

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет водного господарства та  
природокористування

Навчально-науковий механічний інститут  
Кафедра будівельних, дорожніх та меліоративних машин

**02-01-556М**

## **РОЗРАХУНКОВИЙ ПРАКТИКУМ**

з навчальної дисципліни

**«Динаміка робочих процесів машин»**

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня

за освітньо-професійною програмою

**«Інжиніринг машин і обладнання»**

спеціальності 133 «Галузеве машинобудування»

денної та заочної форм навчання

Рекомендовано  
науково-методичною радою  
з якості ННМІ  
Протокол №1 від 27.08.2024 р.

Рівне – 2024

Розрахунковий практикум з навчальної дисципліни «Динаміка робочих процесів машин» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Інжиніринг машин і обладнання» спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Науменко Ю. В. – Рівне : НУВГП, 2024. – 59 с.

Укладач: Науменко Ю. В., д.т.н., доцент, професор кафедри будівельних, дорожніх та меліоративних машин.

Відповідальний за випуск: Тхорук Є. І., к.т.н., доцент, в. о. завідувача кафедри будівельних, дорожніх та меліоративних машин.

Керівник групи забезпечення спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» Кравець С. В.

Попередня версія розрахункового практикуму: 02-01-546М

© Ю. В. Науменко, 2024

© НУВГП, 2024

## Зміст

<b>Вступ</b> .....	4
<b>Розрахункова схема</b> .....	6
<b>Розрахункова робота 1.</b> Визначення динамічних параметрів вільних коливань машини без урахування сил опору.....	8
<b>Розрахункова робота 2.</b> Визначення динамічних параметрів вільних коливань машини з урахуванням сил опору (загасальні коливання).....	17
<b>Розрахункова робота 3.</b> Визначення динамічних параметрів вимушених коливань машини.....	30
<b>Список літератури</b> .....	48
<b>Додаток Автоколивання</b> .....	49

## Вступ

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Динаміка робочих процесів машин» є:

- ознайомлення із основами моделювання та аналізу робочих процесів і динамічних режимів технологічних машин, а також набуття практичних навичок прогнозування та керування поведінкою оброблюваних середовищ в робочих камерах і створення на основі цього вискоєфективних процесів та обладнання;

- формування здатності розуміти фізичну сутність робочих процесів технологічних машин та використовувати основні динамічні закони протікання технологічних процесів;

- формування здатності виконувати необхідні розрахунки основних технологічних та конструктивних параметрів технологічних машин на основі методів прогнозування та аналізу динаміки робочих процесів переробки робочих середовищ.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

**знати:** основи робочих процесів, тенденцій розвитку, методів досліджень, критеріїв подібності, динамічного аналізу режимів роботи, моделювання режимів руху та взаємодії оброблюваних середовищ із робочими органами, стійкості режимів руху, оцінювання ефективності робочих процесів технологічних машин;

**вміти:** застосовувати основні методи прогнозування та динамічного аналізу робочих процесів на практиці при розрахунку раціональних технологічних та основних конструктивних параметрів технологічних машин.

### **Компетентності, що набуваються при вивченні дисципліни**

Здатність розв'язувати складні задачі і проблеми галузевого машинобудування, що передбачають дослідження та/або здійснення інновацій та характеризуються невизначеністю умов та вимог.

Здатність використовувати інформаційні та комунікаційні

технології.

Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

Здатність створювати, удосконалювати та застосовувати кількісні математичні, наукові й технічні методи та комп'ютерні програмні засоби, застосовувати системний підхід для розв'язування інженерних задач галузевого машинобудування, зокрема, в умовах технічної невизначеності.

Критичне осмислення передових для галузевого машинобудування наукових фактів, концепцій, теорій, принципів та здатність їх застосовувати для розв'язання складних задач галузевого машинобудування і забезпечення сталого розвитку.

Створювати нову техніку і технології в галузі механічної інженерії.

### **Результати вивчення дисципліни**

Знання та розуміння механіки і машинобудування та перспектив їхнього розвитку.

Здійснювати інженерні розрахунки для вирішення складних задач і практичних проблем у галузевому машинобудуванні.

Аналізувати інженерні об'єкти, процеси та методи.

Здійснювати аналіз, моделювання та створення інноваційних робочих процесів та конструкцій машин барабанного типу.

Здійснювати моделювання та створення міжгалузевого обладнання для переробки різноманітних зернистих матеріалів.

Здійснювати моделювання та створення автоколивних процесів переробки текучих робочих середовищ.

### Розрахункова схема

Машинна динамічна система (рис. 1) з одним ступенем вільності та ідеальними і утримуючими в'язями містить ланки (матеріальні тіла) 1-3 і 6, пружину та демпфер  $\beta$ .

Ланка (тіло) 1 може здійснювати поступальний рух уздовж вертикалі, ланка 2 – обертвий рух навколо осі  $O_1$ , ланка 3 – плоскопаралельний рух, ланка 6 – обертвий рух навколо осі  $O$ .

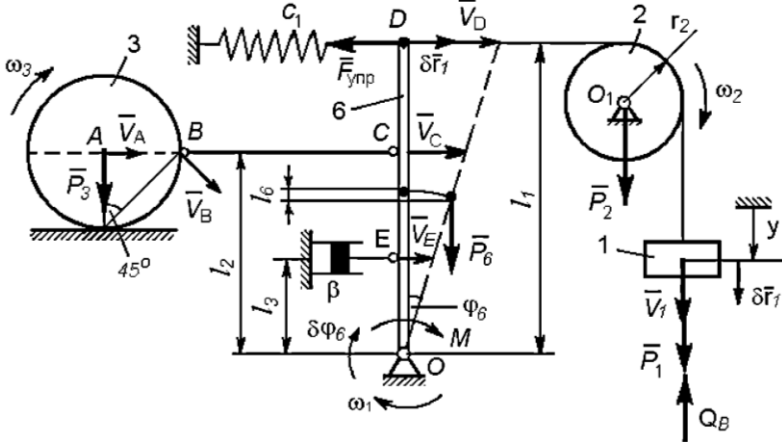


Рис. 1. Розрахункова схема коливної машинної динамічної системи з одним ступенем вільності

Машинну динамічну систему було виведено з положення рівноваги при переміщенні тіла 1. Однією узагальненою координатою системи є координата тіла 1  $y=y(t)$ , що відраховується від рівноважного положення.

На схемі машинної динамічної системи показано лінійні швидкості характерних точок  $\vec{V}_1, \vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \vec{V}_D, \vec{V}_E$  та кутові швидкості тіл  $\omega_1, \omega_2$  і  $\omega_3$ .

Вихідними даними для розрахунку є параметри машинної динамічної системи: маси ланок  $m_1, m_2, m_3$  та  $m_6$ ; лінійні розміри  $l_1, l_2$  та  $l_3$ ; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1$ ; логарифмічний декремент загасання  $L$ ; амплітуда  $M_0$  та частота  $p_{II}$  збурюючого моменту; початкові умови (параметри переміщення ланки 1 у початковий момент часу)  $y_0$  та  $\dot{y}_0$

Таблиця 1

Варіанти вихідних даних  
для виконання розрахункових робіт 1-3

Варіант	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_6$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$c_1$	$A$	$M_0$	$p_{II}$	$y_0$	$\dot{y}_0$
	кг				м			Н/м	-	Нм	$c^{-1}$	м	м/с
1	1	2	3	5	0,7	0,2	0,1	200	0,8	1	1,6	0,01	0,2
2	1	2	3	6	0,8	0,2	0,1	250	0,9	2	1,7	0,02	0,3
3	1	2	3	6	0,9	0,2	0,1	300	1	3	1,8	0,03	0,4
4	1	2	4	5	1	0,2	0,1	350	1,1	4	1,9	0,04	0,5
5	1	2	4	5	1,1	0,2	0,1	400	1,2	1	2	0,05	0,6
6	1	2	4	6	1,2	0,2	0,1	450	1,3	2	2,1	0,01	0,7
7	1	2	4	6	0,7	0,3	0,15	200	1,4	3	2,2	0,02	0,8
8	1	3	3	5	0,8	0,3	0,15	250	1,5	4	2,3	0,03	0,9
9	1	3	3	5	0,9	0,3	0,15	300	1,6	1	2,4	0,04	1
10	1	3	3	6	1	0,3	0,15	350	1,7	2	2,5	0,05	0,2
11	1	3	3	6	1,1	0,3	0,15	400	1,8	3	2,6	0,01	0,3
12	1	3	4	5	1,2	0,3	0,15	450	1,9	4	2,7	0,02	0,4
13	1	3	4	5	0,7	0,4	0,2	200	2	1	2,8	0,03	0,5
14	1	3	4	6	0,8	0,4	0,2	250	2,1	2	2,9	0,04	0,6
15	1	3	4	6	0,9	0,4	0,2	300	2,2	3	3	0,05	0,7
16	2	2	3	5	1	0,4	0,2	350	0,8	4	3,1	0,01	0,8
17	2	2	3	5	1,1	0,4	0,2	400	0,9	1	3,2	0,02	0,9
18	2	2	3	6	1,2	0,4	0,2	450	1	2	3,3	0,03	1
19	2	2	3	6	0,7	0,5	0,25	200	1,1	3	3,4	0,04	0,2
20	2	2	4	5	0,8	0,5	0,25	250	1,2	4	3,5	0,05	0,3
21	2	2	4	5	0,9	0,5	0,25	300	1,3	1	3,6	0,01	0,4
22	2	2	4	6	1	0,5	0,25	350	1,4	2	3,7	0,02	0,5
23	2	3	3	5	1,1	0,5	0,25	400	1,5	3	3,8	0,03	0,6
24	2	3	3	5	1,2	0,5	0,25	450	1,6	4	3,9	0,04	0,7
25	2	3	3	6	0,7	0,6	0,3	200	1,7	1	4	0,05	0,8
26	2	3	3	6	0,8	0,6	0,3	250	1,8	2	4,1	0,01	0,9
27	2	3	4	5	0,9	0,6	0,3	300	1,9	3	4,2	0,02	1
28	2	3	4	5	1	0,6	0,3	350	2	4	4,3	0,03	0,2
29	2	3	4	6	1,1	0,6	0,3	400	2,1	1	4,4	0,04	0,3
30	2	3	4	6	1,2	0,6	0,3	450	2,2	2	4,5	0,05	0,4

## Розрахункова робота 1

### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ

#### Мета роботи:

1. Визначити рівняння вільних коливань машинної динамічної системи із одним ступенем вільності навколо стійкого положення рівноваги.
2. Побудувати графік вільних коливань машини.

#### 1.1. Вихідні дані

Для умови розрахункової роботи 1, у якій не враховуються сили опору та збурюючі сили, відключеними вважаються демпфер  $\beta$  та збурюючий момент  $M$ .

Вважається, що машинна динамічна система здійснює вільні коливання (рис. 2).

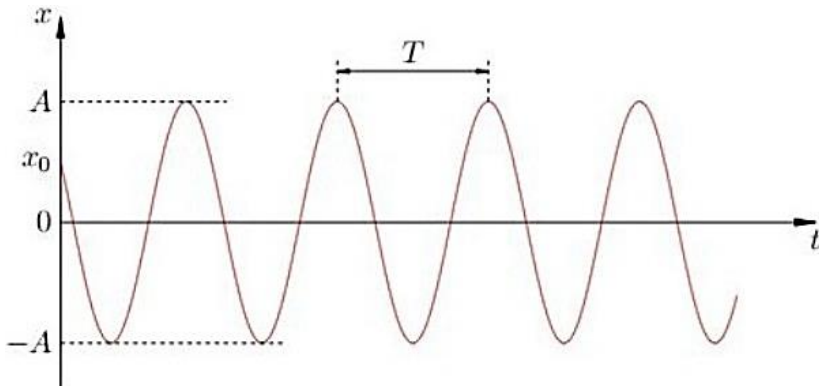


Рис. 2. Графік вільних коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності



## 1.2. Порядок виконання роботи 1

1. Вибрати за варіантом з табл. 1 вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  та  $m_6$ ; лінійні розміри  $l_1$  та  $l_2$ ; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1$ ; початкові умови (параметри переміщення тіла 1 у початковий момент часу)  $y_0$  та  $\dot{y}_0$ .

2. Визначити узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи  $a$ , кг:

$$a = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

3. Визначити статичну деформацію пружини  $\lambda_{ст}$ , м:

$$\lambda_{ст} = \frac{m_1 g}{c_1}.$$

4. Визначити узагальнений коефіцієнт жорсткості машинної динамічної системи  $c$ , Н/м:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1}.$$

5. Визначити колову частоту вільних коливань  $k$ ,  $c^{-1}$ :

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

6. Визначити період коливань  $T$ , с:

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

7. Визначити амплітуду коливань  $A$ , м:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{k^2}}.$$

8. Визначити кутовий зсув фази коливань  $\gamma$ , рад.:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{ky_0}{\dot{y}_0}\right).$$

9. Записати рівняння вільних коливань машинної динамічної системи, м:

$$y = A \sin(kt + \gamma).$$

10. Визначити масштаб переміщення графіка коливань  $\mu_A$ , м/мм:

$$\mu_A = \frac{A}{60}.$$

11. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для початкового моменту часу ( $t=0$ )  $\bar{y}_0$ , мм:

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{\mu_A}.$$

12. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $\bar{A}$ , мм:

$$\bar{A} = \frac{A}{\mu_A} = 60 \text{ мм}.$$

13. Визначити часовий зсув фази коливань  $t_0$ , с:

$$t_0 = \frac{\gamma}{k}.$$

14. Визначити масштаб часу графіка коливань  $\mu_t$ , с/мм:

$$\mu_t = \frac{T}{100}.$$

15. Визначити момент часу  $t_1$ , с:

$$t_1 = \frac{T}{4} - t_0.$$

16. Визначити момент часу  $t_2$ , с:

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_0.$$

17. Визначити момент часу  $t_3$ , с:

$$t_3 = \frac{3T}{4} - t_0.$$

18. Визначити момент часу  $t_4$ , с:

$$t_4 = T - t_0.$$

19. Визначити момент часу  $t_5$ , с:

$$t_5 = \frac{5T}{4} - t_0.$$

20. Визначити момент часу  $t_6$ , с:

$$t_6 = \frac{3T}{2} - t_0.$$

21. Визначити момент часу  $t_7$ , с:

$$t_7 = \frac{7T}{4} - t_0.$$

22. Визначити момент часу  $t_8$ , с:

$$t_8 = 2T - t_0.$$

23. Визначити момент часу  $t_9$ , с:

$$t_9 = 2T.$$

24. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_1$ )  $\bar{t}_1$ , мм:

$$\bar{t}_1 = \frac{t_1}{\mu_t}.$$

25. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_2$ )  $\bar{t}_2$ , мм:

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{\mu_t}.$$

26. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_3$ )  $\bar{t}_3$ , мм:

$$\bar{t}_3 = \frac{t_3}{\mu_t}.$$

27. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_4$ )  $\bar{t}_4$ , мм:

$$\bar{t}_4 = \frac{t_4}{\mu_t}.$$

28. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_5$ )  $\bar{t}_5$ , мм:

$$\bar{t}_5 = \frac{t_5}{\mu_t}.$$

29. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_6$ )  $\bar{t}_6$ , мм:

$$\bar{t}_6 = \frac{t_6}{\mu_t}.$$

30. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_7$ )  $\bar{t}_7$ , мм:

$$\bar{t}_7 = \frac{t_7}{\mu_t}.$$

31. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_8$ )  $\bar{t}_8$ , мм:

$$\bar{t}_8 = \frac{t_8}{\mu_t}$$

32. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_9$ )  $\bar{t}_9$ , мм:

$$\bar{t}_9 = \frac{t_9}{\mu_t} = 200 \text{ мм.}$$

33. Скласти таблицю параметрів коливань у  $t$  та координат ( $\bar{y}$  і  $\bar{t}$ ) у масштабах для 10 точок графіка (0- $t_9$ ):

Таблиця 2

Таблиця параметрів коливань та координат точок графіку

№	позначення точки побудови	параметри коливань		координати точок графіку коливань	
		$t$	$y$	$\bar{t}$	$\bar{y}$
		с	м	мм	
1	0	0	$y_0$ (вихідні дані)	0	$\bar{y}_0$ (п. 11)
2	$t_1$	$t_1$ (п. 15)	$A$ (п. 7)	$\bar{t}_1$ (п. 24)	60 (п. 12)
3	$t_2$	$t_2$ (п. 16)	0	$\bar{t}_2$ (п. 25)	0
4	$t_3$	$t_3$ (п. 17)	$-A$ (п. 7)	$\bar{t}_3$ (п. 26)	-60 (п. 12)
5	$t_4$	$t_4$ (п. 18)	0	$\bar{t}_4$ (п. 27)	0
6	$t_5$	$t_5$ (п. 19)	$A$ (п. 7)	$\bar{t}_5$ (п. 28)	60 (п. 12)
7	$t_6$	$t_6$ (п. 20)	0	$\bar{t}_6$ (п. 29)	0
8	$t_7$	$t_7$ (п. 21)	$-A$ (п. 7)	$\bar{t}_7$ (п. 30)	-60 (п. 12)
9	$t_8$	$t_8$ (п. 22)	0	$\bar{t}_8$ (п. 31)	0
10	$t_9$	$t_9$ (п. 23)	$y_0$ (вихідні дані)	200 (п. 32)	$\bar{y}_0$ (п. 11)

34. Побудувати в координатах у та  $t$  ( $\bar{y}$  та  $\bar{t}$ ) у масштабах 10 точок за даними табл. 2. Обвести точки плавною кривою та отримати графік двох періодів вільних коливань машинної динамічної системи.

### 1.3. Приклад виконання роботи 1

#### Розрахункова робота 1

#### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ БЕЗ УРАХУВАННЯ СИЛ ОПОРУ

1. Вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1=2$  кг,  $m_2=2$  кг,  $m_3=3$  кг та  $m_6=6$  кг; лінійні розміри  $l_1=0,6$  м та  $l_2=0,4$  м; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1=400$  Н/м; початкові умови (параметри переміщення ланки 1 у початковий момент часу)  $y_0=0,02$  м та  $\dot{y}_0=0,2$  м/с.

2. Узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи:

$$\begin{aligned} a &= m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{0,4}{0,6}\right)^2 = 7,00 \text{ кг.} \end{aligned}$$

3. Статична деформація пружини:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{m_1 g}{c_1} = \frac{2 \cdot 9,81}{400} = 0,0491 \text{ м.}$$

4. Узагальнений коефіцієнт жорсткості машинної динамічної системи:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1} = 400 - \frac{6 \cdot 9,81}{2 \cdot 0,6} = 351 \text{ Н.}$$

5. Колова частота вільних коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{351}{7}} = 7,08 \text{ с}^{-1}.$$

6. Період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{7,08} = 0,887 \text{ с.}$$

7. Амплітуда коливань:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{k^2}} = \sqrt{0,02^2 + \frac{0,2^2}{7,08^2}} = 0,0346 \text{ м.}$$

8. Кутовий зсув фази коливань:

$$\gamma = \arctg\left(\frac{ky_0}{\dot{y}_0}\right) = \arctg\left(\frac{7,08 \cdot 0,02}{0,2}\right) = 0,616 \text{ рад.}$$

9. Рівняння вільних коливань машинної динамічної системи:

$$y = A \sin(kt + \gamma) = 0,0346 \cdot \sin(7,08 \cdot t + 0,616) \text{ м.}$$

10. Масштаб переміщення графіка коливань:

$$\mu_A = \frac{A}{60} = \frac{0,0346}{60} = 0,000577 \text{ м/мм.}$$

11. Довжина відрізка на осі переміщень у для початкового моменту часу ( $t=0$ ):

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{\mu_A} = \frac{0,02}{0,000577} = 34,7 \approx 35 \text{ мм.}$$

12. Довжина відрізка на осі переміщень у для амплітуди коливань:

$$\bar{A} = \frac{A}{\mu_A} = \frac{0,0346}{0,000577} = 60 \text{ мм.}$$

13. Часовий зсув фази коливань:

$$t_0 = \frac{\gamma}{k} = \frac{0,615}{7,08} = 0,087 \text{ с.}$$

14. Масштаб часу графіка коливань:

$$\mu_t = \frac{T}{100} = \frac{0,887}{100} = 0,00887 \text{ с/мм.}$$

15. Момент часу 1:

$$t_1 = \frac{T}{4} - t_0 = \frac{0,887}{4} - 0,087 = 0,135 \text{ с.}$$

16. Момент часу 2:

$$t_2 = \frac{T}{2} - t_0 = \frac{0,887}{2} - 0,087 = 0,357 \text{ с.}$$

17. Момент часу 3:

$$t_3 = \frac{3T}{4} - t_0 = \frac{3 \cdot 0,887}{4} - 0,087 = 0,578 \text{ с.}$$

18. Момент часу 4:

$$t_4 = T - t_0 = 0,887 - 0,087 = 0,8 \text{ с.}$$

19. Момент часу 5:

$$t_5 = \frac{5T}{4} - t_0 = \frac{5 \cdot 0,887}{4} - 0,087 = 1,022 \text{ с.}$$

20. Момент часу 6:

$$t_6 = \frac{3T}{2} - t_0 = \frac{3 \cdot 0,887}{2} - 0,087 = 1,244 \text{ с.}$$

21. Момент часу 7:

$$t_7 = \frac{7T}{4} - t_0 = \frac{7 \cdot 0,887}{4} - 0,087 = 1,465 \text{ с.}$$

22. Момент часу 8:

$$t_8 = 2T - t_0 = 2 \cdot 0,887 - 0,087 = 1,687 \text{ с.}$$

23. Момент часу 9:

$$t_9 = 2T = 2 \cdot 0,887 = 1,774 \text{ с.}$$

24. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_1$ :

$$\bar{t}_1 = \frac{t_1}{\mu_t} = \frac{0,135}{0,00887} = 15,2 \approx 15 \text{ мм.}$$

25. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_2$ :

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{\mu_t} = \frac{0,357}{0,00877} = 40,2 \approx 40 \text{ мм.}$$

26. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_3$ :

$$\bar{t}_3 = \frac{t_3}{\mu_t} = \frac{0,578}{0,00877} = 65,2 \approx 65 \text{ мм.}$$

27. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_4$ :

$$\bar{t}_4 = \frac{t_4}{\mu_t} = \frac{0,8}{0,00877} = 90,2 \approx 90 \text{ мм.}$$

28. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_5$ :

$$\bar{t}_5 = \frac{t_5}{\mu_t} = \frac{1,022}{0,00877} = 115,2 \approx 115 \text{ мм.}$$

29. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_6$ :

$$\bar{t}_6 = \frac{t_6}{\mu_t} = \frac{1,244}{0,00877} = 140,2 \approx 140 \text{ мм.}$$

30. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_7$ :

$$\bar{t}_7 = \frac{t_7}{\mu_t} = \frac{1,465}{0,00877} = 165,2 \approx 165 \text{ мм.}$$

31. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_8$ :

$$\bar{t}_8 = \frac{t_8}{\mu_t} = \frac{1,687}{0,00877} = 190,2 \approx 190 \text{ мм.}$$

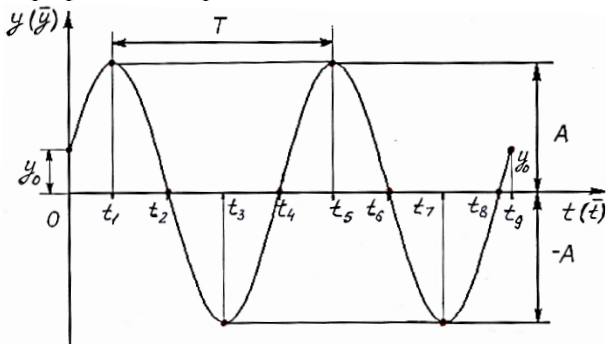
32. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_9$ :

$$\bar{t}_9 = \frac{t_9}{\mu_t} = \frac{1,774}{0,00877} = 200 \text{ мм.}$$

33. Таблиця параметрів коливань та координат точок графіку

№	позначення точки побудови	параметри коливань		координати точок графіку коливань	
		$t$	$y$	$\bar{t}$	$\bar{y}$
		с	м	мм	
1	0	0	0,02	0	35
2	$t_1$	0,135	0,0346	15	60
3	$t_2$	0,357	0	40	0
4	$t_3$	0,578	-0,0346	65	-60
5	$t_4$	0,8	0	90	0
6	$t_5$	1,02	0,0346	115	60
7	$t_6$	1,24	0	140	0
8	$t_7$	1,47	-0,0346	165	-60
9	$t_8$	1,69	0	190	0
10	$t_9$	1,77	0,02	200	35

34. Графік двох періодів вільних коливань машини





## Розрахункова робота 2

### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ (ЗАГАСАЛЬНІ КОЛИВАННЯ)

#### Мета роботи:

1. Визначити рівняння загасальних коливань машинної динамічної системи із одним ступенем вільності навколо стійкого положення рівноваги з урахуванням сил опору.

2. Побудувати графік загасальних коливань машинної динамічної системи.

#### 2.1. Вихідні дані

Для умови розрахункової роботи 2, у якій не враховуються збурюючі сили, відключеним вважаються збурюючий момент  $M$ .

Вважається, що машинна динамічна система здійснює загасальні коливання (рис. 3).

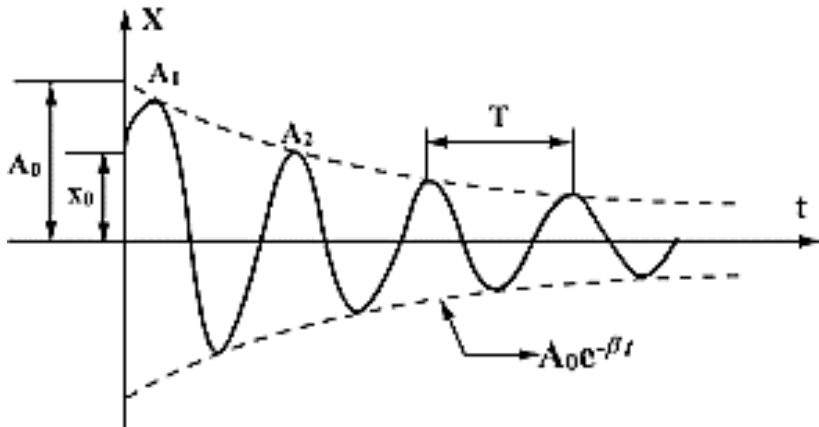


Рис. 3. Графік загасальних коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності

## 2.2. Порядок виконання роботи 2

1. Вибрати за варіантом з табл. 1 вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1, m_2, m_3$  та  $m_6$ ; лінійні розміри  $l_1, l_2$  та  $l_3$ ; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1$ ; логарифмічний декремент загасання  $\Lambda$ ; початкові умови (параметри переміщення ланки 1 у початковий момент часу)  $y_0$  та  $\dot{y}_0$ .

2. Визначити узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи  $a$ , кг:

$$a = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

3. Визначити статичну деформацію пружини  $\lambda_{ст}$ , м:

$$\lambda_{ст} = \frac{m_1 g}{c_1}.$$

4. Визначити узагальнений коефіцієнт жорсткості машинної динамічної системи  $c$ , Н/м:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1}.$$

5. Визначити колову частоту вільних коливань  $k$ ,  $c^{-1}$ :

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

6. Визначити коефіцієнт загасання  $n$ ,  $c^{-1}$ :

$$n = \frac{k\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}}$$

7. Визначити колову частоту загасальних коливань  $k_1$ ,  $c^{-1}$ :

$$k_1 = \sqrt{k^2 + n^2}.$$

8. Визначити узагальнений коефіцієнт опору  $b$ , кг/с:

$$b = 2na.$$

9. Визначити коефіцієнт демпфування  $\beta$ , кг/с:

$$\beta = \frac{l_1}{l_3} b.$$

10. Визначити умовну початкову амплітуду коливань  $A_1$ , м:

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y_0 n + \dot{y}_0)^2}{k_1^2}}.$$

12. Визначити кутовий зсув фази коливань  $\gamma_1$ , рад.:

$$\gamma_1 = \arctg\left(\frac{k_1 y_0}{n y_0 + \dot{y}_0}\right).$$

13. Визначити період загасальних коливань  $T_1$ , с:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

14. Записати рівняння загасальних коливань машинної динамічної системи, м:

$$y = A_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \gamma_1).$$

15. Визначити часовий зсув фази коливань  $t_0$ , с:

$$t_0 = \frac{\gamma_1}{k_1}.$$

16. Визначити момент часу  $t_1$ , с:

$$t_1 = \frac{T_1}{4} - t_0.$$

17. Визначити момент часу  $t_2$ , с:

$$t_2 = \frac{T_1}{2} - t_0.$$

18. Визначити момент часу  $t_3$ , с:

$$t_3 = \frac{3T_1}{4} - t_0.$$

19. Визначити момент часу  $t_4$ , с:

$$t_4 = T_1 - t_0.$$

20. Визначити момент часу  $t_5$ , с:

$$t_5 = \frac{5T_1}{4} - t_0.$$

21. Визначити момент часу  $t_6$ , с:

$$t_6 = \frac{3T_1}{2} - t_0.$$

22. Визначити момент часу  $t_7$ , с:

$$t_7 = \frac{7T_1}{4} - t_0.$$

23. Визначити момент часу  $t_8$ , с:

$$t_8 = 2T_1 - t_0.$$

24. Визначити момент часу  $t_9$ , с:

$$t_9 = 2T_1.$$

25. Визначити амплітуду коливань для моменту часу  $t_1$   $A_{t_1}$ ,

м:

$$A_{t_1} = A_1 e^{-nt_1}.$$

26. Визначити амплітуду коливань для моменту часу  $t_3$   $A_{t_3}$ ,

м:

$$A_{t_3} = A_1 e^{-nt_3}.$$

27. Визначити амплітуду коливань для моменту часу  $t_5$   $A_{t_5}$ ,

м:

$$A_{t_5} = A_1 e^{-nt_5}.$$

28. Визначити амплітуду коливань для моменту часу  $t_7$   $A_{t_7}$ ,

м:

$$A_{t_7} = A_1 e^{-nt_7}.$$

29. Визначити амплітуду коливань для моменту часу  $t_9$   $A_{t_9}$ ,

м:

$$A_{t_9} = A_1 e^{-nt_9} \sin(k_1 t_9 + \gamma_1).$$

30. Визначити масштаб часу графіка коливань  $\mu_t$ , с/мм:

$$\mu_t = \frac{T_1}{100}.$$

31. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $(t_1)$   $\bar{t}_1$ , мм:

$$\bar{t}_1 = \frac{t_1}{\mu_t}.$$

32. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $(t_2)$   $\bar{t}_2$ , мм:

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{\mu_t}.$$

33. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $(t_3)$   $\bar{t}_3$ , мм:

$$\bar{t}_3 = \frac{t_3}{\mu_t}.$$

34. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $(t_4)$   $\bar{t}_4$ , мм:

$$\bar{t}_4 = \frac{t_4}{\mu_t}$$

35. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_5$ )  $\bar{t}_5$ , мм:

$$\bar{t}_5 = \frac{t_5}{\mu_t}$$

36. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_6$ )  $\bar{t}_6$ , мм:

$$\bar{t}_6 = \frac{t_6}{\mu_t}$$

37. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_7$ )  $\bar{t}_7$ , мм:

$$\bar{t}_7 = \frac{t_7}{\mu_t}$$

38. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_8$ )  $\bar{t}_8$ , мм:

$$\bar{t}_8 = \frac{t_8}{\mu_t}$$

39. Визначити довжину відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу ( $t_9$ )  $\bar{t}_9$ , мм:

$$\bar{t}_9 = \frac{t_9}{\mu_t} = 200 \text{ мм.}$$

40. Визначити масштаб переміщення графіка коливань  $\mu_A$ , м/мм:

$$\mu_A = \frac{A_1}{60}$$

41. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для умовної початкової амплітуди коливань  $A_1$ , мм:

$$\bar{A}_1 = \frac{A_1}{\mu_A} = 60 \text{ мм.}$$

42. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для початкового моменту часу ( $t=0$ )  $\bar{y}_0$ , мм:

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{\mu_A}$$

43. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для

амплітуди коливань  $(A_{t_1}) \overline{A_{t_1}}$ , мм:

$$\overline{A_{t_1}} = \frac{A_{t_1}}{\mu_A}.$$

44. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $(A_{t_3}) \overline{A_{t_3}}$ , мм:

$$\overline{A_{t_3}} = \frac{A_{t_3}}{\mu_A}.$$

45. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $(A_{t_5}) \overline{A_{t_5}}$ , мм:

$$\overline{A_{t_5}} = \frac{A_{t_5}}{\mu_A}.$$

46. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $(A_{t_7}) \overline{A_{t_7}}$ , мм:

$$\overline{A_{t_7}} = \frac{A_{t_7}}{\mu_A}.$$

47. Визначити довжину відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $(A_{t_9}) \overline{A_{t_9}}$ , мм:

$$\overline{A_{t_9}} = \frac{A_{t_9}}{\mu_A}.$$

48. Скласти таблицю параметрів коливань у  $i$  та координат  $(\bar{y}$  і  $\bar{t})$  у масштабах для 10 точок графіка 0- $t_9$ :

Таблиця 3

Таблиця параметрів коливань та координат точок графіку

№	позначення точки побудови	параметри коливань		координати точок графіку коливань	
		$t$	$y$	$\bar{t}$	$\bar{y}$
		с	м	мм	
1	0	0	$y_0$ (вихідні дані)	0	$\bar{y}_0$ (п. 42)
2	$t_1$	$t_1$ (п. 16)	$A_{t_1}$ (п. 25)	$\bar{t}_1$ (п. 31)	$\bar{A}_{t_1}$ (п. 43)
3	$t_2$	$t_2$ (п. 17)	0	$\bar{t}_2$ (п. 32)	0
4	$t_3$	$t_3$ (п. 18)	$-A_{t_3}$ (п. 26)	$\bar{t}_3$ (п. 33)	$-\bar{A}_{t_3}$ (п. 44)
5	$t_4$	$t_4$ (п. 19)	0	$\bar{t}_4$ (п. 34)	0
6	$t_5$	$t_5$ (п. 20)	$A_{t_5}$ (п. 27)	$\bar{t}_5$ (п. 35)	$\bar{A}_{t_5}$ (п. 45)
7	$t_6$	$t_6$ (п. 21)	0	$\bar{t}_6$ (п. 36)	0
8	$t_7$	$t_7$ (п. 22)	$-A_{t_7}$ (п. 28)	$\bar{t}_7$ (п. 37)	$-\bar{A}_{t_7}$ (п. 46)
9	$t_8$	$t_8$ (п. 23)	0	$\bar{t}_8$ (п. 38)	0
10	$t_9$	$t_9$ (п. 24)	$A_{t_9}$ (п. 29)	200 (п. 39)	$\bar{A}_{t_9}$ (п. 47)

49. Побудувати в координатах  $y$  та  $t$  ( $\bar{y}$  та  $\bar{t}$ ) у масштабах 10 точок за даними табл. 3. Обвести точки плавною суцільною кривою та отримати графік двох періодів загасальних коливань машинної динамічної системи.

50. Побудувати в координатах  $y$  та  $t$  ( $\bar{y}$  та  $\bar{t}$ ) у масштабах 2 точки  $\bar{A}_1=60$  мм та  $-\bar{A}_1=-60$  мм для умовних початкових амплітуд коливань за даними п. 41. Обвести точки  $\bar{A}_1$ ,  $\bar{A}_{t_1}$  та  $\bar{A}_{t_5}$  плавною штриховою кривою та отримати графік додатної оiginalної амплітуд загасальних коливань  $A_1e^{-mt}$ . Обвести точки  $-\bar{A}_1$ ,  $-\bar{A}_{t_3}$  та  $-\bar{A}_{t_7}$  плавною штриховою кривою та отримати графік від'ємної оiginalної амплітуд загасальних коливань  $-A_1e^{-mt}$ , що є симетричним до графіка  $A_1e^{-mt}$  відносно осі  $t$ .

## 2.3. Приклад виконання роботи 2

### Розрахункова робота 2

#### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ (ЗАГАСАЛЬНІ КОЛИВАННЯ)

1. Вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1=2$  кг,  $m_2=2$  кг,  $m_3=3$  кг та  $m_6=6$  кг; лінійні розміри  $l_1=0,6$  м,  $l_2=0,4$  м та  $l_3=0,2$  м; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1=400$  Н/м; логарифмічний декремент загасання  $\Lambda=1,4$ ; початкові умови (параметри переміщення ланки 1 у початковий момент часу)  $y_0=0,02$  м та  $\dot{y}_0=0,2$  м/с.

2. Узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи:

$$a = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 =$$
$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{0,4}{0,6}\right)^2 = 7,00 \text{ кг.}$$

3. Статична деформація пружини:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{m_1 g}{c_1} = \frac{2 \cdot 9,81}{400} = 0,0491 \text{ м.}$$

4. Узагальнений коефіцієнт жорсткості машинної динамічної системи:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1} = 400 - \frac{6 \cdot 9,81}{2 \cdot 0,6} = 351 \text{ Н/м.}$$

5. Колова частота вільних коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{351}{7}} = 7,08 \text{ с}^{-1}.$$

6. Коефіцієнт загасання:

$$n = \frac{k\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}} = \frac{7,08 \cdot 1,4}{\sqrt{1,4^2 + 4 \cdot 3,14^2}} = 1,54 \text{ с}^{-1}$$



7. Колова частота загасальних коливань:

$$k_1 = \sqrt{k^2 + n^2} = \sqrt{7,08^2 + 1,54^2} = 6,91 \text{ с}^{-1}.$$

8. Узагальнений коефіцієнт опору:

$$b = 2na = 2 \cdot 1,54 \cdot 7 = 21,56 \text{ кг/с}.$$

9. Коефіцієнт демпфування:

$$\beta = \frac{l_1}{l_3} b = \frac{0,6}{0,2} \cdot 21,56 = 64,68 \text{ кг/с}.$$

10. Умовна початкова амплітуда коливань:

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y_0 n + \dot{y}_0)^2}{k_1^2}} = \sqrt{0,02^2 + \frac{(0,02 \cdot 1,54 + 0,2)^2}{6,91^2}} = 0,0389 \text{ м}.$$

12. Кутовий зсув фази коливань:

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{k_1 y_0}{n y_0 + \dot{y}_0} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{6,91 \cdot 0,02}{1,54 \cdot 0,02 + 0,2} \right) = 0,54 \text{ рад}.$$

13. Період загасальних коливань:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2 \cdot 3,14}{6,91} = 0,909 \text{ с}.$$

14. Рівняння загасальних коливань машинної динамічної системи:

$$y = A_1 e^{-nt} \sin(k_1 t + \gamma_1) = 0,0389 \cdot e^{-1,54t} \cdot \sin(6,91 \cdot t + 0,54) \text{ м}.$$

15. Часовий зсув фази коливань:

$$t_0 = \frac{\gamma_1}{k_1} = \frac{0,54}{6,91} = 0,0781 \text{ с}.$$

16. Момент часу 1:

$$t_1 = \frac{T_1}{4} - t_0 = \frac{0,909}{4} - 0,0781 = 0,149 \text{ с}.$$

17. Момент часу 2:

$$t_2 = \frac{T_1}{2} - t_0 = \frac{0,909}{2} - 0,0781 = 0,376 \text{ с}.$$

18. Момент часу 3:

$$t_3 = \frac{3T_1}{4} - t_0 = \frac{3 \cdot 0,909}{4} - 0,0781 = 0,604 \text{ с.}$$

19. Момент часу 4:

$$t_4 = T_1 - t_0 = 0,909 - 0,0781 = 0,831 \text{ с.}$$

20. Момент часу 5:

$$t_5 = \frac{5T_1}{4} - t_0 = \frac{5 \cdot 0,909}{4} - 0,0781 = 1,058 \text{ с.}$$

21. Момент часу 6:

$$t_6 = \frac{3T_1}{2} - t_0 = \frac{3 \cdot 0,909}{2} - 0,0781 = 1,285 \text{ с.}$$

22. Момент часу 7:

$$t_7 = \frac{7T_1}{4} - t_0 = \frac{7 \cdot 0,909}{4} - 0,0781 = 1,513 \text{ с.}$$

23. Момент часу 8:

$$t_8 = 2T_1 - t_0 = 2 \cdot 0,909 - 0,0781 = 1,74 \text{ с.}$$

24. Момент часу 9:

$$t_9 = 2T_1 = 2 \cdot 0,909 = 1,818 \text{ с.}$$

25. Амплітуда коливань для моменту часу  $t_1$ :

$$A_{t_1} = A_1 e^{-nt_1} = 0,0389 \cdot e^{-1,54 \cdot 0,149} = 0,0309 \text{ м.}$$

26. Амплітуда коливань для моменту часу  $t_3$ :

$$A_{t_3} = A_1 e^{-nt_3} = 0,0389 \cdot e^{-1,54 \cdot 0,604} = 0,0153 \text{ м.}$$

27. Амплітуда коливань для моменту часу  $t_5$ :

$$A_{t_5} = A_1 e^{-nt_5} = 0,0389 \cdot e^{-1,54 \cdot 1,058} = 0,00763 \text{ м.}$$

28. Амплітуда коливань для моменту часу  $t_7$ :

$$A_{t_7} = A_1 e^{-nt_7} = 0,0389 \cdot e^{-1,54 \cdot 1,513} = 0,00378 \text{ м.}$$

29. Амплітуда коливань для моменту часу  $t_9$ :

$$\begin{aligned} A_{t_9} &= A_1 e^{-nt_9} \sin(k_1 t_9 + \gamma_1) = \\ &= 0,0389 \cdot e^{-1,54 \cdot 1,818} \cdot \sin(6,91 \cdot 1,818 + 0,54) = \\ &= 0,00121 \text{ м.} \end{aligned}$$

30. Масштаб часу графіка коливань:

$$\mu_t = \frac{T_1}{100} = \frac{0,909}{100} = 0,00909 \text{ с/мм}$$

31. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_1$ :

$$\bar{t}_1 = \frac{t_1}{\mu_t} = \frac{0,149}{0,00909} = 16,4 \approx 16 \text{ мм.}$$

32. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_2$ :

$$\bar{t}_2 = \frac{t_2}{\mu_t} = \frac{0,376}{0,00909} = 41,4 \approx 41 \text{ мм.}$$

33. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_3$ :

$$\bar{t}_3 = \frac{t_3}{\mu_t} = \frac{0,604}{0,00909} = 66,4 \approx 66 \text{ мм.}$$

34. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_4$ :

$$\bar{t}_4 = \frac{t_4}{\mu_t} = \frac{0,831}{0,00909} = 91,4 \approx 91 \text{ мм.}$$

35. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_5$ :

$$\bar{t}_5 = \frac{t_5}{\mu_t} = \frac{1,058}{0,00909} = 116,4 \approx 116 \text{ мм.}$$

36. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_6$ :

$$\bar{t}_6 = \frac{t_6}{\mu_t} = \frac{1,285}{0,00909} = 141,4 \approx 141 \text{ мм.}$$

37. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_7$ :

$$\bar{t}_7 = \frac{t_7}{\mu_t} = \frac{1,513}{0,00909} = 166,4 \approx 166 \text{ мм.}$$

38. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_8$ :

$$\bar{t}_8 = \frac{t_8}{\mu_t} = \frac{1,74}{0,00909} = 191,4 \approx 191 \text{ мм.}$$

39. Довжина відрізка на осі часу  $t$  для моменту часу  $t_9$ :

$$\bar{t}_9 = \frac{t_9}{\mu_t} = 200 \text{ мм.}$$

40. Масштаб переміщення графіка коливань:

$$\mu_A = \frac{A_1}{60} = \frac{0,0389}{60} = 0,000648 \text{ м/мм.}$$

41. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для умовної початкової амплітуди коливань:

$$\bar{A}_1 = \frac{A_1}{\mu_A} = 60 \text{ мм.}$$

42. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для початкового

моменту часу  $t=0$ :

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{\mu_A} = \frac{0,02}{0,000648} = 30,9 \approx 31 \text{ мм.}$$

43. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $A_{t_1}$ :

$$\bar{A}_{t_1} = \frac{A_{t_1}}{\mu_A} = \frac{0,0309}{0,000648} = 47,7 \approx 48 \text{ мм.}$$

44. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $A_{t_3}$ :

$$\bar{A}_{t_3} = \frac{A_{t_3}}{\mu_A} = \frac{0,0153}{0,000648} = 23,6 \approx 24 \text{ мм.}$$

45. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $A_{t_5}$ :

$$\bar{A}_{t_5} = \frac{A_{t_5}}{\mu_A} = \frac{0,00763}{0,000648} = 11,8 \approx 12 \text{ мм.}$$

46. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $A_{t_7}$ :

$$\bar{A}_{t_7} = \frac{A_{t_7}}{\mu_A} = \frac{0,00378}{0,000648} = 5,83 \approx 6 \text{ мм.}$$

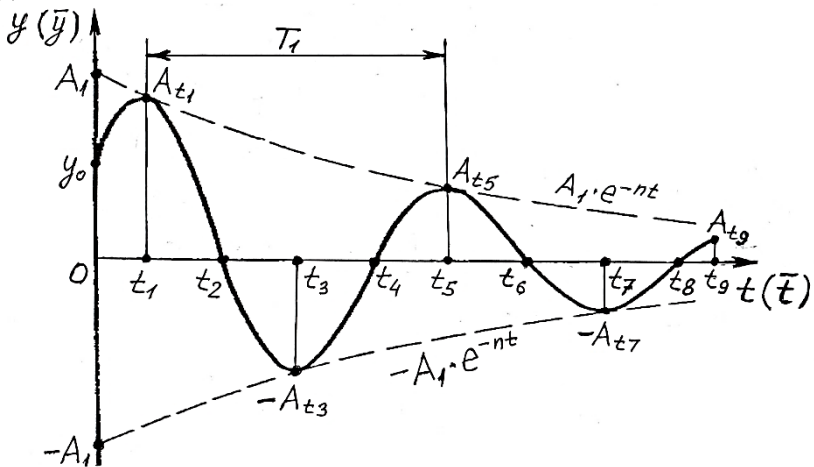
47. Довжина відрізка на осі переміщень  $y$  для амплітуди коливань  $A_{t_9}$ :

$$\bar{A}_{t_9} = \frac{A_{t_9}}{\mu_A} = \frac{0,00121}{0,000648} = 1,87 \approx 2 \text{ мм.}$$

48. Таблиця параметрів коливань та координат точок графіку

№	позначення точки побудови	параметри коливань		координати точок графіку коливань	
		$t$	$y$	$\bar{t}$	$\bar{y}$
		с	м	мм	
1	0	0	0,02	0	31
2	$t_1$	0,149	0,0309	16	48
3	$t_2$	0,376	0	41	0
4	$t_3$	0,604	-0,0153	66	-24
5	$t_4$	0,831	0	91	0
6	$t_5$	1,058	0,00763	116	12
7	$t_6$	1,285	0	141	0
8	$t_7$	1,543	-0,00378	166	-6
9	$t_8$	1,74	0	191	0
10	$t_9$	1,818	0,00121	200	2

49. Графік двох періодів загасальних коливань машинної динамічної системи



## Розрахункова робота 3

### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

#### Мета роботи:

1. Визначити рівняння усталених вимушених коливань машинної динамічної системи із одним ступенем вільності навколо стійкого положення рівноваги з урахуванням сил опору.
2. Побудувати графіки амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристики усталених вимушених коливань машинної динамічної системи.

#### 2.1. Вихідні дані

Для умови розрахункової роботи 3 на стержень 6 діє збурюючий момент  $M = M_0 \sin pt$  (рис. 1). Вважається, що машинна динамічна система здійснює усталені вимушені коливання (рис. 4-7)

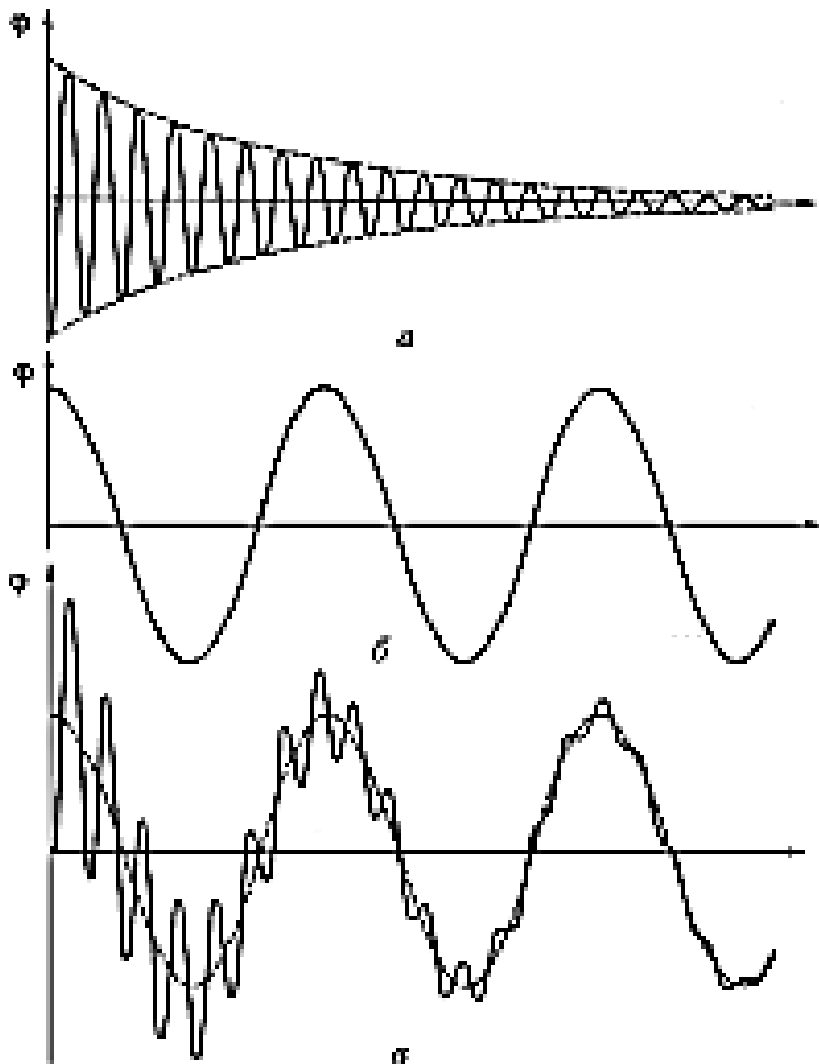


Рис. 4. Графіки зміни за часом складових при встановленні вимушених коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності:  
а – власні загасальні вільні коливання системи,  
б – коливання вимушуючої сили,  
в – усталені вимушені коливання системи

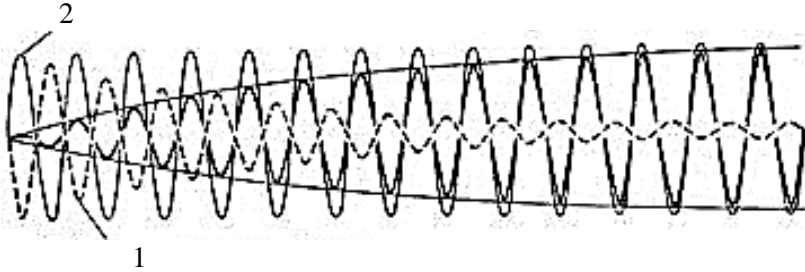


Рис. 5. Схема наростання амплітуди при встановленні в часі вимушених коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності:

- 1 – власні загасальні вільні коливання системи,
- 2 – коливання вимушуючої сили

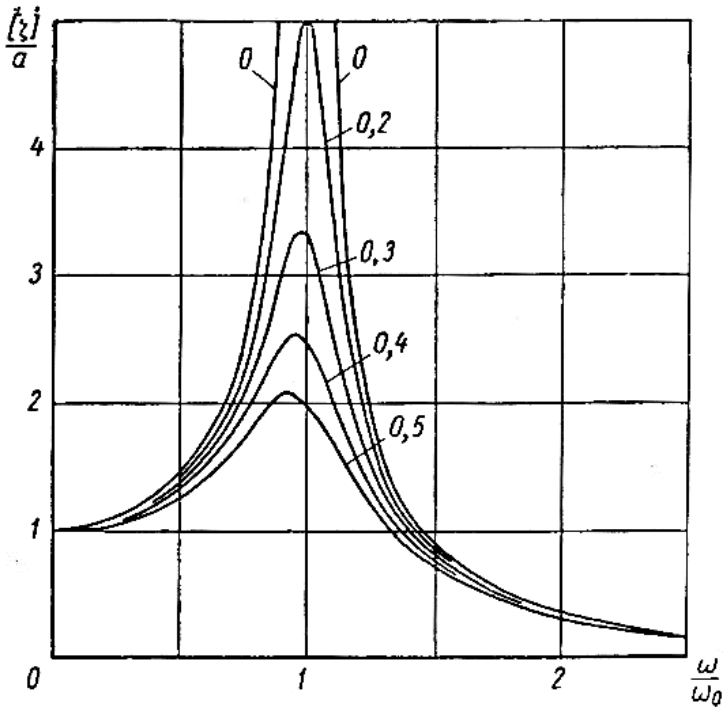


Рис. 6. Графік амплітудно-частотних характеристик вимушених коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності



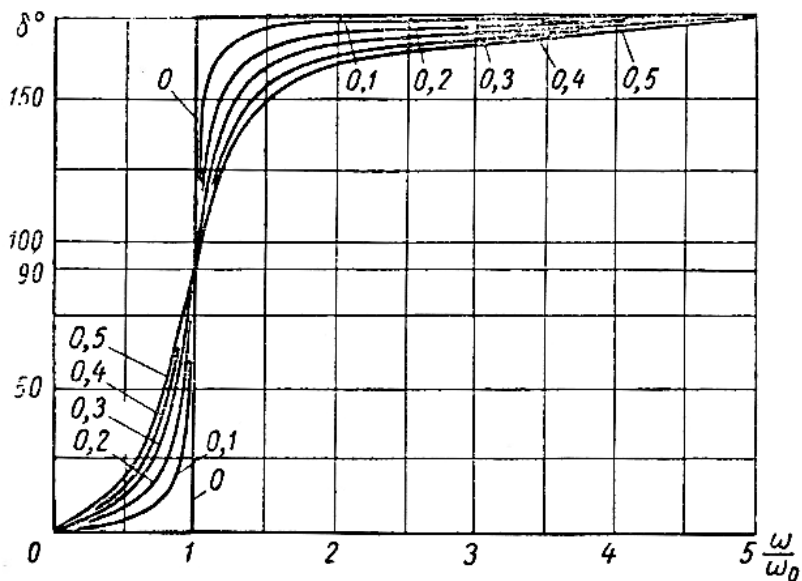


Рис. 7. Графік фазо-частотної характеристик вимушених коливань машинної динамічної системи з одним ступенем вільності

### 3.2. Порядок виконання роботи 3

1. Вибрати за варіантом з табл. 1 вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  та  $m_6$ ; лінійні розміри  $l_1$ ,  $l_2$  та  $l_3$ ; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1$ ; логарифмічний декремент загасання  $\Lambda$ ; амплітуду  $M_0$  та частоту  $p_{II}$  збурюючого моменту; початкові умови (параметри переміщення тіла 1 у початковий момент часу)  $y_0$  та  $\dot{y}_0$ .

2. Визначити узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи  $a$ , кг:

$$a = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

3. Визначити статичну деформацію пружини  $\lambda_{ст}$ , м:

$$\lambda_{ст} = \frac{m_1 g}{c_1}.$$

4. Визначити узагальнений коефіцієнт жорсткості

машинної динамічної системи  $c$ , Н/м:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1}.$$

5. Визначити колову частоту вільних коливань  $k$ ,  $c^{-1}$ :

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

6. Визначити коефіцієнт загасання  $n$ ,  $c^{-1}$ :

$$n = \frac{k\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}}$$

7. Визначити амплітуду узагальненої збурюючої сили  $F_0$ , Н:

$$F_0 = \frac{M}{l_1}.$$

8. Визначити параметр прискорення  $h$ ,  $m/c^2$ :

$$h = \frac{F_0}{a}.$$

9. Визначити поточне значення амплітуди вимушених коливань  $A_{\Pi}$ , м:

$$A_{\Pi} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p_{\Pi}^2)^2 + 4n^2 p_{\Pi}^2}}.$$

10. Визначити поточне значення зсуву фази вимушених коливань  $\varepsilon_{\Pi}$ , рад.:

$$\varepsilon_{\Pi} = \arctg\left(\frac{2np_{\Pi}}{k^2 - p_{\Pi}^2}\right).$$

11. Записати рівняння усталених вимушених коливань машинної динамічної системи, м:

$$y = A_{\Pi} \sin(p_{\Pi} t - \varepsilon_{\Pi}).$$

12. Визначити максимальну амплітуду вимушених коливань  $A_{max}$ , м:

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

13. Визначити резонансну амплітуду вимушених коливань  $A_{рез}$ , м:

$$A_{\text{рез}} = \frac{h}{2nk}.$$

14. Перевірити співвідношення резонансної  $A_{\text{рез}}$  та максимальної  $A_{\text{max}}$  амплітуди вимушених коливань:

$$A_{\text{рез}} < A_{\text{max}}.$$

15. Визначити амплітуду вимушених коливань при нульовій частоті збурюючого моменту  $p=0$   $A_0$ , м:

$$A_0 = \frac{h}{k^2}.$$

16. Визначити колову частоту вимушених коливань, що відповідає максимальній амплітуді  $A_{\text{max}}$ ,  $p_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ :

$$p_1 = \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

17. Визначити допоміжний параметр  $B$ :

$$B = \frac{n}{k}.$$

18. Визначити допоміжний параметр  $\Pi$ :

$$\Pi = \frac{p_{\Pi}}{k}.$$

19. Визначити допоміжний параметр  $M$ :

$$M = \frac{p_1}{k}.$$

20. Визначити амплітуду вимушених коливань при  $p/k=0,5$   $A_{0,5}$ , м:

$$A_{0,5} = \frac{A_0}{\sqrt{0,5625 + B^2}}.$$

21. Визначити амплітуду вимушених коливань при  $p/k=1,5$   $A_{1,5}$ , м:

$$A_{1,5} = \frac{A_0}{\sqrt{1,5625 + 9B^2}}.$$

22. Визначити амплітуду вимушених коливань при  $p/k=2$   $A_2$ , м:

$$A_2 = \frac{A_0}{\sqrt{9 + 16B^2}}.$$

23. Визначити зсув фази вимушених коливань при  $p/k=0,5$   $\epsilon_{0,5}$ , рад.:

$$\varepsilon_{0,5} = \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{0,75} \right).$$

24. Визначити зсув фази вимушених коливань для максимальної амплітуди  $A_{max}$  при  $p/k=M$   $\varepsilon_M$ , рад.:

$$\varepsilon_M = \operatorname{arctg} \left( \frac{2BM}{1 - B^2} \right).$$

25. Визначити зсув фази вимушених коливань при  $p/k=1,5$   $\varepsilon_{1,5}$ , рад.:

$$\varepsilon_{1,5} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{3B}{1,25} \right).$$

26. Визначити зсув фази вимушених коливань при  $p/k=2$   $\varepsilon_2$ , рад.:

$$\varepsilon_2 = \pi - \operatorname{arctg} \left( \frac{4B}{3} \right).$$

27. Визначити масштаб осі  $p/k$  графіків характеристик вимушених коливань  $\mu_{p/k}$ , 1/мм:

$$\mu_{p/k} = \frac{2}{100} = 0,02 \text{ 1/мм.}$$

28. Визначити довжину відрізка на осі  $p/k$  для поточного значення амплітуди  $A_{\Pi}$  при  $p/k=\Pi \overline{p/k}_{\Pi}$ , мм:

$$\overline{p/k}_{\Pi} = \frac{\Pi}{\mu_{p/k}}.$$

29. Визначити довжину відрізка на осі  $p/k$  для максимальної амплітуди  $A_{max}$  при  $p/k=M \overline{p/k}_M$ , мм:

$$\overline{p/k}_M = \frac{M}{\mu_{p/k}}.$$

30. Визначити довжину відрізка на осі  $p/k$  при  $p/k=2 \overline{p/k}_2$ , мм:

$$\overline{p/k}_2 = \frac{2}{\mu_{p/k}} = 100 \text{ мм.}$$

31. Визначити масштаб осі амплітуд  $A$  графіка амплітудно-частотної характеристики вимушених коливань  $\mu_A$ , м/мм:

$$\mu_A = \frac{A_{max}}{80}.$$

32. Визначити довжину відрізка на осі амплітуд  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_0$  при  $p/k=0$   $\overline{A_0}$ , мм:

$$\overline{A_0} = \frac{A_0}{\mu_A}$$

33. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_{0,5}$   $\overline{A_{0,5}}$ , мм:

$$\overline{A_{0,5}} = \frac{A_{0,5}}{\mu_A}$$

34. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для поточного значення амплітуди вимушених коливань  $A_{\Pi}$   $\overline{A_{\Pi}}$ , мм:

$$\overline{A_{\Pi}} = \frac{A_{\Pi}}{\mu_A}$$

35. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для максимальної амплітуди вимушених коливань  $A_{max}$   $\overline{A_M}$ , мм:

$$\overline{A_M} = \frac{A_{max}}{\mu_A} = 80 \text{ мм.}$$

36. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для резонансної амплітуди вимушених коливань  $A_{рез}$   $\overline{A_{рез}}$ , мм:

$$\overline{A_{рез}} = \frac{A_{рез}}{\mu_A}$$

37. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_{1,5}$   $\overline{A_{1,5}}$ , мм:

$$\overline{A_{1,5}} = \frac{A_{1,5}}{\mu_A}$$

38. Визначити довжину відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_2$   $\overline{A_2}$ , мм:

$$\overline{A_2} = \frac{A_2}{\mu_A}$$

39. Визначити масштаб осі зсуву фази  $\varepsilon$  графіка фазо-частотної характеристики вимушених коливань  $\mu_\varepsilon$ , рад./мм:

$$\mu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{80}$$

40. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=0,5$   $\overline{\varepsilon_{0,5}}$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_{0,5} = \frac{\varepsilon_{0,5}}{\mu_\varepsilon}$$

41. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для поточного значення амплітуди вимушених коливань  $A_{\text{пот}}$   $\overline{\varepsilon}_{\Pi}$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_{\Pi} = \frac{\varepsilon_{\Pi}}{\mu_\varepsilon}$$

42. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для максимальної амплітуди вимушених коливань  $A_{\text{max}}$  при  $p/k=M$   $\overline{\varepsilon}_M$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_M = \frac{\varepsilon_M}{\mu_\varepsilon}$$

43. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для резонансної амплітуди вимушених коливань  $A_{\text{рез}}$  при  $p/k=1$   $\overline{\varepsilon}_1$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_1 = \frac{\pi}{2\mu_\varepsilon}$$

44. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=1,5$   $\overline{\varepsilon}_{1,5}$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_{1,5} = \frac{\varepsilon_{1,5}}{\mu_\varepsilon}$$

45. Визначити довжину відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=2$   $\overline{\varepsilon}_2$ , мм:

$$\overline{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\mu_\varepsilon} = 80 \text{ мм}$$

46. Скласти таблицю параметрів вимушених коливань  $A$ ,  $\varepsilon$  і  $p/k$  та координат  $(\overline{A}, \overline{\varepsilon}$  і  $\overline{p/k})$  у масштабах для 7 точок графіків амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристики ustalених вимушених коливань машинної динамічної системи:

Таблиця 4

Таблиця параметрів коливань та координат точок графіків амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристики

№	параметри коливань			координати точок графіків характеристик		
	$p/k$	$A$	$\varepsilon$	$\overline{p/k}$	$\overline{A}$	$\overline{\varepsilon}$
		м	рад.	мм		
1	0	$A_0$ (п.15)	0	0	$\overline{A_0}$ (п.32)	0
2	0,5	$A_{0,5}$ (п.20)	$\varepsilon_{0,5}$ (п.23)	25	$\overline{A_{0,5}}$ (п.33)	$\overline{\varepsilon_{0,5}}$ (п.40)
3	$\Pi$ (п.18)	$A_{\Pi}$ (п.9)	$\varepsilon_{\Pi}$ (п.10)	$\overline{p/k_{\Pi}}$ (п.28)	$\overline{A_{\Pi}}$ (п.34)	$\overline{\varepsilon_{\Pi}}$ (п.41)
4	$M$ (п.19)	$A_{max}$ (п.12)	$\varepsilon_M$ (п.24)	$\overline{p/k_M}$ (п.29)	80(п.35)	$\overline{\varepsilon_M}$ (п.42)
5	1	$A_{рез}$ (п.13)	$\pi/2$	50	$\overline{A_{рез}}$ (п.36)	$\overline{\varepsilon_1}$ (п.43)
6	1,5	$A_{1,5}$ (п.21)	$\varepsilon_{1,5}$ (п.25)	70	$\overline{A_{1,5}}$ (п.37)	$\overline{\varepsilon_{1,5}}$ (п.44)
7	2	$A_2$ (п.22)	$\varepsilon_2$ (п.26)	100(п.30)	$\overline{A_2}$ (п.38)	80(п.45)

47. Побудувати в координатах  $A$  та  $p/k$  ( $\overline{A}$  та  $\overline{p/k}$ ) у масштабах 7 точок за даними табл. 4. Обвести точки плавною кривою та отримати графік амплітудно-частотної характеристики усталених вимушених коливань машинної динамічної системи.

48. Побудувати в координатах  $\varepsilon$  та  $p/k$  ( $\overline{\varepsilon}$  та  $\overline{p/k}$ ) у масштабах 7 точок за даними табл. 4. Обвести точки плавною кривою та отримати графік фазо-частотної характеристики усталених вимушених коливань машинної динамічної системи.

### 3.3. Приклад виконання роботи 3

#### Розрахункова робота 3

#### ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНИ З УРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

1. Вихідні дані роботи: маси ланок  $m_1=2$  кг,  $m_2=2$  кг,  $m_3=3$  кг та  $m_6=6$  кг; лінійні розміри  $l_1=0,6$  м,  $l_2=0,4$  м та  $l_3=0,2$  м; коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1=400$  Н/м; логарифмічний декремент загасання  $\Lambda=1,4$ ; амплітуду  $M_0=4$  Нм та частоту  $p_{II}=4$  с<sup>-1</sup> збурюючого моменту; початкові умови (параметри переміщення тіла 1 у початковий момент часу)  $y_0=0,02$  м та  $\dot{y}_0=0,2$  м/с.

2. Узагальнений коефіцієнт інерції машинної динамічної системи:

$$a = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_6 + \frac{3}{2}m_3 \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 =$$
$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \left(\frac{0,4}{0,6}\right)^2 = 7,00 \text{ кг.}$$

3. Статична деформація пружини:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{m_1 g}{c_1} = \frac{2 \cdot 9,81}{400} = 0,0491 \text{ м.}$$

4. Узагальнений коефіцієнт жорсткості машинної динамічної системи:

$$c = c_1 - \frac{m_6 g}{2l_1} = 400 - \frac{6 \cdot 9,81}{2 \cdot 0,6} = 351 \text{ Н/м.}$$

5. Колова частота вільних коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{351}{7}} = 7,08 \text{ с}^{-1}.$$

6. Коефіцієнт загасання:

$$n = \frac{k\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}} = \frac{7,08 \cdot 1,4}{\sqrt{1,4^2 + 4 \cdot 3,14^2}} = 1,54 \text{ с}^{-1}.$$



7. Амплітуда узагальненої збурюючої сили:

$$F_o = \frac{M}{l_1} = \frac{4}{0,6} = 6,67 \text{ Н.}$$

8. Параметр прискорення:

$$h = \frac{F_o}{a} = \frac{6,67}{7} = 0,953 \text{ м/с}^2.$$

9. Поточне значення амплітуди вимушених коливань:

$$A_{\Pi} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p_{\Pi}^2)^2 + 4n^2 p_{\Pi}^2}} = \\ = \frac{0,953}{\sqrt{(7,08^2 - 4^2) + 4 \cdot 1,54^2 \cdot 4^2}} = 0,0263 \text{ м.}$$

10. Поточне значення зсуву фази вимушених коливань:

$$\varepsilon_{\Pi} = \arctg\left(\frac{2np_{\Pi}}{k^2 + p_{\Pi}^2}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot 1,54 \cdot 4}{7,08^2 + 4^2}\right) = 0,346 \text{ рад.}$$

11. Рівняння усталених вимушених коливань машинної динамічної системи:

$$y = A_{\Pi} \sin(p_{\Pi} t - \varepsilon_{\Pi}) = 0,0263 \cdot \sin(4 \cdot t - 0,346) \text{ м.}$$

12. Максимальна амплітуда вимушених коливань:

$$A_{max} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{0,953}{2 \cdot 1,54 \sqrt{7,08^2 - 1,54^2}} = 0,0448 \text{ м.}$$

13. Резонансна амплітуда вимушених коливань:

$$A_{рез} = \frac{h}{2nk} = \frac{0,953}{2 \cdot 1,54 \cdot 7,08} = 0,0437 \text{ м.}$$

14. Перевірка співвідношення резонансної  $A_{рез}$  та максимальної  $A_{max}$  амплітуди вимушених коливань:

$$A_{рез} = 0,0437 \text{ м} < A_{max} = 0,0448 \text{ м.}$$

15. Амплітуда вимушених коливань при нульовій частоті збурюючого моменту  $p=0$ :

$$A_0 = \frac{h}{k^2} = \frac{0,953}{7,08^2} = 0,019 \text{ м.}$$

16. Колова частота вимушених коливань, що відповідає максимальній амплітуді  $A_{max}$ :

$$p_1 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{7,08^2 - 2 \cdot 1,54^2} = 6,74 \text{ с}^{-1}.$$

17. Допоміжний параметр:

$$B = \frac{n}{k} = \frac{1,54}{7,08} = 0,218.$$

18. Допоміжний параметр:

$$\Pi = \frac{p_{\Pi}}{k} = \frac{4}{7,08} = 0,565.$$

19. Допоміжний параметр:

$$M = \frac{p_1}{k} = \frac{6,74}{7,08} = 0,952.$$

20. Амплітуда вимушених коливань при  $p/k=0,5$ :

$$A_{0,5} = \frac{A_0}{\sqrt{0,5625 + B^2}} = \frac{0,019}{\sqrt{0,5625 + 0,218^2}} = 0,0243 \text{ м.}$$

21. Амплітуда вимушених коливань при  $p/k=1,5$ :

$$A_{1,5} = \frac{A_0}{\sqrt{1,5625 + 9B^2}} = \frac{0,019}{\sqrt{1,5625 + 9 \cdot 0,218^2}} = 0,0135 \text{ м.}$$

22. Амплітуда вимушених коливань при  $p/k=2$ :

$$A_2 = \frac{A_0}{\sqrt{9 + 16B^2}} = \frac{0,019}{\sqrt{9 + 16 \cdot 0,218^2}} = 0,00608 \text{ м.}$$

23. Зсув фази вимушених коливань при  $p/k=0,5$ :

$$\varepsilon_{0,5} = \arctg\left(\frac{B}{0,75}\right) = \arctg\left(\frac{0,218}{0,75}\right) = 0,283 \text{ рад.}$$

24. Зсув фази вимушених коливань для максимальної амплітуди  $A_{max}$  при  $p/k=M$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{2BM}{1 - B^2}\right) \\ &= \frac{3,14}{2} - \arctg\left(\frac{2 \cdot 0,218 \cdot 0,952}{1 - 0,218^2}\right) = 1,16 \text{ рад.} \end{aligned}$$

25. Зсув фази вимушених коливань при  $p/k=1,5$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,5} &= \pi - \arctg\left(\frac{3B}{1,25}\right) = 3,14 - \arctg\left(\frac{3 \cdot 0,218}{1,25}\right) = \\ &= 2,66 \text{ рад.} \end{aligned}$$

26. Зсув фази вимушених коливань при  $p/k=2$ :

$$\varepsilon_2 = \pi - \arctg\left(\frac{4B}{3}\right) = 3,14 - \arctg\left(\frac{4 \cdot 0,218}{3}\right) = 2,86 \text{ рад.}$$

27. Масштаб осі  $p/k$  графіків характеристик вимушених коливань:

$$\mu_{p/k} = \frac{2}{100} = 0,02 \text{ 1/мм.}$$

28. Довжина відрізка на осі  $p/k$  для поточного значення амплітуди  $A_{II}$  при  $p/k=\Pi$ :

$$\overline{p/k}_{\Pi} = \frac{\Pi}{\mu_{p/k}} = \frac{0,565}{0,02} = 28,3 \approx 28 \text{ мм.}$$

29. Довжина відрізка на осі  $p/k$  для максимальної амплітуди  $A_{max}$  при  $p/k=M$ :

$$\overline{p/k}_M = \frac{M}{\mu_{p/k}} = \frac{0,952}{0,02} = 47,6 \approx 48 \text{ мм.}$$

30. Довжина відрізка на осі  $p/k$  при  $p/k=2$ :

$$\overline{p/k}_2 = \frac{2}{\mu_{p/k}} = 100 \text{ мм.}$$

31. Масштаб осі амплітуд  $A$  графіка амплітудно-частотної характеристики вимушених коливань:

$$\mu_A = \frac{A_{max}}{80} = \frac{0,0448}{80} = 0,00056 \text{ м/мм.}$$

32. Довжина відрізка на осі амплітуд  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_0$  при  $p/k=0$ :

$$\overline{A}_0 = \frac{A_0}{\mu_A} = \frac{0,019}{0,00056} = 33,9 \approx 34 \text{ мм.}$$

33. Довжина відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_{0,5}$ :

$$\overline{A}_{0,5} = \frac{A_{0,5}}{\mu_A} = \frac{0,0243}{0,00056} = 43,4 \approx 43 \text{ мм.}$$

34. Довжина відрізка на осі  $A$  для поточного значення амплітуди вимушених коливань  $A_{II}$ :

$$\overline{A}_{II} = \frac{A_{II}}{\mu_A} = \frac{0,0263}{0,00056} = 47 \text{ мм.}$$

35. Довжина відрізка на осі  $A$  для максимальної амплітуди вимушених коливань  $A_{max}$ :

$$\overline{A_M} = \frac{A_{max}}{\mu_A} = 80 \text{ мм.}$$

36. Довжина відрізка на осі  $A$  для резонансної амплітуди вимушених коливань  $A_{рез}$ :

$$\overline{A_{рез}} = \frac{A_{рез}}{\mu_A} = \frac{0,0437}{0,00056} = 78 \text{ мм.}$$

37. Довжина відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_{1,5}$ :

$$\overline{A_{1,5}} = \frac{A_{1,5}}{\mu_A} = \frac{0,0135}{0,00056} = 24,1 \approx 24 \text{ мм.}$$

38. Довжина відрізка на осі  $A$  для амплітуди вимушених коливань  $A_2$ :

$$\overline{A_2} = \frac{A_2}{\mu_A} = \frac{0,00608}{0,00056} = 10,9 \approx 11 \text{ мм.}$$

39. Масштаб осі зсуву фази  $\varepsilon$  графіка фазо-частотної характеристики вимушених коливань:

$$\mu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{80} = \frac{2,86}{80} = 0,03575 \text{ рад./мм.}$$

40. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=0,5$ :

$$\overline{\varepsilon_{0,5}} = \frac{\varepsilon_{0,5}}{\mu_\varepsilon} = \frac{0,283}{0,03575} = 7,92 \approx 8 \text{ мм.}$$

41. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для поточного значення амплітуди вимушених коливань  $A_{ном}$ :

$$\overline{\varepsilon_{II}} = \frac{\varepsilon_{II}}{\mu_\varepsilon} = \frac{0,346}{0,03575} = 9,68 \approx 10 \text{ мм.}$$

42. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для максимальної амплітуди вимушених коливань  $A_{max}$  при  $p/k=M$ :

$$\overline{\varepsilon_M} = \frac{\varepsilon_M}{\mu_\varepsilon} = \frac{1,16}{0,03575} = 32,4 \approx 32 \text{ мм.}$$

43. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для резонансної амплітуди вимушених коливань  $A_{рез}$  при  $p/k=1$ :

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\pi}{2\mu_\varepsilon} = \frac{3,14}{2 \cdot 0,03575} = 43,9 \approx 44 \text{ мм.}$$

44. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=1,5$ :

$$\bar{\varepsilon}_{1,5} = \frac{\varepsilon_{1,5}}{\mu_\varepsilon} = \frac{2,66}{0,03575} = 74,4 \approx 74 \text{ мм.}$$

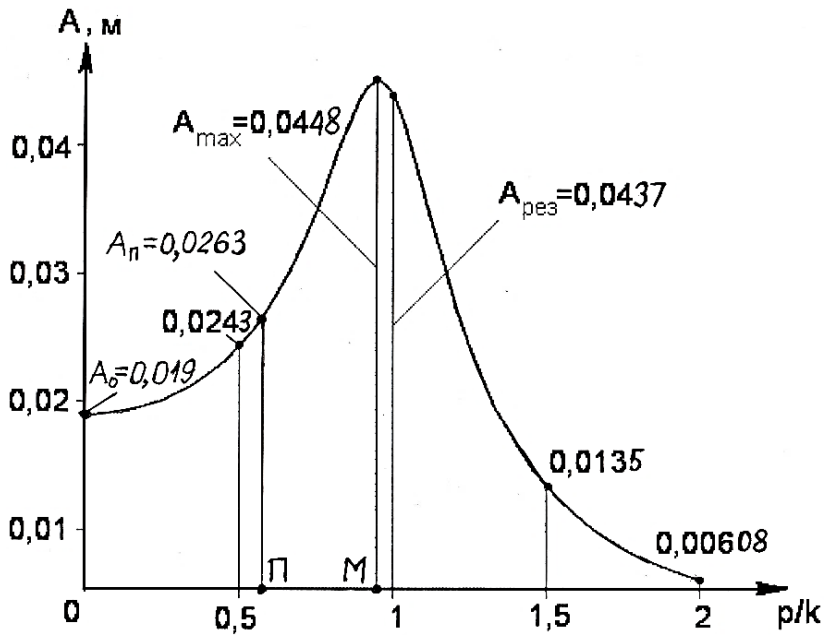
45. Довжина відрізка на осі  $\varepsilon$  для зсуву фази при  $p/k=2$ :

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\mu_\varepsilon} = 80 \text{ мм.}$$

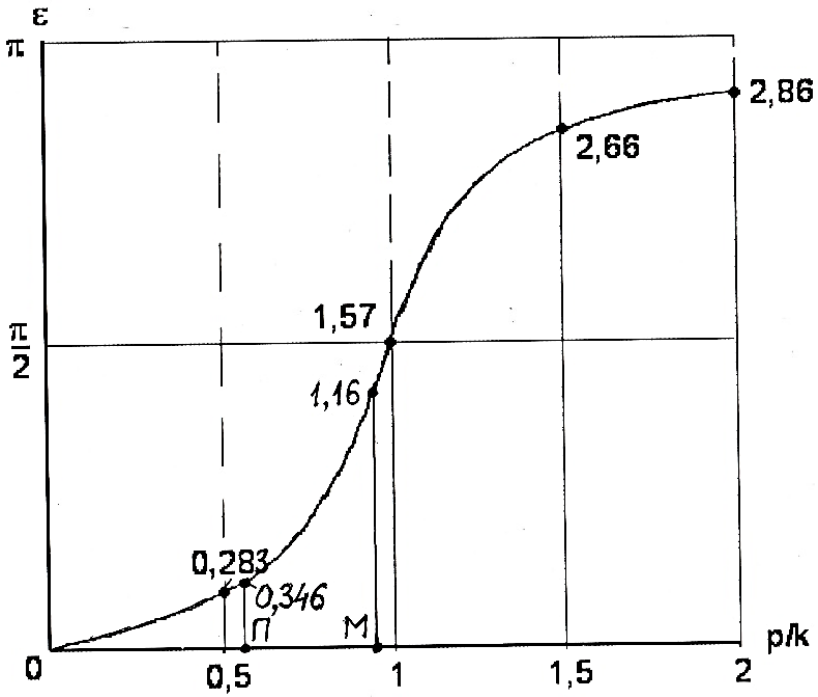
46. Таблиця параметрів коливань та координат точок графіків амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристики.

№	параметри коливань			координати точок графіків характеристик		
	$p/k$	$A$	$\varepsilon$	$\overline{p/k}$	$\bar{A}$	$\bar{\varepsilon}$
		м	рад.	мм		
1	0	0,019	0	0	34	0
2	0,5	0,0243	0,283	25	43	8
3	(II) 0,565	0,0263	0,346	28	47	10
4	(M) 0,952	0,0448	1,16	48	80	32
5	1	0,0437	$\pi/2$	50	78	44
6	1,5	0,0135	2,66	75	24	74
7	2	0,00608	2,86	100	11	80

47. Графік амплітудно-частотної характеристики коливань машинної динамічної системи



48. Графік фазо-частотної характеристики коливань машинної динамічної системи



## Список літератури

1. Теорія обертових машин : підруч. / Сівко В. Й., Науменко Ю. В., Кузьмінець М. П., Дейнека К. Ю. Київ, Рівне : НУВГП, 2015. 527 с. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/4034/1/V20.pdf>
2. Сукач М. К., Горбатюк Є.В., Марченко О. А. Синтез землерийної техніки : підруч. Київ : Видавництво Ліра-К, 2017. 376 с. URL: [http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2019/Sukach\\_2017\\_376.pdf](http://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2019/Sukach_2017_376.pdf)
3. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Динаміка й оптимізація машин : навч. посіб. Київ : ЦП «Компринт», 2018. 310 с. URL: [https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/posibnik\\_dinamika\\_y\\_optimizaciya\\_mashin.pdf](https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/posibnik_dinamika_y_optimizaciya_mashin.pdf)
4. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Динаміка машин : навч. посіб. Київ : ЦП «Компринт», 2013. 227 с. URL: [https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/Посібник\\_Динаміка\\_машин.pdf](https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/Посібник_Динаміка_машин.pdf)
5. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Теорія технічних систем : навч. посіб. Київ : ЦП «Компринт», 2017. 310 с. URL: [https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/teoriya\\_tehnichnih\\_sistem\\_loveykin\\_romasevich.pdf](https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/teoriya_tehnichnih_sistem_loveykin_romasevich.pdf)
6. Розрахунковий практикум з навчальної дисципліни «Динаміка робочих процесів машин та обладнання» (02-01-546М) / Науменко Ю. В. Рівне : НУВГП, 2023. 42 с. URL: <https://ep3.nuwm.edu.ua/28053/1/02-01-546M.pdf>



## Додаток

### АВТОКОЛИВАННЯ

Автоколивання – незагасаючі коливання в дисипативній нелінійній системі, що підтримуються за рахунок енергії зовнішнього джерела, параметри яких (амплітуда, частота, спектр коливань) визначаються властивостями самої системи та залежить від кінцевого зміни початкових умов. Термін «автоколивання» введено А. А. Андрономим у 1928 році.

Автоколивання можуть мати різну природу: механічну, теплову, електромагнітну, хімічну. Механізм виникнення та підтримки автоколивань у різних системах може ґрунтуватися на різних законах фізики чи хімії. Для точного кількісного опису автоколивань різних систем може знадобитися різний математичний апарат. Проте, можна уявити схему, загальну всім автоколивальним системам, якісно описує цей механізм (рис. 1).

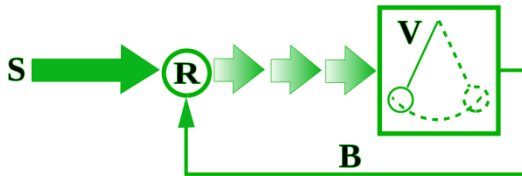


Рис. 1. Механізм автоколивань

На схемі: S – джерело постійного (неперіодичного) впливу; R – нелінійний регулятор, що перетворює постійний вплив на змінне (наприклад, у переривчасте в часі), яке і «розгойдує» осцилятор V – елемент, що коливається (елементи) системи, а коливання осцилятора через зворотний зв'язок B керують роботою регулятора R, задаючи фазу і частоту його дії. Дисипація (розсіювання енергії) в автоколивальній системі відшкодовується за рахунок надходження до неї енергії з джерела постійного впливу, завдяки чому автоколивання не згасають.

Автоколивальні системи, що не містять гармонійних осциляторів, називаються релаксаційними. Коливання в них можуть сильно відрізнятися від гармонійних і мати прямокутну,

трикутну або трапецеїдальну форму. Амплітуда та період релаксаційних автоколивань визначаються співвідношенням величини постійного впливу та характеристик інерційності та дисипації системи.

Автоколивання принципово відрізняються від інших коливальних процесів у дисипативних системах тим, що для їх підтримки не потрібно коливальних впливів ззовні. Приклади автоколивань: коливання скрипкової струни під час руху смичка, струму в радіотехнічному генераторі, повітря в органічній трубі, маятника в годиннику. Виникають автоколивання в результаті розвитку коливальної нестійкості з їх подальшою стабілізацією через припинення надходження енергії від джерела або прогресуючого зростання втрат (дисипації). Режим стаціонарних автоколивань визначається за умови енергетичного балансу – в середньому за період дисипативні витрати енергії  $Q(I)$  ( $I$  – інтенсивність автоколивань) повинні точно компенсуватися надходженням енергії  $W(I)$  від джерела:  $Q(I_0) = W(I_0)$ .

Якщо в околиці стаціонарного режиму  $I_0$  енергія втрат  $Q(I)$  при зміні  $I$  зростає швидше, ніж приплив енергії  $W(I)$ , цей режим автоколивань, з енергетичної точки зору, є стійким (рис. 2,а); якщо ж швидше зростає  $W(I)$ , то стаціонарний режим є нестійким (рис. 2,б).

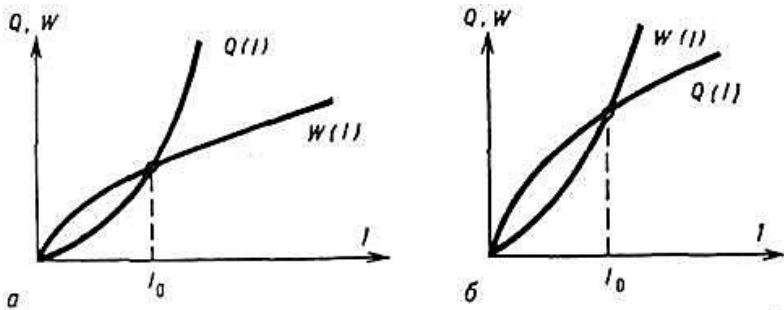


Рис. 2. Енергетична схема встановлення автоколивань:

а – стаціонарний режим є стійким, б – стаціонарний режим є нестійким

Навіть у тих випадках, коли можна ввести функції  $Q$  і  $W$ , вони звичайно залежать не тільки від інтенсивностей

автоколивань, але і від їх фаз, тому енергетичний метод визначення стійкості автоколивань у загальному випадку не застосовується. Системи, в яких автоколивання виникають «самостійно» – без початкового поштовху, називаються системами з м'яким режимом збудження; якщо виникнення автоколивань необхідний кінцевий початковий поштовх, то говорять про жорсткий режим збудження.

У найпростіших автоколивальних системах можна виділити коливальну систему із загасанням, підсилювач коливань, нелінійний обмежувач та ланку зворотного зв'язку. Наприклад, в ламповому генераторі (генераторі Ван дер Поля, рис. 3,а,б) коливальний контур із втратами, що складається з ємності  $C$ , індуктивності  $L$  і опору  $R$ , являє собою дисипативну коливальну систему, ланцюг катод-сітка та індуктивність  $L$  утворюють ланцюг зворотного зв'язку.

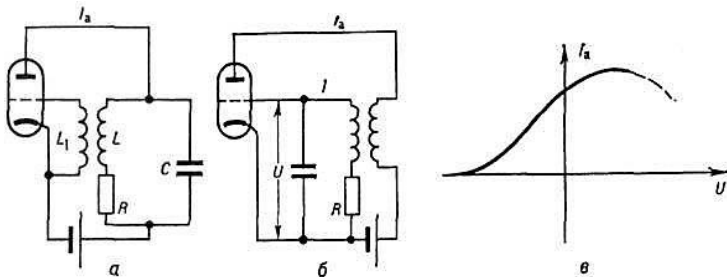


Рис. 3. Схеми генераторів Ван дер Поля:

а – з коливальним контуром у ланцюзі анода, б – з коливальним контуром ланцюга сітки, в – характеристика лампи

Малі власник коливання, що виникли в коливальному контурі, через котушку  $L$  керують анодним струмом лампи, яка є підсилювачем. При позитивному зворотному зв'язку (тобто при певному взаємному розташуванні котушок  $L$  і  $L_1$ ) до контуру вноситься певна енергія. Якщо ця енергія більше енергії втрат у контурі, то амплітуда малих спочатку коливань у контурі наростає. Оскільки анодний струм лампи залежить від напруги на сітці нелінійним чином (рис. 3,в), то при наростанні амплітуди коливань енергія, що надходить у контур, зменшується і при

деякій амплітуді коливань стає рівною енергії втрат. В результаті встановлюється режим стаціонарних автоколивань, при якому зовнішнє джерело (анодна батарея) компенсує всі втрати енергії. Таким чином, автоколивальні системи повинні бути принципово нелінійними – саме нелінійність не дозволяє коливанням безмежно наростати, керуючи надходженням та витратами енергії джерела.

Щоб визначити характер автоколивань та залежність їхньої амплітуди та форми від параметрів системи, необхідно звернутися до аналізу відповідної математичної моделі. Для найпростішого генератора (рис. 2,а) такою моделлю є рівняння Ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1),$$

яке виходить при нехтуванні сіточними струмами лампи та апроксимації її характеристики кривої, представленої на рис. 3,в.

Це рівняння записано в безрозмірних змінних, де  $x = \beta^{1/2}u$ ;

$t = \omega_0 t_1$ ;  $\mu = \alpha\omega_0$ . Тут  $\omega_0 = (LC)^{1/2}$  – власна частота коливального контуру,  $\alpha = (LC)^{1/2}(MS_0 - RC)$  – параметр перевищення над порогом генерації (при  $\alpha < 0$  втрата в контурі більше, ніж енергія, що вноситься),  $\beta = 2MS_2(RC - MS_0)^{-1}$  характеризує амплітуду автоколивань,  $M$  – коефіцієнт взаємної індукції,  $S_0$  і  $S_2$  – параметри вольт-амперної характеристики підсилювача лампи. Той факт, що автоколивання в системі описуються диференціальним рівнянням другого порядку (його фазове простір – площину), одночасно накладає важливі обмеження на вигляд автоколивань. У таких системах можливі лише періодичні автоколивання.

Геометричним образом усталених автоколивань у фазовому просторі системи служить атрактор – траєкторія (або безліч траєкторій), що розташована в обмеженій області фазового простору і притягує до себе всі близькі траєкторії. Оскільки на фазовій площині траєкторії перетинатися не можуть, у системах другого порядку може існувати лише найпростіший нетривіальний атрактор – замкнута траєкторія, до якої прагнуть

усі найближчі траєкторії. Така траєкторія називається граничним циклом, який служить образом періодичних автоколивань. Розміри граничного циклу визначають амплітуду автоколивань, час руху зображувальної точки циклу – період автоколивань, а форма граничного циклу – форму коливань. Величина ( $J$ ), характеризує нелінійність системи: чим більше нелінійність, тим більше форма коливань відрізняється від синусоїдальної (рис. 4). При малих  $\mu$  ( $\mu \ll 1$ ) втратах в контурі і енергія, що вноситься в нього, дуже малі – рівняння (1) є близьким до рівняння гармонійного осцилятора, а автоколивання близькі до синусоїдальних з частотою  $\omega_0$ .

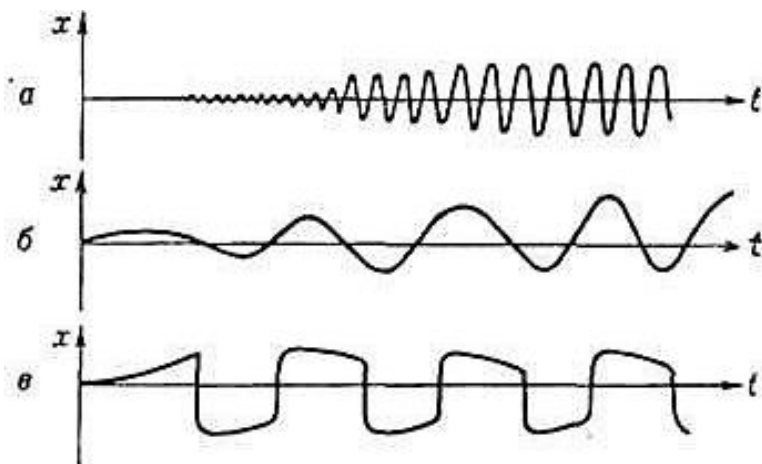


Рис. 4. Осцилограми  $x(t)$ , що ілюструють характер встановлення та форму автоколивань у системі (1) відповідно: при  $\mu \ll 1$  – квазігармонійні коливання (а); при  $\mu=1$  – сильно несинусоїдальні коливання (б); при  $\mu \approx 1$  – релаксаційні коливання (в)

В іншому граничному випадку ( $\mu \gg 1$ ) втрати в контурі і енергія, що вноситься в нього, дуже великі у порівнянні з енергією, що у ньому запасена, тому коливання будуть сильно відрізнятися від синусоїдальних, перетворюючись на релаксаційні. Аналіз таких автоколивань зручно проводити, поділяючи рухи на ділянки швидких та повільних рухів.

При зміні величини параметра  $\mu$  немає ніяких якісних змін у структурі розбиття фазової площини рівняння (1) на траєкторії – при будь-якому  $\mu > 0$  системі є єдиний стан рівноваги ( $x=0$ ,  $dx/dt = 0$ ), який є нестійким, та єдиний граничний цикл, який є стійким. Якісні перебудови-біфуркації відбуваються лише за зміни знаку  $\mu$ . Розглянута картина відповідає м'якому режиму виникнення автоколивань, якому відповідає фазовий портрет, зображений на рис. 5.а. У системах з жорстким режимом збудження порушення коливання мимоволі наростають лише з деякою початковою амплітудою, тобто коли є поштовх з амплітудою, більшою за деяке критичного значення; при цьому на фазовому портреті (рис. 6) початкова точка повинна лежати поза заштрихованою ділянкою, тобто зображуюча точка повинна бути виведена за межі області притягання стійкого стану рівноваги, межею якого служить нестійкий граничний цикл.

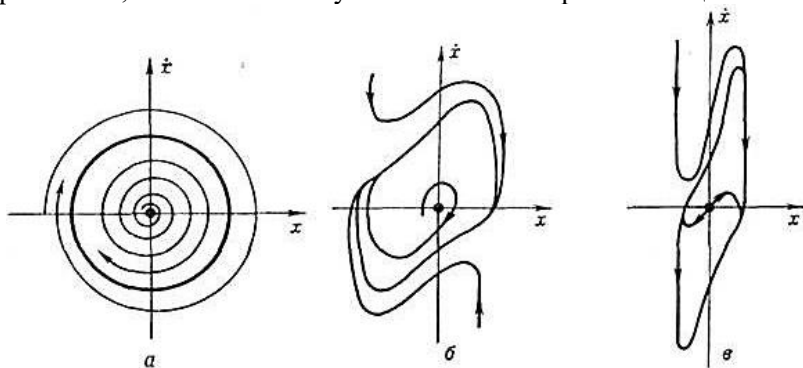


Рис. 5. Фазові портрети системи (1):  
 а – при  $\mu \ll 1$ ; б – при  $\mu = 1$ ; в – при  $\mu \gg 1$

У системах, навіть трохи складніших, за генератор на рис. 3,а, наприклад у системах з півтора ступенями свободи, можливі не тільки періодичні та квазіперіодичні автоколивання (з декількома несумірними частотами), а й автоколивання, нічим невідмінні від випадкових – так звані стохастичні автоколивання. Прикладом такої автоколивальної системи – генератора шуму, в якому хаотичні коливання (коливання із суцільним спектром) відбуваються в дисипативній системі за рахунок енергії

регулярних джерел, може служити генератор на рис. 3,б, якщо в контур послідовно з індуктивністю доданий нелінійний елемент з неважною однозначною вольт-амперною характеристикою (рис. 7). Таким елементом є, наприклад, тунельний діод. Математична модель або відповідна такому генератору динамічна система може бути представлена у вигляді системи третього порядку:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2hx + y - gz, \\ \dot{y} &= -x, \\ \varepsilon \dot{z} &= x - f(z). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тут  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – відповідно безрозмірні струми в контурі, напруження на ємності та напруження на тунельному діоді;  $h$  – інкремент наростання коливань в контурі за відсутності діода,  $g$  характеризує ступінь впливу діода на процеси в контурі,  $\varepsilon \ll 1$  – малий параметр, пропорційний ємності тунельного діода,  $f(z)$  – його нормована характеристика.

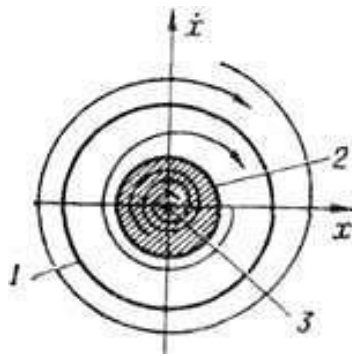


Рис. 6. Фазовий портрет, що відповідає жорсткому збудженню автоколивань: 1 – стійкий граничний цикл,

2 – нестійкий граничний цикл, 3 – стійкий стан рівноваги.

Фазовий простір системи (2) є тривимірним. При певних параметрах у цьому фазовому просторі всі траєкторії входять у обмежену область, усередині якої немає ні стійких станів рівноваги, ні стійких граничних циклів. Усередині цієї

області міститься притягувач безлічі траєкторій, кожна з яких брало нестійка, – це так називаний дивний атрактор. Подібно до того, як граничний цикл є образом періодичних автоколивань, способом стохастичних автоколивань служить дивний атрактор. Для автоколивальних систем з кількома ступенями вільності характерні такі явища, як синхронізація та конкуренція коливань. Розділяють зовнішню синхронізацію автоколивань, або захоплення частоти генератора, та взаємну синхронізацію. При захопленні частоти встановлюються автоколивання з частотою та фазою, що відповідають частоті та фазі зовнішнього періодичного впливу, а при взаємній синхронізації – періодичні коливання сфазовані в ансамблі підсистем, які в незалежному режимі роботи характеризуються різними частотами. Захоплення частоти широко використовується для керування та стабілізації частоти потужних малостабільних генераторів за допомогою високостабільних малопотужних (наприклад, лазерів).

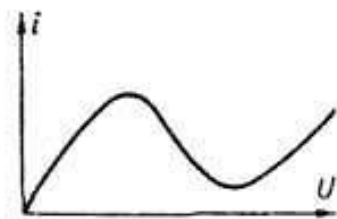


Рис. 7. Вольт-амперна характеристика тунельного діода

Смуга захоплення – область розладів між частотами власних коливань та зовнішнім сигналом, усередині якої встановлюється режим синхронізації, – розширюється зі збільшенням амплітуди зовнішнього впливу. За межі захоплення стійкий режим генерації періодичних коливань змінюється режимом биття – режимом квазіперіодичних коливань чи стохастичним режимом. Взаємна синхронізація підсистем чи різних елементарних коливань (мод) використовується під час роботи кількох генераторів на загальне навантаження, щоб одержати коротких імпульсів в багатомодових генераторах (наприклад, лазерах) тощо.



Конкуренція мод – придушення одних мод іншими в автоколивальних системах – пов’язана з тим, що конкуруючі моди черпають енергію на покриття дисипативних витрат із загального джерела. У результаті одні моди створюють додаткове нелінійне згасання інших. Завдяки ефектам конкуренції та взаємної синхронізації коливань в автоколивальних системах з великою кількістю ступенів вільності (або навіть нескінченним числом – у разі розподілених систем) можливе встановлення з початкового шуму (наростаючих в результаті розвитку лінійних нестійкостей флуктуації на різних частотах) режиму регулярних синхронізації виявляються важливими й у появи високоорганізованих структур у нелінійних нерівноважних середовищах.

У розподілених системах характер автоколивань істотно залежить, крім виду нелінійності, ще й від особливостей дисперсії середовища і граничних умов, зокрема наявності резонатора. У деяких випадках спектр збудження мод та особливості їхньої нелінійної взаємодії такі, що при аналізі автоколивань у розподіленій системі з нескінченним числом ступенів вільності можливо обмежитися так званним одномодовим описом.

Наприклад розглянемо автоколивання в кільцевому резонаторі – розташованій у вертикальній площині замкнутої трубі, що заповнено в’язкою рідиною (рис. 8). При підігріві кільця знизу в системі встановлюється режим конвекції: легша, нагріта в основі кільця частина рідини спливає, змушуючи охолоджену рідину опускатися вниз. Таким чином, починаючи з деякої різниці температури  $T_B - T_H = \Delta T_1$  встановлюється режим стаціонарного обертання рідини або проти годинникової стрілки. У цьому вся рідина обертається як ціле - реалізується лише одне наб. великомасштабний рух. Подальше збільшення  $\Delta T$  ( $\Delta T > \Delta T_2$ ) призводить до виникнення автоколивань, що виявляються в тому, що рідке кільце всередині труби іноді змінюватиме напрямок свого руху. Фізично це можна пояснити так: нехай в даний момент рідина рухається за годинниковою стрілкою, при досить великому  $\Delta T$  архімедова сила велика і

водяне кільце прискорюється настільки, що рідкий об'єм, що остигнув вгорі, пройшовши гарячу основу і не встигнувши нагрітися, вже не досягає верхньої частини кільця і припинить (Архімедова сила недостатня, щоб подолати силу в'язкості та гравітації). При цьому частина рідини, що опускається (права), тепліше і, отже, легше піднімається.

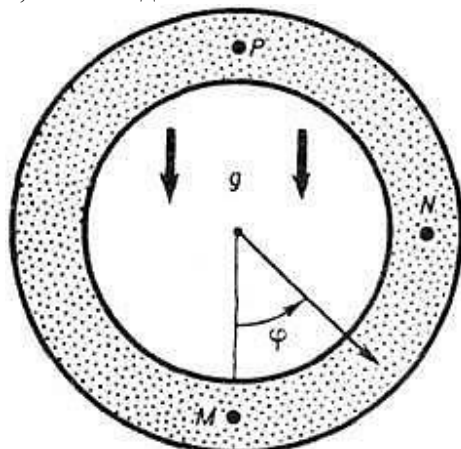


Рис. 8. Кільцева труба, заповнена рідиною, – конвективна петля;  
 $g$  – прискорення сили тяжкості,  $T_H$  – температура в точці  $M$ ,  
 $T_B$  – температура в точці  $P$ .

В результаті гальмування рідкого кільця рідина в його підставі нагрівається і спливає, але вже в протилежному напрямку тиск праворуч менше, ніж зліва. Таким чином, рідке кільце змінює напрямок свого обертання і починає закручуватися проти годинникової стрілки. Потім все повторюється у зворотному порядку. Такі автоколивання, що викликаються тепловою конвекцією, можуть бути як періодичними, так і стохастичними. Оскільки ніякі інші масштаби руху, крім основного, в автоколиваннях виду, що розглядається, не беруть участь, математична модель для опису цих автоколивань може бути отримана з вихідних рівнянь гідродинаміки в припущенні, що залежність полів швидкості і температури від просторових координат не змінюється в часі і пропорційна  $\sin \varphi$ , де  $\varphi$  – кутова координата елементарного обсягу рідини  $V$  в результаті для

безрозмірних швидкості  $x(t)$  руху рідкого кільця, температури  $y(t)$  рідини в точці N та температури  $z(t)$  у точці M можна отримати систему рівнянь у звичайних похідних:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma (y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -y + rx - z, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - z,\end{aligned}\tag{3},$$

де  $\sigma, r > 0$ . Це відома система Лоренца, яка є однією з основних моделей теорії стохастичних автоколивань. Залежно від параметрів  $\sigma$  і  $r$  у фазовому просторі системи (3) можуть існувати як стійкий граничний цикл, так і дивний атрактор.

У загальному випадку автоколивання в резонаторах, що описуються рівняннями у частинних похідних з відповідними граничними умовами, неможливо уявити за допомогою кінцевої динамічної системи. Однак, як правило, завдяки різним фізичним обставинам, наприклад наявності дисипації, що прогресує зі зростанням частоти або зменшенням просторового масштабу пульсацій, такий кінцевий опис виявляється справедливим.

У нерівноважних дисипативних середовищах, крім автоколивань, про які йшлося вище, можливі ще так звані автохвилі та автоструктури – не пов'язані з граничними умовами просторово-тимчасові утворення, параметри яких визначаються лише властивостями нелінійного нерівноважного середовища, наприклад відокремлені фронти горіння і хвилі популяцій, в нервових волокнах, циліндричні та спіральні хвилі в серцевій тканині тощо. Стохастичні автоколивання в нелінійних нерівноважних середовищах – це турбулентність.