УДК 517.956 https://doi.org/10.31713/vt1202418

Прохоренко М. В., к.ф.-м.н., доцент, Прохоренко С. В., д.т.н., професор, Гулько О. Р., к.е.н, старший викладач (Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів), **Мороз М. В., д.х.н., професор, Янчук О. Є., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Бакула К., к.т.н., доцент** (Варшавська Політехніка, Польща)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ В НЕФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ НА ПЛОЩИНІ

Досліджено процес впливу імпульсної дії на систему звичайних диференціальних рівнянь на площині. Побудовано розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу для випадку дійсних різних власних значень матриці системи.

Ключові слова: **диференціальні рівняння; імпульсна дія; побудова розв'язків.**

Вступ. Серед існуючих фізичних, технічних, хімічних та інших процесів є процеси з короткотривалими збуреннями або які підлягають впливові зовнішніх сил, тривалістю дії котрих можна знехтувати при складанні відповідних математичних моделей. Зручною математичною моделлю таких процесів є імпульсні системи. Результати для імпульсних систем підсумовані в монографії [1]. Продовження досліджень диференціальних рівнянь з імпульсною дією можна знайти, зокрема, в роботах [2–6]. Дана робота досліджує процес впливу імпульсної дії на систему звичайних диференціальних рівнянь на площині в нефіксовані моменти часу для випадку дійсних різних власних значень матриці системи.

Постановка задачі. Розглянемо на площині систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t),\ t \in [t_0, +\infty), \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

$$y(t+0) - y(t-0) = g \text{, коли } y(t-0) \in D_0 \tag{3}$$

де $D_0 = \left\{ \left(y_1, y_2 \right) \in \mathbb{R}^2 : b_1 y_1 + b_2 y_2 = c_1 \right\}$ – пряма, $c_1 > 0$. Пряма D_0 розбиває площину на дві півплощини

$$D_+ = \left\{ \left(y_1, y_2 \right) \in \mathbb{R}^2 : b_1 y_1 + b_2 y_2 > c_1 \right\},$$

$$D_- = \left\{ \left(y_1, y_2 \right) \in \mathbb{R}^2 : b_1 y_1 + b_2 y_2 < c_1 \right\},$$

причому $\left\{ 0 \right\} \in D_-$.

При такій постановці, розв'язки задачі (1)–(3) можна поділити на два типи:

1) такі, що не зазнають імпульсної дії – інтегральна крива системи (1)–(3) не перетинає пряму D_0;

2) такі, що зазнають імпульсної дії – інтегральна крива системи (1)–(3) перетинає пряму D_0. У цьому випадку поведінка розв'язків задачі (1)–(3) вивчена лише для часткових випадків.

Нехай $\sigma\left(A \right)$ спектр матриці A. Інтегральна крива системи (1)–(3) перетинає пряму D_0 якщо:

(**A₁**): положення рівноваги системи (1) (початок координат) є стійким (тобто $\max\left\{ \operatorname{Re}\lambda_1, \operatorname{Re}\lambda_2 \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma\left(A \right) \right\} < 0,$ або $\left\{ \lambda_1, \lambda_2 \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma\left(A \right), \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta, \alpha = 0 \right\}$) та $y_0 \in D_0 \bigcup D_+$.

(**B₁**): положення рівноваги системи (1) (початок координат) є нестійким (тобто $\min\left\{ \operatorname{Re}\lambda_1, \operatorname{Re}\lambda_2 \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma\left(A \right) \right\} > 0$, або $\left\{ \lambda_1, \lambda_2 \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma\left(A \right), \lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta, \alpha = 0 \right\}$) та $y_0 \in D_0 \bigcup D_-$.

Позначимо

$$D_g = \left\{ \left(y_1 + g_1, y_2 + g_2 \right) \in \mathbb{R}^2 : \left(y_1, y_2 \right) \in D_0, b_1\left(y_1 + g_1 \right) + b_2\left(y_2 + g_2 \right) = c_1 \right\}.$$

Зауважимо, що пряма D_g – це паралельний зсув прямої D_0 на вектор g і можливим є випадок, коли різним векторам g відповідає одна й та ж пряма D_0.

Для здійснення імпульсної дії більше одного разу для випадку (**A₁**) необхідно, щоб пряма D_g знаходилася в D_+, тобто

$$\cos\left(n, g \right) > 0,$$

для випадку (**B₁**) необхідно, щоб пряма D_g знаходилася в D_-, тобто

$$\cos\left(n, g \right) < 0 ,$$

де $n=\left(b_1,b_2\right)$ – вектор зовнішньої нормалі півплощини D_-.
Зауважимо, що умова $\cos\left(n,g\right)>0$ еквівалентна співвідношенням
(**A₁₁**): $b_1g_1+b_2g_2+c_1=c_2, \quad c_2>c_1>0$,
(**B₁₁**): $b_1g_1+b_2g_2+c_2=c_1, \quad c_1>c_2>0$.

Перетин прямої D_0 інтегральною кривою задачі (1)–(3) можливий, коли $y_0\in D_-$ для випадку (**A₁**) ($y_0\in D_+$ для випадку (**B₁**)) та власні значення матриці системи (1) комплексні, або дійсні з алгебраїчною кратністю 2 та геометричною кратністю 1 [7].

Якщо $y_0\in D_-$ в умові (2) і інтегральна крива задачі (1)–(3) не перетинає D_0, то задача (1)–(3) не зазнаватиме імпульсного впливу. Якщо ж $y_0\in D_-$ в умові (2) і інтегральна крива задачі (1)–(3) перетинає D_0, то задача (1)–(3) зазнаватиме імпульсного впливу, більше того, після потрапляння на пряму D_0 точка $\left(t,y\left(t\right)\right)$ залишається в $D_0\bigcup D_+$ при виконанні (**A₁₁**) для випадку (**A₁**) та в $D_0\bigcup D_-$ при виконанні (**B₁₁**) для випадку (**B₁**). Тому обмежимося умовою $y_0\in D_0\bigcup D_+$ для стійкого положення рівноваги системи (1) та умовою $y_0\in D_0\bigcup D_-$ для нестійкого положення рівноваги системи (1).

Зупинимося на випадку (**A₁**) з умовою (**A₁₁**), випадок (**B₁**) з умовою (**B₁₁**) розглядається аналогічно.

Побудова розв'язків. Побудуємо розв'язки задачі (1)–(3) та знайдемо рівняння для відшукання часового моменту імпульсної дії. Для цього зведемо матрицю A до жорданової форми

$$J=B^{-1}AB,$$

де B – матриця переходу від базису x_1,x_2 до y_1,y_2.

Тоді, задача (1)–(3) в базисі x_1,x_2 набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt}=J\,x\left(t\right),\, t\in\left[t_0,+\infty\right), \tag{4}$$

$$x\left(t_0\right)=x_0, \tag{5}$$

$$x\left(t+0\right)-x\left(t-0\right)=h, \text{ коли } x\left(t-0\right)\in S_0, \tag{6}$$

де $S_0=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2: ax_1+bx_2=c_1\right\}$ – пряма, $h=B^{-1}g$,

$S_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 > c_1\}$, $S_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 < c_1\}$,
$S_h = \{(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \in S_0, a(x_1 + h_1) + b(x_2 + h_2) = c_2\}$
причому $\{0\} \in S_-$, $S_h \in S_+$, $h = (h_1, h_2)$ $n_s = B^{-1}n$, $n_s = (a, b)$ – вектор зовнішньої нормалі S_-, $n = (b_1, b_2)$ – вектор зовнішньої нормалі D_-, має місце рівність

$$ah_1 + bh_2 + c_1 = c_2,$$

$x_0 \in S_+ \bigcup S_0$.

На площині матриця набуває одне з чотирьох зображень:

1) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 2) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 3) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

4) $J = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}$,

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Лема 1. Розв'язок $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ задачі з імпульсною дією (4)–(6) для $t \in [t_k, t_{k+1})(k = 0, 1, 2, \dots)$, коли $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 < 0)$ має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) e^{\lambda_1(t - t_0)} + h_1 \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_1(t - t_j)}, \\ x_2(t) = x_{02}(t) e^{\lambda_2(t - t_0)} + h_2 \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_2(t - t_j)}, \end{cases} \tag{7}$$

а моменти часу t_{k+1} визначаються з рівняння

$$a\left(x_{01}(t) e^{\lambda_1(t_{k+1} - t_0)} + h_1 \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_1(t_{k+1} - t_j)} \right) + \\ +b\left(x_{02}(t) e^{\lambda_2(t_{k+1} - t_0)} + h_2 \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_2(t_{k+1} - t_j)} \right) = c_1, \tag{8}$$

де $x_0(x_{01}, x_{02})$.

Доведення. Розв'язок задачі (4)-(6) для $t \in [t_0, t_1)$ має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) e^{\lambda_1(t-t_0)}, \\ x_2(t) = x_{02}(t) e^{\lambda_2(t-t_0)}. \end{cases}$$

Момент першого попадання точки $x(t)$ на пряму S_0, тобто момент t_1, знаходимо з рівняння

$$a\, x_{01}(t) e^{\lambda_1(t_1-t_0)} + b\, x_{02}(t) e^{\lambda_2(t_1-t_0)} = c_1. \tag{9}$$

Існування розв'язку рівняння (9) слідує з того, що рух точки $(x_1(t), x_2(t))$ для даного випадку здійснюється вздовж фазових кривих вигляду

$$\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = C|x_1|^\gamma, \gamma = \lambda_2/\lambda_1\right\}$$

до початку координат. Неможливо потрапити з точки $x_0 \in S_+ \bigcup S_0$ в початок координат, не перетнувши S_0.

З урахуванням умови (6) розв'язуємо (4) з початковими даними

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) e^{\lambda_1(t_1-t_0)} + h_1, \\ x_2(t) = x_{02}(t) e^{\lambda_2(t_1-t_0)} + h_2 \end{cases}$$

та одержуємо розв'язок задачі (4)–(6) для $t \in [t_1, t_2)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(x_{01}(t) e^{\lambda_1(t_1-t_0)} + h_1\right) e^{\lambda_1(t-t_1)} = \\ \qquad = x_{01}(t) e^{\lambda_1(t-t_0)} + h_1 e^{\lambda_1(t-t_1)}, \\ x_2(t) = \left(x_{02}(t) e^{\lambda_2(t_1-t_0)} + h_2\right) e^{\lambda_2(t-t_1)} = \\ \qquad = x_{02}(t) e^{\lambda_2(t-t_0)} + h_2 e^{\lambda_2(t-t_1)}. \end{cases}$$

Наступний момент часу $t_2 (t_2 > t_1)$ – момент попадання точки $x(t)$ на пряму S_0 – знаходимо з рівняння

$$a\left(x_{01}(t) e^{\lambda_1(t_2-t_0)} + h_1 e^{\lambda_1(t_2-t_1)}\right) + b\left(x_{02}(t) e^{\lambda_2(t_2-t_0)} + h_2 e^{\lambda_2(t_2-t_1)}\right) = c_1. \tag{10}$$

Оскільки $(x_1(t), x_2(t)) \in S_h \subset S_+$, а з S_h неможливо потрапити до нуля, не перетнувши S_0, то рівняння (10) має розв'язок.

Тоді, для $t \in [t_2, t_3)$ розв'язок задачі (4)–(6) запишемо за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) e^{\lambda_1 (t - t_0)} + h_1 \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_1 (t - t_j)}, \\ x_2(t) = x_{02}(t) e^{\lambda_2 (t - t_0)} + h_2 \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_2 (t - t_j)}, \end{cases}$$

а рівняння для знаходження t_3 запишемо у вигляді

$$a\left(x_{01}(t) e^{\lambda_1 (t_2 - t_0)} + h_1 \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_1 (t_3 - t_j)} \right) + b\left(x_{02}(t) e^{\lambda_2 (t_2 - t_0)} + h_2 \sum_{j=1}^{2} e^{\lambda_2 (t_3 - t_j)} \right) = c_1.$$

Продовжуючи міркування далі, переконуємося у справедливості формул (7) та (8).

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. *Singapore: World Scientific*. 1995. Vol. 14. 462 p. **2.** Самойленко В. Г., Хомченко Л. В. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією. *Нелінійні коливання*. 2005. № 1. Т. 8. С. 89–123. **3.** Самойленко В. Г., Елгондиєв К. К. Колебания струны с импульсным воздействием. *Укр. мат. журн.* 1997. № 1. Т. 49. С. 141–148. **4.** Прохоренко М. В. До питання існування періодичних розв'язків для системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у просторі. *Вісник Львівського університету. Сер. Механіко-математична*. 2010. Вип. 73. С. 205–213. **5.** Прохоренко М. В., Прохоренко С. В., Мороз М. В., Соляк Л. В. Задача з імпульсною дією для одного рівняння коливань струни. *Вісник НУВГП. Технічна науки*. 2019. Вип. 3(87). С. 119–127. **6.** Прохоренко М. В., Прохоренко С. В., Мороз М. В., Ярема Н. П. Прості періодичні розв'язки одного рівняння коливання струни з імпульсною дією. *Вісник НУВГП. Технічна науки*. 2022. Вип. 1(97). С. 369–377. **7.** Третинник В. В., Ліскін В. О., Мальчиков В. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. Ч. 2. 125 с.

REFERENCES:

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. *Singapore: World Scientific*. 1995. Vol. 14. 462 p. **2.** Samoilenko V. H., Khomchenko L. V. Kraiova zadacha Neimana dlia synhuliarno zburenoho rivniannia teploprovidnosti z impulsnoiu diieiu. *Neliniini kolyvannia*. 2005. № 1. T. 8. S. 89–123. **3.** Samoilenko V. H., Elhondyiev K. K. Kolebanyia struny s ympulsnym vozdeistvyem. *Ukr. mat. zhurn*. 1997. № 1. T. 49. S. 141–148. **4.** Prokhorenko M. V. Do pytannia isnuvannia periodychnykh rozviazkiv dlia systemy dyferentsialnykh rivnian z impulsnoiu diieiu u prostori. *Visnyk Lvivskoho universytetu. Ser. Mekhaniko-matematychna*. 2010. Vyp. 73. S. 205–213. **5.** Prokhorenko M. V., Prokhorenko S. V., Moroz M. V., Soliak L. V. Zadacha z impulsnoiu diieiu dlia odnoho rivniannia kolyvan struny. *Visnyk NUVHP. Tekhnichna nauky*. 2019. Vyp. 3(87). S. 119–127. **6.** Prokhorenko M. V., Prokhorenko S. V., Moroz M. V., Yarema N. P. Prosti periodychni rozviazky odnoho rivniannia kolyvannia struny z impulsnoiu diieiu. *Visnyk NUVHP. Tekhnichna nauky*. 2022. Vyp. 1(97). S. 369–377. **7.** Tretynnyk V. V., Liskin V. O., Malchykov V. V. Liniina alhebra ta analitychna heometriia : navch. posib. dlia stud. spetsialnosti 113 «Prykladna matematyka». Kyiv : KPI im. Ihoria Sikorskoho, 2022. Ch. 2. 125 s.

Prokhorenko M. V., Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor, Prokhorenko S. V., Doctor of Engineering, Professor, Hulko O. R., Candidate of Economics (Ph.D.), Senior Lecturer (Lviv Polytechnic National University, Lviv), **Moroz M. V., Doctor of Chemical Sciences, Professor, Yanchuk O. Ye., Candidate of Engineering (Ph.D.), Associate Professor** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Bakuła K., Candidate of Engineering (Ph.D.), Assistant Professor** (Warsaw University of Technology, Poland)

CONSTRUCTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM SOLUTIONS WITH IMPULSE ACTION AT NON-FIXED TIME MOMENTS ON THE PLANE

With the development of modern science and technology, there is a need to study differential equations with impulse action, which are a convenient mathematical model for processes with short-term changes, or processes that are affected by external forces, the duration of which can be neglected. Problems of this type are found in thermophysics, mechanics, biology, chemical technologies, control theory and other fields of science and technology. The investigated systems contain differential equations, equations describing discontinuities of the 1st kind at moments of impulse action and

conditions of impulse action. The presence of the condition of impulse action (impulse influence) changes and complicates the behavior of the trajectories of such problems even for relatively simple differential equations. With the development of nonlinear mechanics, the study of differential equations with impulse action began and the possibility of realistically describing processes in nonlinear systems attracted the attention of many researchers. Despite the large number of works devoted to various issues of the differential equation's theory with impulse action, a significant range of problems of the qualitative theory of such equations remains open for many cases. A distinction is made between the impact of impulse action in fixed and non-fixed moments of time. In this work, the process of impact of impulse action on the system of ordinary differential equations on the plane is investigated. The solutions of the system of ordinary differential equations with impulse action at non-fixed instants of time for the case of real different eigenvalues of the system matrix are constructed.

***Keywords*: differential equations; impulse action; construction of solutions.**