Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного
господарства та природокористування

Кафедра будівельних, дорожніх і меліоративних машин

**02-01-560М**

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни
**«Моделювання та оптимізація робочих процесів машин»**
для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
за освітньо-професійною програмою
«Інжиніринг машин та обладнання»
спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»

Рекомендовано науково-
методичною радою з якості ННМІ
Протокол № 1 від 27.08.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки для виконання практичних завдань з дисципліни «Моделювання та оптимізація робочих процесів машин» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інжиніринг машин та обладнання» спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» [Електронне видання] / Лук'янчук О. П. – Рівне : НУВГП, 2024. 35 с.

Укладач: Лук'янчук О. П., доцент кафедри будівельних, дорожніх і меліоративних машин.

Відповідальний за випуск: Тхорук Є. І., доцент, в. о. завідувача кафедри будівельних, дорожніх та меліоративних машин.

Керівник групи забезпечення спеціальності
133 «Галузеве машинобудування»
ОПП «Інжиніринг машин та обладнання»: проф. Кравець С. В.

Розглянуто та рекомендовано на засіданні кафедри будівельних, дорожніх і меліоративних машин. Протокол №1 від 27.08.2024

Перевидання МВ 02−01−520м (2022)

## Зміст

## Практична робота №1

**Тема.** Дослідження вагомості параметрів робочого процесу екскаватора.
**Мета.** Визначити найбільш вагомі конструктивні параметри робочого обладнання.

### 1.1. Теоретичні відомості

Продуктивність екскаватора визначається за залежністю:

$$П = \frac{V \cdot k_н}{T_ц \cdot k_р} = \frac{k_н}{T_ц \cdot k_р} B \cdot S \text{, м}^3\text{/год;}$$

де $V$ – об’єм ковша, м$^3$; $T_ц$ – час циклу, год; $k_н$, $k_р$ – відповідно, коефіцієнти наповнення ковша та розпушення ґрунту.

Для визначення вагомості конструктивних параметрів робочого обладнання необхідно розглянути схему робочого процесу (рис. 1) прирівнявши об’єм ковша та об’єм ґрунту, що вирізається ковшем ($S \cdot B$, $B$ – ширина ковша, м).

$$S = R^2 \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) - (R-h)\sqrt{2Rh-h^2}$$

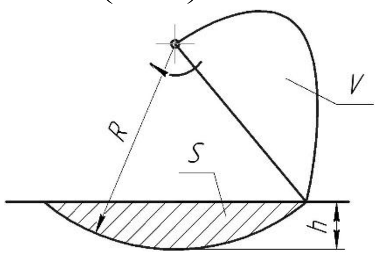



**Рис. 1.** Схема процесу копання ковшем екскаватора

*Кореля́ція* – це будь-яка статистична пов'язаність, стосується ступеню лінійності взаємозв'язку пари змінних. Використовується для вивчення зв'язку (або кореляції) між двома кількісними випадковими величинами.

*Коефіцієнтом кореляції Пірсона* між двома величинами ($x$ і $y$) називається відношення коваріації до середніх квадратичних відхилень цих величин:

Розрахунок коефіцієнта кореляції Пірсона передбачає, що змінні

$x$ і $y$ розподілені нормально.

Дана формула передбачає, що з кожного значення змінної $x$, має відніматися її середнє значення. Це не зручно, тому для розрахунку коефіцієнта кореляції можна використовувати формулу, яку отримують за допомогою перетворень:

$$r_{xy} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i \cdot \Pi_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right)}{\sqrt{\left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) \cdot \left(n \cdot \sum_{i=1}^{n} \Pi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \Pi_i\right)^2\right)}}$$

$\Pi_i$ – розраховане значення технічної продуктивності при змінній величині $x_i$; $\overline{\Pi}$ – середнє значення технічної продуктивності;
$x_i$ – значення досліджуваного параметра робочого процесу з визначеного раніше діапазону його зміни ($i$=1 до $n$=3..5);
$\overline{x}$ – середні значення величин $x$.

**Розрахунок коефіцієнта кореляції Пірсона в Excell**

Для того, щоб розрахувати коефіцієнт кореляції Пірсона в Excell, необхідно зробити наступні кроки:

1.Вносимо значення для двох змінних до таблиці (Наприклад, Змінна 1 і Змінна 2)

2. Ставимо курсор у порожній клітинку

3. На панелі інструментів натискаємо кнопку *fx* (вставити формулу)

4. У вікні «Майстер функцій» у полі «Категорії» вибираємо Повний алфавітний перелік

5. Потім у полі «Виберіть функцію» знаходимо функцію ПІРСОН PEARSON або КОРРЕЛ

5.1. Натискаємо Ок

6. У вікні «Аргументи функції» в поле Масив1 вносимо номери комірок, що містять значення Змінної 1, в поле Масив2 вносимо номери комірок, що містять значення Змінної2.

7. Натискаємо Ок

8. Аналізуємо результат.

На технічну продуктивність процесу впливають декілька параметрів (*R, h, B*), тому коефіцієнт кореляції розраховують окремо для кожного з них, при цьому значення інших параметрів беруться середніми з діапазону їх зміни.

Чим тісніше розміщаються точки на кореляційному полі навколо прямої лінії, тим більша абсолютна величина коефіцієнта кореляції. При оцінці сили зв'язку коефіцієнтів кореляції використовується шкала Чеддока:

відносно висока ступінь кореляції ($|r_{xy}|$=0,7…0,9),

очевидна ($|r_{xy}|$=0,5…0,7), помірна ($|r_{xy}|$=0,3…0,5),

слабка ($|r_{xy}|$=0,1…0,3), $r_{xy}=0$ – зв’язок між величинами відсутній.

## 1.2. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити вагомість конструктивних параметри робочого обладнання (*R, h, B*) на продуктивність (табл. 1).

*Порядок виконання:* вибір вихідних даних, визначення об’єму викопаного ґрунту за схемою процесу, визначення продуктивності при варіації змінних параметрів (*R, h, B*) на 3 рівнях, визначення середнього значення продуктивності, визначення коефіцієнтів кореляції для змінних параметрів (*R, h, B*), побудова гістограми $r= f(R, h, B)$, висновок про найбільш вагомий параметр.

Таблиця 1

Вихідні дані

| № вар. | Діапазони зміни конструктивних параметрів, м | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Радіус копання, *R* | | Товщина стружки, *h* | | Ширина ковша, *B* | |
| 1. | 0,33 | 0,50 | 0,08 | 0,13 | 0,05 | 0,10 |
| 2. | 0,67 | 1,00 | 0,17 | 0,25 | 0,10 | 0,20 |
| 3. | 1,00 | 1,50 | 0,25 | 0,38 | 0,15 | 0,30 |
| 4. | 1,33 | 2,00 | 0,33 | 0,50 | 0,20 | 0,40 |
| 5. | 1,67 | 2,50 | 0,42 | 0,63 | 0,25 | 0,50 |
| 6. | 2,00 | 3,00 | 0,50 | 0,75 | 0,30 | 0,60 |
| 7. | 2,33 | 3,50 | 0,58 | 0,88 | 0,35 | 0,70 |
| 8. | 2,67 | 4,00 | 0,67 | 1,00 | 0,40 | 0,80 |
| 9. | 3,00 | 4,50 | 0,75 | 1,13 | 0,45 | 0,90 |
| 10. | 3,33 | 5,00 | 0,83 | 1,25 | 0,50 | 1,00 |
| 11. | 3,67 | 5,50 | 0,92 | 1,38 | 0,55 | 1,10 |
| 12. | 4,00 | 6,00 | 1,00 | 1,50 | 0,60 | 1,20 |
| 13. | 4,33 | 6,50 | 1,08 | 1,63 | 0,65 | 1,30 |
| 14. | 4,67 | 7,00 | 1,17 | 1,75 | 0,70 | 1,40 |
| 15. | 5,00 | 7,50 | 1,25 | 1,88 | 0,75 | 1,50 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 16. | 5,33 | 8,00 | 1,33 | 2,00 | 0,80 | 1,60 |
| 17. | 5,67 | 8,50 | 1,42 | 2,13 | 0,85 | 1,70 |
| 18. | 6,00 | 9,00 | 1,50 | 2,25 | 0,90 | 1,80 |
| 19. | 6,33 | 9,50 | 1,58 | 2,38 | 0,95 | 1,90 |
| 20. | 6,67 | 10,00 | 1,67 | 2,50 | 1,00 | 2,00 |

## Практична робота №2

**Тема.** Моделювання складу робочого середовища для дослідження робочого процесу бульдозера.
**Мета.** Ознайомитися з принципами застосування теорії подібності.

### 2.1. Теоретичні відомості

*Фізичне моделювання* – це моделювання, яке зберігає фізичну природу явищ, а змінює тільки їхній масштаб.

При моделюванні завжди потрібно вибрати певні співвідношення, які дозволяють сформулювати умови переходу від моделі до оригіналу. Такі співвідношення називаються масштабами моделювання. Крім масштабних перетворень важливо знати умови, за яких модель адекватно представляє оригінал. Ці умови формулюються у вигляді критеріїв подібності.

*Коефіцієнт подібності* – множник пропорційності між величинами характеристик моделі та натури (реальних).

$$k_p = p_н / p_м.$$

де $p_н$ – параметр натури; $p_м$ – параметр моделі.

*Критерій подібності* – це безрозмірні комбінації фізичних величин, складені за певними правилами й однакові для групи подібних процесів (моделі і натури).

Наприклад, за критерієм Ньютона ($F=m\cdot a=m\cdot l/t^2$):

$$K = \frac{F_н \cdot t_н^2}{m_н \cdot l_н} = \frac{F_м \cdot t_м^2}{m_м \cdot l_м}.$$

*Індикатор подібності* – відношення критеріїв подібності для натури та моделі.

$$I = \frac{F_н / F_м \cdot t_н^2 / t_м^2}{m_н / m_м \cdot l_н / l_м} = \frac{k_F \cdot k_t^2}{k_m \cdot k_l} = 1.$$

Зусилля різання ґрунту бульдозером:

$$k_F = \frac{F_н}{F_м} = \frac{K_н B_н h_н}{K_м B_м h_м} = \frac{K_н}{K_м} k_l^2; \qquad I = \frac{\frac{K_н}{K_м} k_l^2 \cdot k_t^2}{k_m \cdot k_l} = 1.$$

$$k_l = \frac{B_н}{B_м}; \qquad k_m = \frac{M_н}{M_м}; \qquad k_t = 1; \quad I = \frac{K_н \frac{B_н}{B_м} \cdot 1}{K_м \frac{M_н}{M_м}.} = 1; \quad K_м = \ldots$$

де $K_{н\,(м)}$ – питомий опір різання, Па; $B$ – ширина відвалу, м; $h$ - глибина різання, м.

Моделювання ґрунту досягається в основному піщано-глинистою сумішшю, яка складається з піску та суглинку (табл. 2).

Таблиця 2

Розрахункові характеристики ґрунтів

| Характеристики | Тип | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Пісок | Супісок | Суглинок | Глина |
| Категорія | I | II | III | IV |
| $K_м$, кПа | 70 | 120 | 150 | 250 |

## 2.2. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити склад двохкомпонентної піщано-глинистої суміші при моделюванні робочого процесу моделі бульдозера на реальному ґрунті з $K_н$= 400 кПа без зміни динаміки роботи.

Таблиця 3

Вихідні дані

| № вар. | Ширина відвалу, *B*, м | | Маса відвалу, *m*, кг | | № вар. | Ширина відвалу, *B*, м | | Маса відвалу, *m*, кг | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ориг. | мод. | ориг. | мод. | | ориг. | мод. | ориг. | мод. |
| 1. | 3,0 | 0,3 | 200 | 100 | 11. | 2,4 | 0,4 | 300 | 50 |
| 2. | 2,88 | 0,3 | 228 | 95 | 12. | 2,24 | 0,4 | 288 | 45 |
| 3. | 2,76 | 0,3 | 252 | 90 | 13. | 2,08 | 0,4 | 272 | 40 |
| 4. | 2,64 | 0,3 | 272 | 85 | 14. | 1,92 | 0,4 | 252 | 35 |
| 5. | 2,52 | 0,3 | 288 | 80 | 15. | 1,76 | 0,4 | 228 | 30 |
| 6. | 2,8 | 0,35 | 300 | 75 | 16. | 1,8 | 0,45 | 200 | 25 |
| 7. | 2,66 | 0,35 | 308 | 70 | 17. | 1,62 | 0,45 | 168 | 20 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8. | 2,52 | 0,35 | 312 | 65 | 18. | 1,44 | 0,45 | 132 | 15 |
| 9. | 2,38 | 0,35 | 312 | 60 | 19. | 1,26 | 0,45 | 92 | 10 |
| 10. | 2,24 | 0,35 | 308 | 55 | 20. | 1,08 | 0,45 | 48 | 5 |

*Порядок виконання:* вибір вихідних даних, запис критеріїв подібності Ньютона з врахуванням опору різання для оригіналу та моделі, запис індикатора подібності, визначення масштабних коефіцієнтів ($k_t$, $k_m$, $k_l$, $k_h$, $k_b$), визначення масштабного коефіцієнта питомого опору $k_k$ з індикатора подібності, визначення питомого опору модельованого ґрунту, визначення частин пропорції складу двохкомпонентної піщано-глинистої суміші з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 k_1 + x_2 k_2 = k_м; \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

запис результату.

## Практична робота №3

**Тема.** Визначення критеріїв моделі за аналізом розмірностей.
**Мета.** Ознайомитися з принципами застосування теорії подібності.

### 3.1. Теоретичні відомості

критерій подібності $K_1$, який вміщує досліджену величину, повинен бути виражений як функція інших критеріїв $K_2, K_3, ..., K_n$, які відображають різні сторони процесу

$$K_1 = f\left(K_2, K_3, ..., K_n\right).$$

Параметр $K_I$ є визначальним критерієм. Незалежно від бажання людини розвиток природи здійснюється за законами геометричних прогресій, логарифмів і ймовірних процесів, а логарифмічна залежність найчастіше визначає багато фізичних процесів. Тому результати дослідів після їх обробки можна записати у вигляді степеневої функції

$$K_1 = C K_2^{\alpha_2} K_3^{\alpha_3} K_4^{\alpha_4} ... K_n^{\alpha n},$$

або у вигляді експоненціальної функції

$$\begin{cases} K_1 = K_0 \, exp\left(-t/\Theta\right) \text{ - для процесу, що загасає} \\ K_1 = K_0\left[1 - exp\left(-t/\Theta\right)\right] \text{ - для зростаючого процесу,} \end{cases}$$

де: $C$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, ..., $\alpha_n$, - постійні, які отримані експериментально; $K_0$ – початкове значення критерію $K_1$ при $t=0$ або кінцеве при $t=\infty$; $t$ – змінний час; $\Theta$ – постійна часу процесу, яка залежить від умов його проведення і виражається через критерій подібності.

*π-теорема Букінгема*. Якщо будь-який процес залежить від $n$ фізичних величин, із яких $m$ – основні величини в одиницях СІ (з незалежними розмінностями, табл. 4), то із вказаних величин можна утворити $\pi=n-m$ безрозмірних критеріїв подібності (для механічних систем $m=3$).

Після отримання моделі невідомі коефіцієнти визначаються експериментально. Наприклад, для моделі типу $K_1 = AK_2^{\alpha_2}$ це будуть $A$ і $\alpha_2$. Для цього проводиться експеримент на дослідній установці за допомогою критеріального планування для визначення залежності між критеріями $K_1$ і $K_2$. Отримані експериментальні дані представляються графічно у логарифмічних координатах. При цьому всі експериментальні точки знаходяться на одній прямій

$$l_n K_1 = l_n A + \alpha_2 l_n K_2 .$$

Показник $\alpha_2$ визначаємо як тангенс кута нахилу отриманої прямої лінії до осі абсцис. Коефіцієнт $A$ знаходимо для не менше як 3-х значень за залежністю

$$A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{K_{1i}}{K_{2i}^{\alpha_2}},$$

де $N$ – число значень $K_1$ і $K_2$.

Таблиця 4

Основні і похідні одиниці системи СІ

| Величина | Позначення | Одиниця | Розмірність |
|---|---|---|---|
| Довжина | L | метр | м |
| Маса | M | кілограм | кг |
| Час | T | секунда | с |
| Площа | $L^2$ | квадратний метр | $м^2$ |
| Об’єм | $L^3$ | кубічний метр | $м^3$ |
| Швидкість | $LT^{-1}$ | метр в секунду | м/с |
| Прискорення | $LT^{-2}$ | метр на секунд. у кв. | $м/с^2$ |
| Щільність | $ML^{-3}$ | кілограм на куб. м. | $кг/м^3$ |
| Сила | $MLT^{-2}$ | ньютон | Н |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Напруження, тиск | $ML^{-1}T^{-2}$ | паскаль | Па |
| Енергія, робота | $ML^{2}T^{-2}$ | джоуль | Дж |
| Потужність | $ML^{2}T^{3}$ | ват | Вт |

*Приклад.* За допомогою π–теореми отримати критеріальне рівняння (модуль функціонування) при грохоченні щебеню.

Приймаємо, що в матеріалі відсутнє внутрішнє тертя і злипання частинок. Тоді процес грохочення (просіювання кускового матеріалу через сито) буде характеризуватися наступними параметрами: масовою швидкістю просіювання матеріалу через сито $q$, кг/с; діаметром отворів сита $D$ , м; середнім діаметром кускового матеріалу (щебеню) $d$, м, ; прискоренням вільного падіння $g$, м/с$^2$; щільністю кускового матеріалу $\rho$, кг/м$^3$.

Залежність швидкості грохочення (протікання) від інших параметрів можна представити у загальному вигляді

$$q = f(D, d, \rho, g),$$

або у вигляді степеневої залежності

$$q = AD^{\alpha_1} d^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3} g^{\alpha_4},$$

де $A$ – деяка постійна.

Запишемо розмірності всіх параметрів через основні розмірності:
$[q] = L^0 M^1 T^{-1}$; $[D] = L^1 M^0 T^0$; $[d] = L^1 M^0 T^0$; $[\rho] = L^{-3} M^1 T^0$; $[g] = L^1 M^0 T^{-2}$.

Підставимо ці розмірності у рівняння:

$$\left[L^0 M^1 T^{-1}\right] = A\left[L^1 M^0 T^0\right]^{\alpha_1}\left[L^1 M^0 T^0\right]^{\alpha_2}\left[L^{-3} M^1 T^0\right]^{\alpha_3}\left[L^1 M^0 T^{-2}\right]^{\alpha_4}.$$

Порівняємо показники степенів при однакових символах розмірностей і отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4; \\ 1 = 0 + 0 + \alpha_3 + 0; \\ -1 = 0 + 0 + 0 - 2\alpha_4. \end{cases}$$

У цій системі і з трьох рівнянь маємо чотири невідомих. Будь-які три із них можна виразити через четверту невідому. Отримаємо

$$\alpha_1 = \frac{5}{2} - \alpha_2; \quad \alpha_3 = 1; \quad \alpha_4 = 1/2.$$

Підставимо значення $\alpha_1$, $\alpha_3$, і $\alpha_4$ у рівняння отримаємо

$$q = AD^{5/2-\alpha_2} d^{\alpha_2} \rho g^{1/2} \quad .$$

У цьому рівнянні на основі π – теореми зв'язок між 5 вихідними величинами ($q$, $D$, $d$, $\rho$, $g$) може бути представлений у вигляді узагальненої залежності між двома (5−3=2) безрозмірними комплексами (критеріями грохочення) цих величин:

$$\frac{q}{\rho D^{5/2} g^{1/2}} = A\left(\frac{d}{D}\right)^{\alpha_2}, \quad K_1 = \frac{q}{\rho D^{5/2} g^{1/2}}; \qquad K_2 = A\left(\frac{d}{D}\right)^{\alpha_2}.$$

Тоді критеріальне рівняння прийме вигляд

$$K_1 = AK_2^{\alpha_2} \ .$$

На цьому закінчується теоретична частина досліджень.

## 3.2. Завдання для індивідуальної роботи

Скласти критеріальне рівняння при моделюванні робочих процесів будівельних машин та обладнання.

*Порядок виконання:* вибір вихідних даних, визначення залежних параметрів процесу, запис розмірностей параметрів процесу через основні розмірності, підстановка отриманих розмірностей у рівняння процесу, розв'язування системи рівнянь складеної за степенями однакових символів розмірностей, отримання рівняння процесу зі степенями, запис критеріального рівняння, визначення числа критеріїв моделювання.

Таблиця 5

Вихідні дані

| № вар. | Параметри робочого процесу для моделювання | |
|---|---|---|
| | Тип машини або обладнання | Визначальний критерій |
| 1. | Бульдозер | Продуктивність |
| 2. | | Енергоємність |
| 3. | Екскаватор одноківшевий | Продуктивність |
| 4. | | Енергоємність |
| 5. | Екскаватор багатоківшевий | Продуктивність |
| 6. | | Енергоємність |
| 7. | Скрепер | Продуктивність |
| 8. | | Енергоємність |
| 9. | Підйомний кран | Продуктивність |
| 10. | | Енергоємність |
| 11. | Конвеєр стрічковий | Продуктивність |
| 12. | | Енергоємність |

| | | |
|---|---|---|
| 13. | Щокова дробарка | Продуктивність |
| 14. | | Енергоємність |
| 15. | Гравітаційний змішувач | Продуктивність |
| 16. | | Енергоємність |
| 17. | Трубний млин | Продуктивність |
| 18. | | Енергоємність |
| 19. | Розчинонасос | Продуктивність |
| 20. | | Енергоємність |

## Практична робота №4

**Тема.** Вирішення оптимізаційних задач класичними методами.
**Мета.** Ознайомитися з принципами деяких класичних методів багатомірної оптимізації.

### 4.1. Теоретичні відомості

*Теорема Ферма* – необхідна умова екстремуму – нехай дійсна функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки $x_0$ і має в цій точці похідну. Тоді, якщо в цій точці $f(x)$ має екстремум то $f^{/}(x_0)=0$.

Якщо цільова функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має безперервні часткові похідні за своїми аргументами, то якщо прирівняти до нуля перші часткові похідні функції по $x_i$ і вирішити сумісно $n$ рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

де $i$=1, 2, ..., $n$, то знайдемо значення $x_i$ , при яких цільова функція має екстремальні значення.

Щоб встановити буде це значення максимальним або мінімальним, потрібно досліджувати другі похідні функції $f$ від $x_i$. Якщо друга похідна у тій або іншій точці більша нуля, то у цій точці маємо мінімум функції і навпаки, якщо менша нуля, то маємо максимум. Якщо друга похідна у тій або іншій точці дорівнює нулю $f^{//}(x_i)=0$, то потрібно аналізувати третю похідну. Якщо третя похідна у цій точці не дорівнює нулю, то у даній точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму, а має перегин і т.д.

*Приклад.* Знайти сторони прямокутника максимальної площі обмеженого описаним колом радіусом $r$ з центром в початку координат.

Застосуємо теорему Ферма. Виражаємо площу прямокутника враховуючи рівняння кола:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad S=2x\cdot 2y=4y\sqrt{r^2-y^2}\ .$$

Необхідна умова екстремуму $S^{/}$=0,

$$S^{/}=4\sqrt{r^2-y^2}-\frac{4y^2}{\sqrt{r^2-y^2}}=0\,.$$

Звідки отримаємо $y=\dfrac{r}{\sqrt{2}}$.

Після підстановки $y$ в рівняння кола отримаємо

$$x^2+\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2=r^2\,,\quad x=\frac{r}{\sqrt{2}}\,.$$

Тоді, $S=4xy=4\dfrac{r}{\sqrt{2}}\dfrac{r}{\sqrt{2}}=2r^2$.

### 4.2. Завдання для індивідуальної роботи

Знайти оптимальне співвідношення конструктивних параметрів робочого обладнання (табл. 6) використовуючи теорему Ферма.

Таблиця 6

| № вар. | Об’єкт оптимізації | Мета оптимізації | Критерії оптимізації | Умова обмеження |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Відкритий циліндричний змішувальний барабан | $V\to$ max | $d$, $h$ | $S$= const |
| 2. | $S=\dfrac{\pi d^2}{4}+\pi dh$; $V=\dfrac{\pi d^2}{4}h$; $L_ш=\pi d+h$ | $S\to$ min | $d$, $h$ | $V$= const |
| 3. | | $L_ш\to$ min | $d$, $h$ | $V$= const |
| 4. | | $V\to$ max | $d$, $h$ | $L_ш$= const |
| 5. | Циліндричний гідробак | $V\to$ max | $d$, $L_ш$ | $S$= const |
| 6. | $S=2\dfrac{\pi d^2}{4}+\pi dh$; $V=\dfrac{\pi d^2}{4}h$; $L_ш=2\pi d+h$ | $S\to$ min | $d$, $L_ш$ | $V$= const |
| 7. | | $L_ш\to$ min | $d$, $L_ш$ | $V$= const |
| 8. | | $V\to$ max | $d$, $L_ш$ | $L_ш$= const |
| 9. | Напівциліндричний ківш навантажувача | $V\to$ max | $d$, $B$ | $S$= const |
| 10. | $S=\dfrac{\pi d^2}{4}+\dfrac{\pi dB}{2}$; $V=\dfrac{\pi d^2}{4}\dfrac{B}{2}$; $L_ш=\pi d+B$ | $S\to$ min | $d$, $B$ | $V$= const |
| 11. | | $L_ш\to$ min | $d$, $B$ | $V$= const |
| 12. | | $V\to$ max | $d$, $B$ | $L_ш$= const |
| 13. | Чвертьциліндричний ківш грейфера | $V\to$ max | $d$, $B$ | $S$= const |
| 14. | $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi d^2}{4}+\dfrac{\pi dB}{2}$; $V=\dfrac{\pi d^2}{4}\dfrac{B}{2}$; $L_ш=\dfrac{\pi d}{2}+B$ | $S\to$ min | $d$, $B$ | $V$= const |
| 15. | | $L_ш\to$ min | $d$, $B$ | $V$= const |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16. | | $V \rightarrow$ max | $d$, $B$ | $L_ш$= const |
| 17. | Прямокутна поверхня щоки дробарки | $S\rightarrow$ max | $a$, $b$ | $P$= const |
| 18. | $S = 2a + 2b$; $P = ab$ | $P\rightarrow$ min | $a$, $b$ | $S$= const |
| 19. | Конусний наконечник грунтопроколювача | $V\rightarrow$ max | $d$, $h$ | $S$= const |
| 20. | $S = \pi \frac{d}{2}\sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2}$; $V = \frac{1}{3}\frac{\pi d^2}{4}h$ | $S\rightarrow$ min | $d$, $h$ | $V$= const |

Позначення в табл. 6:
$V$ − об'єм; $S$ − площа поверхні, $L_ш$ – довжина зварних, $B$ – ширина, $P$ – периметр, $a$, $b$ – лінійні розміри профілю, $d$ – діаметр; , $h$ − висота.

*Порядок виконання:* вибір вихідних даних, побудова розрахункової схеми, запис функціональних залежностей мети та обмеження, вираження одного з параметрів з функції обмеження, підстановка його у функцію мети, спрощення виразу, знаходження похідної за змінним параметром, прирівнювання її до «0», підстановка функції обмеження, знаходження співвідношення між змінними параметрами, запис результату.

## Практична робота №5

**Тема.** Вирішення оптимізаційних задач класичними методами.
**Мета.** Ознайомитися з принципами застосування класичних методів багатомірної оптимізації.

### 5.1. Теоретичні відомості

*Метод невизначених множників Лагранжа* – метод знаходження умовного оптимуму, запропонований італійським математиком Жозефом-Луї Лагранжем. Метод дозволяє звести задачу на відшукання умовного оптимуму до задачі на знаходження безумовного оптимуму.

Нехай потрібно знайти оптимум функції $n$ змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $m$ умовах $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)= 0$.

Суть методу полягає в тому, що складають допоміжну функцію:

$$F= f +\sum\lambda_m g_m,$$

і вирішують систему $(n+m)$ рівнянь відносно невідомих $x_n$ і $\lambda_m$.

Таким чином будуть отримані тільки екстремальні точки цільової функції. Що стосується екстремальних її значень (*min, max),* то, потрібно дослідити часткові похідні:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \\ &g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{aligned}\right\},$$

де: $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$.

*Приклад.* Знайти сторони прямокутника максимальної площі обмеженого описаним колом радіусом $r$ з центром в початку координат.

Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. Площа прямокутника:

$$S = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

Тоді:

$$F = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4y + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Звідки $\lambda=-2$, $x = y = r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

### 5.2. Завдання для індивідуальної роботи

Знайти оптимальне співвідношення конструктивних параметрів робочого обладнання (табл. 7) використовуючи метод невизначених множників Лагранжа.

Таблиця 6

| № вар. | Об'єкт оптимізації | Мета оптимізації | Критерії оптимізації | Умови |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Конусний наконечник грунтопроколювача | $V \to \max$ | $d, h$ | $S=$ const |
| 2. | | $S \to \min$ | $d, h$ | $V=$ const |
| 3. | Напівциліндричний ківш навантажувача | $V \to \max$ | $d, B$ | $S=$ const |
| 4. | | $S \to \min$ | $d, B$ | $V=$ const |
| 5. | | $L_ш \to \min$ | $d, B$ | $V=$ const |
| 6. | | $V \to \max$ | $d, B$ | $L_ш=$ const |
| 7. | Чвертьциліндричний ківш | $V \to \max$ | $d, B$ | $S=$ const |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8. | грейфера | $S \to \min$ | $d, B$ | $V=$ const |
| 9. | | $L_ш \to \min$ | $d, B$ | $V=$ const |
| 10. | | $V \to \max$ | $d, B$ | $L_ш=$ const |
| 11. | Циліндричний гідробак | $V \to \max$ | $d, L$ | $S=$ const |
| 12. | | $S \to \min$ | $d, L$ | $V=$ const |
| 13. | | $L_ш \to \min$ | $d, L$ | $V=$ const |
| 14. | | $V \to \max$ | $d, L$ | $L_ш=$ const |
| 15. | Прямокутна опорна поверхня щоки дробарки | $S \to \max$ | $a, b$ | $P=$ const |
| 16. | | $P \to \min$ | $a, b$ | $S=$ const |
| 17. | Відкритий циліндричний змішувальний барабан | $V \to \max$ | $d, h$ | $S=$ const |
| 18. | | $S \to \min$ | $d, h$ | $V=$ const |
| 19. | | $L_ш \to \min$ | $d, h$ | $V=$ const |
| 20. | | $V \to \max$ | $d, h$ | $L_ш=$ const |

Позначення в табл. 7:
$V$ − об’єм; $S$ − площа поверхні, $L_ш$ – довжина зварних, $B$. – ширина, $P$ – периметр, $a$, $b$ – лінійні розміри профілю, $d$ – діаметр; , $h$ − висота.

*Порядок виконання:* вибір вихідних даних, побудова розрахункової схеми, запис функціональних залежностей мети та обмеження, складання допоміжної функції, запис системи рівнянь, знаходження часткових похідних за змінним параметром, розв’язок системи рівнянь, знаходження співвідношення між змінними параметрами, запис результату.

## Практична робота №6

**Тема.** Вирішення оптимізаційних задач методом варіаційного числення

**Мета.** Ознайомитися з принципами застосування методів варіаційного числення.

### 6.1. Теоретичні відомості

Для механічних систем часто використовується варіаційне числення, де ключовим є функціонал та інтегральний функціонал.

*Функціоналом* називається змінна величина $F$, яка залежить від аргументу $x$, функції $y(x)$ та її похідних $F=f(x, y, y')$.

Інтеграл від цієї величини називається *інтегральним функціона-*

*лом* $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y^{/})dx$.

Основною задачею варіаційного числення є визначення екстремуму функціоналу $I$ за заданих граничних точок ($x$, $y$) і ($x_1$, $y_1$) – *задача Лагранжа*.

Для того щоб функція *y=f(x)* давала екстремум функціоналу, вона має задовольняти диференціальному рівнянню *Ейлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{/}}\right) = 0,$$

або після диференціювання:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^{/2}} y^{//} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial y^{/}} y^{/} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y^{/}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

У загальному випадку, якщо функція $F=f(x, y, y^{/})$ дійсно вміщує $y^{/}$, рівняння Ейлера є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку і його загальний інтеграл вміщує дві довільні сталі $C_1$ і $C_2$, що визначаються із умов, що крива (екстремаль) проходить крізь задані точки ($x$, $y$) і ($x_1$, $y_1$).

Для визначення характеру екстремуму служить умова Лежандра, при $F^{//}_{y^{/}y^{/}} \geq 0$ має місце мінімум, а при $F^{//}_{y^{/}y^{/}} \leq 0$ – максимум.

*Приклад.* Знайти екстремаль функціонала

$$I = \int_0^1 \left(12xy + yy^{/} + y^{/2}\right)dx;$$

яка задовольняє граничним умовам $y(0)=1$, $y(1)=4$.

Визначаємо складові і складаємо рівняння Ейлера

$$F= f(x, y, y^{/})= 12xy +yy' + y'^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{/}} = y + 2y^{/}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^{//}} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial y^{/}} = 1; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y^{/}} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 12x + y^{/}$$

$$2y'' +y' -12x -y' = 0.$$

Знаходимо сімейство екстремалей після спрощення

$$y'' = 6x;$$

$$y'= 3x^2 +C_1; \qquad y= x^3 +C_1x +C_2 .$$

Визначаємо сталі $C_1$ і $C_2$ виходячи з граничних умов

$$\begin{cases} 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1 \\ 1 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

Визначаємо екстремаль

$$y^* = x^3 + 2x + 1.$$

Знаходимо екстремум функціонала

$$y^{*\prime} = 3x^2 + 2,$$

$$I[y^*] = \int_0^1 \left(12xy^* + y^* y' + y'^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(12x^4 + 24x^2 + 12x + \left(x^3 + 2x + 1\right)\left(3x^2 + 2\right) + \left(3x^2 + 2\right)^2\right) dx = 33{,}7$$

## 6.2. Завдання для індивідуальної роботи

Дослідити на екстремум функціонал (вид і точка екстремуму)

1. $I = \int_{-1}^{0} \left(12y - \left(y'\right)^2\right) dx;$ $y(-1) = 1;\ y(0) = 0.$

2. $I = \int_0^1 \left(y' + 2\left(y'\right)^2\right) dx;$ $y(0) = 3;\ y(1) = 1.$

3. $I = \int_0^1 \left(x + \left(y'\right)^2\right) dx;$ $y(0) = 1;\ y(1) = 2.$

4. $I = \int_0^1 \left(\left(y'\right)^2 - y^2 - y\right) dx;$ $y(0) = 0;\ y(1) = -1.$

5. $I = \int_1^2 \left(\left(y'\right)^2 + 2yy' + y^2\right) dx;$ $y(1) = 1;\ y(2) = 0.$

6. $I = \int_1^e \left(x\left(y'\right)^2 + y'\right) dx;$ $y(1) = 0;\ y(e) = 1.$

7. $I = \int_0^{2\pi} \left(\left(y'\right)^2 - y^2\right) dx;$ $y(0) = 1;\ y(2\pi) = 1.$

8. $I = \int_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right) dx;$ $y(1) = 3;\ y(2) = 5.$

9. $I = \int_{-1}^1 \left(2xy' - \left(y'\right)^2\right) dx;$ $y(-1) = 0;\ y(1) = \frac{1}{2}.$

10. $I = \int_0^1 \left(y + 2y' + \left(y'\right)^2\right) dx;$ $y(0) = 1;\ y(1) = 2.$

11. $I=\int\limits_0^1\left(x+xy'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=0.$

12. $I=\int\limits_0^1\left(xy'-\left(y'\right)^2\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(1)=\frac{1}{4}.$

13. $I=\int\limits_{-1}^2\frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{y}dx;$

$y(-1)=1;\ y(2)=4.$

14. $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{\left(y'\right)^2};$

$y(0)=0;\ y(1)=1.$

15. $I=\int\limits_1^2\left(x^2\left(y'\right)^2+12x^2\right)dx;$

$y(1)=1;\ y(2)=8.$

16. $I=\int\limits_0^1\left(y^2+2yy'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=0.$

17. $I=\int\limits_0^1\left(y+y'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=1.$

18. $I=\int\limits_0^2\left(xy'+\left(y'\right)^2\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(2)=0.$

19. $I=\int\limits_0^1\left(y+y^2-2y^2y'\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(1)=2.$

20. $I=\int\limits_1^2\left(x^2\left(y'\right)^2+2x\right)dx;$

$y(1)=1;\ y(2)=8.$

## Практична робота №7

**Тема.** Визначення закону розподілу досліджуваної випадкової величини за експериментальними даними

**Мета.** Отримати навики побудови закону розподілу випадкової величини

### 1.1. Теоретичні відомості

При рішенні великого числа практичних задач з використанням статистичних методів необхідно знати закон розподілу випадкової величини.

Для безперервної випадкової величини *X* закон розподілу задають за допомогою інтегральної функції розподілу ймовірності випадкової величини

$$F(x) = P\{X < x\},$$

або за допомогою щільності розподілу ймовірності

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

де $P\{X< x\}$ - ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше дійсного числа $x$.

Оскільки інтегральна функція розподілу є ймовірність події $\{X< x\}$, то у якості оцінки ординати інтегральної функції розподілу відповідно до теореми Я. Бернуллі слід вибрати частоту відповідної події:

$$F^*(x) = P^*\{X < x\} = \frac{m}{n},$$

де $n$ - загальне число дослідів, $m$ - число дослідів, в яких відбувається подія $\{X< x\}$.

Оцінка ординати щільності розподілу ймовірності може бути отримана також з використанням теореми Я.Бернуллі.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x}.$$

Значить,

$$f^*(x) = \frac{P^*\{X \in [x, x+\Delta x]\}}{\Delta x}.$$

Якість оцінки ординати щільності за допомогою співвідношення суттєво залежить від вибору довжин інтервалу $\Delta x$. При виборі рівних інтервалів розбиття діапазону зміни випадкової величини оптимальна довжина інтервалу може бути визначена за оптимальною кількістю інтервалів відповідно до табл. 1.1.

Таблиця 1.1

| $n$ | 100 | 200 | 400 | 600 | 800 | 1000 | 1500 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 12 | 16 | 20 | 24 | 27 | 30 | 35 | 37 |

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{K},$$

де $n$ - об'єм вибірки, $K$ - число інтервалів, $x_{max} - x_{min}$ - різниця між найбільшим і найменшим значенням випадкової величини $X$.

Для аналітичного опису закону розподілу звичайно використовують один з поширених видів. Для безперервної випадкової величини в Додатку 1 приведені вирази щільності, їх графіки й основні параметри найбільш поширених законів розподілу випадкової величини.

## 1.2. Завдання для індивідуальної роботи

Побудувати гістограму розподілу випадкової величини (табл.1.2), визначити закон розподілу, зробити висновки.

Порядок побудови гістограми.

1. Знаходження серед елементів вибірки $x_{min}$, $x_{max}$.
2. Вибір числа інтервалів розбиття *K* з табл. 1.1.
3. Визначення довжини інтервалів Δx (рекомендована точність обчислення 0,001).
4. Визначення меж інтервалів розбиття.
5. Визначення числа попадань значень випадкової величини в *i*-й інтервал - $m_i$ . У разі попадання числового значення випадкової величини на межу двох інтервалів, слід відносити його до кожного інтервалу із значенням 0,5.
6. Визначення частоти попадання випадкової величини в *i*-й інтервал

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}.$$

7. Визначення значень ординат гістограми *i*-го інтервалу

$$H_i = \frac{P_i^*}{\Delta x}.$$

8. Побудова графіка гістограми.

Таблиця 1.2

| № виміру | Варіанти завдань | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 1. | 17 | 24 | 34 | 20 | 35 | 43 | 43 | 44 | 64 | 58 | 62 | 63 | 87 | 88 | 98 |
| 2. | 14 | 27 | 23 | 25 | 34 | 49 | 43 | 58 | 67 | 70 | 57 | 72 | 89 | 73 | 79 |
| 3. | 6 | 14 | 33 | 22 | 31 | 49 | 57 | 62 | 54 | 63 | 73 | 71 | 86 | 71 | 91 |
| 4. | 17 | 19 | 38 | 35 | 34 | 46 | 44 | 44 | 51 | 66 | 60 | 72 | 76 | 76 | 78 |
| 5. | 21 | 29 | 36 | 39 | 49 | 51 | 51 | 41 | 67 | 51 | 64 | 65 | 71 | 79 | 96 |
| 6. | 7 | 27 | 32 | 31 | 37 | 34 | 42 | 63 | 59 | 51 | 74 | 77 | 74 | 89 | 93 |
| 7. | 27 | 12 | 22 | 31 | 37 | 42 | 50 | 44 | 60 | 52 | 65 | 69 | 81 | 78 | 86 |
| 8. | 16 | 31 | 26 | 35 | 48 | 40 | 55 | 44 | 62 | 56 | 72 | 82 | 69 | 80 | 92 |
| 9. | 20 | 30 | 17 | 23 | 42 | 36 | 53 | 43 | 66 | 53 | 75 | 65 | 89 | 75 | 95 |

| № виміру | Варіанти завдань | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 10. | 10 | 28 | 18 | 36 | 41 | 31 | 56 | 62 | 62 | 70 | 69 | 78 | 67 | 77 | 79 |
| 11. | 25 | 13 | 22 | 39 | 43 | 43 | 42 | 62 | 65 | 62 | 64 | 75 | 86 | 71 | 76 |
| 12. | 20 | 26 | 27 | 28 | 29 | 39 | 48 | 48 | 48 | 65 | 76 | 61 | 81 | 70 | 79 |
| 13. | 23 | 14 | 21 | 26 | 28 | 54 | 51 | 48 | 46 | 72 | 58 | 76 | 83 | 89 | 89 |
| 14. | 12 | 24 | 36 | 31 | 28 | 40 | 50 | 51 | 48 | 54 | 66 | 68 | 77 | 74 | 93 |
| 15. | 7 | 12 | 30 | 35 | 47 | 49 | 38 | 45 | 51 | 65 | 71 | 61 | 87 | 80 | 87 |
| 16. | 7 | 14 | 21 | 41 | 33 | 47 | 42 | 48 | 52 | 55 | 63 | 77 | 87 | 85 | 87 |
| 17. | 8 | 11 | 21 | 37 | 47 | 52 | 42 | 46 | 46 | 53 | 78 | 67 | 83 | 81 | 84 |
| 18. | 24 | 27 | 23 | 26 | 29 | 50 | 47 | 61 | 68 | 52 | 62 | 77 | 89 | 76 | 98 |
| 19. | 19 | 23 | 34 | 33 | 30 | 48 | 54 | 59 | 46 | 61 | 68 | 63 | 88 | 83 | 91 |
| 20. | 12 | 30 | 32 | 21 | 28 | 47 | 35 | 45 | 53 | 67 | 57 | 64 | 88 | 72 | 84 |
| 21. | 5 | 14 | 24 | 24 | 26 | 45 | 43 | 44 | 52 | 74 | 71 | 62 | 89 | 81 | 89 |
| 22. | 15 | 28 | 33 | 29 | 47 | 50 | 37 | 51 | 46 | 62 | 67 | 75 | 76 | 75 | 79 |
| 23. | 12 | 31 | 37 | 28 | 32 | 31 | 56 | 42 | 54 | 51 | 77 | 83 | 80 | 93 | 92 |
| 24. | 8 | 34 | 25 | 36 | 31 | 39 | 48 | 62 | 65 | 52 | 58 | 71 | 85 | 75 | 98 |
| 25. | 19 | 18 | 18 | 40 | 25 | 40 | 47 | 44 | 46 | 72 | 66 | 69 | 72 | 89 | 87 |
| 26. | 24 | 17 | 25 | 27 | 40 | 44 | 44 | 49 | 60 | 54 | 65 | 80 | 78 | 90 | 93 |
| 27. | 10 | 20 | 19 | 37 | 41 | 42 | 35 | 56 | 64 | 58 | 72 | 75 | 81 | 71 | 84 |
| 28. | 24 | 28 | 17 | 41 | 41 | 47 | 45 | 46 | 55 | 62 | 72 | 68 | 85 | 92 | 76 |
| 29. | 19 | 23 | 21 | 36 | 44 | 50 | 36 | 44 | 53 | 66 | 65 | 68 | 76 | 87 | 82 |
| 30. | 29 | 14 | 30 | 23 | 36 | 40 | 52 | 50 | 55 | 70 | 69 | 73 | 87 | 89 | 96 |
| 31. | 26 | 26 | 16 | 36 | 32 | 34 | 58 | 58 | 46 | 71 | 71 | 82 | 65 | 89 | 88 |
| 32. | 23 | 16 | 37 | 27 | 43 | 35 | 47 | 42 | 56 | 72 | 64 | 84 | 78 | 85 | 93 |
| 33. | 23 | 20 | 15 | 22 | 34 | 52 | 55 | 59 | 58 | 52 | 69 | 72 | 70 | 78 | 95 |
| 34. | 10 | 17 | 17 | 27 | 39 | 44 | 51 | 53 | 52 | 67 | 71 | 68 | 79 | 80 | 76 |
| 35. | 28 | 32 | 30 | 37 | 42 | 43 | 54 | 60 | 52 | 64 | 60 | 80 | 73 | 89 | 97 |
| 36. | 10 | 26 | 38 | 38 | 25 | 42 | 37 | 58 | 53 | 70 | 75 | 78 | 78 | 92 | 76 |
| 37. | 21 | 28 | 21 | 29 | 33 | 48 | 56 | 49 | 68 | 52 | 76 | 74 | 81 | 78 | 81 |
| 38. | 27 | 13 | 16 | 33 | 30 | 44 | 54 | 50 | 57 | 69 | 58 | 77 | 87 | 89 | 90 |
| 39. | 19 | 20 | 17 | 37 | 36 | 38 | 56 | 64 | 57 | 52 | 69 | 68 | 84 | 87 | 93 |
| 40. | 11 | 16 | 24 | 31 | 39 | 46 | 39 | 54 | 46 | 63 | 74 | 74 | 88 | 91 | 92 |
| 41. | 7 | 10 | 21 | 39 | 40 | 47 | 55 | 50 | 67 | 53 | 68 | 66 | 88 | 88 | 80 |
| 42. | 15 | 16 | 33 | 20 | 40 | 48 | 36 | 54 | 59 | 53 | 63 | 72 | 70 | 82 | 87 |
| 43. | 15 | 24 | 18 | 36 | 25 | 38 | 46 | 58 | 67 | 60 | 64 | 81 | 82 | 78 | 79 |
| 44. | 16 | 32 | 37 | 25 | 29 | 45 | 47 | 53 | 59 | 55 | 62 | 65 | 84 | 90 | 92 |
| 45. | 27 | 23 | 36 | 34 | 32 | 48 | 37 | 48 | 55 | 50 | 59 | 77 | 82 | 85 | 80 |
| 46. | 18 | 18 | 18 | 28 | 28 | 41 | 46 | 57 | 48 | 63 | 68 | 65 | 83 | 77 | 80 |
| 47. | 22 | 11 | 24 | 25 | 39 | 46 | 56 | 55 | 51 | 69 | 62 | 64 | 66 | 93 | 75 |

| № виміру | Варіанти завдань | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 48. | 5 | 26 | 16 | 44 | 39 | 45 | 51 | 43 | 50 | 59 | 61 | 68 | 88 | 81 | 88 |
| 49. | 29 | 18 | 39 | 28 | 40 | 35 | 39 | 50 | 66 | 51 | 70 | 64 | 81 | 83 | 89 |
| 50. | 20 | 10 | 25 | 38 | 42 | 50 | 58 | 50 | 61 | 73 | 61 | 65 | 72 | 72 | 90 |
| 51. | 12 | 28 | 18 | 22 | 44 | 51 | 53 | 59 | 56 | 69 | 66 | 63 | 88 | 81 | 86 |
| 52. | 22 | 22 | 25 | 37 | 42 | 30 | 45 | 49 | 56 | 59 | 74 | 81 | 89 | 83 | 78 |
| 53. | 12 | 20 | 37 | 42 | 26 | 49 | 55 | 62 | 65 | 60 | 58 | 63 | 72 | 70 | 80 |
| 54. | 9 | 23 | 38 | 25 | 32 | 38 | 53 | 43 | 54 | 51 | 72 | 79 | 76 | 78 | 89 |
| 55. | 16 | 15 | 32 | 32 | 41 | 43 | 57 | 58 | 59 | 56 | 77 | 72 | 88 | 78 | 97 |
| 56. | 9 | 24 | 32 | 32 | 45 | 42 | 54 | 55 | 56 | 71 | 68 | 72 | 71 | 72 | 77 |
| 57. | 26 | 18 | 35 | 33 | 39 | 39 | 46 | 53 | 67 | 60 | 58 | 72 | 72 | 74 | 96 |
| 58. | 13 | 24 | 17 | 38 | 47 | 52 | 37 | 45 | 46 | 61 | 77 | 64 | 71 | 90 | 88 |
| 59. | 23 | 25 | 36 | 34 | 28 | 46 | 43 | 51 | 58 | 56 | 75 | 73 | 73 | 90 | 94 |
| 60. | 19 | 19 | 30 | 31 | 26 | 45 | 50 | 61 | 46 | 74 | 72 | 83 | 77 | 88 | 82 |
| 61. | 27 | 12 | 29 | 37 | 45 | 52 | 42 | 56 | 46 | 63 | 57 | 73 | 79 | 81 | 85 |
| 62. | 11 | 25 | 23 | 42 | 43 | 41 | 35 | 51 | 64 | 58 | 60 | 67 | 84 | 94 | 89 |
| 63. | 28 | 17 | 25 | 23 | 48 | 37 | 37 | 61 | 64 | 72 | 77 | 83 | 69 | 82 | 90 |
| 64. | 25 | 27 | 26 | 20 | 36 | 44 | 37 | 55 | 57 | 59 | 71 | 61 | 65 | 90 | 77 |
| 65. | 24 | 16 | 15 | 38 | 42 | 48 | 39 | 62 | 59 | 61 | 71 | 73 | 78 | 89 | 78 |
| 66. | 11 | 18 | 37 | 35 | 43 | 31 | 46 | 56 | 46 | 58 | 59 | 64 | 72 | 92 | 98 |
| 67. | 8 | 25 | 28 | 33 | 46 | 37 | 47 | 42 | 60 | 68 | 62 | 76 | 81 | 79 | 77 |
| 68. | 29 | 15 | 28 | 34 | 35 | 50 | 39 | 61 | 48 | 64 | 76 | 83 | 85 | 76 | 77 |
| 69. | 11 | 30 | 29 | 22 | 30 | 48 | 47 | 46 | 55 | 66 | 60 | 68 | 86 | 79 | 82 |
| 70. | 9 | 17 | 28 | 32 | 46 | 34 | 39 | 44 | 49 | 69 | 77 | 67 | 71 | 90 | 83 |
| 71. | 16 | 16 | 30 | 34 | 46 | 41 | 49 | 58 | 63 | 51 | 61 | 81 | 74 | 90 | 93 |
| 72. | 13 | 22 | 25 | 30 | 38 | 30 | 58 | 49 | 48 | 71 | 69 | 81 | 67 | 79 | 80 |
| 73. | 5 | 33 | 23 | 40 | 32 | 42 | 43 | 44 | 49 | 58 | 61 | 66 | 77 | 78 | 91 |
| 74. | 7 | 33 | 36 | 33 | 35 | 36 | 36 | 45 | 47 | 53 | 59 | 82 | 71 | 83 | 95 |
| 75. | 26 | 30 | 18 | 36 | 49 | 45 | 54 | 45 | 58 | 69 | 71 | 76 | 86 | 84 | 81 |
| 76. | 24 | 13 | 29 | 37 | 35 | 34 | 36 | 45 | 62 | 62 | 62 | 71 | 74 | 71 | 98 |
| 77. | 14 | 18 | 24 | 34 | 33 | 46 | 51 | 42 | 51 | 66 | 77 | 81 | 76 | 92 | 95 |
| 78. | 21 | 12 | 26 | 23 | 31 | 39 | 41 | 63 | 67 | 64 | 69 | 82 | 85 | 81 | 75 |
| 79. | 23 | 28 | 18 | 34 | 42 | 50 | 52 | 60 | 64 | 67 | 67 | 77 | 74 | 88 | 87 |
| 80. | 24 | 17 | 24 | 20 | 39 | 51 | 36 | 42 | 67 | 63 | 56 | 71 | 69 | 94 | 91 |
| 81. | 19 | 33 | 20 | 24 | 44 | 43 | 52 | 60 | 54 | 57 | 59 | 83 | 66 | 81 | 85 |
| 82. | 14 | 33 | 30 | 24 | 49 | 46 | 46 | 50 | 59 | 65 | 72 | 72 | 72 | 89 | 78 |
| 83. | 15 | 27 | 22 | 23 | 30 | 51 | 54 | 48 | 50 | 70 | 77 | 64 | 76 | 79 | 96 |
| 84. | 7 | 15 | 22 | 21 | 48 | 53 | 58 | 60 | 50 | 52 | 71 | 67 | 73 | 82 | 96 |
| 85. | 17 | 12 | 18 | 33 | 34 | 37 | 41 | 56 | 49 | 64 | 67 | 74 | 67 | 73 | 80 |

| № виміру | Варіанти завдань | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 86. | 28 | 18 | 33 | 28 | 44 | 35 | 54 | 59 | 62 | 50 | 66 | 66 | 68 | 84 | 95 |
| 87. | 17 | 11 | 36 | 40 | 46 | 47 | 51 | 57 | 62 | 60 | 74 | 79 | 82 | 86 | 76 |
| 88. | 18 | 19 | 36 | 34 | 43 | 49 | 41 | 42 | 59 | 55 | 70 | 79 | 82 | 83 | 82 |
| 89. | 23 | 21 | 30 | 36 | 48 | 34 | 37 | 46 | 50 | 63 | 65 | 61 | 74 | 71 | 81 |
| 90. | 27 | 23 | 34 | 30 | 45 | 39 | 40 | 50 | 47 | 56 | 72 | 75 | 87 | 88 | 89 |
| 91. | 27 | 14 | 35 | 20 | 32 | 39 | 46 | 64 | 48 | 56 | 63 | 70 | 70 | 84 | 79 |
| 92. | 25 | 12 | 17 | 25 | 38 | 45 | 52 | 48 | 58 | 70 | 58 | 66 | 75 | 92 | 88 |
| 93. | 22 | 28 | 35 | 43 | 35 | 51 | 47 | 60 | 62 | 64 | 77 | 81 | 88 | 89 | 87 |
| 94. | 20 | 17 | 25 | 36 | 42 | 42 | 46 | 44 | 63 | 59 | 67 | 64 | 79 | 82 | 87 |
| 95. | 18 | 12 | 33 | 21 | 26 | 44 | 52 | 58 | 51 | 73 | 57 | 66 | 70 | 91 | 91 |
| 96. | 12 | 14 | 26 | 30 | 28 | 49 | 40 | 64 | 68 | 65 | 61 | 63 | 81 | 89 | 85 |
| 97. | 9 | 18 | 22 | 37 | 26 | 48 | 55 | 52 | 52 | 67 | 66 | 67 | 75 | 73 | 90 |
| 98. | 9 | 33 | 26 | 21 | 28 | 52 | 53 | 40 | 61 | 70 | 58 | 62 | 82 | 74 | 86 |
| 99. | 23 | 29 | 27 | 26 | 49 | 53 | 57 | 61 | 51 | 72 | 67 | 84 | 79 | 76 | 82 |
| 100. | 21 | 21 | 18 | 35 | 35 | 48 | 53 | 48 | 50 | 67 | 61 | 69 | 67 | 85 | 94 |

Для побудови графіка гістограми відкладають по осі абсцис інтервали, на кожному з яких будують прямокутник висотою $H_i$.

Таблиця 1.3

| № інтервалу / Параметри | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Межі інтервалів | | | | | | | | |
| $m_i$ | | | | | | | | |
| $P_i^* = \frac{m_i}{n}$ | | | | | | | | |
| $H_i = P_i^* / \Delta x$ | | | | | | | | |

По виду гістограми візуально визначаємо вид теоретичного розподілу, до якого найближче підходить досліджуваний розподіл. Графіки щільності ймовірності розподілу широко поширених теоретичних розподілів і їх основні параметри приведені в Додатку 1.

## Практична робота №8

**Тема.** Визначення похибки непрямих вимірювань
**Мета.** Отримати навики визначення похибки непрямих вимірювань

### 2.1. Теоретичні відомості

При непрямому вимірюванні шуканої величини $y$, яка не вимірюється безпосередньо, а визначається за відомою формулою $y= f(x_i)$ через величини, які визначають прямими вимірами $x_i$, похибку визначають наступним чином:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2} \ ,$$

де $x_i$ – безпосередньо виміряні параметри, $\Delta x_i$ – похибки безпосередньо виміряних параметрів, $f(x_i)$ − функціональна залежність шуканої величини від виміряних параметрів.

Результат вимірювань записується з вказуванням довірчого інтервалу у вигляді

$$y = y_{cp} \pm \Delta y.$$

Наприклад, при розрахунку об’єму прямого кругового циліндра:

$$\Delta V = \sqrt{\left( \frac{D^2}{4} H \Delta\pi \right)^2 + \left( \frac{2\pi D}{4} H \Delta D \right)^2 + \left( \frac{\pi D^2}{4} \Delta H \right)^2} \ .$$

Величина $\Delta y$ визначається з тою самою надійністю з якою визначені $x_i$ (вони повинні бути визначенні з однаковою надійністю). Вважається, що у формулу об’єму підставляють заокруглене значення $\pi$.

### 2.2. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити похибку непрямого вимірювання згідно варіанту (табл. 2.1) та записати результат вимірювань.

Таблиця 2.1

| № вар. | Вимірювальний параметр | Функціональна залежність | Результати прямих вимірювань | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Зусилля на штоці гідроциліндра ($\Delta P$, кН) | $P = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ | $D$=100±2 мм | p=16±0,1 МПа | π=3,14 |
| 2. | | | $D$=125±3 | p=24±0,2 | π=3,14 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | мм | МПа | |
| 3. | | | *D*=150±4 мм | р=32±0,3 МПа | π=3,14 |
| 4. | Зусилля на штоці гідроциліндра (Δ*P*, кН) | $P = p \cdot \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$ | *D*=100±1 мм | р=16±0,1 МПа | *d*=50±0,5 мм |
| 5. | | | *D*=125±2 мм | Р=24±0,2 МПа | *d*=60±0,6 мм |
| 6. | | | *D*=150±3 мм | р=32±0,3 МПа | *d*=70±0,7 мм |
| 7. | Реактивний тиск в гідроциліндрі (Δ*p*, МПа) | $p = \frac{4P}{\pi D^2}$ | *D*=100±1 мм | Р=150±2 кН | π=3,14 |
| 8. | | | *D*=125±2 мм | Р=175±3 кН | π=3,14 |
| 9. | | | *D*=150±3 мм | Р=250±4 кН | π=3,14 |
| 10. | Реактивний тиск в гідроциліндрі (Δ*p*, МПа) | $p = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)}$ | *D*=100±1 мм | Р=150±2 кН | *d*=50±0,5 мм |
| 11. | | | *D*=125±2 мм | Р=175±3 кН | *d*=60±0,6 мм |
| 12. | | | *D*=150±3 мм | Р=250±4 кН | *d*=70±0,7 мм |
| 13. | Зусилля інерції від руху робочого органу (Δ*P*, кН) | $P = m\frac{L}{t^2}$ | *L*=2,0±0,05 м | t=10±0,5 с | *m*=160±1 кг |
| 14. | | | *L*=2,5±0,06 м | t=12±0,6 с | *m*=180±2 кг |
| 15. | | | *L*=5,0±0,07 м | t=15±0,7 с | *m*=200±3 кг |
| 16. | Об'єм призми волочіння (Δ*V*, м$^3$) | $V = \frac{BH^2}{2k_p}$ | *B*=2,2±0,05 м | *H*=1,5±0,5 м | $k_р$=1,20 |
| 17. | | | *B*=2,3±0,06 м | *H*=1,6±0,6 м | $k_р$=1,25 |
| 18. | | | *B*=2,4±0,07 м | *H*=1,7±0,7 м | $k_р$=1,30 |
| 19. | Момент інерції полого барабану (Δ*M*, Нм) | $M = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}$ | *R*=1,0±0,05 м | *m*=160±1 кг | *r*=0,8±0,05 м |
| 20. | | | *R*=1,2±0,06 м | *m*=210±2 кг | *r*=1,0±0,06 м |
| 21. | | | *R*=1,4±0,07 м | *m*=260±3 кг | *r*=1,2±0,07 м |

## Практична робота №9

**Тема.** Визначення та виключення грубих похибок вимірювань
**Мета.** Отримати навики уникнення грубих похибок результатів експериментальних досліджень

### 3.1. Теоретичні відомості

Перед тим, як обробляти результати експерименту необхідно переконатися в їх однорідності, тобто визначити, якщо вони є, *аномальні результати*.

При побудові процедур виявлення та вилучення аномальних результатів, які різко відрізняються від інших, використовується *апарат теорії перевірки статистичних гіпотез*. Вихідним є положення, що розходження результатів викликано впливом випадкових величин і це розходження при звичайних умовах може бути представлено певним (найчастіше нормальним) законом розподілу, а підозрюваним є максимальний або мінімальний за своїм значенням результат $x_{\max}$ або $x_{\min}$ із отриманих $N$ результатів.

В цьому випадку висувається так звана нульова гіпотеза $H_0$, що $x_{\max}$ або $x_{\min}$ належить до тієї ж самої генеральної сукупності, як і всі інші $N-1$ результатів.

Перевірка нульової гіпотези полягає у тому, що значення $T_{\max}$ порівнюються з деяким граничним значенням і гіпотеза $H_0$ бракується, якщо $T_{\max}$ перебільшує це граничне значення (табл. Д1).

Беручи до уваги, що ми маємо тільки ряд експериментальних результатів, то як критерій для перевірки гіпотези слід використовувати таку величину (за К. Пірсоном та Н. Смірновим)

$$T_{\max} = \frac{x_{\max} - \overline{x}}{S},$$

де $\overline{x}$ – середнє значення результатів; $x_i$ – значення $i$-го результату; $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ – зміщена ефективна оцінка середньоквадратичного значення відхилення.

Ще один критерій вилучення одного екстремального результату, запропонований Ф. Граббсом.

Для побудови вирішального правила при вилученні максимального результату використовується величина

$$G_N = \frac{\sum_{i=1}^{N-1}\left(x_{(i)} - \bar{x}_1\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2},$$

де $\bar{x}_1 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} x_{(i)}$, $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{(i)}$.

Гіпотеза про однорідність отриманих результатів відкидається і максимальне або мінімальне значення виключається з подальшої обробки, якщо $G_N$ менше критичного значення, заданого в табл. Д2.

## 3.3. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити грубі похибки вимірювань згідно варіанту (табл. 3.1) та записати результат вимірювань.

Таблиця 3.1

| Варіант | Значення вимірювання | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| 1. | 17 | 24 | 34 | 20 | 35 | 43 | 43 | 44 | 64 | 58 | 62 | 63 | 87 | 88 | 98 |
| 2. | 14 | 27 | 23 | 25 | 34 | 49 | 43 | 58 | 67 | 70 | 57 | 72 | 89 | 73 | 79 |
| 3. | 6 | 14 | 33 | 22 | 31 | 49 | 57 | 62 | 54 | 63 | 73 | 71 | 86 | 71 | 91 |
| 4. | 17 | 19 | 38 | 35 | 34 | 46 | 44 | 44 | 51 | 66 | 60 | 72 | 76 | 76 | 78 |
| 5. | 21 | 29 | 36 | 39 | 49 | 51 | 51 | 41 | 67 | 51 | 64 | 65 | 71 | 79 | 96 |
| 6. | 7 | 27 | 32 | 31 | 37 | 34 | 42 | 63 | 59 | 51 | 74 | 77 | 74 | 89 | 93 |
| 7. | 27 | 12 | 22 | 31 | 37 | 42 | 50 | 44 | 60 | 52 | 65 | 69 | 81 | 78 | 86 |
| 8. | 16 | 31 | 26 | 35 | 48 | 40 | 55 | 44 | 62 | 56 | 72 | 82 | 69 | 80 | 92 |
| 9. | 20 | 30 | 17 | 23 | 42 | 36 | 53 | 43 | 66 | 53 | 75 | 65 | 89 | 75 | 95 |
| 10. | 10 | 28 | 18 | 36 | 41 | 31 | 56 | 62 | 62 | 70 | 69 | 78 | 67 | 77 | 79 |
| 11. | 25 | 13 | 22 | 39 | 43 | 43 | 42 | 62 | 65 | 62 | 64 | 75 | 86 | 71 | 76 |
| 12. | 20 | 26 | 27 | 28 | 29 | 39 | 48 | 48 | 48 | 65 | 76 | 61 | 81 | 70 | 79 |
| 13. | 23 | 14 | 21 | 26 | 28 | 54 | 51 | 48 | 46 | 72 | 58 | 76 | 83 | 89 | 89 |
| 14. | 12 | 24 | 36 | 31 | 28 | 40 | 50 | 51 | 48 | 54 | 66 | 68 | 77 | 74 | 93 |
| 15. | 7 | 12 | 30 | 35 | 47 | 49 | 38 | 45 | 51 | 65 | 71 | 61 | 87 | 80 | 87 |
| 16. | 7 | 14 | 21 | 41 | 33 | 47 | 42 | 48 | 52 | 55 | 63 | 77 | 87 | 85 | 87 |
| 17. | 8 | 11 | 21 | 37 | 47 | 52 | 42 | 46 | 46 | 53 | 78 | 67 | 83 | 81 | 84 |
| 18. | 24 | 27 | 23 | 26 | 29 | 50 | 47 | 61 | 68 | 52 | 62 | 77 | 89 | 76 | 98 |
| 19. | 19 | 23 | 34 | 33 | 30 | 48 | 54 | 59 | 46 | 61 | 68 | 63 | 88 | 83 | 91 |
| 20. | 12 | 30 | 32 | 21 | 28 | 47 | 35 | 45 | 53 | 67 | 57 | 64 | 88 | 72 | 84 |

## Практична робота №10

**Тема.** Апроксимація нелінійних залежностей дослідних даних методом найменших квадратів

**Мета.** Отримати навики опису дослідних даних

### 5.1. Теоретичні відомості

Підбирати емпіричні формули починають з побудови графічної залежності явища, яке вивчається. Коли точки не лежать на одній прямій проводять лінеаризацію залежності шляхом заміни змінних (табл. 5.1), зводячи до вигляду $y = A + B \cdot x$.

Коефіцієнти $A$ і $B$ підбираються за умови, що суми квадратів відхилень знайдених значень від дійсних значень мінімальні

$$\Sigma(y_i - y_{i\,розр})^2 = \min,$$

де $y_i$ – дійсні (дослідні) значення функції; $y_{i\,роз.}$ – розрахункові значення функції (в даному випадку $y_{i\,роз} = A + B \cdot x_i$).

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Таблиця 5.1

Заміна змінних при лінеаризації

| Вид функції | Заміна | | Обмеження | Зворотна заміна | |
|---|---|---|---|---|---|
| Гіперболічна $y = a_0 + a_1/x$ | $v = y$ | $u = 1/x$ | $x \neq 0$ | $a_0 = b_0$ | $a_1 = b_1$ |
| Логарифмічна $y = a_0 + a_1 \ln x$ | $v = y$ | $u = \ln x$ | $x > 0$ | $a_0 = b_0$ | $a_1 = b_1$ |
| Показникова $y = a_0 e^{a_1 x}$ | $v = \ln y$ | $u = x$ | $y > 0$, $a_0 > 0$ | $a_0 = e^{b_0}$ | $a_1 = b_1$ |
| Степенева $y = a_0 x^{a_1}$ | $v = \ln y$ | $u = \ln x$ | $x > 0$, $y > 0$, $a_0 > 0$ | $a_0 = e^{b_0}$ | $a_1 = b_1$ |
| Комбінована $1/y = a_0 + a_1 e^{-x}$ | $v = 1/y$ | $u = e^{-x}$ | $y \neq 0$ | $a_0 = b_0$ | $a_1 = b_1$ |

Результат $v = b_0 + b_1 \cdot u$

$$b_0 = \frac{\sum u^2 \sum v - \sum (u \cdot v)}{n \sum u^2 - (\sum u)^2}; \qquad b_1 = \frac{n \sum (u \cdot v) - \sum u \sum v}{n \sum u^2 - (\sum u)^2}.$$

Якість апроксимації перевіряється за критерієм Пірсона:

$$\chi^2 = \sum \frac{(y - y_м)^2}{y} < n,$$

де $n$ – число дослідних точок.

## 5.3. Завдання для індивідуальної роботи

Побудувати графік та визначити аналітичний вигляд експериментальних кривих згідно варіанту (табл. 5.2) та визначити якість апроксимації за критерієм Пірсона.

Таблиця 5.2

| № | Познач. | Експериментальні дані | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | $y$ | 20 | 15 | 10 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1,5 |
| 2 | $y$ | 25 | 12 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3,5 | 3 | 2,5 | 2 |
| 3 | $y$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 14 | 15 | 14,5 | 12,5 | 9 | 5 |
| 4 | $y$ | 4 | 7 | 10 | 12 | 13 | 14 | 14,5 | 14,5 | 14 | 12 |
| 5 | $y$ | 1 | 1,5 | 2,2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 |
| 6 | $y$ | 40 | 30 | 20 | 16 | 12 | 10 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 7 | $y$ | 50 | 24 | 16 | 12 | 10 | 8 | 7 | 7 | 6 | 6 |
| 8 | $y$ | 0 | 8 | 16 | 24 | 28 | 30 | 29 | 26 | 22 | 16 |
| 9 | $y$ | 8 | 14 | 20 | 24 | 26 | 28 | 29 | 28 | 24 | 20 |
| 10 | $y$ | 2 | 3 | 4,4 | 6 | 8 | 12 | 16 | 22 | 30 | 40 |
| 11 | $y$ | 1,3 | 1 | 0,7 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,15 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |
| 12 | $y$ | 0,1 | 0,8 | 1,3 | 1,5 | 1,8 | 2,1 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,55 |
| 13 | $y$ | 1 | 1,6 | 1,7 | 2,4 | 3 | 3,7 | 4,9 | 6,1 | 8,1 | 10,1 |
| 14 | $y$ | 1,5 | 0,7 | 0,5 | 0,9 | 1,3 | 2,5 | 3,5 | 4,6 | 5,5 | 6,9 |
| 15 | $y$ | 0 | 3,2 | 4,9 | 6 | 7 | 7,2 | 8 | 8 | 8,5 | 9 |
| 16 | $y$ | 2,6 | 2 | 1,4 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,2 |
| 17 | $y$ | 0,2 | 1,6 | 2,6 | 3 | 3,6 | 4,2 | 4,6 | 4,8 | 5 | 5,1 |
| 18 | $y$ | 4 | 3,2 | 3,4 | 4,8 | 6 | 7,4 | 9,8 | 12 | 16 | 20 |
| 19 | $y$ | 3 | 1,4 | 1 | 1,8 | 2,6 | 5 | 7 | 10 | 15 | 20 |
| 20 | $y$ | 0 | 6,4 | 9,8 | 12 | 14 | 15 | 16 | 16,1 | 15 | 12 |

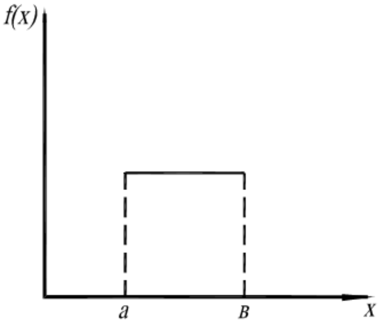
## Рекомендована література


1. Кравець С.В., Лук'янчук О.П., Тимейчук О.Ю. Дослідження робочих процесів машин і методи оптимізації: Навч.посіб. -Рівне: НУВГП, 2011. - 239с.
2. Швець Ф. Д. Методологія та організація наукових досліджень : навч. посіб. / Ф. Д. Швець. – Рівне : НУВГП, 2016. – 151 с. машин і обладнання:Навч. посібник. - Рівне: НУВГП, 2010. - 155с.


## Додаток 1

Графіки найбільш поширеної щільності розподілу ймовірності

***РІВНОМІРНЕ РОЗПОДІЛЕННЯ***

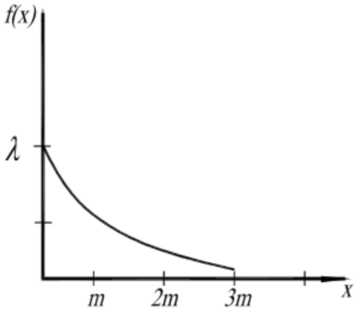



$$f(x)=\begin{cases}0 & x\notin[a,b]\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{якщо }\ x\in a,b\end{cases}$$

$$m=\frac{b+a}{2};$$

$$D=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

***Показне (експоненціальне) розподілення***

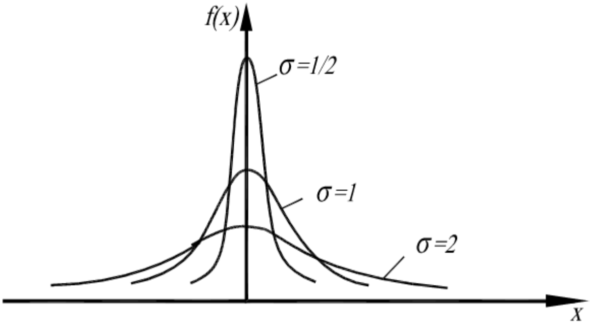



$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{якщо }\ x\geq 0\end{cases}$$

$$m=\frac{1}{\lambda};$$

$$D=\frac{1}{\lambda^2}.$$

## *НОРМАЛЬНЕ РОЗПОДІЛЕННЯ*

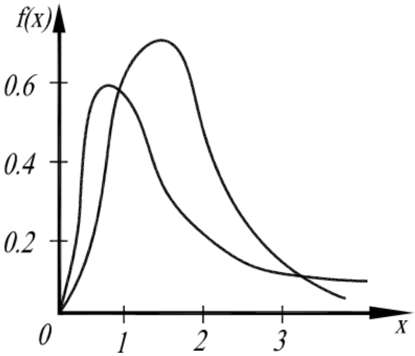



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$m = a;$$

$$D = \sigma^2.$$

## *ЛОГНОРМАЛЬНЕ РОЗПОДІЛЕННЯ*

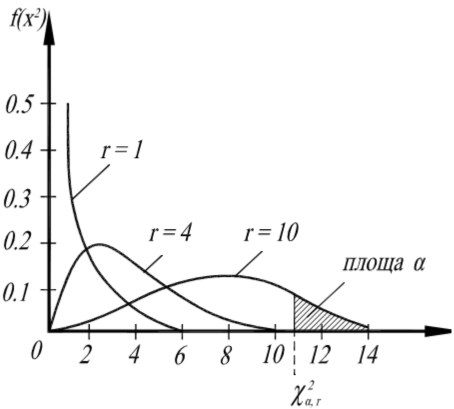



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\log(x)\mu]^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$m = \log \mu;$$

$$D = \mu\sqrt{(w^2 - w)}.$$

## *РОЗПОДІЛЕННЯ $\chi^2$ (хі-квадрат)*

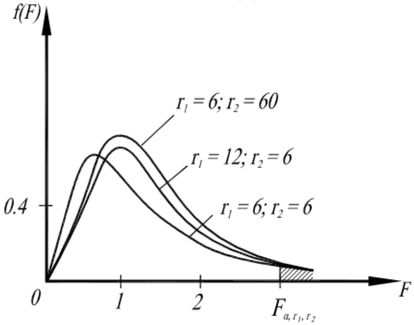



$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2)^{(r-2)/2} \cdot e^{-((x^2)/2)}}{2^{r/2} \quad \Gamma(r/2)} & \chi^2 \geq 0 \\ 0 & \chi^2 < 0 \end{cases}$$

$$m = r;$$

$$D = 2r.$$

**РОЗПОДІЛЕННЯ ФІШЕРА (F-розподілення)**




$$f(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{r_1}{2}} \dfrac{F^{\left(\frac{r_1-2}{2}\right)}}{\left[1+\left(\frac{r_1}{r_2}\right)F\right]^{\frac{r_1+2}{2}}} & F > 0 \\ 0 & F \le 0 \end{cases}$$

$$m = \frac{r_2}{(r_2-2)}, \qquad r > 2;$$

$$D = \frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}, \qquad r_2 > 4.$$

## Додаток 2.

Таблиця Д1.

Розподіл та критичні точки величини $T_{\max}$

| Кількість дослідів $N$ | Рівень значимості α=0,1 | Рівень значимості α=0,05 | Кількість дослідів $N$ | Рівень значимості α=0,1 | Рівень значимості α=0,05 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1,406 | 1,412 | 14 | 2,297 | 2,461 |
| 4 | 1,645 | 1,689 | 15 | 2,326 | 2,493 |
| 5 | 1,791 | 1,869 | 16 | 2,354 | 2,523 |
| 6 | 1,894 | 1,996 | 17 | 2,380 | 2,551 |
| 7 | 1,974 | 2,093 | 18 | 2,404 | 2,577 |
| 8 | 2,041 | 2,172 | 19 | 2,426 | 2,600 |
| 9 | 2,097 | 2,237 | 20 | 2,447 | 2,623 |
| 10 | 2,146 | 2,294 | 21 | 2,467 | 2,644 |
| 11 | 2,190 | 2,343 | 22 | 2,486 | 2,664 |
| 12 | 2,229 | 2,387 | 23 | 2,504 | 2,683 |
| 13 | 2,264 | 2,426 | 24 | 2,520 | 2,701 |
| | | | 25 | 2,537 | 2,717 |

Таблиця Д2.

Критичні значення $G_{кр}$ для різних рівнів значимості α

| Кількість дослідів $N$ | Рівень значимості α=0,1 | Рівень значимості α=0,05 | Кількість дослідів $N$ | Рівень значимості α=0,1 | Рівень значимості α=0,05 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,0109 | 0,0027 | 14 | 0,5942 | 0,5340 |
| 4 | 0,0975 | 0,0494 | 15 | 0,6134 | 0,5559 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 0,1984 | 0,1270 | 16 | 0,6306 | 0,5755 |
| 6 | 0,2826 | 0,2032 | 17 | 0,6461 | 0,5933 |
| 7 | 0,3503 | 0,2696 | 18 | 0,6601 | 0,6095 |
| 8 | 0,4050 | 0,3261 | 19 | 0,6730 | 0,6243 |
| 9 | 0,4502 | 0,3742 | 20 | 0,6848 | 0,6379 |
| 10 | 0,4881 | 0,4154 | 21 | 0,6958 | 0,6504 |
| 11 | 0,5204 | 0,4511 | 22 | 0,7058 | 0,6621 |
| 12 | 0.5483 | 0,4822 | 23 | 0,7151 | 0,6728 |
| 13 | 0,5727 | 0,5097 | 24 | 0,7238 | 0,6829 |
| | | | 25 | 0,7319 | 0,6923 |