Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут енергетики, автоматики та водного господарства
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій

04-03-369М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Автоматизація та оптимальне керування технологічними процесами» (частина 1) для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-методичною радою з якості ННІ ЕАВГ
Протокол № 1 від 24.09.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Автоматизація та оптимальне керування технологічними процесами» (частина 1) для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Матус С. К., Клепач М. І. – Рівне : НУВГП, 2024. – 38 с.

Укладачі:
Матус С. К., к.т.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій;

Клепач М. І., к.ф.-м.н., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій;

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій

Керівник групи забезпечення спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка»:
Рудик А. В., д.т.н., професор кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій

Зміст

Лабораторна робота 1. Дослідження керованості і спостережуваності систем керування

1.1 Мета роботи

Навчитись проводити аналіз керованості та спостережуваності систем керування

1.2 Теоретичні відомості

При використанні методу простору станів як одного із ефективних методів аналізу та синтезу автоматичних систем керування необхідно враховувати певні її властивості. Зокрема, необхідно, щоб лінійні системи керування задовольняли умови керованості і спостережуваності.

Під керованістю розуміють таку властивість системи, коли під дією керувального впливу за скінченний проміжок часу її можна перевести з будь-якого стану у початок координат.

Спостережуваність – це властивість системи, що дозволяє шляхом вимірювання її вихідних координат протягом скінченного проміжку часу при заданому вхідному впливі визначити її початковий стан $X\left(t_0\right)$. Вимірювання координат і спостереження за вихідним сигналом здійснюється на проміжку часу $\left[t_0, t_0+T\right]$.

Отже, перш ніж проектувати структуру і розраховувати параметри пристрою керування, необхідно дослідити об'єкт керування на керованість та спостережуваність.

Припустимо, об'єкт керування (ОК) має m входів, r виходів та n змінних стану (рис. 1.1)

Рис. 1.1 Загальна схема об'єкта керування

Лінійна модель такого об'єкта в нормальній формі буде мати вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + ... + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + ... + b_{2m}u_m, \\ .... \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + ... + b_{nm}u_m \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &x_1(0) = x_{10}; \\ &x_2(0) = x_{20}; \\ &.................... \\ &x_n(0) = x_{n0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n + b_{11}u_1 + ... + b_{1m}u_m, \\ .... \\ y_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + ... + c_{rn}x_n + b_{r1}u_1 + ... + b_{rm}u_m \end{cases} \quad (1.3)$$

У матричній формі

$$\begin{aligned} &\dot{X} = AX + BU, \\ &Y = CX + DU, \\ &X(0) = X_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

де X - вектор змінних стану (n), Y - вектор вихідного сигналу (r), U - вектор керування (m), A - матриця параметрів об’єкта ($n \times n$), B - матриця керування ($n \times m$), C - матриця спостереження ($r \times n$), D - матриця обходу ($r \times m$).

Приклад. Дано лінійну модель у нормальній формі, тобто

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 + 2x_2 - u_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_3 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - u_1 + 3u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + x_3 + u_1 \end{cases}$$

Запишемо її в матричній формі

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

Критерій керованості. Задано систему *n*-го порядку

$$\begin{aligned}\dot{X}&=AX+BU\\Y&=CX+DU\end{aligned}\tag{1.5}$$

Для її дослідження на керованість запишемо матрицю керованості, а саме

$$G=\left(B\ \ AB\ \ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B\right)$$

Система буде повністю керованою, якщо ранг матриці G дорівнює n.

Отже, мають місце наступні твердження:

- коли ранг матриці G дорівнює n, то система повністю керована;

- якщо ранг матриці G дорівнює *0*, то система некерована;

- коли $0<rang\,G<n$, то система частково керована.

Рангом матриці називається число її лінійно незалежних рядків або стовпців. У квадратній матриці порядку n ранг дорівнює n, коли її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det G\neq 0\ \Rightarrow rang\,G=n$.

Приклад. Дослідити на керованість систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=5x_1+2x_2-u_1\\\dot{x}_2=3x_1+4x_3+2u_2\\\dot{x}_3=x_2-u_1+3u_2\\y=x_1\end{cases}$$

Розв'язання. У цій системі

$$n=3\quad m=2\quad A=\begin{pmatrix}5&2&0\\3&0&4\\0&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\\-1&3\end{pmatrix}$$

Отже, для цієї задачі матриця керованості $G=\left(B\ \ AB\ \ A^2B\right)$.

Обчислимо послідовно її складові, а саме:

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -7 & 12\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^2B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -7 & 12\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-39 & 44\\ -15 & 20\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

Запишемо матрицю G, тобто

$$G=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -5 & 4 & -39 & 44\\ 0 & 2 & -7 & 12 & -15 & 20\\ -1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

Обчислимо ранг матриці G

$$\det G=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -5\\ 0 & 2 & -7\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix}=-10-21=-31\neq 0,$$

$rang\,G=3$, отже, можна зробити висновок, що система повністю керована. Аналіз зручно проводити в середовищі Matlab:

```
Co = ctrb(A,B)
```

Co = [B AB A^2B ... $A^{n-1}B$]

```
>> A=[5 2 0;3 0 4;0 1 0]
A =
     5     2     0
     3     0     4
     0     1     0

>> B=[-1 0;0 2; -1 3]
B =
    -1     0
     0     2
    -1     3

>> G=ctrb(A,B)
```

```
G =

    -1      0     -5      4    -39     44
     0      2     -7     12    -15     20
    -1      3      0      2     -7     12

>> rank(G)
ans =
     3
```

Спостережуваність як властивість системи дозволяє шляхом вимірювання вихідних координат протягом скінченного проміжку часу при заданому вхідному впливі визначити її початковий стан $X(t_0)$. Вимірювання та спостереження за вихідним сигналом виконується протягом проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$.

Нехай дано систему порядку n

$$\begin{gathered} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX + DU, \\ X(0) = X_0 \end{gathered} \qquad (1.6)$$

Для її дослідження на спостережуваність використовують так звану матрицю спостережуваності

$$H = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \left(A^T\right)^2 C^T & \ldots & \left(A^T\right)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$$

Система (1.6) є повністю спостережною, якщо ранг матриці спостережуваності H дорівнює n.

Тобто, якщо $rang\, H = n$, то система повністю спостережувана; якщо $rang\, H = 0$, то система неспостережувана; якщо $0 < rang\, H < n$, то система частково спостережувана.

Приклад. Дослідити на спостережуваність і керованість систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 + u \end{cases}$$

Розв'язання.

У цій системі $n = 2,\ m = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Матриця керованості $G = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$. Обчислимо її складові

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Зпишемо матрицю $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, та обчислимо її визначник $\det G = 1 \neq 0$, тоді $rangG = 2$, тобто система повністю керована.

Перевіряємо систему на спостережуваність, для цього запишемо матрицю спостережуваності $H = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T \end{pmatrix}$.

Обчислимо

$$A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

отже, матриця $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Визначимо ранг матриці, для чого обчислимо її визначник $\det H = -1 \neq 0$, отже $rang\, H = 2$ – система є повністю спостережною.

```
obsv(A,C)
Ob = obsv(sys)
```

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

```
>> A=[0 1;1 0]
A =
     0     1
     1     0
```

```
>> C=[0 1]
C =

     0     1

>> H=obsv(A,C)
H =

     0     1
     1     0

>> rank(H)
ans =

     2
```

1.3 План роботи

Дослідити на керованість і спостережуваність систему

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 \\ y = 2x_1 + u \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + u \\ y = x_1 + u \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - u \\ \dot{x}_2 = 5x_2 \\ y = 3x_2 + u \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - u \\ \dot{x}_2 = 7x_2 \\ y = x_1 + u \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 4x_2 \\ y = x_2 - u \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ y = u \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ y = x_2 + u \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = 6x_2 + u \end{cases}$

1.4 Контрольні запитання

1. Які є основні характеристичні властивості системи керування?
2. Що розуміють під керованістю системи?
3. Як обчислити ранг матриці?
4. Що розуміють під спостережуваністю системи?
5. Як визначають керованість і спостережуваність систем?

Лабораторна робота 2. Побудова моделі системи модального керування

2.1 Мета роботи

Вивчення методики синтезу модального регулятора

2.2 Теоретичні відомості

При аналізі та синтезі систем у просторі станів всі змінні, що характеризують систему або мають до неї пряме відношення, діляться на вхідні змінні, які являють собою керуючі або збурюючи впливи u_i, вихідні змінні y_i, що представляють інтерес для дослідника та проміжні змінні x_i або змінні стану, які визначають динамічну поведінку досліджуваної системи.

В основі цієї форми математичного опису лежить подання диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші, яке доповнюється рівняннями алгебри виходу. У векторно-матричній формі ці рівняння записуються таким чином

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ і $\mathbf{D}$ - матриці коефіцієнтів розмірністю $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(r \times n)$, $(r \times m)$; m - число входів; r - число виходів; $\mathbf{U}(t)$ - вектор функція керуючих впливів розмірності m; $\mathbf{X}(t)$ - вектор функція змінних стану розмірності n; $\mathbf{Y}(t)$ - вектор функція вихідних координат розмірності r.

Матриця $\mathbf{A}$ характеризує динамічні властивості об ‘єкта, матрицю $\mathbf{B}$ називають матрицею керування, вона визначає характер впливу вхідних змінних $\mathbf{U}(t)$ на змінні стану $\mathbf{X}(t)$.

Алгебраїчне рівняння пов'язує вихідні змінні $\mathbf{Y}(t)$ із змінними стану $\mathbf{X}(t)$ через матрицю зв'язку $\mathbf{C}$. Зазвичай у системах автоматичного керування матриця $\mathbf{D} = 0$, вона характеризує безпосередній вплив входів на виходи.

Розглянемо лінійну систему, записану в рівняннях змінних стану

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{AX}(t)+\mathbf{BU}(t)\\ \mathbf{Y}(t)=\mathbf{CX}(t)\end{gathered}\qquad(2.2)$$

Для системи з одним входом і одним виходом перехід від її передавальної функції $W(p)$ до опису у просторі станів здійснюється таким чином:

- передавальна функція приводиться до виду

$$W(p)=\frac{b_{n-1}p^{n-1}+\ldots+b_1p+b_0}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0}=\frac{\frac{b_{n-1}}{a_n}p^{n-1}+\ldots+\frac{b_1}{a_n}p+\frac{b_0}{a_n}}{p^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}p^{n-1}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}p+\frac{a_0}{a_n}}$$

- після цього її можна представити у вигляді структурної схеми (рис. 2.1), яка представляє собою n послідовно з'єднаних інтеграторів;
- наступний етап, це перехід від структурної схеми до системи диференціальних рівнянь, за якими складаються матриці коефіцієнтів

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_{n-1}=x_n\\ \dot{x}_n=u-\frac{a_o}{a_n}x_1-\frac{a_1}{a_n}x_2-\ldots-\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n\end{cases}\qquad(2.3)$$

$$y(t)=\frac{b_0}{a_n}x_1+\frac{b_1}{a_n}x_2+\ldots+\frac{b_{n-1}}{a_n}x_n$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\-\frac{a_0}{a_n}&-\frac{a_1}{a_n}&-\frac{a_2}{a_n}&\ldots&-\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{pmatrix}\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}\quad\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\frac{b_0}{a_n}&\frac{b_1}{a_n}&\ldots&\frac{b_{n-1}}{a_n}\end{pmatrix}$$

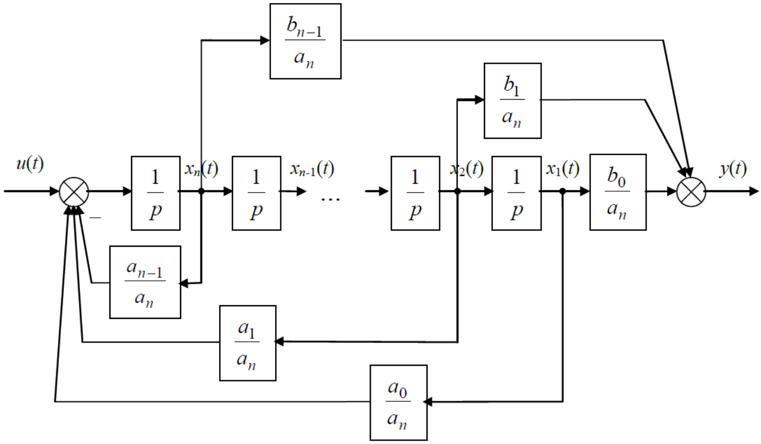

Рис. 2.1 Структурна схема об'єкта, представлена у вигляді послідовно з'єднаних інтегралів

Перейдемо від диференціальних рівнянь (2.2) до рівнянь в операторній формі. Тоді об'єкт можна представити його матричною передавальною функцією

$$\mathbf{W}(p)=\frac{\mathbf{X}(p)}{\mathbf{U}(p)}=(p\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \qquad (2.4)$$

де **1** – одинична матриця.

Замкнута система у просторі станів (рис. 2.2) представляє собою систему із паралельною корекцією, де **R** – матриця коефіцієнтів регулятора розмірністю $(m\times n)$; $\mathbf{V}(t)$ – вектор функція задаючих впливів розмірності m.

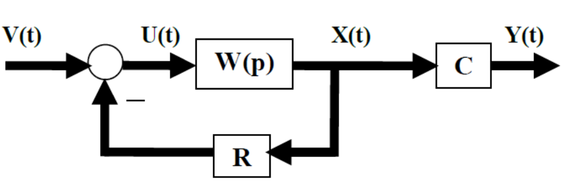

Рис. 2.2 Структурна схема замкнутої системи у просторі станів

Матрична передавальна функція замкнутої системи

$$\mathbf{\Phi}(p)=\frac{\mathbf{X}(p)}{\mathbf{V}(p)}=\left(p\mathbf{1}-\mathbf{A}+\mathbf{BR}\right)^{-1}\mathbf{B} \qquad (2.5)$$

Для синтезу модального регулятора об'єкт, що описується рівняннями (2.2), повинен бути повністю керованим та спостережуваним.

Керованість – можливість переведення об'єкта з початкового стану X_0 в будь-яке наперед задане положення X при обмеженому керуючому впливі.

Критерієм повної керованості по вектору стану є рівність рангу його матриці керованості виду $\mathbf{G}=\left(\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\ \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right)$ порядку системи *n*, $rank\,\mathbf{G}=n$.

Спостережуваність – можливість по вихідному вектору $\mathbf{Y}(t)$ визначити вектор стану $\mathbf{X}(t)$.

Система, що описується рівнянням (2.2) спостережувана, якщо ранг її матриці спостережуваності виду $\mathbf{Q}=\left(\mathbf{C}^T\ \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\ \ \left(\mathbf{A}^T\right)^2\mathbf{C}^T\ \ldots\ \left(\mathbf{A}^T\right)^{n-1}\mathbf{C}^T\right)$ дорівнює порядку системи *n*, $rank\,\mathbf{Q}=n$.

Синтез модального регулятора, для об’єкта з одним входом $m=1$, що описується системою рівнянь (2.3):

1. Розглядається система у якої одна із координат стану співпадає з вектором виходу.
2. Слід задати бажане розміщення коренів для налаштування системи автоматичного регулювання. Це може бути біномінальний розподіл коренів, розподіл по Баттерворту, вибір коренів за деяким інтегральним показником якості тощо.

Кожна замкнута система, налаштована на певне розміщення коренів, характеризується відповідним характеристичним поліномом $D(p)$ *n*-го порядку.

3. Передавальна функція об’єкта (2.2) записується

$$\mathbf{W}(p)=\frac{\mathbf{H}(p)}{F(p)} \qquad (2.6)$$

де $F(p)=\det(p\mathbf{1}-\mathbf{A})$ – характеристичний поліном об’єкта, $\mathbf{H}(p)$ – вектор-стовпець з *n* елементів, який потрібно вилучити з (2.4).

4. Для того, щоб знайти коефіцієнти регулятора, необхідно характеристичне рівняння замкнутої системи

$$\mathbf{RH}(p)+F(p)=0 \tag{2.7}$$

прирівняти до обраного раніше (п.2) бажаного стандартного полінома *n*-го порядку

$$\mathbf{RH}(p)+F(p)=D(p) \tag{2.8}$$

Заключне рівняння

$$\mathbf{RH}(p)=D(p)-F(p) \tag{2.9}$$

з якого безпосередньо знаходяться коефіцієнти вектора-стовпця **R** шляхом прирівнювання коефіцієнтів, що стоять при однакових степенях *p* у лівій та правій частинах рівняння.

2.3 Порядок виконання роботи

1. Заданий об’єкт регулювання з одним входом та одним виходом з передавальною функцією

$$W(p)=\frac{b_0}{a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$$

Перевірити об’єкт на повну керованість та спостережуваність. Синтезувати модальний регулятор за запропонованою методикою з налаштуванням на біномінальний розподіл коренів замкнутої системи, використовуючи дані табл. 2.1

Таблиця 2.1

Стандартні поліноми з біноміальним розподілом коренів

Ступінь полінома D(p)	Бажаний характеристичний поліном D(p)
1	$p+\Omega$
2	$p^2+2\Omega p+\Omega^2$
3	$p^3+3\Omega p^2+3\Omega^2 p+\Omega^3$
4	$p^4+5\Omega p^3+10\Omega^2 p^2+5\Omega^3 p+\Omega^4$

2. Виконати моделювання замкнутої системи з регулятором, рис. 2.3

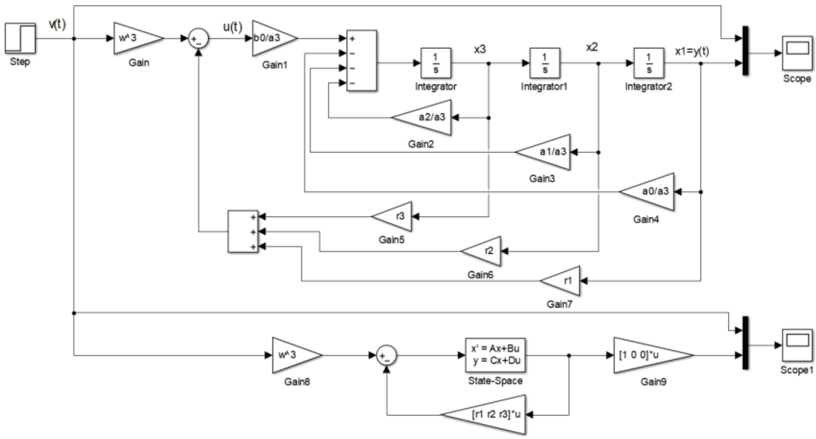

Рис. 2.3 Схема моделі

Варіанти:

№	b_0	a_0	a_1	a_2	a_3	Ω
1.	2	1	7	5	2	5
2.	3	3	2	7	3	6
3.	4	1	3	6	4	4
4.	5	2	7	2	5	2
5.	6	8	3	2	6	3
6.	7	0	5	8	7	4
7.	8	10	9	5	8	3
8.	9	5	1	4	9	2

```
W =
 
              2
  -----------------------
  2 s^3 + 5 s^2 + 7 s + 1
 
Continuous-time transfer function.

>> [A,B,C,D]=ssdata(W)
```

```
A =
   -2.5000   -1.7500   -0.5000
    2.0000         0         0
         0    0.5000         0
B =
     1
     0
     0
C =
     0     0     1
D =
     0
```

Швидкодія процесів, що протікають в еталонній моделі t_n^* і в замкнутій системі t_n пов'язані між собою: $t_n^* = t_n \Omega$

Приймаємо $\Omega = 5$

$$N = p^3 + 3\Omega p^2 + 3\Omega^2 p + \Omega^3 = p^3 + 15p^2 + 76p + 125$$

```
>> s=roots(N)
s =
  -5.0000 + 0.0000i
  -5.0000 + 0.0000i
  -5.0000 - 0.0000i
R=acker(A,B,s)
R =
   12.5000   35.7500  124.5000
```

2.4 Контрольні запитання

1. Які переваги модальних регуляторів перед типовими?
2. Яка структура модальних регуляторів?
3. Для яких режимів роботи проводять синтез систем модального управління?
4. Які вимоги до об'єкта керування?
5. Які способи задання еталонної моделі?

Лабораторна робота 3. Оптимізація функціоналів систем керування

3.1 Мета роботи

Дослідити процеси у системі при керуванні, оптимальному за квадратичним показником якості

3.2 Теоретичні відомості

Важливим етапом під час розробки оптимальних систем є формулювання мети оптимізації, яка математично виражається як вимога забезпечення мінімуму чи максимуму деякого показника якості (критерію оптимальності). Як критерій оптимальності, можуть бути прийняті різні технічні та техніко-економічні показники й оцінки. Наприклад, критерій може відображати техніко-економічну вигоду (продуктивність, коефіцієнт корисної дії тощо), при цьому оптимальне керування повинне забезпечувати максимум критерію оптимальності; він може виражати також витрату енергії, палива, коштів, у цьому випадку оптимальне керування забезпечує мінімум критерію.

Цільову функцію необхідно подати у формі, яка допускає використання будь-якого відомого методу синтезу оптимальних систем. Під час розробки найпростіших локальних систем керування звичайно розглядають задачу оптимізації за критеріями, що характеризують якість функціонування системи (точність, швидкодію), а інші критерії не враховують.

У теорії автоматичного керування широко розповсюджені функціонали, що характеризують якість системи.

Змінна величина $I[x(t)]$ називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, якщо кожній функції $x(t)$ відповідає число I. У загальному випадку функціонал залежить від фазових координат $y_i(t)$, координат керування $u_j(t)$, збурюючих впливів $z_k(t)$ і може бути поданий у вигляді

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left[\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}\right] dt \tag{3.1}$$

де $\left[t_0, t_1\right]$ – інтервал часу, що розглядають; F – визначена функція, яка відображає показник якості; $\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}$ – вектори фазових змінних, керувань і збурень.

Досягнення максимального чи мінімального (екстремального) значення цього функціоналу вказує на оптимальну роботу чи стан системи.

Розглянемо деякі типи критеріїв оптимальності найпростіших об'єктів і систем керування.

Час перехідного процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} 1(t)dt = t_1 - t_0 = T \tag{3.2}$$

Отримана при цьому система є оптимальною за швидкодією, якщо вона забезпечує мінімум інтегралу (3.2) з урахуванням обмежень координат.

Інтегральні оцінки якості перехідного процесу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon^2(t)dt, \tag{3.3}$$

$$I = \overline{\varepsilon}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon^2(t)dt, \tag{3.4}$$

$$I = \overline{y}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt, \tag{3.5}$$

де $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$ – відхилення вихідної змінної $y(t)$ від заданого значення $y^*(t)$; $\overline{\varepsilon}^2$ – середнє значення квадрату помилки системи; $\overline{y}^2$ – середнє значення квадрату вихідної координати.

За умови забезпечення мінімуму інтегралу (3.3) система є оптимальною за точністю у динамічних режимах при ступінчастому задавальному впливі. За умови забезпечення мінімуму функціоналів (3.4) і (3.5) система є оптимальною за точністю у статичному розумінні.

Для визначення коливальності перехідного процесу, тобто характеру його протікання, застосовують узагальнений інтегральний квадратичний критерій

$$I = \int_0^\infty \left[y^2 + r_1 \dot{y}^2 + \ldots + r_n (\overset{(n)}{y})^2 \right] dt, \tag{3.6}$$

де r_i – вагові коефіцієнти.

Перший доданок у виразі (3.6) забороняє тривале існування відхилення вихідної координати y, а подальші доданки – тривале існування великих значень похідних. Тому мінімуму інтегралу (3.6) відповідають достатньо швидкоплинні й плавні перехідні процеси.

Формування критерію оптимальності, що визначає мету оптимізації, це інженерна та інженерно-економічна задача, яку розв'язують на підставі вивчення об'єкта, яким керують.

Математична модель об'єкта керування задається за допомогою системи диференційних рівнянь стану. Якщо об'єкт є лінійним та стаціонарним, система диференційних рівнянь стану записується у такій векторно-матричній формі

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{Az}(t) + \mathbf{Bu}(t) \tag{3.7}$$

де $\mathbf{z}^T(t) = \{z_1(t), z_2(t), ..., z_n(t)\}$ – n-вимірний вектор стану; $\mathbf{u}^T(t) = \{u_1(t), u_2(t), ..., u_k(t)\}$ – k-вимірний вектор керування; $\mathbf{A} - n \times n$ постійна матриця стану; $\mathbf{B} - n \times k$ постійна матриця керування.

Мета керування формується як переведення об'єкта з деякого початкового стану $z(t_0) = z_0$ у кінцевий стан $z(t_k) = z_k$. Початковий та кінцевий стани можуть бути фіксованими (задача з закріпленими кінцями), частково заданими або нефіксованими (задача з вільними кінцями). Моменти початку та закінчення керування можуть бути заданими або невизначеними (задача з фіксованим або нефіксованим часом керування).

Показник якості керування I подається як функціонал – величина, чисельне значення якої залежить від вибору вектора керування $\mathbf{u}(t)$, вектора стану $\mathbf{z}(t)$ та часу керування

$$I = \Phi\left[\mathbf{z}(t_k), t_k\right] + \int_{t_0}^{t_k} L\left[\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t\right] dt \tag{3.8}$$

де $\Phi\left[\mathbf{z}(t_k), t_k\right]$ – показник якості у кінці керування;

$L\left[\mathbf{z}(t),\mathbf{u}(t),t\right]$ – функція, що визначає якість на всьому інтервалі керування (функція Лагранжа або лагранжіан).

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму заданого показника якості

$$I \to \min_{u(t)} \qquad (3.9)$$

Обмеження накладаються у загальному випадку на компоненти як вектора керування, так і вектора стану об’єкта. Вони задаються у вигляді умов належності векторів $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ до деяких множин

$$\mathbf{z}(t)\in \mathbf{Z}_t,\ \mathbf{u}(t)\in \mathbf{U}_t \qquad (3.10)$$

3.3 Порядок виконання роботи

1. Постановка задачі. Динаміка об’єкта керування описується диференціальним рівнянням «вхід-вихід» другого порядку (рис. 3.1)

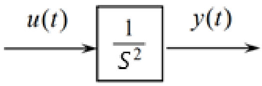

Рис. 3.1 Схема математичної моделі об’єкта керування

$$y''(t)=u(t) \qquad (3.11)$$

де $y(t)$ – вихідна величина; $u(t)$ – керуюча дія.

Максимальна величина $u_{\max}$ керуючої дії $u(t)$ необмежена

$$\left|u(t)\right| < u_{\max} = \infty \qquad (3.12)$$

Метою керування є переведення об’єкта з заданого початкового стану $y(t_0)=y_0$ $y'(t_0)=y'_0$ у кінцевий стан $y(t_k=\infty)=0,\ y'(t_k=\infty)=0$, де $t_0=0$ – фіксований момент початку, а $t_k=\infty$ – фіксований, але нескінчений момент завершення керування.

Критерій оптимальності – мінімум квадратичного показника якості керування

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{y^2(t)}{y_m^2}+\tau^2\frac{y'^2(t)}{y_m^2}+\frac{u^2(t)}{u_m^2}\right)dt, \qquad (3.13)$$

де $\frac{1}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт першого доданка; $\frac{\tau^2}{y_m^2}$ – ваговий коефіцієнт другого доданка; τ — константа, яка має розмірність часу, величина якої впливає на показники якості перехідного процесу – час регулювання та перерегулювання; $\frac{1}{u_m^2}$ – ваговий коефіцієнт третього доданка.

Виберемо за координати стану вихідну величину та її першу похідну

$$z_1(t)=y(t), \quad z_2(t)=y'(t) \qquad (3.14)$$

Початковий стан об'єкта $z_1(t_0)=z_{10}=y_0$, $z_2(t_0)=z_{20}=y'_0$, кінцевий стан $z_1(t_k=\infty)=0$, $z_2(t_k=\infty)=0$

Система диференційних рівнянь стану має такий вигляд

$$\begin{aligned} z'_1(t)&=z_2(t)\\ z'_2(t)&=u(t) \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Отже, матриця стану **A** та матриця керування **B** матричного рівняння стану (3.7) дорівнюють

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}.$$

Показник якості керування (3.8) запишемо у вигляді функціонала Лагранжа

$$I=\int_{t_0}^{t_k}L\left[z(t),u(t),t\right]dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2}+\tau^2\frac{z_2^2(t)}{y_m^2}+\frac{u^2(t)}{u_m^2}\right)dt, \qquad (3.16)$$

де $L\left[z(t),u(t),t\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2}+\tau^2\frac{z_2^2(t)}{y_m^2}+\frac{u^2(t)}{u_m^2}\right)$ – функція Лагранжа.

Критерій оптимальності керування полягає у досягненні мінімуму зданого показника якості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{z_1^2(t)}{y_m^2} + \tau^2\frac{z_2^2(t)}{y_m^2} + \frac{u^2(t)}{u_m^2}\right)dt \to \min_{u \in u_t} \qquad (3.17)$$

Отже, маємо задачу синтезу оптимального керування з закріпленими кінцями при фіксованому, але нескінченому часі закінчення керування.

Для квадратичного показника якості, на відміну від задач на максимальну швидкодію, керованість об’єкта не є необхідною умовою існування оптимального керування. Проте керованість об’єкта є достатньою умовою існування єдиного оптимального керування.

З метою аналізу керованості об’єкта розглянемо матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ *і* $\mathbf{G} = \left|\mathbf{B}\ \mathbf{A}\times\mathbf{B}\right|$.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матриця $\mathbf{G}$ – квадратна, її визначник

$$\det(\mathbf{G}) = -1 \neq 0 \qquad (3.18)$$

Заданий об’єкт є керованим, тому що ранг матриці $\mathbf{G}$ дорівнює порядку об’єкта. Таким чином, для заданого об’єкта принцип максимуму надає необхідні і достатні умови оптимальності.

Синтез закону оптимального керування.

Використовуючи форму функціонала якості (3.16), визначимо матриці $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{R}$

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} y_m^{-2} & 0 \\ 0 & \tau^2 \cdot y_m^{-2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{u_m^2}. \qquad (3.19)$$

Використовуючи матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ та $\mathbf{R}$, складемо матричне рівняння Ріккаті для визначення симетричної матриці $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^T = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{vmatrix}-$$
$$-u_m^2\begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\ 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0 & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_m^{-2} & 0\\ 0 & \tau^2\cdot y_m^{-2}\end{vmatrix}=0. \tag{3.20}$$

Отримаємо систему скалярних рівнянь

$$\begin{cases} u_m^2\cdot\gamma_{12}^2-y_m^{-2}=0;\\ 2\gamma_{12}-u_m^2\cdot\gamma_{22}^2+\tau^2\cdot y_m^{-2}=0;\\ \gamma_{11}-u_m^2\cdot\gamma_{12}\cdot\gamma_{22}=0.\end{cases} \tag{3.21}$$

Розглядаючи рівняння, знайдемо всі розв’язки цієї системи.

Перший розв’язок

$$\begin{gathered}\gamma_{12}=y_m^{-1}\cdot u_m^{-1};\\ \gamma_{22}=u_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}+2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}};\\ \gamma_{11}=u_m y_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}+2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}}.\end{gathered} \tag{3.22}$$

Другий розв’язок

$$\begin{gathered}\gamma_{12}=-y_m^{-1}\cdot u_m^{-1};\\ \gamma_{22}=-u_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}-2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}};\\ \gamma_{11}=u_m y_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}-2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}}.\end{gathered} \tag{3.23}$$

Третій розв’язок

$$\begin{gathered}\gamma_{12}=y_m^{-1}\cdot u_m^{-1};\\ \gamma_{22}=-u_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}+2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}};\\ \gamma_{11}=-u_m y_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}+2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}}.\end{gathered} \tag{3.24}$$

Четвертий розв’язок

$$\begin{gathered}\gamma_{12}=-y_m^{-1}\cdot u_m^{-1};\\ \gamma_{22}=u_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}-2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}};\\ \gamma_{11}=-u_m y_m^{-1}\sqrt{\tau^2\cdot y_m^{-2}-2y_m^{-1}\cdot u_m^{-1}}.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Матриця **Г** повинна бути, по-перше, додатно визначеною, по друге, дійсною.

Умови додатної визначеності

$$\begin{gathered} \gamma_{11} > 0 \\ \gamma_{11} \cdot \gamma_{12} - \gamma_{12}^2 > 0 \end{gathered} \qquad (3.26)$$

Умові (3.26) не задовольняють третій та четвертий розв'язки, тому що $\gamma_{11}^{(3,4)} < 0$.

Другий розв'язок не задовольняє одночасно умови додатної визначеності та дійсності матриці **Г**.

Тільки перший розв'язок не суперечить всім вимогам, що накладаються на матрицю Г. Таким чином, матриця має вигляд

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \cdot \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix} \qquad (3.27)$$

За допомогою виразу (3.27) отримаємо матрицю коефіцієнтів підсилення **K** оптимального регулятора

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \times \mathbf{B}^T \times \mathbf{\Gamma} = u_m^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} u_m \cdot y_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} & y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} \\ y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \cdot \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix} = \qquad (3.28)$$

$$= u_m^2 \begin{vmatrix} y_m^{-1} \cdot u_m^{-1} & u_m^{-1} \sqrt{\tau^2 \cdot y_m^{-2} + 2y_m^{-1} \cdot u_m^{-1}} \end{vmatrix}$$

Таким чином, оптимальне за мінімумом квадратичного показника якості керування має вигляд

$$u^*(t) = -\mathbf{K} \times \mathbf{z}^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) + u_m \sqrt{\tau^2 y_m^{-2} + 2y_m^{-1} u_m^{-1}} \cdot z_2^*(t) =$$

$$= -\frac{u_m}{y_m} \left(z_1^*(t) + \sqrt{\tau^2 + 2\frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t) \right). \qquad (3.29)$$

Структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування наведена на рис.3.2.

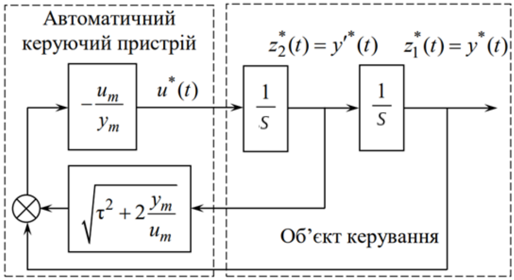

Рис. 3.2 Алгоритмічна структура оптимальної за мінімумом квадратичного показника якості системи керування

Проаналізуємо процеси в оптимальній системі керування та встановимо зв'язок між показниками якості у перехідному режимі цієї системи та параметрами функціонала якості (3.13).

Для цього складемо матрицю стану оптимальної системи та диференційні рівняння стану

$$\mathbf{z}'^*(t) = \mathbf{Ac} \times \mathbf{z}^*(t), \tag{3.30}$$

де

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u_m}{y_m} & -\frac{u_m}{y_m}\sqrt{\tau^2 + 2\frac{y_m}{u_m}} \end{vmatrix} \tag{3.31}$$

Враховуючи (3.30) та (3.31), отримуємо

$$\begin{gathered} z_1'^*(t) = z_2^*(t) \\ z_2'^*(t) = -\frac{u_m}{y_m} z_1^*(t) - \frac{u_m}{y_m}\sqrt{\tau^2 + 2\frac{y_m}{u_m}} \cdot z_2^*(t) \end{gathered} \tag{3.32}$$

Якщо врахувати, що $z_1^*(t) = y^*(t)$, $z_2^*(t) = y'^*(t)$, тоді друге рівняння системи (3.32) набуде вигляду

$$y'^*(t) + \frac{u_m}{y_m}\sqrt{\tau^2 + 2\frac{y_m}{u_m}} \cdot y'^*(t) + \frac{u_m}{y_m} y^*(t) = 0. \tag{3.33}$$

Таким чином, оптимальна система керування для заданого об'єкта є ланкою другого порядку та для її аналізу доступні всі загальновідомі методи аналізу лінійних САК.

Частота ω_0 власних незгасаючих коливань

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{u_m}{y_m}}, \tag{3.34}$$

а відносний коефіцієнт згасання ξ коливань

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 \cdot \tau^2 + 2} \tag{3.35}$$

Якщо обрати $\tau = 0$, тоді $\xi = \sqrt{2}/2 \approx 0.7$, що відповідає мінімальній тривалості перехідного процесу при фіксованій величині частоти ω_0 власних незгасаючих коливань. При цьому величина перерегулювання σ не перевищує 4%. Якщо перерегулювання є небажаним, обравши τ так, щоб

$$\omega_0^2 \cdot \tau^2 \geq 2, \tag{3.36}$$

Отримуємо $\xi \geq 1$, внаслідок чого перехідний процес буде аперіодичним (монотонним).

Таким чином, вибором параметрів y_m, τ, u_m функціонала якості (3.13) можна, залишившись у рамках оптимальної структури, надати системі керування потрібних динамічних властивостей.

2. Завантажити комп'ютерну програму Matlab та запустити її головне розширення Simulink. У робочому вікні програми скласти схему моделі у відповідності з рис. 3.3.

Дослідження полягає у реєстрації оптимального керування $u^*(t)$, оцінки величини квадратичного показника якості керування I, керованої величини $y^*(t) = z_1^*(t)$ та оцінки показників якості перехідного режиму – часу регулювання t_p і перерегулювання σ в залежності від величини параметра функціонала якості (3.13) τ.

2.1 У командному рядку Matlab ввести команду

u_m = 1; y_m = 1; tau = 0.

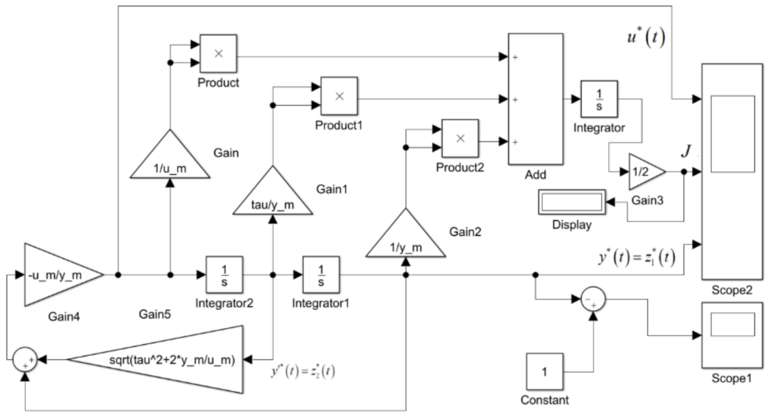

Рис. 3.3. Структурна схема моделі

2.2 Встановити початкові умови z_0, z_{10}, z_{20} для інтеграторів:

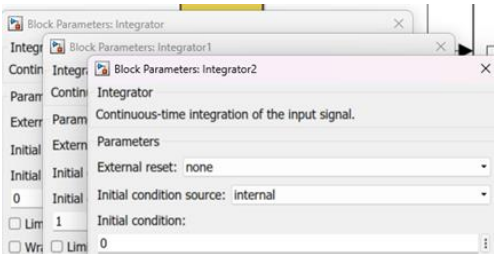

Рис. 3.4. Налаштування інтеграторів

2.3 Провести дослідження оптимального за квадратичним показником якості керування заданим об’єктом і занести оптимальне значення квадратичного показника якості керування $I_{опт}$, час регулювання t_p, перерегулювання σ у табл.3.1.

2.4 Провести аналогічні дослідження для величин параметра $\tau = 0.5;\ \tau = 1;\ \tau = \sqrt{2};\ \tau = 2$, задаючи їх у командному рядку Matlab,

2.3 У командному рядку Matlab ввести команду u_m = 5 та провести дослідження для величин параметра

$\tau = 0$; $\tau = 0.5$; $\tau = 1$; $\tau = \sqrt{2}$; $\tau = 2$.

2.4 Побудувати графіки $I_{опт} = I_{опт}(\tau)$, $t_p = t_p(\tau)$, $\sigma = \sigma(\tau)$ Зробити висновки.

Таблиця 3.1

$u_m = 1$					
τ, с	0	0,5	1	$\sqrt{2}$	2
$I_{опт}$, с					
Час регулювання t_p, с					
Перерегулювання σ, %					
$u_m = 5$					
τ, с	0	0,5	1	$\sqrt{2}$	2
$I_{опт}$, с					
Час регулювання t_p, с					
Перерегулювання σ, %					

3.4 Контрольні запитання

1. Поясніть поняття показник якості.
2. Поясніть поняття функціонал якості.
3. Які форми функціоналів якості застосовуються в теорії оптимального керування?
4. Поясніть поняття критерій оптимальності.
5. Який об’єкт називається керованим?

Лабораторна робота 4. Знаходження оптимального керування методами варіаційного числення

4.1 Мета роботи

Ознайомитися з методикою рішення задачі варіаційного числення, розрахувати оптимальне керування та дослідити оптимальну систему автоматичного керування за квадратичним критерієм

4.2 Теоретичні відомості

Для розв'язання задачі зі синтезу оптимального керування необхідно мати математичне формулювання мети керування. Мету керування яким-небудь об'єктом можна розглядати як досягнення екстремуму деякої величини *Q* – критерію оптимальності. Наприклад, для досягнення максимальної точності системи критерієм оптимальності може слугувати мінімум середньоквадратичної похибки керування, вираженої у вигляді інтеграла

$$Q = \int_0^T x^2\left(t\right)dt \to \min ,$$

де *x(t)* – відхилення регульованої величини від потрібного значення.

Критеріями оптимальності можуть бути: час регулювання, вигляд кривої перехідного процесу, динамічна точність відтворення вхідних сигналів за наявності завад, статична точність, енергія, яка витрачається на формування керування, максимум надійності, максимум продуктивності тощо. Критеріями функціонування систем, які реалізують потрібний процес керування, можуть бути також простота й економічність. Здебільшого задачу побудови оптимальної системи або визначення оптимального керування математично можна сформулювати як задачу варіаційну, яка може бути двох типів – це або вибір параметрів системи, які забезпечують мінімум заданого функціонала, або синтез математичної моделі регулятора під час аналітичного конструювання регулятора.

Дуже часто критерієм оптимальності задаються у вигляді інтегрального квадратичного функціонала від декількох часткових критеріальних функцій $\varphi_i\left(t\right)$

$$Q=\int_0^T\sum_{i=1}^n\gamma_i\varphi_i^2\left(t\right)dt\to\min ,$$

де γ_i – задані вагові коефіцієнти.

Нехай заданий функціонал для оцінки якості перехідного процесу об'єкту керування першого порядку

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f\left(t,y\left(t\right),\dot{y}\left(t\right)\right)dt \qquad (4.1)$$

Необхідно перевести об’єкт із стану y_0 в момент часу t_0 у стан y_1 в момент часу t_1. Кількість можливих шляхів такого переходу дорівнює безкінечності.

Функціонал (4.1) формується на базі фізичних уявлень про процес. Функція *y(t)*, яку необхідно визначити, має бути екстремаллю і її пошук здійснюється на основі виразу

$$\frac{\partial f\left(t,y\left(t\right),\dot{y}\left(t\right)\right)}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f\left(t,y\left(t\right)\right)\dot{y}\left(t\right)}{\partial\dot{y}}\right)=0 \qquad (4.2)$$

який називається рівнянням Ейлера і застосовується для розв’язання оптимізаційних задач. Позначивши $F_y=\dfrac{\partial f\left(t,y\left(t\right),\dot{y}\left(t\right)\right)}{\partial y}$, $F_{\dot{y}}=\dfrac{\partial f\left(t,y\left(t\right)\right)\dot{y}\left(t\right)}{\partial\dot{y}}$, рівняння (4.2) прийме вигляд

$$F_y-\frac{d}{dt}F_{\dot{y}}=0 \qquad (4.3)$$

Якщо початковий функціонал містить похідні вищого порядку, то застосовується рівняння Ейлера-Пуассона

$$F_y-\frac{d}{dt}F_{\dot{y}}+\frac{d}{dt}F_{\ddot{y}}+...+\left(-1\right)^nF_{y(n)}=0 \qquad (4.4)$$

де $y^{(n)}$ – *n* похідна функції *y(t).*

Якщо функціонал містить не одну функцію *y(t),* а декілька y_1, y_2, y_3, …, тоді

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, y_1, y_2, ..., y_n; \dot{y}_1, \dot{y}_2, ..., \dot{y}_n\right) dt \qquad (4.5)$$

У такому випадку будується система рівнянь Ейлера, яка виражає сімейство екстремалей цієї варіаційної задачі

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dt} F_{\dot{y}_1} = 0 \\ F_{y_2} - \dfrac{d}{dt} F_{\dot{y}_2} = 0 \\ F_{y_n} - \dfrac{d}{dt} F_{\dot{y}_n} = 0 \end{cases} \qquad (4.6)$$

4.3 Порядок виконання роботи

1. Постановка задачі. Динаміка об’єкта керування першого порядку задана диференціальним рівнянням

$$A\frac{dy(t)}{dt} + By(t) = Cu(t) \qquad (4.7)$$

Необхідно перевести даний об’єкт із початкового стану $y(0) = D$ в кінцевий стан $y(\infty) = 0$ таким чином, щоб

$$J = \int_0^\infty \left(Ey^2(t) + Gu^2(t)\right) dt \to min \qquad (4.8)$$

де *A, B, C, D, E, G* – константи.

Визначити оптимальний закон керування $u(t)$ при забезпеченні умови (4.8).

Розв’язання: аргумент функціонала містить дві функції $y(t)$ і $u(t)$, зв'язок між якими визначається виразом (4.7). Отже, задача полягає в умовному пошуку екстремуму. Для її розв’язання застосуємо метод невизначених множників Лагранжа і складемо функцію

$$L = Ey^2(t) + Gu^2(t) + \lambda(t)\left(A\dot{y}(t) + By(t) - Cu(t)\right) \qquad (4.9)$$

де λ – множник Лагранжа; $\dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt}$.

Складемо систему рівнянь Ейлера (4.6) для функцій $y(t)$, $u(t)$, $\lambda(t)$

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{y}} = 0 \\ F_u - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{u}} = 0 \\ F_\lambda - \dfrac{d}{dt}F_{\dot{\lambda}} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

маємо

$$F_y = \frac{\partial L}{\partial y(t)} = 2Ey(t) + B\lambda(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{y}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}(t)} = A\frac{d\lambda(t)}{dt} = A\dot{\lambda}(t) \quad (4.12)$$

$$F_u = \frac{\partial L}{\partial u(t)} = 2Gu(t) - C\lambda(t) \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{u}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}(t)} = 0 \quad (4.14)$$

$$F_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda(t)} = A\dot{y}(t) + By(t) - Cu(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{\lambda}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}(t)} = 0 \quad (4.16)$$

З урахуванням (4.11)-(4.16) система рівнянь Ейлера прийме вигляд

$$\begin{cases} 2Ey(t) + B\lambda(t) - A\dot{\lambda}(t) = 0 \\ 2Gu(t) - C\lambda(t) = 0 \\ A\dot{y}(t) + By(t) - Cu(t) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Із другого рівняння системи (4.17) випливає, що

$$u(t) = \frac{C}{2G}\lambda(t) \quad (4.18)$$

Підставимо $\lambda(t)$ в третє рівняння системи (4.17) замість $u(t)$ і виключимо друге рівняння. Отримаємо

$$\begin{cases} 2Ey(t)+B\lambda(t)-A\dot{\lambda}(t)=0 \\ A\dot{y}(t)+By(t)-\dfrac{C^2}{2G}\lambda(t)=0 \end{cases} \tag{4.19}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (4.19) методом підстановки. Для цього друге рівняння розв'яжемо відносно $\lambda(t)$

$$\frac{C^2}{2G}\lambda(t)=By(t)+A\dot{y}(t) \tag{4.20}$$

$$\lambda(t)=\frac{2GB}{C^2}y(t)+\frac{2GA}{C^2}\dot{y}(t) \tag{4.21}$$

Визначимо похідні у лівій і правій частині (4.21)

$$\dot{\lambda}(t)=\frac{2GB}{C^2}\dot{y}(t)+\frac{2GA}{C^2}\ddot{y}(t) \tag{4.22}$$

Підставимо (4.21) і (4.22) в перше рівняння (4.19)

$$2Ey(t)+\frac{2GB^2}{C^2}y(t)+\frac{2GAB}{C^2}\dot{y}(t)-A\left(\frac{2GB}{C^2}\dot{y}(t)+\frac{2GA}{C^2}\ddot{y}(t)\right)=0 \tag{4.23}$$

Після перетворень отримаємо:

$$\ddot{y}(t)-ay(t)=0, \tag{4.24}$$

де $a=\dfrac{EC^2+GB^2}{AG}$

Розв'язки диференціального рівняння (4.24) будуть мати такий вигляд:

$$y_1(t)=C_1e^{\sqrt{a}t} \tag{4.25}$$

$$y_2(t)=C_2e^{-\sqrt{a}t} \tag{4.26}$$

Розв'язок (4.25) відкидаємо, оскільки він відповідає нестійкій системі.

Визначимо сталу C_2 із початкової умови $y(0)=D$.

$$D=C_2e^{-\sqrt{a}t} \tag{4.27}$$

$$C_2=D \tag{4.28}$$

Похідна

$$\dot{y}(t) = -\sqrt{a}De^{-\sqrt{at}} \qquad (4.29)$$

Підставимо (4.27) і (4.29) в (4.21) і враховуючи (4.18) визначимо оптимальний закон керування $u(t)$

$$u(t) = \frac{BD}{C}e^{-\sqrt{at}} - \frac{AD}{C}\sqrt{a}e^{-\sqrt{at}} \qquad (4.30)$$

Приймемо значення констант *A, B, C, D, E, G* таким чином: *A=2; B=1; C=8; D=3; E=1; G=4.*

У такому випадку динаміка об'єкта керування першого порядку задається диференціальним рівнянням

$$2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 8u(t) \qquad (4.31)$$

Об'єкт керування необхідно перевести із початкового стану $y(0) = 3$ у кінцевий стан $y(\infty) = 0$ таким чином, щоб

$$J = \int_0^\infty \left(y^2(t) + 4u^2(t)\right)dt \to min \qquad (4.32)$$

В результаті отримаємо

$$u(t) = \frac{1}{8}3e^{-2,06t} + \frac{1}{4}\cdot(-2,06)\cdot 3e^{-2,06t} = -0,39\left(3e^{-2,06t}\right) = -0,39y(t) \qquad (4.33)$$

або

$$u(t) = -1,17e^{-2,06t} \qquad (4.34)$$

Рівняння (4.33) з коефіцієнтом $k = -0,39$ є базовим для реалізації оптимальної замкнутої системи керування, а рівняння (4.34) з коефіцієнтом $k = -1,17$ – базовим для реалізації оптимальної розімкнутої системи керування.

Об'єкт керування задаємо передавальною функцією $W(p) = \dfrac{8}{2p+1}$, яка відповідає диференціальному рівнянню (4.31).

2. Виконати моделюваня замкнутої і розімкнутої систем керування, зобразивши рівняння об'єкта керування (4.31) у просторі стану

$$\dot{y} = -0,5y + 4u \qquad (4.35)$$

Структурні схеми системи керування в додатку Simulink Matlab наведено на рис. 4.1

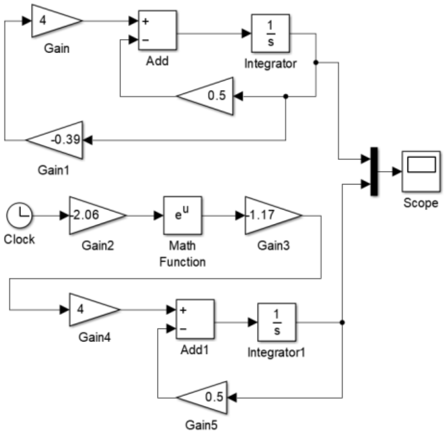

Рис. 4.1 Структурні схеми замкнутої і розімкнутої оптимальних систем керування

2.1 Навести графіки перехідних процесів в досліджувальних системах.

3. Визначені закони керування для замкнутої і розімкнутої систем керування забезпечують мінімальне значення критерію (4.32). Розрахувати критерій, побудувавши в додатку Simulink Matlab структурні схеми замкнутої і розімкнутої систем керування (рис. 4.2 та рис. 4.3).

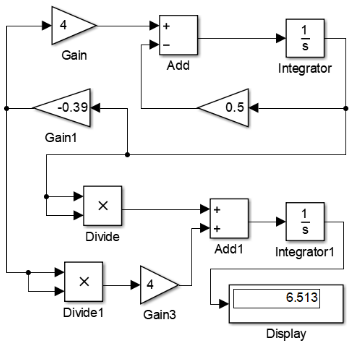

Рис. 4.2. Структурна схема досліджуваної замкнутої системи

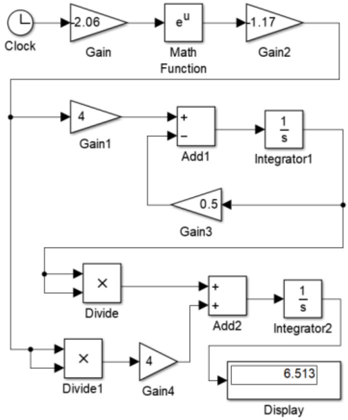

Рис. 4.3. Структурна схема досліджуваної розімкнутої системи

3.1 Змінити параметри керувального впливу і з'ясувати значення критерію, результати дослідження представити в табл. 4.1. Зробити висновки.

Таблиця 4.1

Замкнута система	коефіцієнт						
	критерій						
Розімкнута система	коефіцієнт						
	критерій						

Таблиця 4.2

Варіант	Об'єкт керування				Функціонал $\int_0^\infty \left(Ey^2+Gu^2\right)dt$	
	Параметри		Початковий стан			
	C	A	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	E	G
1	1	2	2	0	5	4
2	2	2	5	0	2	4
3	4	2	4	0	6	3
4	2	5	3	0	4	2
5	3	4	7	0	3	3
6	2	1	6	0	2	5
7	5	3	2	0	3	1
8	2	3	3	0	1	5

4.4 Контрольні запитання

1. Які системи керування називаються оптимальними?

2.Яка методика синтезу оптимального керування з використанням методів варіаційного числення?

3. Які є критерії оптимального керування?

4. Який вигляд має рівняння Ейлера?

5. Як в роботі реалізоване оптимальне керування?

Література

1. Синтез лінійних оптимальних динамічних систем : навчальний посібник / Лозинський О. Ю. та ін. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 392 с.
2. Луцька Н. М., Ладанюк А. П. Оптимальні та робастні системи керування технологічними об’єктами : монографія. К. : Видавництво Ліра-К, 2019. 288 с.
3. Системи автоматичного керування технологічними комплексами : навчальний посібник / Сільвестров А. М. та ін. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 466с.
4. Горбійчук М. І. Математичні методи оптимізації : навч. посіб. Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2018. 302 с.
5. Ладієва Л. Р. Оптимальні системи керування : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 211 с.
6. Мовчан А. П., Степанець О. В. Адаптивні та параметрично-оптимальні системи управління : навч. посіб. К. : НТУУ «КПІ», 2011. 108 с.
7. Методи сучасної теорії управління : підручник / Ладанюк А. П. та ін. Київ : Видавництво Ліра-К, 2019. 368 с.