

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

Кафедра технології будівельних виробів
і матеріалознавства

03-09-131М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни
**«Аналіз будівельно-технологічних задач та методи їх
оптимального рішення»**

для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Технології будівельних
конструкцій, виробів і матеріалів»
спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
всіх форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою з
якості ННІБА
Протокол № 2 від 05.11.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з навчальної дисципліни «Аналіз будівельно-технологічних задач та методи їх оптимального рішення» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Технології будівельних конструкцій, виробів і матеріалів» спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» всіх форм навчання. [Електронне видання] / Бордюженко О. М. – Рівне : НУВГП, 2024 – 28 с.

Укладач: Бордюженко О. М., к.т.н, доцент, доцент кафедри технології будівельних виробів і матеріалознавства.

Відповідальний за випуск: Дворкін Л. Й., проф., д.т.н., завідувач кафедри технології будівельних виробів і матеріалознавства.

Керівник групи забезпечення ОП: Дворкін Л. Й.

Зміст

1. Загальні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни	4
2. Завдання та рекомендації до виконання індивідуальної розрахункової роботи	5
2.1. Загальні вимоги до оформлення роботи.....	5
2.2. Завдання на ІРР	6
3. Приклади вирішення задач	12
3.1. Транспортна задача	12
3.2. Задача побудови математичної моделі за результатами експерименту	19
4. Теми рефератів для самостійної роботи.....	25
5. Рекомендована література	28

1. Загальні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни

"Аналіз будівельно-технологічних задач та методи їх оптимального рішення"

Сучасний системний аналіз – прикладна наука, яка орієнтована на виявлення причин реальних труднощів, які виникають перед "власником проблеми" (звичайно – це конкретна організація, установа, підприємство, колектив) та на формування варіантів їх усунення.

Аналіз будівельно-технологічних задач – сукупність методологічних засобів, які використовуються для підготовки та обґрунтування рішень із складних проблем будівельно-технологічного характеру. Основою є системний підхід та ряд методів математичних дисциплін і сучасної теорії управління.

Більшу частину часу, відведеного навчальним планом на вивчення дисципліни, передбачено для виконання самостійної роботи. Повноцінне засвоєння теоретичного матеріалу неможливе без його обговорення та розв'язування задач на практичних заняттях, тому окремі теми розглядаються на передбачених планом аудиторних практичних заняттях. В той же час, у зв'язку з недостатністю аудиторного часу для повного охоплення всіх тем дисципліни, самостійна робота набуває особливо важливого значення.

Самостійна робота включає такі види діяльності:

- 1) поглиблене вивчення програмного матеріалу, викладеного на лекційних заняттях, за конспектами лекцій, підручниками та посібниками;
- 2) самостійне вивчення за підручниками та навчальними посібниками розділів програми, не включених у лекційний курс;
- 3) самостійне розв'язання задач за відповідними розділами дисципліни;
- 4) виконання студентами індивідуальної розрахункової роботи протягом семестру під керівництвом і контролем викладача.
- 5) підготовка реферату на певну тему, серед запропонованих, або вибрану самостійно і погоджену з викладачем.

Короткі теоретичні відомості дисципліни викладені в навчальному посібнику [1].

Після вивчення відповідного розділу програми за конспектом лекцій та рекомендованою літературою, необхідно, в першу чергу, дати відповіді на "Питання та вправи для самоконтролю", наведені в кінці кожної теми [1].

Перш ніж приступати до самостійного вирішення задач за кожною із тем, необхідно глибоко засвоїти теоретичний матеріал та зрозуміти зв'язок з іншими темами дисципліни.

Із наведених видів самостійної роботи дві останні підлягають оцінюванню в балах і вимагають відповідної форми звітності. Особливості цих видів роботи та рекомендовані завдання наведені далі.

2. Завдання та рекомендації до виконання індивідуальної розрахункової роботи

2.1. Загальні вимоги до оформлення роботи

Індивідуальна розрахункова робота (ІРР) оформляється у вигляді зброшурованого звіту на стандартних аркушах формату А4. Розв'язок завдань наводиться з однієї сторони аркушів рукописним способом або за допомогою друкарських пристроїв.

Кожне завдання розпочинається з його назви, а також вихідних даних, записаних у повному обсязі. Кожне наступне завдання необхідно розпочинати з нового аркушу. При вирішенні завдань слід звернути увагу на обов'язкове коротке пояснення основних розрахункових дій. Завдання необхідно завершувати техніко-економічним висновком (поясненням) одержаних результатів. У випадку відсутності розв'язку (або єдиного розв'язку) необхідно обґрунтувати причини такого явища.

В задачі математичного планування експерименту, окрім побудови власне математичної моделі у вигляді рівняння регресії та перевірки її адекватності, необхідно дати аналіз отриманої моделі, бажано з використанням графічних залежностей (однофакторний та ізопараметричний аналіз).

При використанні літературних джерел, в кінці роботи подається їх перелік.

Робота повинна бути виконана згідно з варіантом завдання, призначеного викладачем. На титульній сторінці необхідно вказати

назву вищого навчального закладу, кафедру, тему самостійної роботи, прізвище, ім'я та по батькові студента, номер варіанта, а також посаду, прізвище та ініціали викладача, який перевіряє та приймає індивідуальну роботу.

Студент, що виконав роботу не за варіантом, а також не у відповідності до зазначених вимог, не допускається до її захисту.

ІРР оцінюється згідно з критеріями, що описані в силабусі навчальної дисципліни.

2.2. Завдання на ІРР

Завдання І. Задача лінійного програмування*

І.1. Задача використання ресурсів

Для виготовлення різних виробів A , B і C підприємство використовує три різних види сировини (І, ІІ і ІІІ). Норми витрати сировини на виробництво одного виробу, ціна одного виробу A , B і C , а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб			Загальна кількість сировини, кг
	A	B	C	
І	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
ІІ	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
ІІІ	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3
Ціна одного виробу, у.о.	c_1	c_2	c_3	–

Вироби A , B і C можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях, але виробництво обмежене виділеною підприємству сировиною кожного виду.

Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною.

* Кожен студент виконує лише одне завдання (або І.1 або І.2) залежно від варіанта.

1.2. Задача про комплексне використання сировини

На деревообробному підприємстві із стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількостях відповідно рівних b_1 ; b_2 і b_3 . Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість заготовок, що можна отримати при даному способі різання, наведено в табл. 2. В ній також вказана кількість відходів, що отримується при даному способі різання одного листа фанери.

Таблиця 2

Вид заготовки	Кількість заготовок (шт.) при способі розрізання	
	1	2
I	a_{11}	a_{12}
II	a_{21}	a_{22}
III	a_{31}	a_{32}
Кількість відходів різання, см ²	c_1	c_2

Визначити скільки листів фанери і за яким способом необхідно розрізати так, щоб було отримано не менше необхідної кількості заготовок при мінімальних відходах.

Дані для заповнення табл. 1 або 2 необхідно приймати відповідно із варіантом завдання (табл. 3), який призначається викладачем.

Таблиця 3

Вихідні дані до завдання I

Ва- ріант	Вид за- дачі	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
		b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	–	–	–
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	I.1	18	15	12	6	4	8	5	3	3
		360	192	180	9	10	16	–	–	–
2	I.2	2	6	–	5	4	–	2	3	–
		24	31	18	12	16	–	–	–	–
3	I.1	20	10	18	15	2	2	1	9	3
		450	110	159	5	15	3	–	–	–

продовження табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	I.2	4	5	–	2	1	–	7	6	–
		32	12	54	5	14	–	–	–	–

5	I.1	7	5	11	10	6	0	0	4	15
		200	50	200	8	12	14	–	–	–
6	I.2	0	2	–	2	5	–	3	1	–
		7	25	16	27	8	–	–	–	–
7	I.1	1	6	0	8	3	4	5	6	2
		25	60	96	10	5	3	–	–	–
8	I.2	1	2	–	3	7	–	3	1	–
		15	42	22	10	19	–	–	–	–
9	I.1	25	17	22	4	1	5	12	11	5
		590	44	170	22	3	8	–	–	–
10	I.2	5	2	–	9	6	–	4	6	–
		21	86	80	10	6	–	–	–	–
11	I.1	8	12	15	17	5	1	5	10	5
		710	620	211	5	6	16	–	–	–
12	I.2	1	4	–	0	2	–	3	1	–
		8	7	6	21	13	–	–	–	–
13	I.1	0	5	6	8	4	3	1	3	2
		58	67	34	7	18	12	–	–	–
14	I.2	5	2	–	7	6	–	0	5	–
		34	100	25	9	17	–	–	–	–
15	I.1	16	4	11	5	1	2	4	5	10
		295	88	300	15	10	4	–	–	–
16	I.2	2	3	–	1	5	–	4	1	–
		18	30	20	5	15	–	–	–	–
17	I.1	2	14	5	0	6	9	6	0	11
		140	100	355	16	22	10	–	–	–
18	I.2	10	5	–	6	3	–	6	7	–
		90	105	82	14	9	–	–	–	–
19	I.1	12	5	17	2	3	4	2	10	7
		500	47	180	2	10	6	–	–	–
20	I.2	6	3	–	4	9	–	6	1	–
		20	41	16	12	23	–	–	–	–
21	I.1	20	8	16	7	3	11	4	1	9
		115	90	200	12	25	5	–	–	–

продовження табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	I.2	7	2	–	5	5	–	3	4	–
		38	17	44	13	29	–	–	–	–

23	I.1	5	9	9	8	16	5	3	10	1
		80	165	220	5	15	18	–	–	–
24	I.2	2	9	–	3	7	–	5	9	–
		29	33	23	46	9	–	–	–	–
25	I.1	14	13	5	7	7	5	10	12	6
		350	188	200	7	20	22	–	–	–
26	I.2	5	5	–	3	1	–	2	7	–
		40	12	27	14	35	–	–	–	–

Завдання II. Транспортна задача

Для будівництва n об'єктів B_1, \dots, B_n використовується цегла, що виготовляється на m заводах A_1, \dots, A_m . Щоденно кожен із заводів може виготовляти a_1, \dots, a_m ум.од. цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному із будівельних об'єктів відповідно рівні b_1, \dots, b_n . Тарифи перевезень 1 ум.од. цегли від кожного із заводів до кожного з об'єктів (год) задаються матрицею $T(m, n)$.

Скласти такий план перевезень цегли до будівельних об'єктів, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною.

Вихідні дані до задачі приймаються відповідно до варіанта і наведені у нижче зображених матрицях.

$$1. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 30 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 50 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 40 \\ b_j & 15 & 15 & 40 & 30 \end{array}$$

$$2. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 40 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 30 \\ 5 & 7 & 5 & 1 & 20 \\ b_j & 30 & 25 & 18 & 20 \end{array}$$

$$3. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 60 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 65 \\ 5 & 4 & 1 & 5 & 70 \\ b_j & 40 & 65 & 70 & 25 \end{array}$$

$$4. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 30 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 20 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 40 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 50 \\ b_j & 35 & 20 & 55 & 30 \end{array}$$

$$5. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 8 & 40 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 & 30 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 35 \\ b_j & 20 & 34 & 16 & 10 & 15 \end{array}$$

$$6. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 3 & 9 & 7 & 20 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 16 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 14 \\ 4 & 5 & 8 & 1 & 11 \\ b_j & 16 & 18 & 12 & 15 \end{array}$$

$$7. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 9 & 7 & 2 & 30 \\ 3 & 1 & 5 & 5 & 40 \\ 6 & 8 & 3 & 4 & 70 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 60 \\ b_j & 35 & 80 & 25 & 70 \end{array}$$

$$8. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 3 & 3 & 8 & 10 \\ 8 & 6 & 2 & 6 & 20 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 35 \\ 5 & 2 & 4 & 5 & 45 \\ b_j & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array}$$

$$9. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 20 \\ 8 & 4 & 2 & 6 & 20 \\ 7 & 4 & 3 & 9 & 40 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 45 \\ b_j & 25 & 30 & 40 & 15 \end{array}$$

$$10. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 130 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 & 50 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 & 40 \\ b_j & 110 & 30 & 50 & 80 & 90 \end{array}$$

$$11. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 45 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 35 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 70 \\ b_j & 20 & 60 & 55 & 45 \end{array}$$

$$12. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 2 & 9 & 7 & 60 \\ 3 & 40 & 15 & 5 & 55 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 40 \\ 24 & 3 & 3 & 1 & 35 \\ b_j & 70 & 5 & 45 & 70 \end{array}$$

$$13. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 4 & 5 & 5 & 7 & 100 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 120 \\ 9 & 6 & 4 & 5 & 150 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 130 \\ b_j & 140 & 130 & 90 & 140 \end{array}$$

$$14. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 30 \\ 9 & 4 & 5 & 7 & 70 \\ 5 & 7 & 6 & 2 & 50 \\ b_j & 10 & 40 & 20 & 60 \end{array}$$

$$15. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 40 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 30 \\ 6 & 3 & 5 & 3 & 50 \\ b_j & 20 & 18 & 44 & 75 \end{array}$$

$$16. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 6 & 5 & 4 & 10 & 50 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 20 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 55 \\ 8 & 6 & 3 & 3 & 35 \\ b_j & 30 & 45 & 25 & 48 \end{array}$$

$$17. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 9 & 55 \\ 5 & 1 & 4 & 8 & 3 & 35 \\ 3 & 4 & 4 & 10 & 2 & 45 \\ b_j & 16 & 40 & 15 & 34 & 25 \end{array}$$

$$18. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 50 \\ 5 & 2 & 7 & 5 & 20 \\ 6 & 4 & 8 & 2 & 30 \\ 7 & 1 & 5 & 7 & 20 \\ b_j & 40 & 30 & 35 & 15 \end{array}$$

$$19. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 6 & 10 & 8 & 3 & 2 & 30 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 5 & 65 \\ 3 & 9 & 5 & 5 & 6 & 25 \\ b_j & 17 & 25 & 15 & 13 & 35 \end{array}$$

$$20. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 5 & 2 & 6 & 6 & 25 \\ 1 & 4 & 9 & 7 & 25 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 60 \\ b_j & 28 & 45 & 18 & 30 \end{array}$$

$$21. T = \begin{array}{cccc|c} & & & & a_i \\ 4 & 8 & 2 & 3 & 20 \\ 4 & 7 & 7 & 1 & 60 \\ 5 & 3 & 4 & 9 & 50 \\ b_j & 25 & 15 & 30 & 40 \end{array}$$

Завдання III. Задача математичного планування експерименту

Побудувати математичну модель (у вигляді повного квадратичного рівняння регресії) вихідного параметру Y залежно від факторів X_1 та X_2 відповідно до заданих вихідних умов (табл. 4, 5).

На основі побудованої моделі провести аналіз індивідуального та спільного впливу факторів на вихідний параметр.

Таблиця 4

Умови планування експерименту

Фактори		Рівні варіювання			Інтервал варіювання
натуральний вид	кодований вид	-1	0	+1	
X_1 , ум.од.	x_1	20	60	100	40
X_2 , ум.од.	x_2	0	15	30	15

Таблиця 5

Матриця планування та експериментальні дані

Точки плану	Фактори		Експериментальні значення Y
	x_1	x_2	
1	+1	+1	Y_1
2	+1	-1	Y_2
3	-1	+1	Y_3
4	-1	-1	Y_4
5	+1	0	Y_5
6	-1	0	Y_6
7	0	+1	Y_7
8	0	-1	Y_8
9	0	0	Y_9
10	0	0	Y_{10}
11	0	0	Y_{11}

Вихідні дані до завдання III призначаються викладачем або приймаються за табл. 6.

Таблиця 6

Вихідні дані до завдання III

№ варіанту	Експериментальні значення Y_i										
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	Y_9	Y_{10}	Y_{11}
1	17,6	4,8	19,3	6,3	10,6	14,0	16,5	6,0	8,8	8,2	7,5
2	15,0	6,5	20,2	6,3	10,6	14,0	17,0	6,0	8,8	8,5	7,5
3	22,0	14,5	20,2	16,1	10,6	14,0	17,0	6,0	8,8	9,3	9,0
4	18,0	5,2	1,5	3,3	14,5	5,0	5,3	6,0	6,1	5,3	6,2
5	8,7	5,2	2,9	3,3	12,5	5,0	16,5	6,0	6,1	5,3	6,2
6	22,4	8,7	5,5	16,9	12,5	18,2	16,5	6,0	5,9	5,3	6,6
7	17,7	10,6	4,6	22,1	22,3	19,2	5,8	14,6	12,9	10,6	14,1
8	5,6	26,0	8,0	7,0	16,8	8,5	3,5	16,0	5,9	4,5	8,9
9	32,0	29,0	22,6	15,0	16,8	8,5	3,5	16,0	5,9	4,5	8,9
10	6,5	29,0	16,6	9,0	16,8	8,5	3,5	16,0	5,9	6,3	6,9

3. Приклади вирішення задач

3.1. Транспортна задача

Перед початком розв'язку даної задачі необхідно вивчити (повторити) теоретичний матеріал, що стосується методів постановки та розв'язку транспортної задачі лінійного програмування [1-3].

Умова задачі.

У трьох постачальників A_1 , A_2 , A_3 є запаси однорідних вантажів відповідно в кількостях $a_1 = 50$ т, $a_2 = 20$ т, $a_3 = 25$ т, які необхідно транспортувати до чотирьох споживачів B_1 , B_2 , B_3 , B_4 з потребами відповідно $b_1 = 20$ т, $b_2 = 45$ т, $b_3 = 25$ т, $b_4 = 20$ т. Відстані (в кілометрах) між постачальниками та споживачами задані у вигляді матриці:

$$C(3, 4) = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Необхідно знайти оптимальний план перевезень вантажів, при якому сумарні затрати на перевезення будуть мінімальними.

Розв'язок.

1. Визначення виду транспортної задачі (ТЗ).

Знайдемо суму запасів вантажів у постачальників та суму потреб споживачів:

$$\sum a_i = 50 + 20 + 25 = 95; \quad \sum b_j = 20 + 45 + 25 + 40 = 110.$$

Оскільки $\sum a_i < \sum b_j$, то ТЗ – відкрита і її потрібно звести до закритої.

Для цього введемо фіктивного постачальника A_4^ϕ із запасами вантажу:

$$a_4^\phi = \sum b_j - \sum a_i = 110 - 95 = 15m.$$

Відстань від фіктивного постачальника до всіх споживачів приймаємо рівними нулю, тоді матриця перевезень (відстаней) прийме вигляд:

$$C(4, 4) = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо остаточно умову задачі у вигляді табл. 7.

Таблиця 7

Постачальники	Споживачі				Запаси вантажів, т
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	15	6	2	8	50
A ₂	11	7	5	7	20
A ₃	7	9	4	13	25
A ₄ ^φ	0	0	0	0	15
Потреби, т	20	45	25	20	110

2. Побудова опорного плану перевезень вантажів.

Опорний план перевезень будемо трьома методами [1].

Підрахуємо затрати на перевезення за кожним з отриманих планів і виберемо той, для якого сумарні затрати на перевезення будуть мінімальними.

2.1. Заповнюємо таблицю опорного плану перевезень вантажів за методом північно-західного кута. В результаті отримаємо опорний план перевезень вантажів (табл. 8).

Таблиця 8

$i \backslash j$		С по ж и в а ч і				Запаси
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
П о с т а ч а л ь н и к и	A ₁	20 15	30 6	— 2	— 8	50
	A ₂	— 11	15 7	5 5	— 7	20
	A ₃	— 7	— 9	— 4	5 13	25
	A ₄ ^ф	— 0	— 0	— 0	15 0	15
Потреби		20	45	25	20	110

Тоді для цього плану можна порахувати сумарні затрати на перевезення:

$$Z_1 = 20 \cdot 15 + 30 \cdot 6 + 15 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 3 + 15 \cdot 0 = 755 \text{ т} \cdot \text{км.}$$

2.2. Складаємо опорний план перевезень вантажів за методом мінімального елемента. Згідно алгоритму методу мінімальної вартості, отримаємо опорний план перевезень вантажів (табл. 9).

Затрати на перевезення при даному опорному плані будуть становити:

$$Z_2 = 25 \cdot 6 + 25 \cdot 2 + 20 \cdot 7 + 0 \cdot 4 + 20 \cdot 7 + 5 \cdot 13 + 15 \cdot 0 = 545 \text{ т} \cdot \text{км.}$$

Таблиця 9

$i \backslash j$		С по ж и в а ч і				Запаси
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
Постачальники	A ₁	— 15	25 6	25 2	— 8	50
	A ₂	— 11	20 7	— 5	— 7	20
	A ₃	20 7	— 9	— 4	5 13	25
	A ₄ ^ф	— 0	— 0	— 0	15 0	15
Потреби		20	45	25	20	110

2.3. Складаємо опорний план перевезень вантажів за методом подвійної переваги. Опорний план перевезень вантажів наведений в табл. 10.

Таблиця 10

$i \backslash j$		С по ж и в а ч і				Запаси
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
Постачальники	A ₁	— 15	25 6	25 2	— 8	50
	A ₂	— 11	0 7	— 5	20 7	20
	A ₃	20 7	5 9	— 4	— 13	25
	A ₄ ^ф	— 0	15 0	— 0	— 0	15
Потреби		20	45	25	20	110

Затрати на перевезення при такому опорному плані будуть становити:

$$Z_3 = 25 \cdot 6 + 25 \cdot 2 + 20 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 15 \cdot 0 = 525 \text{ т} \cdot \text{км}.$$

Якщо порівняти значення затрат на перевезення то видно, що

$Z_{\min} = Z_3 = 525$ т·км, тобто опорний план перевезень, отриманий за допомогою методу подвійної переваги є найближчим до оптимального. Тому перевірку на оптимальність і, при необхідності, його покращення здійснюємо саме для цього плану.

3. Знаходження оптимального плану.

Для перевірки на оптимальність опорного плану застосовуємо метод потенціалів. [1-2].

Кількість заповнених клітинок опорного плану, що перевіряється на оптимальність повинна дорівнювати:

$$m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7,$$

(тобто план має бути невиродженим).

Оскільки в таблиці обраного опорного плану кількість заповнених клітинок = 6 < (m+n-1=7), то отриманий план є **виродженим**.

Тому необхідно ввести нульове перевезення вантажу в одну з порожніх клітинок. Нехай це буде клітинка **A₂B₂**. (вважається фіктивно зайнятою) – див. табл. 10.

Запишемо таблицю опорного плану із зазначенням потенціалів, що відповідають постачальникам і споживачам (табл. 11).

Таблиця 11

$i \backslash j$		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	Запаси
		v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	
A ₁	u ₁	15	25 6	25 2	8	50
A ₂	u ₂	11	0 7	5	20 7	20
A ₃	u ₃	20 7	5 9	4	13	25
A ₄ ^φ	u ₄	0	15 0	0	0	15
Потреби		20	45	25	20	110

Умови оптимальності плану перевезень транспортної задачі:

$c_{ij} = u_i + v_j$ – для кожної заповненої клітинки;

$c_{ij} \geq u_i + v_j$ – для кожної порожньої клітинки.

Складаємо систему потенціалів для заповнених клітинок табл.11.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1+v_2 = 6 \\ u_1+v_3 = 2 \\ u_2+v_2 = 7 \\ u_2+v_4 = 7 \\ u_3+v_1 = 7 \\ u_3+v_2 = 9 \\ u_4+v_2 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{В цій системі сім рівнянь і вісім невідомих. Для} \\ \text{знаходження розв'язку системи, прийнемо } \underline{u_1 = 0.} \\ \text{Тоді знайдемо решту невідомих:} \\ v_2 = 6; v_3 = 2; u_2 = 1; u_3 = 3; v_4 = 6; v_1 = 4; u_4 = -6; \end{array}$$

Перевіряємо на оптимальність порожні клітинки табл. 11.

$$\begin{array}{ll} u_1+v_1 = 0+4 = 4 < 15 & u_1+v_4 = 0+6 = 6 < 8 \\ u_2+v_1 = 1+4 = 5 < 11 & u_2+v_3 = 1+2 = 3 < 5 \\ \boxed{u_3+v_3 = 3+2 = 5 > 4} \quad ! & u_3+v_4 = 0+6 = 6 < 13 \\ u_4+v_1 = -6+4 = -2 < 0 & u_4+v_3 = -6+2 = -4 < 0 \\ u_4+v_4 = -6+6 = 0 = 0 & \end{array}$$

Оскільки для порожньої клітинки A_3B_3 не виконується умова оптимальності, то даний опорний план перевезень не оптимальний.

Для його покращення будуємо цикл перерозподілу (цикл перевезень вантажів) [1] для клітинки A_3B_3 (див. табл. 11). За цим циклом перерозподіляємо 5 т вантажу. Для величин об'ємів вантажів у клітинках із знаком "+" додаємо 5 т вантажу, а від величин об'ємів вантажів у клітинках із знаком "-" віднімаємо 5 т вантажу.

В результаті отримуємо новий опорний план (табл. 12).

Таблиця 12

$i \backslash j$		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		v_1	v_2	v_3	v_4	
A_1	u_1	15	30 6	20 2	8	50
A_2	u_2	11	0 7	5	20 7	20
A_3	u_3	20 7	9	5 4	13	25
A_4^ϕ	u_4	0	15 0	0	0	15
Потреби		20	45	25	20	110

Знову проводимо перевірку на виконання умови оптимальності.
Складаємо систему потенціалів для заповнених клітинок табл.12:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1+v_2 = 6 \\ u_1+v_3 = 2 \\ u_2+v_2 = 7 \\ u_2+v_4 = 7 \\ u_3+v_1 = 7 \\ u_3+v_3 = 4 \\ u_4+v_2 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Для знаходження розв'язку системи,} \\ \text{прийmemo} \\ \underline{u_1 = 0.} \\ \text{Тоді знайдемо решту невідомих:} \\ v_2 = 6; v_3 = 2; u_2 = 1; u_3 = 2; v_4 = 6; v_1 = 5; \\ u_4 = -6; \end{array}$$

Перевіряємо на оптимальність порожні клітинки табл. 12.

$$\begin{array}{ll} u_1+v_1 = 0+5 = 5 < 15 & u_1+v_4 = 0+6 = 6 < 8 \\ u_2+v_1 = 1+5 = 6 < 11 & u_2+v_3 = 1+2 = 3 < 5 \\ u_3+v_2 = 2+6 = 8 = 9 & u_3+v_4 = 2+6 = 8 < 13 \\ u_4+v_1 = -6+5 = -1 < 0 & u_4+v_3 = -6+2 = -4 < 0 \\ u_4+v_4 = -6+6 = 0 = 0 & \end{array}$$

Оскільки умова оптимальності для всіх порожніх клітинок виконується, то даний опорний план є **оптимальний**.

Відповідь.

Матриця перевезень оптимального плану матиме вигляд:

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Витрати на перевезення вантажів за цим планом будуть **мінімальними** і складуть:

$$Z_{min} = 30 \cdot 6 + 20 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 5 \cdot 4 + 15 \cdot 0 = 520 \text{ т} \cdot \text{км.}$$

Оскільки споживач B_2 отримує 15 т вантажу від фіктивного постачальника, то його потреби не будуть повністю задоволені.

3.2. Задача побудови математичної моделі за результатами експерименту

Перед початком розв'язку даної задачі необхідно вивчити (повторити) теоретичний матеріал, що стосується методів математичного планування експерименту та регресійного аналізу [1, 2, 4].

Умова задачі.

Побудувати математичну модель (у вигляді повного квадратичного рівняння регресії) вихідного параметру Y залежно від факторів X_1 та X_2 відповідно до заданих вихідних умов (табл. 13, 14).

На основі побудованої моделі провести аналіз індивідуального та спільного впливу факторів на вихідний параметр.

Таблиця 13

Умови планування експерименту

Фактори		Рівні варіювання			Інтервал варіювання
Натуральний вид	Кодований вид	-1	0	+1	
X_1 ум.од.	x_1	20	60	100	40
X_2 ум.од.	x_2	0	15	30	15

Таблиця 14

Матриця планування та експериментальні дані

Точки плану	Фактори		Експериментальне значення Y
	x_1	x_2	
1	+1	+1	6.9
2	+1	-1	17.2
3	-1	+1	10.7
4	-1	-1	6.3
5	+1	0	14.2
6	-1	0	6
7	0	+1	12
8	0	-1	9.3
9	0	0	7.9
10	0	0	6.3
11	0	0	8.8

Розв'язок.**1. Побудова математичної моделі.**

Визначаємо розрахункові параметри для визначення коефіцієнтів рівняння регресії (результати зведені в табл.15).

Таблиця 15

Точки плану	Фактори		Y	Точки плану				
	x ₁	x ₂		yx ₁	yx ₂	yx ₁ ²	yx ₂ ²	yx ₁ x ₂
1	+1	+1	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9
2	+1	-1	17.2	17.2	-17.2	17.2	17.2	-17.2
3	-1	+1	10.7	-10.7	10.7	10.7	10.7	-10.7
4	-1	-1	6.3	-6.3	-6.3	6.3	6.3	6.3
5	+1	0	14.2	14.2	0	14.2	0	0
6	-1	0	6	-6	0	6	0	0
7	0	+1	12	0	12	0	12	0
8	0	-1	9.3	0	-9.3	0	9.3	0
9	0	0	7.9	0	0	0	0	0
10	0	0	6.3	0	0	0	0	0
11	0	0	8.8	0	0	0	0	0
Σ			105.6	15.3	-3.2	61.3	62.4	-14.7
Коефіцієнти			b ₀ = 8,26	b ₁ = 2,55	b ₂ = -0,53	b ₁₁ = 0,96	b ₂₂ = 1,51	b ₁₂ = -3,68

Визначаємо коефіцієнти рівняння регресії за формулами:

$$b_0 = T_1 \cdot O_y - T_2 \cdot \sum_{i=1}^k (iiy) ; \quad b_i = T_3 \cdot (iy)$$

$$b_{ii} = T_4 \cdot (i iy) + T_5 \cdot \sum_{i=1}^k (i iy) - T_2 (O_y) ; \quad b_{ij} = T_6 \cdot (ijy) ;$$

$$O_y = \sum_{k=1}^n y_n ,$$

де $T_1 = 0.2632$; $T_2 = 0.1579$; $T_3 = 0.1667$; $T_4 = 0.5$;

$$T_5 = -0.1053; \quad T_6 = 0.25.$$

Отже маємо:

$$b_0 = 0.2632 \cdot 105.6 - 0.1579 \cdot (61.3 + 62.4) = 8.26.$$

$$b_1 = 0.1667 \cdot 15.3 = 2.55.$$

$$b_2 = 0.1667 \cdot (-3.2) = -0.53.$$

$$b_{11} = 0.5 \cdot 61.3 - 0.1053 \cdot (61.3 + 62.4) - 0.1579 \cdot 105.6 = 0.96.$$

$$b_{22} = 0.5 \cdot 62.4 - 0.1053 \cdot (61.3 + 62.4) - 0.1579 \cdot 105.6 = 1.51.$$

$$b_{12} = 0.25 \cdot (-14.7) = -3.68.$$

Отже рівняння регресії без перевірки його адекватності має вигляд:

$$Y_p = 8.26 + 2.55x_1 - 0.53x_2 + 0.96x_1^2 + 1.51x_2^2 - 3.68x_1x_2 \quad (1)$$

2. Перевірка адекватності рівняння регресії.

2.1. Перевіряємо значимість коефіцієнтів рівняння регресії.

Середньоарифметичне значення y по нульовим точкам:

$$\bar{y}_0 = \frac{7.9 + 6.3 + 8.8}{3} = 7.67.$$

Дисперсія відтвореності вихідних параметрів:

$$S_y^2 = \frac{(7.9 - 7.67)^2 + (6.3 - 7.67)^2 + (8.8 - 7.67)^2}{3 - 1} = 1.6.$$

Середньоквадратичне відхилення вихідного параметру:

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{1.6} = 1.26.$$

Середньоквадратичні похибки при визначенні коефіцієнтів:

$$S_{b_0} = 0.513 \cdot 1.26 = 0.65.$$

$$S_{b_i} = 0.4883 \cdot 1.26 = 0.51.$$

$$S_{b_{ii}} = 0.6282 \cdot 1.26 = 0.79.$$

$$S_{b_{ij}} = 0.5 \cdot 1.26 = 0.63.$$

Розрахункові значення критерію Стьюдента:

$$t_1 = \frac{|2.55|}{0.51} = 5; \quad t_2 = \frac{|-0.53|}{0.51} = 1.04; \quad t_{11} = \frac{|0.96|}{0.79} = 1.22;$$

$$t_{22} = \frac{|1.51|}{0.79} = 1.91; \quad t_{12} = \frac{|-3.68|}{0.63} = 5.84.$$

Табличне значення критерію Стьюдента при $P = 0.05$;
 $f = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow t_{табл} = 4.3.$

Коефіцієнти рівняння вважаються значимими, якщо розрахункове значення t_p виявиться більше табличного t_T .

Перевірці підлягають лише лінійні коефіцієнти b_1 , b_2 а також коефіцієнт взаємодії. Коефіцієнти квадратичних членів залишають в рівнянні навіть, якщо вони не значимі.

Отже для даних умов не значимим буде коефіцієнт b_2 , оскільки $t_2 = 1,04 < t_{табл} = 4,3$.

Отримуємо остаточне рівняння регресії:

$$Y_p = 8.26 + 2.55x_1 + 0.96x_1^2 + 1.51x_2^2 - 3.68x_1x_2. \quad (2)$$

2.2. Встановлення суми квадратів відхилень.

Для визначення дисперсії адекватності попередньо знаходимо залишкову суму квадратів відхилень. З цією метою знаходимо розрахункове значення Y_p для кожного рядка матриці використовуючи отримане остаточне рівняння регресії.

$$\hat{y}_1 = 8.26 + 2.55 + 0.96 + 1.51 - 3.68 = 9.59 .$$

$$\hat{y}_2 = 8.26 + 2.55 + 0.96 + 1.51 + 3.68 = 16.94 .$$

$$\hat{y}_3 = 8.26 - 2.55 + 0.96 + 1.51 + 3.68 = 11.84 .$$

$$\hat{y}_4 = 8.26 - 2.55 + 0.96 + 1.51 - 3.68 = 4.49 .$$

$$\hat{y}_5 = 8.26 + 2.55 + 0.96 + 0 + 0 = 11.76 .$$

$$\hat{y}_6 = 8.26 - 2.55 + 0.96 + 0 + 0 = 6.66 .$$

$$\hat{y}_7 = 8.26 + 0 + 0 + 1.51 + 0 = 9.76 .$$

$$\hat{y}_8 = 8.26 + 0 + 0 + 1.51 + 0 = 9.76 .$$

$$\hat{y}_9 = 8.26 .$$

$$\hat{y}_{10} = 8.26 .$$

$$\hat{y}_{11} = 8.26 .$$

Далі знаходимо квадрати різниць між експериментальними і розрахунковими значеннями вихідного параметру.

Отримані значення зведені в табл. 16. В останньому рядку таблиці наведено значення залишкової суми квадратів відхилень, що використовується при визначення дисперсії адекватності.

Таблиця 16

Точки плану	y	Y_p	$y - Y_p$	$(y - Y_p)^2$
1	6.9	9,59	-2,69	7,22
2	17.2	16,94	0,26	0,07
3	10.7	11,84	-1,14	1,29
4	6.3	4,49	1,81	3,29
5	14.2	11,76	2,44	5,94
6	6	6,66	-0,66	0,44
7	12	9,76	2,24	5,01
8	9.3	9,76	-0,46	0,21
9	7.9	8,26	-0,36	0,13
10	6.3	8,26	-1,96	3,85
11	8.8	8,26	0,54	0,29
$\Sigma =$				27.74

Далі визначаємо дисперсію адекватності:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{27.74}{11 - 5 - 2} = 6.94.$$

Знаходимо розрахункове значення критерію Фішера:

Оскільки $S_{\text{ад}}^2 > S_y^2$ ($6.94 > 1.6$), то:

$$F_p = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2} = \frac{6.94}{1.6} = 4.33.$$

Табличне значення критерію Фішера знаходимо при $f_{\text{ад}} = n - m - (n_0 - 1) = 11 - 5 - 2 = 4$ та $f = 3 - 1 = 2$:

$$F_{\text{табл}} = 19,25 [1].$$

Оскільки $F_p < F_{\text{табл}}$, то рівняння регресії (2) є **адекватним** при довірчій ймовірності 95% і його можна вважати математичною моделлю Y для даної області зміни факторів X_1 та X_2 .

3. Аналіз математичної моделі.

Для аналізу математичної моделі побудуємо графічні залежності $Y = f(x_1)$, $Y = f(x_2)$ при фіксації іншого фактору на рівнях варіювання (рис. 1-2).

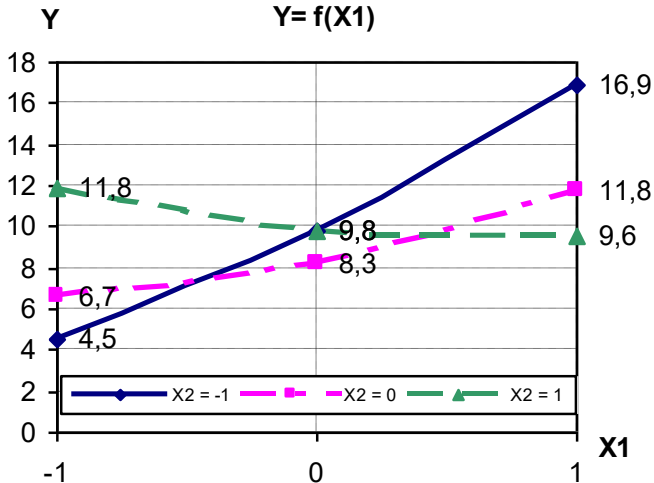


Рис. 1. Залежність вихідного параметра Y від фактора X_1

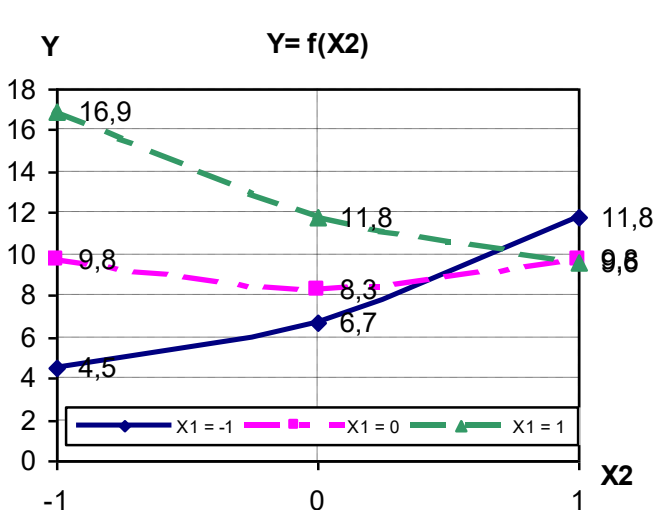


Рис. 2. Залежність вихідного параметра Y від фактора X_2

Аналіз отриманого рівняння регресії (2) та графічних залежностей дозволяє говорити про сильніший вплив фактора x_1 в порівнянні з фактором x_2 , про це говорить абсолютна величина коефіцієнта b_1 .

Знак при лінійному коефіцієнті b_1 свідчить про те, що при збільшенні x_1 y зростає, хоча, як видно з рис. 1, при знаходженні фактора x_2 на верхньому рівні (+1) значення вихідного параметру дещо знижується..

Квадратичні коефіцієнти вказують на характер прискорення зміни y при зміні досліджуваних факторів. Оскільки величина коефіцієнта $b_{11} < b_{22}$ ($0.96 < 1.51$), то залежність $y = f(x_1)$ можна вважати ближчою до лінійної, що, зокрема, підтверджується графічними залежностями (рис. 1 і 2).

Присутність в математичній моделі коефіцієнта b_{12} значної величини (по модулю) свідчить про те, що ступінь впливу кожного з факторів суттєво залежить від зміни іншого, що і викликає на графіках появу неоднозначних кривих. Знак "-" при коефіцієнті дозволяє відзначити, що зростання вихідного параметру y можливе за умови знаходження факторів x_1 і x_2 одночасно на протилежних рівнях варіювання.

Для забезпечення максимального значення вихідного параметру за даних умов постановки задачі необхідно підтримувати значення фактора x_1 на верхньому рівні, а фактора x_2 на нижньому рівні.

4. Теми рефератів для самостійної роботи

Реферат з дисципліни “ Аналіз будівельно-технологічних задач” є додатковим видом самостійної роботи студента, яка виконується за його бажанням.

Тему реферату студент обирає із запропонованого переліку або формулює сам, попередньо погодивши її з викладачем.

Розкриття теми реферату повинно бути ґрунтовним і по суті, наповнене критичним аналізом стану питання та не повинно містити тривіальних і загальновідомих положень і даних.

При підготовці реферату необхідно використовувати сучасні інформаційні джерела, зокрема ресурси Інтернету, посилання на які є обов'язковими.

Бажаним є використання ілюстративного матеріалу (схеми, рисунки, діаграми та ін.).

Реферат оформляється у вигляді зброшурованого звіту на стандартних аркушах формату А4 обсягом 10...15 сторінок основного тексту а також переліку використаної літератури та інформаційних джерел. Розкриття теми роботи виконується з однієї сторони аркушів рукописним способом або за допомогою друкарських пристроїв. Бажаним є виконання реферату комп'ютерним способом з обов'язковим представленням тексту роботи на електронному носії.

На титульній сторінці необхідно вказати назву вищого навчального закладу, кафедру, тему реферату, прізвище, ім'я та по батькові студента, посаду, прізвище та ініціали викладача, що перевіряє та зараховує реферат.

Термін здачі реферату – не пізніше, ніж через 1 місяць з моменту призначення та затвердження теми викладачем.

Максимальна кількість балів, якою оцінюється виконання реферату – 10.

Отримана кількість балів повинна узгоджуватись із загальними принципами оцінювання і нарахування балів за весь курс.

У випадках невідповідності змісту реферату його темі, а також очевидного плагіату (повторного використання готових, раніше виконаних робіт, в т.ч. розміщених в Інтернеті), представлений реферат не приймається до захисту, і оцінка за його виконання не ставиться.

Приклади тем рефератів:

1. Системність та її роль в науці і техніці.
2. Характеристика основних етапів становлення і розвитку системного підходу.
3. Предмет загальної теорії систем.
4. Застосування теорії систем в різних науках.

5. Роль системного підходу в практичній діяльності людини.
6. Аналіз основних визначень поняття "система".
7. Категоріальний апарат системного підходу і його розвиток.
8. Світ складних систем і тенденції його розвитку.
9. Сутність і основні характеристики складних систем.
10. Управлінські системи: сутність і різновиди.
11. Застосування структурно-функціонального підходу в управлінні.
12. Діалектика взаємозв'язку складу, структури і організації системи.
13. Проблеми функціонування соціально-економічних систем.
14. Синергетика і її роль в пізнанні.
15. Моделювання і його роль в пізнанні.
16. Кібернетика та її можливості.
17. Тенденції розвитку кібернетики.
18. Процес формалізації при побудові математичних моделей.
19. Системні закони і їх роль в аналітичній діяльності.
20. Методи системного аналізу.
21. Математична теорія експерименту в загальному циклі вирішення будівельно-технологічних задач.
22. Системний підхід як методологічний принцип дослідження.
23. Принципи побудови та інтерпретації математичних моделей.
24. Метрологічні проблеми в техніко-економічних експериментах.
25. Основні ідеї математичного планування експерименту.
26. Регресійний аналіз при плануванні експерименту.
27. Особливості проведення техніко-економічних експериментів.
28. Методи побудови емпіричних формул в задачах будівництва.
29. Імовірнісно-статистичний підхід до оцінки результатів експерименту.
30. Прийняття інженерних рішень за експериментально-статистичними моделями.

31. Системний підхід до проектування оптимального складу і оптимальної структури будівельного матеріалу або конструкції.
32. Застосування методик системного аналізу при розробці перспективних планів підприємств.
33. Організаційно-технологічний рівень будівельної системи.
34. Економічна оцінка будівельної системи з врахуванням рівня її мобільності.
35. Автоматизовані системи управління будівельними підприємствами (виробництвами).

5. Рекомендована література

1. Бордюженко О. М. Основи системного аналізу: Інтерактивний комплекс навчально-методичного забезпечення. Рівне : НУВГП, 2008. 113 с.
2. Дворкін Л. Й., Дворкін О. Л., Житковський В. В. Розв'язування будівельно-технологічних задач методами математичного планування експерименту : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2011. 175 с.
3. Будівельне матеріалознавство: задачі та вправи : навч. посіб. / Л. Й. Дворкін, О. М. Бордюженко, В. В. Житковський та ін. ; за ред. д.т.н., проф. Л. Й. Дворкіна. Рівне : НУВГП, 2023. 217 с.
4. Дворкін Л. Й. Експериментально-статистичне моделювання при проектуванні складів бетонів : навчальний посібник. К. : Видавничий дім «Кондор», 2020. 205 с.
5. Катренко А. В. Дослідження операцій : Підручник. Львів : «Магнолія 2006», 2007. 480 с.
6. Ісаханов Г. В., Чорний С.М. Чисельні методи розв'язування задач будівництва. К. : ВШ, 1995. 374 с.
7. Сорока К. О. Основи теорії систем і системного аналізу. Харків : ПП Тимченко, 2005. 288 с.
8. Дворкін Л. Й. Теоретичні основи будівельного матеріалознавства : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2022. 799 с.