваются силы:

С,—приложенная в В,
 $\frac{1}{2}\Gamma$ —с точкою приложения В
 и такая же сила
 $\frac{1}{2}\Gamma$ —в точке Д.

Сумма моментов этих сил относительно оси А равна нулю:

$$-C \cdot p_1 - \frac{1}{2} \Gamma \cdot p_2 + \frac{1}{2} \Gamma p_1 = 0; \text{ поэтому}$$

$$C = \Gamma \cdot \frac{p_1 - p_2}{2p_1} = \frac{\Gamma}{2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \dots \dots (151).$$

Чем меньше разность радиусов блока, тем меньше сила С по сравнению с сопротивлением груза Г.

Вместо радиусов в формуле (151) можно подставить числа зубцов, ибо радиусам пропорциональны окружности и, следовательно, числа зубцов. Обозначая З и з—числа зубцов большого и малого дисков, получим:

$$C = \Gamma \cdot \frac{З - з}{2 \cdot З} = \frac{\Gamma}{2} \left(1 - \frac{з}{З}\right) \dots \dots (152).$$

Например, если на ободьях дисков p_2 и p_1 зубцов 24 и 25,

$$\text{то } C = \frac{1}{50} \Gamma.$$

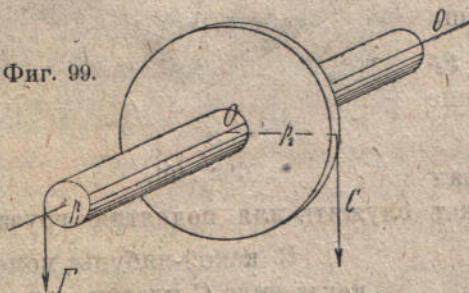
§ 23. Лебедки. 1. Ворот состоит из барабана p_1OO (фиг. 99), на который концентрически насажено колесо p_2 (шкив). На барабан навивается канат с грузом Γ ; к колесу по касательной прикладывается сила C , удерживающая этот груз. Подобно рычагу, система может вращаться вокруг горизонтальной оси OO ; поэтому условие равновесия сил будет такое же, как для рычага:

$$\Sigma M = 0, \text{ или:}$$

$$C.p_2 - \Gamma p_1 = 0, \text{ откуда } C = \Gamma \frac{p_1}{p_2} :$$

поднимать воротом тем легче, чем радиус колеса больше по сравнению с радиусом барабана.

Фиг. 99.



2. Дифференциальный ворот. Если барабан с одной стороны сделать меньшего диаметра, чем с другой, один конец веревки навить на барабан большого диаметра, а другой конец на-

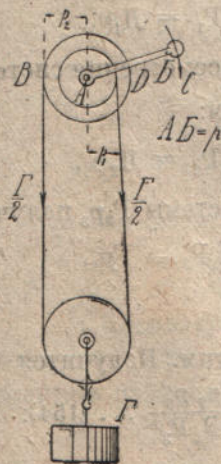
вить в обратную сторону на барабан малого диаметра, то получим дифференциальный ворот (фиг. 100).

Будем удерживать груз Γ рукояткой BC ; тогда из уравнения моментов относительно оси A :

$$-\frac{1}{2} \Gamma.p_2 + C.AB + \frac{1}{2} \Gamma p_1 = 0$$

$$\text{найдем: } C = \Gamma \cdot \frac{p_2 - p_1}{2AB} =$$

$$= \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{p_2 - p_1}{p} \right) \dots (153).$$



Фиг. 100.

Посредством дифференциального ворота можно развить очень большую силу под'ема, если разницу между радиусами вала p_2 и p_1 сделать соответственно малой, ибо в этом случае сила двигателя C будет составлять

малую часть $\frac{p_2 - p_1}{2p}$ от груза Γ .

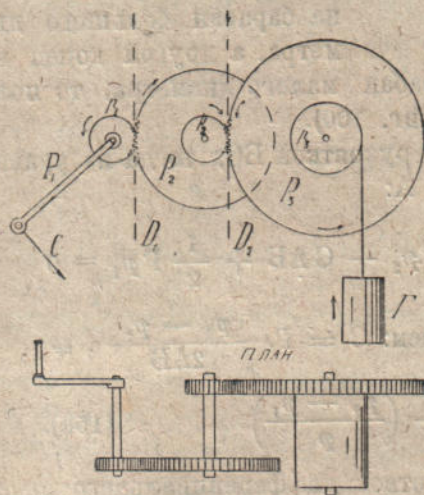
3. Лебедки. Соединение нескольких ворот представляет

система зубчаток, очень часто встречающаяся в машинах. Лебедки фиг. 101 — это один из случаев применения такой системы.

Положим, что на фиг. 102 к рукоятке P_1 приложена сила C .

Если на ось надета шестерня p_1 , то зубцы ее зацепят зубчатку P_2 . Скрепивши эту последнюю с шестерней p_2 , можно привести в движение новую зубчатку P_3 и т. д.

Веревка, навитая на вал последней зубчатки, может служить для поднятия груза Γ .



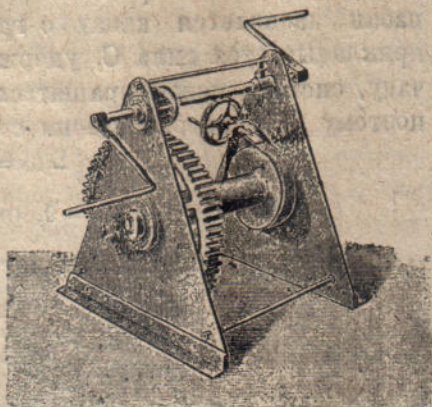
Фиг. 102.

Перемножим эти равенства:

$CP_1 D_1 P_2 D_2 P_3 = D_1 p_1 D_2 p_2 \Gamma p_3$ и сократим. Получится

$$CP_1 = \Gamma p_3 \cdot \frac{p_1}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_3}, \text{ или } C = \Gamma \frac{p_1 p_2 p_3}{P_1 P_2 P_3} \dots (154):$$

выигрыш в силе равен произведению отношений радиусов зубчаток и шестерней, рукоятки и радиуса барабана.



Фиг. 101.

В какой-нибудь момент, когда сила C удерживает груз Γ , между зубцами возникают силы взаимодействия D_1 и D_2 .

Из равновесия шестерни p_1 находим:

$$CP_1 = D_1 p_1.$$

Из рассмотрения системы $p_2 P_2$ найдем:

$$D_1 P_2 = D_2 p_2.$$

Из системы $P_3 p_3$ получим

$$D_2 P_3 = \Gamma p_3.$$

Так как радиусы относятся, как числа зубцов в зубчатках, то в последней формуле, вместо p и P , можно подставить числа зубцов z и Z ; получим:

$$C = \Gamma \frac{p_3}{P_1} \cdot \frac{z_1 z_2}{Z_2 Z_3}, \text{ или } CP_1 = \Gamma p_3 \cdot \frac{z_1 z_2}{Z_2 Z_3} \dots (155).$$

Отношение числа зубцов пары колес называется *передаточным числом* или, просто, *передачей*.

При двух равных передачах $\frac{1}{5}$, как на фиг. 101, и таком же отношении $\frac{1}{5}$ между длиной рукоятки и радиусом барабана, найдем, что силой C можно поднять сто двадцати пяти кратный груз:

$$C = \Gamma \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125} \Gamma.$$

Примеры. а) Требуется устроить лебедку с двойной передачей, при помощи которой 4 рабочих могут поднять груз в 3 тонны, если обычно: сила рабочего при совместной работе=15 кг., рукоятка 40 см., радиус барабана для навивки грузевого каната=20 см.

Определим, каково должно быть отношение между радиусами колес, применительно к фиг. 102.

Сила рукоятки при 4 рабочих $C=4 \cdot 15=60$ кг.

Вращающий момент $CP_1=60 \cdot 40=2400$ кг. см.

Сопrotивляющийся момент груза— $3000 \cdot 20=60000$ кг. см.

Поэтому двойная передача должна быть

$$\frac{60000}{2400} = 25.$$

А так как эта передача по (154) есть

$\frac{p_1}{P_2} \cdot \frac{p_2}{P_3}$, то приравнявая 25, находим:

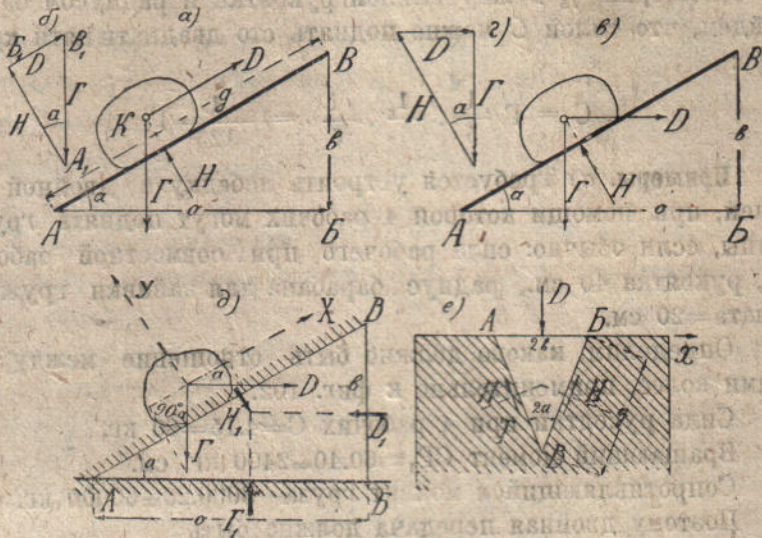
$$\frac{p_1}{P_2} \cdot \frac{p_2}{P_3} = \frac{1}{25}, \text{ или } \frac{p_1}{P_2} = \frac{1}{5} \text{ и } \frac{p_2}{P_3} = \frac{1}{5}.$$

б) Какой груз можно поднять двумя рабочими, развивающими силу по 25 кг. каждый на дифференциальном блоке с отношением радиусов 11:12.

По форм. (151) имеем:

$$\Gamma = 2C : \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right) = 2 \cdot 50 : \left(1 - \frac{11}{12} \right) = 1200 \text{ кг.}$$

§ 24. **ВИНТЫ. 1. Наклонная плоскость.** В механике под этим названием подразумевается наклонная грань АВ треугольной призмы с горизонтальными ребрами А, В и В (фиг. 103). Расстояние $AB = d$, измеряемое по перпендикуляру к ребрам А и В, называют *длиной наклонной плоскости*; проекцию ея $AB = o$ называют *основанием наклонной плоскости*; превышение v ребра В над уровнем АВ называют *высотой*, а угол α — *углом наклона плоскости*.



Фиг. 103.

Положим, что тело К весом Γ удерживается на наклонной плоскости силой D , параллельной к плоскости. Очевидно, сами по себе две силы D и Γ не могут быть в равновесии, и должна быть третья сила, именно, реакция плоскости. Назовем ее H .

Так как 3 силы в равновесии, то они составляют треугольник (фиг. б). Он строится по данному грузу Γ и направлениям D и H .

Треугольник сил $A_1B_1V_1$ подобен треугольнику ABV , так как $\angle BAV = \angle B_1A_1V_1$ благодаря перпендикулярности сторон. А потому:

$$D : \Gamma \text{ (из фиг. б)} = v : d \text{ (из фиг. а)} \dots (156),$$

т. е. сила D так относится к грузу Γ , как высота наклонной плоскости к ее длине.

Если сила D параллельна основанию наклонной плоскости, как на фиг. в), то из треугольника равновесия (фиг. з) получим:

$$(157) \dots D : \Gamma = v : o, \quad \text{или} \quad \frac{D}{v} = \frac{\Gamma}{o} \dots (158).$$

Первая из этих формул (157) выражает, что отношение между удерживающей силой D и грузом Γ равно отношению высоты к основанию наклонной плоскости. Следовательно, чем меньше высота v по отношению к основанию o , тем меньшая сила D будет удерживать груз.

Назовем *интенсивностью* давления силу, приходящуюся на единицу длины, например, количество груза Γ , приходящееся на единицу основания o , т. е. $\Gamma : o$; тогда последняя формула (158) прочтется так:

интенсивность давлений на обе грани призмы одинакова. Получается простое мнемоническое правило о выигрыше в силе на наклонной плоскости: *чем длиннее клин, тем на нем удерживается больший груз: чем ниже клин, тем меньшая сила понадобится для удержания груза (ибо давление на единицу длины одинаково).*

2. **Клин.** Ближайшее приложение наклонной плоскости представляет клин (фиг. 103-з). Топор, долото, нож, ножницы и много других орудий—это различные формы клина.

Наклонные грани клина называются *боками* или *щеками*, грань v называется *обухом* или *головкой*, ребро A —*острием* или *лезвием* клина, угол a —*углом заострения* клина.

Обыкновенно к обуху прикладывают силу D_1 , стремясь вдавливать клин в какую-нибудь сопротивляющуюся среду (фиг. д).

Если не считаться с трением между щеками клина и среды, то можно принять, что силы сопротивления H_1 , Γ_1 , D_1 фиг. д перпендикулярны к щекам и определяются по предыдущим формулам, так как это те же, что на (фиг. в), но противоположные, силы H , Γ , D , уравнивающиеся теперь на клине фиг. д. Как и прежде, для силы D пользуемся выражением

$$D_1 : \Gamma_1 = v : o, \quad \text{или} \quad D_1 = \Gamma_1 \frac{v}{o}.$$

К тому же результату можем придти и независимо, если рассмотреть равновесие клина. Будем считать, что здесь дана сила D_1 , вдавливающая клин в среду (фиг. д) и уравнивающаяся ее сопротивлениями Γ_1 и H_1 . Тогда треугольник равновесия на фиг. з) придется строить по заданной стороне D и направлениям H и Γ . Получается прежняя зависимость между Γ и D .

Обыкновенный клин (фиг. е), симметричный относительно продольной оси, представляет удвоенный клин, только что рассмотренный; поэтому к нему также относятся сделанные выводы, и, продолжая пропорцию 158, можно написать

$$\frac{D}{2\delta} = \frac{H}{\delta},$$

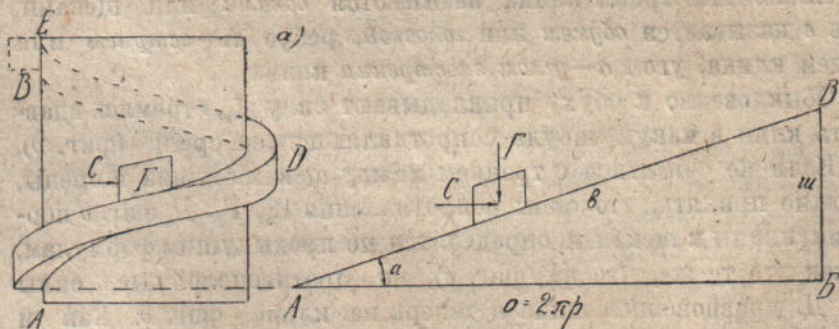
т. е. нагрузка, приходящаяся на единицу длины обуха, равна нормальному давлению единицы длины щеки, или короче: *интенсивность нагрузки обуха и щеки одинакова*.

Пользуясь этой формулой, определяют силу распора H , которую можно развить данным клином. Так, клин с обухом 10 см. и щеками 30 см. дает

$$\frac{D}{10} = \frac{H}{30}, \text{ или } H = 3D,$$

т. е. распор—втрое больше, чем движущая сила, или: сила двигателя на такой машине может преодолеть втрое большее сопротивление.

3. **Винт.** Возьмем прямой круговой цилиндр радиуса r (фиг. 104-а) и прямоугольный треугольник (фиг. б), длинный катет которого равен длине направляющей цилиндра, т. е. $2\pi r$.



Фиг. 104.

Совместим короткий катет с образующей цилиндра и обогнем треугольник вокруг цилиндрической поверхности. Вершина треугольника попадет на короткий катет, так как длинный катет равен обводу цилиндра.

Гипотенуза образует кривую линию, которая называется *винтовой линией*; она пересекает все образующие цилиндра под одним и тем же острым углом прямоугольного треугольника a ,

называемым *углом наклона винтовой линии*. Длина гипотенузы, АВ называется *витком*, а высота ВВ между началом и концом витка, считаемая по образующей, называется *ходом* или *шагом* винта. Из этих определений следует, что

$$\text{тангенс } a = \frac{ВВ}{АВ} = \frac{ш}{2\pi r}, \text{ или: } ш = 2\pi r \text{ танг. } a \dots (159),$$

где буквой *ш* обозначен шаг винта.

Представим себе, что к поверхности цилиндра приложен небольшой прямоугольничек (пунктир ВЕ на фиг. 104-а) так, что плоскость его совпадает с диаметральной плоскостью цилиндра, а сторона — с образующей цилиндра; одна из вершин прямоугольничка, например В, лежит на винтовой линии АДВ (фиг. а). Если двигать этот прямоугольничек вдоль винтовой линии, все время сохраняя совпадение его плоскости с диаметральной плоскостью цилиндра и не нарушая связи с образующими цилиндра, то получим *винтовую нарезку*. Один виток такой нарезки показан на фиг. 104-а от А до В. Общий вид нарезки представлен на фиг. 105-а. Если вместо прямоугольника В для образования нарезки принять равнобедренный треугольник и совместить его основание с образующей цилиндра, то получим *треугольную нарезку* (фиг. 105-в). Винт с треугольной нарезкой называется *болтом*.

Положим на наклонную поверхность нарезки груз Г, прилифованный так, что получается полное совпадение подошвы груза с поверхностью нарезки (фиг. 104-б). На основании предыдущего, для удержания груза придется приложить горизонтальную силу С, определяемую из выражения (158):

$$\frac{С}{ш} = \frac{Г}{o}; \text{ откуда } С = Г \frac{ш}{2\pi r} \dots (160).$$



Фиг. 105.

Груз Г можно распределить непрерывно во всех точках винтовой нарезки; тогда получим *гайку* винта (фиг. 105-б).

Сумма давлений, производимых всеми точками гайки на винтовую нарезку вдоль оси винта, равна грузу, подвешенному к гайке, или вообще осевому давлению, которое передается на гайку пазне. Обозначим этот осевой общий груз гайки буквою Г.

Очевидно, для удержания гайки, несущей осевую нагрузку Γ , придется приложить горизонтальную силу (160):

$$C = \Gamma \frac{u}{2\pi r}$$



фиг. 106.

Чем меньше шаг винта u , тем меньше D и тем, следовательно, легче работать винтом для возбуждения продольных сил Γ , иначе сказать: *малыми силами D достигается большое давление Γ* . Можно также сказать, что очень большая продольная сила Γ уравновешивается малой поперечной силой C , возникающей между гайкой и нарезкой винта, если только шаг винта достаточно мал.

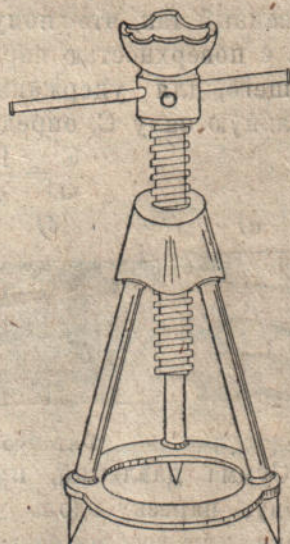
Фигура 106 представляет пример подъемного механизма, основанного на этом принципе. Вращая рукоятку силами D , мы можем поднять значительный груз Γ . Если после того мы оставим рукоятки свободными, отрывая от них руки, то система останется в покое. Оказывается, что для уравновешения

обыкновенно горизонтальную силу прикладывают к гайке не непосредственно в нарезке, а посредством рукоятки, или шкива, или же силу D прикладывают к винту, вращающемуся в неподвижной гайке, как на фиг. 106. В этом случае силы D действуют на рукоятку (плечо $2r$), наглухо скрепленную с винтом. Конечно, силы D будут меньше C во столько раз, во сколько их расстояние r_1 до оси винта меньше расстояния r силы C , а именно:

$$D : C = r : r_1 .$$

Вставляя сюда вместо C его величину из (160), получим:

$$D = \frac{\Gamma u r}{2 \pi r_1} = \Gamma \frac{u}{2 \pi r_1} . . (161).$$



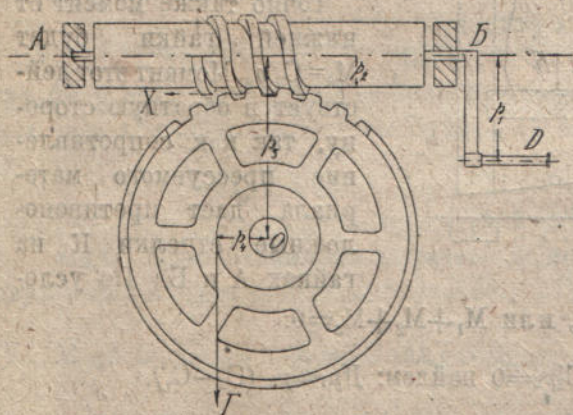
фиг. 107.

груза достаточно силы трения между гайкой и телом винта.

На фиг. 107 приведен простой винтовой *домкрат*, механизм, которым обычно пользуются в технике для подъема больших тяжестей. Им поднимают и устанавливают стропила, крыши и даже целые здания. Подъемка автомобилей, вагонов, сошедших с рельс,— все известные случаи применения домкратов. Пользуясь несколькими домкратами, Стефенсон в 1868 г. поднял на р. Нил платформу парома с находящимися на ней железнодорожными вагонами.

4. **Червячный механизм** или **бесконечный винт** (фиг. 108). Если винт сцепить с косыми зубцами колеса*), то он может служить для приведения колеса в движение и преодолевать сопротивление Γ , действующее на вал O (фиг. 108).

Положим, что X есть продольное давление, передаваемое винтом, через нарезку, зубцам колеса. Тогда из равновесия винта находим по (161).



фиг. 108.

$$D = X \cdot \frac{w}{2 \pi p_1}$$

Из равновесия вала O имеем:

$$X p_3 = \Gamma p_4, \text{ или}$$

$$X = \Gamma \frac{p_4}{p_3}.$$

После подстановки X в предыдущую формулу получим

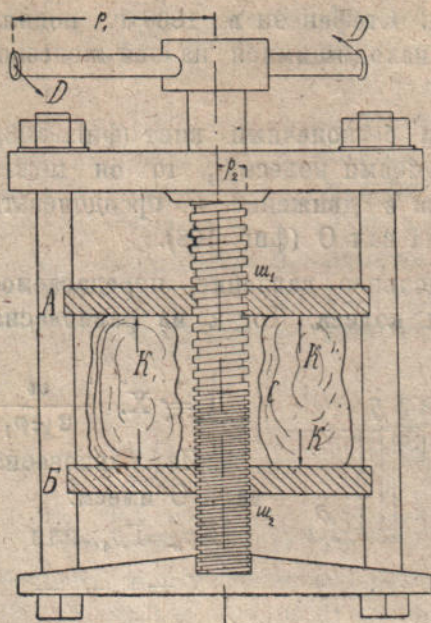
$$D = \Gamma \cdot \frac{w p_4}{2 \pi p_1 p_3} \dots \dots \dots (162).$$

5. **Дифференциальный винт** (фиг. 109). Чтобы получить большие продольные силы, необходимо применять очень низкую нарезку. Но уменьшение шага винта ведет к ослаблению нарезки, и она разрушается. Этот недостаток устранен в дифференциальном винте.

*) Зубцы колеса должны быть косыми соответственно винтовой нарезке. Винтовая линия не перпендикулярна к оси вала AB , и потому зубцы не должны быть перпендикулярны к плоскости колеса.

Винт состоит из двух участков; на одном u_1 шаг нарезки— u_1 , а на другом u_2 ,—шаг u_2 . Если на каждом участке поместить соответствующую гайку, то между гайками можно получить значительную сжимающую силу K .

Винт может служить прессом.



Фиг. 109.

Ввиду равновесия $\Sigma M=0$, или $M_1+M_2+M_3=0$:

$$D r_1 + C_1 p_2 - C_2 p_2 = 0 \text{ найдем: } D r_1 = p_2 (C_2 - C_1).$$

$$\text{Но по (161): } C_1 = K \frac{u_1}{2 \pi p_1} \text{ и } C_2 = K \frac{u_2}{2 \pi p_2};$$

$$\text{поэтому } D r_1 = p_2 \left(K \frac{u_2}{2 \pi p_2} - K \frac{u_1}{2 \pi p_1} \right) = \frac{K}{2 \pi} (u_2 - u_1)$$

$$\text{или } D = K \frac{u_2 - u_1}{2 \pi p_1}, \text{ а также } \frac{D}{u_2 - u_1} = \frac{K}{2 \pi p_1} \dots (163).$$

Если разность между ходами u_2 и u_1 сделать очень малой, то получаются очень большие прессующие силы K при сравнительно слабой силе D .

Напишем условие равновесия для винта, вращаемого силой D на рукоятке r_1 .

Момент силы D есть $M_1 = D r_1$.

Если действует продольная сила K , то в нарезке получается горизонтальная сила C_1 ; момент ее— $M_2 = C_1 p_2$.

Точно также момент от нижней гайки будет $M_3 = C_2 p_2$. Момент этот действует в обратную сторону, так как сопротивление прессуемого материала дает противоположные стрелки K на гайках A и B . По усло-

6. Коленчатый пресс фигуры 110 представляет соединение винта с шарнирным механизмом в виде ромба АБДВ. Точка

А этого ромба неподвижна; шарниры В и В находятся на гайках винта Е, вращаемого рукояткою Д.

При вращении винта, гайки сближаются и точка Д опускается, производя прессование материала К. Найдем выражение для силы прессования.

Из форм (161) известно, что продольная сила винта Г выражается через силу Д, приложенную к рукоятке радиуса p_1 :

$$\Gamma = Д \frac{\pi p_1}{u} \quad *)$$

Эта сила в узлах В и В раскладывается на две силы, которые могут быть определены из уравнения проекций на горизонтальную ось. Обозначая эти силы буквой С, имеем:

2 С кос $a = \Gamma$, или $С = \frac{\Gamma}{2 \cos a}$.

Сила прессования К в точке Д есть равнодействующая двух усилий С, т. е.

$$К = 2 С \cos (90^\circ - a) = 2С \sin a = 2 \frac{\Gamma}{2 \cos a} \sin a = \Gamma \tan a.$$

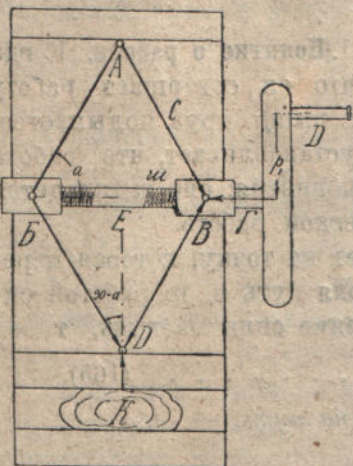
После подстановки Γ из первого выражения эта сила будет

$$К = Д \frac{\pi p_1}{u} \tan a \quad \dots \dots \dots (164).$$

Оказывается, что прессование усиливается с опусканием точки Д (с увеличением угла a).

В этом достоинство прессы такой системы.

*) Здесь одна сила Д вместо двух сил фигуры 106; поэтому продольное давление винта на гайку будет вдвое меньше, чем в форм. (161).



Фиг. 110.

Глава VI.

Работа машин.

§ 25. **Механическая работа силы.** 1. **Понятие о работе.** Когда рабочий поднимает груз, то говорят, что он совершает работу тем большую, чем больше груз и чем выше груз поднимается. Это общежитейское понятие о работе устанавливает, что работа пропорциональна грузу и высоте его поднятия; оно же кладется в основу научного понятия о механической работе.

Если постоянная сила C действует на точку, которая перемещается по направлению силы, проходя путь n , то работой силы C на пути n называют произведение силы на путь, т. е.,

$$P = C \cdot n \quad \dots \dots \dots (165).$$

Работа равна силе на путь.



Фиг. 111.



Фиг. 112.



Фиг. 113.

Так как сила выражается в килограммах, а путь в метрах или сантиметрах, то работа получается в килограммометрах или килограммосантиметрах.

Если точка приложения силы перемещается не по направлению силы, а под углом (фиг. 111), то *работой силы C на перемещении n* называется произведение проекции K силы C и пути n , т. е.

$$P = Kn = C \cos \alpha \cdot n = Cn \cos \alpha \quad \dots \dots \dots (166).$$

С таким случаем приходится встречаться при действии на точку нескольких сил. Точка перемещается по направлению их равнодействующей, которое может не совпадать ни с одной из составляющих. Определяя работу каждой составляющей в отдельности на действительном перемещении точки, мы и будем иметь

случай (фиг. 166). Так, пароход, идущий по осевой линии n речного потока вниз под действием: 1) силы паровой машины, 2) течения реки, 3) давления ветра сбоку, 4) силы тяжести и проч., составляет с силою ветра некоторый угол y , и работа ветра B будет;

$$P = B \cdot n \cdot \cos y.$$

Последнее равенство (166) можно еще выразить так: работа есть произведение силы C и проекции пути на направление силы.

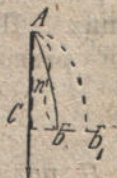
Работа изменяется с изменением угла y ; когда $y = 90^\circ$, она равна нулю:

$$P = C \cos 90^\circ = 0, \dots \dots \dots (167),$$

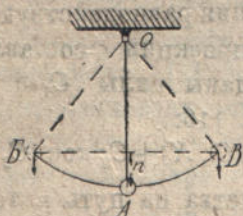
т. е. работа силы на перпендикулярных к ней перемещениях равна нулю.

При дальнейшем увеличении угла y проекция K силы C на направление пути идет в сторону, противоположную пути; она отрицательна, и потому произведение $-K \cdot n$ также отрицательно.

Если путь, проходимый точкою приложения силы криволинейный, как на фиг. 114, то для выражения работы пользуются последним ее определением: работа силы равна величине силы, умноженной на величину проекции пути ее точки приложения на направление силы.



Фиг. 114.



Фиг. 115.

На этом основании $P = Cn$, где n есть проекция криволинейного пути AB .

2. Работа силы тяжести. Применим этот случай к силе тяжести. Если шарик, весом Γ , падает по кривой AB (фиг. 114), то путь AB придется спроектировать на вертикальное направление силы тяжести. Получим:

$$P = \Gamma \cdot n \dots \dots \dots (168),$$

т. е. приходим к теореме: работа силы тяжести равна весу тела, умноженному на понижение центра тяжести тела.

Отсюда следует, что получается одинаковая работа, независимо от формы пути, по которому перемещается тяжесть между двумя данными точками, например, по выпуклому пути AB или по вогнутой кривой, показанной пунктиром.

В маятнике фиг. 115 при движении от Б до А работа

$$P_1 = \Gamma n,$$

где Γ —вес шарика, подвешенного на невесомой нити ОА. При движении от А к В, работа

$$P_2 = -\Gamma n, —$$

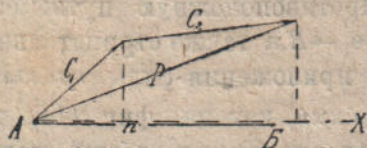
отрицательна, так как перемещение идет против силы.

Полная работа за время качания от Б до В равна сумме $P_1 + P_2$:

$$P = P_1 + P_2 = \Gamma n - \Gamma n = 0 \dots \dots \dots (169).$$

Работа маятника за время полного качания равна нулю, так как начальное и конечное положения его на одной высоте, и следовательно, не произошло понижение центра тяжести системы.

3. **Работа равнодействующей.** При действии на точку нескольких сил заменим их одной равнодействующей.



Фиг. 116.

Проектируя все силы на направление перемещения, воспользуемся теоремой о том, что проекция равнодействующей равна сумме проекций составляющих. Пусть даны силы C_1 и C_2 и равнодей-

ствующая их P ; тогда по фиг. 116:

$$P \cos (P, X) = C_1 \cos (C_1, X) + C_2 \cos (C_2, X).$$

Умножая обе части равенства на путь n точки H , получим

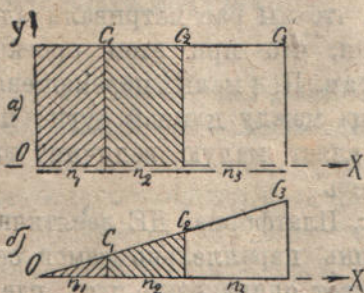
$$n \cdot P \cos (P, n) = n \cdot C_1 \cos (C_1, n) + n \cdot C_2 \cos (C_2, n).$$

Согласно (166) слева написана работа равнодействующей, справа—сумма работ составляющих, так что, имеем теорему: *работа равнодействующей равна сумме работ составляющих.*

4. **Графическое представление работы** (фиг. 117). Работу, как произведение двух множителей: силы и пути, можно представить в виде площади прямоугольника. Отложим на горизонтальной оси X путь n_1 , пройденный точкою приложения силы, а на перпендикуляре построим силу C_1 ; получим прямоугольник OC_1 , площадь которого есть $C_1 n_1$. Она равна работе P , ибо $P = C_1 n_1$.

Если та же сила C продвинется далее на путь n_2 , то получим новый прямоугольник и т. д. Полная работа за все время движения точки по направлению силы будет площадь прямоугольника OC_2 .

Если при движении точки А сила С все возрастает, например, от нуля по линейному закону



до C_1 , то работа на пути n_1 , будет равна площади треугольника On_1C_1 (фиг. б). Если при дальнейшем продвижении точки на длину n_2 сила возрастает до C_2 , то прибавится работа $n_1 C_1 C_2 n_2$ и т. д.

В этом случае работа выражается формулой:

$$P = \frac{1}{2} C n \dots \dots \dots (170),$$

которая прочитывается так: работа равна половине произведения окончательного значения силы и перемещения.

Вообще, если по оси абсцисс откладывать пути, проходимые точкою приложения силы, а по ординатам над соответствующими путями строить силы и соединить концы ординат линией, то получим такой график, площадь которого равна работе силы.

5. **Примеры работы.** а) *Работа на рычаге.* Положим, что на фиг. 87 пар Д преодолевает сопротивление крышки котла; пусть при этом крышка приподымется на малую высоту n , а противовес В на v . Работа силы пара

$$P_1 = Dn ; \dots \dots \dots (171);$$

работа противовеса В отрицательна, так как сила тяжести идет вниз, перемещение же v совершается вверх:

$$P_2 = - Vv \dots \dots \dots (172).$$

Из теории рычага известно, что плечи АВ и АВ обратно пропорциональны силам Д и В, т. е.

$$D : V = AB : AB .$$

Но благодаря пропорциональности дуг и радиусов:

$$AB : AB = v : n;$$

следовательно: $D : V = v : n$, или $Dn = Vv$.

Таким образом, работа пара Д равна работе противовеса В; а так как по (171 и 172) знаки их противоположны, то в сумме получается нуль:

$$P_1 + P_2 = Dn + (-Vv) = Dn - Vv = 0 \dots (173).$$

Работа всех сил рычага равна нулю.

Следует только иметь в виду, что мы рассматривали здесь малые перемещения n и v и считали, что при этом проекции дуг на направление сил равны дугам. При малых перемещениях это вполне справедливо, ибо разница между длиной дуги и проекцией ее на касательную представляет малую величину высшего порядка и ею можно пренебречь.

б) *Работа на десятичных весах.* Платформа ДЕ десятичных весов (фиг. 93-а) перемещается лишь параллельно самой себе. Поэтому взвешиваемый груз совершает одинаковый путь, где бы ни находился на платформе. Следовательно, работа данного груза на десятичных весах есть величина постоянная. Она численно равна работе разновесок на чашке весов, но противоположна по знаку.

в) *Работа на валу или на воротах.* Положим, что на фиг. 99 под действием силы C , движущей ворот, радиус r_2 повернулся вниз на малый угол y . При этом точкою приложения силы пройден путь $n_2 = r_2 y$ и совершена работа $P_2 = + C n_2 = C r_2 y$.

В то же время подымается груз G на высоту $v = r_1 y$, производя работу $P_1 = - G v = - G r_1 y$.

Но так как по § 23,1: $C r_2 = G r_1$, то $P_2 = - P_1$; следовательно $P_2 + P_1 = 0$. *Работа всех сил на воротах равна нулю.*

6. Выражение для работы через координаты. Представим себе, что точка приложения равнодействующей силы P на фиг. 18 проходит некоторый элемент пути en в пространстве. Разложивши ее на составляющие

P_x, P_y, P_z по осям координат,

на основании теоремы раздела 3, можем написать, что элементарная работа силы P равна сумме работ P_x, P_y, P_z на том же элементарном перемещении en , т. е.:

$$P = P_x \cdot en \cdot \cos(en, X) + P_y \cdot en \cdot \cos(en, Y) + P_z \cdot en \cdot \cos(en, Z).$$

Но $en \cdot \cos(en, X)$ есть проекция элемента пути на ось X ; обозначим ее ex . Точно также примем:

$$en \cdot \cos(en, Y) = ey \text{ и } en \cdot \cos(en, Z) = ez.$$

Тогда получим

$$P = P_x ex + P_y ey + P_z ez.$$

Или, принимая по § 4,10, что $P_x = \Sigma X$, $P_y = \Sigma Y$, $P_z = \Sigma Z$, окончательно получим:

$$P = \varepsilon_x \Sigma X + \varepsilon_y \Sigma Y + \varepsilon_z \Sigma Z \dots \dots \dots (174).$$

§ 26. Эффект или мощность. 1. Определения. Одна и та же работа может быть произведена быстро или медленно; получается больший или меньший эффект. Эффект тем больше, чем больше работы производится в одну секунду; поэтому

Эффектом, или мощностью называется количество работы, производимое в одну секунду.

На основании этого определения, эффект

$$\mathcal{E} = \frac{\text{работа}}{\text{время в секундах}} = \frac{C \cdot n}{\varepsilon} \dots \dots \dots (175).$$

Но путь в секунду $\frac{n}{\varepsilon}$ есть скорость c ; поэтому

$$\mathcal{E} = \frac{Cn}{\varepsilon} = C \cdot c \dots \dots \dots (176).$$

За единицу для измерения эффекта работы принимают так называемую *паровую лошадь*: это эффект, равный 75 килограммометров в секунду.

Паровую лошадь обозначают начальными буквами HP английских слов: horse power, или немецких слов: Pferde-Stärke (PS), так что:

$$HP = 75 \frac{\text{кг. м.}}{\text{сек.}} \dots \dots \dots (177).$$

Мы будем обозначать паровую лошадь буквами ПЛ, а число лошадей—буквою Л.

Чтобы узнать, сколько паровых лошадей содержится в данном рабочем эффекте, надо эффект разделить на 75, т. е.: число паровых лошадей

$$Л = \frac{\mathcal{E}}{75}, \text{ или } Л = \frac{C \cdot c}{75} \dots \dots \dots (178).$$

Если машина с эффектом Л работает 8 часов, то она производит работу

$$P = Л \cdot 8 \cdot 60 \cdot 60 = 28800 \cdot Л.$$

Например, если мощность машины $Л = 10$, то в течение рабочего дня работа будет $28800 \cdot 10 \cdot 75 = 21600000$ кг. м. = 21600 тм.

2. Примеры. а) Определить мощность (эффект) паровой лебедки, которая в 10 секунд поднимает 1 тону на высоту 8 метров?

Если в течение 10 секунд груз проходит путь 8 метров, то скорость поднятия

$$c = \frac{8}{10} = 0,8 \text{ м./сек.}$$

Эффект по форм. (176):

$$\Theta = C.c = 1000 \text{ кг.} \cdot 0,8 \frac{\text{м.}}{\text{сек.}} = 800 \frac{\text{кг. м.}}{\text{сек.}} = 10,65 \text{ ПЛ.}$$

б). К водяной турбине притекает вода со скоростью 2 куб. метров в секунду. Высота падения воды (напор)—5 метров. Определить в паровых лошадях мощность потока, которым располагает турбина?

Вес 1 куб. м. воды равняется 1000 кг.

Путь, проходимый водою—5 м.,

Следовательно, работа в 1 сек. = $2 \cdot 1000 \cdot 5 = 10.000$.

Число паровых лошадей по (178):

$$Л = \frac{10.000}{75} = 133\frac{1}{3}.$$

в). Определить мощность паровой машины при следующих данных (пренебрегая трением):

Диаметр поршня $D = 40$ см.,

Ход поршня $x = 0,8$ м.

Давление пара $a = 6$ атмосфер, т. е. 6 кг. см.².

Число оборотов $n = 45$ в 1 минуту.

Определим силу, т. е. полное давление пара на площадь поршня.

Площадь поршня:

$$\frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 40^2}{4} = 1257 \text{ см.}^2$$

Так как каждый сантиметр испытывает давление в 6 килограммов, то полное давление на поршень:

$$C = 6 \cdot 1257 = 7542 \text{ кг.}$$

Определим путь, проходимый поршнем в одну секунду, т. е. скорость c .

При каждом обороте машины поршень совершает ход вперед и назад, так что путь будет $2x = 2 \cdot 0,8$ м., при 45 оборотах в минуту путь будет $45 \cdot 2 \cdot 0,8$, а в секунду:

$$c = \frac{45 \cdot 2 \cdot 0,8}{60} = 1,2 \frac{\text{м.}}{\text{сек.}}$$

Работа в секунду $\mathcal{E} = C \cdot c = 7542.1,2$, а число паровых лошадей

$$Л = \frac{\mathcal{E}}{75} = \frac{7542.1,2}{75} = 120,7$$

§ 27. Энергия, или живая сила. 1. Уравнение живых сил. Выразим множители работы: силу C и путь n через их элементы.

По предыдущему сила

$$C = m \cdot u \dots \dots \dots (179).$$

Путь, проходимый точкою, выразим чертежом, как в § 2, 6 на фиг. 6.

Для равноускоренного движения, по (9):

$$n = \frac{c_0 + c}{2} \cdot t \dots \dots \dots (180).$$

Из того же графика 6 находим ускорение, как приращение скорости в единицу времени. Если, в начале, движение происходило со скоростью c_0 , а в конце скорость достигла c , то приращение скорости за время t есть

$$c - c_0,$$

а за единицу времени:

$$y = \frac{c - c_0}{t} \dots \dots \dots (181).$$

Подставим полученные выражения (179), (180) и (181), в формулу работы:

$$P = C \cdot n = m \cdot u \cdot n = m \cdot \frac{c - c_0}{t} \cdot \frac{c + c_0}{2} \cdot t.$$

По сокращении и перемножении получим:

$$P = m \cdot \frac{c^2 - c_0^2}{2} = \frac{m c^2}{2} - \frac{m c_0^2}{2} \dots \dots (182).$$

Выражение

$$\frac{m c^2}{2} \dots \dots \dots (183),$$

т. е. произведение половины массы на квадрат скорости называется *живою силой*, которою обладает тело массы m , движущееся со скоростью c *).

В формуле (182) стоит живая сила в конце движения без живой силы в начале движения; разность выражает приращение

*) Термин *Vis Viva* введен Лейбницом (1646—1716) для произведения MC .

живой силы за время движения. Поэтому формулою написана следующая теорема: *работа, производимая действующею на тело силой, равна приращению живой силы, или кратко:*

$$P = n \cdot Ж \cdot С \dots \dots \dots (184).$$

Если движение не равноускоренное, а произвольное, то мы разобьем его на малые элементы, на протяжении которых движение близко к равноускоренному; тогда полученную формулу можно будет применить к каждому из таких малых элементов времени. Таким путем устанавливается, что элементарная работа за малый промежуток времени равна приращению живой силы за этот же промежуток времени:



Фиг. 118.

$$\text{э} P = n \cdot Ж \cdot С \dots \dots \dots (185).$$

Вообще всегда приращение живой силы равно работе, произведенной силами. Это уравнение называется *уравнением живых сил*, а также теоремой, или законом живых сил.

Если начальная скорость тела равна нулю, то формула (182) превращается в

$$P = \frac{mc^2}{2},$$

что кратко напишем так:

$$P = Ж \cdot С.$$

Следовательно, если какая-нибудь сила двигателя приводит тело в движение, то развивается живая сила; *работа, производимая двигателем, равна этой живой силе.*

Представим себе силу, противную движению. Положим, что тело массы m движется с некоторой скоростью c , т. е. имеет живую силу

$$\frac{mc^2}{2},$$

и на тело подействовала сила, противная движению. Работа такой силы на пути тела, n —отрицательна; поэтому уравнение живых сил переписется в иной форме:

$$-Cn = \frac{mc^2}{2} - \frac{mc_0^2}{2}, \text{ или } P = \frac{mc_0^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \dots \dots (186).$$

Разность $\frac{mc_0^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$ указывает на убывание живой силы во время движения, т. е. на расход живой силы.

Такой случай представляет движение в сопротивляющейся среде, например в воде, масле и т. п. Когда тело попадает в такую среду, его живая сила убывает, расходуется. Последнее равенство говорит, что *работа сопротивления равна потере живой силы*.

2. Закон живых сил для падающих тел. Общее уравнение (185), или закон живых сил, можно применить и к падению тел, под действием силы тяжести, так как это частный случай движения. Но мы приведем здесь отдельный вывод закона живых сил, в виду его простоты в применении к силе тяжести.

Если тело падает с высоты n_1 , то в конце пути скорость его будет $c_1^2 = 2yn_1$ (см. форм. 12). Представим себе, что то же тело падает с другой высоты n_2 , приобретая в конце пути скорость $c_2^2 = 2yn_2$. Вычтем первое равенство из второго:

$$c_2^2 - c_1^2 = 2y(n_2 - n_1).$$

Умножая обе части равенства на массу падающего тела и деля на 2, получим

$$\frac{mc_2^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2} = my(n_2 - n_1);$$

или, после замены my весом падающего тела ν по формуле (3) и разности высот $n_2 - n_1$ буквою n :

$$\frac{mc_2^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2} = \nu n.$$

Так как по § 25,2 в правой части стоит работа силы тяжести, то последнее выражение представляет теорему живых сил: живая сила, приобретаемая падающим телом на некотором пути n , равна работе силы тяжести на том же пути.

3. Энергия. Итак, если сила, перемещая тело, производит работу, то тело приобретает живую силу, равную этой работе. Обратно, если тело движется с запасом живой силы и производит работу, то живая сила тела убывает, расходуясь на эту работу, причем убыль живой силы равна произведенной работе. Следовательно, работа превращается в живую силу и, обратно, живая сила переходит снова в работу.

Все то, что способно переходить в работу, называется *энергией*.

Живая сила есть энергия тела.

Так как живая сила может переходить в работу, а работа— снова в живую силу и притом всегда в равном количестве, без всяких потерь, то энергия никогда не теряется и не исчезает; она только превращается из одного вида в другой. В этом заключается основной закон механики известный под названием *закона сохранения энергии.*

По этому закону, энергия в природе сохраняется вечно и никогда не исчезает; она может лишь превращаться из одного вида в другой.

Различают потенциальную энергию и кинетическую.

Бывают случаи накопления телом запаса энергии; при благоприятных условиях запас энергии может быть проявлен, в данный же момент энергия пассивна,—тело только обладает ею. Так, груз G , поднятый на высоту n и на ней удерживаемый, обладает возможностью, при падении, совершить работу, равную Gn .

Энергия, которую обладает груз на высоте n , равна работе поднятия его на эту высоту.

Энергией положения обладает также вода в водонапорной башне, поднятая туда насосами; выпущенная оттуда, она способна производить работу. Сжатый пар, упруго сжатый брусок, растянутая пружина, заведенные часы и проч. также обладают энергиею положения. Такое состояние энергии называется *потенциальной энергией.*

Деятельная энергия, которая проявляется фактически, производя работу, называется *кинетической энергией*, или энергией движения. Такова энергия летящего артиллерийского снаряда, падающего камня и т. п. Кинетическая энергия, как энергия движения, выражается живою силой $\frac{1}{2} mc^2$.

Рассмотрим изменение энергии за время падения тела в пустоте. Положим, что от начала падения прошло t сек. и тело опустилось на x см. Так как падение в пустоте есть движение равноускоренное, то по (7) скорость $c = gt$, следовательно, живая сила, или кинетическая энергия

$$E_k = \frac{mc^2}{2} = \frac{m}{2} g^2 t^2.$$

Напишем потенциальную энергию для того же положения тела. Если первоначальная высота тела была n , а теперь тело ниже на x , то высота тела есть $n-x$, и потенциальная энергия

$$\mathcal{E}_n = \Gamma (n-x) = \mu y (n-x).$$

Но по (11): $x = \frac{1}{2} y v^2$; поэтому $\mu y (n-x) = \mu y (n - \frac{1}{2} y v^2) = \mu y n - \frac{1}{2} \mu y^2 v^2$.

Складывая \mathcal{E}_k и \mathcal{E}_n , получим:

$$\frac{\mu y^2 v^2}{2} + \mu y n - \frac{\mu y^2 v^2}{2} = \mu y n = \Gamma \cdot n$$

Оказывается, что сумма энергий потенциальной и кинетической в любой момент движения есть величина постоянная. За время падения тела каждый вид энергии изменяется: потенциальная убывает, кинетическая—увеличивается, но изменение одной происходит за счет другой, ибо сумма их постоянна. Это говорит о том, что ни один из видов энергии не исчезает бесследно, а если уменьшается,—то за счет его развивается другой вид энергии. Энергия не исчезает, а лишь превращается. В этом и заключается закон сохранения энергии.

4. Устойчивость равновесия. Равновесие тел с неполными связями может получаться при разных положениях системы, в зависимости от устройства связей. Этим положениям соответствует определенная потенциальная энергия. Рассмотрим крайние, когда она достигает наибольшего или наименьшего значения. Для тяжелых тел это будут низшее и самое высокое из положений тела, дозволяемых связями. Но было показано, что такие положения соответствуют устойчивому и неустойчивому равновесию. Следовательно:

минимум потенциальной энергии соответствует устойчивому равновесию,
максимум—неустойчивому.

Если при всех положениях системы потенциальная энергия постоянна, то равновесие безразличное.

Примеры представляют фиг. 42—45.

5. Задачи. а). Определить живую силу снаряда весом 50 кг., летящего со скоростью 400 м. в сек.?

Решение. По (183): $ж. с. = \frac{mc^2}{2} = \frac{50}{9,8} \cdot \frac{400^2}{2} = 407747$ кг.м.

б) Какою энергиею обладает железный круглый брусок толщиной 2 см. и длиной 150 см., если один конец его наглухо закреплен, а другой постепенно растянут силой 5 тон?

Решение. Сила, растянувшая брусок, совершила работу, равную произведению силы на удлинение бруска. Так как удлинение y , по закону Гука, пропорционально силе C , то работа выражается графиком фигуры 117-б и формулой 170:

$$P = \frac{1}{2} C \cdot y.$$

Удлинение y определяем по формуле (78):

$$y = \frac{C \cdot d}{E \cdot \Pi} = \frac{5000 \cdot 1500}{20 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 20^2} = 1,19 \text{ мм.},$$

где C — сила, d — длина, E — коэффиц. упругости, Π — площадь поперечного сечения бруска.

После чего $P = \frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot 0,119 = 298$ кг. см.

Если брусок предоставить самому себе, то он будет сокращаться и способен произвести работу, равную 298 кг. см. Так что, энергия бруска равна 298 кг. м. Такую же энергиею обладает и брусок, удлинившийся на 1,19 мм. от нагревания.

Глава VII.

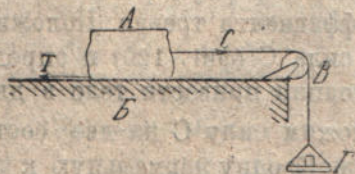
Т р е н и е.

§ 28. Трение скольжения. 1. Сила трения. Мы рассмотрели равновесие машин. При этом оказалось, что малою силою можно уравновесить значительно больший груз, если целесообразно расположить их на машине. Казалось бы, что если сила уравновешивает груз, то даже небольшая прибавка к этой силе приведет машину в движение, например: если давление пара на предохранительный клапан фиг. 87 станет хоть немного больше 3

атмосфер, данных в § 20, то рычаг тотчас повернется влево, вращаясь вокруг оси шарнира А, или, как только на фиг. 106 силу Д рукоятки винта мы станем увеличивать сверх формулы (161),—тотчас, казалось бы, начнется подъем груза Г.

В действительности это предположение не оправдывается. Небольшого увеличения силы двигателя оказывается недостаточно, чтобы вывести систему из равновесия и привести в движение; есть какие-то препятствия к этому движению. Главным из них является *трение*.

Если к телу А, свободно лежащему на поверхности стола



Фиг. 119.

Б, приложить силу С, параллельную столу, то не всегда получится движение тела вдоль силы, а только в том случае, если сила С достигнет определенной величины. Мы убеждаемся в этом, накладывая гири на чашку Г. При малом весе гирь тело А в покое, но можно прибавить столько гирь, что наступит движение. Очевидно, на поверхности соприкасающихся тел развивается сила Т, противоположная движущей силе С; она до поры до времени удерживает тело, сопротивляясь сдвигению. Но она не может быть большей некоторого предела. Эта наибольшая возможная сила сопротивления называется *силою трения*.

2. **Законы трения.** На основании опытов 1781 г. Кулон установил следующие *законы трения*.

1). Сила трения пропорциональна нормальному давлению, т. е.

$$T = \kappa A \dots \dots \dots (187),$$

где А—вес тела, а κ —коэффициент пропорциональности. Этот коэффициент называется *коэффициентом трения*.

2). Коэффициент трения зависит от материала трущихся тел и от состояния трущихся поверхностей, точнее,—от их гладкости и смазки. Чем глаже поверхность, тем κ меньше, так как меньше препятствий в виде неровностей и бугорков, задерживающих движение тела А вдоль Б.

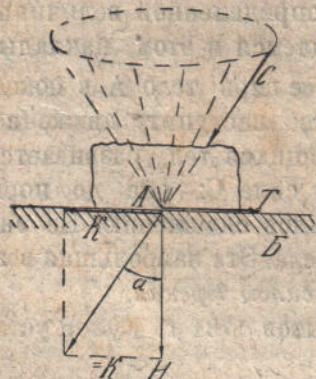
3) Коэффициент трения покоя больше коэффициента трения движения, т. е. вначале, чтобы сдвинуть тело с места, надо употребить большую силу С, чем во время его движения.

4) Коэффициент трения не зависит от величины поверхности соприкосновения трущихся тел, т. е. сила трения не зависит от того, будет ли скользящее тело опираться на другое большей или меньшей поверхностью.

5) Коэффициент трения не зависит от относительной скорости скольжения одного тела по другому.

Хотя последующими исследованиями установлены некоторые поправки к законам Кулона, но они в большинстве случаев незначительны и не изменяют сущности этих законов. Поэтому в технике пользуются ими в приведенной формулировке.

3. Геометрическое значение коэффициента трения. Положим, что на тело А действует наклонная сила С (фиг. 120) и определим, при каких условиях она в состоянии привести тело в движение.



Фиг. 120.

Разложим силу С на две составляющие Н и К; одну нормальную к поверхности соприкосновения и другую—касательную.

Вторая сила стремится сдвинуть тело А влево; но этому сопротивляется сила трения Т. Очевидно, до тех пор, пока $K < T$,—тело А находится в покое.

Но по (187) $T = \kappa H$ и по фиг. 120 $K = H \tan \alpha$; поэтому при покое должно быть:

$$H \tan \alpha < \kappa H, \text{ или } \tan \alpha < \kappa.$$

Следовательно, тело А не будет скользить до тех пор, пока тангенс угла между силой С и вертикалью меньше коэффициента трения. Очевидно, когда тангенс угла α станет равным κ , наступит предел равновесия:

$$\tan \alpha = \kappa \dots \dots \dots (188).$$

За этим пределом следует движение.

Таким образом, коэффициент трения есть тангенс того наибольшего угла, под которым еще может передаваться давление, не вызывая скольжения. Этот наибольший угол называется *углом трения*. Обозначим его буквой θ .

До тех пор, пока действующая на тело сила С отклоняется от нормали не более, чем на угол трения, тело в равновесии; сила,

отклоняющаяся от нормали более угла трения, вызывает скольжение.

Сила S фиг. 120 может лежать не только в плоскости чертежа, но может идти под таким же углом α и в плоскости, перпендикулярной и, вообще, во всякой плоскости, проходящей через нормаль H .

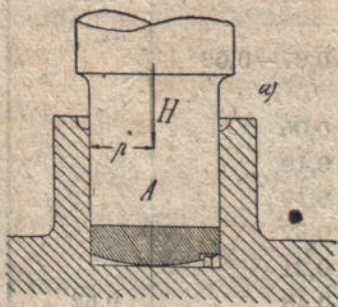
Конус, образованный вращением прямой, наклоненной к нормали под углом трения, носит название *конуса трения*. Чем меньше коэффициент трения, тем уже конус трения и тем легче сдвигается тело.

4. Таблица коэффициентов трения по опытам Кулона, Морена и других, для земель—по данным Зелинского.

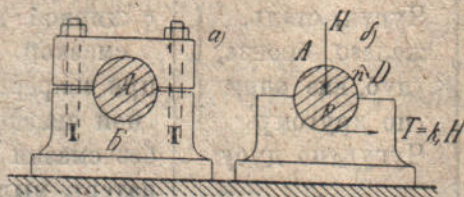
Название материалов.	Состояние поверхности	Коэффициент трения * во время движения	* в покое
Чугун по чуг. или бронзе	без смазки	0,15	0,16
Железо " "	"	1,18	0,19
Чугун, сталь, железо, бронза, дуб, вяз один по другому	с жирной смазкой	0,07—0,08	
Чугун по дубу	при непрерывной смазке	0,05	
"	без смазки	0,49	
"	натерт. мылом	0,19	
Железо по дубу	без смазки	0,62	
"	натерт. мылом	0,21	
Дуб по дубу	без смазки	0,48	0,62
"	натерт. мылом	0,16	
Ремень по дереву	без смазки	0,32	0,47
" по металлу	"	0,28	0,28
Пеньковая веревка по дереву	"	0,5	0,8
Дерево по камню (стоймя)	без смазки	—	0,63
Кирпич по кирпичу или камню	"	0,67—0,75	0,75 0,49

Название материалов.	Состояние поверхности.	Коэффициент трения μ во время движения.	μ в покое.
Камень по железу	без смазки	—	
	дерево	0,48	
по песчаной земле	железо	0,34	
	дерево	0,86	
поглинистой земле	железо	0,77	
	дерево	0,92	
по чернозему	железо	0,78	
	дерево	0,02	
по льду	железо,	0,02	
"	сталь	0,02	
по баббиту*)	со смазкой	0,02	

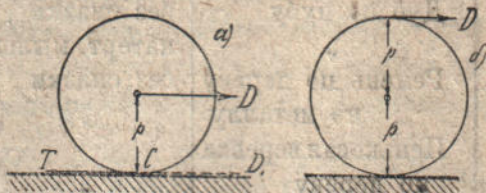
5. Примеры трения в машинах. Валы машин прикрепляются к опорам посредством шипа, или цапфы; это — обточенный цилиндрический конец вала A фиг. 121 и 122. Цапфа помещается



Фиг. 121.



Фиг. 122.



Фиг. 123.

в соответствующую цилиндрическую опору, называемую подшип-

*) антифрикционный сплав из олова, свинца и сурьмы.

ником (фиг. 122). Если вал вертикален, как на фиг. 121, то опора называется *подпятником*, а цапфа — *пятой*.

Рассмотрим влияние трения при вращении пяты A вокруг вертикальной оси, если давление на пяту H .

При хорошей пригонке (шлифовке) пяты к подпятнику, давление H можно считать равномерно распределенным по площади пяты. Разобьем площадь пяты на малые секторы и примем их за треугольнички. Пусть таких треугольничков будет n ; тогда на каждый придется давление $\frac{H}{n}$, а сила трения будет

$\kappa_1 \frac{H}{n}$. Эта сила приложена в центре тяжести треугольника,

т. е. на расстоянии $\frac{2}{3} p$ от центра круга O . Момент элементар-

ной силы трения будет $\kappa_1 \cdot \frac{H}{n} \cdot \frac{2}{3} p$, а момент всех сил

$$M = n \cdot \kappa_1 \cdot \frac{H}{n} \cdot \frac{2}{3} p = \frac{2}{3} \kappa_1 \cdot H \cdot p.$$

Такой момент может поглощаться силами трения, так что, если момент внешних сил, стремящихся повернуть покоящийся вал, будет меньше M , то вал не повернется. Чтобы привести вал в движение и его поддерживать, необходимо приложить момент, не меньше $\frac{2}{3} \kappa_1 \cdot H \cdot p$ (189), где: κ_1 — коэффициент трения пяты о подпятник, H — нагрузка вала и p — радиус пяты *).

Численный пример. Пята вертикального вала имеет диаметр 12 см. и вертикальную нагрузку 7200 кг. Какую силу X надо приложить к плечу $n = 60$ см., чтобы преодолеть трение между пятой и подпятником, если коэффициент трения $\kappa = 0,07$.

По форм. (189 или 190) находим момент трения

$$M_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,07 \cdot 7200 \cdot 6.$$

*) Формула относится к новым, хорошо пришлифованным подпятникам. При продолжительной работе пята истирается, и считают, что силы трения приложены посередине радиуса p , так что:

$$M = \frac{1}{2} \kappa_1 \cdot H \cdot p \dots \dots \dots (190),$$

Вращающий момент $X \cdot 60$ должен быть больше, т. е. должно быть:

$$X \cdot 60 > \frac{1}{2} \cdot 0,07 \cdot 7200 \cdot 6;$$

откуда $X > \frac{0,07 \cdot 7200 \cdot 6}{2 \cdot 60} = 25,2$ кг.

Другой пример представляет горизонтальный вал в подшипнике. При вращении цапфы в подшипнике, например вправо, как показано на фиг. 122 стрелкою D , — на окружности цапфы появляется сила трения $T = \kappa_1 \cdot H$, где H — нормальное давление цапфы на подшипник. Момент этой силы относительно оси вращения есть

$$M = T r = \kappa_1 H r \dots \dots \dots (191).$$

Для его уравновешения придется затратить некоторую силу D , которая дает момент

$$D n, \text{ равный моменту трения.}$$

Следовательно, имеем равенство:

$$D n = \kappa_1 H r, \text{ откуда } D = \kappa_1 \frac{H r}{n} \dots \dots \dots (192).$$

Такая сила D расходуется не на вращение вала, а лишь на преодоление трения в подшипнике; это бесполезная трата.

§ 29. **Трение катания**, или трение 2-го рода. 1. При качении одного тела по другому также появляется сила трения. Если бы не было этой силы, то цилиндр на горизонтальной плоскости, приведенный толчком в движение, катился бы без остановки, все время равномерно.

Однако, как показывает опыт, с течением времени цилиндр останавливается. Очевидно, плоскость, по которой цилиндр движется, оказывает сопротивление движению. Сила этого сопротивления называется *трением качения*.

Появление трения качения объясняют изменением формы плоскости и катящегося тела в точках их соприкосновения, именно полагают, что цилиндр несколько вдавливается в плоскость и как бы гонит перед собою волну. Отсюда — трение качения тем больше, чем сильнее вдавливается каток. По опытам Кулона и Морена, сила трения 2-го рода

$$T_2 = \kappa_2 \frac{H}{r} \dots \dots \dots (193),$$

где H — нормальное давление катящегося тела, r — радиус его. Коэффициент κ_2 — называется коэффициентом трения при качении.

Так как в форм. (193) T и H суть силы, то κ_2 должно измеряться единицами длины, например, для катания чугунного колеса по чугунной плите

$$\kappa_2 = 0,12 \text{ см.}$$

2. Таблица коэффициентов качения по Понсле (Poncelet) и др.

Для железнодорожных колес на рельсах . . .	$\kappa_2 = 0,05$ см.
Для катков из чугуна на рельсах	0,12 см.
„ „ вяза на дубовом помосте	0,16 „
„ „ вяза или дуба на гладкой мостовой .	0,74 „
Для экипажных колес на грунтовой дороге	1,85 „
„ „ „ „ шоссе	1,41 „
„ шкивов: чугунных 0,15, деревянных 0,30, кожаных 0,25, бумажных 0,20—при перекачивании друг по другу.	

Состояние поверхности и смазка оказывает такое же большое влияние при качении, как и при скольжении.

3. Сравним силы трения при скольжении и при качении на примере чугуна.

Положим, что нормальное давление $H = 500$ кг., коэффициент трения при скольжении $\kappa_1 = 0,16$. При качении возьмем диаметр цилиндрического катка $d = 40$ см. и коэффициент $\kappa = 0,12$ см.

Получим из (187) и (193):

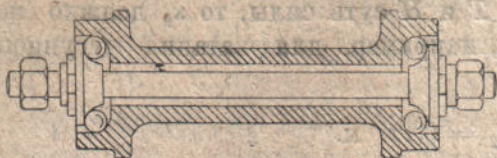
$$\text{для скольжения } T_1 = \kappa_1 H = 0,16 \cdot 500 = 80 \text{ кг.},$$

$$\text{для качения } T_2 = \kappa_2 H : r = 0,12 \cdot 500 : 20 = 3 \text{ кг.}$$

Оказывается, что сила трения при качении значительно меньше, чем при скольжении. Люди руководствуются этим с незапамятных времен.

Сани представляют хорошее перевозочное средство передвижения по гладкой снежной дороге, но они не пригодны на обыкновенных дорогах вследствие большого трения между полозьями и поверхностью дороги. Люди перешли к колесным телегам.

В машинах и приборах, где необходимо уменьшить трение, теперь устраивают шариковые соединения или помещают ролики. Велосипеды только потому так легки на ходу, что втулки



колес их перекатываются по стальным шарикам, окружающим ось

Фиг. 124.

велосипеда (фиг. 124).

4. Качение, как вращение вокруг оси, должно производиться парю сил. Это обнаружится, если обратим внимание на то, что движущая сила прикладывается в центре катка, а сопротивление — на его окружности, т. е. не по той же, а по параллельной прямой.

Действительно, не нарушая состояния системы, в точке C (фиг. 123) можно приложить две противоположные силы, равные D . Тогда получим:

пару сил с моментом $M = Dp = T \cdot p$ и силу D_1 , приложенную в точке C .

Пара вращает цилиндр, а сила — перемещает его вправо, поступательно. Таким образом получается вращение катка вокруг своей оси и в то же время поступание его вдоль плоскости катания.

Если движущая сила приложена не в центре O , а к поверхности катка, в точке, диаметрально противоположной точке опоры, как показано на (фиг. 123-б), то момент силы трения

$$M = D \cdot 2p = 2Tp.$$

Подставляя в две последние формулы выражение для T , по форм. (193), получим момент трения:

$$M = T_1 p = \kappa_1 \frac{H}{p} \cdot p = \kappa_1 H \text{ и}$$

$$M = 2 T_2 p = 2 \kappa_2 \frac{H}{p} p = 2 \kappa_2 H.$$

Он не зависит от размеров катка, а только от трущихся поверхностей и нормального давления между ними.

Укладываем тело весом Γ на двух катках (фиг. 125) диаметром δ и весом K каждый, имеем равенство:



Фиг. 125.

где κ_2 — коэффициент качения между нижней доской и катками, κ_2' — между верхней доской и катками. Если доски одинаковы, то $\kappa_2 = \kappa_2'$ и движущая сила должна быть больше, чем

$$T_2 \delta = (\Gamma + 2K) \kappa_2 + \kappa_2' \Gamma,$$

$$T_2 = 2\kappa_2 (\Gamma + K) : \delta \dots \dots \dots (194).$$

5. Пример. Определить силу тяги, необходимую для преодоления трения при движении железнодорожного вагона весом 15 тонн, если радиус колеса вагона $p = 50$ см., радиус цапфы оси $p_ц = 4,5$ см.

Колеса заклинены на осях, так что вращаются вместе с последними; вес колес с осями — 2 тонны.

По (193) трение качения:

$$T_2 = \kappa_2 \frac{H}{p} = \kappa_2 \frac{15000}{50}.$$

Так как по 2 таблице § 29 $\kappa_2 = 0,05$, то

$$T_2 = 0,05 \cdot \frac{15000}{50} = 15 \text{ кг.}$$

Это на все колеса вагона. Трение одного колеса получается путем деления на число колес вагона.

На цапфы приходится нагрузка

$$15 - 2 \text{ тонн} = 13 \text{ тонн} = 13000 \text{ кг.}$$

Сила трения на поверхности цапф (при $\kappa = 0,02$):

$$T = \kappa \cdot 13000 = 0,02 \cdot 13000 = 260 \text{ кг.}$$

Переносим эту силу к окружности колеса, необходимо уменьшить в отношении радиусов $p_ц$ и p , т. е. принять

$$T_0 = T \frac{p_ц}{p} = 260 \frac{4,5}{50} = 23,4 \text{ кг.}$$

Сопротивление трению

$$C = T_2 + T_0 = 15 + 23,4 = 38,4 \text{ кг.}$$

Такова же будет и сила тяги, затрачиваемая на преодоление трения.

§ 30. Реакции опор при трении. 1. Было показано, что давление на опору может передаваться под углом, но не большим угла трения. Очевидно, реакция опоры, как сила равная и прямо противоположная давлению, также пройдет под углом к нормали в точке опоры, но не большим угла трения. Разлагая реакцию P фиг. 126 на две составляющие: нормальную— H и касательную T , получим силу трения:

$$T = H \operatorname{танг} a = \kappa H.$$

При уменьшении коэффициента трения сила трения уменьшается; вместе с тем реакция приближается к нормали H . В пределе, при отсут-

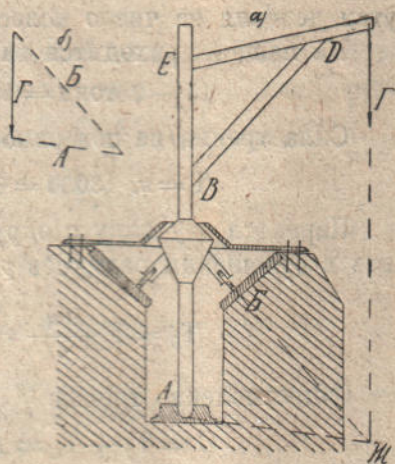
ствии трения, направление реакции совпадает с нормалью H .

Поверхности столь гладкие, что коэффициент трения их равен нулю, называются *абсолютно гладкими*.

В природе нет таких поверхностей, но иногда трение бывает так мало, по сравнению с другими действующими силами, что им пренебрегают. Такой случай будем называть *идеальным*. Таким образом, в идеальных условиях реакция нормальна к поверхности скольжения или катания.

2. **Примеры.** а) Определение реакций крана, вращающегося на роликах B и опирающегося на шаровую пяту A . Подымаемый краном груз $\Gamma = 2$ тонны (фиг. 127).

Будем пренебрегать трением катков B , вследствие его малости; тогда реакция B пройдет нормально к поверхности катания B , как показано пунктиром. Направление груза Γ пересекается с B в точке $Ж$. По фиг. 34 реакция A должна проходить через ту же точку. Таким образом, направление сил Γ , A , B найдено; остается построить треугольник сил, как показано на фиг. б).



Фиг. 127.

б) Определение реакций стремянки (лестницы), удерживаемой трением (фиг. 128).

Положим, что деревянная лестница длиной δ , весом Γ , установлена в деревянном помещении. Коэффициент $\kappa_1 = 0,5$. Определим предельный угол, под которым лестница может еще стоять, удерживаемая одним трением.

Обозначим нормальные составляющие давления опор через A и B ; тогда силы трения будут:

$$T_a = \kappa_1 A \text{ и } T_b = \kappa_1 B.$$

Так как лестница в равновесии, то напишем 3 уравнения статики для плоской задачи:

$$\Sigma X = B - T_a = B - \kappa_1 A = 0.$$

$$\Sigma Z = T_b - \Gamma + A = \kappa_1 B - \Gamma + A = 0.$$

$$\Sigma M_0 = B \delta + \Gamma \cdot \frac{a}{2} - A \cdot a = B \delta \sin y + \Gamma \frac{1}{2} \delta \cos y - A \delta \cos y = 0.$$

Из первого уравнения находим:

$$B = \kappa_1 A.$$

Подставляя во второе, получим:

$$A \kappa_1^2 - \Gamma + A = 0, \text{ или } A = \frac{\Gamma}{1 + \kappa_1^2}.$$

Сократим 3-е уравнение на δ , разделим на $\cos y$ и подставим значение A и B :

$$\kappa_1 \frac{\Gamma}{1 + \kappa_1^2} \tan y + \frac{1}{2} \Gamma - \frac{\Gamma}{1 + \kappa_1^2} = 0.$$

$$\text{По сокращении на } \Gamma \text{ найдем } \tan y = \frac{1 - \kappa_1^2}{2\kappa_1}.$$

Это предельный угол, которого следует избегать, так как может наступить скольжение от случайностей. Можно допустить только больший угол, т. е. равновесие будет обеспечено, если

$$\tan y \geq \frac{1 - \kappa_1^2}{2\kappa_1}.$$

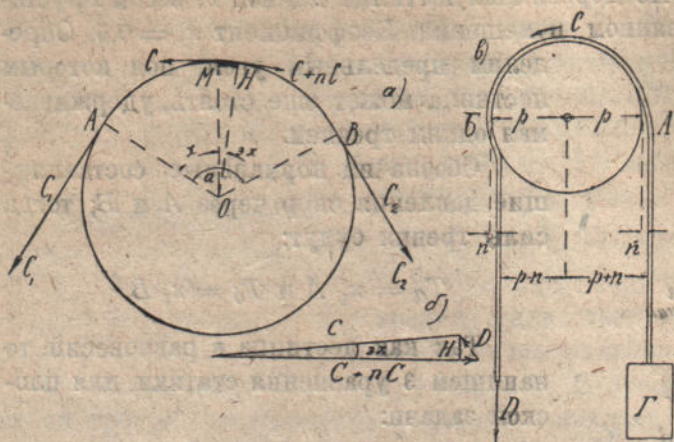
Остается поставить числа:

$$\tan y \geq \frac{1 - 0,5^2}{2 \cdot 0,5} = 0,75, \text{ или } y \geq 37^\circ.$$



Фиг. 128.

§ 31. Трение гибких тел. 1. Трение нити о неподвижный цилиндр впервые было исследовано Эйлером*). Если цилиндр O



Фиг. 129.

оказаться в равновесии даже в том случае, если усилие C_2 больше C_1 , ибо усилию C_2 приходится преодолевать не только C_1 , но и силы трения поверхности ACB .

Можно полагать, что силы трения накапливаются вместе с длиной ACB , так что усилие нити C больше C_1 , а C_2 больше C .

Рассмотрим какой-нибудь малый элемент нити mn . Так как между элементом и цилиндром существует сила трения, то натяжение нити справа будет несколько больше, чем натяжение слева от элемента.

Обозначая натяжение нити слева C , а справа — $C + nC$, т. е.: C плюс приращение C , найдем, что для равновесия элемента должна быть третья сила D , именно, реакция цилиндра. Эта сила построена на фиг. б), как замыкающая треугольника. Разложим ее на нормальную и касательную составляющие. Тогда непосредственно по фиг. б) получим:

Нормальная к поверхности цилиндра составляющая

$$H = C \cdot \alpha,$$

где α — есть элемент угла MO_n , соответствующий элементу нити mn . Касательная составляющая есть nC , равная силе трения элемента εT . Но силу трения элемента получим также путем

*) L. Euler (1707—1783) — один из величайших математиков.

на фиг. 129-а охватить натянутую гибкою нитью $C_1 C_2$, то между поверхностью цилиндра и нитью возникнут силы трения, сопротивляющиеся скольжению нити.

Нить может

умножения обеих частей последнего равенства на коэффициент трения κ :

$$\varepsilon T = \kappa H = \kappa C \varepsilon x, \text{ или: так как } \varepsilon T = nC, \text{ то —}$$

$$nC = \kappa C \varepsilon x.$$

Отсюда

$$\frac{nC}{C} = \kappa \varepsilon x.$$

Из дифференциального исчисления известно, что отношение

$$\frac{nC}{C}$$

есть дифференциал логарифма C , т. е. приращение логарифма C на протяжении элемента угла εx . Если же просуммировать все элементы от A до B , то получим полное приращение логарифма

$$\text{Лог } C_2 - \text{Лог } C_1$$

на протяжении угла $AOB = a$. Таким образом, последнее равенство переписывается:

$$\text{Лог } C_2 - \text{Лог } C_1 = \kappa a, \text{ или } \text{Лог } \frac{C_2}{C_1} = \kappa a.$$

Такова зависимость между натяжениями нити C_1 и C_2 , охватывающей цилиндр под углом a . Удобнее писать эту зависимость иначе:

$$\frac{C_2}{C_1} = e^{\kappa a}.$$

Действительно, если прологарифмировать обе части такого равенства

$$\text{Лог } \frac{C_2}{C_1} = \kappa a \text{ Лог } e,$$

то получим предыдущее:

$$\text{Лог } \frac{C_2}{C_1} = \kappa a,$$

ибо $\text{Лог } e = 1$, если за основание принять e .

Таким образом,

$$C_2 = C_1 e^{\kappa a} \dots \dots \dots (195),$$

где $e = 2,71828 \dots = \infty 2,72$ — так называемое *Неперово число* (основание натуральных логарифмов), κ — коэффициент трения.

Разница между натяжениями нити C_2 и C_1 значительно возрастает вместе с увеличением угла обхвата a . Вот почему один матрос легко удерживает причаливающий пароход, обернувши несколько раз вокруг „мальчиков“ *) причальный канат парохода.

2. **Жесткость гибких тел:** цепей, канатов, ремней. Ремень, канат и цепь оказывают некоторое сопротивление изгибу; это мы тотчас почувствуем, когда попробуем руками изогнуть толстый ремень. Благодаря этой жесткости ремень навиваемый на вал, как показано стрелкой C на фиг. 129-в, несколько отстает от вала у точки A , а именно, при переходе из прямолинейного направления в криволинейное. Здесь сопротивление изгибанию выражается в том, что ремень стремится сохранить свою первоначальную прямолинейность.

На противоположной стороне, в B , ремень стремится сохранить свою кривизну и потому забегает вперед за точку B , действуя против производимого нами распрямления.

В результате плечи сил: движущей силы D и поднимаемого груза Γ — отличаются от радиуса вала; они оказываются

$$p - n \text{ и } p + n,$$

где n — разница между радиусом вала p и действительными расстояниями ремня до оси вала.

Условие равновесия вала будет теперь:

$$\Gamma(p+n) = D(p-n), \text{ откуда } D = \Gamma \frac{p+n}{p-n} = \Gamma \left(1 + \frac{2n}{p-n} \right) = \Gamma + \frac{\Gamma}{p} \cdot \frac{2n}{1-n}$$

т. е. сила двигателя D должна быть всегда больше поднимаемого груза Γ . Разница между ними есть сопротивление жесткости

$$T_3 = \frac{\Gamma}{p} \cdot \frac{2n}{1-n}$$

Оно обратно пропорционально радиусу вала, на который навивается ремень. Вообще для всех гибких тел, как то: ремней, канатов, цепей и т. п.:

$$D = \Gamma + T_3, \text{ где } T_3 = \infty \kappa_3 \frac{\Gamma}{p} \dots (196).$$

*) „Мальчиками“ называются прочные, короткие вертикальные цилиндры, прикрепляемые на пристанях или набережных для причаливания судов.

2. На основании опытов Кулона и Морена для веревок получается следующая формула Эйтельвейна:

$$T_3 = 0,13 \frac{\partial^2}{p} \Gamma, \dots \dots (197),$$

где размеры должны быть в сантиметрах. Ленгрер для того же сопротивления жесткости пеньковых канатов дает формулу

$$T_3 = 0,04 \Gamma \frac{\epsilon}{D},$$

в которой ϵ — есть вес одного метра каната в килограммах, D — диаметр окружности, по которой располагается ось каната на валу.

3. Для ремней пользуются теми же формулами сопротивления, но принимают ремень за ряд веревок диаметра, равного толщине ремня. При этом сопротивление ремня получается во столько раз больше, чем у веревки соответствующей толщины, во сколько ширина ремня больше диаметра веревки. Следует однако иметь в виду, что ремни из хорошей кожи достаточно гибки, и при технических расчетах сопротивлением их жесткости обыкновенно пренебрегают.

4. Жесткость цепи происходит от взаимного трения ее звеньев при навивании и свивании цепи. Ее считают пропорциональной первой степени толщины звена, т. е. диаметра того круглого железа, из которого сделано звено. По Редтенбахеру приближенно:

$$T_4 = \kappa_3 \frac{\partial}{p} \Gamma, \text{ где } \kappa_3, \text{ в среднем, } 0,15; \partial \text{ — диаметр сечения звена.}$$

§ 32. Примеры трения. 1. Трение блоков. Рассмотрим неподвижный блок радиуса $p = 12$ см., вращающийся на горизонтальной оси, заканчивающейся цапфами диаметром $\partial = 3$ см. Блок оснащен канатом толщиной $\partial = 3$ см., поднимающим груз Γ . Требуется определить вертикальную силу D , которая требуется на свободном конце каната, чтобы удерживать груз во время под'ема.

По (197) сопротивление жесткости каната

$$T_3 = 0,13 \cdot \frac{3^2}{12} \Gamma = 0,098 \Gamma.$$

На цапфы передается нормальное давление $\Gamma + Д$, которое, для первого приближения, можно принять за

$$2\Gamma, \text{ так как } Д \text{ близко к } \Gamma.$$

Поэтому трение на поверхности цапф при $\kappa = 0,08$ будет

$$T = \kappa 2\Gamma = 0,08 \cdot 2\Gamma = 0,16\Gamma.$$

Переносим T на окружность блока, уменьшаем в отношении радиусов, т. е. берем

$$C = \frac{1,5}{12} \cdot T = \frac{1,5}{12} \cdot 0,16\Gamma = 0,020\Gamma.$$

$$\text{Сумма сопротивлений } T_в + C = 0,098\Gamma + 0,020\Gamma = 0,118\Gamma.$$

Сила двигателя должна поднять груз Γ и преодолеть сопротивление $0,118\Gamma$. Очевидно, она должна быть не меньше

$$\Gamma + 0,118\Gamma = 1,118\Gamma.$$

Итак, для под'ема груза Γ на одном блоке должно быть

$$Д \geq 1,118\Gamma.$$

Число, на которое надо умножить величину груза Γ , чтобы получить необходимую силу $Д$, называется *коэффициентом сопротивления*.

В данном случае он 1,118; вообще же обозначим его κ , так что:

$$Д \geq \kappa\Gamma.$$

Для канатов, в среднем, $\kappa = 1,12$;

Для цепей " " $\kappa = 0,05$ (198).

2. Трение рычагов. Если под действием силы C происходит равномерный под'ем груза Γ , то все силы рычага уравниваются (фиг. 130).



Фиг. 130.

При отсутствии трения условие равновесия этих сил $\Sigma M_0 = 0$ представляло бы:

$$-Cp_1 + Va + \Gamma p_2 = 0, \text{ где } B \text{ — есть собств. вес рычага.}$$

Трение в цапфах O сопротивляется движению, образуя на поверхности цапф момент того же знака, что и момент груза Γ , так что:

$$-Cp_1 + T_p + Va + \Gamma p_2 = 0.$$

А так как $T = \kappa(C + B + \Gamma)$, то:

$$C p_1 = \kappa(C + B + \Gamma) r + B a + \Gamma p_2.$$

$$\text{Отсюда } C = \frac{B a + \Gamma p_2 + \kappa r (B + \Gamma)}{p_1 - \kappa r}.$$

При равномерном опускании груза под действием силы C (удерживающей от ускоренного движения), момент трения действует в обратную сторону при тех же прежних условиях; поэтому надо изменить на обратные только знаки у κ ; будет:

$$C = \frac{B a + \Gamma p_2 - \kappa r (B + \Gamma)}{p_1 + \kappa r}.$$

3. **Ворот** (фиг. 99). Сила C при подеме груза Γ должна преодолеть трение цапф и жесткость каната. Так как в вороте происходит только навивание каната на вал, свивания же вовсе нет, то надо принять в расчет только половину жесткости, приведенной в форм. (197). Обозначая вес ворота— B , толщину каната—через δ , радиус цапфы— r и принимая направления C и Γ параллельными, получим:

$$C p_2 = \Gamma p_1 + (C + B + \Gamma) \kappa r + \frac{1}{2} \left(0,13 \frac{\delta^2}{p_1} \Gamma \right) p_1,$$

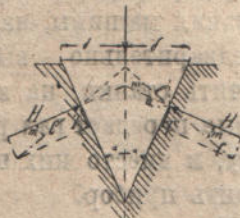
откуда

$$C = \frac{\Gamma p_1 + (B + \Gamma) \kappa r + \frac{1}{2} 0,13 \delta^2 \Gamma}{p_2 - \kappa r}.$$

Сила, необходимая для удержания груза от опускания,

$$C = \frac{\Gamma p_1 - (B + \Gamma) \kappa r - \frac{1}{2} 0,13 \delta^2 \Gamma}{p_2 + \kappa r}.$$

4. **Клин**. (фиг. 103 и 131). Средства оказывает сопротивление C проникновению в нее клина; оно не перпендикулярно к щекам клина, благодаря трению T . С нормалью сила сопротивления C образует угол трения m , с горизонтальной линией—угол $a + m$, а с вертикальной осью клина— $90^\circ - (a + m)$.



Фиг. 131.

Составляя сумму проекций на вертикальную ось, получим следующее уравнение равновесия:

$$D = 2 C \cos [90 - (a + m)] = 2 C \sin (a + m).$$

После прекращения действия силы Γ , клин стремится

двинуться обратно. Этому препятствует сила трения, которая теперь уже должна идти в противоположную сторону.

В уравнение придется ввести отрицательный угол m , и получится

$$D = 2 C \sin(a - m).$$

Такая сила нужна для удержания клина.

Если $m > a$, то D отрицательно, т. е. клин самостоятельно не выдвинется и для вытаскивания его потребуется приложить силу:

$$D = -2 C \sin(m - a).$$

Это выражается правилом: *клин держится в среде, если конус трения тупее клина.*

Клинья часто применяются в машиностроении и при постройках. Применяя их необходимо помнить, что железный клин, обычно рассчитываемый на $\kappa = 0,17 - 18$ имеет угол трения

$$m = 10^\circ \text{ и конус трения } 20^\circ.$$

Очевидно, чтобы клин держался самостоятельно надо делать его значительно острее 20° .

Деревянный, дубовый, клин при

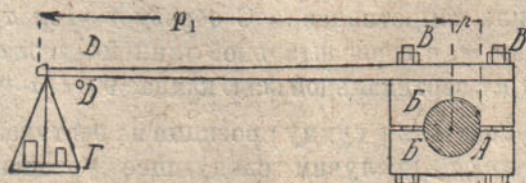
$$\kappa = 0,48 \text{ имеет угол трения}$$

$$m = 25^\circ \text{ и конус трения } 50^\circ.$$

Поэтому для надежности деревянного клинового соединения надо угол заострения клина делать значительно меньше 50° .

5. Динамометр Прони. Мощность машин можно определить посредством прибора Прони, основанного на трении цапф.

Прибор состоит из зажимов B , которыми охватывается главный вал машины A , и рычага p_1 , нагружаемого на свободном конце гирями Γ .



Фиг. 132.

Применяя динамометр Прони для исследования машины, надо предварительно выключить станки, на которые передает вал работу, и вместо них насадить прибор.

Если к валу A помощью болтов B притянуть щеки зажимов B , то при вращении

вала по часовой стрелке будет стремиться вращаться в ту же сторону и рычаг p_1 . Но его можно удержать от вращения, накладывая на площадку грузы и создавая таким образом момент, обратный моменту сил влечения на валу.

Грузов понадобится тем больше, чем сильнее мы стянем зажимы Б.

Будем стягивать зажимы постепенно и доведем их до такого состояния, при котором вал имеет обычное число оборотов, как при нормальной работе на станках; в то же время уравниваем рычаг гирями.

Тогда момент сил трения на валу равняется моменту гирь + чашки + веса рычага:

$$\Gamma p_1 = T p; \text{ откуда } T = \Gamma \frac{p_1}{p} \text{ *)}.$$

В то же время вал передает прибору тот же эффект, который прежде передавал станкам, так как работает с тем же числом оборотов. Чтобы найти этот эффект, умножим (по 176) силу T на окружности вала на скорость по этой окружности c , т. е.

$T \cdot c$.

$$\text{Получим эффект } \mathcal{E} = T \cdot c = \Gamma \frac{p_1}{p} c \dots \dots \dots (199).$$

Разделивши на 75, получаем мощность в паровых

$$\text{лошадях: } \mathcal{L} = \frac{\mathcal{E}}{75} = \frac{\Gamma}{75} \cdot \frac{p_1}{p} c \dots \dots \dots (200).$$

Таким образом, чтобы определить число паровых лошадей, развиваемых машиной, надо гири с чашкой и приведенным весом рычага разделить на 75, умножить на отношение длины рычага к радиусу вала и на скорость окружности вала.

*) Здесь под Γ подразумевается сумма веса гирь, чашки и приведенного к концу D веса рычага $DВ$, так что, если c , т. е. рычага—по середине его, а вес равняется e , то к концу D прикладывается $\frac{1}{2} e$; при этом Γ будет равно сумме весов: гири + чашка + $\frac{1}{2}$ рычага.

Но скорость выражается через число оборотов вала. Так, если вал делает 1 оборот, то любая точка окружности проходит путь $2\pi r$; при числе оборотов в минуту n , этот путь будет

$$2\pi r n.$$

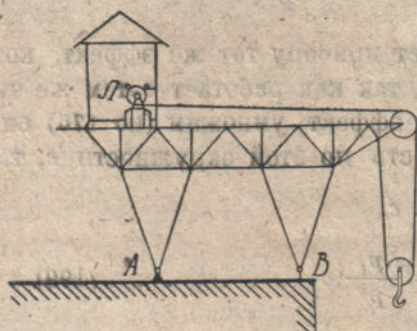
Путь в секунду, т. е. скорость s , в 60 раз меньше:

$$s = \frac{2\pi r n}{60}.$$

Подставляя в последнюю формулу, имеем:

$$L = \frac{\Gamma}{75} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot \frac{2\pi r n}{60} = \frac{\pi}{2250} \Gamma r_1 n = 0,001396 \Gamma r_1 n \quad (201).$$

Следовательно, число паровых лошадей машины равняется произведению груза, рычага, числа оборотов вала и числа $> 0,0014$.



Фиг. 133.

Задачи. 1. Определить, какова должна быть сила лебедки L , чтобы подымать груз $\Gamma = 5$ т., если диаметр каната—25 мм., диаметр цапф блока—40 мм., диаметр блока—30 см. (фиг. 133)?

2. Определить усилие каната, на которое надо рассчитать его прочность, и определить напряжение при спокой-

ном подеме.

3. Определить реакции опор A и B , принимая во внимание трение, если в A —шаровой шарнир и в B —каток на рельсе; радиус шарового шарнира 6 см., радиус катка 20 см.

Глава VIII.

Коэффициент полезного действия машин.

§ 33. **Блоки. 1. Определения.** Машина—это система взаимно связанных тел, определено и притом целесообразно превращающая энергию.

Источник энергии, которым пользуется машина, называется *двигателем* (человек, животное, ветряное или водяное колесо, паровой котел и т. д.).

Энергия двигателя, превращенная машиною в потребную форму, передается ею тем телам, которые надлежит обработать, или идет для передвижения. Ковка, штампование, разрезка, тканье и т. д. суть различные виды полезного приложения энергии машины, то к изменению формы, то к делению на части, то к нужному расположению тел (тканье). Во всех этих случаях машине приходится преодолевать соответствующее сопротивление со стороны обрабатываемых тел. Это сопротивление называется *полезным сопротивлением*, а затрачиваемая работа называется *полезной работой*.

Но есть другие сопротивления, на которые расходуется энергия, не дающая полезного результата. Таковы: сопротивление трения, сопротивление воздуха и т. д. Они называются *вредными сопротивлениями*. Работа, расходуемая на преодоление этих сопротивлений, затрачивается для нас бесполезно.

Следовательно, только часть работы полученной машиною от двигателя, возвращается нам ею в виде полезных качеств вырабатываемого продукта, остальная энергия не утилизируется.

Машина тем экономичнее, чем больше первая, полезная часть работы и чем меньше потери.

Отношение полезной работы к энергии двигателя (полной работе машины) называется *коэффициентом ее полезного действия* или *отдачей*.

$$\text{Отдача} = \frac{\text{полезная работа}}{\text{полная работа}} = \frac{n. p.}{\Theta} \dots \dots \dots (202).$$

2. **Полиспаст.** Было показано (см. форм. 198), что для одного блока с простыми цапфами, оснащенного пеньковым канатом,

$$D = \kappa \Gamma, \text{ где } \kappa = \infty 1,12 \text{ (коэф. сопротивл.)}$$

Поэтому для подвижного блока (фиг. 134-а) натяжение свободного конца D должно быть в κ раз больше, чем натяжение K неподвижно закрепленного конца каната

$$D = \kappa K \text{ или } K = \frac{D}{\kappa}.$$

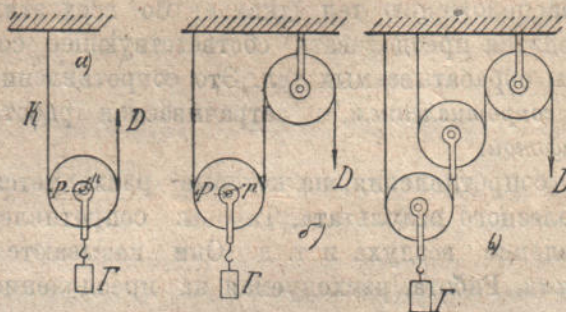
$$\text{Отсюда следует: } K + D = \Gamma, \text{ или } \frac{D}{\kappa} + D = \Gamma;$$

так что:

$$D = \frac{\Gamma}{1 + \frac{1}{\kappa}}.$$

Для фиг. б) получим таким же образом:

$$\frac{D}{\kappa} + \frac{D}{\kappa^2} = \Gamma, \text{ откуда } D = \frac{\Gamma}{\frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)}$$



Для двух подвижных и одного неподвижного блока (фиг. в) найдем:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left(\frac{D}{\kappa} + \frac{D}{\kappa^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{\kappa} \left(\frac{D}{\kappa} + \frac{D}{\kappa^2}\right) = \\ &= \frac{D}{\kappa} \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) + \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right) \right] = \frac{D}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^2. \text{ Откуда} \\ D &= \frac{\Gamma}{\frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^2}. \end{aligned}$$

Вообще для полиспаста типа фиг. 134 при числе подвижных блоков n и одном неподвижном блоке:

$$D = \frac{\Gamma}{\frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^n}.$$

В идеальных условиях было получено (форм. 149):

$$D = \frac{\Gamma}{2^n}.$$

Следовательно, отдача:

$$\text{Отд.} = \frac{\Gamma}{2^n} : \frac{\Gamma}{\frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^n} = \frac{1 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^n}{2^n} \dots (203).$$

Например, при $\kappa = 1,12$ и $n = 3$, отдача

$$0,76,$$

т. е.: около $1/4$ силы двигателя пропадает бесполезно.

Тали. В обыкновенных тали (фиг. 97) натяжения канатов 1, 2, 3, 4 будут соответственно

$$\frac{D}{\kappa}, \quad \frac{D}{\kappa^2}, \quad \frac{D}{\kappa^3}.$$

А так как груз Γ должен быть равен их сумме, то:

$$D\left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^3} + \dots + \frac{1}{\kappa^6}\right) = \Gamma,$$

$$\text{или } D \frac{1}{\kappa^6} (1 + \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^5) = \Gamma \dots (204).$$

Обозначим выражение в скобках буквою Σ ; тогда

$$\kappa + \kappa^2 + \kappa^3 + \dots + \kappa^5 = \kappa \Sigma.$$

Вычитая отсюда

$$1 + \kappa + \kappa^2 + \dots + \kappa^5 = \Sigma,$$

получим

$$\kappa^6 - 1 = \Sigma(\kappa - 1),$$

или

$$\frac{\kappa^6 - 1}{\kappa - 1} = \Sigma.$$

Подставляя это значение Σ в последнее выражение для груза (204), найдем:

$$D \frac{1}{\kappa^6} \cdot \frac{\kappa^6 - 1}{\kappa - 1} = \Gamma; \text{ откуда } D = \frac{\Gamma(\kappa - 1)\kappa^6}{\kappa^6 - 1}.$$

При n блоках в коробках тали получилось бы:

$$D = \Gamma \frac{(\kappa - 1)\kappa^n}{\kappa^n - 1}.$$

При идеальных условиях в § 22,2 было получено

$$D = \frac{\Gamma}{n} \text{ (см. форм. 150).}$$

Поэтому коэффициент полезного действия будет:

$$\text{отд.} = \frac{\Gamma}{n} : \Gamma \frac{(\kappa - 1)\kappa^n}{\kappa^n - 1} = \frac{\kappa^n - 1}{n \cdot \kappa^n (\kappa - 1)} \dots (205).$$

Так, для шести блсков в обоих коробках и $\kappa = 1,12$, $\text{отд.} = 0,69$.

Применяя таким же образом формулы (203) и (205) к разным числам блоков, получим следующую таблицу коэффициентов отдачи:

	Полиспасть	Тали*)
1 подвижной блок	0,845	0,842
2 подвижных блока	0,80	0,76
3 " "	0,76	0,69
4 " "	0,72	0,62

4. Дифференциальный блок (фиг. 98). Обозначим через Y усилие нитей, поддерживающих подвижной блок с грузом Γ ; тогда условие равновесия этого блока:

$$Y + \kappa Y = \Gamma \text{ переписывается: } Y = \frac{\Gamma}{1 + \kappa} \dots (206).$$

Для верхних блоков слева имеем момент сил C и Y :

$$C p_1 + Y p_2, \text{ это силы поднимающие.}$$

Момент сил сопротивления справа $\kappa Y p_1$.

Так как момент первых сил должен быть в κ раз больше момента вторых, то:

$$C p_1 + Y p_2 = \kappa (Y p_1).$$

$$\text{Отсюда } C = Y \left(\frac{\kappa^2 p_1 - p_2}{p_1} \right) = Y \left(\kappa^2 - \frac{p_2}{p_1} \right).$$

А если для Y подставим его значение из (206):

$$C = \Gamma \frac{\kappa^2 - \frac{p_2}{p_1}}{1 + \kappa} \dots (207).$$

Прежде в идеальных условиях было получено:

$$C = \frac{\Gamma}{2} \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Следовательно, коэффициент отдачи:

$$\text{Отд.} = \frac{(1 + \kappa) \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \right)}{2 \left(\kappa^2 - \frac{p_2}{p_1} \right)} \dots (208)$$

Обыкновенно дифференциальный блок оснащается цепью и радиусы его p_1 и p_2 отличаются $0/0$ на 10.

Так что, если принять $\kappa = 1,05$ и $p_2 : p_1 = 9 : 10$, то получим:

$$\text{Отд.} = 0,51.$$

*) Для тали здесь приведено число блоков в 1 коробке; общее же число блоков механизма вдвое больше.

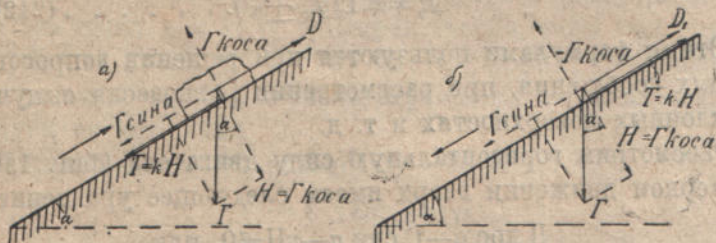
При отношении $p_2:p_1=11:12$:

$$\text{отд.} = 0,46.$$

Отсюда следует, во-первых, что около половины энергии здесь теряется бесполезно; во-вторых—чем выгоднее дифференциальный блок в идеальных условиях (чем ближе отношение радиусов к единице), тем больше потери. Следовательно, есть некоторый предел, дальше которого не следует идти, выигрывая в силе, чтобы не слишком много растратить энергии.

§ 34. **Винты. 1. Наклонная плоскость.** Если движение вверх (фиг. 135) вызывается силой D , параллельной плоскости, и происходит равномерно, то силы уравниваются; при этом движущей силе D приходится преодолевать, кроме составляющей груза— $\Gamma \sin a$, еще и силу трения $T=\kappa N=\kappa \Gamma \cos a$:

$$D = \Gamma \sin a + \kappa \Gamma \cos a \dots \dots \dots (209).$$



Фиг. 135.

Подставляя из (188) вместо κ его геометрическое значение танг t , перепишем это уравнение равновесия:

$$D = \Gamma \left(\sin a + \frac{\sin t}{\cos t} \cos a \right) = \Gamma \frac{\sin a \cos t + \cos a \sin t}{\cos t} = \Gamma \frac{\sin (a+t)}{\cos t} \dots \dots \dots (210).$$

Если под влиянием такой же силы D_1 тело движется равномерно вниз, то трение идет в сторону силы D_1 , и тогда уравнение равновесия будет:

$$D_1 + \kappa N - \Gamma \sin a = 0, \text{ или } D_1 = \Gamma \sin a - \kappa \Gamma \cos a.$$

Оно отличается от предыдущего (209) только знаком; поэтому в результате, вместо (210), получится

$$D_1 = \Gamma \frac{\sin (a-t)}{\cos t}.$$

Объединяя обе формулы: для движения вверх и вниз, получим:

$$D = \Gamma \frac{\sin(a+m)}{\cos m} \dots \dots \dots (211).$$

Силу D можно выразить еще через коэффициент трения. Вынесем за скобку $\cos a$ в (209):

$$D = \Gamma \cos a (\tan g. a \pm \kappa).$$

При малых углах наклона, обыкновенно встречающихся в конструктивных деталях, $\cos a$ близок к 1, и можно принять:

$$D = \infty \Gamma (\tan g. a \pm \kappa).$$

Тангенс угла наклона плоскости называют еще уклоном ее; обозначим его y_{κ} . Тогда.

$$D = \infty \Gamma (y_{\kappa} \pm \kappa) \dots \dots \dots (212).$$

Этими формулами пользуются при решении вопросов тяги на путях сообщения, при рассмотрении равновесия сыпучих тел на наклонных поверхностях и т. д.

Рассмотрим горизонтальную силу двигателя (фиг. 136). При равномерном движении вверх имеем следующее уравнение:

$$D \cos a - \Gamma \sin a - \kappa H = 0, \text{ или}$$

$$D \cos a = \Gamma \sin a + \kappa (D \sin a + \Gamma \cos a).$$

Отсюда:

$$D = \Gamma \frac{\sin a + \kappa \cos a}{\cos a - \kappa \sin a}.$$

Разделим числителя и знаменателя на $\cos a$ и вместо κ подставим $\tan g. m$:

$$D = \Gamma \frac{\tan g. a + \tan g. m}{1 - \tan g. a \tan g. m} = \Gamma \tan g. (a+m) \dots (213).$$

Для равномерного движения вниз найдем соответственно:

$$D_1 = \Gamma \tan g. (a-m).$$

Полученные формулы показывают, какими силами D следует действовать, чтобы поддерживать движение; они же указывают и те пределы для действующих сил, которые не нарушают покоя тела на наклонной плоскости, а именно: силы, большие

чем D_1 и меньшие D , не производят никакого движения, ни вверх, ни вниз:



Фиг. 136.

$$\Gamma \tan \alpha (a - m) < C < \Gamma \tan \alpha (a + m).$$

Этими результатами постоянно приходится пользоваться, применяя винт.

2. **Винт.** Как известно из теории винта, полученные формулы применяются к нему непосредственно, если под грузом Γ подразумевать продольную силу винта, а под D — поперечную, горизонтальную силу C , которая передается через нарезку гайкой путем ее вращения.

Умножая обе части равенства

$$C = \Gamma \tan \alpha (a \pm m)$$

на средний радиус винтовой нарезки, получим равновесие моментов

$$C r = \Gamma r \tan \alpha (a \pm m).$$

Момент $C r$ сил, действующих в нарезке между винтом и гайкой, заменяется любым эквивалентным моментом, приложенным к рукоятке радиуса r_1 , например, как на фиг. (106). Тогда

$$D r_1 = \Gamma r \tan \alpha (a \pm m) \quad *) \dots \dots \dots (214).$$

Прежде в идеальных условиях было получено (161).

$$D r_1 = \Gamma \frac{m}{2\pi} = \Gamma r \tan \alpha a.$$

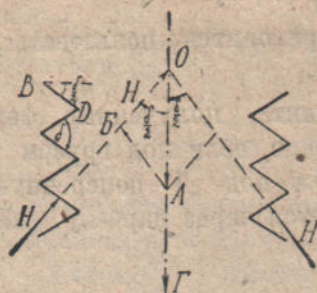
Поэтому коэффициент полезного действия

$$\text{отд.} = \Gamma r \tan \alpha a : \Gamma r \tan \alpha (a \pm m) = \frac{\tan \alpha a}{\tan \alpha (a \pm m)} \dots (215).$$

*) Знак + берем тогда, когда продольная сила винта противоположна его движению (фиг. 136-а); когда же она идет в сторону движения, — берем минусом (фиг. б).

У винта с треугольной нарезкой (фиг. 137) давление нормально к нижней поверхности витков. Считая, по предыдущему, что давление равномерно распределяется по всей винтовой линии, обозначим равнодействующую половины хода через H . Очевидно, 2 силы H для смежных половин хода винта и осевая сила винта Γ находятся в одной плоскости (фиг. 137). Так как они уравновешиваются, то, построивши треугольник равновесия, находим:

$$\frac{1}{2} \Gamma = H \cdot \cos \frac{\delta}{2}, \text{ или } H = \frac{\Gamma}{2 \cos \frac{\delta}{2}};$$



Фиг. 137.

где δ — угол острия нарезки; $\frac{1}{2} \delta$ — угол наклона острия к горизонтальной линии, равный углу между направлением H и осью винта OA , ибо стороны углов: B и AOB — взаимно перпендикулярны.

Для движения винта необходимо преодолеть силу трения:

$$T = 2\kappa H = \frac{2\kappa\Gamma}{2 \cos \frac{\delta}{2}} = \frac{\kappa}{\cos \frac{\delta}{2}} \cdot \Gamma = \kappa' \Gamma,$$

т. е. силу в $\frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}}$ большую, чем для прямоугольной нарезки.

Поэтому в формуле (214) для момента вращающих сил.

$$Dp_1 = \Gamma r \tan(\alpha + m) = \Gamma r \frac{\tan \alpha + \tan m}{1 + \tan \alpha \tan m} \dots (216),$$

вместо коэффициента трения $\tan m = \kappa$, надо подставить $\kappa' = \frac{\kappa}{\cos \frac{\delta}{2}}$,

ИЛИ $\frac{\tan m}{\cos \frac{\delta}{2}}$

Для винтов Витворта $\delta = 55^\circ$, и кос $\frac{\delta}{2} = 0,887$; следовательно

$$\kappa' = \frac{\kappa}{0,887} = 1,13\kappa = 1,13 \text{ танг } m.$$

Подставив это значение, получим для винтов с треугольной нарезкой

$$Dp_1 = Gr \frac{\text{танг } a + 1,13 \text{ танг } m}{1 + \text{танг } a 1,13 \text{ танг } m} \dots (217).$$

Таким образом, трение в винтах с треугольной нарезкой значительно больше, чем при прямоугольной нарезке; поэтому винты эти редко употребляются для производства движения. Назначение их—скреплять части машин.

3. Червячный механизм по существу есть винтовой механизм; поэтому, как у винта,

$$\begin{aligned} \text{отд.} &= \frac{\text{танг } a}{\text{танг } (a + m)} = \frac{\text{танг } a(1 - \text{танг } a \text{ танг } m)}{\text{танг } a + \text{танг } m} = \\ &= \frac{y_\kappa (1 - y_\kappa \kappa)}{y_\kappa + \kappa} = \frac{1 - y_\kappa}{1 + \frac{\kappa}{y}} \dots (218). \end{aligned}$$

При неособенно питательной смазке и уходе за червячным механизмом на открытом воздухе (например, в орудийных затворах) коэффициент трения принимают

$$\kappa = \text{танг } m = 0,16.$$

Если принять уклон винтовой линии

$$y_\kappa = \text{танг } a = 0,1, \text{ то получим:}$$

$$\text{отд.} = \frac{1 - 0,1 \cdot 0,16}{1 + \frac{0,16}{0,1}} = 0,378.$$

В действительности отдача еще меньше, так как потери происходят и в цапфах червячного вала, главным образом, от давления вдоль оси червяка. Если принять во внимание эти потери, то коэффициент полезного действия еще понизится.

Обыкновенно, для червячных механизмов считают

$$\text{отд.} = 0,25.$$

Таким образом, в червячном механизме теряется 75% энергии.

§ 35. Гидравлические и другие машины. 1. Гидравлический пресс (фиг. 69). Выигрыш в силе гидравлического пресса, при идеальных условиях, равняется отношению квадратов диаметров поршней: насоса и пресса. Так что, если диаметры обозначим ∂ и ∂_1 , а силы соответственно: D и D_1 , то по (98) имеем:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{\partial_1^2}{\partial^2} \dots \dots \dots (219).$$

Не касаясь трения в рычажной передаче, между доской пресса и колоннами и проч., посмотрим, каково влияние трения собственно в гидравлической машине.

Чтобы удержать рабочую жидкость между поршнем и стенками цилиндра, в гидравлических машинах применяют кольцевые прокладки (см. деталь фигуры 69). Это П-образно согнутое кожаное кольцо, которое под давлением жидкости одной стороной прижимается к поршню, а другой—к внутренней стенке цилиндра.

Создается трение металла по коже, которое уменьшает силу прессования.

Обозначим высоту прокладки n_1 , давление жидкости в атмосферах— a ; тогда сила трения на кольцо

$$T_1 = \kappa H = \kappa a \cdot 2\pi \frac{\partial_1}{2} n_1.$$

Сила прессования

$$T = \frac{\pi \partial_1^2}{4} \cdot a - \kappa a \pi \partial_1 n_1.$$

Для насоса, которому приходится преодолевать силу трения дополнительно, соответственно получим:

$$A = D + T = \frac{\pi \partial^2}{4} a + \kappa a \pi \partial n.$$

Теперь отношение между силами изменилось, и вместо (219) будет

$$\frac{T}{A} = \frac{\partial_1^2}{\partial^2} \cdot \frac{1 - 4\kappa \frac{n_1}{\partial_1}}{1 + 4\kappa \frac{n}{\partial}} \dots \dots \dots (220).$$

Сравнивая (219) и (220), находим коэффициент полезного действия

$$\text{отд.} = \frac{1 - 4\kappa \frac{n_1}{\partial_1}}{1 + 4\kappa \frac{n}{\partial}} \dots \dots \dots (221).$$

Например, если высота кожаного кольца n составляет $\frac{1}{5}$ диаметра соответствующего цилиндра, то при $\kappa=0,12$ получим:

$$\text{отд.} = \frac{1 - 4 \cdot 0,12 \cdot \frac{1}{5}}{1 + 4 \cdot 0,12 \cdot \frac{1}{5}} = 0,825. \dots \dots (222).$$

2. **Заключение.** Обзор полученных коэффициентов полезного действия приводит к выводу, что даже простыми машинами из твердых тел механическая работа передается с большими потерями. Гидравлические машины отдадут больше, но значительно меньше того, что получено нами в предыдущем разделе этого параграфа, так как здесь не приняты в расчет другие потери.

Если, рассматривая паровую машину, сравнить энергию, которая получается от сжигания топлива в топке парового котла, с той энергией, которая получается от паровой машины, как двигателя на фабриках и заводах, и если всю машину рассматривать, как систему простых машин, включая и двигатель, то получим еще меньшую отдачу и тем меньшую, чем сложнее машина. В лучшем случае это отношение окажется лишь 0,1—0,12.

Данные о других машинах приведены в приложении VI.

В 90-х годах прошлого века Дизель усовершенствовал нефтяной двигатель, достигнув коэффициента полезного действия

$$0,25, —$$

и двигателя Дизеля получили большое распространение.

Несмотря на это машинами пользуются, и бывают случаи, когда предпочитают машину с меньшим коэффициентом полезного действия, если она обладает рядом других преимуществ, ценных в практическом отношении.

§ 36. Численные примеры исследования машин. 1. Расчет винтового под'емника. Винт, имеющий шаг

$$u=1 \text{ см. и средний радиус } p=2,4 \text{ см.,}$$

входит в неподвижную горизонтальную гайку и служит для под'ема груза Г (фиг. 106). На винт насажена рукоятка (одно-

плечий рычаг) длиной $p_1=40$ см., к которой прикладывается сила рабочего $D=32$ кг. (около 2 пуд).

Какой груз может быть поднят этим винтом и каков коэффициент полезного действия винта?

а) Наибольший подымаемый груз определяем из уравнения моментов по форм. (214):

$$Dp_1 = Gr \operatorname{танг}(\alpha + m) \dots \dots \dots (223).$$

Угол α находим по шагу u и средней окружности винта:

$$\operatorname{танг} \alpha = \frac{u}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi \cdot 2,4} = 0,0663; \text{ откуда } \alpha = 3^\circ 47,5'.$$

Принимая коэффициент трения

$$k = 0,08 = \operatorname{танг} m, \text{ находим } m = 4^\circ 34,5'.$$

$$\operatorname{танг}(\alpha + m) = \operatorname{танг}(3^\circ 47,5' + 4^\circ 34,5') = \operatorname{танг} 8^\circ 22' = 0,147.$$

Подставим численные значения величин в форм. (223):

$$32 \cdot 40 = G \cdot 2,4 \cdot 0,147;$$

тогда получим: $G = \frac{32 \cdot 40}{2,4 \cdot 0,147} = 3628$ кг. (22 пуд.).

б) Коэффициент полезного действия определим, сравнивая найденную под'емную силу с той, которая получилась бы в идеальных условиях.

Если пренебречь трением, то уравнение равновесия будет:

$$32 \cdot 40 = G \cdot 2,4 \cdot \operatorname{танг} \alpha, \text{ где } \operatorname{танг} \alpha = 0,0663.$$

Под'емная сила винта $G = \frac{32 \cdot 40}{2,4 \cdot 0,0663} = 8049$ кг. ($\infty 50$ пуд.).

Коэффициент полезного действия:

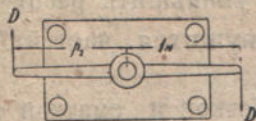
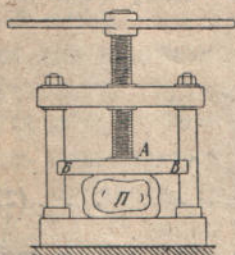
$$\text{отд.} = \frac{3628}{8044} = 0,45.$$

2. Винтовой пресс (фиг. 138). При помощи винтового пресса требуется производить прессование силою P равной 12 тон.

Ход винта $u=1,6$ см.; средний радиус винта $r=3,6$ см.

Длина верхнего рычага $2p_2=2$ м.

Определить, какую силою D требуется действовать на рукоятки?



Фиг. 138.

По форм. (190), при завинчивании винта, когда развивается осевая сила Π , — в нижней цапфе A возникает момент сил трения

$$M = \frac{1}{2} \kappa \Pi r_1,$$

который необходимо преодолеть моменту движущих сил D . Кроме того, требуется преодолеть общее сопротивление винта Πr танг $(a+m)^*$. Получаем уравнение:

$$D \cdot 2r_2 = \Pi \left[r \tan(a+m) + \frac{1}{2} \kappa r_1 \right],$$

в котором: $\tan a = \frac{u}{2\pi p} = \frac{1,6}{22,62} = 0,07$, или $a = 4^\circ$.

$\kappa = \tan m = 0,15$, или $m = 8^\circ 30'$

$a+m = 4^\circ + 8^\circ 30' = 12^\circ 30'$ и

$\tan(a+m) = 0,2217$.

Следовательно:

$$2D r_2 = 12000(3,6 \cdot 0,2217 + \frac{1}{2} \cdot 0,15 \cdot 3).$$

Отсюда $D = 61,4$ кг.

В идеальных условиях имеем

$$D 2r_2 = \Pi r \tan a; \text{ откуда } D = \frac{12000 \cdot 3,6 \cdot 0,07}{200} = 15,1 \text{ кг.}$$

Следовательно, коэффициент полезного действия:

$$\text{отд.} = \frac{15,1}{61,4} = \infty^1/4.$$

§ 37. Общее уравнение машины. 1. Закон сохранения энергии говорит, что работа двигателя не пропадает, хотя мы используем в наших целях и не всю его энергию. Неутилизуемая часть энергии тратится на трение, удары, сопротивление среды, вообще на „вредные“ сопротивления, и превращается в теплоту. Некоторая часть этой же энергии идет на работу веса частей машины, действующих при поднятии, как сопротивление, а при опускании, как движущая сила. Обозначим эту часть B_v . Наконец, часть энергии двигателя расходуется на сообщение живой

*) Есть еще трение направляющих вилок доски B_B о поверхность колоннок, но оно мало, и им пренебрегают.

силы движущимся частям машины, а именно: если обозначить массы отдельных частей машины m , а начальную и конечную скорость их c_1 и c_2 , то расходуется:

$$\Sigma \frac{mc_2^2}{2} - \Sigma \frac{mc_1^2}{2}.$$

Таким образом, можно написать

$$P_{\partial} = P_n + P_v + Bv + \Sigma \frac{mc_2^2}{2} - \Sigma \frac{mc_1^2}{2} + T \dots \dots \dots (224);$$

т. е.: работа двигателя равна сумме работ полезных и вредных сопротивлений плюс или минус работа веса движущихся частей машины, плюс приращение живой силы тех же частей плюс тепловая энергия.

Отсюда следует, что для получения возможно большей полезной работы P_n , надо возможно более уменьшить работу P_v вредных сопротивлений, работу веса движущихся частей Bv и изменение живой силы.

Это достигается: 1) тщательной обработкой и смазкой трущихся поверхностей; 2) достижением равномерности и плавности хода машины, для чего колебательные движения заменяют вращательными; 3) уменьшением скоростей движения, связанных, как с ударами и сотрясениями, так и с сопротивлением среды.

Обыкновенно, действия машины периодичны, так что машина через некоторое время возвращается в то состояние, в котором находилась первоначально. Поэтому работа веса будет нулем (см. § 25,2), и приращение живых сил—будет также нулем. Уравнение машины упрощается:

$$P = P_n + P_v \dots \dots \dots (225).$$

Работа двигателя равна сумме работ всех сопротивлений: полезных и вредных.

Кроме того, следует прибавить расход на тепловую энергию.

2. Вечный двигатель. Закон сохранения энергии говорит, что энергия не может сама собою создаваться и исчезать. Если мы желаем производить какую-нибудь работу машиною, то должны сообщить этой машине энергию извне. Не сообщая постоянно энергии, мы не получим от двигателя постоянной работы.

Можно подумать, что сила тяжести представляет исключение, так как под ее влиянием части машин сами собою опуска-

ются и производят работу, которая равна произведению веса на опускание центра его тяжести. Но работа тяжести есть ограниченный источник энергии и, если им привести в движение станки или машины даже на холостом ходу, то он быстро израсходуется на вредные сопротивления: трение, сопротивление воздуха и т. п. Этот запас еще быстрее истощится, если заставить механизмы преодолевать полезные сопротивления, например, сверлить, строгать.

Когда же запас энергии истощится, машина остановится. Для приведение ее в движение придется сообщить ей толчки извне. Следовательно, постоянная работа машины происходит вообще от постоянного снабжения энергиею извне. Без этого постоянное движение невозможно.

Между тем, находятся мечтатели, забывающие эту истину, и пытающиеся придумать такие механизмы, которые вечно работают, не нуждаясь во внешнем источнике энергии. Их механизмы называются Перпетуум мобиле (Perpetuum mobile)—вечные двигатели. Нам теперь ясно, что вечными двигателями они могут быть только в мечтах.

Главнейшие формулы машиноведения.

- Рычаги.* Чувствительность рычага $a = k : Kc$. . . (135).
Блоки. Одним подвижным блоком выигрывается сила вдвое. Полиспастом при n подвижных блоках—в 2^n раз. (149).
Тали при n блоках в обеих коробках—в n раз. . . (150).
Дифференциальным блоком—в $2p_1 : (p_1 - p_2)$ раз . . (151).
Воротом выигрывается сила в $p_2 : p_1$ раз (152).
Дифференциальным воротом—в $2p : (p_2 - p_1)$ раз. . (153).
Лебедкой—в $P_1 P_2 P_3 : p_1 p_2 p_3$ раз (154).
Клином—в $o : v$ раз (158).
Винт. Шаг винта $u = 2\pi r \tan a$ (159).
Винтом выигрывается сила в $2\pi r : u$ раз (160).
При действии на рукоятку длиной p_1 выигрыш составляет $2\pi p_1 : u$ (161).
Червячным механизмом выигрывается сила в $2\pi p_1 p_3 : u p_4$ раз (162).
Дифференциальным винтом—в $2\pi p_1 : (u_2 - u_1)$ раз. (163).
Работа $P = Sn \cos u$ (166).

Работа силы тяжести равна грузу (весу), умноженному на понижение центра тяжести: $P = Gn$ (168).

Работа в осях координат $P = nx \Sigma X + ny \Sigma Y + nz \Sigma Z$. . . (174),

Мощность, или эффект $\mathcal{E} = Cn : v = Cc$. . . (175 и 176).

Паровая лошадь НР, или PS, или ПЛ = 75 кг.м./сек. . (177).

Число паровых лошадей $L = Cc : 75$ (178).

Живая сила $ЖС = 1/2 m.c^2$ (183).

Приращение живой силы равно произведенной работе:

$$\mathcal{E}P = пЖС \quad (185).$$

Трение. Сила трения при скольжении $T_1 = \kappa_1 H$. . (187),

Момент сил трения в подпятнике

$$M = 2/3 \kappa_1 H r, \text{ или } 1/2 \kappa_1 H r \quad (189 \text{ и } 190).$$

Сила трения в подшипниках $\kappa_1 H r : n$ (192).

Сила трения при катании $T_2 = \kappa_2 H : p$ (193).

При огибании канатом цилиндра усилие ведущей части в *ека* раз больше, чем у ведомой (195).

Сила жесткости каната $T_3 = \kappa_3 \Gamma : p = 0,13 \Gamma \partial^2 : p =$

$$= 0,04 \Gamma v : D \quad (197).$$

Коэффициент сопротивления блоков $\kappa = 1,12 - 1,05$. (198).

Мощность определяется динамометром Прони по формуле

$$L = 0,0014 \Gamma p_1 v \quad (201).$$

Коэффициент полезного действия: *отдача* $= \frac{n.p.}{\mathcal{E}}$. . (202).

Полиспафта *отд.* $= \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^n : \kappa 2^n$ (203).

Тали *отд.* $= (\kappa^n - 1) : n \kappa^n (\kappa - 1)$ (205).

Дифференциального блока *отд.* $= (1 + \kappa) \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) : 2 \left(\kappa^2 - \frac{p_2}{p_1}\right)$. (208).

При равномерном движении по наклонной плоскости сила двигателя $D = \Gamma \sin(a \pm m) : \cos m$ (211),

или: $D = \Gamma \cos a (\tan a \pm \kappa) = \infty \Gamma (\tan a \pm \kappa) \infty \Gamma (y_{\kappa} \pm \kappa)$. (212).

Сила, параллельная основанию $D = \Gamma \tan(a \pm m)$. (213).

Отдача винта: *отд.* $= \tan a : \tan(a \pm m)$ (215).

Отдача червячного механизма $(1 - y_{\kappa}) : (1 + \kappa : y)$. (218).

Отдача гидравлич. прессы $(1 - 4\kappa n_1 : \partial_1) : (1 + 4\kappa n : \partial)$. (221).

Общее уравнение машины

$$P = P_n + P_v \pm Bv + \Sigma \frac{m c_2^2}{2} - \Sigma \frac{m c_1^2}{2} + T \quad (224),$$

$$\text{или } P = P_n + P_v \quad (225).$$