

Ф. А. БЕЛЯКОВ

ИНЖЕНЕР ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ, ПРОФЕССОР ХАРЬКОВСКОГО
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

624.04

Б-44

STATICA NOVA

НОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

СБОРНИК СТАТЕЙ —
ВЫПУСК ВТОРОЙ

МНОГОЯРУСНАЯ РАМА, АРКИ, БАЛКА НА СПЛОШНОМ
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ЗАКРЕПЛЕННАЯ НИЖНИМ КОНЦОМ
СТОЙКА, ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ

5087

✓

7

S

7005

ΓΟ
ΧΑ

7

Ф. А. БЕЛЯКОВ

ИНЖЕНЕР ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ, ПРОФЕССОР ХАРЬКОВСКОГО
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

У 624.04
8-44

STATICA NOVA

НОВЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАТИ-
ЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

СБОРНИК СТАТЕЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ

5087



Ча



проверено
1966 г.

W

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО УКРАИНЫ
ХАРЬКОВ

1930

Бібліографічний опис цього
видання вміщено в „Літописі
Укр. Друку“, „Картковому ре-
пертуарі“ та інших покажчиках
Української Книжкової Палати



№ 26/№ 3/1 1930.

Зам. № 917. Тираж 3.000.

Б₈—9¹/₂ арк.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый вниманию читателей второй выпуск нашего труда *Statica pova* включает ряд статей, относящихся к дальнейшим статически неопределимым вопросам. Подобно тому, как это имело место в первом выпуске, и здесь все содержание проникнуто той же общей идеей „м. п. нагрузок“.

Первая статья настоящего выпуска о многоярусных многопролетных рамах предназначалась для 1-го выпуска, но не была там помещена по техническим причинам. Практическая ценность изложенных в ней методов расчета и относящихся к ним таблиц испытана в расчетном отделе Всеукраинского Института Сооружений, при чем выяснились те значительные сбережения труда и времени по сравнению с обычными методами расчета, которые дает применение наших методов.

Две статьи об арках иллюстрируют с достаточной наглядностью, как просто развивается этот сложный вопрос в нашей трактовке. Здесь мы ограничились параболической аркой, но даже на этом простейшем случае выясняются те преимущества, которые обещает применение „н. м. п.“ метода к расчету арок более сложных, что подтверждается на двухшарнирной и бесшарнирной круговых арках. Соответствующие статьи войдут в состав третьего выпуска.

Последние три статьи имеют внутреннюю связь: здесь нами применен метод заданной наперед упругой линии, служащей для подбора сечений балки или стойки. Ясно, что эта постановка вопроса прямо противоположна применяемой обычно, представляющей, в сущности, проверку случайно выбранных размеров сечения балки. Сравнение нашей статьи о балке на упругом основании хотя бы с известной работой японского профессора Kei-ichi Hayashi показывает, какие упрощения возможны в этом чрезвычайно сложном вопросе.

Все три статьи, в особенности последняя — о продольном изгибе, представляют первые шаги применения новых методов в этих практически чрезвычайно важных вопросах.

Первый выпуск моей работы *Statica nova* был встречен в инженерных кругах очень благосклонно¹⁾. Хотелось бы аналогичного приема и для этого выпуска.

14/XI 1929 г.

¹⁾ Целое издание в 2000 экземпляров разошлось в течение десяти дней по выходе книги в свет.

СТАТЬЯ ЧЕТВЕРТАЯ

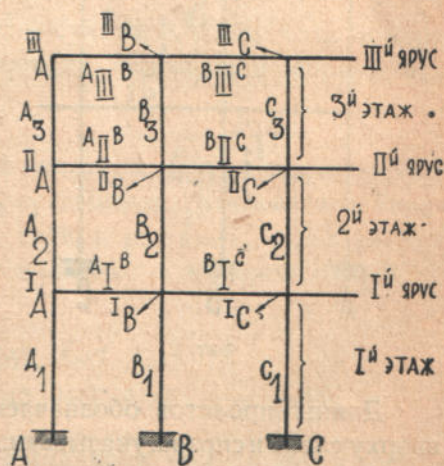
МНОГОЯРУСНАЯ РАМА

Определение простых фокусов

§ 1. Простые фокусы определяются в предположении горизонтальной неподвижности всех узловых точек рамы, что достигается приложением горизонтальных опор по концам (справа или слева) всех ригелей.

Рассмотрим многоярусную раму с горизонтальными ригелями и закрепленными нижними концами стоек; число пролетов рамы = n .

§ 2. Введем следующие обозначения, фиг. 1: будем называть узлы последовательно, переходя вдоль ригеля слева направо, буквами А, В, С . . . , с индексами вверху слева, указывающими номер яруса ригеля, считая ярусы снизу вверх; таким образом имеем:



Фиг. 1

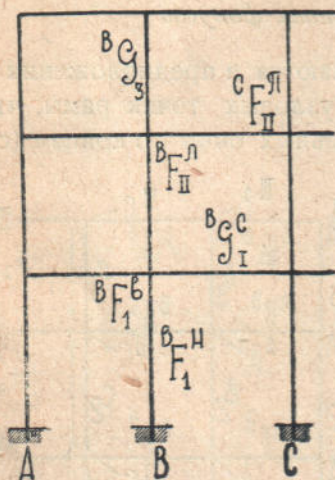
на опорах: А, В, С
 на 1 снизу ярусе ригелей: 1A , 1B , 1C
 на 2 " " " 2A , 2B , 2C и т. д.

Стойки отдельных колонн обозначаем арабскими цифрами, указывающими номер этажа, с индексом опорного узла — вверху слева, таким образом имеем:

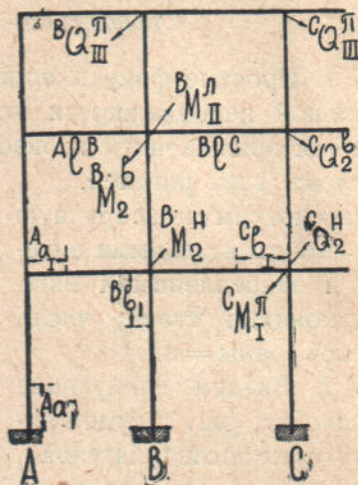
на 1-й слева колонне: $A_1, A_2, A_3 \dots$
 на 2-й " " $B_1, B_2, B_3 \dots$
 на 3-й " " $C_1, C_2, C_3 \dots$ и т. д.

Отдельные пролеты ригелей обозначаем римскими цифрами, указывающими номер яруса, с индексами вверху слева и справа тех колонн, между которыми расположен данный пролет ригеля, таким образом:

в 1-м ярусе $A_1^I B, B^I C, C^I D \dots$
 во 2-м " $A_2^{II} B, B^{II} C, C^{II} D \dots$ и т. д.



Фиг. 2



Фиг. 3

Длины пролетов обозначаем буквой l , с двумя индексами вверху слева и справа, указывающими наименование колонн, между которыми расположен данный пролет ригеля, напр.: $A_1^I B$ (фиг. 3).

Коэффициенты жесткости обозначаем (фиг. 2):

А) для стоек — буквой G , с индексом внизу справа, указывающим этаж, а вверху слева — наименование колонны, на которой расположена стойка, напр.: $G_{I_1}^C$;

В) для ригелей — буквой G , с индексом внизу справа, указывающим ярус, а вверху двумя индексами названия колонн, между которыми расположен данный пролет ригеля, напр.: G_{II}^{B-A} .

Фокусные расстояния обозначаются:

А) на стойках: для нижних фокусов, до ближайших нижних концов стоек — буквой а, с индексом внизу справа, указывающим номер этажа, и с индексом вверху слева, означающим название колонны; таким образом имеем:

в первом этаже: $A_{a_1}, B_{a_1}, C_{a_1} \dots$
 во втором " $A_{a_2}, B_{a_2}, C_{a_2} \dots$

для верхних фокусов, до ближайших верхних концов стоек — буквой b с аналогичными индексами вверху и внизу;

В) на ригелях: для левых фокусов, до ближайших левых концов пролета — буквой а, с индексом внизу справа, указывающим номер яруса, а вверху слева означающим наименование ближайшей слева колонны; таким образом имеем:

на первом ярусе: $A_{a_I}, B_{a_I}, C_{a_I} \dots$
 на втором " $A_{a_{II}}, B_{a_{II}}, C_{a_{II}} \dots$ и т. д.

для правых фокусов: аналогично — буквой b, с индексом номера яруса внизу и буквой наименования ближайшей справа колонны — вверху, справа.

Моменты (фиг. 3):

А) на стойках — буквой М, с индексом номера этажа справа внизу, буквой в справа вверху, если момент относится к верхнему концу стойки, и буквой н, если к нижнему; слева вверху индекс указывает наименование колонны, к которой относятся стойки: таким образом будет:

на колонне А: $A_{M_1^H}, A_{M_1^B}, A_{M_2^H}, A_{M_2^B}$
 на колонне В: $B_{M_1^H}, B_{M_1^B}, B_{M_2^H}, B_{M_2^B} \dots$ и т. д.;

В) на ригелях — буквой М, с индексом номера яруса справа внизу, буквой л справа вверху, если момент относится к левому концу пролета, и буквой п, если к правому; индекс слева вверху указывает наименование колонны, у которой берется момент; таким образом:

на ярусе I: $A_{M_I^L}, B_{M_I^L}, B_{M_I^P}, C_{M_I^P} \dots$
 на ярусе II: $A_{M_{II}^L}, B_{M_{II}^L}, B_{M_{II}^P}, C_{M_{II}^P} \dots$ и т. д.

М. п. реакции обозначаются (фиг. 3):

А) на стойках — буквой Q, с индексом справа внизу, указывающим этаж; вверху: слева — наименование колонны, а справа буквой в обозначается, что м. п. реакция относится к верхнему концу стержня, буквой н, если к нижнему, напр.: ${}^B Q_3^B$;

В) на ригелях — с индексом справа внизу, указывающим ярус, справа вверху буквой л обозначается, что м. п. реакция относится к левому концу пролета ригеля, буквой п, если к правому; индекс слева вверху обозначает наименование колонны, у которой берется м. п. реакция, напр.: ${}^D Q_{III}^n$.

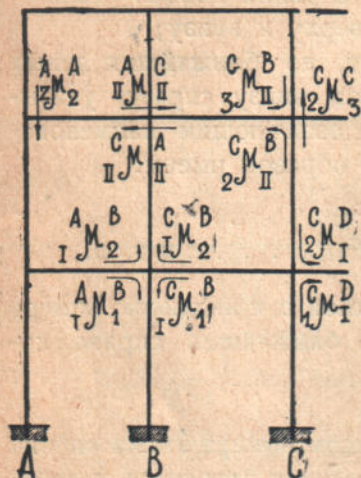
Заметим, что по абсолютной величине все м. п. реакции на концах стержней, сходящихся у одного узла, равны между собой.

Распределяющие коэффициенты (фиг. 4) обозначаются буквой μ с двумя индексами внизу, указывающими элементы, между которыми происходит распределение моментов, и двумя индексами вверху, обозначающими направление распределения. Напр.: ${}_{II}^B \mu_{II}^D$ соответствует переходу с ригеля BC яруса II на ригель CD того же яруса; ${}_{II}^D \mu_{II}^B$ — в обратном направлении;

${}_{II}^B \mu_3^C$ — с ригеля BC яруса II на стойку 3 колонны C; ${}_{3}^C \mu_{II}^D$ — со стойки 3 колонны C на ригель CD яруса II; ${}_{2}^C \mu_{II}^B$ — со стойки 2 колонны C на ригель CB яруса II и т. д.

М. п. о. нагрузки (фиг. 2) обозначаются буквой F с индексом справа внизу, указывающим: для ригеля — ярус, для стойки — этаж; индекс справа вверху означает: для ригеля буква л — левую, буква п — правую м. п. о. нагрузку, а для стойки: индекс в — верхнюю и н — нижнюю м. п. о. нагрузку; индекс слева вверху означает: для ригеля — наименование колонны, с которой связана м. п. о. нагрузка, для стойки — колонну, на которой находится рассматриваемая стойка, напр.:

$${}^C F_{II}^л, {}^E F_{II}^п, {}^B F_4^н \text{ и т. д.}$$



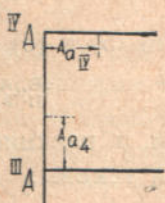
Фиг. 4

Условимся называть узлы, в которых сходятся два стержня рамы, двухстержневыми, в которых пересекаются три стержня, — трехстержневыми и на соединении четырех стержней — четырехстержневыми. Таким образом двухстержневые узлы располагаются в верхних углах рамы, трехстержневыми являются все остальные наружные узлы на верхнем ригеле и крайних стойках, а четырехстержневыми будут все остальные, внутренние узлы рамы.

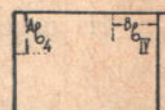
§ 3. В соответствии с полным закреплением опорных концов стоек, очевидно, фокусные расстояния нижних фокусов первого яруса:

$$A_{a_1} = B_{a_1} = \dots \dots \dots \frac{h_1}{3} \dots \dots \dots (1)$$

Нетрудно заметить, что фокусы, смежные с двухстержневыми узлами, напр., у точки ^{IV}A (фиг. 5), определяются с помощью тех же формул, которые были получены для неразрезных балок, т. е. с помощью формулы (20) статьи 1-й, при условии предварительного определения положения „предыдущих“ фокусов, например, на четырехъярусной раме для определения ^Aa_{IV} надо иметь ^Aa₄, а для ^Ab₄ — иметь ^Bb_{IV} (фиг. 6).



Фиг. 5



Фиг. 6

Самые формулы имеют вид:

$$\begin{aligned}
 A_{a_{IV}} &= \frac{A_{IV}^B}{3 + 2 \frac{A_{G_4}^B}{A_{G_{IV}}^B} - \frac{A_{G_4}^B}{A_{G_{IV}}^B} \cdot \frac{A_{a_4}/h_4}{(1 - A_{a_4}/h_4)}} = \\
 &= \frac{A_{IV}^B}{3 + 2 \cdot \frac{A_{G_4}^B}{A_{G_{IV}}^B} \left(\frac{1 - 1,5 A_{a_4}/h_4}{1 - A_{a_4}/h_4} \right)} \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{b_4} &= \frac{h_4}{3 + 2 \cdot \frac{A_{G_{IV}}^B}{A_{G_4}^B} \cdot \left(\frac{1 - 1,5 B_{b_{IV}}/A_{IV}^B}{1 - B_{b_{IV}}/A_{IV}^B} \right)} \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

§ 4. Для трехстержневого узла, напр., для точки ΠA в виду жесткого соединения между собой сходящихся стержней имеем зависимость:

$${}^A Q_{\Pi}^L = + {}^A Q_2^B = + {}^A Q_3^H \dots \dots \dots (4)$$

Предположим, что к правому концу ΠB пролета $\Pi^A B$ ригеля второго яруса приложен некоторый момент ${}^B M_{\Pi}^L$, тогда на левом конце того же пролета образуется момент ${}^A M_{\Pi}^L$, который, распространяясь на сходящиеся у узла ΠA стойки A_2 и A_3 , даст на них моменты ${}^A M_2^B$ и ${}^A M_3^H$. Согласно изложенному в предыдущих статьях имеем:

$${}^A M_{\Pi}^L = {}^A M_2^B + {}^A M_3^H \dots \dots \dots (5)$$

и далее:

$$\left. \begin{aligned} {}^A M_2^B &= \frac{B_{\Pi}^A}{\Pi^L A_2} \cdot {}^A M_{\Pi}^L \\ {}^A M_3^H &= \frac{B_{\Pi}^A}{\Pi^L A_3} \cdot {}^A M_{\Pi}^L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Значение индексов у распределяющих коэффициентов понятно из § 3.

На основании (5) и (6) получаем:

$$\frac{B_{\Pi}^A}{\Pi^L A_2} + \frac{B_{\Pi}^A}{\Pi^L A_3} = 1 \dots \dots \dots (7)$$

Выражения м. п. реакций ${}^A Q_2^B$ и ${}^A Q_3^H$ согласно формулам (14) и (17) статьи 1-й таковы:

$$\left. \begin{aligned} {}^A Q_2^B &= 1/3 \cdot A G_2 \cdot {}^A M_2^B \left(\frac{1 - 1,5 \frac{A a_2}{h_2}}{1 - A a_2 / h_2} \right) \\ {}^A Q_3^H &= 1/3 \cdot A G_3 \cdot {}^A M_3^H \left(\frac{1 - 1,5 \frac{A b_3}{h_3}}{1 - A b_3 / h_3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

На основании выражения (4) имеем:

$$A G_2 \cdot {}^A M_2^B \left(\frac{1 - 1,5 \frac{A a_2}{h_2}}{1 - \frac{A a_2}{h_2}} \right) = A G_3 \cdot {}^A M_3^H \left(\frac{1 - 1,5 \frac{A b_3}{h_3}}{1 - \frac{A b_3}{h_3}} \right)$$

откуда:

$$\frac{{}^A M_2^B}{{}^A M_3^H} = \frac{A G_3 \left(1 - 1,5 \frac{A b_3}{h_3} \right) \left(1 - \frac{A a_2}{h_2} \right)}{A G_2 \left(1 - 1,5 \frac{A a_2}{h_2} \right) \left(1 - \frac{A b_3}{h_3} \right)} \dots \dots \dots (9)$$

Подставляя сюда из (6), вместо ${}^A M_2^B$ и ${}^A M_3^B$, соответствующие значения, определяем на основании (7):

$${}_{II}^{\mu A} = \frac{1}{1 + \frac{{}^A G_2}{{}^A G_3} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A a_2}{h_2}\right) \left(1 - \frac{{}^A b_3}{h_3}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A b_3}{h_3}\right) \left(1 - \frac{{}^A a_2}{h_2}\right)}} \dots \dots (10)$$

и наконец:

$${}_{II}^{\mu A} = 1 - \frac{{}^B \mu_3^A}{{}^B \mu_2^A} = \frac{1}{1 + \frac{{}^A G_3}{{}^A G_2} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A b_3}{h_2}\right) \left(1 - \frac{{}^A a_2}{h_2}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A a_2}{h_2}\right) \left(1 - \frac{{}^A b_3}{h_3}\right)}} \dots \dots (11)$$

Из рассмотрения полученных выражений ясно, что для определения распределяющих коэффициентов ${}_{II}^{\mu A}$ и ${}_{II}^{\mu B}$ необходимо знать фокусные расстояния ${}^A a_2$ и ${}^A b_3$.

Сравнивая (11) и (10), замечаем, что все различие между ними состоит в том, что дроби в знаменателе взаимно обратны.

§ 5. Подобным же образом определяем распределяющие коэффициенты: ${}_{2II}^{\mu B}$ и ${}_{2II}^{\mu A}$, соответствующие распределению момента ${}^A M_2^B$ на ригель ${}^A II^B$ и стойку ${}^A 3$, а также коэффициенты: ${}_{3II}^{\mu B}$ и ${}_{3II}^{\mu A}$, распределяющие моменты ${}^A M_3^B$ на ригель ${}^A II^B$ и стойку ${}^A 2$:

$${}_{2II}^{\mu B} = \frac{1}{1 + \frac{{}^A G_{II}^B}{{}^A G_3} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{{}^B b_{II}}{A|B}\right) \left(1 - \frac{{}^A b_3}{h_3}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A b_3}{h_3}\right) \left(1 - \frac{{}^B b_{II}}{A|B}\right)}} \dots \dots (12)$$

$${}_{2II}^{\mu A} = 1 - \frac{{}^B \mu_{II}^B}{{}^B \mu_{II}^A} \dots \dots (13)$$

$${}_{3II}^{\mu B} = \frac{1}{1 + \frac{{}^A G_{II}^B}{{}^A G_2} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{{}^B b_{II}}{A|B}\right) \left(1 - \frac{{}^A a_2}{h_2}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{{}^A a_2}{h_2}\right) \left(1 - \frac{{}^B b_{II}}{A|B}\right)}} \dots \dots (14)$$

$${}_{3II}^{\mu A} = 1 - \frac{{}^B \mu_{II}^B}{{}^B \mu_{II}^A} \dots \dots (15)$$

Также сходно определяются коэффициенты на трехстержневых узлах верхнего ригеля, напр., на узле В имеем:

а) при распределении момента справа налево:

$$C_{N^1 N}^{uA} = \frac{1}{1 + \frac{A G_N^B}{B G_n} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{A a_N}{A|B}\right) \left(1 - \frac{B a_n}{h_n}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{B a_n}{h_n}\right) \left(1 - \frac{A a_N}{A|B}\right)}} \dots \dots \dots (16)$$

$$C_{N^1 n}^{uB} = 1 - C_{N^1 N}^{uA} \dots \dots \dots (17)$$

б) то же слева направо:

$$A_{N^1 N}^{uC} = \frac{1}{1 + \frac{B G_N^C}{B G_n} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{C b_N}{B|C}\right) \left(1 - \frac{B a_n}{h_n}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{B a_n}{h_n}\right) \left(1 - \frac{C b_N}{B|C}\right)}} \dots \dots \dots (18)$$

$$A_{N^1 n}^{uB} = 1 - A_{N^1 N}^{uC} \dots \dots \dots (19)$$

в) то же снизу вверх влево:

$$B_{n^1 N}^{uA} = \frac{1}{1 + \frac{A G_N^B}{B G_n} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{A a_N}{A|B}\right) \left(1 - \frac{C b_N}{B|C}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{C b_N}{B|C}\right) \left(1 - \frac{A a_N}{A|B}\right)}} \dots \dots \dots (20)$$

$$B_{n^1 n}^{uC} = 1 - B_{n^1 N}^{uA} \dots \dots \dots (21)$$

При более внимательном рассмотрении выражений (12), (14), (16) и т. д. нетрудно подметить закон образования этих выражений, что дает возможность писать их сразу.

Для облегчения расчетной работы при вычислении значений μ составлена прилагаемая таблица III (см. Приложение F) выражений

$$\frac{\left(1 - 1,5 \frac{b}{l}\right) \left(1 - \frac{a}{h}\right)}{\left(1 - 1,5 \frac{a}{h}\right) \left(1 - \frac{b}{l}\right)}$$

для различных величин отношений $\frac{a}{h}$ и $\frac{b}{l}$. Найденное для данного конкретного случая по таблице III значение указанного выше двойного отношения надо помножить на отношение коэффициентов жесткости G, прибавить единицу и по числовым таблицам любой справочной книги найти обратную величину, которая и дает значение распределяющего коэффициента. В дальнейшем изложении даются новые упрощения для нахождения значений μ .

Заметим, что и в данном случае объем таблицы сравнительно невелик, так как он определяется крайними значениями отношений $\frac{a}{h}$ и $\frac{b}{l}$, не выходящими из пределов от 0 до 0,33.

§ 6. Применение метода, изложенного в предыдущих параграфах, к четырехстержневым узлам дает выражения распределяющих коэффициентов. Не вдаваясь в подробности всех выводов, заметим, что для случая, напр., узла IIВ при распределении момента M_{II}^B зависимость между моментами имеет вид:

$$M_{II}^B = M_3^B + M_{II}^A + M_2^B \dots \dots \dots (22)$$

между м. п. реакциями:

$$Q_{II}^B = -Q_{II}^A = -Q_2^B = -Q_3^B \dots \dots \dots (23)$$

В результате получается:

$$\mu_{II}^{B_2} = \frac{1}{1 + \frac{V_{G_2}}{V_{G_{II}}} \frac{(1 - 1,5 \frac{B_{a_2}}{h_2})(1 - \frac{C_{b_{II}}}{V_{I C}})}{(1 - 1,5 \frac{C_{b_{II}}}{V_{I C}})(1 - \frac{B_{a_2}}{h_2})} + \frac{V_{G_3}}{V_{G_2}} \frac{(1 - 1,5 \frac{B_{a_2}}{h_2})(1 - \frac{B_{b_3}}{h_3})}{(1 - 1,5 \frac{B_{b_3}}{h_3})(1 - \frac{B_{a_2}}{h_2})}}}. \quad (24)$$

$$\mu_{II}^{B_3} = \frac{1}{1 + \frac{V_{G_3}}{V_{G_{II}}} \frac{(1 - 1,5 \frac{B_{b_3}}{h_3})(1 - \frac{C_{b_{II}}}{V_{I C}})}{(1 - 1,5 \frac{C_{b_{II}}}{V_{I C}})(1 - \frac{B_{b_3}}{h_3})} + \frac{V_{G_2}}{V_{G_3}} \frac{(1 - 1,5 \frac{B_{b_3}}{h_3})(1 - \frac{B_{a_2}}{h_2})}{(1 - 1,5 \frac{B_{a_2}}{h_2})(1 - \frac{B_{b_3}}{h_3})}}}. \quad (25)$$

и так как:

$$A_{\Pi^3}^{\mu B} + A_{\Pi^2}^{\mu B} + A_{\Pi}^{\mu C} = 1 \quad \dots \dots \dots (26)$$

то:

$$A_{\Pi}^{\mu C} = 1 - [A_{\Pi^3}^{\mu B} + A_{\Pi^2}^{\mu B}] \quad \dots \dots \dots (27)$$

Замечание, приведенное в конце § 5, справедливо и в данном случае, а потому не приводим остальных комплектов распределяющих коэффициентов.

Сравнивая выражения распределяющих коэффициентов для трех- и четырехстержневых узлов, напр. (10) с (24) или (11) с (25), замечаем, что вторые сложнее первых, а именно: у четырехстержневых в знаменателе добавляется один член; два других в обоих выражениях отличаются лишь указателями стойки (в данном случае А—для трехстержневых, В—для четырехстержневых). Таким образом, из выражения распределяющего коэффициента для четырехстержневого узла получаем выражение для трехстержневого, опуская в знаменателе член, соответствующий отсутствующему стержню, а из выражения для трехстержневого, опуская в его знаменателе и другой член, получаем выражение для двухстержневого узла, т. е. для угловой точки рамы или для промежуточной опоры неразрезной балки: $\mu = 1$, что совершенно верно, так как за отсутствием третьего стержня момент при переходе через угловую точку или промежуточную опору балки не претерпевает никакого изменения.

§ 7. Имея распределяющие коэффициенты на всех трех- и четырехстержневых узлах рамы, легко определить и самые фокусы помощью следующих формул:

На основании выводов, сходных с приведенными в § 2 третьей статьи 1-го выпуска, получаем следующую зависимость между фокусами на двух последовательных ярусах одной и той же стойки, напр., между нижними фокусами:

$$A_{a_3} = \frac{h_3}{3 + A_{\Pi^2}^{\mu A} \cdot \frac{AG_2}{AG_3} \left(2 - \frac{\frac{Aa_2}{h_2}}{1 - \frac{Aa_2}{h_2}} \right)} = \frac{h_3}{3 + 2 \frac{A_{\Pi^2}^{\mu A}}{A_{\Pi^3}^{\mu A}} \cdot \frac{AG_2}{AG_3} \cdot \frac{\left[1 - 1,5 \frac{Aa_2}{h_2} \right]}{\left[1 - \frac{Aa_2}{h_2} \right]}} \quad (28)$$

между верхними:

$$A_{b_2} = \frac{h_2}{3 + \frac{A_{\mu_3} A}{2\mu_3} \cdot \frac{AG_3}{AG_2} \left(2 - \frac{Ab_3}{h_3} \right)} = \frac{h_2}{3 + 2 \frac{A_{\mu_3} A}{2\mu_3} \cdot \frac{AG_3}{AG_2} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{Ab_3}{h_3} \right)}{\left(1 - \frac{Ab_3}{h_3} \right)}} \quad (29)$$

Подобным же образом на самом верхнем ригеле имеем: для левых фокусов, напр., на втором пролете:

$$B_{a_N} = \frac{B_{\Gamma C}}{3 + \frac{C_{\mu_N} A}{N\mu_N} \cdot \frac{AG_N^B}{BG_N^C} \left(2 - \frac{A_{a_N}}{A_{\Gamma B}} \right)} = \frac{B_{\Gamma C}}{3 + 2 \frac{C_{\mu_N} A}{N\mu_N} \cdot \frac{AG_N^B}{BG_N^C} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{A_{a_N}}{A_{\Gamma B}} \right)}{\left(1 - \frac{A_{a_N}}{A_{\Gamma B}} \right)}} \quad (30)$$

для правых:

$$B_{b_N} = \frac{A_{\Gamma B}}{3 + \frac{A_{\mu_N} C}{N\mu_N} \cdot \frac{BG_N^C}{AG_N^B} \left(2 - \frac{C_{b_N}}{B_{\Gamma C}} \right)} = \frac{A_{\Gamma B}}{3 + 2 \frac{A_{\mu_N} C}{N\mu_N} \cdot \frac{BG_N^C}{AG_N^B} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{C_{b_N}}{B_{\Gamma C}} \right)}{\left(1 - \frac{C_{b_N}}{B_{\Gamma C}} \right)}} \quad (31)$$

Для фокусов на элементах, смежных с четырехстержневыми узлами, имеем зависимости, напр., на стойке B_3 : между нижними фокусами:

$$B_{a_3} = \frac{h_3}{3 + \frac{B_{\mu_2} B}{3\mu_2} \cdot \frac{BG_2}{BG_3} \left(2 - \frac{B_{a_2}}{h_2} \right)} = \frac{h_3}{3 + 2 \frac{B_{\mu_2} B}{3\mu_2} \cdot \frac{BG_2}{BG_3} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{B_{a_2}}{h_2} \right)}{\left(1 - \frac{B_{a_2}}{h_2} \right)}} \quad (32)$$

между верхними фокусами:

$$B_{b_2} = \frac{h_2}{3 + \frac{B_{\mu_3} B}{2\mu_3} \cdot \frac{BG_2}{BG_3} \left(2 - \frac{B_{b_3}}{h_3} \right)} = \frac{h_2}{3 + 2 \frac{B_{\mu_3} B}{2\mu_3} \cdot \frac{BG_2}{BG_3} \cdot \frac{\left(1 - 1,5 \frac{B_{b_3}}{h_3} \right)}{\left(1 - \frac{B_{b_3}}{h_3} \right)}} \quad (33)$$

Сравнивая выражения (32) и (33) с (28) и (29), замечаем, что они имеют одинаковое строение; нетрудно подметить общий закон, на основании которого можно сразу написать выражение для фокусного расстояния на любом стержне рамы.

§ 8. Исследуя выражения предыдущих §§, замечаем, что для определения фокусных расстояний необходимо знать по одному распределяющему коэффициенту и по одному фокусному расстоянию на каждый фокус. Если принять за исходный пункт стержень второго этажа наружной колонны, напр., A_2 , и последовательно обходить стержни сначала по одной наружной колонне вверх, затем по верхнему ригелю и спуститься вниз по другой наружной колонне, то каких либо затруднений со стороны фокусных расстояний на „предшествующих“ стержнях не встретится; действительно: при определении, например, фокусного расстояния A_{a_2} „предшествующим“ стержнем является стержень A_1 , для которого фокусное расстояние A_{a_1} в зависимости от условий закрепления нижнего конца стойки А равно или нулю (при шарнире в А), или $1/3$ (при полном закреплении в А). Определив с помощью формулы вида (28) фокусное расстояние A_{a_2} , переходим на 3-й этаж и определяем A_{a_3} по такой же формуле (28), в которой A_{a_2} уже будет известно. И так далее. Но так как в формулы входят еще и значения распределяющих коэффициентов, которые, в свою очередь, зависят от соответствующих фокусных расстояний, то таким образом для определения распределяющих коэффициентов необходимо предварительно задаваться значениями некоторых фокусных расстояний в виду того, что не все входящие в выражения распределяющих коэффициентов фокусные расстояния известны или могут быть предварительно определены.

§ 9. Здесь нас выручает следующая замечательная особенность. В знаменателе формул распределяющих коэффициентов входят отношения жесткостей и выражения, зависящие от фокусных расстояний, напр., формула (18) может быть представлена в виде:

$$A_{иc} = \frac{1}{1 + \varphi(G) \cdot \psi(a, b)} \dots \dots \dots (34)$$

Пределы для $\psi(a, b)$ определяются условиями закрепления стержней, к которым они относятся, и, соответственно крайним

случаям: шарниру или полному закреплению — значение $\psi(a, b)$ не может быть меньше 0,75 и больше 1,34, в среднем $\psi(a, b)$ равно 1,05. Это среднее значение ψ дает существенное упрощение формулы для μ , которая принимает вид:

$$\mu = \frac{1}{1 + 1,05 \varphi(G)} = \frac{1}{1 + 1,05 \frac{G_a}{G_b}} \dots \dots \dots (35)$$

при чем, как показывают вычисления, влияние этого упрощения на величину μ не превышает нескольких процентов, что делает возможным применение найденных значений распределяющих коэффициентов к определению соответствующих фокусных расстояний, которые получаются или вполне точными, или с самой незначительной погрешностью.

§ 10. Подобное же упрощение применимо для определения распределяющих коэффициентов и на четырехстержневых узлах. Напр., формула (24) принимает вид:

$$A_1 \mu_2^B = \frac{1}{1 + 1,05 \left\{ \frac{B G_2}{B G_{II}^C} + \frac{B G_2}{B G_3} \right\}} \dots \dots \dots (36)$$

Очень легко подметить чрезвычайно простой закон составления этих упрощенных формул. В случае надобности возможно выверить полученное выражение распределяющих коэффициентов и фокусных расстояний, как это указано ниже.

§ 11. Для облегчения вычислительной работы составлена таблица IV (см. Приложение G), в которой приведены значения

$$\mu = \frac{1}{1 + 1,05 \frac{G_1}{G_2}}$$

соответствующие отношениям

$$\frac{G_1}{G_2}$$

от 0 до 10 — в пределах практически возможных.

Легко заметить, что эта же таблица применима и для определения распределяющих коэффициентов на четырехстержневых

Государственный институт оптики

узлах, следует лишь подыскивать табличные значения не для $\frac{G_1}{G_2}$, а для суммы $\frac{G_1}{G_2} + \frac{G_3}{G_4}$.

Эта же таблица может служить и для уточнения значений распределяющих коэффициентов, а именно: найдя точные значения фокусных расстояний, определяем с помощью таблицы III двойных отношений выражения $\psi(a, b)$, которые будут несколько отличны от единицы, подсчитываем произведения $\varphi(G) \cdot \psi(a, b)$ и по ним отыскиваем в таблице IV соответствующие значения для μ .

§ 12. Определение фокусных расстояний на стержнях смежных с трех- и четырехстержневыми узлами также поддается упрощению с применением таблицы I для фокусных расстояний на неразрезной балке.

В § 7 было указано, что выражения фокусных расстояний у трех- и четырехстержневых узлов отличаются от таковых для фокусных расстояний у двухстержневых узлов (а также и на пролетах неразрезной балки) — только множителем μ у одного из членов знаменателя.

Обозначим знаменатель в выражении фокусных расстояний у трех- или четырехстержневого узла через K_1 , т. е.:

$$K_1 = 3 + 2\mu \frac{G_a}{G_3} \cdot \frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} \dots \dots \dots (37)$$

Для фокусных расстояний у двухстержневого узла имеем:

$$K = 3 + 2 \frac{G_a}{G_3} \cdot \frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} \dots \dots \dots (38)$$

откуда получаем:

$$2 \frac{G_a}{G_3} \cdot \frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} = K - 3.$$

Преобразуем на основании этого выражение (37):

$$K_1 = 3 + \mu (K - 3) \dots \dots \dots (39)$$

Это выражение дает возможность определения фокусных расстояний у 3-х- и 4-х-стержневых узлов с помощью таблицы I выпуска I. Для этого подыскиваем в таблице I значения K , соответствующие данным отношениям $\frac{G_a}{G_\beta}$ и $\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$, подставляем их в (39) и определяем K_1 .

При расчете рам нередко встречаются такие соотношения коэффициентов жесткости $G_a : G_\beta$, которые выходят за пределы таблицы I. Кроме того, при пользовании этой таблицей неизбежна интерполяция для промежуточных значений $G_a : G_\beta$ и $a_{n-1} : l_{n-1}$, не находящихся в таблице. Поэтому в Приложениях помещена таблица Ia, в которой приведены значения

$$k = 2 \left(\frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} \right)$$

для отношений $a_{n-1} : l_{n-1}$ с интервалами через 0,005.

Так как

$$K = 3 + 2 \frac{G_{n-1}}{G_n} \left(\frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} \right) = 3 + k \frac{G_{n-1}}{G_n},$$

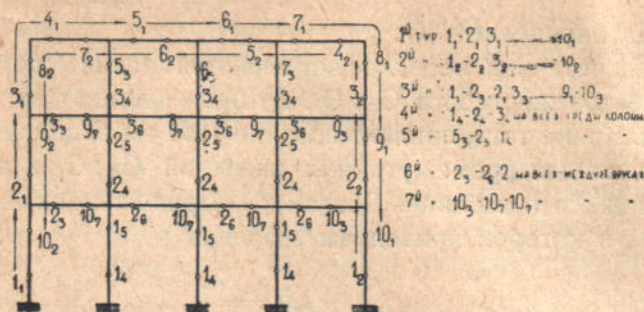
то для определения K достаточно взятое из таблицы Ia значение k , соответствующее данному отношению $\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$, помножить на данное же отношение $\frac{G_{n-1}}{G_n}$ и прибавить 3.

§ 13. Остаётся дать общие указания относительно последовательности определения фокусных расстояний в многоярусной многопролетной раме.

Предварительно с помощью таблицы IV определяем приближенные значения распределяющих коэффициентов μ . Затем, задаваясь некоторыми фокусными расстояниями и пользуясь таблицей Ia, определяем остальные фокусные расстояния — сначала левые, потом правые или наоборот. При желании уточнения расчет повторяется, кладя в основу найденные величины фокусных расстояний и пересчитывая распределяющие коэффициенты.

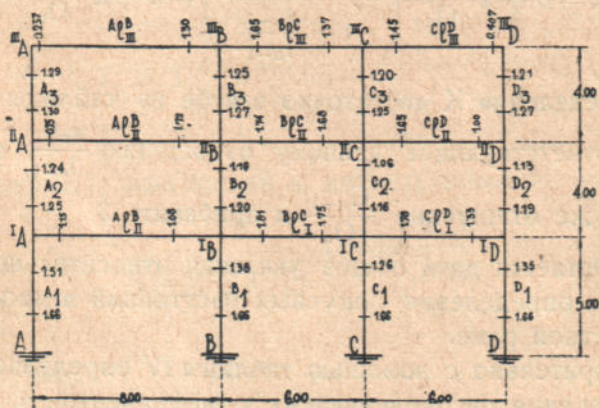
Существенное облегчение и ускорение доставляет при этом широкое пользование нашими таблицами.

На фиг. 7 последовательно цифрами указан порядок выполнения расчета.



Фиг. 7

§ 14. Следующие сопоставления дают ясное представление о степени точности и размерах сокращений вычислительной работы при пользовании нашим методом по сравнению с обычными по Suter'у или Strassner'у.



Фиг. 8

Сопоставления относятся к расчету одной и той же рамы, (фиг. 8), проработанной в расчетной группе Всеукраинского Института Сооружений.

Сравнение распределяющих коэффициентов, определенных по Зутеру и по методу проф. Белякова

Обознач. коэфф. μ	Определ. по Зутеру	Определен. по методу проф. Белякова		Обознач. коэфф. μ	Определ. по Зутеру	Определен. по методу проф. Белякова	
		Точн.	Приблж.			Точн.	Приблж.
$A_{1^{\mu}I} B$	0,862	0,860	0,869	$C_{1^{\mu}I} B$	0,212	0,213	0,204
$A_{1^{\mu}2} A$	0,138	0,139	0,131	$B_{1^{\mu}I} C$	0,490	0,488	0,464
$B_{1^{\mu}I} A$	0,515	0,515	0,519	$B_{1^{\mu}I} D$	0,234	0,232	0,250
$B_{1^{\mu}I} C$	0,228	0,225	0,210	$B_{1^{\mu}2} C$	0,276	0,277	0,286
$B_{1^{\mu}2} B$	0,257	0,258	0,241	$D_{1^{\mu}I} C$	0,477	0,477	0,463
$C_{1^{\mu}2} A$	0,333	0,332	0,318	$D_{1^{\mu}I} B$	0,246	0,247	0,250
$C_{1^{\mu}3} D$	0,305	0,305	0,318	$D_{1^{\mu}2} C$	0,277	0,273	0,287
$C_{1^{\mu}2} C$	0,362	0,362	0,364	$C_{1^{\mu}I} D$	0,630	0,625	0,610
$D_{1^{\mu}I} C$	0,718	0,720	0,717	$C_{1^{\mu}2} D$	0,370	0,375	0,390
$D_{1^{\mu}2} D$	0,282	0,280	0,283	$A_{2^{\mu}I} A$	0,210	0,206	0,190
$B_{1^{\mu}I} A$	0,620	0,615	0,610	$A_{2^{\mu}I} B$	0,790	0,795	0,810
$B_{1^{\mu}2} A$	0,380	0,384	0,386	$A_{2^{\mu}II} B$	0,952	0,947	0,952
$A_{1^{\mu}I} B$	0,478	0,475	0,464	$A_{2^{\mu}3} A$	0,048	0,053	0,048
$A_{1^{\mu}I} C$	0,245	0,244	0,250	$B_{2^{\mu}I} B$	0,374	0,370	0,338
$A_{1^{\mu}2} B$	0,277	0,280	0,286	$B_{2^{\mu}I} A$	0,434	0,434	0,478
$C_{1^{\mu}I} B$	0,365	0,362	0,329	$B_{2^{\mu}I} C$	0,192	0,192	0,184
$C_{1^{\mu}I} A$	0,423	0,425	0,467				

Сравнение фокусных расстояний, определенных по Зутеру и по методу проф. Белякова

Обознач. фок. расст.	Определ. по Зутеру		Обознач. фок. расст.	Определ. по Зутеру		Обознач. фок. расст.	Определ. по Зутеру		Обознач. фок. расст.	Определ. по Белякову	
	Определ. по Зутеру	Определ. по Белякову		Определ. по Зутеру	Определ. по Белякову		Определ. по Зутеру	Определ. по Белякову		Определ. по Зутеру	Определ. по Белякову
Aa_1	1,66	1,66	Cb_1	1,77	1,75	Db_2	1,13	1,13	Ca_3	1,25	1,25
Ab_1	1,50	1,51	Ca_1	1,78	1,78	Aa_{II}	0,76	0,75	Cb_3	1,19	1,20
Ba_1	1,66	1,66	Db_1	1,33	1,33	Bb_{II}	1,72	1,72	Da_3	1,27	1,27
Vb_1	1,37	1,38	Aa_2	1,25	1,25	Va_{II}	1,75	1,74	Db_3	1,21	1,21
Ca_1	1,66	1,66	Ab_2	1,23	1,24	Cb_{II}	1,64	1,68	Aa_{III}	0,24	0,237
Cb_1	1,26	1,26	Va_2	1,20	1,20	Ca_{II}	1,65	1,65	Vb_{III}	1,31	1,30
Da_1	1,66	1,66	Vb_2	1,14	1,16	Db_{II}	1,00	1,00	Va_{III}	1,65	1,65
Db_1	1,35	1,35	Ca_2	1,15	1,16	Aa_3	1,30	1,30	Cb_{III}	1,39	1,37
Aa_I	1,15	1,15	Cb_2	1,04	1,06	Ab_3	1,29	1,29	Va_{III}	1,45	1,45
Vb_I	1,99	1,98	Va_2	1,19	1,19	Va_3	1,27	1,27	Db_{III}	0,40	0,407
Va_I	1,82	1,81				Vb_3	1,25	1,25			

Сравнение определения фокусных расстояний

По методу Зутера

$$a_1 = \frac{1}{3} h_1 = 1,66 \text{ mtr}; \quad \beta_1 = 1220 \text{ m}^{-3}; \quad \beta_8 = 1905 \text{ m}^{-3}$$

$$b_8 = \frac{l_8 \times \beta_8}{3\beta_8 + 1,65 \frac{\beta_{15} \times \beta_{12}}{\beta_{15} + \beta_{12}}} = \frac{4,00 \times 1905}{3 \times 1905 + 1,65 \frac{5720 \times 286}{5720 + 286}} = 1,28 \text{ mtr}$$

$$\tau_1^I = \beta \left(2 - \frac{a_1}{l_1 - a_1} \right) = 1220 \left(2 - \frac{1,66}{5,00 - 1,66} \right) = 1830 \text{ m}^{-3}$$

$$\tau_8^I = \beta_8 \left(2 - \frac{b_8}{l_8 - b_8} \right) = 1905 \left(2 - \frac{1,28}{4,00 - 1,28} \right) = 2910 \text{ m}^{-3}$$

$$\varepsilon_5^I = \frac{\tau_1^I \times \tau_8^I}{\tau_1^I + \tau_8^I} = \frac{1830 \times 2910}{1830 + 2910} = 1127 \text{ m}^{-3}$$

$$a_5 = \frac{l_5 \times \beta_5}{3\beta_5 + \varepsilon_5^I} = \frac{8,00 \times 286}{3 \times 286 + 1127} = 1,15 \text{ mtr} = A_{a_1}$$

По методу Зутера

$$b_9 = \frac{l_9 \times \beta_9}{3\beta_9 + 1,65 \frac{\beta_{12} \times \beta_{16} \times \beta_{13}}{\beta_{12} \times \beta_{16} + \beta_{12} \times \beta_{13} + \beta_{16} \times \beta_{13}}} =$$

$$= \frac{4,00 \times 656}{3 \times 656 + 1,65 \frac{286 \times 1905 \times 750}{286 \times 1905 + 286 \times 750 + 1905 \times 750}} = 1,15 \text{ mtr}$$

$$\tau_5^{II} = \beta_5 \left(2 - \frac{a_5}{l_5 - a_5} \right) = 286 \left(2 - \frac{1,15}{8,00 - 1,15} \right) = 525 \text{ m}^{-3}$$

$$\tau_2^{II} = \beta_2 \left(2 - \frac{a_2}{l_2 - a_2} \right) = 406 \left(2 - \frac{1,66}{5,00 - 1,66} \right) = 609 \text{ m}^{-3}$$

$$\tau_9^{II} = \beta_9 \left(2 - \frac{b_9}{l_9 - b_9} \right) = 656 \left(2 - \frac{1,14}{4,00 - 1,14} \right) = 1050 \text{ m}^{-3}$$

$$\varepsilon_6^{II} = \frac{\tau_5^{II} \times \tau_2^{II} \times \tau_9^{II}}{\tau_5^{II} \times \tau_2^{II} + \tau_5^{II} \times \tau_9^{II} + \tau_2^{II} \times \tau_9^{II}} =$$

$$= \frac{525 \times 609 \times 1050}{525 \times 609 + 525 \times 1050 + 609 \times 1050} = 222 \text{ m}^{-3}$$

$$a_6 = \frac{l_6 \times \beta_6}{3\beta_6 + \varepsilon_6^{II}} = \frac{6,00 \times 750}{3 \times 750 + 222,0} = 1,82 \text{ mtr.} = B_{a_1}$$

по методу Зутера и по методу проф. Белякова

По методу проф. Белякова

$$k_1 = 3 + \frac{B_1^A}{I_1^A} (k - 3) = 3 + 0,615 (9,42 - 3) = 6,95$$

$$A_{a1} = \frac{A_1^B}{k_1} = \frac{8,00}{6,95} = 1,15 \text{ mtr.}$$

По методу проф. Белякова

$$k_1 = 3 + \frac{C_1^A}{I_1^A} (k - 3) = 3 + 0,425 (3,72 - 3) = 3,31$$

$$B_{a1} = \frac{B_1^C}{k_1} = \frac{6,00}{3,31} = 1,81 \text{ mtr.}$$

По методу Зутера

$$\tau_{18}^{\text{VIII}} = \beta_{18} \left(2 - \frac{b_{18}}{l_{18} - b_{18}} \right) = 5720 \left(2 - \frac{1,24}{4,0 - 1,24} \right) = 8870 \text{ м}^{-3}$$

$$\tau_{14}^{\text{VIII}} = \beta_{14} \left(2 - \frac{a_{14}}{l_{14} - a_{14}} \right) = 750 \left(2 - \frac{1,65}{6,0 - 1,65} \right) = 1215 \text{ м}^{-3}$$

$$\varepsilon_{11}^{\text{VIII}} = \frac{\tau_{18}^{\text{VIII}} \times \tau_{14}^{\text{VIII}}}{\tau_{18}^{\text{VIII}} + \tau_{14}^{\text{VIII}}} = \frac{8870 \times 1215}{8870 + 1215} = 1070 \text{ м}^{-3}$$

$$b_{11} = \frac{l_{11} \times \beta_{11}}{3\beta_{11} + \varepsilon_{11}^{\text{VIII}}} = \frac{4,0 \times 1905}{3 \times 1891 + 1070} = 1,13 \text{ mtr.} = Db_2.$$

По методу проф. Беякова

$$\kappa_1 = 3 + \frac{A_1 A}{2 \mu_3} (\kappa - 3) = 3 + 0,116 (7,714 - 3) = 3,548$$

$$D_{b_2} = \frac{D_{12}}{\kappa_1} = \frac{4,00}{3,548} = 1,13 \text{ mtr.}$$

5—VIII—29 г.



СТАТЬЯ ПЯТАЯ

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ДВУХШАРНИРНАЯ АРКА

Применение моего метода НМП к расчету арок дает существенные упрощения, как это видно из дальнейшего изложения.

I. Определение распора Н без учета нормальных усилий

§ 1. Первоначально рассмотрим случай симметричной арки параболического очертания с переменным моментом инерции J;

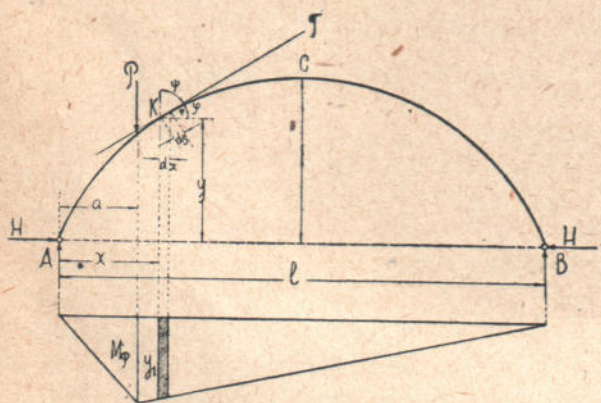
влияние на арку изменения температуры оставляем пока вне рассмотрения.

Обозначим (фиг. 1а):

пролет арки — через l

подъем арки — через f .

Уравнение параболического очертания оси арки, относенное к левой опоре арки:



Фиг. 1а, б

$$y = \frac{4fx(1-x)}{l^2} \dots \dots \dots (1)$$

На арку действует нагрузка в виде сосредоточенного груза P , приложенного в расстоянии a от левой опоры А арки.

Под действием этой нагрузки на опорах А и В появляются опорные реакции, а в самой арке — изгибающие моменты. Величины и направления этих опорных реакций неизвестны; предполагая каждую опорную реакцию разложенной на вертикальную и горизонтальную составляющие, нетрудно заметить, что при вертикальной внешней нагрузке неизвестные горизонтальные составляющие равны и противоположно направлены; это — горизонтальный распор Н. Вертикальные же составляющие А и В в сумме равны внешней нагрузке Р и обратно ей направлены; известно, что они определяются как опорные реакции свободно опирающейся балки пролета l от нагрузки Р. Таким образом для решения задачи нужно определить величину распора Н.

§ 2. Это достигается следующим образом.

Под действием нагрузки Р арка стремится деформироваться, при чем расстояние между шарнирами А и В стремится увеличиться. Этой деформации сопротивляются опоры арки, и если они незыблемы, то расстояние между шарнирами А и В остается неизменным. Тот же результат достигается приложением к свободным концам арки А и В соответствующих реакций. Таким образом последовательность решения задачи представляется в следующем виде:

а) определяется горизонтальное перемещение δ свободных опор А и В (горизонтальный прогиб концов арки) под действием нагрузки Р;

б) определяется величина горизонтального распора Н, уничтожающая горизонтальное перемещение δ опор А и В и возвращающая их в первоначальное положение.

§ 3. Для определения горизонтального перемещения δ свободных опор А и В под действием нагрузки Р арки воспользуемся вторым положением Моора, согласно которому всякий прогиб равен статическому моменту м. п. нагрузки относительно точки, в которой определяется прогиб. Моментная диаграмма в данном случае представляет треугольник (фиг. 1б), с ординатой под грузом Р, равной:

$$M_P = \frac{Pa(1-a)}{l} = Pla\beta \dots \dots \dots (2)$$

Здесь α означает $\frac{a}{l}$ и β означает $\frac{l-a}{l}$. Обозначим площадь этого моментного трехугольника через Ω_P ; легко видеть, что

$$\Omega_P = \frac{M_P l}{2} = \frac{Pa(l-a)}{2} = \frac{Pa\beta l^2}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Разобьем осевую линию очертания арки на бесконечно малые отрезки ds ; проекции этих дифференциальных отрезков на горизонтальную и вертикальную оси связаны с самим отрезком зависимостью:

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos \varphi \\ dy &= ds \cos \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

где φ и ψ означают углы, образуемые с осями касательной T к осевой линии арки, заключающей ds (фиг. 1а).

Системой вертикальных прямых, проходящих через точки разделения осевой линии арки, площадь Ω_P моментной диаграммы разбивается на элементарные полоски; ширина каждой такой полоски равна dx .

Для произвольной точки K на оси арки в расстоянии x от опоры A имеем площадь соответствующей элементарной моментной полоски:

$$y_1 dx = M_x dx \dots \dots \dots (5)$$

Составляем подобные выражения площадей элементарных моментных полосок для всех точек пролета арки; эти площади, поделенные на $EJ_x \cos \varphi$, представляют ту м. п. нагрузку, которая по Моору, будучи приложена на свободной балке пролета l , дает те же угловые и линейные деформации арки, как и действующая на арку нагрузка P (см. Strassner, Neuere Methoden, Band II, стр. 19).

Таким образом м. п. нагрузка представляет фигуру, получаемую из моментной диаграммы разделением каждой ее ординаты на соответствующее значение $EJ_x \cos \varphi$ (см. фиг. 1б и 2б); ординаты диаграммы м. п. нагрузки будут, следовательно, равны:

$$\frac{y_1}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{M_x}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (6)$$

а величины элементов м. п. нагрузки:

$$\frac{y_1 dx}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{M_x dx}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (7)$$

Подстановка из выражения первого (4) в (7), вместо dx , равного ему значения $ds \cos \varphi$, дает:

$$\frac{y_1 dx}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{M_x dx}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{M_x ds}{EJ_x} = \frac{y_1 ds}{EJ_x} \dots \dots \dots (8)$$

На протяжении левого участка а пролета арки имеем зависимость между моментами:

$$M_x = \frac{M_{px}}{a} = \frac{P(1-a)x}{1} = P\beta x \dots \dots \dots (9)$$

а на протяжении правого участка $(1-a)$:

$$M_x = \frac{M_p(1-x)}{1-a} = \frac{Pa(1-x)}{1} = Pa(1-x) \dots \dots \dots (9_1)$$

Подставляя эти значения в выражение (8), получаем выражения элементов м. п. нагрузки в таком виде: на участке а:

$$\frac{M_x ds}{EJ_x} = \frac{P(1-a)x ds}{EJ_x 1} = \frac{P\beta x ds}{EJ_x}, \dots \dots \dots (10)$$

на участке $(1-a)$:

$$\frac{M_x ds}{EJ_x} = \frac{Pa(1-x) ds}{EJ_x 1} = \frac{P\beta(1-x) ds}{EJ_x} \dots \dots \dots (10_1)$$

Перенесем отрезок, выражающий элемент м. п. нагрузки $\frac{M_x ds}{EJ_x}$, по вертикали до точки К на осевой линии арки и повернем его в положительном направлении на 90° до совпадения с горизонтальной линией, проходящей через точку К (фиг. 2а — б¹).

¹) Подобно тому, как на углу рамы, поворачивая в горизонтальное положение вертикально приложенный опорный момент на конце ригеля, обращаем его в опорный момент на конце стойки.

Здесь через θ обозначено отношение $\frac{f}{l}$.

Сумма этих статических моментов для всех элементов м. п. нагрузки на целом пролете арки, представляющая статический момент м. п. нагрузки F_P в целом относительно линии опор АВ, равна деформации прогиба (в горизонтальном направлении) опорных концов арки А и В:

$$\sum_A^B \frac{M_x ds}{EJ_x} y = \sum_{x=0}^{x=a} \frac{4P \beta \cdot \theta (1-x)^2 ds}{EJ_x l} + \sum_{x=a}^{x=l} \frac{4P \alpha \theta (1-x)^2 x ds}{EJ_x l} = \delta_P \dots \dots \dots (13)$$

Заменяем в правой части выражения (13) на основании (4) ds равным ему $\frac{dx}{\cos \varphi}$:

$$\sum_A^B \frac{M_x ds}{EJ_x} y = \sum_{x=0}^{x=a} \frac{4P \beta \theta (1-x)^2 dx}{EJ_x l \cos \varphi} + \sum_{x=a}^{x=l} \frac{4P \alpha \theta (1-x)^2 x dx}{EJ_x l \cos \varphi} = \delta_P \dots \dots \dots (14)$$

Если арка такова, что закон изменения момента инерции J по длине арки выражается зависимостью:

$$J_x \cos \varphi = J' = \text{Const} \dots \dots \dots (15)$$

то выражение (14) принимает вид:

$$\sum_A^B \frac{M_x ds}{EJ_x} y = \sum_{x=0}^{x=a} \frac{4P \beta \theta f (1-x)^2 dx}{EJ' l} + \sum_{x=a}^{x=l} \frac{4P \alpha \theta (1-x)^2 x dx}{EJ' l} = \delta_P \dots \dots \dots (16)$$

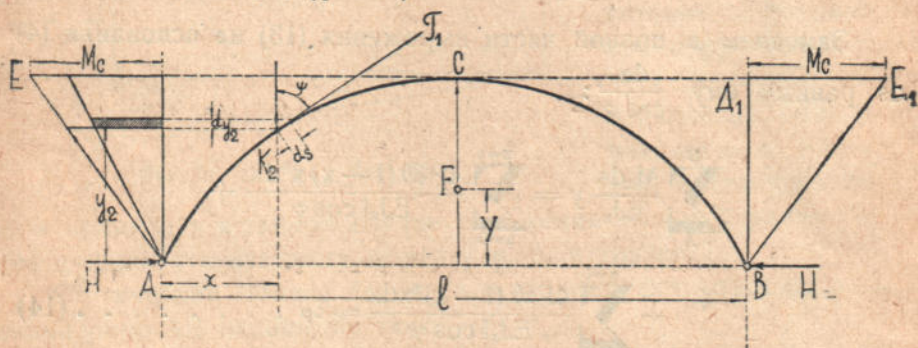
Переходя от суммирования к интегрированию, имеем:

$$\sum_A^B \frac{M_x ds}{EJ_x} y = \int_0^a \frac{4P\beta^3 \theta (1-x)x^2}{EJ'} dx + \int_a^l \frac{4P\alpha\theta (1-x)^2 x}{EJ'} dx =$$

$$= \frac{P\alpha\theta (l^3 - 2a^2 l + a^3)}{3EJ'} = \delta_p \dots \dots \dots (17)$$

§ 4. Теперь переходим к определению такой величины горизонтального распора H , которая уничтожает деформацию δ_p , возникающую при действии на арку нагрузки P .

Распор H вызывает в арке изгибающие моменты, диаграмма которых имеет вид двух отдельных прямоугольных треугольников ADE и BD_1E_1 (фиг. 3).



Фиг. 3

Системой горизонтальных прямых, проходящих через точки разделения осевой линии арки на отрезки ds , моментные треугольники ADE и BD_1E_1 разбиваются на элементарные полоски шириной dy_2 .

Для произвольной точки K_2 на высоте y_2 от линии опор AB имеем площадь соответствующей моментной полоски:

$$M_{y_2} dy \dots \dots \dots (18)$$

Составляем такие же выражения площадей моментных полосок для всех точек пролета арки; совокупность всех этих площадей, поделенных на $EJ \cos \psi$, представляют м. п. нагрузку, которая в виде переизгибающих сил и статических моментов дает

те же угловые и линейные деформации, как и действующий на нашу арку распор H . Здесь ψ означает угол, образуемый с вертикалью касательной T_1 к осевой линии арки в точке K_2 .

Таким образом м. п. нагрузка от распора H представляет фигуру, получаемую из моментных треугольников ADE и BD_1E_1 разделением каждой горизонтальной ординаты на соответствующее значение $EJ_{y_2} \cos \psi$ (фиг. 3).

Горизонтальные ординаты диаграммы м. п. нагрузки, следовательно, будут равны:

$$\frac{M_{y_2}}{EJ_{y_2} \cos \psi} \dots \dots \dots (19)$$

а величины элементов м. п. нагрузки:

$$\frac{M_{y_2} dy}{EJ_{y_2} \cos \psi} \dots \dots \dots (20)$$

Подстановка из выражения второго (4) в (20) вместо dy равного ему значения $ds \cos \psi$ дает:

$$\frac{M_{y_2} ds}{EJ_{y_2}} \dots \dots \dots (21)$$

Из подобия треугольников имеем пропорцию:

$$\frac{M_{y_2}}{M_C} = \frac{y_2}{f} \dots \dots \dots (22)$$

Здесь M_C означает момент в ключе арки от распора H , y_2 — вертикальное расстояние моментной ординаты M_{y_2} от линии опор AB .

Так как $M_C = Hpf$, то на основании (22) преобразуем значение (21) так:

$$\frac{M_{y_2} ds}{EJ_{y_2}} = \frac{Hpf ds \cdot y_2}{EJ_{y_2}} \dots \dots \dots (23)$$

Подобные выражения можем написать для всех значений y_2 от $y_2 = 0$ до $y_2 = f$ на обеих половинах арки.

Подставляем в выражение (23) вместо y_2 его значение из (1):

$$\frac{M_{y_2}}{EJ_{y_2}} = \frac{4Hpf dsx(1-x)}{EJ_{y_2} l^2} = \frac{4Hpf x(1-x) ds}{EJ_{y_2} l} \dots \dots (24)$$

Статический момент этого элемента м. п. нагрузки относительно линии опор АВ:

$$dM_s = \frac{16H_P \theta^2 x^2 (1-x)^2}{EJ_y l^2} ds \dots \dots \dots (25)$$

Заменяем в правой части (25) на основании первого выражения (4) ds равным ему $\frac{dx}{\cos \varphi}$, а на основании (15) $J_y \cos \varphi$ равным ему J' :

$$dM_s = \frac{16H_P \theta^2 x^2 (1-x)^2 dx}{EI'^2} \dots \dots \dots (26)$$

Сумма таких статических моментов для всех элементов м. п. нагрузки от А до В, другими словами, для всех значений x от $x=0$ до $x=1$, согласно Моору, равна прогибу точки, с которой совпадает центр этих моментов, в нашем случае это есть горизонтальный прогиб опор А В, т. е. $\delta_H = \delta_{AB}$.

Заменяя суммирование, интегрированием по всему пролету, получаем:

$$\int_0^1 \frac{16H_P \theta^2 x^2 (1-x)^2 dx}{EJ'^2} = \frac{8H_P \theta^2 l^3}{15EJ'} = \delta_H = \delta_{AB} \dots \dots (27)$$

Сравнивая это выражение с (17), имеем:

$$\frac{8H_P \theta^2 l^3}{15EJ'} = \frac{P\alpha \theta (l^3 - 2a^2 l + a^3)}{3EJ'} \dots \dots \dots (28)$$

откуда определяем распор H_P :

$$H_P = \frac{5P\alpha (l^3 - 2a^2 l + a^3)}{8\theta l^3} = \frac{5P\alpha \beta (1 + \alpha \beta)}{8\theta} \dots \dots (29)$$

(См. Müller Breslau: Neuere Methoden der Festigk. u. Statik d. Baukonstr. 5-е изд., стр. 169, 191—192).

§ 5. Другое выражение для распора (см. Müller Breslau, та же книга, стр. 193, выраж. 77) получается очень просто, заменяя статический момент м. п. нагрузки (17), удвоенным произведением площади м. п. нагрузки, соответствующей действию

груза P на ординату Y центра тяжести площади параболического сегмента ACB (фиг. 3):

$$Y = \frac{2}{5} f.$$

На основании этого имеем:

$$2 \cdot \frac{Pab}{2EJ'} \cdot \frac{2}{5} f = \frac{8H_P \theta^{213}}{15EJ'}, \dots \dots \dots (30)$$

откуда

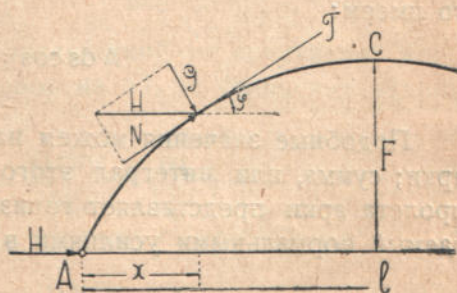
$$H_P = \frac{3}{4} \cdot \frac{Pab}{lf} = \frac{3Q}{2fl} \dots \dots \dots (31)$$

Здесь Q означает моментную площадь, соответствующую нагрузке арки сосредоточенным грузом P .

II. Определение распора H с учетом нормальных усилий и равномерного нагревания арки

§ 6. В предыдущих выводах не учтено влияние на распор арки касательных (нормальных к сечению арки) усилий, поэтому выражения (29) и (31) верны только приблизительно. Примем во внимание и влияние этих нормальных усилий, а в дальнейшем также и изменений температуры.

Положим, что мы определили распор H ; перенесем его в произвольную точку K осевой линии арки, приложив в ней две силы равные и противоположные, параллельные распору H (фиг. 4).



Фиг. 4

Разложим перенесенную к K силу H на две составляющие:

силу N по направлению касательной T к осевой линии арки
силу G по направлению нормали к осевой линии арки.

При прежних обозначениях имеем:

$$N = H \cos \varphi \dots \dots \dots (32)$$

Под действием этой силы элемент ds арки получает деформацию

$$\Delta ds = \frac{Nds}{EF} = \frac{Hds \cos \varphi}{EF} \dots \dots \dots (33)$$

Подставляем сюда вместо ds на основании (4) равное ему значение $\frac{dx}{\cos \varphi}$

$$\Delta ds = \frac{Hdx}{EF} \dots \dots \dots (34)$$

Проекция этой деформации на горизонтальную ось:

$$\Delta ds \cos \varphi = \frac{Hdx \cos \varphi}{EF} \dots \dots \dots (35)$$

Если арка такова, что поперечные сечения ее изменяются по длине пролета согласно закономерности, выражающейся формулой

$$\frac{F}{\cos \varphi} = F' = \text{const.},$$

то имеем:

$$\Delta ds \cos \varphi = \frac{Hdx}{EF'} \dots \dots \dots (36)$$

Подобные значения можем написать для всех точек на оси арки; сумма, или интеграл этого выражения в пределах всего пролета арки представляет горизонтальный прогиб арки, вызываемый нормальными усилиями в арке:

$$\Delta l = \sum_A^B \Delta ds \cos \varphi = \int_0^l \frac{H}{EF'} dx = \frac{Hl}{EF'} \dots \dots \dots (37)$$

(Сравн. Müll. Bresl. Neuere Meth., стр. 169, выраж. 58).

Если горизонтальный прогиб арки, сопровождающийся увеличением расстояния между опорами, считать положительным, то Δl , представляющий уменьшение этого расстояния, будет отрицательным.

§ 7. Нетрудно заметить, что равномерное повышение температуры арки на t градусов при свободных опорах арки дает положительный горизонтальный прогиб, равный $\epsilon t l$, где ϵ есть коэффициент линейного удлинения материала арки при нагревании.

§ 8. При совместном действии: нагрузки сосредоточенным грузом P , нормальных усилий и равномерного повышения температуры на t° и при незыблемости опор арки сумма горизонтальных прогибов арки равна нулю, откуда следует на основании выражений (28), (37) и § 7:

$$-\frac{8H\theta^2 l^3}{15EJ'} - \frac{HI}{EF'} + \epsilon t l + \frac{P\alpha\theta(l^3 - 2a^2 l + a^3)}{3EJ'} = 0 \quad \dots (38)$$

После необходимых алгебраических пределок и введя обозначение:

$$f_1 = f\left(1 + \frac{15 J'}{8 F' f_2}\right) \dots \dots \dots (39)$$

получаем выражение распора H :

$$H = \frac{5P\alpha\beta(1 + \alpha\beta)}{8\theta_1} + \frac{15EJ'}{8ff_1} \cdot \epsilon t \dots \dots \dots (40)$$

Если в результате всех воздействий на арку имеет место горизонтальное перемещение опор на Δl , то уравнение (38) принимает вид:

$$\frac{P\alpha\theta(l^3 - 2a^2 l + a^3)}{3EJ'} - \frac{8H\theta^2 l^3}{15EJ'} - \frac{HI}{EF'} + \epsilon t l = \Delta l \dots \dots (41)$$

откуда определяется распор H :

$$H = \frac{5P\alpha\beta(1 + \alpha\beta)}{8\theta_1} + \frac{15EJ'}{8ff_1} (\epsilon t l - \Delta l) \dots \dots \dots (42)$$

(См. Müll. Bresl. Neuere Method., стр. 192).

Сопоставляя выражения (28), (30) и (40), замечаем, что первый член выражения (40) может быть без чувствительной погрешности заменен по аналогии с (31) выражением:

$$\frac{3 P\alpha\beta}{4 f_1} = \frac{3 P\alpha\beta}{4 \theta_1}$$

Таким образом в конечном результате для распора имеем выражение:

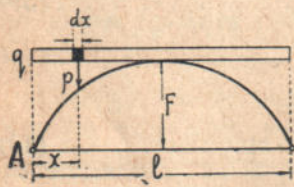
$$H = \frac{3 P \alpha \beta}{4 \theta_1} + \frac{15 E J'}{8 f f_1 l} (\epsilon t l - \Delta_1 l) \dots \dots \dots (43)$$

если же в первый член ввести значение моментной площади Ω_P , то:

$$H = \frac{3 \Omega_P}{2 I_1} + \frac{15 E J'}{8 \theta \theta_1 l^3} (\epsilon t l - \Delta_1 l) \dots \dots \dots (44)$$

III. Определение распора H для случая равномерно распределенной нагрузки

§ 9. С помощью (43) легко получить выражения распора для распределенной нагрузки. Так, разлагая равномерно распределенную нагрузку q на пог. м. на элементарные нагрузки $q dx$ и принимая каждую элементарную нагрузку за сосредоточенный груз p (фиг. 5), имеем:



Фиг. 5

$$dH = \frac{3}{4} \cdot \frac{q dx \cdot x (l - x)}{I f_1} + \frac{15 E J'}{8 f f_1 l} (\epsilon t l - \Delta_1 l),$$

откуда, интегрируя, получаем обычную формулу для случая загрузки всей арки:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^l \frac{3}{4} \cdot \frac{q x (l - x) dx}{I f_1} + \frac{15 E J'}{8 f f_1 l} (\epsilon t l - \Delta_1 l) = \\ &= \frac{q l^2}{8 f_1} + \frac{15 E J'}{8 f f_1 l} (\epsilon t l - \Delta_1 l) \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

Еще проще получается тот же результат из формулы (44), если вместо Ω внести в нее выражение моментной площади, которая для случая равномерно распределенной нагрузки представляет параболический сегмент с наибольшей ординатой на оси арки и равной $\frac{q l^2}{8}$.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{ql^3}{12} \cdot \\ H &= \frac{3}{2} \cdot \frac{ql^3}{12f_1} + \frac{15EJ'}{8ff_1} (\varepsilon l - \Delta_1 l) = \\ &= \frac{ql^3}{8f_1} + \frac{15EJ'}{8ff_1} (\varepsilon l - \Delta_1 l) \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

Подобным же образом для случая равномерной нагрузки на половине пролета получаем:

$$H = \frac{ql^3}{16f_1} + \frac{15EJ'}{8ff_1} (\varepsilon l - \Delta_1 l) \dots \dots \dots (47)$$

IV. Линия влияния для распора Н

§ 10. На основании выражения (43) очень просто получаем линию влияния для той части распора, которая зависит от подвижной нагрузки (1-й член в правой части). Достаточно принять $P_1 = 1$, а вместо a и b внести x и $(l-x)$, тогда H означает ординату η линии влияния для распора в точке x :

$$\eta = \frac{3x(l-x)}{4lf_1} \dots \dots \dots (48)$$

Очевидно, линия влияния представляет параболу с наибольшей ординатой посредине пролета арки:

$$\eta_{\max} = \frac{3l}{16f_1} \dots \dots \dots (49)$$

Легко заметить, что, если принять для ординат линий влияния такой масштаб, что

$$\eta_{\max} = \frac{3l}{16f_1} = f \dots \dots \dots (50)$$

при котором ордината линии влияния на середине пролета равна под'ему арки f , то кривая линии влияния совпадает с параболическим очертанием осевой линии арки; таким образом построение отдельной линии влияния оказывается излишним.

СТАТЬЯ ШЕСТАЯ

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ БЕСШАРНИРНАЯ АРКА

I. Определение распора H и опорных моментов без учета нормальных усилий

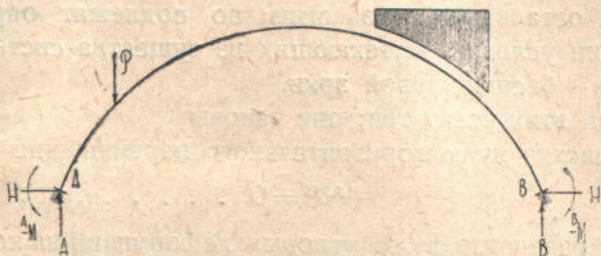
§ 1. Бесшарнирная арка в статическом отношении отличается от двухшарнирной добавочными связями по концам, противодействующими образованию угловых деформаций на опорных сечениях арки. Эти связи осуществляются жесткой заделкой концов арки в незыблемых опорах. В иной формулировке указанное выше характерное для бесшарнирной арки отсутствие угловых деформаций может быть выражено так: „при всякой внешней нагрузке углы поворота опорных сечений бесшарнирной арки равны нулю“, а на языке нашего метода: „в бесшарнирной арке опорные реакции от нагрузки моментными площадями всегда равны нулю“.

Устранение угловых деформаций опорных сечений арки, вместо жесткой заделки, достигается также приложенными к этим сечениям опорными моментами, соответствующими внешней нагрузке арки. Эти опорные моменты дают м. п. нагрузку в виде двух моментных треугольников, слагающихся в трапецию, с параллельными сторонами в виде опорных моментов.

Таким образом система сил на бесшарнирной арке состоит из (фиг. 1):

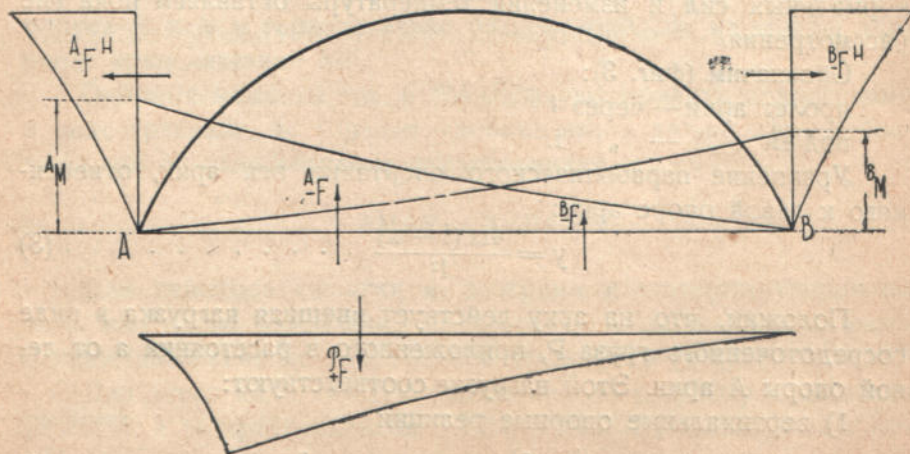
- 1) внешней нагрузки в виде сосредоточенных грузов или распределенной нагрузки или сочетания того и другого;
- 2) распора H , действующего горизонтально на уровне опор;
- 3) вертикальных опорных реакций A и B ;
- 4) опорных моментов — A_M и — B_M .

Эта система сил находится в равновесии; ей соответствует также уравновешенная система м. п. нагрузок и сил, состоящая из соответственно преобразованных моментных площадей, а именно (Фиг. 2):



Фиг. 1

- 1) $+PF \dots$ м. п. нагрузка от внешней нагрузки арки;
 - 2) $-AFH \dots$ " " " на левой половине арки от распора H ;
 - 3) $-BFH \dots$ " " " на правой половине арки от распора H ;
 - 4) $-AF \dots$ " " " от левого опорного момента $-M_A$
 - 5) $-BF \dots$ " " " от правого опорного момента $-M_B$.
- Для всякой арки имеем: $AFH = BFH$.



Фиг. 2

В системе простых сил и нагрузок нам известна только одна внешняя нагрузка — по заданию, остальные подлежат определению; в соответствующей м. п. системе считаем известной (определяется непосредственно из внешней нагрузки) м. п. нагрузку $^P F$, остальные неизвестны, но подлежат определению на основании условий, вытекающих из существа системы, в данном случае — бесшарнирной арки.

Условий этих всего три; они таковы:

1) равенство нулю горизонтального перемещения опор:

$$A_{\delta}^B = 0 \dots \dots \dots (1)$$

2) и 3) равенство нулю угловых деформаций на концах арки:

$$\left. \begin{array}{l} A_{\varphi} = 0 \\ B_{\varphi} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

как следствие закрепления концов арки в незыблемых опорах.

Эти три условия дают возможность определения трех неизвестных м. п. сил: $A_{FH} = B_{FH}$; A_F и B_F , а с их помощью определяются: распор H и опорные моменты A_M и B_M ; вертикальные опорные реакции A и B находятся по закону рычага, как на простой однопролетной балке.

§ 2. Первоначально рассмотрим симметричную арку параболического очертания с переменным моментом инерции J ; влияние нормальных сил и изменения температуры оставляем пока вне рассмотрения.

Обозначим (фиг. 3):

пролет арки — через l

подъем „ — „ f .

Уравнение параболического очертания оси арки, отнесенного к левой опоре арки:

$$y = \frac{4fx(1-x)}{l^2} \dots \dots \dots (3)$$

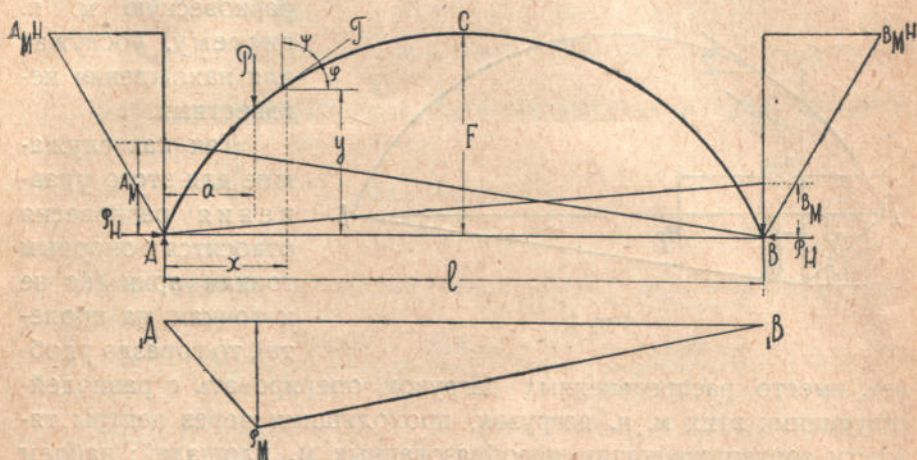
Положим, что на арку действует внешняя нагрузка в виде сосредоточенного груза P , приложенного в расстоянии a от левой опоры A арки. Этой нагрузке соответствуют:

1) вертикальные опорные реакции

$$A = P \frac{(l-a)}{l} = P\beta; \quad B = P \frac{a}{l} = P\alpha \dots \dots \dots (4)$$

- 2) горизонтальный распор P_H ,
- 3) опорные моменты A_M и B_M .

Нагрузке P соответствует м. диаграмма, как на свободно опирающейся балке, в виде треугольника $A_1 B_1 P_1 M$ с вершиной под грузом P .



Фиг. 3

Распор P_H образует м. диаграмму в виде двух отдельных прямоугольных треугольников $A_1 A_1 M_1 H_1$ и $B_1 B_1 M_1 H_1$ с вершинами в опорах A и B и горизонтально расположенными на уровне вершины арки катетами $M_1 H_1$.

Опорные моменты A_M и B_M образуют моментную диаграмму в виде трапеции, но гораздо удобнее иметь дело с двумя образующими ее отдельными м. треугольниками

$$A_1 M_1 A_1 B_1 \text{ и } B_1 M_1 B_1 A_1.$$

Для перехода от этих м. диаграмм к соответствующим им м. п. нагрузкам необходимо подвергнуть м. площади преобразованиям, аналогичным описанным в статье 5-й (§ 3).

Для этого надо каждую вертикальную ординату м. площади $A_1 B_1 P_1 M_1$ и м. треугольников $A_1 M_1 A_1 B_1$ и $B_1 M_1 B_1 A_1$ разделить на соответствующее значение

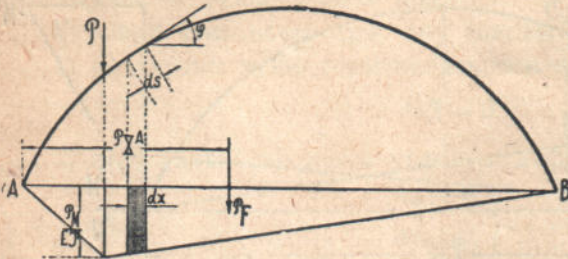
$$EJ_x \cos \varphi$$

и каждую горизонтальную ординату м. треугольников $M^H A$ и $M^H B$ — на значения $EJ_x \cos \psi$.

Значение углов φ и ψ то же, что и в статье 5-й.

Построенные с помощью этих измененных ординат площади и будут являться м. п. нагрузками по Моору, которые, образуя равновесную м. п. систему, послужат для нахождения неизвестных.

Так как служащие для этого уравнения равновесия относятся к опорным точкам арки (но не к точкам на пролете), то гораздо удобнее,



Фиг. 4

нее, вместо распределенных нагрузок, оперировать с равнодействующими этих м. п. нагрузок, проходящими через центры тяжести соответствующих преобразованных м. площадей; найдем выражения для этих равнодействующих и их расстояний от опор арки.

§ 3. а) М. п. нагрузка от сосредоточенного груза P на пролете l, как свободной балке (фиг. 4).

Ординаты м. диаграммы:
под грузом P:

$$P_M = \frac{Pa(1-a)}{l} = P\alpha\beta; \dots \dots \dots (5)$$

на участке a:

$$P_{M_x} = \frac{P M_x}{a} = \frac{P(1-a)x}{l} = P\beta x \dots \dots \dots (6)$$

на участке (1-a)

$$P_{M_x} = \frac{Pa(1-x)}{l} = P\alpha(1-x) \dots \dots \dots (7)$$

Площадь моментного треугольника диаграммы:

$$P_{\Omega} = \frac{P M l}{2} = \frac{Pa(1-a)}{2} = \frac{P\alpha\beta}{2l^2} \dots \dots \dots (8)$$

Ординаты площади м. п. нагрузки:

на участке а

$$\frac{PM_x}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{P(1-a)x}{1EJ_x \cos \varphi} = \frac{P\beta x}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (9)$$

на участке (1-a):

$$\frac{PM_x}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{Pa(1-x)}{1EJ_x \cos \varphi} = \frac{P\alpha(1-x)}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (10)$$

Проекция дифференциала дуги ds очертания арки, на которые разбиваем все очертание:

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos \varphi \\ dy &= ds \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Элементарная площадка шириной dx м. п. нагрузки на участке а:

$$\Delta PF_a = \frac{PM_x dx}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{PM_x ds}{EJ_x} = \frac{P(1-a)x ds}{1EJ_x} \dots \dots \dots (12)$$

на участке (1-a):

$$\Delta PF_{(1-a)} = \frac{Pa(1-x) ds}{1EJ_x} \dots \dots \dots (13)$$

Равнодействующая м. п. нагрузки:

$$\begin{aligned} PF &= \sum_{x=0}^{x=a} \Delta PF_a + \sum_{x=a}^{x=1} \Delta PF_{(1-a)} = \\ &= \int_0^a \frac{P(1-a)x dx}{1EJ_x \cos \varphi} + \int_0^1 \frac{Pa(1-x) dx}{1EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

Если закон изменения момента инерции J_x по пролету арки выражается зависимостью:

$$J_x \cos \varphi = J' = \text{const.}, \dots \dots \dots (15)$$

то выражение (14) принимает вид:

$$PF = \frac{Pa(1-a)}{2EJ'} = \frac{P\alpha\beta^2}{2EJ'} \dots \dots \dots (16)$$

Для определения точки приложения равнодействующей P_F , совпадающей с центром тяжести площади P_F , составляем уравнение статических моментов м. п. нагрузки относительно, напр., опоры А:

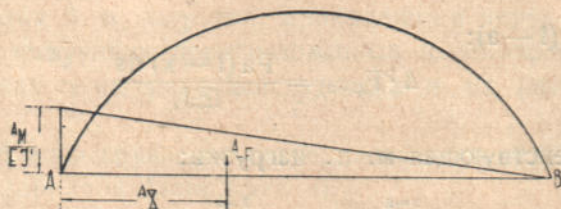
$$\sum_{x=0}^{x=a} \Delta P_{F_a} x + \sum_{x=a}^{x=l} \Delta P_{F_{(l-a)} x} = P_F \cdot P_{X^A} \dots (17)$$

или, переходя к интегралам, на основании (14) по (16):

$$\int_0^a \frac{P(1-a)x^2 dx}{IEJ_x \cos \varphi} + \int_a^l \frac{Pa(1-a)xdx}{IEJ_x \cos \varphi} = P_F \cdot P_{X^A} \dots (18)$$

По выполнении интегрирования определяем:

$$P_{X^A} = \frac{l+a}{3} \dots (19)$$



Фиг. 5

б) М. п. нагрузка от опорного момента $^A M$:

Ордината м. диаграммы (фиг. 5):

$$^A M_x = \frac{^A M(1-x)}{1} \dots (20)$$

Площадь м. треугольника:

$$\Omega = \frac{^A M l}{2} \dots (21)$$

Ордината площади м. п. нагрузки:

$$\frac{^A M_x}{EJ_x \cos \varphi} = \frac{^A M(1-x)}{IEJ_x \cos \varphi} \dots (22)$$

Элементарная площадка шириной dx м. п. нагрузки:

$$\Delta A_F = \frac{A M_x dx}{E J_x \cos \varphi} = \frac{A M_x ds}{E J_x} = \frac{A M (1-x) ds}{I E J_x} \dots \dots (23)$$

Равнодействующая м. п. нагрузки:

$$A_F = \int_0^1 \frac{A M (1-x) dx}{I E J_x \cos \varphi},$$

а на основании (15):

$$A_F = \frac{A M l}{2 E J} \dots \dots \dots (24)$$

Расстояние по вертикали точки приложения этой равнодействующей, напр., от опоры А арки:

$$A_X = \frac{1}{3} l \dots \dots \dots (25)$$

в) М. п. нагрузка от опорного момента B^M .

Совершенно аналогично предыдущему получается:

$$B_F = \frac{B^M l}{2 E J} \dots \dots \dots (26)$$

$$B_X = \frac{1}{3} l \dots \dots \dots (27)$$

При ближайшем рассмотрении выражений: (16), (19), (24) по (27) убеждаемся, что фигуры м. п. нагрузок P^F , A_F и B^F представляют треугольники, сходные с соответствующими м. треугольниками, что, как видно из статьи I, вып. I, свойственно статически неопределенным балкам с постоянными на каждом пролете моментами инерции. Эта замечательная особенность, существенно упрощающая дальнейший расчет арки, является следствием принятого нами закона изменения момента инерции по пролету арки:

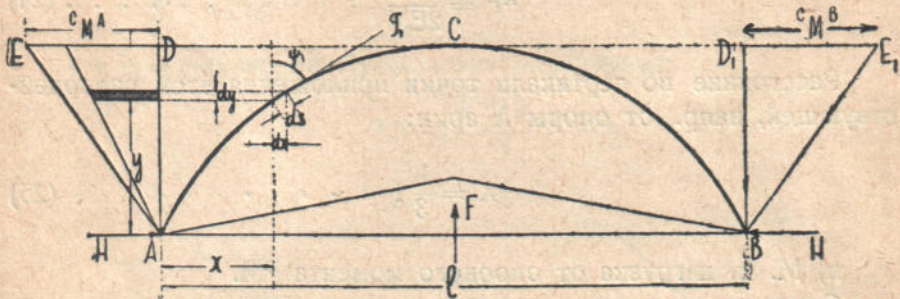
$$J_x \cos \varphi' = J' = \text{const.}$$

Так, чрезвычайно упрощается построение диаграммы м. п. нагрузки: для диаграммы $P\Gamma$ достаточно определить ее ординату под грузом P ; она равна

$$\frac{PM}{EJ} = \frac{Pa(1-a)}{2IEJ} = \frac{P\alpha\beta l}{2EJ},$$

отложить эту ординату под грузом и конец отложения соединить с A и B (фиг. 4).

Для м. п. диаграммы AF определяем ординату на опоре A , она равна $\frac{AM}{EJ}$; откладываем ее на опорной ординате и конец отложения соединяем с B (фиг. 5).



Фиг. 6

При соответствующем выборе масштаба для м. п. нагрузок, м. п. диаграммы совпадают с м. диаграммами.

г) М. п. нагрузка от распора H .

Ординаты (горизонтальные) м. диаграммы (фиг. 6): на уровне вершины арки:

$$cMA = cMB = Hf \dots \dots \dots (28)$$

на высоте y над уровнем опор AB :

$$nMy = \frac{cMy}{f} = Hy \dots \dots \dots (29)$$

Площадь моментного треугольника у левой опоры A арки:

$$nQA = \frac{cMAf}{2} = \frac{Hf^2}{2} \dots \dots \dots (30)$$

То же у правой опоры В:

$$H_{QB} = \frac{cM_{Bf}}{2} = \frac{Hf^2}{2} \dots \dots \dots (31)$$

Ординаты (горизонтальные) левой м. п. нагрузки на высоте у над опорой А арки:

$$\frac{H_{My}}{EJ \cos \psi} = \frac{H_y}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (32)$$

То же над правой опорой В.

Элементарная площадка шириной dy м. п. нагрузки левой половины арки на высоте у над линией опор АВ (на фиг. 6 — заштрихована):

$$\Delta H_{FA} = \frac{H_{My} dy}{EJ_x \cos \psi} = \frac{H_y dy}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (33)$$

На основании (11) имеем:

$$\frac{dy}{\cos \psi} = \frac{dx}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (34)$$

Подставляем в (33) вместо у — его значение из (3) и вместо $\frac{dy}{\cos \psi}$ — его значение из (34), получаем:

$$\Delta H_{FA} = \frac{4Hfx(1-x) dx}{l^2 EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (35)$$

Определяем равнодействующую левой м. п. нагрузки:

$$H_{FA} = \sum_{y=0}^{y=l} \Delta H_{FA} = \int_0^{l/2} \frac{4Hfx(1-x)}{l^2 EJ_x \cos \varphi} dx,$$

и, так как на основании (15)

$$J_x \cos \varphi = J',$$

то:

$$H_{FA} = \frac{Hfl}{3EJ'} \dots \dots \dots (36)$$

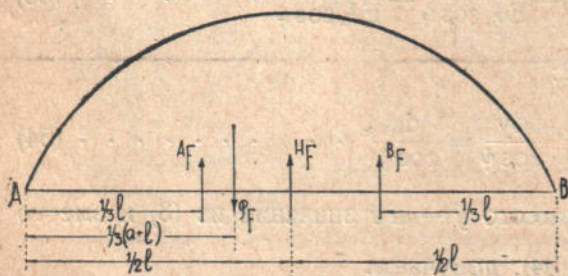
и то же для равнодействующей правой м. п. нагрузки:

$$H_{FB} = \frac{Hl}{3EJ'} \dots \dots \dots (37)$$

Так как обе м. п. нагрузки H_{FA} и H_{FB} действуют в одном и том же направлении по отношению к арке: снаружи — внутрь, то можем их сложить:

$$H_F = H_{FA} + H_{FB} = \frac{2Hl}{3EJ'} \dots \dots \dots (38)$$

Сравнивая изложенное в этом § с содержанием § 4 статьи 5-й, легко заметить, что изменению переменной y на x при составлении выражения (35) соответствует одновременный переход от горизонтального направления м. п. нагрузок H_{FA} и H_{FB} к вертикальному, при чем обе



Фиг. 7

эти м. п. нагрузки, будучи теперь расположены на линии опор АВ, слагаются в один общий м. п. треугольник с вершиной на оси симметрии арки (фиг. 6), и направление общей равнодействующей H_F в виду симметричного

расположения м. п. нагрузок H_{FA} и H_{FB} совпадает с осью симметрии арки.

§ 4. В результате изложенных выше операций все м. п. нагрузки оказываются направленными вертикально (фиг. 7), при чем:

R_F ... направлено вниз и приложено в расстоянии $\frac{a+1}{3}$ от опоры А.

A_F ... направлено вверх и приложено в расстоянии $\frac{1}{3}$ от опоры А.

B_F ... тоже, в расстоянии $\frac{1}{3}$ от опоры В.

H_F ... действует вверх по оси симметрии арки.

Выразим м. п. опорные реакции Q арки в виде функций этих 4-х м. п. нагрузок.

Очевидно:

$$\left. \begin{aligned} A Q &= \left(\frac{2l-a}{3l} \right) \cdot P F - \frac{2}{3} A F - \frac{1}{3} B F - \frac{1}{2} H F = \\ &= \frac{1}{3} (1+\beta) P F - \frac{1}{3} (2 A F + B F) - \frac{1}{2} H F = 0 \\ B Q &= \left(\frac{a+1}{3l} \right) \cdot P F - \frac{1}{3} A F - \frac{2}{3} B F - \frac{1}{2} H F = \\ &= \frac{1}{3} (1+\alpha) P F - \frac{1}{3} (A F + 2 B F) - \frac{1}{2} H F = 0 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

а на основании выражений: (16), (24), (26) и (38):

$$\left. \begin{aligned} \frac{P a (1-a) (2l-a)}{l} - 2 A M_l - B M_l - 2 H l &= \\ = P l \alpha \beta (1+\beta) - 2 A M - B M - 2 H l &= 0 \\ \frac{P a (1-a) (l+a)}{l} - A M_l - 2 B M_l - 2 H l &= \\ = P l \alpha \beta (1+\alpha) - A M - 2 B M - 2 H l &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (39_1)$$

Эти два уравнения содержат три неизвестных, поэтому требуется еще одно уравнение, для составления которого послужит следующий прием.

§ 5. Статические моменты м. п. нагрузок относительно линии опор АВ:

а) Для м. п. нагрузки от сосредоточенного груза P , как на свободной балке.

После преобразования, тождественного изложенному в § 3 статьи 5-й, вып. II, имеем выражение статического момента м. п. нагрузки относительно линии опор АВ (фиг. 8¹):

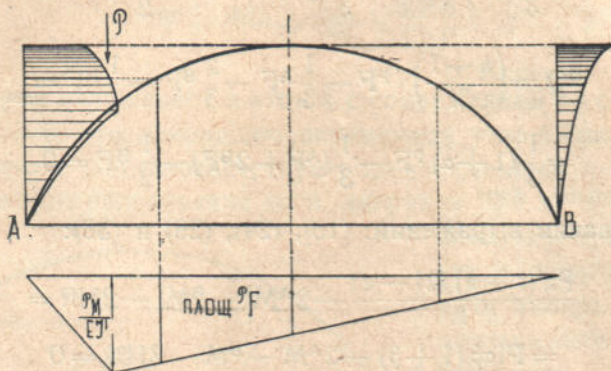
$$P M_s = \frac{P a l (l^3 - 2 a^2 l + a^3)}{3 E J l^2} = \frac{P \alpha \beta l^3 (1 + \alpha \beta)}{3 E J'} \dots (40)$$

¹) На фиг. 8 м. п. площадь $P F$ построена в виде двух отдельных площадок, прилегающих к опорным вертикалям, в отличие от фиг. 2 статьи 5-й, где эта площадь пристроена к осевой линии арки как одно целое. Обе м. п. площадки

б) Для м. п. нагрузки от опорного момента М.

После преобразования, тождественного изложенному в § 3 статьи 5-й¹⁾, составляем выражение статического момента этой м. п. нагрузки относительно линии опор АВ:

$$d^A M_s = \frac{^A M (1-x) dx}{l E J_x \cos \varphi} \cdot y = \frac{^A M (1-x) y dx}{l E J'}$$



Фиг. 8

Заменяем у его значением из (3):

$$d^A M_s = \frac{4^A M f x (1-x)^2}{l^3 E J'} dx \dots \dots \dots (41)$$

Интегрируем в пределах всего пролета арки:

$$^A M_s = \int_0^l \frac{4^A M f x (1-x)^2}{l^3 E J'} ds = \frac{^A M f l}{3 E J'} = \frac{^A M \theta l^2}{3 E J'} \dots \dots \dots (42)$$

в) То же для нагрузки от опорного момента $^B M$ (фиг. 9):
Подобным же образом приходим к выражению:

$$^B M_s = \frac{^B M f l}{3 E J'} = \frac{^B M \theta l^2}{3 E J'} \dots \dots \dots (43)$$

получаются очень просто путем передвижки соответствующих ординат в горизонтальном направлении: на левой половине арки — влево, до опорной вертикали А, на правой — вправо до вертикали В.

¹⁾ См. предыдущую выноску.

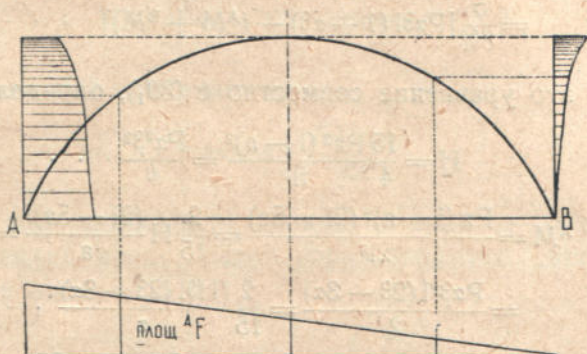
г) То же для м. п. нагрузки от распора H :

Статический момент элемента м. п. нагрузки относительно линии опор AB :

$$d^H M_S = \frac{H M_y dy}{E J_x \cos \psi} = \frac{H y^2 dy}{E J_x \cos \psi} \dots \dots \dots (44)$$

На основании (3) и (34) имеем:

$$d^H M_S = \frac{16 f^2 x^2 (1-x)}{l^4} \cdot \frac{H dx}{E J'} \dots \dots \dots (45)$$



Фиг. 9

Интегрируя в пределах всего пролета арки, получаем:

$$^H M_S = \int_0^l \frac{16 f^2 x^2 (1-x)^2}{l^4} \cdot \frac{H dx}{E J'} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1 f^2 H}{E J'} = \frac{8}{15} \cdot \frac{H b^2 l^3}{E J'} \dots \dots \dots (46)$$

По Моору выражения м. п. статических моментов (40), (42), (43) и (46) представляют горизонтальные прогибы арки на линии опор AB . Так как по заданию опоры арки незыблемы, то алгебраическая сумма этих прогибов равна нулю. В отношении знаков нетрудно заметить, что знаки $^A M_S$, $^B M_S$ и $^H M_S$, как соответствующие силам реактивным, противоположны знаку $^P M_S$, как силе активной; поэтому имеем:

$$^P M_S - ^A M_S - ^B M_S - ^H M_S = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения из (40), (42), (43) и (46), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{Pa f (l^3 - 2a^2 l + a^3)}{3EJ' l^2} - \frac{fl}{3EJ'} (A_M + B_M) - \frac{8}{15} \frac{f^2 H}{EJ'} = \\ & = \frac{\theta l^2}{3EJ'} [P\alpha\beta l (1 + \alpha\beta) - (A_M + B_M) - \frac{8}{5} H\theta l] = 0, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{8f} \cdot \frac{Pa (l^3 - 2a^2 l + a^3)}{l^3} - \frac{5}{8f} (A_M + B_M) = \\ &= \frac{5}{80f} [P\alpha\beta l (1 + \alpha\beta) - (A_M + B_M)] \dots \dots \dots (47) \end{aligned}$$

Решая это уравнение совместно с (39₁), определяем:

$$H = \frac{15 Pa^2 (1-a)^2}{4 fl^3} = \frac{Pa^2 \beta^2}{\theta} \dots \dots \dots (48)$$

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{Pa (1-a)^2 (2l-5a)}{2l^3} = \frac{2}{15} H \frac{(2l-5a)f}{a} = \\ &= \frac{Pa\beta^2 l (2\beta-3\alpha)}{2} = \frac{2}{15} \frac{H\theta l (2\beta-3\alpha)}{\alpha} \dots \dots \dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_M &= \frac{Pa^2 (1-a) (5a-3l)}{2l^3} = \frac{2}{15} H \frac{(5a-3l)f}{(1-a)} = \\ &= \frac{Pa^2 \alpha l (2\beta-3\alpha)}{2} = \frac{2}{15} \frac{H\theta l (2\alpha-3\beta)}{\beta} \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

II. Определение распора Н и опорных моментов — с учетом нормальных усилий

§ 6. Для учета влияния касательных (нормальных) усилий в арке воспользуемся приемом, предложенным в § 6 статьи 5-й. Перенос распора Н в произвольную точку К на осевой линии арки и разложение его на составляющие N и G (фиг. 4 статьи 5-й) дает:

$$N = H \cos \varphi \dots \dots \dots (51)$$

Деформация элемента ds арки под действием силы N:

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EF} = \frac{H ds \cos \varphi}{EF} \dots \dots \dots (52)$$

Так как

$$dx = ds \cos \varphi,$$

то:

$$\Delta ds = \frac{H dx}{EF} \dots \dots \dots (53)$$

Горизонтальная проекция этой деформации:

$$\Delta ds \cos \varphi = \frac{H \cos \varphi dx}{EF} \dots \dots \dots (54)$$

Если поперечное сечение арки меняется по ее длине таким образом, что

$$\frac{F}{\cos \varphi} = F' = \text{const.},$$

то выражение (54) принимает вид:

$$\Delta ds \cos \varphi = \frac{H dx}{EF'} \dots \dots \dots (55)$$

Сумма деформаций всех элементов арки от действия нормальных усилий представляет горизонтальный „прогиб“ арки на линии ее опор:

$${}^N \Delta l = \sum_A^B \Delta ds \cos \varphi = \int_0^l \frac{H dx}{EF'} = \frac{Hl}{EF'} \dots \dots \dots (56)$$

§ 7. При действии нагрузки в виде сосредоточенного груза Р и учете нормальных усилий N — при условии неизбежности опор арки сумма горизонтальных прогибов ее на линии опор равна нулю. На основании положения Моора о равенстве прогибов статическим моментам м. п. нагрузок, пользуясь выражениями (40), (42), (43), (46) и (56), составляем зависимость:

$$\begin{aligned} & \frac{Paf(1^3 - 2a^2l + a^3)}{3EJl^2} - \frac{8lf^2H}{15EJ'} - \frac{AMfl}{3EJ'} - \frac{BMfl}{3EJ'} - \frac{Hl}{EF'} = \\ & = \frac{6l^2}{3EJ'} [Pa\beta l \cdot (1 + \alpha\beta) - (AM + BM) - \frac{8}{5}H\theta l] - \frac{Hl}{EF'} = 0 \quad (57) \end{aligned}$$

Введя обозначение:

$$f_1 = f \left(1 + \frac{15J'}{8f^2F'} \right) = \theta_{1l} \dots \dots \dots (58)$$

после надлежащих алгебраических переделок приходим к окончательному выражению распора:

$$H = \frac{5}{8f_1} \cdot \frac{Pa(l^3 - 2a^2l + a^3)}{l^3} - \frac{5}{8f_1} (AM + BM) = \\ = \frac{5}{8\theta_{1l}} [P\alpha\beta l(1 + \alpha\beta) - (AM + BM)] \dots \dots \dots (59)$$

Если в результате указанных воздействий на арку имеет место горизонтальное перемещение опор на $\Delta_1 l$ (внаружу), то выражение распора H принимает вид:

$$H = \frac{5}{8f_1} \left\{ Pa \frac{(l^3 - 2a^2l + a^3)}{l^3} - \frac{3EJ'\Delta_1 l}{lf} - (AM + BM) \right\} = \\ = \frac{5}{8\theta_{1l}} \left[P\alpha\beta l(1 + \alpha\beta) - (AM + BM) - \frac{3EJ'\Delta_1 l}{lf} \right] \dots \dots (60)$$

Сравнивая это выражение с (47), замечаем, что первые члены у них различаются только в знаменателе буквами θ и θ_1 .

§ 8. Горизонтальному прогибу ${}^N\Delta l$ от действия нормальных усилий N соответствует некоторый распор NH , который определяется на основании (46):

$${}^N\Delta l = \frac{Hl}{EJ} = \frac{8}{15} \frac{{}^NHf^2l}{EJ'}$$

откуда:

$${}^NH = \frac{15 HJ'}{8 f^2 F'} \dots \dots \dots (61)$$

На основании (38) этому распору соответствует м. п. нагрузка:

$$({}^NH)_F = \frac{2fl{}^NH}{3EJ'} = \frac{3}{4} \frac{Hl}{fEF'} \dots \dots \dots (62)$$

Очевидно, м. п. о. реакции, соответствующие м. п. нагрузке $({}^NH)_F$, выражают угловые деформации на опорах арки, если бы она была двухшарнирной, но так как арка в опорах защемлена, то упомянутые угловые деформации равны нулю; к тому же результату приходим, прикладывая к опорным сечениям двухшарнирной арки такие опорные моменты AM и BM , которые уничтожают угловые деформации.

Согласно нашему методу м. п. о. реакции, соответствующие м. п. нагрузке N_{HF} , должны войти в уравнения м. п. проекций (39), а именно:

$$\left. \begin{aligned} A_Q &= \frac{(2l-a)}{3l} \cdot P_F - \frac{2}{3} A_F - \frac{1}{3} B_F - \frac{1}{2} N_{HF} - \frac{1}{2} H_F = \\ &= \frac{(1+\beta)}{3} \cdot P_F - \frac{1}{3} (2A_F + B_F) - \frac{1}{2} (H_F + (N_H)_F) = 0 \\ B_Q &= \frac{(a+l)}{3l} \cdot P_F - \frac{1}{3} A_F - \frac{2}{3} B_F - \frac{1}{2} N_{HF} - \frac{1}{2} H_F = \\ &= \frac{(1+\alpha)}{3} \cdot P_F - \frac{1}{3} (A_F + 2B_F) - \frac{1}{2} (H_F + (N_H)_F) = 0 \end{aligned} \right\} \cdot (63)$$

Решая эти уравнения совместно с (59) или (57), приходим в конечном результате к следующим значениям:

$$H = \frac{15}{4} \cdot \frac{Pa^2(1-a)^2}{f_1 l^3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{Pa^2 \beta^2}{\theta_1} \dots \dots \dots (64)$$

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{Pa(1-a)^2(2l-5a)}{2l^3} = \frac{2}{15} H \frac{(2l-5a)f_1}{a} = \\ &= \frac{Pa\beta^2 l(2\beta-3\alpha)}{2} = \frac{2}{15} H l \frac{(2\beta-3\alpha)\theta_1}{a} \dots \dots \dots (65) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_M &= \frac{Pa^2(1-a)(5a-3l)}{2l^3} = \frac{2}{15} H \frac{(5a-3l)f_1}{(1-a)} = \\ &= \frac{Pa^2\beta l(2\alpha-3\beta)}{2} = \frac{2}{15} H l \frac{(2\alpha-3\beta)\theta_1}{\beta} \dots \dots \dots (66) \end{aligned}$$

Сравнивая (64) с (48), замечаем, что они разнятся только буквами θ и θ_1 в знаменателях, выражения же опорных моментов (вид 1-й), как видно из сравнения (65) и (66) с (49) и (50), совершенно тождественны.

III. Учет влияния равномерного нагревания арки на распор Н

§ 9. Влияние равномерного нагревания всей арки на распор и опорные моменты устанавливается следующим образом. При свободном опирании концов арки имеем в результате повышения температуры арки на t° горизонтальную деформацию по линии опор АВ:

$${}^t\Delta l = \epsilon t l \dots \dots \dots (67)$$

Величина уничтожающего ее распора tH определяется из зависимости (срав. выр. (27) ст. 5):

$${}^{\text{etl}} - \frac{8 {}^tHf^2}{15 EJ'} = 0,$$

откуда:

$${}^tH = \frac{15 {}^{\text{etl}} EJ'}{8 f^2} \dots \dots \dots (68)$$

Этому распору соответствует м. п. нагрузка (срав. (38):

$${}^tHF = \frac{3 {}^tHfl}{EJ'} = \frac{5 {}^{\text{etl}}}{4 l} \dots \dots \dots (69)$$

откуда определяется угловая деформация на концах арки:

$${}^tQ - \frac{{}^tHF}{2} = \frac{5 {}^{\text{etl}}}{8 f} \dots \dots \dots (70)$$

Но так как арка на концах защемлена, то упомянутые угловые деформации на опорах равны нулю; к тому же результату приходим, прикладывая к опорным сечениям двухшарнирной арки такие опорные моменты, которые уничтожают угловые деформации. Согласно нашему методу это дает зависимость:

$$\frac{5 {}^{\text{etl}}}{8 f} - \frac{{}^AMt}{2Ej'} = 0,$$

откуда:

$${}^AMt = \frac{5 {}^{\text{etl}} EJ'}{4 f} \dots \dots \dots (71)$$

IV. Линия влияния для распора H и опорных моментов M

§ 10. Построение линий влияния для бесшарнирной арки не представляет никаких затруднений. Значения ординат линий влияния для распора H и опорных моментов AM и BM определяются из выражений (64), (65) и (66), достаточно лишь в них принять $P = 1$ и постоянное значение абсциссы a точки приложения силы P заменить переменной x . Тогда получаем:

$$n_y = \frac{15}{4f_1} \cdot \frac{x^2(1-x)^2}{l^3} \dots \dots \dots (72)$$

$${}^AM_y = \frac{1}{2l^3} x(1-x)^2(2l-5x) \dots \dots \dots (73)$$

В построении особой линии влияния для опорного момента \mathcal{M} надобности не встречается, так как она представляет зеркальное изображение линии влияния \mathcal{M} .

Отмечаем важную особенность параболической арки с законами изменения: момента инерции: $J_x \cos \varphi = \text{const}$ и поперечного сечения: $f_x \cdot \cos \varphi = \text{const}$: *только* линия влияния распора зависит от механических свойств данной арки, поскольку в выражение ее ординаты входит f_1 , зависящее, в свою очередь, от F' и J' . Линии же влияния опорных моментов зависят *только* от величины пролета l .

Для составления таблиц ординат линий влияния необходимо преобразовать формулы (72) и (73) следующим образом:

$$n_y = \frac{15}{4\theta_1} \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \dots \dots \dots (74)$$

$$A_{My} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{l} \left(2 - 5 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \dots \dots \dots (75)$$

или:

$$n_y = \frac{1}{\theta_1} \cdot n_\zeta \dots \dots \dots (76)$$

$$A_{My} = 1 \cdot A_{M\zeta} \dots \dots \dots (77)$$

Очевидно, значения n_ζ и $A_{M\zeta}$ будут одинаковы для всяких арок этого типа; для них составляем таблицу VI (см. Приложение I). Пользование этой таблицей не нуждается в каких-либо пояснениях.

Таблица VI — см. Приложение J

Эта таблица удобна также и для случаев постоянной нагрузки — без построения линий влияния.

V. Определение распора N и опорных моментов M для различных видов распределенной нагрузки

§ 11. а) Равномерно - распределенная нагрузка q / п. м. на участке b пролета l арки.

Выделяем на загруженном участке элемент dx в расстоянии x от левой опоры A .

Принимая нагрузку qdx за сосредоточенный груз p_x , можем применить к нему выведенные раньше выражения:

1) для распора $H \dots$ (48):

$$dH_x = \frac{15}{4} \frac{x^2(1-x)^2}{f_1^3} qdx \dots \dots \dots (78)$$

Интегрируем в пределах загруженного участка, т. е. от $x = a$ до $x = a + b$:

$$H = \int_a^{a+b} \frac{15}{4} \frac{x^2(1-x)^2}{f_1^3} qdx = \frac{15}{4} \frac{q}{f_1^3} \left\{ \frac{1}{3} [(a+b)^3 - a^3] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [(a+b)^4 - a^4] + \frac{1}{5} [(a+b)^5 - a^5] \right\} \dots \dots (79)$$

2) для опорного момента $^AM \dots$ (49):

$$d^AM = \frac{x(1-x)^2(2l-5x)}{2l^3} qdx \dots \dots \dots (80)$$

Интегрируем в пределах загруженного участка:

$$^AM = \int_a^{a+b} \frac{x(1-x)^2(2l-5x)}{2l^3} qdx = \frac{q}{2l^3} \left\{ l^3 [(a+b)^2 - a^2] - \right. \\ \left. - 3l^2 [(a+b)^3 - a^3] + 3l [(a+b)^4 - a^4] - [(a+b)^5 - a^5] \right\} \dots (81)$$

Аналогично:

$$^BM = \frac{q}{2l^3} \left\{ 2l [(a+b)^4 - a^4] - l^2 [(a+b)^3 - a^3] - [(a+b)^5 - a^5] \right\} \dots (82)$$

При учете влияния нормальных усилий выражение для распора имеет совершенно тот же вид, с той лишь разницей, что в знаменателе вместо f стоит f_1 . Выражения для опорных моментов тождественны с (81) и (82);

б) равномерно распределенная нагрузка $q/$ п. м. занимает левую половину пролета арки.

Выражение для распора получаем из (79), полагая в нем $a = 0$; $a + b = b = \frac{l}{2}$:

$$H = \frac{15}{4} \frac{q}{f_1^3} = \frac{ql^2}{16f_1} = \frac{ql}{16\theta_1} \dots \dots \dots (83)$$

То же для опорных моментов:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= + \frac{1}{64} ql^2 \\ M_B &= - \frac{1}{64} ql^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (84)$$

в) то же при нагрузке q/p . м., распространенной на весь пролет:

$$H = \frac{ql^2}{8f_1} = \frac{ql}{8\theta_1} \dots \dots \dots (85)$$

$$M_A = M_B = 0 \dots \dots \dots (86)$$

Обращаем внимание на это замечательное свойство (86) параболической арки с указанными выше законами изменения поперечного сечения и момента инерции J .

§ 12. Сопоставляя выражение (59) с (40) статьи 5-й, замечаем в них тождество первых членов. Аналогично изложенному в § 8 статьи 5-й, заменяя первый член близким ему по величине выражением $\frac{3}{4} \frac{P\alpha\beta}{\theta_1}$, получаем вместо (59) выражение:

$$H = \frac{3}{4} \frac{P\alpha\beta}{\theta_1} - \frac{5}{8f_1} (M_A + M_B) \dots \dots \dots (87)$$

На основании (65) и (66) имеем:

$$M_A + M_B = \frac{Pa(1-a)(l^2 + 5a^2 - 5al)}{l^3} = P\alpha\beta l(1 - 5\alpha\beta).$$

Подставляем это выражение в (87) и так как

$$\frac{Pa(1-a)}{2} = P\Omega,$$

то:

$$H = \frac{P\Omega}{4l^3f_1} (l^2 + 25a(1-a)) = P\Omega \cdot \frac{(1 + 25\alpha\beta)}{4\theta_1 l^2} \dots \dots (88)$$

Подстановка выражения м. площади $P\Omega$, вместо $\frac{Pa(1-a)}{2}$ преобразует также и выражения опорных моментов (65) и (66) в следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_M &= \frac{P\Omega(1-a)(2l-5a)}{l^3} = P\Omega \frac{\beta(2\beta-3\alpha)}{1} \\ B_M &= \frac{P\Omega a(5a-3l)}{l^3} = P\Omega \frac{\alpha(2\alpha-3\beta)}{1} \end{aligned} \right\} \dots (89)$$

§ 13. Из выражения (87) легко получить значение распора и для распределенной нагрузки, преобразовав его подстановкой $P\Omega$:

$$H = \frac{3}{2} \frac{\Omega}{f_1} - \frac{5}{8f_1} (A_M + B_M) \dots (90)$$

Для загрузки всей арки нагрузкой q / п. м. имеем:

$$\Omega = \frac{ql^3}{12}$$

Подставляя это значение в (90) и имея в виду, что в этом случае $A_M = B_M = 0$, получаем:

$$H = \frac{ql^2}{8f_1} = \frac{ql}{8\theta_1},$$

выражение тождественное с (85).

Подобным же образом для загрузки левой половины арки:

$$\Omega = \frac{ql^3}{24}$$

и на основании выражений (78) и (79) получаем:

$$H = \frac{ql^2}{16f_1} = \frac{ql}{16\theta_1},$$

выражение тождественное с (83).

§ 14. Справедливость применения приема, изложенного в § 12 в отношении к сосредоточенной нагрузке, также и к распределенной, как это приведено в § 13, вытекает из следующих соображений. Рассматривая, напр., равномерно-распределенную

нагрузку q / п. м., состоящей из системы элементарных сосредоточенных грузов qdx , можем составить на основании (88) уравнение:

$$dH = \frac{1}{4l^3 f_1} [l^2 + 25x(1-x)] dQ \cdot \dots \cdot (91)$$

Для сосредоточенной элементарной нагрузки qdx имеем:

$$dQ = \frac{qx(1-x)dx}{2}.$$

Подставляем это выражение в (91):

$$dH = \frac{qx(1-x)}{8l^3 f_1} [l^2 + 25x(1-x)] dx.$$

Интегрирование этого выражения в пределах всей арки дает:

$$H = \int_0^l \frac{qx(1-x)}{8l^3 f_1} [l^2 + 25x(1-x)] dx = \frac{ql^2}{8f_1} = \frac{ql}{8\theta_1} \cdot (92)$$

выражение тождественное с (85).

§ 15. Применим тот же прием к определению распора и опорных моментов от обратно-параболической нагрузки, соответствующей, напр., забутке арочного моста (фиг. 10).

Предварительно необходимо найти выражение площади Ω моментной диаграммы, соответствующей этой нагрузке.



Фиг. 10

Проще всего определить м. площадь Ω как разность двух м. площадей: Ω_p , соответствующей сплошной равномерной нагрузке q , и Ω_n , соответствующей симметричной нагрузке, изменяющейся параболически от q на ключе до 0 на опорах.

Предлагаем новый, более простой, способ определения м. площади Ω_n .

Разобьем параболическую нагрузку системой вертикалей на дифференциальные полоски; площади этих полосок:

$$q_x dx = y_x dx \dots \dots \dots (93)$$

представляют элементарные сосредоточенные нагрузки; каждой такой нагрузке соответствует моментный треугольник, площадь которого:

$$d\Omega_n = \frac{q_x x(1-x)}{2} dx \dots \dots \dots (94)$$

В виду параболической грузовой линии имеем:

$$q_x = \frac{4qx(1-x)}{l^2}.$$

Подставляем это выражение в (94):

$$d\Omega_n = \frac{2q}{l^2} x^2(1-x)^2 dx \dots \dots \dots (95)$$

Очевидно, сумма выражений (95), составленных для всех элементов нагрузки, равна моментной площади от всей параболической нагрузки, а заменяя суммирование интегрированием, имеем:

$$\Omega_n = \int_0^1 \frac{2q}{l^2} x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{15} ql^3 \dots \dots \dots (96)$$

Согласно № 10 Приложения А вып. I, мом. площадь для равномерно распределенной нагрузки q на всей арке:

$$\Omega_p = \frac{ql^3}{12}.$$

Таким образом:

$$\Omega = \Omega_p - \Omega_n = \frac{ql^3}{12} - \frac{ql^3}{15} = \frac{1}{60} ql^3 \dots \dots \dots (97)$$

Согласно § 15:

$$d\Omega_p = \frac{qx(1-x)}{2} dx.$$

Отсюда:

$$d\Omega = d\Omega_p - d\Omega_n = \frac{qx}{2l^2} (1-x)(1-2x)^2 dx \dots (98)$$

Подставляя (98) в (91), определяем:

$$dH = \frac{qx}{8l^5 f_1} (1^5 + 20x1^4 - 142x^21^3 + \\ + 321x^31^2 - 300x^41 + 100x^5) dx \dots (99)$$

а интегрируя в пределах от 0 до 1, получаем:

$$H = \frac{2ql^2}{105f_1} = \frac{2ql}{105\theta_1} \dots (100)$$

Тот же результат получаем, определяя распор как разность распоров для равномерно-распределенной нагрузки и параболической, изменяющейся от q в ключе до 0 на опорах:

$$H = H_p - H_n = \frac{ql^2}{8f_1} - \frac{89ql^2}{840f_1} = \frac{2ql^2}{105f_1} = \frac{2ql}{105\theta_1}$$

Для нахождения опорных моментов, соответствующих параболической нагрузке, воспользуемся уравнением м. п. проекций:

$$H_F - AF - BF - H_F N - HF = 0 \dots (101) \text{ — срав. с (63)}$$

В виду симметричности параболической нагрузки:

$$AF = BF = {}^{op}F.$$

Подставляя в (101) вместо F соответствующие значения на основании выражений (96), (24), (38) и (62), получаем уравнение:

$$\frac{ql^3}{15EJ'} - \frac{{}^{op}Ml}{EJ'} - \frac{2Hl}{3EJ'} - \frac{5}{4} \frac{Hl}{fEF'} = 0 \dots (102)$$

и подставляя вместо H его значение из (100), после соответствующих алгебраических переделок, имея в виду зависимость (58), определяем:

$${}^{op}M = \frac{17ql^2}{315} \dots (103)$$

Величина опорного момента для обратно-параболической нагрузки может быть определена как разность опорных моментов от равномерно-распределенной и параболической нагрузок. Но, так как опорный момент для равномерно-распределенной нагрузки равен нулю, то, очевидно, опорный момент для обратно-параболической нагрузки равен по величине опорному моменту от параболической нагрузки, но с обратным знаком, т. е.

$${}^{\text{оп}}M_{\text{обп}} = -\frac{17}{315}ql^2 \dots \dots \dots (104)$$

§ 16. Не приводя подробного расчета, даем еще выражения распора и опорных моментов для следующих практически важных случаев.

а) Нагрузка сосредоточенным грузом P в ключе.

$$H = \frac{15Pl}{64f_1} \dots \dots \dots (105)$$

$${}^{\text{А}}M = {}^{\text{В}}M = -\frac{Pl}{32} \dots \dots \dots (106)$$

б) Нагрузка двумя равными сосредоточенными грузами P , симметрично расположенными относительно ключа.

$$H = \frac{15P}{32f_1l^3}(l^2 - b^2)^2 \dots \dots \dots (107)$$

$${}^{\text{А}}M = {}^{\text{В}}M = -\frac{P(l^2 - b^2)(l^2 - 5b^2)}{16l^3} \dots \dots \dots (108)$$

Здесь b означает расстояние между грузами P .

в) Симметричная распределенная нагрузка, равномерно возрастающая от нуля на ключе до q на опорах.

И в этом случае распор определяем как разность распоров: для равномерно-распределенной нагрузки q и для треугольной, равномерно-уменьшающейся от q на ключе до нуля на опорах.

$$H_{\text{тр}} = \frac{65}{768} \frac{ql^2}{f_1} = \frac{65}{768} \frac{ql}{\theta_1} \dots \dots \dots (109)$$

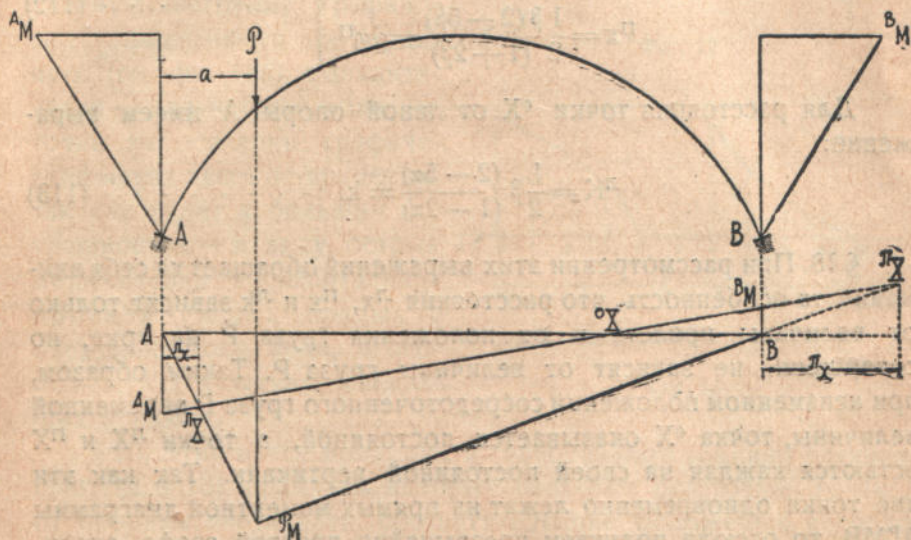
$$H = H_{\text{р}} - H_{\text{тр}} = \frac{ql^2}{8f_1} - \frac{65}{768} \frac{ql^2}{f_1} = \frac{31ql^2}{768f_1} = \frac{31ql}{768\theta_1} \dots \dots (110)$$

Подобно вышеизложенному определяем:

$$^A M = ^B M = \frac{419}{11520} q l^2 \dots \dots \dots (111)$$

VI. Графо - аналитический прием

§ 17. На фиг. 11^а изображена схема нагрузки арки сосредоточенным грузом P в расстоянии $a = a l$ от левой опоры A ; на фиг. 11^б показана соответствующая этой нагрузке моментная



Фиг. 11а — 11б

диаграмма, при чем моментные линии: для внешней нагрузки P , для распора H и от защемляющих моментов $^A M$ и $^B M$ нанесены раздельно.

Если груз P приложен в расстоянии $a < 0,4l$, то, как видно из формул (65) и (66), моменты $^A M$ и $^B M$ имеют разные знаки, поэтому прямая $^A M ^B M$ имеет с линией опор AB внутреннее пересечение в точке $^o X$.

Заметим, кроме этой точки, еще две

- $^n X$ — пересечение $^A M ^B M$ с $^A P M$ и
- $^п X$ — пересечение $^A M ^B M$ с продолжением $^B M B$.

Очень легко найти расстояния горизонтальных проекций этих точек от ближайших опор на основании формул (65), (66) и выражения момента от сосредоточенного груза P в точке его приложения:

$$P_M = P\alpha\beta l.$$

Опуская алгебраические переделки, приводим окончательные значения:

$$\left. \begin{aligned} L_X &= \frac{1}{2} \frac{\alpha(2-5\alpha)}{(1+2\alpha)} = l\eta^L \\ P_X &= \frac{1}{2} \frac{\beta(2-5\beta)}{(1+2\beta)} = l\eta^P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (112)$$

Для расстояния точки 0X от левой опоры A имеем выражение:

$$L_K = \frac{1}{2} \beta \frac{(2-5\alpha)}{(1-2\alpha)} = kl \dots \dots \dots (113)$$

§ 18. При рассмотрении этих выражений обращает на себя внимание та особенность, что расстояния L_X , P_X и L_K зависят только от величины пролета и от положения груза P на арке, но совершенно не зависят от величины груза P . Таким образом, при неизменном положении сосредоточенного груза P переменной величины, точка 0X оказывается постоянной, а точки L_X и P_X остаются каждая на своей постоянной вертикали. Так как эти две точки одновременно лежат на прямых моментной диаграммы A^PMB , то отсюда получаем чрезвычайно простой графо-аналитический способ определения опорных моментов арки, состоящий в следующем.

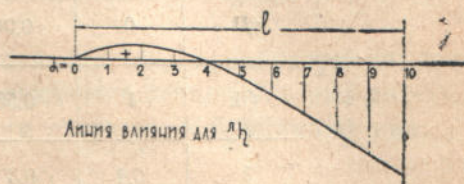
Для данной нагрузки арки сосредоточенным грузом P , приложенным в расстоянии a от левой опоры, строим моментный треугольник (как на свободно опертой балке AB) A^PMB , определяем значения L_X и P_X , откладываем их от опор A и B вправо и через точки отложения проводим вертикальные прямые; эти вертикали пересекают стороны моментного треугольника в точках L_X и P_X , через которые и проходит „закрывающая“ $A^M^B M$, эта последняя отсекает на опорных вертикалях отрезки, выражающие опорные моменты AM и BM . Для построения замыкающей можно также пользоваться точкой 0X и одной из точек: L_X или

ΠX ; последнее особенно удобно в тех случаях, когда одна из точек ЛX и ПX оказывается за пределами чертежа.

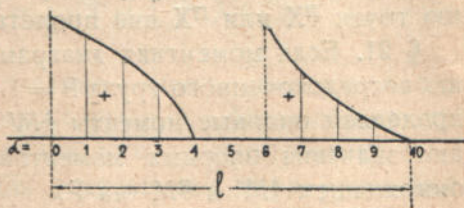
§ 19. Имея опорные моменты, легко определить распор H ; действительно: из выражения (65) находим:

$$H = \frac{15^{\Delta} M_1 \alpha}{2(2 - 5\alpha) \theta_1} \dots (114)$$

С помощью распора строим соответствующую ему моментную диаграмму: графически определяются ее ординаты (см. фиг. 11б), а аналитически — соответствующие им точки на оси арки; графический метод здесь не применим, так как ведет к большим погрешностям — в виду острых пересечений горизонтально-проектирующих прямых с очертанием оси арки, в особенности в участках, ближайших к ключу.



Фиг. 12



Фиг. 13

§ 20. Этим путем приходим к своеобразным „линиям влияния“ (фиг. 12 и 13), ординаты которых означают расстояния точек X от опорных вертикалей, соответствующие положению сосредоточенного груза P в расстояниях 0,11, 0,21 и т. д. от опор арки.

Следующая таблица содержит значения: $\eta^{\text{Л}}$, $\eta^{\text{П}}$, Лк .

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\eta^{\text{Л}}$	0,0625	0,0714	0,0469	0	0,0625
$\eta^{\text{П}}$	-0,4018	-0,3078	-0,2188	-0,1364	-0,0625
Лк	0,844	0,666	0,438	0	—
β	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

α	0,6	0,7	0,8	0,9
$\eta^{\text{Л}}$	0,1364	0,2188	-0,3078	-0,40
$\eta^{\text{П}}$	0	0,0469	0,0714	0,062
Лк	1	0,563	0,333	0,157
β	0,4	0,3	0,2	0,1

Отрицательные значения ординат η соответствуют положению точек ЛХ или ПХ вне пролетарки.

§ 21. Если моментная диаграмма $A^{\text{P}}M^{\text{B}}$ соответствует значению сосредоточенного груза $P = 1$, то описанным в § 18 приемом определяем опорные моменты $A^{\text{M}'}$ и $B^{\text{M}'}$, которые очень просто дают значения опорных моментов для любого значения P — множением $A^{\text{M}'}$ и $B^{\text{M}'}$ на P .

§ 22. Нетрудно заметить, что обнаруженные нами свойства трех точек ЛХ , 0X , ПХ имеют место и в случае распределенной нагрузки, а именно: точка 0X остается постоянной для всех нагрузок, изменяющихся множением каждой грузовой ординаты на одно и то же значение m , а точки ЛХ и ПХ — каждая на своей вертикали, если нагрузки остаются в одном и том же положении на пролете арки.

§ 23. Оставляя до дальнейшего рассмотрение общего случая бесшарнирной арки произвольного очертания с произвольно изменяющимся сечением и моментом инерции, ограничимся здесь лишь указанием на пригодность нашего метода и в этом случае, отпадают лишь те существенные упрощения, которые свойственны параболической арке с указанными выше закономерными изменениями сечения и момента инерции.

VII. Применение метода к криволинейным стержням рамы

§ 24. Изложенное выше применяется и к криволинейным стержням рамы — с тем лишь отличием, что в этом случае опоры, будучи упругими, не препятствуют горизонтальной подвижности

и повороту опорных сечений арки. Поэтому имеет силу выражение (60), в котором $\Delta_1 l$ означает горизонтальную деформацию концов криволинейного стержня, равную горизонтальному перемещению тех концов стоек рамы, которые являются опорами криволинейного стержня. Эта зависимость и служит для составления одного из уравнений.

Подобным же образом уравнения (63) преобразуются добавлением членов A_φ и B_φ , означающих тангенсы угловых деформаций по концам криволинейного стержня, и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1+\beta)}{3} \cdot PF - \frac{1}{3} (2AF + BF) - \frac{1}{2} (HF + {}^{(N)}F) &= A_\varphi \\ \frac{(1+\alpha)}{3} \cdot PF - \frac{1}{3} (AF + 2BF) - \frac{1}{2} (HF + {}^{(N)}F) &= B_\varphi \end{aligned} \right\} \dots (115)$$

Так как при жестком соединении концов криволинейного стержня рамы с прямолинейными стержнями, образующими его упругие опоры, угловые деформации того и другого одинаковы, то эта зависимость послужит для составления двух уравнений для каждого криволинейного стержня.

Имея в виду посвятить детальному исследованию рамы с криволинейными стержнями отдельную статью, заканчиваем на этом настоящую статью о бесшарнирной арке.

СТАТЬЯ СЕДЬМАЯ

МЕТОДЫ ПРОВЕРКИ РАСЧЕТОВ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

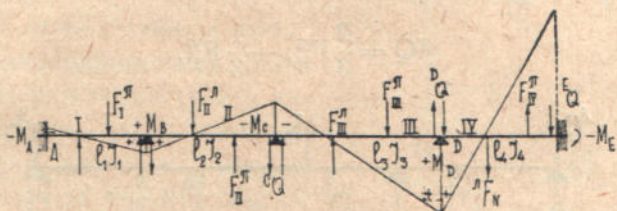
§ 1. Обычно применяемые методы расчетов так называемых статически неопределимых систем отличаются большой сложностью; хорошим примером может служить расчет любой многоярусной рамы. Естественно, что при такой сложности шансы появления в расчете ошибок весьма велики. Поэтому большим недостатком является отсутствие удобных методов проверки расчетов, не прибегая к повторению расчета в целом. Предлагаемый нами НМП — метод расчета статически неопределимых систем — дает возможность построения простого и ясного метода проверки расчета, при чем подвергается контролю правильность определения всех элементов расчета — в последовательном порядке, шаг за шагом. Например, при расчете многоярусной рамы проверяется правильность определения простых фокусов, затем Γ — фокусов предварительных и окончательных, — и наконец определения моментов, соответствующих внешним нагрузкам. Последняя особенность делает этот метод проверки особенно ценным, действительно: только вполне правильное положение простых фокусов обеспечивает верные результаты расчета.

§ 2. Проследим применение метода проверки на отдельных конструкциях.

На фиг. 1 изображена схема четырехпролетной балки с опорами: крайней правой — свободной и крайней левой — жестко закрепленной. Требуется проверить правильность определения простых фокусов. На той же фигуре нанесена м. диаграмма, соответствующая нагрузке балки на крайней правой опоре некоторым моментом E_M . Обозначив соответствующие этой

нагрузке моменты на остальных опорах балки через ${}^A M$, ${}^B M$, ${}^C M$ и ${}^D M$, м. п. о. нагрузки — через F_I^L , F_I^P , F_{II}^L , F_{II}^P и т. д. до F_{IV}^P , м. п. реакции — через ${}^A Q$, ${}^B Q$ и т. д. до ${}^E Q$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_I^L &= \frac{{}^A M G_I}{2} \\ F_I^P &= \frac{{}^B M G_I}{2} \\ &\dots \dots \dots \\ &\text{и т. д. до} \\ F_{IV}^P &= \frac{{}^E M G_{IV}}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$



Фиг. 1

На каждом пролете балки система из м. п. о. нагрузок F и м. п. реакций Q находится в равновесии; это дает нам право написать следующие 4 уравнения:

$$\left. \begin{aligned} F_I^L - F_I^P + {}^B Q &= 0 \\ - {}^B Q - F_{II}^L + F_{II}^P - {}^C Q &= 0 \\ + {}^C Q + F_{III}^L - F_{III}^P + {}^D Q &= 0 \\ - {}^D Q - F_{IV}^L + F_{IV}^P - {}^E Q &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Сложение этих уравнений дает:

$$F_I^L - F_I^P - F_{II}^L + F_{II}^P + F_{III}^L - F_{III}^P - F_{IV}^L + F_{IV}^P - {}^E Q = 0 \dots (3)$$

В это уравнение входят все м. п. о. нагрузки F и м. п. реакция ${}^E Q$, другая реакция ${}^A Q = 0$, так как на опоре A балка жестко закреплена.

Уравнение (3) можно выразить так: „Алгебраическая сумма м. п. о. нагрузок на всех пролетах и м. п. реакций на крайних

опорах неразрезной балки, соответствующих нагрузке некоторым моментом на крайней опоре балки, равна нулю“.

Подобное же уравнение получается и в случае нагрузки балки моментом $^A M'$ на крайней левой опоре, при чем м. п. о. нагрузки F будут иные (соответствующие моменту $^A M'$), и кроме того в уравнении будут входить две м. п. реакции $^A Q'$ и $^E Q'$.

Эти два уравнения и служат для проверки расчета. Самая проверка выполняется следующим образом:

Для некоторого значения $^E M$ графически или аналитически, на основании зависимостей (5) статьи I вып. 1-го вычисляем остальные опорные моменты; затем с помощью (1) определяем м. п. о. нагрузки F , а также м. п. реакцию $^E Q$:

$$^E Q = \frac{2}{3} F_{IV}^{\Pi} - \frac{1}{3} F_{IV}^{\text{Л}}.$$



Фиг. 2

Если полученные значения F и Q обращают в нуль выражение (3), то фокусы (в данном случае левые) вычислены правильно.

Легко заметить, что указанный прием применим не только ко всей балке в целом, но и к любому числу пролетов, образующих один непрерывный отрезок. Приведенная выше формулировка изменяется при этом следующим образом: для любого числа пролетов неразрезной балки, образующих непрерывный отрезок, алгебраическая сумма м. п. нагрузок уравнивается м. п. реакциями на крайних опорах отрезка.

Очевидно, этот метод проверки пригоден и для балки с переменной в пределах пролетов жесткостью.

§ 3. Теперь обратимся к проверке определения положения замыкающей на загруженном пролете. На фиг. 2 изображена трехпролетная неразрезная балка со свободными крайними опорами; положим, что на среднем пролете находится некоторая внешняя нагрузка, которой соответствует м. п. нагрузка F_{II} .

Пусть расчёт дал нам опорные моменты на опорах нагруженного пролета: M^B и M^C . Определяем соответствующие им м. п. о. нагрузки:

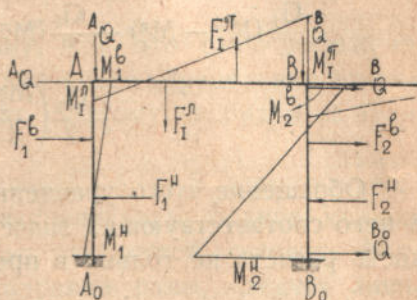
$$F_I^П, F_{II}^Л, F_{II}^П \text{ и } F_{III}^Л \text{ и м. п. реакции } {}^A Q \text{ и } {}^D Q.$$

Аналогично изложенному в § 2 составим уравнение:

$${}^A Q - F_I^П - F_{II}^Л + F_{II}^П - F_{III}^Л + {}^D Q = 0 \dots (4)$$

Формулировка — та же, но в состав м. п. нагрузок входит и м. п. нагрузка, соответствующая внешней нагрузке.

§ 4. В применении к одноярусной многопролетной раме метод проверки остается без изменений. Напр., при проверке простых фокусов для первого слева контура $A_0 A B B_0$ имеем (фиг. 3) на стойке 1-й ... ($A_0 A$):



Фиг. 3

$$+ F_1^H - F_1^П + {}^A Q = 0$$

на ригеле 1-м ... (AB):

$$- {}^A Q - F_1^Л + F_1^П - {}^B Q = 0$$

на стойке 2-й ... ($B_0 B$):

$$+ {}^B Q + F_2^Л - F_2^П + {}^{B_0} Q = 0$$

Складывая эти три уравнения, получаем:

$$F_1^H - F_1^Л - F_1^П + F_1^П + F_2^Л - F_2^П + {}^{B_0} Q = 0 \dots (5)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (5) соответствует некоторой м. диаграмме, получающейся на раме при действии некоторого момента на нижнем конце стойки (2).

Обозначим этот момент через M_2^H , а соответствующие ему моменты по концам стержней нашего контура — через:

$$M_2^B, M_1^Л, M_1^П, M_1^B \text{ и } M_1^H,$$

при чем:

$$M_1^{\Pi} = M_2^{\beta} \mu$$

$$M_1^{\Gamma} = M_1^{\beta}$$

Все эти моменты проще всего получить из м. диаграммы пользуясь найденными фокусами и распределяющими прямыми.

Выразив м. п. нагрузки F и Q через соответствующие моменты и подставив эти выражения в (5), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{2}(M_1^{\Gamma} - M_1^{\beta}) - \frac{G_1}{2}(M_1^{\Gamma} - M_1^{\Pi}) + \frac{G_2}{2}(M_2^{\beta} - M_2^{\Gamma}) + \\ + \frac{G_2}{2}\left(\frac{M_2^{\beta}}{3} - \frac{2M_2^{\Gamma}}{3}\right) = 0 \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Обращение этого уравнения в тождество при подстановке в него соответствующих значений M и G указывает на правильность расчета не только в пределах этого контура, поскольку



Фиг. 4

в значении момента M_1^{Π} заключается распределяющий коэффициент, в свою очередь, зависящий от правого фокуса на ригеле II, а следовательно и от правых фокусов на остальных ригелях. Остаются незатронутыми при проверке только левые фокусы на пролетах правее рассматриваемого. Отсюда следует, что для полной проверки необходимо составить уравнение типа (5)

или (6) для двух крайних пролетов рамы.

§ 5. Аналогично производится проверка и для Γ — фокусов. Напр., для контура A_0ABB_0 (фиг. 4), соответственно некоторой сдвигающей силе H , имеем:

на стойке A_0A :

$$+ F_1^H - F_1^B - A_0Q = 0$$

на ригеле AB :

$$A_0Q - F_1^A + F_1^{\Pi} - B_0Q = 0$$

на стойке B_0B :

$$+{}^BQ + F_2^B - F_2^H = 0.$$

Сложение этих уравнений дает:

$$+F_1^H - F_1^B - F_1^T + F_1^T + F_2^B - F_2^H = 0 \dots \dots (7)$$

Заменяя в этом уравнении м. п. нагрузки F их значениями, выраженными через M и G , имеем:

$$G_1(M_1^H - M_1^B) - G_1(M_1^T - M_1^T) + G_2(M_2^B - M_2^H) = 0 \dots (8)$$

§ 6. Совершенно подобно тому, как это было изложено в § 3, производится проверка правильности определения моментов при действии внешней нагрузки, поэтому не будем на этом останавливаться.

Заметим еще, что все приведенные в § 4—5 формулы относятся к случаю рамы с полным закреплением нижних концов стоек, однако не представит особых трудностей составить формулы и для случая шарнирного опирания рамы, следует лишь на основании указаний § 2 выразить м. п. реакции на опорных концах стоек через м. п. нагрузки.

§ 7. Без всяких затруднений применяется предлагаемый метод к проверке расчета любой многоярусной рамы. Здесь уравнение типа (7) или (8) могут быть составлены для любого замкнутого контура, при чем в нижнем этаже контур замыкается землей.

Легко заметить, что для полной проверки необходимо составить уравнение типа (7) или (8) для двух крайних клеток нижнего этажа рамы, так как тогда в уравнение войдут значения, зависящие от всех простых фокусов рамы.

§ 8. В заключении данной статьи заметим, что в основу данного метода проверки положено 1-е уравнение статики — уравнение проекций — в применении к м. п. нагрузкам; оно может быть сформулировано в следующем выражении:

„Алгебраическая сумма всех м. п. нагрузок на любом замкнутом контуре равна нулю. В состав контура может входить и земля“.

СТАТЬЯ ВОСЬМАЯ

ДАЛЬНЕЙШИЕ УПРОЩЕНИЯ РАСЧЕТА НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

§ 1. Для определения фокусных расстояний в пролетах неразрезной балки с переменной жесткостью в статье 1-й вып. 1-го нами дана формула (52), см. фиг. 22-я там же¹⁾.

$$\begin{aligned}
 a_n &= l_n \frac{\frac{e_n}{l_n} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}\right)}{\left(1 + \frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}\right) - \frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n} \cdot \frac{e_{n-1}}{l_{n-1}}} = \\
 &= l_n \cdot \frac{\frac{e_n}{l_n}}{\left\{ 1 + \frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n} \left[1 - \frac{\frac{e_{n-1}}{l_{n-1}}}{\left(1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}\right)} \right] \right\}} \dots \dots (52)^2
 \end{aligned}$$

В этой формуле значения $\frac{e_n}{l_n}$ и $\frac{e_{n-1}}{l_{n-1}}$ определяются по (65) и (66³⁾). Для сокращения вычислительной работы составлена прилагаемая таблица VII (см. Приложение J), содержащая выражения

¹⁾ На указанной фигуре направления всех м. п. нагрузок показаны ошибочно, они должны быть изменены на обратные.

²⁾ Формула (52) приведена в вып. I неправильно: в знаменателе перед отношениями $\frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n}$ знаки должны быть изменены на обратные.

³⁾ Эти формулы должны иметь такой вид:

$e_n: I_n$, соответствующие различным значениям λ_n и ν_n . Заметим, что обычно длина вуты не превышает одной трети пролета, т. е. $\lambda \leq 0,33$; что же касается $\nu_n = \frac{l^f}{l^s}$, то и для него пределы довольно ограничены: во всяком случае $\nu < 1$ и в редких случаях $\nu < 0,25$.

Таким образом размеры таблицы сравнительно незначительны.

Отношение $\frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n}$ на основании (63) равно:

$$\frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n} \frac{J_n^f}{J_{n-1}^f} \frac{[1 - \lambda_{n-1}(1 - \nu_{n-1})]}{[1 - \lambda_n(1 - \nu_n)]} \dots \dots \dots (1)$$

Подставляя это значение в (52), определяем a_n .

§ 2. Формулы (73) статьи 1-й вып. 1-го для определения опорных моментов могут быть преобразованы следующим образом:

$$M_u = \frac{{}^1F_n a_n (d_n - b_n)}{{}^1F_n e_n^A [l_n - (a_n + b_n)]} = \frac{F_n}{{}^1F_n^A} \cdot \frac{\frac{a_n}{l_n} \left(\frac{d_n}{l_n} - \frac{b_n}{l_n} \right)}{e_n^A \left[1 - \left(\frac{a_n}{l_n} + \frac{b_n}{l_n} \right) \right]} \dots \dots (2)$$

Для м. п. нагрузки F_n по (74) имеем:

$$F_n = \sum_0^{l_n} \frac{M_x s}{E J_x} \dots \dots \dots (3)$$

Как указано в § 24 той же статьи, для балки, симметричной в каждом пролете относительно его середины, с допущением

$$e_n^A = \frac{l_n}{3} \frac{\left[1 - \lambda_n^2 \left(1 - \frac{J_n^f}{J_n^s} \right) \right]}{\left[1 - \lambda_n \left(1 - \frac{J_n^f}{J_n^s} \right) \right]} = \frac{l_n}{3} \frac{[1 - \lambda_n^2 (1 - \nu_n)]}{[1 - \lambda_n (1 - \nu_n)]} \dots \dots \dots (65)$$

$$e_{n-1}^A = \frac{l_{n-1}}{3} \frac{[1 - \lambda_{n-1}^2 (1 - \nu_{n-1})]}{[1 - \lambda_{n-1} (1 - \nu_{n-1})]} \dots \dots \dots (66)$$

В вып. I на странице 40 обе формулы даны в неправильном окончательном виде,

незначительной погрешности в величине F_n возможно принять $J_x = J_n^i = \text{const}$, тогда:

$$F_n = \frac{1}{EJ_n^i} \sum_0^{l_n} M_x s,$$

а так как

$$\sum_0^{l_n} M_x s = P\Omega,$$

то в конечном результате:

$$F_n = \frac{P\Omega}{EJ_n^i} \dots \dots \dots (4)$$

Здесь $P\Omega$ означает м. площадь от внешней нагрузки на пролете № (n), как свободной балке.

Согласно (62) имеем:

$$F_n^a = \frac{1}{2EJ_n^i} [1 - \lambda_n(1 - \nu_n)].$$

Подставляя это выражение, (65) и (4) во (2), получаем:

$$M_u = \frac{P\Omega}{l_n} \cdot \left(\frac{d_n}{l_n} - \frac{b_n}{l_n} \right) \cdot \frac{6 \frac{a_n}{l_n}}{\left[1 - \left(\frac{a_n}{l_n} + \frac{b_n}{l_n} \right) \right]} \cdot \frac{1}{[1 - \lambda_n^2(1 - \nu_n)]} \dots (5)$$

При ближайшем рассмотрении этого выражения замечаем, что дробь

$$\frac{6 \frac{a_n}{l_n}}{\left[1 - \left(\frac{a_n}{l_n} + \frac{b_n}{l_n} \right) \right]}$$

тождественна с такой же дробью, входящей в выражение опорного момента для балки с постоянной в пределах каждого пролета жесткостью (см. выраж. (31)) дробь эта обозначена через γ_n ,

для нее составлена таблица II, которая таким образом вполне применима и для нашего случая. Выражение

$$\frac{1}{[1 - \lambda_n^2(1 - \nu_n)]}$$

для значений λ и ν , не выходящих из практически возможных пределов, весьма близко к единице и может быть принято равным единице.

Остальные производители в выражении (5) ... $\left(\frac{d_n}{l_n} - \frac{b_n}{l_n}\right)$ и PQ , зависящие от внешней нагрузки, подлежат непосредственному определению в каждом частном случае.

Выражение (5) принимает вид:

$$M_U = \frac{PQ}{l_n} \left(\frac{d_n}{l_n} - \frac{b_n}{l_n}\right) \gamma_n \dots \dots \dots (6)$$

Аналогично имеем:

$$M_W = \frac{PQ}{l_n} \left(\frac{c_n}{l_n} - \frac{a_n}{l_n}\right) \pi \gamma_n \dots \dots \dots (7)$$

Подтверждаем еще раз, во избежание ошибок, что все изложенное в данной статье, а следовательно и таблица VII справедливо только для случая балок с симметричными на отдельных пролетах вутами. В более общем случае балки с несимметричными вутами пользуемся графическим методом для определения смещенных третних точек в том виде, как он изложен в § 21 статьи I выпуска I, а также и для определения фокусов — с помощью приема, изображенного на фиг. 27. Опорные моменты определяются по формуле (73).

СТАТЬЯ ДЕВЯТАЯ

БАЛКА НА СПЛОШНОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

I. Случай нагрузки сосредоточенным грузом посредине длины балки

а) „Полномерная“ балка.

§ 1. Расчет балок, покоящихся на сплошном упругом основании, представляет задачу, по своей сложности соперничающую с расчетом арок. Обычные методы оказываются достаточными лишь в сравнительно простых случаях; для разрешения задачи в более общем виде приходится прибегать к математическим выкладкам, представляющим некоторые трудности и для профессионального математика¹⁾. Между тем, базируясь на положениях Моора, возможно построить решение данной проблемы в достаточно общем виде и гораздо проще.

§ 2. Полагаем, как это обычно принимается, что упругое основание, поддерживающее балку, подчиняется закону Гука, т. е. его деформации, в данном случае — просадки, пропорциональны напряжениям, обычно — давлениям. Аналитически это выражается формулой:

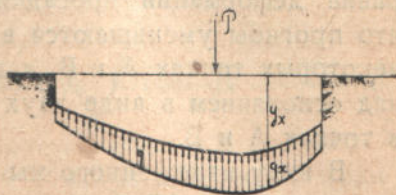
$$q = C\delta \dots \dots \dots (1)$$

где δ — деформация просадки в данной точке, q — напряжение давления в той же точке, C — коэффициент пропорциональности, очевидно, означающий то давление q , которое причиняет просадку $\delta = 1$. Для коэффициента C пользуются довольно корявым наименованием: коэффициент постели, представляющий буквальный перевод немецкого термина „Bettungswert“²⁾.

¹⁾ А. Föppl. Vorlesungen über Technische Mechanik, В. V, стр. 114.

²⁾ Нам кажется, что термин: коэффициент упругой податливости основания был бы удачнее.

В виду выражения (1) зависимости между упругой просадкой основания и давлением на него, очевидно, площадь, ограниченная прямой на поверхности основания до просадки и той же линией после просадки, представляет одновременно и площадь нагрузки балки противодействием со стороны основания, а ординаты этой площади в определенном масштабе выражают величину этих противодействий q (фиг. 1).



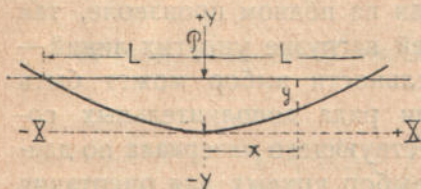
Фиг. 1

Таким образом на одной и той же ординате имеем:

$$q_x = y_x \cdot \dots \dots \dots (2)$$

в определенном масштабе.

Из сказанного следует, что если нам известна диаграмма, выражающая распределение нагрузки балки противодействиями q , то этим самым определяется и вид упругой линии балки, и наоборот: имея очертание и положение оси деформировавшейся балки, имеем и грузовую диаграмму реакций основания балки.



Фиг. 2

Очертание упругой линии балки и диаграмма реакций основания определенным образом связаны с внешней нагрузкой балки; определенному коэффициенту податливости C , данному закону изменения жесткости вдоль балки и данной внешней нагрузке соответствует вполне определенная упругая линия.

§ 3. Рассмотрим простейший случай балки неопределенной длины, нагруженной где либо в средней части сосредоточенным грузом P (фиг. 2).

Первоначально предположим, что балка невесома. Если она просто положена на основание, не будучи с ним связана, то, очевидно, основание может воспринимать от балки только давления, производя на нее, в свою очередь, реакцию противодействия; никаких натяжений между балкой и основанием появиться не может. Этот случай представляет наибольший практический интерес, так как он обычно воспроизводится

Подставляем из (3) в (4) значение y :

$$q dx = Cy_0 \cos \frac{x}{n} dx \dots \dots \dots (5)$$

Интегрируем в пределах от A до B :

$$P = 2 \int_0^L Cy_0 \cos \frac{x}{n} dx = 2Cy_0 \int_0^L \cos \frac{x}{n} dx \dots \dots \dots (6)$$

Для определения L заметим, что точки A и B имеют ординаты $y = 0$. Поэтому для них из (3) получаем:

$${}^A y = {}^B y = y_0 \cos \frac{L}{n} = 0,$$

откуда

$$\cos \frac{L}{n} = 0,$$

а следовательно:

$$\frac{L}{n} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{или} \quad L = \frac{n\pi}{2} \dots \dots \dots (7)$$

На основании этого имеем:

$$P = 2Cy_0 \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \cos \frac{x}{n} dx = 2Cy_0 n \dots \dots \dots (8)$$

Так как

$$q_0 = Cy_0 = q_{\max} = q_{\text{доп}},$$

то:

$$n = \frac{P}{2q_{\max}} = \frac{P}{2q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (9)$$

а подставляя это выражение в (7), получаем:

$$L = \frac{\pi P}{4q_{\max}} = \frac{\pi P}{4q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (7_1)$$

Подставляя в (3) вместо n его значение из (7), получаем другой вид уравнения упругой линии:

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{2L} \dots \dots \dots (3_1)$$

или:

$$C_y = q_0 \cos \frac{\pi x}{2L} \dots \dots \dots (3_2)$$

Подставляя в (3₂) вместо q_0 его значение из (9), получаем третий вид уравнения упругой линии:

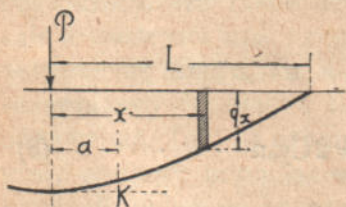
$$C_y = \frac{P}{2\pi} \cos \frac{\pi x}{2L} \dots \dots \dots (3_3)$$

а на основании (7):

$$C_y = q_{\text{доп}} \cos \left(\frac{2q_{\text{доп}} x}{P} \right) \dots \dots \dots (3_4)$$

Не следует забывать, что P здесь означает ту долю сосредоточенного груза, которая приходится на ширину балки, равную единице.

§ 6. Найдем выражение изгибающего балку момента. На фиг. 3 изображена правая половина балки. Требуется определить момент в точке K на расстоянии a от груза. Легко заметить, что рассматриваемая правая половина нашей балки совершенно аналогична консоли OB , закрепленной в O и нагруженной распределенной нагрузкой противодействия основания, действующей на балку снизу вверх. Поэтому момент в точке K образуется от на-



Фиг. 3

грузки на участке KB балки.

Выделим на расстоянии x от O грузовую полоску шириной dx ; она дает элемент нагрузки

$$q_x dx = C_{y_0} \cos \frac{x}{\pi} dx,$$

который образует элементарный момент

$$dM_a = q_x (x - a) dx = C_{y_0} (x - a) \cos \frac{x}{\pi} dx.$$

Интегрируем в пределах от К до В:

$$\begin{aligned}
 M_a &= \int_a^L C y_0 (x - a) \cos \frac{x}{n} dx = C y_0 n^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \right] = \\
 &= q_0 n^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \right] = q_{\text{доп}} n^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \right] = \\
 &= \frac{Pn}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \right] \dots \dots \dots (10)
 \end{aligned}$$

Для левой половины имеем:

$$M_{(-a)} = -M_a = -q_{\text{доп}} n^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} - \frac{a}{n} \right].$$

Подставляя в (10) частные значения:

$$a = 0 \text{ и } a = L,$$

получаем:

$$M_0 = q_0 n^2 \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = q_{\text{доп}} n^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{Pn}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$M_{+L} = 0.$$

Проверка на поперечно срезающую силу дает следующие результаты:

Общее выражение момента на основании (10):

$$M_x = n^2 q_{\text{доп}} \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right];$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = n^2 q_{\text{доп}} \left[\frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} - \frac{1}{n} \right] = n q_{\text{доп}} \left(\sin \frac{x}{n} - 1 \right).$$

На конце балки имеем:

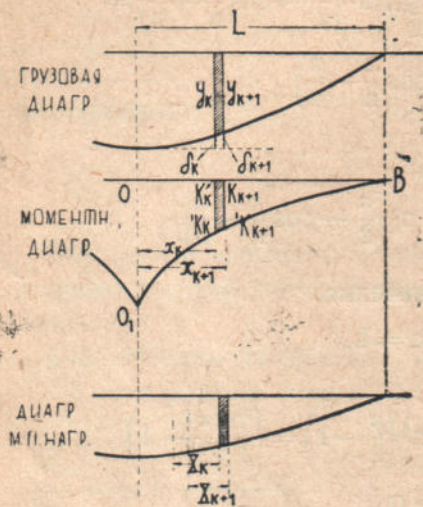
$$Q_L = n q_{\text{доп}} \left(\sin \frac{L}{n} - 1 \right),$$

а на основании (7):

$$Q_L = n q_{\text{доп}} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 0,$$

что и должно быть,

§ 7. Для нахождения закона изменения момента инерции сечения балки воспользуемся вторым положением Моора. На фиг. 4 изображены: упругая линия, ограничивающая также и грузовую площадь, моментная диаграмма, построенная с помощью (10), и диаграмма м. п. нагрузки. Разобьем грузовую и моментную площади системой ординат на m полосок шириной Δx .



Фиг. 4

Обозначим: расстояния ординат $K_k'K_k$ и $K_{k+1}'K_{k+1}$ от сечения $O O_1$ балки через x_k и x_{k+1} , соответствующие ординаты упругой линии через y_k и y_{k+1} , противодействия основания — через q_k и q_{k+1} , изгибающие моменты (они же и ординаты моментной диаграммы) — через M_k и M_{k+1} . Через T_k и T_{k+1} , обозначим моментные площади от ординаты $O O_1$ соответственно до ординат M_k и M_{k+1} , тогда, очевидно, площадь полоски $N_{(k+1)}$ моментной площади (на чертеже — заштрихована):

$$\Delta T_{k+1} = \frac{(M_k + M_{k+1})}{2} \cdot \Delta x \dots \dots \dots (11)$$

Если бы нам были известны значения момента инерции на всем участке x_k , то разделяя каждую полоску на соответствующее ей среднее значение момента инерции J_x (и на E), мы получили бы ординаты диаграммы м. п. нагрузок.

По Моору статические моменты соответствующих площадей м. п. нагрузок равны прогибам балки в точках, с которыми совпадают центры этих моментов. Так, прогиб балки в точке K_k равен статическому моменту „преобразованной“ моментной площади от ординаты под грузом P до ординаты через K_k ; центр момента совпадает с K_k .

Прогиб балки:

$$\delta_{K_k} = y_0 - y_k, \dots \dots \dots (12)$$

Обозначим через F_k площадь м. п. нагрузки на участке x_k , через F_{k+1} — то же, на участке x_{k+1} , через X_k — расстояние м. п. равнодействующей F_k от ординаты K_k $'K_k$, и через X_{k+1} — расстояние м. п. равнодействующей F_{k+1} от ординаты K_{k+1} $'K_{k+1}$.

Легко уяснить себе зависимости:

$$M_S^{(K_k)} = F_k X_k = y_0 - y_k;$$

$$M_S^{(K_{k+1})} = F_{k+1} X_{k+1} = y_0 - y_{k+1} = F_k (X_k + \Delta x) +$$

$$+ \Delta F_{k+1} \cdot \frac{\Delta x}{2} = F_k X_k + F_k \Delta x + \Delta F_{k+1} \frac{\Delta x}{2} =$$

$$= y_0 - y_k + F_k \Delta x + \Delta F_{k+1} \frac{\Delta x}{2} = y_0 - y_{k+1} \dots \dots (13)$$

Подобным же образом:

$$y_0 - y_k = y_0 - y_{k-1} + F_{k-1} \Delta x + \Delta F_k \frac{\Delta x}{2} \dots \dots (14)$$

Вычитая (14) из (13), получаем:

$$- [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] = \Delta x (F_k - F_{k-1}) +$$

$$+ \frac{\Delta x}{2} (\Delta F_{k+1} - \Delta F_k) \dots \dots (15)$$

Последний член в правой части уравнения представляет величину второго порядка малости по сравнению с первым членом, поэтому им можно пренебречь, и тогда имеем:

$$- [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] = \Delta x (F_k - F_{k-1}) = \Delta x \cdot \Delta F_{(k-1)-(k)} \dots (16)$$

Подставляя в левую часть вместо y соответствующие значения из уравнения (3), имеем:

$$- [(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] = -y_0 \left[\left(\cos \frac{x_{k+1}}{n} - \cos \frac{x_k}{n} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\cos \frac{x_k}{n} - \cos \frac{x_{k-1}}{n} \right) \right] = 2y_0 \left[\sin \left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2n} \right) \cdot \sin \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2n} \right) - \right.$$

$$\left. - \sin \left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2n} \right) \cdot \sin \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2n} \right) \right].$$

С ничтожной погрешностью полагаем:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{2\pi} = \frac{x_k - x_{k-1}}{2\pi} = \frac{\Delta x}{2\pi}$$

поэтому:

$$\begin{aligned} & 2y_0 \sin\left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right) \left[\sin\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2\pi}\right) - \sin\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2\pi}\right) \right] = \\ & = 4y_0 \sin\frac{\Delta x}{2\pi} \cos\frac{(x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1})}{4\pi} \cdot \sin\frac{(x_{k+1} + x_k - x_k - x_{k-1})}{4\pi} \end{aligned}$$

Здесь имеем:

$$\frac{x_{k+1} + x_k - x_k - x_{k-1}}{4\pi} = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{4\pi} + \frac{(x_k - x_{k-1})}{4\pi} = \frac{2\Delta x}{4\pi} = \frac{\Delta x}{2\pi}$$

поэтому уравнение (16) принимает вид:

$$4y_0 \sin\frac{2\Delta x}{2\pi} \cos\frac{(x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1})}{4\pi} = \Delta x \cdot \Delta F_{(k-1)-(k)} \quad \dots (17)$$

Согласно (11):

$$\Delta x \cdot \Delta F_{(k-1)-(k)} = \frac{(M_{k-1} + M_k)(\Delta x)^2}{2EJ_k} = \frac{e^p M_k (\Delta x)^2}{EJ_k} = \infty \frac{M_k (\Delta x)^2}{EJ_k},$$

а совместно с (17):

$$4y_0 \sin^2 \frac{\Delta x}{2\pi} \cos\left(\frac{x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1}}{4\pi}\right) = M_k \frac{(\Delta x)^2}{EJ_k} = \frac{4\pi^2 M_k (\Delta x)^2}{EJ_k (2\pi)^2} \quad \dots (18)$$

Так как:

$$\left(\sin^2 \frac{\Delta x}{2\pi}\right) : \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)^2 = \left[\left(\sin \frac{\Delta x}{2\pi}\right) : \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)\right] \cdot \left[\left(\sin \frac{\Delta x}{2\pi}\right) : \left(\frac{\Delta x}{2\pi}\right)\right] = 1 \cdot 1 = 1,$$

то из уравнения (18) определяем:

$$J_k = \frac{\pi^2 M_k}{E y_0 \cos\left(\frac{x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1}}{4\pi}\right)}$$

Сближая точки $(K-1)$, (K) и $(K+1)$, в пределе получаем одну точку K , для которой имеем:

$$\left[\cos\left(\frac{x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1}}{4\pi}\right)\right]_{\lim K} = \cos \frac{x_k}{\pi},$$

что дает:

$$J_k = \frac{n^2 M_k}{E y_0 \cos \frac{x_k}{n}} = \frac{C P^2 M_k}{4 E q_{\text{доп}}^3 \cos \left(\frac{2 q_{\text{доп}} x}{P} \right)} \dots \dots (19)$$

Для точки О имеем:

$$J_0 = \frac{n^2 M_0}{E y_0} = \frac{P^2 M_0}{4 E y_0 q_{\text{доп}}^2} = \frac{C P^2 M_0}{4 E q_{\text{доп}}^3},$$

а на основании этого выражение:

$$J_k = \frac{J_0 M_k}{M_0 \cos \left(\frac{2 q_{\text{доп}} x}{P} \right)} \dots \dots \dots (19_1)$$

Исключив $\cos \left(\frac{2 q_{\text{доп}} x}{P} \right)$ из выражений (4) и (19₁), получаем следующий вид уравнения упругой линии нашей балки:

$$y = \frac{q_{\text{доп}}}{C} \cdot \frac{J_0}{J_k} \cdot \frac{M_0}{M_k} \dots \dots \dots (3_5)$$

Заметим, что изложенный в этом § прием определения значений переменного момента инерции применим во всех возможных случаях.

Имея значения моментов инерции, легко определить напряжения в балке.

Сделаем еще поверку по общей формуле изгиба:

$$\frac{M}{EJ} = \pm \frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Подставляем сюда значения: вместо J на основании (19):

$$J_x = \frac{n^2 M_x}{E y_0 \cos \frac{x}{n}},$$

вместо $\frac{d^2 y}{dx^2}$ на основании (3):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{y_0}{n^2} \cos \frac{x}{n},$$

получаем:

$$-M_x : E \left(\frac{n^2 M_x}{E y_0 \cos \frac{x}{n}} \right) = -\frac{y_0}{n^2} \cos \frac{x}{n},$$

что приводит к тождеству:

$$-\frac{y_0}{n^2} \cos \frac{x}{n} = -\frac{y_0}{n^2} \cos \frac{x}{n}.$$

Таким образом и эта проверка удовлетворяется.

§ 8. Во всех формулах моментов входят параметры n и y_0 , они определяются предварительно на основании следующих соображений.

В формуле (9) напряжение $q_0 = q_{\max}$, очевидно, равно допускаемому на данный грунт основания удельному давлению.

Это дает возможность определить n :

$$n = \frac{P}{2 q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (20)$$

а на основании (7) имеем:

$$2L = \frac{\pi P}{2 q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (21)$$

Легко заметить, что выражение (21) в сочетании с (3) или (3₁) соответствует определению такой длины балки, при которой под центральной нагрузкой P имеется давление на грунт, равное $q_{\text{доп}}$ (при условии соблюдения требований § 7 в отношении закона изменения жесткости по длине балки).

Что же касается y_0 , такое определяется как деформация просадки, соответствующая удельному давлению q_0 ; если q_0 принято равным $q_{\text{доп}}$, то

$$y_0 = \frac{q_{\text{доп}}}{C}.$$

§ 9. В каких измерениях выражается n ? Из выражения (20) легко увидеть, что n выражается в тех линейных единицах, которые соответствуют квадратным единицам для удельного давления q . Действительно, если P , как указано в конце § 5, соответствует балке шириной единица, то q представляет нагрузку

противодавления основания на погонную единицу балки. Таким образом имеем, напр.:

$$\frac{P \text{ [к\text{л}г\text{р}]} }{2q \text{ [к\text{л}г\text{р}]} } = \frac{P}{2q} \text{ [см]} = p \text{ [см]}.$$

Это подтверждается и при рассмотрении значения $\cos \frac{x}{p}$, в котором аргумент $\frac{x}{p}$ есть величина отвлеченная, тогда как x выражается в линейных единицах.

Подставляя p в (7), определяем длину L . Смысл ее таков: в балке неопределенной длины, лежащей на непрерывном упругом основании и нагруженной сосредоточенным грузом P , если жесткость ее изменяется по изложенному закону, напряжения давления на основание распространяются в каждую сторону от груза P на длину L , уменьшаясь по косинусоиде до нуля.

б) „Укороченная“ балка.

§ 10. Если балка короче длины $2L$, то по концам ее давления на основание уже не будут равны нулю; чем короче балка в отношении $2L$, тем больше отличаются от нуля давления по концам и тем ближе они к наибольшему давлению под грузом. Такие „укороченные“ балки, очевидно, более выгодны, так как под ними в большей степени используется сопротивляемость основания. Рассмотрим этот практически более важный случай.



Фиг. 5

На фиг. 5 изображена балка¹⁾ длиной $2L_1$, короче „полномерной“ $2L$, что выражается так:

$$2L_1 < 2L = \frac{\pi P}{2q_{доп}} \dots \dots \dots (22)$$

Задаемся некоторым отношением давлений по концам и под грузом:

$$\xi = q_k : q_0 < 1.$$

¹⁾ На фиг. 5 пропущены буквы А и В по концам балки и написано L вместо L_1 .

Этим давлениям соответствуют деформации просадки основания:

$$y_k = \frac{q_k}{C}; \quad y_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{q_{\text{доп}}}{C},$$

поэтому:

$$\frac{y_k}{y_0} = \xi.$$

Очевидно, АВ составляет только некоторую часть полуволны косинусоиды.

И в данном случае справедливы выражения: (3), (4), (5) и (6).

Для определения L_1 имеем зависимость:

$$y_{L_1} = y_k = y_0 \cos \frac{L_1}{n},$$

откуда

$$\cos \frac{L_1}{n} = \frac{y_k}{y_0} = \xi,$$

и наконец:

$$L_1 = n \arccos \xi \quad \dots \dots \dots (23)$$

Подставляем это выражение в (6) в качестве верхнего предела интегрирования:

$$P = 2 C y_0 \int_0^{n \arccos \xi} \cos \frac{x}{n} dx = 2 C y_0 n \operatorname{Sn} \arccos \xi = 2 n q_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Отсюда:

$$q_0 = q_{\text{max}} = \frac{P}{2 n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \dots \dots \dots (24)$$

§ 11. Для определения выражения изгибающего момента пользуемся приемом, изложенным в § 6. Приводим окончательный результат:

$$M_a = C y_0 n^2 \left\{ \xi + \sqrt{1 - \xi^2} \left(\arccos \xi - \frac{a}{n} \right) - \cos \frac{a}{n} \right\} \quad \dots (25)$$

Для проверки этой формулы полагаем в ней $\xi = 0$, и тогда получаем выражение (10) для полномерной балки.

Для нахождения значений переменного момента инерции J_x пользуемся тем же приемом, который изложен в § 7. В виду некоторой сложности выражения момента M_a удобнее вести расчет числовым порядком.

§ 12. Из выражения (24) находим параметр n :

$$n = \frac{P}{2q_{\text{доп}} \sqrt{1 - \xi^2}} \dots \dots \dots (26)$$

Подставляя в (23) вместо n его выражение из (26), имеем

$$L_1 = \frac{P \operatorname{arc} \cos \xi}{2q_{\text{доп}} \sqrt{1 - \xi^2}} \dots \dots \dots (27)$$

При ближайшем рассмотрении этого выражения замечаем, что длина балки $2L_1$ зависит от отношения $\xi = \frac{q_k}{q_{\text{доп}}}$, но зависимость эта не вполне ясная и даже неопределенная — в случае $\xi = 1$. Раскрытие этой неопределенности дает выражение:

$$L_1 = \frac{P}{2q\xi},$$

которое для $\xi = 1$ получает значение

$$L_1 = \frac{P}{2q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (28)$$

Так как эта длина соответствует отношению $\xi = 1$, другими словами, для

$$q_k = q_0 = q_{\text{доп}}$$

получаем на первый взгляд парадоксальный результат: давление на основание по всей длине балки одинаково. Однако этот парадокс — только кажущийся. Действительно, из (26) ясно, что значению $\xi = 1$ соответствует:

$$n = \infty,$$

которое, как видно из (19), обращает *все* значения J_x в бесконечность, другими словами, вместо балки имеем очень жесткий массив, не поддающийся изгибу. А мы знаем, что при центральной

нагрузке основания давление под массивом равномерное. Из уравнения (28), находим:

$$\frac{P}{2L_1} = q_{доп.}$$

Это есть формула равномерного давления на основание под массивом при центральной передаче нагрузки.

Для облегчения расчетов, в особенности при предварительном подборе, приводим таблицу IX (см. Приложение L) значений

$\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$ для нахождения π и значений $\frac{\arccos \xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}$ для нахождения L .

Таблица составлена для значений ξ от $\xi=1$ до $\xi=0$, с интервалами через 0,05.

II. Случай: равномерно - распределенной и симметрично - распределенной нагрузок на балках полномерной и укороченной

§ 13. Рассмотрим случай равномерно - распределенной нагрузки на средней части балки, расположенной симметрично относительно середины балки (Фиг. 6) — сперва на полномерной балке.



Фиг. 6

Полагая, что упругая линия балки представляет косинусоиду, при обозначениях фиг. 6-й, пользуясь приемами § 5, получаем:

$$q_0 = q_{max} = \frac{tl}{\pi} \dots \dots \dots (29)$$

а с помощью приемов § 6 определяем выражения изгибающего момента:

а) в пределах ОК:

$$M_a = q_0 \pi^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{\pi} - \frac{a}{\pi} \right] - \frac{t(l^2 - a^2)}{2} \dots \dots \dots (30)$$

б) в пределах KB:

$$M_{a1} = q_0 \pi^2 \left[\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{\pi} - \frac{a}{\pi} \right] \dots \dots \dots (31)$$

Параметры n и y_0 определяются из выражений (29) и (1):

$$n = \frac{tl}{Q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (32)$$

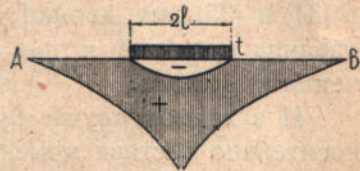
$$y_0 = \frac{Q_{\text{доп}}}{C}$$

Половинную длину балки L определяем из (7) и (32):

$$L = \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi tl}{2Q_{\text{доп}}} \dots \dots \dots (33)$$

Определяя из (33) t , находим ту равномерно распределенную нагрузку, которая при данных значениях L и l дает наибольшее удельное давление на основание, равное допускаемому.

§ 14. С помощью приема, аналогичного изложенному в § 7, определяем значения переменного момента инерции J_x . Как показано на фиг. 7, моментная площадь составляется из двух: положительной, соответствующей нагрузке $2tl$, но действующей в виде приложенного в O сосредоточенного груза, и отрицательной, соответствующей нагрузке $2tl$, действующей в виде равномерно распределенной нагрузки на участке $2l$, как на свободно лежащей балке пролета $2l$. Результирующая м. площадь — заштрихована.



Фиг. 7

§ 15. Легко заметить, что те же приемы пригодны и для случаев любой симметричной распределенной нагрузки. Комбинируя моментные диаграммы: положительную, построенную в предположении сосредоточения всей распределенной нагрузки посередине балки, и отрицательную, соответствующую действию распределенной нагрузки на свободно опертой балке с пролетом, равным длине загруженного участка балки, можем решить самый сложный случай.

§ 16. В случае укороченной балки, загруженной симметричной нагрузкой, сохраняют свой смысл изложенные выше соображения.

Приводим формулы для укороченной балки длиной $2L$, загруженной на средней части пролета $2l$ равномерно-распределенной нагрузкой t .

Обозначив $\frac{Q_k}{Q_0}$ через ξ , имеем:

$$n = \frac{lt}{Q_{доп}\sqrt{1-\xi^2}} \dots \dots \dots (34)$$

если

$$Q_0 = Q_{max} = Q_{доп},$$

то:

$$L = n \arccos \xi = \frac{lt \arccos \xi}{Q_{доп}\sqrt{1-\xi^2}} \dots \dots \dots (35)$$

Сравнивая (34) с (26) и (35) с (27), замечаем, что в постоянных частях они отличаются только в знаменателе, а именно: в (34) и (35) нет двойки; поэтому составленная для (26) и (27) таблица пригодна и для (34) и (35), надо лишь табличные значения удваивать.

И в данном случае будет справедливо сказанное в § 16 относительно состава моментной диаграммы из двух. Поэтому выражение момента на загруженной части пролета имеет вид:

$$M_a = q_0 n^2 \left\{ \xi + \sqrt{1-\xi^2} \left(\arccos \xi - \frac{a}{n} \right) - \cos \frac{a}{n} \right\} - \frac{t(l^2 - a^2)}{2} \dots (36)$$

а на незагруженном имеем то же выражение, но отпадает член:

$$\frac{t(l^2 - a^2)}{2}$$

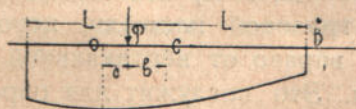
III. Случай несимметрично-расположенного сосредоточенного груза на балках равномерной и укороченной

§ 17. Несколько сложнее случай несимметричного расположения нагрузки на балке. На фиг. 8 сосредоточенный груз P расположен влево от середины C балки на расстоянии b .

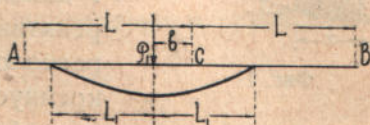
Здесь в зависимости от величины груза P возможны такие случаи:

а) $\dots \dots \dots L_1 \leq L - b \dots \dots \dots (37)$

Вся полуволна косинусоиды помещается в пределах балки (фиг. 9), наибольшая просадка, а следовательно и наибольшее давление будет под грузом P ; справа за пределами нулевой точки косинусоиды остается участок длиной $L + b - L_1$, на котором балка отделяется от основания и никакого давления на него не производит. Этот случай ничем не отличается от случая балки длиной $2L_1$, нагруженной центрально грузом P .



Фиг. 8



Фиг. 9

На основании (7) и (20) составляем выражение для длины $2L_1$ „заменяющей балки“:

$$2L_1 = \pi c = \frac{\pi P}{2q_{\text{доп}}}$$

если давление под грузом P должно быть равно $q_{\text{доп}}$.

Условие (37) может быть выражено еще и так:

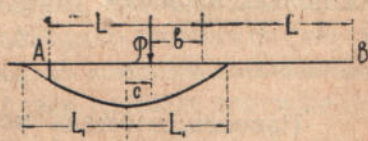
$$P \leq \frac{4(L-b)}{\pi} q_{\text{доп}} \dots \dots \dots (37_1)$$

б) Если

$$P > \frac{4(L-b)}{\pi} q_{\text{доп}}$$

то косинусоида пересекает балку: по левую сторону от груза — за пределами конца A балки, на правой — в пределах балки.

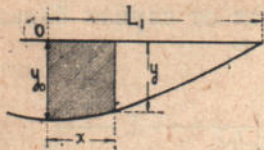
Балка в этом случае оказывается: на правой стороне — излишне длинной, на левой — укороченной (фиг. 10). Место с наибольшей просадкой основания, а следовательно и с наибольшим давлением будет влево от груза P . Это вытекает из следующих соображений.



Фиг. 10

Так как условие (37) в данном случае выполняется, то длина половины косинусоиды будет больше расстояния груза P от левого конца A балки, поэтому левая половина диаграммы давлений

оказывается усеченной, и центр тяжести оставшейся грузовой площади давлений перемещается вправо от вертикальной оси полной грузовой площади, т. е. оказывается в пределах правой ее половины. Между тем для соблюдения равновесия сил активных P и реактивных Σq равнодействующая последних должна совпасть с направлением силы P , другими словами, P должно проходить через центр тяжести реактивной грузовой площади, который расположен вправо от вертикальной оси косинусоиды. Это послужит для определения положения точки наибольших просадки и давления.



Фиг. 11

§ 18. Для этого предварительно находим выражение площади косинусоиды (фиг. 11). Площадь элемента, выделенного двумя ординатами в расстоянии x от оси косинусоиды

$$d\Omega = ydx = y_0 \cos \frac{x}{n} dx;$$

$$\Omega_0^x = \int_0^x y_0 \cos \frac{x}{n} dx = y_0 n \sin \frac{x}{n} \cdot \dots \dots \dots (38)$$

Площадь половины косинусоиды:

$$1/2 \Omega = y_0 n \sin \frac{L_1}{n},$$

а на основании (7):

$$1/2 \Omega = \pi y_0 = \frac{2y_0 L_1}{\pi}$$

а полная площадь:

$$\Omega = \frac{4y_0 L_1}{\pi}.$$

Наконец, площадь между двумя ординатами, расположенными по одну сторону от оси косинусоиды, если их абсциссы x_2 и x_1 , при чем $x_2 > x_1$, выражается формулой:

$$\Omega_{x_1}^{x_2} = \pi y_0 \left(\sin \frac{x_2}{n} - \sin \frac{x_1}{n} \right) = 2\pi y_0 \cos \frac{x_2 + x_1}{2n} \cos \frac{x_2 - x_1}{2n}.$$

§ 19. Возвращаясь к фиг. 8, замечаем, что, если направление груза Р проходит через центр тяжести действующей на балку реактивной грузовой площади, то оно делит эту площадь на две равновеликие части, т. е. часть площади слева от Р равновелика части площади справа.

Обозначим через ${}^1\Omega$ часть площади от ординаты на конце А балки до оси косинусоиды, через ${}^2\Omega$ часть площади от этой оси до ординаты, совпадающей с направлением груза Р. Тогда имеем:

$${}^1\Omega + {}^2\Omega = \frac{1}{2}\Omega - {}^2\Omega,$$

откуда:

$${}^1\Omega + 2{}^2\Omega = \frac{1}{2}\Omega \dots \dots \dots (39)$$

На основании формул § 18-го:

$${}^1\Omega = y_0 n \sin \frac{L-b-c}{n}; \quad {}^2\Omega = y_0 n \sin \frac{c}{n}; \quad \frac{1}{2}\Omega = \pi y_0.$$

Подставляя эти значения в (39), на основании (7) имеем:

$$\sin \frac{L-b-c}{n} + 2 \sin \frac{c}{n} = 1.$$

Другое уравнение получаем из уравнения проекций на вертикальную ось:

$${}^1\Omega + \frac{1}{2}\Omega = \frac{P}{C} \dots \dots \dots (40)$$

Подставляя соответствующие значения, получаем:

$$q_0 n \left(\sin \frac{L-b-c}{n} + 1 \right) = P.$$

Так как в этих уравнениях неизвестные с и n входят также и в состав аргументов синусов, то необходимо разложить синусы в ряды по степеням аргументов; взяв из каждого разложения по два первых члена, получаем два более удобных для решения уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L-b+c}{n} - \frac{(L-b-c)^3 + 6c^3}{6n^3} &= 1 \\ q_0 \left[L-b-c + n - \frac{(L-b-c)^3}{6n^2} \right] &= P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

Для решения этих уравнений определяем из второго n и вставляем в первое, получаем уравнение, иррациональное относительно неизвестного c . Для решения его проще воспользоваться комбинированным методом, применяя метод Ньютона и *Regula falsi* (см. Foerster. Taschenbuch für Bauingenieure. B. 1).

Найдя c , подставляем его во второе уравнение и определяем n , а затем L_1 .

При решении уравнений (41) можно принять $q_0 = q_{\text{доп}}$; это дает наилучшее использование сопротивляемости основания.

§ 20. Имея L_1 и c находим выражение для изгибающих моментов. Для этого представляем себе, что наша балка состоит из двух консолей, закрепленных в сечении OD , совпадающем с вертикальной осью косинусоиды.

Балка разбивается на 3 участка: AO , OP и PE , для каждого участка имеется особое выражение для изгибающего момента, а именно:

а) на участке AO действительно выражение (25), выведенное для укороченной балки;

б) на участке PE действительно выражение (10), выведенное для полномерной балки.

в) на участке OP выражение момента получаем вычитанием из (10) момента сосредоточенного груза P относительно O .

Заметим, что во всех этих выражениях момента плечи a отсчитываются от сечения OD .

§ 21. Если неравенство (37) не выполняется, то косинусоида пересекает AB за пределами балки на обеих сторонах, и т. о. балка оказывается укороченной на обоих концах (фиг. 8).

Все основные принципы, изложенные в предыдущих §§ в отношении балки односторонне-укороченной, сохраняют свою силу и в данном случае, заметим лишь его специальные особенности.

Грузовая площадь также разбивается на три части, но вместо $\frac{1}{2}\Omega$ на правой стороне, представляющей полуплощадь косинусоиды, имеем ${}^3\Omega$ — часть с отсеченным концом косинусоиды, подобно части ${}^1\Omega$. Поэтому формулы (39) получают вид:

$${}^1\Omega + 2({}^2\Omega) = {}^3\Omega,$$

а формула (40):

$${}^1\Omega + {}^3\Omega = \frac{P}{c}$$

Разлагая выражения синусов в ряды, как это было объяснено в предыдущем §, после алгебраических переделок получаем:

$$\left. \begin{aligned} 6\pi^2 b - 3(b+c)(L^2 + bc) - 3L^2 c - b^3 - 2c^3 &= 0 \\ 6\pi^2(q_0 L - P) - q_0 L[3(b+c)^2 + L^2] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

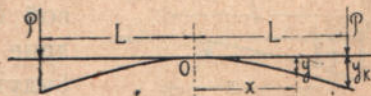
§ 22. Для определения изгибающих моментов, а затем и значений переменного момента инерции пользуемся теми же приемами, которые были описаны выше.

§ 23. Случаи несимметрично расположенной распределенной нагрузки приводятся к комбинации двух: нагрузки сосредоточенным грузом, представляющим равнодействующую нагрузки распределенной, и нагрузки на свободно опирающейся балке с пролетом, равным длине загруженного участка, под действием этой нагрузки (см. § 14).

IV. Случай нагрузки двумя равными сосредоточенными грузами по концам балки

§ 24. В случае нагрузки на балке в виде двух равных симметрично расположенных сосредоточенных грузов упругая линия уже не может иметь того же вида, как в предыдущем.

Положим, что по концам А и В балки длиной 2L приложены два равных сосредоточенных груза Р (фиг. 12). Легко заметить, что в этом случае всякая *возможная* упругая линия будет обращена выпуклостью вверх. Если упругие свойства оснований по всей длине балки одинаковы, то при симметричном



Фиг. 12

строении балки относительно ее середины О, очевидно, упругая линия будет также симметрична относительно О. Поэтому деформации просадки основания по концам балки А и В равны, обозначим их через y_k , а соответствующие им давления через q_k . При определенном соотношении величины грузов Р и длины балки 2L просадка посредине балки в О равна нулю, тогда и $q_0 = 0$. Положим, что геометрическая форма упругой линии соответствует полуволне косинусоиды, уравнение которой будет:

$$y_k - y = y_k \cos \frac{x}{n} \dots (43)$$

Подобно § 9 называем такую балку полномерной.

Поступая аналогично § 5, получаем зависимости:

$$q_x = C y_x \quad \dots \dots \dots (44)$$

$$q_{\max} = q_k = q_{\text{доп}} = \frac{P}{L - n \sin \frac{L}{n}} = \frac{P}{L - n} \quad \dots \dots \dots (45)$$

$$P = q_k(L - n) = q_{\text{доп}}(L - n) \quad \dots \dots \dots (46)$$

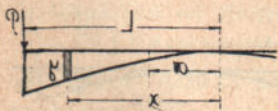
$$L = \frac{n \pi}{2} \quad \dots \dots \dots (47)$$

Из (45) и (47) получаем:

$$n = \frac{P}{q_{\text{доп}} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)} \quad \dots \dots \dots (48)$$

Сравнивая (47) с (7), замечаем, что они совершенно тождественны; оба случая можно объединить в следующей единой формулировке их свойств.

Если две балки одинаковой длины нагружены: одна — сосредоточенным грузом P посередине, а другая двумя равными P по концам, то при нулевых просадках первой балки по концам, а второй — посередине давления под грузами у обеих балок будут одинаковы.



Фиг. 13

§ 25. Поступая аналогично § 6, получаем выражения для изгибающих моментов

(фиг. 13).

$$M_a = q_{\text{доп}} \left[\frac{(n\pi - 2a)^2}{8} - n^2 \left(\frac{\pi}{2} - \cos \frac{a}{n} \right) + na \right] \quad \dots \dots (49)$$

$$M_0 = q_{\text{доп}} n^2 \left[\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1 \right] \quad \dots \dots \dots (50)$$

$$M_{+L} = M_{-L} = 0 \quad \dots \dots \dots (51)$$

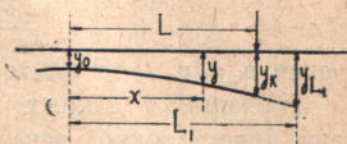
Значения переменного момента инерции определяем, пользуясь методом § 7.

§ 26. Если и в точке О деформация просадки $y_0 > 0$, то уравнение косинусоиды напишется так фиг. (14) :

$$y_k - y = (y_k - y_0) \cos \frac{x}{n}$$

или:

$$C_y = q_k - (q_k - q_0) \cos \frac{x}{n} \quad (52)$$



Фиг. 14

Для равномерной балки длиной 2L имеем:

$$q_x = C_y$$

Обозначим через ξ отношение

$$\frac{y_k}{y_0} = \frac{q_k}{q_0} = \frac{q_{доп}}{q_0} = \xi > 1.$$

В таком случае уравнение (52) принимает следующий вид:

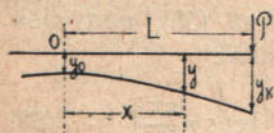
$$C_y = q_{доп} - q_{доп} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \cos \frac{x}{n} \quad (53)$$

Тогда имеем:

$$P = q_{доп} \left[L - n \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \sin \frac{L}{n} \right] \quad (54)$$

а отсюда:

$$n = \frac{P}{q_{доп} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\xi} - 1 \right]} \quad (55)$$



Фиг. 14а

так как:

$$L = \frac{n\pi}{2}$$

$$M_a = q_{доп} \left[\frac{1}{2} (L - a)^2 - n \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \left(L - a - n \cos \frac{a}{n} \right) \right] \quad (56)$$

$$M_0 = q_{доп} n^2 \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \quad (57)$$

§ 27. Для укороченной балки длиной 2L имеем (фиг. 14а):

$$L < L_1;$$

принимаям:

$$\frac{y_k}{y_0} = \frac{q_k}{q_0} = \xi > 1,$$

а если $q_k = q_{\text{доп}}$, то $q_{\text{доп}} : q_0 = \xi$.

Имеющихся данных: y_0 , ξ и L для решения настоящей задачи недостаточно, так как при этом возможно бесконечное количество кривых с разной длиной волны. В качестве дополнительного условия можно взять отношение $L : L_1 = \eta$, откуда имеем: $L_1 = \frac{L}{\eta}$.

На основании (7) определяем:

$$L_1 = \frac{L}{\eta} = \frac{n\pi}{2},$$

откуда:

$$n = \frac{2L}{\eta\pi} \dots \dots \dots (58)$$

Уравнение косинусоиды будет:

$$C_y = \frac{q_{\text{доп}}}{\left(1 - \cos \frac{L}{n}\right)} \left[1 - \frac{1}{\xi} \cos \frac{L}{n} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \cos \frac{x}{n} \right] \dots (59)$$

а подставляя сюда вместо n его значение из (58), получаем следующий иной вид уравнения упругой линии:

$$C_y = \frac{q_{\text{доп}} \eta}{\left(1 - \cos \frac{\eta\pi}{2}\right)} \left[1 - \frac{1}{\xi} \cos \frac{\eta\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \cos \eta \frac{\pi x}{2L} \right] \dots (60)$$

Интегрируя нагрузку на полудлине балки, приходим к выражению:

$$P_1 = \int_0^L q dx = \int_0^L C_y dx = q_{\text{доп}} \left[L \frac{\left(1 - \frac{1}{\xi} \cos \frac{L}{n}\right)}{\left(1 - \cos \frac{L}{n}\right)} + n \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \right] (61)$$

Отсюда определяем длину балки

$$2L = 2 \frac{1 - \cos \frac{\gamma\pi}{2}}{1 - \xi \cos \frac{\gamma\pi}{2}} \left[\frac{P}{Q_{доп}} - n \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \right] \dots \dots \dots (62)$$

Выражение изгибающего момента:

$$M_a = \left(\frac{Q_{доп}}{1 - \cos \frac{L}{n}} \right) \left\{ \frac{1}{2}(L - a)^2 \left(1 - \frac{1}{\xi} \cos \frac{L}{n} \right) - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \left[n^2 \left(\cos \frac{L}{n} - \cos \frac{a}{n} \right) + n(L - a) \sin \frac{L}{n} \right] \right\} \dots (63)$$

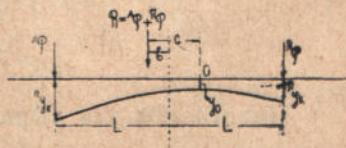
$$M_b = Q_{доп} \left\{ \frac{1}{2} L^2 \frac{1 - \frac{1}{\xi} \cos \frac{L}{n}}{1 - \cos \frac{L}{n}} - n \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \left[\frac{L \sin \frac{L}{n}}{1 - \cos \frac{L}{n}} - n \right] \right\} \dots (64)$$

$$M_L = 0.$$

V. Случай нагрузки двумя неравными сосредоточенными грузами по концам укороченной балки

§ 28. В случае неравных сосредоточенных грузов, приложенных по концам укороченной балки, тот же метод дает следующее решение (фиг. 15). Очевидно, упругая линия уже не будет расположена симметрично на балке.

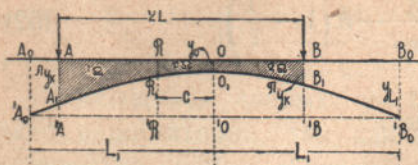
Если ${}^aP > {}^bP$, то деформация просадки под большим грузом будет больше деформации под меньшим, т. е. ${}^ay_k > {}^by_k$, а следовательно ${}^aq_k > {}^bq_k$. Для соблюдения равновесия равнодействующая противодействий осно-



Фиг. 15

вания должна быть равна равнодействующей активных сил ${}^aP + {}^bP$ и обе равнодействующие должны действовать на одной и той же прямой, другими словами, равнодействующая ${}^aP + {}^bP$ должна проходить через центр тяжести грузовой площади противодействий, а это будет иметь место, когда линия равнодействующей будет делить грузовую площадь на две равновеликие части (срав. § 17).

§ 29. Нетрудно выяснить, что наивысшая точка O косинусоиды будет расположена справа от середины C балки; действительно, совпадению этих двух точек соответствовало бы равенство просядков 1y_k и 2y_k , а при расположении O справа от C правый конец балки будет ближе к O , чем левый A , и ему будет соответствовать меньшая просядка 2y_k .



Фиг. 16

Обозначим грузовую площадь от A до R через ${}^1\Omega$ тоже от R до O — через ${}^c\Omega$ и от O до B — через ${}^2\Omega$ (фиг. 16).

Тогда очевидно:

$${}^1\Omega = {}^c\Omega + {}^2\Omega \dots \dots \dots (65)$$

Обозначим:

$$\frac{{}^1y_k}{y_0} = \frac{{}^1q_k}{q_0} = \frac{Q_{доп}}{q_0} = \xi.$$

Подобно тому, как это указано в § 27, и в данном случае необходимо добавочное условие:

$$L : L_1 = \eta \dots \dots \dots (66)$$

Для определения значений Ω дополняем косинусоиду до полуволны A_0B_0 , и тогда имеем:

$${}^1\Omega = A'R - A_1'R$$

$${}^c\Omega = R'O - R_1'O$$

$${}^2\Omega = O'B - O_1'B$$

Подставляя эти выражения в (65), получаем:

$$A'R - A_1'R = R'O - R_1'O + O'B - O_1'B$$

Так как $R'O + O'B = R'B$, имеем:

$$A'R - R'B - A_1'R + R_1'O + O_1'B = 0 \dots \dots \dots (67)$$

* Здесь означают:

$$A'R = y_{L_1} \left[2L \frac{{}^1P}{{}^1P + {}^2P} \right] \dots \dots \dots (68)$$

На основании (§ 18):

$$R'B = y_{L_1} \left[2L \frac{{}^aP}{{}^aP + {}^nP} \right] \dots \dots \dots (69)$$

$$A_1'R = (y_{L_1} - y_0) \left[n \sin \left(\frac{2L {}^nP}{n({}^aP + {}^nP)} + \frac{c}{n} \right) - n \sin \frac{c}{n} \right] \dots (70)$$

$$R_1'O = (y_{L_1} - y_0) n \sin \frac{c}{n} \dots \dots \dots (71)$$

$$O_1'B = (y_{L_1} - y_0) n \sin \left(\frac{2L {}^aP}{n({}^aP + {}^nP)} - \frac{c}{n} \right) \dots \dots (72)$$

Подставляя в (67) выражения (68) по (72), после приведения получаем:

$$Ly_{L_1} \frac{{}^aP - {}^nP}{n({}^aP + {}^nP)} - (y_{L_1} - y_0) \left\{ \cos \frac{L}{n} \sin \left[\frac{L({}^aP - {}^nP)}{n({}^aP + {}^nP)} - \frac{c}{n} \right] - \sin \frac{c}{n} \right\} = 0 \dots \dots \dots (73)$$

Из уравнения косинусоиды для данного случая нетрудно вывести:

$$y_{L_1} = {}^ay_k \left[\frac{1 - \frac{1}{\xi} \cos \left(\frac{2L}{n} \frac{{}^nP}{{}^aP + {}^nP} + \frac{c}{n} \right)}{1 - \cos \left(\frac{2L {}^nP}{n({}^aP + {}^nP)} + \frac{c}{n} \right)} \right] \dots \dots \dots (74)$$

Вводим для упрощения следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} 2L \frac{{}^nP}{{}^aP + {}^nP} &= {}^n\varphi \\ 2L \frac{{}^aP}{{}^aP + {}^nP} &= {}^a\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (75)$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L({}^aP - {}^nP)}{n({}^aP + {}^nP)} + \frac{c}{n} &= \frac{{}^a\varphi - {}^n\varphi}{2n} + \frac{c}{n} \\ \frac{L({}^aP - {}^nP)}{n({}^aP + {}^nP)} - \frac{c}{n} &= \frac{{}^a\varphi - {}^n\varphi}{2n} - \frac{c}{n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (76)$$

Введем в уравнение (73) следующие преобразования:

- 1) Вместо y_{L_1} подставляем его значение из (74).
- 2) Разлагаем все тригонометрические функции в ряды, сохраняя из каждого разложения первые два члена.
- 3) Вместо n подставляем его значение из (58).

В результате, принимая обозначения (75) и (76), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & \gamma_1^2 \pi^2 \left\{ ({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi)^2 \left[6c - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) ({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi) \right] + 4c^2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \left[2c - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 ({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi) \right] \right\} + 96 ({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi) \left[c^2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) + ({}^{n'}\varphi + c)^2 \right] + 8 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \\ & ({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi)^2 [({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi) - 6c] + 96 L^2 \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) [({}^n\varphi - {}^{n'}\varphi) - 2c] = 0 \quad (77) \end{aligned}$$

§ 30. Вторая зависимость выражает равенство внешней нагрузки и равнодействующей реакции основания:

$${}^1\Omega + {}^c\Omega + {}^2\Omega = \frac{{}^n P + {}^{n'} P}{C} \quad \dots \dots \dots (78)$$

Подставляя сюда соответствующие выражения, получаем:

$$A'R - A_1'R + RO' - R_1'O + O'B - O_1'B = {}^n P + {}^{n'} P \quad \dots (79)$$

Так как:

$$\begin{aligned} A'R + R'O + O'B &= A'B \\ A_1'R + R_1'O + O_1'B &= A_1'O + O_1'B, \end{aligned}$$

то уравнение (79) преобразуется так:

$$A'B - (A_1'O + O_1'B) = \frac{{}^n P + {}^{n'} P}{C} \quad \dots \dots \dots (80)$$

Согласно фиг. 16 имеем:

$$A'B = 2Ly_{L_1}$$

На основании § 18 и обозначений (75):

$$\begin{aligned} A_1'O &= (y_{L_1} - y_0) n \sin \left(\frac{2L {}^n P}{n ({}^n P + {}^{n'} P)} + \frac{c}{n} \right) = (y_{L_1} - y_0) n \sin \left(\frac{{}^n \varphi + c}{n} \right) \\ O_1'B &= (y_{L_1} - y_0) n \sin \left(\frac{2L {}^n P}{n ({}^n P + {}^{n'} P)} - \frac{c}{n} \right) = (y_{L_1} - y_0) n \sin \left(\frac{{}^n \varphi - c}{n} \right) \end{aligned} \quad (81)$$

Подставляя в (80) соответствующие значения из (81) и (74) и на основании аналогичных преобразований, получаем уравнение:

$$2\eta^3 \pi^3 {}^a q_k \left[3L \frac{1}{\xi} ({}^n \varphi + c)^2 + {}^n \varphi \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) ({}^n \varphi^2 + 3c^2) \right] + 3\eta \pi \left[16 {}^a q_k L^3 \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) - ({}^a P + {}^n P) ({}^n \varphi + c)^2 \right] - 96 {}^a q_k L^3 = 0. \quad (82)$$

Из двух уравнений (77) и (82) определяем неизвестные η и c .

Зная η и c , нетрудно определить: ${}^n q_k$, изгибающие моменты и значения моментов инерции в любой точке балки.

VI. Случай нагрузки двумя неравными сосредоточенными грузами при условии сохранения горизонтального положения касательными под грузами

§ 31. Если нагрузки приложены к балке таким образом, что направление касательных к упругой линии в точках приложения нагрузок остается горизонтальным (фиг. 17), то возможная упругая линия составляется из двух полувогн: $A_1 O_1$ и $O_1 B_1$, различных при неравных нагрузках ${}^a P$ и ${}^n P$, другими словами, в этом случае длина балки L всегда равна сумме двух полувогн:



Фиг. 17

$$L = 2{}^a L + 2{}^n L.$$

Примем:

$$\frac{{}^a q_k}{{}^n q_k} = \frac{{}^a P}{{}^n P}.$$

Если ${}^a P > {}^n P$, то целесообразно взять:

$${}^a q_k = q_{\text{доп.}}$$

тогда на основании предыдущего равенства имеем:

$${}^n q_k = \frac{{}^n P}{{}^a P} q_{\text{доп.}}$$

Обозначим еще отношение ${}^a q_k : q_0$ через ξ , тогда на основании предыдущего имеем:

$$q_0 = \frac{q_{доп.}}{\xi}$$

Согласно фиг. 17 имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2 {}^a L &= \frac{L {}^n P}{{}^a P + {}^n P} + c = \frac{{}^n \varphi}{2} + c \\ 2 {}^n L &= \frac{L {}^a P}{{}^a P + {}^n P} - c = \frac{{}^a \varphi}{2} - c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

Обозначим:

через ${}^1 \Omega$ грузовую площадь AR_1
 " ${}^2 \Omega$ " " OR_1
 " ${}^3 \Omega$ " " OB_1

Всего имеем два условия равновесия нашей балки:

1) равенство равнодействующих активных нагрузок, что выражается формулой:

$${}^1 \Omega + {}^2 \Omega + {}^3 \Omega = \frac{{}^a P + {}^n P}{C} = \frac{R}{C} \dots \dots \dots (84)$$

2) совпадение этих равнодействующих, что имеет место, когда равнодействующая R проходит через центр тяжести грузовой площади Σq , а это, в свою очередь, выражается равенством статических моментов частей грузовой площади по обе стороны точки приложения равнодействующей R относительно этой точки, т. е.:

$${}^R M({}^1 \Omega) = {}^R M({}^2 \Omega) + {}^R M({}^3 \Omega) \dots \dots \dots (85)$$

В этой формуле каждое слагаемое означает статический момент соответствующей части грузовой площади относительно точки R .

§ 32. Для определения частей Ω грузовой площади воспользуемся формулами предыдущих §§.

Выразим ${}^1 \Omega$ так:

$${}^1 \Omega = AO_1 - {}^2 \Omega \dots \dots \dots (86)$$

Легко заметить, что:

$$AO_1 = \frac{^nq_k + q_0}{2} \left(\frac{L \cdot ^nP}{^nP + ^nP} + c \right) = \frac{q_{доп} (1 + \xi)}{2\xi} \cdot \left(\frac{^n\varphi}{2} + c \right) \quad (87)$$

$$^n\Omega = \frac{q_0 + ^nq_k}{2} \left(\frac{L \cdot ^nP}{^nP + ^nP} - c \right) = \frac{q_{доп}}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{^nP}{^nP} \right) \left(\frac{^n\varphi}{2} - c \right) \quad (88)$$

Подставляем эти значения в (84):

$$\frac{q_{доп}}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \left(\frac{^n\varphi}{2} + c \right) + \frac{q_{доп}}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{^nP}{^nP} \right) \left(\frac{^n\varphi}{2} - c \right) = ^nP + ^nP.$$

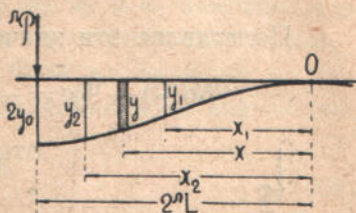
Из этого уравнения определяем с:

$$c = \frac{2(^nP + ^nP)}{q_{доп}} - \left[\frac{^n\varphi}{2} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{^nP}{^nP} \right) + \frac{^n\varphi}{2} \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \right] \quad (89)$$

§ 33. Для составления уравнения (85) предварительно находим выражение момента площади $x_1 \omega x_2$, ограниченной кривой косинусоиды и касательной в вершине — в пределах между двумя данными ординатами, фиг. 18.

Площадь элементарной полоски шириной dx обозначим через d ω , тогда:

$$d\omega = y dx.$$



Фиг. 18

Статический момент этой полоски относительно вершины кривой O:

$$dM_\omega = x d\omega = xy dx \quad (90)$$

Статический момент всей площади ω относительно того же центра:

$$^0M_\omega = \int_{x_1}^{x_2} xy dx \quad (91)$$

Подставляя в эту формулу вместо y его значения из уравнения косинусоиды, получаем:

$$^0M_\omega = \int_{x_1}^{x_2} y_0 \left(1 - \cos \frac{x}{n} \right) x dx = y_0 \left[\frac{x_2^2 - x_1^2}{2} + 2n^2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2n} \sin \frac{x_2 - x_1}{2n} - n \left(x_2 \sin \frac{x_2}{n} - x_1 \sin \frac{x_1}{n} \right) \right] \quad (92)$$

§ 34. При удалении центра момента от центра тяжести площади ω на a от прежнего центра O выражение момента принимает вид:

$${}^0M_{\omega} = {}^0M_{\omega} + \omega a \quad \dots \dots \dots (93)$$

В случае приближения центра момента к центру тяжести площади ω на a имеем формулу:

$${}^0M_{\omega} = {}^0M_{\omega} - \omega a \quad \dots \dots \dots (94)$$

Обращаясь к фиг. 17, на основании изложенных соображений имеем:

$$\left. \begin{aligned} {}^R M(1\Omega) &= {}^0 M(1\Omega) - {}^1 \Omega c \\ {}^R M(2\Omega) &= -[{}^0 M(2\Omega) - {}^2 \Omega c] \\ {}^R M(3\Omega) &= {}^0 M(3\Omega) + {}^3 \Omega c, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (95)$$

Подставляя эти значения в (85), получаем:

$${}^0 M(1\Omega) - {}^1 \Omega c = -[{}^0 M(2\Omega) - {}^2 \Omega c] + {}^0 M(3\Omega) + {}^3 \Omega c,$$

откуда:

$$\begin{aligned} &{}^0 M(1\Omega) + {}^0 M(2\Omega) - {}^0 M(3\Omega) - \\ &- c({}^1 \Omega + {}^2 \Omega + {}^3 \Omega) = 0 \dots \dots (96) \end{aligned}$$



Фиг. 19

Проведя через O_1 горизонтальную прямую, отделяющую от каждой площади Ω соответствующий прямоугольник высотой q_0 , можем написать (фиг. 19):

$$\left. \begin{aligned} {}^1 \Omega &= \omega_1 + q_0 \frac{L \cdot nP}{rP + nP} = \omega_1 + q_0 \frac{n\varphi}{2} \\ {}^2 \Omega &= \omega_2 + q_0 c \\ {}^3 \Omega &= \omega_3 + q_0 \frac{L \cdot nP}{rP + nP} = \omega_3 + q_0 \frac{r\varphi}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (97)$$

Подставляем эти значения в (96)

$${}^0 M(1\Omega) + {}^0 M(2\Omega) - {}^0 M(3\Omega) - c(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) - Lc = 0 \quad \dots (98)$$

На основании §§ 33 и 18 имеем:

$${}^0M(1Q) = (q_{\text{доп}} + q_0) \frac{{}^n q}{8} \left(\frac{{}^n \varphi}{2} + 2c \right) + \frac{(q_{\text{доп}} - q_0)}{2} \left\{ 2 {}^n n^2 \sin \left(\frac{{}^n \varphi}{4 {}^n n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{c}{2 {}^n n} \right) \sin \frac{{}^n \varphi}{4 {}^n n} - {}^n n \left[\left(\frac{{}^n \varphi}{2} + c \right) \sin \left(\frac{{}^n \varphi}{2 {}^n n} + \frac{c}{{}^n n} \right) - c \sin \frac{c}{{}^n n} \right] \right\} \quad (99)$$

$${}^0M(2Q) = \frac{q_0 c^2}{2} + \frac{(q_{\text{доп}} - q_0)}{2} \left[\frac{c^2}{2} + 2 {}^n n^2 \sin \frac{c}{2 {}^n n} - {}^n n c \sin \frac{c}{{}^n n} \right] \quad (100)$$

$${}^0M\Omega(3) = \frac{({}^n q_k + q_0)}{4} \left(\frac{{}^n \varphi}{2} - c \right)^2 + \frac{({}^n q_k - q_0)}{2} \left[2 {}^n n^2 \sin^2 \left(\frac{{}^n \varphi}{4 {}^n n} - \frac{c}{2 {}^n n} \right) - \right. \\ \left. {}^n n - \left(\frac{{}^n \varphi}{2} - c \right) \sin \left(\frac{{}^n \varphi}{2 {}^n n} - \frac{c}{{}^n n} \right) \right] \quad (101)$$

Для определения суммы площадей ω_1 , ω_2 и ω_3 заметим, что $\omega_1 + \omega_2$ равна площади, ограниченной полувошной левой косинусоиды и осью X, а ω также равна подобной же площади, но для правой косинусоиды; эти площади определяются из выражений

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{q_{\text{доп}} + q_0}{2} \left(\frac{{}^n \varphi}{2} + c \right) \quad (102)$$

$$\omega_3 = \frac{{}^n q_k + q_0}{2} \left(\frac{{}^n \varphi}{2} - c \right) \quad (103)$$

Подставляя в выражение (98) вместо 0M и ω их значения из выражений (99) по (102) включ., после алгебраических переделок получаем уравнение, из которого после подстановки С из (89), находим q , или, другими словами, ξ .

§ 35. Имея c и ξ не составит труда найти выражения изгибающих моментов и построить моментную диаграмму, а с помощью последней определить значения переменного момента инерции J, руководствуясь соображениями § 7.

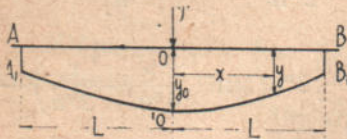
VII. Упругая линия балки в виде параболы

§ 36. Рассмотрим применение нашего метода в предположении, что упругая линия балки представляет простую параболу. Возьмем более сложный случай укороченной балки с нагрузкой в виде сосредоточенного груза P посредине (фиг. 20).

Обозначим через ξ отношение противодавлений по концам балки и под грузом:

$$\xi = q_k : q_0 = q_k : q_{\text{доп}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (104)$$

Уравнение параболы, если начало координат совпадает с вершиной 'О, имеет в данном случае вид:



Фиг. 20

$$x^2 = \frac{CL^2(y_0 - y)}{q_{\text{доп}} - q_k} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (105)$$

Уравнение проекций на вертикальную ось дает нам зависимость:

$$P = 1/3 L(q_k + 2q_{\text{доп}}) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (106)$$

Выражение изгибающего момента в расстоянии a от груза P :

$$M_a = \frac{q_{\text{доп}}(L^2 + 2a^2)}{4} + \frac{Lq_x(L - 4a)}{4} - \frac{a(q_{\text{доп}} - q_k)(8L^3 + a^3)}{12L^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (107)$$

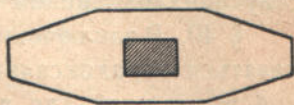
Момент под грузом:

$$M_0 = \frac{L^2}{2} (q_{\text{доп}} - q_k) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (108)$$

§ 37. Для определения значений момента инерции балки применяем прием, изложенный в § 7. В виду сложности общего выражения момента M_a проще вести вычисление последовательно численным путем, или графоаналитическим методом.

§ 38. Как это уже было указано, давление на основание под балкой, удовлетворяющей изложенным выше условиям, достигает наибольшего значения только в отдельных точках, на остальном протяжении оно меньше — соответственно виду упругой линии и если это максимальное давление равно допускаемому для данного основания, то таким образом сопротивляемость такого утилизируется в полной мере только в этих точках; чем дальше от этих точек, тем меньше давление на основание. Таким образом с точки зрения использования механических свойств основания различные участки балки не равноценны: по соседству с точками максимального давления их значение выше,

чем вдали от них. Поэтому будет вполне целесообразным стремиться к увеличению площади этих более ценных участков за счет уменьшения площади участков малоценных, сообщая балке соответствующую форму в плане. Нетрудно заметить, что в этом отношении мы ничем не стеснены, кроме разве соображений конструктивного характера, напр., удобства выполнения. Поэтому непригодны всякие криволинейные очертания. Для железобетонной балки, нагруженной, напр., в средней части сосредоточенным грузом или распределенной нагрузкой, вполне рациональной формой в плане будет показанная на фиг. 21. Здесь средняя часть основания балки получила большее развитие за счет малоценных крайних частей.



Фиг. 21

Ограничимся в данной статье этими беглыми указаниями, оставляя детальную проработку до следующего выпуска нашего труда.

§ 39. Значения переменного момента инерции балки, найденные посредством изложенного в § 7 этой статьи способа, служат для подбора сечений балки по обычной формуле изгиба

$$\sigma = \frac{Mz}{J}$$

Легко заметить, что при этом подборе возможно получить постоянное по всей длине балки напряжение на изгиб, напр., $\sigma_{\text{доп}}$.

Для этого надо, чтобы расстояние z краев сечения балки от нейтральной оси (в железобетонной балке имеем в каждом сечении два различных значения: Z_6 и $Z_{\text{ж}}$) в каждом сечении удовлетворяло условию:

$$z_x = \frac{J_x \sigma_{\text{доп}}}{M_x} \dots \dots \dots (109)$$

что вполне осуществимо. Очевидно, мы получаем при этом балку равного сопротивления на изгиб. Практически вполне допустимы отступления в той или иной степени от этой теоретически наилучшей формы балки — путем, напр., замены неудобного для выполнения криволинейного очертания — полигональным, в которое вписано теоретическое криволинейное очертание.

Совместное использование указаний этого § и предыдущего обещает наиболее рациональные и экономические конструкции балок на упругом основании. Мы ожидаем много нового и ценного от применения вышеизложенного к железобетонным конструкциям, дающим большую свободу проектирующему в отношении приспособления конструкции к расчету путем соответствующих изменений площади и расположения армировки.

§ 40. В заключение — несколько общих соображений. Может казаться парадоксальным наше утверждение о пригодности всякой возможной для данного случая кривой в качестве упругой линии. Однако нетрудно убедиться в справедливости этого утверждения.

В общем уравнении упругой линии

$$\frac{M}{EJ} = \pm \frac{1}{\rho} \dots \dots \dots (110)$$

для любого частного значения момента M всегда возможно найти такое значение переменного момента инерции J , при котором уравнение (110) удовлетворяется при *любом* значении радиуса кривизны.

Единственное ограничение заключается в условии, чтобы знаки в обеих частях уравнения (117) были одинаковые, т. е. если момент M отрицательный, то и кривизна упругой линии в этой точке также должна быть отрицательной. Это условие всегда удовлетворяется, если для упругой линии задана кривая, *возможная* для данного случая.

Сказанное остается в силе и тогда, когда для уравнения упругой линии взять точную ее форму

$$\frac{M}{EJ} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \dots \dots \dots (111)$$

Действительно, и здесь любому частному значению правой части уравнения (111) соответствует вполне определенное значение переменного момента инерции J_x .

А так как для закона изменения величин $1/\rho$ по длине балки никаких ограничений не может быть поставлено, то отсюда необходимо следует, что упругой линией может быть всякая не противоречащая данному случаю кривая.

VIII. Соображения о наиболее рациональных формах балки и видах кривых упругой линии

§ 41. Из замечаний предыдущего § вытекает следующее практически-важное соображение: кривые, у которых имеются участки с очень большим и даже с бесконечно большим ρ (напр., кубическая парабола — у начала координат), нерациональны, так как в этих местах получается очень большое значение J .

Теоретически возможно, разбивая грузовую и моментную диаграммы на бесконечно большое число бесконечно узких полосок, получить точное построение закона изменения момента инерции по длине балки, в точности соответствующее принятой в данном случае кривой [упругой линии. Но практически это недостижимо, так как полоски имеют некоторую конечную ширину, да и нет никакой надобности в том, чтобы упругая линия вполне совпадала с геометрической формой принятой кривой, важно лишь, чтобы имел место достаточный запас „прочности“, а это может быть всегда достигнуто при надлежащем числе полосок. Вопрос о пределах точности расчетов в данном случае будет рассмотрен в следующем выпуске. Здесь заметим лишь, что вполне допустимы значительные сокращения и упрощения расчета, напр., не доводя определения значений J до концов балки, остановиться на каком-либо промежуточном его значении и принять таковое постоянным до конца балки. Погрешность, которая при этом получается, дает некоторый добавочный запас прочности, правда, за счет излишка материала.

Во всяком случае, имея даже вполне точные значения переменного J , при конструировании такой балки неизбежна замена непрерывного изменения поперечного сечения (или сечения арматуры в железобетонной балке) балки изменением ступенчатым по линии, охватывающей кривую точного изменения сечения.

§ 42. При выборе типа кривой для упругой линии балки, нагруженной сосредоточенным грузом, необходимо иметь в виду

следующие соображения: кривые, у которых ордината вблизи вершины кривой изменяется медленно, дают более совершенное использование основания, так как изменение удельного давления по длине балки будет меньше. Но это преимущество приобретает ценой повышенной жесткости на участке балки вблизи вершины упругой линии. Обратное имеет место для балок с быстро изменяющейся ординатой упругой линии вблизи ее вершины; в этом случае не требуется повышенной жесткости в наиболее напряженном участке балки, но зато для передачи на основание той же нагрузки необходимо удлинение балки по сравнению с первым случаем. Таким образом преимущества и недостатки обоих видов кривых в обоих случаях примерно одинаковы. Но все же первый тип упругой линии несколько выгоднее, так как повышенная жесткость, достигаемая увеличением высоты балки в месте приложения нагрузки, используется одновременно и для лучшей передачи нагрузки на балку.

В случаях приложения нагрузки по концам балки, а также при неразрезной балке на упругом основании, большую пользу приносит жесткая связь между балкой и колоннами, передающими нагрузку на балку.

§ 43. Вопрос о наивыгоднейшей кривой для упругой линии в различных случаях имеет очень большое значение не только в техническом, но и в экономическом отношениях.

Очевидно, наивыгоднейшей будет та балка, объем которой, при прочих равных условиях (длина, ширина, нагрузка, наибольшее удельное давление), будет наименьший. Следующий прием может быть применен для любого вида кривой. Так как жесткость балки переменная, то, следовательно, и высота по длине балки также есть величина переменная. Для любого сечения при ширине балки $b = 1$ имеем зависимость:

$$h = \sqrt[3]{12J_x} \cdot \dots \dots \dots (112)$$

Для случая поперечной балки, нагруженной посередине длины сосредоточенным грузом, на основании (19) имеем:

$$h_x = \sqrt[3]{\frac{12CP^2M_x}{4Eq_{доп}^3 \cos\left(\frac{2q_{доп}x}{P}\right)}} \cdot \dots \dots \dots (113)$$

Подставляя сюда вместо M_x его значение из (10) и на основании (9), получаем:

$$h_x = n \sqrt[3]{\frac{12Cn}{E \cos \frac{x}{n}} \left(\frac{\pi}{2} - \cos \frac{x}{n} - \frac{x}{n} \right)} \dots \dots \dots (114)$$

Площадь F_x сечения при ширине балки $b=1$ будет:

$$F_x = h_x \dots \dots \dots (115)$$

Объем участка балки длиной dx :

$$dV = F_x dx = h_x dx.$$

Объем половины длины балки:

$$V_L = \int_0^L h_x dx.$$

Объем всей балки в целом:

$$V = 2 \int_0^L h_x dx \dots \dots \dots (116)$$

СТАТЬЯ ДЕСЯТАЯ

СТОЙКА, ЗАКРЕПЛЕННАЯ НИЖНИМ КОНЦОМ В ЗЕМЛЕ

1. Случай стойки, снабженной на уровне земли горизонтальной опорой

а) Стойка „полномерная“.

§ 1. Данный вопрос примыкает к рассмотренному в статье девятой вопросу о балке на упругом основании, поскольку и здесь имеем распределенную на некотором участке реакцию.

В современной литературе можно назвать лишь несколько работ, посвященных этому вопросу, представляющему большую практическую важность (мачты электропроводок, стойки подвесных дорог).

Укажем на работы:

H. Dörr — Die Standsicherheit der Masten und Wände im Erdreich.

Кроме того, имеются отдельные статьи в журналах:

Beton u. Eisen, Elektrotechnische Zeitsch. Bauingenieur, а также отдельные главы в книгах:

H. Krey — Erddruck, Erdwiderstand u. s. w.

Keiichy Hayashy — Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Handbuch für Eisenbetonbau.

§ 2. Применим и в данном случае тот же метод, который изложен в статье 9-й: задаемся наперед некоторой упругой линией, *возможной* для данной нагрузки, и отыскиваем значения переменного момента инерции сечений стойки, при наличии которых упругая линия стойки принимает заданный вид.

Рассмотрим простейший случай стойки, снабженной на уровне поверхности земли горизонтальной опорой, принимающей на себя поперечно-срезающую силу, но не препятствующей повороту сечений стойки. На фиг. 1 изображена схема данного случая.

Под действием приложенной к верхнему концу стойки горизонтальной силы P стойка деформируется, при чем надземная ее часть изгибается как консоль, упруго закрепленная у поверхности земли, а подземная выгибается таким образом, что деформация выгиба (горизонтальная „просадка“) по мере углубления увеличивается до некоторой наибольшей величины, а далее уменьшается до нуля и меняет знак, образуя вторую волну, затем третью и т. д., постепенно затухающие.



Фиг. 1

Положим, что на данной длине t подземной части стойки как раз укладывается одна полуволна косинусоиды. Сравнивая фиг. 1 с фиг. 1 статьи 9-й, замечаем в них сходство: подземная часть стойки аналогична равномерной балке. Существенное отличие заключается в том, что C в данном случае представляет величину, изменяющуюся с глубиной.

Закон этого изменения неизвестен и подлежит выяснению опытным путем, во всяком случае зависимость величины C от глубины имеет вид:

$$C = \varphi(x) \dots \dots \dots (1)$$

при чем φ есть функция монотонная.

Если принять по примеру Hayashi (см. стр. 234 его книги), что C изменяется пропорционально глубине x , то имеем:

$$C_x = Kx \dots \dots \dots (2)$$

В соединении с формулой (1) статьи 9-й получаем:

$$q_x = C_x \delta_x = Kx \delta_x \dots \dots \dots (3)$$

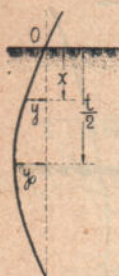
Полагая во (2) $x = 1$, получаем:

$$C_1 = K,$$

т. е. K означает коэффициент упругой податливости грунта на глубине единица.

§ 3. Положим, что упругая линия подземной части стойки представляет косинусоиду. Если по примеру § 5 статьи 9-й обозначим (фиг. 2):

через y_0 — наибольшую горизонтальную просадку на глубине $\frac{t}{2}$, через y — ординату упругой линии на глубине x , равную δ_x , то, помещая начало координат O в точке выхода стойки из земли, уравнение упругой линии будет иметь вид:



или:

$$y = y_0 \cos \frac{\left(\frac{t}{2} - x\right)}{n}$$

$$y = y_0 \cos \left(\frac{t - 2x}{2n}\right) \dots \dots \dots (4)$$

Согласно (7) статьи 9-й имеем:

$$n = \frac{t}{2};$$

Фиг. 2

подставляя это выражение в (4), после преобразований получаем уравнение косинусоиды в таком виде:

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{t} \dots \dots \dots (5)$$

На стойку действуют горизонтальные силы:

P — на верхнем ее конце.

H — на уровне поверхности земли.

$\sum_0^t q_x \Delta x = R$ — распределенная реакция в виде противодействия грунта на протяжении подземной части стойки.

Если принять, что ширина стойки по направлению нормали к чертежу равна единице, то на основании (3) очевидно:

$$q_x = Kx \delta_x = Kxy \dots \dots \dots (6)$$

откуда:

$$R = \sum_0^t Kxy \Delta x,$$

а на основании (5) и переходя к интегралу, имеем:

$$R = \int_0^t Ky_0 x \sin \frac{\pi x}{t} dx = Ky_0 \frac{t^2}{\pi} \dots \dots \dots (7)$$

а на основании (3) и принимая, что давление на глубине $\frac{t}{2}$ равно $q_{доп}$, получаем в результате:

$$R = 2q_{доп} \frac{t}{\pi} \dots \dots \dots (8)$$

Очевидно:

$$P - H + R = 0 \dots \dots \dots (9)$$

а следов.:

$$P - H + 2q_{доп} \frac{t}{2} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

Отсюда находим

$$H = P + 2q_{доп} \frac{t}{2} \dots \dots \dots (11)$$

§ 4. Моментная диаграмма для надземной части стойки от горизонтальной внешней силы P , приложенной на конце стойки, представляет треугольник (фиг. 3).

Момент у поверхности земли:

$$^0M = Ph \dots \dots \dots (12)$$

Момент на подземной части балки изменяется по более сложному закону от 0M до нуля на нижнем конце стойки.

Легко найти другое выражение момента 0M в точке O , относя последнюю еще к подземному участку стойки.

Площадь грузовой полоски на глубине x :

$$C_y dx = K y_0 x \sin \frac{\pi x}{t} dx \dots \dots \dots (13)$$

Соответствующий этой полоске дифференциал момента:

$$d^0M = K y_0 x^2 \frac{\sin \pi x}{t} dx \dots \dots \dots (14)$$

откуда выражение самого момента:

$$^0M = \int_0^t K y_0 x^2 \sin \frac{\pi x}{t} dx = 2q_{доп} t^2 \frac{(\pi^2 - 4)}{\pi^3} \dots \dots (15)$$



Фиг. 3

Сравнивая (15) и (12), определяем глубину заделки стойки в землю:

$$t = \sqrt{\frac{Ph\pi^8}{2q_{\text{доп}}(\pi^2 - 4)}} = 1,625 \sqrt{\frac{0M}{q_{\text{доп}}}} \dots \dots \dots (16)$$

Общее выражение изгибающего стойку момента на глубине a имеет вид:

$$M_a = 2q_{\text{доп}}t \left[\pi^2(t - a) - a\pi \sin \frac{\pi a}{t} - 4t \cos^2 \frac{a\pi}{2t} \right] \dots \dots (17)$$

§ 5. С помощью этого выражения определяются отдельные значения момента для построения моментной диаграммы. Для нахождения значений переменного момента инерции пользуемся приемом, изложенным в § 7 статьи 9-й.

Формула (19) статьи 9-й применяется в данном случае без всяких изменений.

б) „Укороченная“ стойка.

§ 6. Рассмотрим еще случай, аналогичный укороченной балке, когда на нижнем конце стойки имеем противодействие

$$q_k > 0.$$

В этом случае задаемся отношением:

$$\frac{q_k}{q\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{q_k}{q_{\text{доп}}} = \xi \dots \dots \dots (18)$$

На фиг. 4-й изображен этот случай.

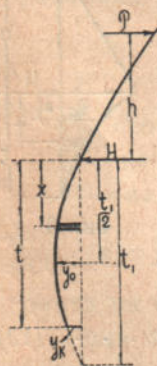
Так как всегда желательно полнее использовать сопротивление грунта, то, очевидно, длина заделанной в землю части стойки будет больше одной четверти волны косинусоиды, т. е.

$$t > \frac{t_1}{2} \dots \dots \dots (19)$$

В данном вопросе имеем три неизвестных: H , t_1 и t ; для их определения служат следующие зависимости.

На основании (3) имеем:

$$\frac{q_k}{q_{\text{доп}}} = \frac{C_t y_k}{C\left(\frac{t_1}{2}\right) y_0} = \frac{K t y_k}{K \frac{t_1}{2} y_0} = \frac{2 t y_k}{t_1 y_0} = \xi \dots \dots \dots (20)$$



Фиг. 4

Подставляем сюда из (5) вместо y_k :

$$y_k = y_0 \sin \frac{\pi t}{t_1},$$

получаем:

$$\sin \frac{\pi t}{t_1} = \frac{\xi t_1}{2t} \dots \dots \dots (21)$$

Разложив в ряд $\sin \frac{\pi t}{t_1}$ и взяв первые два члена, приходим к выражению:

$$\frac{t}{t_1} = 0,551 \sqrt{1 + \sqrt{1 - 1,047\xi}} \dots \dots \dots (22)$$

Площадь грузовой полоски на глубине x :

$$q_x dx = C_x C_y dx = K_y x dx \dots \dots \dots (23)$$

Подставляя сюда вместо y его значение из (5), имеем:

$$q_x dx = K_y y_0 x \sin \frac{\pi x}{t_1} dx = \frac{2xq_{доп}}{t_1} \sin \frac{\pi x}{t_1} dx \dots \dots \dots (24)$$

Уравнение (9) в данном случае принимает следующий вид:

$$P - H + \int_0^t \frac{2xq_{доп}}{t_1} \sin \frac{\pi x}{t_1} dx = 0,$$

а после интегрирования:

$$P - H + \frac{2q_{доп}}{\pi^2} \left[t_1 \sin \frac{\pi t}{t_1} - \pi t \cos \frac{\pi t}{t_1} \right] = 0 \dots \dots \dots (25)$$

Разложение в ряд выражений в скобках приводит к следующему уравнению:

$$P - H + \frac{5}{3} \pi q_{доп} \frac{t^3}{t_1^3} = 0 \dots \dots \dots (26)$$

Третья зависимость получается из уравнения моментов. Изгибающий момент в точке O .

$${}^0M = Ph \dots \dots \dots (27)$$

Момент грузовой полосы на глубине x относительно той же точки O :

$$d^0M = q_x x dx = \frac{2x^2 q_{\text{доп}}}{t_1} \sin \frac{\pi x}{t_1} dx.$$

Момент всей нагрузки q :

$$^0M = \int_0^t \frac{2x^2 q_{\text{доп}}}{t_1} \sin \frac{\pi x}{t_1} dx = \frac{\pi q_{\text{доп}} t^4}{3t_1^2} \dots \dots \dots (28)$$

Сравнивая уравнения (27) и (28), получаем:

$$Ph = \frac{\pi t^4 q_{\text{доп}}}{3t_1^2} \dots \dots \dots (29)$$

Из трех уравнений: (22), (26) и (29) определяем:

$$H = P + 2,821 \sqrt{{}^0M q_{\text{доп}} (1 + \sqrt{1 - 1,047\xi})} \dots \dots \dots (30)$$

$$t = 1,772 \sqrt{\frac{{}^0M}{q_{\text{доп}} (1 + \sqrt{1 - 1,047\xi})}} \dots \dots \dots (31)$$

$$t_1 = 3,125 \frac{\sqrt{q_{\text{доп}} {}^0M}}{q_{\text{доп}} (1 + \sqrt{1 - 1,047\xi})} \dots \dots \dots (32)$$

Здесь

$${}^0M = Ph.$$

§ 7. Выражение изгибающего момента определяется тем же способом, который описан в § 4. В виду сложности этих выражений лучше выполнять расчет в числовом порядке.

Имея значения моментов, определяем значения переменного момента инерции, применяя способ, изложенный в § 7 статьи 9.

§ 8. В изложении предыдущих §§ принято во внимание воздействие на погруженную в грунт часть стойки лишь в виде реакции, вызываемой податливостью грунта, и совершенно не учтено влияние обыкновенного давления грунта — активного и пассивного.

Я полагаю, что в отношении грунтов связных игнорирование активного давления — совершенно правильно: благодаря связности грунта прилегание его к стойке на вогнутой ее сто-

роне прекращается, стойка как бы отодвигается от массы грунта, поэтому не может иметь место передача на этой стороне каких-либо воздействий с грунта на стойку. На выпуклой стороне имеем распределенную реакцию, передающуюся от грунта на стойку. В какой мере здесь участвует сопротивление податливости грунта и в какой пассивное давление, сказать трудно; да есть ли особая надобность в этом разделении? не проще ли ввести в рассмотрение „объединенное“ общее сопротивление, слагающееся как-то из обоих вышеупомянутых компонентов. В таком случае останется лишь необходимость в экспериментальном определении зависимости этого общего сопротивления, во-первых, от глубины, во-вторых — от индивидуальных свойств различных грунтов.

§ 9. Иначе обстоит дело с грунтами несвязными, сыпучими. Здесь не имеет серьезного значения сопротивление податливости грунта, зато в полной мере проявляются обычные давления: активное — на вогнутой стороне, пассивное — на выпуклой, и эти два силовых воздействия только и должны быть приняты во внимание. Некоторое промежуточное положение занимают случаи, когда грунт, первоначально несвязный, под влиянием давления приобретает некоторую степень связности. Значение такой „появляющейся“ связности должен осветить эксперимент, а пока вполне возможно ограничиться случаями „чистыми“: грунта вполне связного и грунта несвязного, тем более, что такая схематизация идет на пользу прочности.

§ 10. Посмотрим, какие изменения последуют в рассмотренном выше случае „укороченной“ стойки, погруженной в несвязный грунт (фиг. 5).

Обозначим пассивное удельное давление на глубине x от поверхности земли — через ${}^n p_x$, то же, активное — через ${}^a p_x$.

Как известно, Ранкином даны для них формулы:

$$\left. \begin{aligned} {}^a p_x &= \gamma x \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \\ {}^n p_x &= \gamma x \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$



Фиг. 5

Здесь γ означает объемный вес грунта.

Эти формулы преобразуются в более удобные:

$$\begin{aligned} {}^a p_x &= \gamma x \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \\ {}^n p_x &= \gamma x \operatorname{cotg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (34)$$

Легко заметить, что в любой точке на подземном участке стойки в конечном результате действует разность давлений

$$p_x = {}^n p_x - {}^a p_x = \gamma x \left[\operatorname{cotg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \frac{4\gamma x}{\sin \varphi} \quad \dots (35)$$

Площадь грузовой полоски на глубине x :

$$p_x dx = \frac{4\gamma x}{\sin \varphi} dx \quad \dots \dots \dots (36)$$

Уравнение проекций на горизонтальную ось:

$$P - H + \int_0^t \frac{4\gamma x}{\sin \varphi} dx = 0,$$

откуда:

$$P - H + \frac{2\gamma t^2}{\sin \varphi} = 0 \quad \dots \dots \dots (37)$$

Дифференциал момента в точке на глубине a :

$$dM_a = p_x \cdot (x - a) dx = \frac{4\gamma x}{\sin \varphi} (x - a) dx \quad \dots \dots \dots (38)$$

Момент в точке a :

$$M_a = \int_0^t \frac{4\gamma x}{\sin \varphi} (x - a) dx = \frac{2\gamma}{3 \sin \varphi} (2t^3 - 3at^2 + a^3) \quad \dots \dots (39)$$

Момент в точке O :

$${}^0 M = \frac{2\gamma t^3}{3 \sin \varphi} \quad \dots \dots \dots (40)$$

С другой стороны, ${}^0M = Ph$, поэтому:

$$Ph = \frac{2\gamma t^3}{3 \sin \varphi} \dots \dots \dots (41)$$

Отсюда

$$t = \sqrt[3]{\frac{3Ph \sin \varphi}{2\gamma}} \dots \dots \dots (42)$$

Подставляя значение t в (37), определяем:

$$H = P + \frac{(6\gamma Ph \sin \varphi)^{\frac{2}{3}}}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (43)$$

§ 11. Так как величина удельной реакции в данном случае не зависит от деформаций стойки, а только от глубины, то она достигает своего максимума у нижнего конца стойки. Нетрудно заметить, что крайним ее пределом является величина „временного сопротивления“ данного грунта. Под этим термином разумею то удельное постоянное давление, при котором происходят значительные перемещения частиц грунта, допускающие столь же значительные передвижения стержня.



Фиг. 6

Этот процесс „разрушения“ грунта напоминает раздробление твердого тела. Отсюда ясно, что грузовая диаграмма имеет изображенный на фиг. 6-й вид; здесь p_p означает „разрушающее“ удельное давление, соответствующую ему глубину обозначим через t_p .

Очевидно, если длина подземной части стержня $t > t_p$, то на протяжении нижнего участка $t - t_p$ удельное давление p постоянно и равно p_p .

§ 12. Из всего вышеизложенного видно, что жесткость стойки в данном случае не зависит от вида упругой линии, поэтому возможно принять любой закон изменения жесткости, напр., можно взять постоянный момент инерции, определив его по наибольшему изгибающему моменту 0M , а также допустимо и уменьшение жесткости с глубиной, соответственно изменению изгибающих моментов.

II. Случай стойки, снабженной горизонтальной опорой, расположенной ниже уровня земли

§ 13. В случае, если горизонтальная опора расположена на глубине c от поверхности земли, имеем следующие зависимости при несвязном грунте.

При действии горизонтальной силы P на высоте h над поверхностью земли стойка деформируется следующим образом (фиг. 7): надземная часть AO изогнется как консоль, упруго закрепленная на уровне поверхности земли; подземная часть OB изогнется по некоторой кривой, соответствующей данной нагрузке и закону распределения жесткости по длине стойки.



Фиг. 7

Очевидно, что на протяжении участка с частицы грунта, прилегающие к стойке справа, уступая напору стойки, переместятся вправо же, при чем по мере углубления это перемещение уменьшается до нуля в точке C ; дальше вглубь перемещаются влево частицы грунта, прилегающие к стойке слева, при чем величина перемещения сначала возрастает до некоторого максимума u_0 , а затем уменьшается. Для изображенной на фиг. „укороченной“ стойки имеем на ее конце B перемещение $u_k > 0$. Соответственно глубине имеем давления: на участке OC —справа: пассивные, слева: активные, на участке CB —наоборот, следовательно, в результате в каждой точке действует разность этих давлений, определяемая по формуле (35).

§ 14. Обозначим: через c глубину нулевой точки C , через t глубину погружения всей стойки.

Равнодействующая давлений на участке OC :

$$R = \frac{2\gamma c^2}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (44)$$

она приложена на глубине $\frac{2}{3}c$ и направлена справа налево.

Равнодействующая давлений на участке CB :

$$R = \left(\frac{4\gamma c}{\sin \varphi} + \frac{4\gamma t}{\sin \varphi} \right) \left(\frac{t-c}{2} \right) = \frac{2\gamma (t^2 - c^2)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (45)$$

и приложена в центре тяжести трапеции, изображающей грузовую площадь, а именно на глубине

$$\frac{(t+2c)^2+3tc}{6(t+c)},$$

Уравнение проекций на горизонтальную ось:

$$P - H - R + R = 0$$

дает зависимость:

$$P - H - \frac{2\gamma c^2}{\sin \varphi} + \frac{2\gamma(t^2 - c^2)}{\sin \varphi} = 0 \dots \dots (46)$$

Уравнение моментов для центра С:

$$-P(h+c) + \frac{2\gamma c^2}{\sin \varphi} \cdot \frac{1}{3}c + \frac{2\gamma(t^2 - c^2)}{\sin \varphi} \left[\frac{(t+2c)^2 + 3tc}{6(t+c)} - c \right] = 0,$$

$$P(h+c) - \frac{\gamma}{3\sin \varphi} (4c^3 + t^3 - 3t^2c) = 0 \dots \dots (47)$$

Из уравнений (46) и (47) определяем с и Н.

Из уравнения же (46) можем определить ту глубину с, при которой $H=0$, а именно:

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma t^2 + P \sin \varphi}{4\gamma}} \dots \dots (48)$$

Очевидно, это соответствует полному отсутствию силы Н, при чем равновесие всей системы достигается взаимодействием между силой Р и реакциями грунта q.

При постоянном t величина с растет с увеличением силы Р; величине $c=t$ соответствует возможный предел силы Р, которая равна:

$$P = \frac{2\gamma t^2}{\sin \varphi} \dots \dots (49)$$

При дальнейшем увеличении силы Р происходит нарушение равновесия, стойка опрокидывается.

Изгибающий момент в точке О:

$$M = Ph,$$

то же в точке С:

$$c_M = P(h + c) - \frac{2\gamma c^3}{3 \sin \varphi} \quad (50)$$

Совместно с (48) имеем:

$$c_M = \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma t^2}{\sin \varphi} - \frac{5}{6} P \right) \sqrt{\frac{2\gamma t^2 + P \sin \varphi}{\gamma}} - P h \quad (51)$$

По этим моментам производится подбор сечений стойки.

Замечаем, что давления грунта и размеры стойки совершенно не зависят от деформаций, следовательно, в данном случае имеем задачу статически определенную.

§ 15. На этом закончим настоящую статью, оставляя до следующего выпуска самый общий случай стойки, погруженной в связный грунт, при отсутствии горизонтальной опоры. Приведем еще некоторые общие соображения.

С несвязным грунтом приходится иметь дело во всех тех случаях, когда стойки или столбы нижним концом зарываются в землю, при чем подземная часть стойки оказывается окруженной рыхлым, несвязным грунтом. Наоборот, в связном грунте оказываются погруженные в землю сваи, напр., по системе Штрауса; здесь прилегающий к свае грунт не разрыхлен, а следовательно сохраняет свою связность.

В несколько ином положении находятся сваи, забиваемые бабой. Здесь окружающий сваю грунт получает некоторое добавочное уплотнение, повышающее коэффициент податливости грунта, поэтому в данном случае применимы формулы для связного грунта, но с особым для каждого конкретного случая коэффициентом.

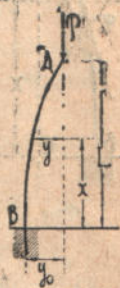
Предложенные нами формулы пригодны также для расчета шпунтовых стенок, а в сочетании с формулами, относящимися к балке на упругом основании, также и для подпорных железобетонных стенок уголкового, таврового и других более сложных сечений.

СТАТЬЯ ОДИННАДЦАТАЯ

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

I. Случай центрального приложения сжимающей силы

§ 1. Положим, что вертикально заделанный нижним концом стержень АВ под действием вертикально приложенной у верхнего конца А сжимающей силы Р находится в равновесии, причем ось его изогнулась по некоторой кривой. Предположим, что кривая изогнутой оси стержня представляет четверть волны косинусоиды с вершиной в В (фиг. 1). Располагая начало системы координат в точке О проекции конца А изогнутого стержня на горизонтальную прямую, проходящую через нижний его конец, направляя ось X по вертикали вверх, а ось Y по горизонтали влево, имеем уравнение косинусоиды в таком виде:



$$y = y_0 \cos \frac{x}{n} \quad (1) \quad \text{Фиг. 1}$$

Здесь y_0 означает отклонение верхнего конца А стержня по горизонтальному направлению от первоначального его положения.

Из уравнения (1) для точки А имеем:

$$y = y_0 \cos \frac{L}{n} = 0,$$

откуда

$$\cos \frac{L}{n} = 0,$$

а это имеет место, если

$$\frac{L}{n} = \frac{(2K+1)\pi}{2},$$

где K есть любое целое число, включая и нуль.

Для $K = 0$ имеем:

$$n = \frac{2L}{\pi} \dots \dots \dots (2)$$

Таким образом уравнение (1) косинусоиды принимает вид:

$$y = y_0 \cos \frac{\pi x}{2L} \dots \dots \dots (3)$$

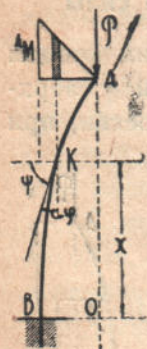
§ 2. При данной форме равновесия стержня АВ сжимающая его сила Р вызывает в нем изгибающие моменты:

$$M = Py \dots \dots \dots (4)$$

Соответствующая этим моментам диаграмма в виде треугольника изображена на фиг. 2.

Подобно тому, как это было (сравн. статья 5-я фиг. 3-я) предложено для арки (см. статья 5-я § 3-й), разбиваем системой вертикальных прямых ось изогнутого стержня и площадь моментной диаграммы на полоски шириной dy . Обозначим углы, образуемые касательной к изогнутой оси стержня:

с осью X — через φ
 „ „ Y — через ψ ,



Фиг. 2

отрезки, на которые разделяется ось изогнутого стержня системой вертикалей, обозначим через ds .

Тогда имеем зависимости:

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cos \varphi \\ dy &= ds \cos \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Каждая полоска моментной диаграммы образует элементарную м. п. нагрузку:

$$dF = \frac{M dy}{EJ_x \cos \psi} \dots \dots \dots (6)$$

Заменяем dy его значением из (5):

$$dF = \frac{M ds}{EJ_x} \dots \dots \dots (7)$$

Замена ds из первого (5) дает нам:

$$dF = \frac{M dx}{EJ_x \cos \varphi} \dots \dots \dots (8)$$

Подставляя затем вместо M его значение из (4), и вместо y из уравнения (3), получаем:

$$dF = \frac{Py_0 \cos \frac{\pi x}{2L}}{EJ_x \cos \varphi} dx \dots \dots \dots (9)$$

и наконец, полагая, что изменяется по закону косинуса, так что $J_x \cos \varphi = J' = \text{Const.}$, имеем:

$$dF = \frac{Py_0 \cos \frac{\pi x}{2L}}{EJ'} dx \dots \dots \dots (10)$$

По Моору прогиб в любой точке K закрепленной одним концом балки равен статическому моменту в этой точке части m . п. нагрузки в пределах от закрепления до точки K .

Применяя это положение к верхнему концу A стержня, получаем зависимость:

$$y_0 = \Delta M_s = \int_0^L dF_1 (L-x) = \int_0^L \frac{Py_0 (L-x) \cos \frac{\pi x}{2L}}{EJ'} dx \dots (11)$$

$$y_0 = \frac{Py_0}{EJ'} \int_0^L (L-x) \cos \frac{\pi x}{2L} dx = \frac{4Py_0 L^2}{EJ' \pi^2} \dots \dots (12)$$

откуда:

$$P = \frac{EJ' \pi^2}{4L^2} \dots \dots \dots (13)$$

Это — формула Эйлера для случая стойки с нижним закрепленным концом и верхним свободным. Для случая же обоих свободных концов формула Эйлера, как известно, имеет вид

$$P = \frac{EJ' \pi^2}{L^2} \dots \dots \dots (14)$$

§ 3. Определим из (13) величину „среднего значения“ момента J' :

$$J' = \frac{4PL^2}{E\pi^2} = J_x \cos \varphi.$$

Это выражение дает возможность определения значений переменного момента инерции стержня при условии, что ось такого под действием силы P изгибается по заданной косинусоиде.

Для определения $\cos \varphi$ определяем $\operatorname{tg} \varphi$, взяв производную от выражения (3); принимая во внимание, что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$, а также имея в виду, что cotg в данном случае отрицательный, а значение момента инерции всегда положительно, имеем:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y_0^2 \pi^2}{4L^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2L}}} \dots \dots \dots (15)$$

а в конечном результате совместно с (14):

$$J_x = \frac{4PL^2}{E\pi^2} \sqrt{1 + \frac{y_0^2 \pi^2}{4L^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2L}} \dots \dots \dots (16)$$

Подставляя сюда все значения x от нуля до L , определяем все значения J_x от $^B J$ для нижнего конца B :

$$^B J = \frac{4PL^2}{E\pi^2} \dots \dots \dots (17)$$

до $^A J$ для верхнего конца A :

$$^A J = \frac{4PL^2}{E\pi^2} \sqrt{1 + \frac{y_0^2 \pi^2}{4L^2}} \dots \dots \dots (18)$$

Смысл формул (16) по (18) таков: если жесткость стержня соответствует упомянутым формулам, то при продольном изгибе ось стержня изгибается по косинусоиде.

Полагая в (18) прогиб y_0 равным нулю, будем иметь под корнем единицу, и тогда

$$^A J = ^B J,$$

что означает постоянство момента инерции по всей длине стержня, когда ось стержня остается прямой.

Сравнивая предложенный здесь вывод формулы Эйлера с нашим методом расчета арки, замечаем большое между ними сходство.

§ 4. Из выражения (16) определяем значение критической силы P в общем случае:

$$P = \frac{E\pi^2 J_x}{4L^2 \sqrt{1 + \frac{y_0^2 \pi^2}{4L^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2L}}} \dots \dots \dots (19)$$

Подставляя сюда значение $x=0$, определяем критическую силу по нижнему сечению стержня:

$$P_P = \frac{\pi^2 E^B J}{4L^2} \dots \dots \dots (20)$$

для $x=L$ имеем:

$$P_P = \frac{E\pi^2 A J}{4L^2 \sqrt{1 + \frac{y_0^2 \pi^2}{4L^2}}} \dots \dots \dots (21)$$

Сравнивая (20) с (21), замечаем, что:

$$P_P < P_P.$$

Полагая в (21) $y_0=0$, получаем:

$$P_P = \frac{E\pi^2 A J}{4L^2} \dots \dots \dots (22)$$

Если в формуле (22) взять $A I = B I$, то она принимает вид:

$$P_P = \frac{E\pi^2 B J}{4L^2} = P_P = \frac{E\pi^2 J}{4L^2} \dots \dots \dots (23)$$

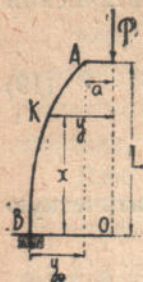
т. е. при одинаковой по всей длине стержня жесткости критическая сила, соответствующая прямолинейной упругой линии стержня, одинакова для всех его сечений.

II. Случай действия сжимающей силы, приложенной с эксцентриситетом

§ 5. Рассмотрим теперь влияние эксцентриситета.

На фиг. 3 стержень АВ, заделанный нижним концом, подвергается действию сжимающей силы P , приложенной вертикально

у верхнего конца с эксцентриситетом a . Положим, что стержень изогнулся по косинусоиде, вершина которой совпадает с B , а точка перегиба расположена на оси X , выше точки A . В таком случае упругая линия стержня AB составляет менее одной четверти волны косинусоиды, сходно с укороченной балкой статьи 9-й.



Фиг. 3

При указанной на фиг. системе координат уравнение изогнутой оси стержня, очевидно, имеет вид:

$$v = (a + y_0) \cos \frac{x}{n} \dots \dots \dots (24)$$

Момент в точке K :

$$^K M = Py = P(a + y_0) \cos \frac{x}{n} \dots \dots \dots (25)$$

Дифференциал м. п. нагрузки:

$$dF_1 = \frac{^K M dx}{EJ'} = \frac{P(a + y_0) \cos \frac{x}{n}}{EJ'} dx \dots \dots \dots (26)$$

Статический момент м. п. нагрузки относительно верхнего конца стержня A , равный горизонтальному прогибу в этой точке:

$$\begin{aligned} y_0 = ^A M_s &= \int_0^L dF_1(L - x) = \int_0^L \frac{P(a + y_0) \cos \frac{x}{n}}{EJ'} (L - x) dx = \\ &= \frac{Py_0 L^2}{EJ' \left(\arccos \frac{a}{a + y_0} \right)^2} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

1) Из уравнения (27) определяется сила P для случая стойки с обоими свободными концами — путем подстановки $\frac{L}{2}$ вместо L :

$$P = \frac{4EJ'}{L^2} \left(\arccos \frac{a}{a + y_0} \right)^2.$$

Это же выражение получено покойным проф. Харьковского Технологического Института В. Э. Тир (см. его замечательную монографию: Метод расчета на продольный изгиб, стр. 123. Наукові записки Харьк. Технологіч. Інституту 1928 г.).

Отсюда получаем:

$$\arccos \frac{a}{a + y_0} = \sqrt{\frac{PL^2}{EJ'}} \dots \dots \dots (28)$$

и наконец

$$y_0 = \frac{a}{\cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ'}}} - a \dots \dots \dots (29)$$

Эта же формула справедлива и для случая стержня длиной l с обоими свободными концами, если в ней положить $L = \frac{l}{2}$, тогда получаем:

$$y_0 = \frac{a}{\cos \sqrt{\frac{Pl^2}{4EJ'}}} - a \dots \dots \dots (30)$$

Полученная нами формула совпадает с выражением (3), данным Müller'ом Breslau на стр. 361-й его труда *Neuere Methoden*, изд. 5-е, но наше выражение соответствует более общему случаю стержня с переменным моментом инерции J_x , изменяющимся по закону:

$$J_x \cos \varphi = J' = \text{const.}$$

§ 6. Освободившись в выражении (29) от знаменателя, получаем:

$$y_0 \cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ'}} = a - a \cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ'}} \dots \dots \dots (31)$$

Полагая здесь $a = 0$, имеем:

$$y_0 \cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ'}} = 0 \dots \dots \dots (32)$$

Очевидно, в этом выражении y_0 отлично от нуля, так как и без эксцентриситета всегда имеются достаточные причины

к образованию поперечного выгиба стержня (неравномерность материала, далекая от идеала конструкция стержня и т. п.). Поэтому для удовлетворения уравнения (32) необходимо, чтобы другой множитель был равен нулю:

$$\cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\frac{PL^2}{EJ}} = \frac{(2K+1)\pi}{2} \dots \dots \dots (33)$$

Полагая $K=0$, имеем:

$$\sqrt{\frac{PL^2}{EJ}} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2},$$

опять та же формула Эйлера.

§ 7. Наибольший поперечный выгиб стержня y_0 , как видно из (29), растет с увеличением силы P . Подставляем в (29) вместо y_0 значение ηy_0 , где η — коэффициент, выражающий отношение наибольшего поперечного выгиба к длине стержня:

$$\eta L = \frac{a}{\cos \sqrt{\frac{PL^2}{EJ}}} - a \dots \dots \dots (34)$$

откуда по разложению косинуса в ряд и после алгебраических переделок получается:

$$P = \frac{2EJ\eta}{L(a + \eta L)} \dots \dots \dots (35)$$

Для случая стойки длиной L с обоими свободными концами формула (35) преобразуется в следующую:

$$P = \frac{8EJ_1\eta}{L(2a + \eta L)} \dots \dots \dots (36)$$

Полагая в формулах (35) и (36) эксцентриситет

$$a = 0,$$

получаем:

$$P = \frac{2EJ'}{L^2} \cdot \dots \dots \dots (35_1)$$

$$P = \frac{8EJ'}{L^2} \cdot \dots \dots \dots (36_1)$$

Эти формулы, сходные с классической формулой Эйлера — (13) и (14), отличаются от них в следующем: вместо $\frac{\pi^2}{4} = 2,467$ в (13) имеем 2 в (35), а вместо $\pi^2 = 9,8696$ в (14) имеем 8 в (36)

Формула (36) совершенно сходна с формулой (15) на странице 363-й цитированного выше труда Müller'a Breslau.

По его мнению, критическая сила, определенная по формуле (15) (его нумерация), стоит в таком же отношении к появлению продольного изгиба, в каком Эйлера сила к разрушению от продольного изгиба.

Таким образом допускаемое напряжение, определенное как часть критической „продольно-изгибающей“ силы, дает нам гарантию не только в отношении разрушения от продольного изгиба, но и от появления самого продольного изгиба.

В отличие от обозначений P_E , принятого для Эйлеровой силы, предлагаем для критической силы по Müller'y Breslau — обозначение $^m P$.

§ 8. Из формул (17) и (18) с очевидностью следует, что косинусоида в качестве упругой линии не соответствует постоянной по всей длине стержня жесткости; только при отсутствии эксцентриситета и при нулевом выгибе имеет место такое соответствие, поскольку прямая является предельной формой косинусоиды, но в этом случае, в сущности, нет и продольного изгиба.

Постоянной жесткости соответствует кривая упругой линии, хотя и близкая к косинусоиде, но несколько от нее отличная.

Оставляя дальнейшее исследование проблемы продольного изгиба до следующего выпуска, заканчиваем на этом и данную статью, и второй выпуск.

...

- (1) ...
- (2) ...
- (3) ...
- (4) ...
- (5) ...

...

...

...

ПРИЛОЖЕНИЯ

PLATE I

THEYKORNI

ТАБЛИЦА 1а ЗНАЧЕНИЙ:

$$k = 2 \left(\frac{1 - 1,5 \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}}{1 - \frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}} \right)$$

$\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$	k	$\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$	k	$\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$	k	$\frac{a_{n-1}}{l_{n-1}}$	k
0,000	2,000	0,085	1,907	0,170	1,795	0,255	1,658
0,005	1,995	0,090	1,901	0,175	1,788	0,260	1,649
0,010	1,990	0,095	1,895	0,180	1,780	0,265	1,639
0,015	1,985	0,100	1,889	0,185	1,773	0,270	1,630
0,020	1,980	0,105	1,883	0,190	1,765	0,275	1,621
0,025	1,974	0,110	1,876	0,195	1,758	0,280	1,611
0,030	1,969	0,115	1,870	0,200	1,750	0,285	1,601
0,035	1,964	0,120	1,864	0,205	1,742	0,290	1,592
0,040	1,958	0,125	1,857	0,210	1,734	0,295	1,582
0,045	1,953	0,130	1,851	0,215	1,726	0,300	1,571
0,050	1,947	0,135	1,844	0,220	1,718	0,305	1,561
0,055	1,942	0,140	1,837	0,225	1,710	0,310	1,551
0,060	1,936	0,145	1,830	0,230	1,701	0,315	1,540
0,065	1,930	0,150	1,824	0,235	1,693	0,320	1,529
0,070	1,925	0,155	1,817	0,240	1,684	0,325	1,518
0,075	1,919	0,160	1,810	0,245	1,676	0,330	1,507
0,080	1,913	0,165	1,802	0,250	1,667	$\frac{1}{3}$	1,500

Приложение F

ТАБЛИЦА III ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ:

$$\left(1 - 1,5 \frac{b_m}{I_m}\right) \left(1 - \frac{a_n}{I_n}\right)$$

$$\left(1 - 1,5 \frac{a_n}{I_n}\right) \left(1 - \frac{b_m}{I_m}\right)$$

$\frac{a_n}{I_n} \backslash \frac{b_m}{I_m}$	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,33
0	1,000	1,010	1,021	1,033	1,045	1,059	1,073	1,089	1,105	1,123	1,143	1,164	1,187	1,213	1,242	1,272	1,308	1,326
0,02	0,998	1,000	1,007	1,022	1,035	1,048	1,062	1,077	1,094	1,112	1,131	1,152	1,175	1,201	1,229	1,260	1,295	1,313
0,04	0,980	0,989	1,000	1,011	1,024	1,037	1,051	1,066	1,082	1,099	1,119	1,140	1,163	1,187	1,216	1,246	1,280	1,300
0,06	0,968	0,978	0,989	1,000	1,012	1,025	1,039	1,054	1,071	1,087	1,106	1,127	1,149	1,136	1,202	1,232	1,266	1,281
0,08	0,956	0,966	0,977	0,988	1,000	1,013	1,027	1,041	1,057	1,074	1,093	1,133	1,136	1,160	1,187	1,217	1,251	1,269
0,10	0,944	0,956	0,966	0,976	0,987	1,000	1,014	1,028	1,044	1,061	1,079	1,100	1,121	1,146	1,172	1,202	1,235	1,253
0,12	0,933	0,941	0,953	0,963	0,974	0,987	1,000	1,014	1,030	1,047	1,065	1,085	1,095	1,130	1,156	1,186	1,219	1,236
0,14	0,919	0,928	0,938	0,949	0,960	0,973	0,986	1,000	1,015	1,032	1,050	1,069	1,091	1,114	1,140	1,169	1,202	1,219
0,16	0,905	0,914	0,924	0,934	0,946	0,958	0,971	0,985	1,000	1,016	1,034	1,053	1,074	1,098	1,123	1,151	1,183	1,200
0,18	0,890	0,900	0,909	0,920	0,931	0,943	0,955	0,969	0,984	1,000	1,014	1,036	1,057	1,080	1,105	1,133	1,164	1,181
0,20	0,875	0,884	0,894	0,904	0,915	0,926	0,937	0,953	0,967	0,983	1,000	1,019	1,039	1,066	1,086	1,114	1,144	1,161
0,22	0,859	0,868	0,877	0,887	0,898	0,907	0,922	0,935	0,949	0,965	0,982	1,000	1,021	1,042	1,066	1,093	1,123	1,152
0,24	0,842	0,851	0,860	0,870	0,880	0,892	0,904	0,917	0,931	0,946	0,962	0,980	1,000	1,022	1,045	1,072	1,101	1,117
0,26	0,824	0,833	0,842	0,853	0,862	0,873	0,885	0,897	0,911	0,926	0,942	0,960	0,979	1,000	1,023	1,049	1,078	1,094
0,28	0,806	0,814	0,823	0,832	0,842	0,853	0,865	0,877	0,890	0,905	0,920	0,938	0,957	0,977	1,000	1,025	1,053	1,069
0,30	0,781	0,794	0,802	0,812	0,821	0,832	0,843	0,855	0,869	0,883	0,898	0,915	0,933	0,953	0,975	1,000	1,027	1,042
0,32	0,764	0,772	0,781	0,790	0,798	0,810	0,821	0,833	0,845	0,859	0,874	0,890	0,908	0,928	0,949	0,973	1,000	1,015
0,33	0,754	0,762	0,770	0,778	0,788	0,798	0,809	0,820	0,833	0,842	0,861	0,878	0,895	0,914	0,936	0,959	0,986	1,000

Приложение G

ТАБЛИЦА IV ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ:

$$\mu = \frac{1}{1 + 1,05 \frac{G_1}{G_2}}$$

$\frac{G_1}{G_2}$	μ	$\frac{G_1}{G_2}$	μ	$\frac{G_1}{G_2}$	μ
0	1,000	60	0,615	2,40	0,285
0,02	0,979	65	0,596	2,60	0,269
04	0,960	70	0,578	2,80	0,252
06	0,941	75	0,561	3,00	0,242
08	0,923	80	0,545		
10	0,905	85	0,530	3,25	0,228
		90	0,515	3,50	0,215
12	0,885	95	0,582	3,75	0,203
14	0,872	1,00	0,489	4,00	0,193
16	0,857				
18	0,842	1,10	0,465	4,25	0,184
20	0,827	1,20	0,444	4,50	0,175
		1,30	0,424	5,00	0,164
22	0,813	1,40	0,406		
25	0,793	1,50	0,389	5,50	0,148
30	0,761	1,60	0,374	6,00	0,138
35	0,732	1,70	0,360	6,50	0,128
40	0,705	1,80	0,347	7,00	0,120
45	0,680	1,90	0,335	7,50	0,113
50	0,657	2,00	0,324	8,00	0,107
				9,00	0,096
55	0,635	2,20	0,303	10,00	0,095

Приложение К

ТАБЛИЦА VII ЗНАЧЕНИЙ:

$$e_n = \frac{1}{I_n} \left[1 - \lambda_n^2 (1 - \nu_n) \right]$$

$$I_n = \frac{1}{3} \left[1 - \lambda_n (1 - \nu_n) \right]$$

λ_n ν_n	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	λ_n ν
1	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	1
0,95	0,333	0,333	0,334	0,334	0,335	0,335	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,336	0,95
0,90	0,333	0,334	0,335	0,336	0,337	0,338	0,339	0,339	0,339	0,339	0,340	0,340	0,340	0,340	0,340	0,340	0,340	0,90
0,85	0,334	0,335	0,336	0,337	0,338	0,339	0,340	0,341	0,341	0,341	0,342	0,343	0,343	0,343	0,343	0,343	0,344	0,85
0,80	0,335	0,336	0,337	0,338	0,340	0,341	0,342	0,342	0,343	0,344	0,345	0,346	0,347	0,347	0,347	0,348	0,348	0,80
0,75	0,335	0,336	0,338	0,339	0,341	0,342	0,343	0,344	0,346	0,347	0,348	0,349	0,350	0,351	0,351	0,352	0,352	0,75
0,70	0,335	0,337	0,339	0,341	0,343	0,344	0,345	0,347	0,349	0,350	0,351	0,352	0,354	0,354	0,355	0,355	0,356	0,70
0,65	0,336	0,337	0,340	0,342	0,344	0,346	0,347	0,349	0,352	0,353	0,354	0,355	0,357	0,358	0,359	0,360	0,361	0,65
0,60	0,336	0,338	0,341	0,343	0,346	0,348	0,350	0,352	0,355	0,356	0,358	0,359	0,361	0,362	0,363	0,364	0,366	0,60
0,55	0,336	0,339	0,342	0,344	0,348	0,350	0,352	0,354	0,357	0,359	0,361	0,363	0,365	0,367	0,369	0,370	0,371	0,55
0,50	0,337	0,340	0,343	0,346	0,350	0,352	0,355	0,357	0,360	0,362	0,365	0,367	0,370	0,372	0,375	0,376	0,377	0,50
0,45	0,337	0,340	0,344	0,347	0,351	0,354	0,357	0,360	0,363	0,365	0,368	0,371	0,374	0,376	0,379	0,381	0,382	0,45
0,40	0,337	0,341	0,345	0,349	0,353	0,356	0,359	0,363	0,367	0,369	0,372	0,375	0,378	0,381	0,384	0,386	0,388	0,40
0,35	0,337	0,342	0,346	0,350	0,354	0,358	0,362	0,366	0,370	0,373	0,376	0,379	0,382	0,386	0,389	0,391	0,394	0,35
0,30	0,338	0,343	0,347	0,351	0,356	0,360	0,365	0,369	0,374	0,377	0,380	0,383	0,387	0,391	0,395	0,397	0,400	0,30
0,25	0,338	0,343	0,348	0,353	0,358	0,362	0,367	0,372	0,377	0,380	0,383	0,387	0,391	0,396	0,400	0,403	0,406	0,25
0,20	0,338	0,344	0,349	0,354	0,360	0,365	0,370	0,375	0,380	0,383	0,387	0,391	0,396	0,401	0,406	0,409	0,413	0,20
0,15	0,338	0,344	0,350	0,355	0,361	0,366	0,372	0,377	0,383	0,387	0,391	0,396	0,401	0,407	0,413	0,416	0,420	0,15
0,10	0,339	0,345	0,351	0,356	0,362	0,368	0,375	0,380	0,386	0,391	0,396	0,401	0,406	0,413	0,420	0,423	0,426	0,10
0,05	0,339	0,346	0,352	0,357	0,363	0,370	0,377	0,384	0,391	0,395	0,400	0,406	0,412	0,419	0,426	0,431	0,436	0,05
λ_n ν_n	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	λ_n

Приложение L

ТАБЛИЦА IX

ξ	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65
$\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$	∞	1,602	1,147	0,949	0,833	0,755	0,700	0,658
$\frac{\arccos \xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}$	0,50	0,508	0,516	0,525	0,536	0,546	0,557	0,568
ξ	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	
$\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$	0,625	0,600	0,577	0,565	0,546	0,534	0,524	
$\frac{\arccos \xi}{2\sqrt{1-\xi^2}}$	0,580	0,592	0,605	0,618	0,632	0,648	0,664	

ОГЛАВЛЕНИЕ 2-ГО ВЫПУСКА

	Стр.
Предисловие	3
<i>Статья четвертая</i>	
Многоярусная рама	
Определение простых фокусов	5
<i>Статья пятая</i>	
Параболическая двухшарнирная арка	
I. Определение распора H без учета нормальных усилий	26
II. Определение распора H с учетом нормальных усилий и равномерного нагревания арки	35
III. Определение распора H для случая равномерно-распределенной нагрузки	38
IV. Линия влияния для распора H	39
<i>Статья шестая</i>	
Параболическая бесшарнирная арка	
I. Определение распора H и опорных моментов — без учета нормальных усилий	40
II. Определение распора H и опорных моментов — с учетом нормальных усилий	54
III. Учет влияния равномерного нагревания арки на распор H	57
IV. Линия влияния для распора H и опорных моментов M	58
V. Определение распора H и опорных моментов M для различных видов распределенной нагрузки	59
VI. Графо-аналитический прием	67
VII. Применение метода к криволинейным стержням рамы	70
<i>Статья седьмая</i>	
Методы проверки расчетов статически неопределимых систем	72
<i>Статья восьмая</i>	
Дальнейшие упрощения расчета неразрезных балок с переменной жесткостью	78

Статья девятая

Балка на сплошном упругом основании

	Стр.
I. Случай нагрузки сосредоточенным грузом посредине длины балки:	
а) „Полномерная“ балка	82
б) „Укороченная“ балка	93
II. Случай равномерно - распределенной и симметрично - распределенной нагрузки на балках: полномерной и укороченной	96
III. Случай несимметрично - расположенного сосредоточенного груза на балках: полномерной и укороченной	98
IV. Случай нагрузки двумя равными сосредоточенными грузами по концам балки	103
V. Случай нагрузки двумя неравными сосредоточенными грузами по концам укороченной балки	107
VI. Случай нагрузки двумя неравными сосредоточенными грузами при условии сохранения горизонтального положения касательными под грузами	111
VII. Упругая линия балки в виде параболы	115
VIII. Соображения о наиболее рациональных формах балки и видов кривых упругой линии	119

Статья десятая

Стойка, закрепленная нижним концом в земле

I. Случай стойки, снабженной на уровне земли горизонтальной опорой:	
а) „полномерной“	122
б) „укороченной“	126
II. Случай стойки, снабженной горизонтальной опорой, расположенной ниже уровня земли	132

Статья одиннадцатая

Продольный изгиб

I. Случай центрального приложения сжимающей силы	135
II. Случай действия сжимающей силы, приложенной с эксцентриситетом	139

Приложения

Ia. Таблица для определения положения простых фокусов	147
F. Таблица III для определения значений: $\frac{(1 - 1,5 \frac{b_m}{l_m})(1 - \frac{a_n}{l_n})}{(1 - 1,5 \frac{a_n}{b_n})(1 - \frac{b_m}{l_m})}$	148
G. Таблица IV приближенных значений ρ	149
I. Таблица VI для ординат линий влияния распора N и опорных моментов M	150
J. Таблица VII значений $\frac{e_n}{l_n}$	151
L. Таблица IX для ординат линий влияния	152

ОПЕЧАТКИ

ВО ВТОРОМ ВЫПУСКЕ

Стр. 9: фиг. 6—пропущены буквы А и В у верхних узлов.

„ 13: в равенствах (23) отбросить знак минус, так как равенства относятся к абсолютным значениям м. п. реакций Q.

Стр. 14: форм. (26) должна быть: $\frac{A}{\Pi} \mu^B_3 +$ и т. д.

„ 14: в строке 5-й сверху д. б.: „Замечание в § 5 о закономерности составления выражений для μ справедливо“ и т. д.

Стр. 33: в формуле (22) индекс у М в знаменателе д. б. С.

„ 37: в строке 10-й снизу д. б. Δ_1 .

„ 40: в строке 15-й снизу д. б.: „от нагрузки преобразованными моментными площадями“ и т. д.

Стр. 46: формула (18)—во втором члене в числителе д. б. $(1-x)$, вместо $(1-a)$.

Стр. 47. строка 7-я сверху: вместо „вертикали“ д. б. „горизонтالي“.

„ 49: в формуле (34) д. б. $-\frac{dx}{\cos \varphi}$.

„ 52: в строке 1-й сверху д. б. $^A M$ (фиг. 9).

„ 52: в формуле (42) под знаком интеграла д. б. dx , вместо ds .

„ 54: в формуле (47) в знаменателе вместо f должно быть l .

„ 54: в формуле (48) в последнем члене пропущены $\frac{15}{4}$.

„ 56: в строке 13 снизу вместо $\frac{HI}{EI}$ должно быть $\frac{HI}{EF}$.

„ 58: в формуле (70) вместо минуса д. б. знак равенства.

„ 59: в строке 6-й сверху— вместо f_x должно быть F_x .

„ 66: в формуле (110) пропущены знаменатели, д. б. $\frac{q^2}{8f_1} - \frac{65q^2}{768f_1}$.

„ 69: в таблице в строке 4-й снизу перед 0,0625 д. б. знак минус.

„ 70: в таблице в строке 2-й сверху перед 0,1364 и 0,2188 д. б. знаки минус.

„ 70: в строке 7-й сверху— вместо „пролетарки“ д. б. „пролета арки“.

„ 79: в строке 4-й сверху— вместо $y < 0,25$ д. б. $v < 0,25$.

Стр. 83: фиг. 2-я—пропущены буквы А и В по концам балки и y_0 — ордината под грузом Р.

„ 86: фиг. 3 — пропущена буква В у конца балки.

„ 90: в формуле (17) вместо $\sin \frac{2 \Delta x}{2n}$ д. б. $\sin^2 \left(\frac{\Delta x}{2n} \right)$.

„ 90: в формуле (18) д. б. $\left(\frac{x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1}}{4n} \right)$.

„ 100: в формулах на строках 5-й и 7-й снизу y_0 означает ординату грузовой диаграммы, а не индекс.

Стр. 106: в формуле (60) в числителе дроби перед квадратной скобкой исключить η .

Стр. 110: в строке 1-й снизу: числитель в скобках д. б. $2L^2 P$ вместо $2L^{\text{II}} P$.

Стр. 112: в строке 12-й сверху: после слова „активных“ должно быть: „и реактивных“.

Стр. 114: в строке 10-й сверху: — $[^0 M (^2 Q) - ^2 Q c$.

„ 115: в формуле (100) второй член в квадратных скобках д. б.:

$$2^n n^2 \sin^2 \left(\frac{c}{2^n n} \right).$$

„ 115: в формуле (101) выражение в квадратных скобках д. б.:

$$\left[2^n n^2 \sin^2 \left(\frac{\pi \varphi}{4^n n} - \frac{c}{2^n n} \right) - n \left(\frac{\pi \varphi}{2} - c \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \varphi}{2^n n} - \frac{c}{n} \right) \right].$$

„ 115: в строке 8-й сверху д. б. ω_3 .

„ 125: „ формуле (15) д. б. \int_0^t и т. д.

„ 127: „ „ (23) д. б. $C_x y dx$.

„ 130: „ „ (39) „ „ \int_a^t .

„ 130: „ „ (40) „ „ $\left\{ \frac{4\gamma t^3}{3 \sin \varphi} \right.$

„ 131: „ „ (41) „ „ $\left. \right\}$

„ 131: „ „ (42) „ „ $\sqrt[3]{\frac{3Ph \sin \varphi}{4\gamma}}$.

„ 131: „ „ (43) „ „ $H = P + \sqrt[3]{\frac{9P^2 h^2 \gamma}{2 \sin \varphi}}$.

„ 137: в строке 6-й сверху д. б. „полагая, что момент инерции“.

„ 143: в строках 6 и 7 сверху д. б. (35₁) и (36₁).

В ПЕРВОМ ВЫПУСКЕ

Стр. 12-я: в строке 8-й сверху напечатано „нагрузка“, д. б. „нагрузки“.

Стр. 13: в формуле (9) д. б. MUG_{n-1} .

„ 14: в строке 8-й снизу перед первым членом д. б. знак минус.

„ 15: „ „ 12-й сверху перед Q_{n-1}^{π} д. б. знак минус.

„ 18: „ „ 2-й снизу вместо Q_n^{π} должно быть Q_n^{λ} .

„ 20: „ „ 1-й снизу вместо R_2^{π} должно быть R_2^{λ} .

„ 32: на фигуре 21а вместо X_n должно быть X_n^{λ} .

„ 34: „ „ 22 верхней направления всех м. п. сил должны быть обратные показанным.

Стр. 34: в формуле (45) перед скобкой д. б. F_{n-1}^{λ} .

„ 35: „ „ (48) вместо Q_n^{π} должно быть Q_n^{λ} и перед скобкой F_n^{λ} вместо F_n^{π} .

Стр. 35: в формуле (49) в правой части знаки д. б. обратные.

„ 37: „ „ (52) знаки перед отношениями $\frac{{}^1F_{n-1}}{{}^1F_n}$ д. б. обратные показанным.

Стр. 37: в формуле (53) и в выражении K в знаменателе перед вторым членом д. б. минус.

Стр. 38: в формуле (56) перед вторым членом д. б. плюс.

„ 38: „ „ (59) в знаменателе должно быть I_n^f .

„ 39: „ „ (62) в знаменателе дроби перед квадратной скобкой д. б. I_n^f вместо I_n^s .

Стр. 40: формула (65) в конечном виде должна быть такова:

$$\frac{1_n}{3} \cdot \frac{[1 - \lambda_n^2(1 - \nu_n)]}{[1 - \lambda_n(1 - \nu_n)]},$$

а формула (66):

$$\frac{1_{n-1}}{3} \frac{[1 - \lambda_{n-1}^2(1 - \nu_{n-1})]}{[1 - \lambda_{n-1}(1 - \nu_{n-1})]}.$$

Стр. 69: на фиг. 52 пропущены буквы А и В на вертикалях через Л и П и горизонтальные прямые АС и ВD.

Стр. 83: строка 1 снизу — напечатано $F_1^П$ д. б. $F_1^П$.

„ 85: на фиг. 11 пропущено В у верхнего узла рамы.

„ 110: обозначение (182) относится к последним трем формулам на странице, охваченным скобкой.

Стр. 112 и 116-я: фиг. 39, 40, 41—некоторые числовые значения моментов приведены неточно, правильные значения см. в тексте.

Стр. 114: в строке 7-й сверху в знаменателе дроби, находящейся в числителе, напечатано bb_1 , следует только b_1 .

