

**Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування**

М. Т. Кузло

**Оцінка стану водонасичених ґрунтових укосів і
масивів при зміні гідрогеологічних умов**

Монографія

Рівне – 2025

УДК 624.13:624.1

К89

Рецензенти:

Мозговий В. В., д.т.н., професор, зав. кафедрою дорожньо-будівельних матеріалів і хімії Національного транспортного університету, м. Київ;

Кочкар'ов Д. В., д.т.н., професор, зав. кафедрою міського будівництва та господарства Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

*Рекомендовано науково-технічною радою Національного університету водного господарства та природокористування.
Протокол № 1/2025 від 5 лютого 2025 р.*

Кузло М. Т.

К89 Оцінка стану водонасичених ґрунтових масивів при зміні гідрогеологічних умов : монографія. [Електронне видання]. – Рівне : НУВГП, 2025. – 194 с.

ISBN 978-966-327-629-8

В монографії викладені узагальнені дослідження з оцінки стану водонасичених укосів ґрунтових споруд і основ. Наведено результати досліджень основних факторів, що впливають на стійкість водонасичених ґрунтових укосів при зміні рівня води у водоймищах. Отримано аналітичні і чисельні розв'язки з визначення деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ при зміні гідрогеологічних умов.

УДК 624.13:624.15

ISBN 978-966-327-629-8

© М. Т. Кузло, 2025

© Національний університет
водного господарства та
природокористування, 2025

Зміст

Передмова	5
1. Узагальнення досліджень з оцінки стану водонасичених укосів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищі	8
2. Основні фактори, що впливають на стійкість водонасичених ґрунтових укосів і масивів під час зниження рівня води у водоймищі	13
2.1. Динаміка депресійної поверхні у тілі ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі	18
2.2. Вплив фільтраційних сил на стійкість водонасичених укосів ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі	24
2.3. Вплив зміни сил зчеплення в глинистих ґрунтах на стійкість укосів ґрунтових споруд	32
3. Методика розрахунку оптимальних параметрів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах	35
3.1. Визначення оптимальних параметрів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах ..	35
3.2. Приклад з визначення оптимальних параметрів ґрунтової греблі з урахуванням інтенсивності пониження рівня води у водоймищі	42
3.3. Приклад з визначення інтенсивності пониження рівня води у водоймищі в залежності від стійкості верхового укосу греблі	46
4. Аналіз сучасних уявлень з математичного моделювання деформацій ґрунтових водонасичених масивів при зміні гідрогеологічних умов	50
4.1 Розрахункові схеми і моделі з оцінки стану водонасичених ґрунтових масивів і основ	50
4.1.1 Обґрунтування напрямку досліджень	63
4.2. Рух рідини в пористих середовищах	72
4.3. Об'ємні сили, що діють у водонасичених ґрунтових масивах і основах	95
4.3.1 Гідродинамічні сили фільтраційного потоку	95
4.3.2 Сили від власної ваги ґрунту	98

5.	Основні закономірності теорії пружності та теорії фільтрації з визначення напружено-деформованого стану водонасичених ґрунтових масивів	102
5.1.	Сили та напруження в ґрунтовому масиві	102
5.2.	Рівняння рівноваги напружено-деформованого стану ґрунтових масивів	105
5.3.	Рівняння деформацій ґрунтового масиву при дії на нього об'ємних сил	108
5.4.	Рівняння, що описують фізичні властивості ґрунтових масивів	111
5.5.	Рішення задач напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в переміщеннях	117
5.6.	Основні рівняння фільтрації води в ґрунтовому середовищі	118
6.	Моделювання деформацій ґрунтових масивів при дії фільтраційного потоку рідини у вертикальному напрямку	131
6.1.	Деформації ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води	131
6.2.	Деформації багат шарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води.....	139
7.	Моделювання деформацій ґрунтових масивів і основ при дії техногенних факторів	150
7.1.	Моделювання деформацій ґрунтових масивів в процесі їх осушення.....	150
7.1.1	Динаміка кривої депресії в ґрунтовому масиві в процесі його осушення	150
7.1.2	Деформації ґрунтового масиву в процесі його осушення	154
7.2.	Моделювання деформацій при осушенні водонасиченого природного схилу ГАЕС	180
	Висновки	189
	Список використаних джерел	191

ПЕРЕДМОВА

Грунтові споруди знайшли своє широке застосування при будівництві гідровузлів, гідромеліоративних систем, хвостосховищ та інших важливих об'єктів. Нерідко, експлуатацію цих споруд доводиться вести в умовах змінного рівня води у водоймищі.

Разом з тим, досвід проектування, будівництва і експлуатації ґрунтових споруд показав, що у практиці проектування поки що не мають достатньо повноцінних методик розрахунку оптимальних параметрів цих споруд і рівенного режиму їх експлуатації. При цьому багато чисельними дослідженнями встановлено, що вибір і обґрунтування оптимальних параметрів ґрунтових споруд при зміні гідрогеологічних умов у багатьох випадках залежить від режиму їх експлуатації. У даному випадку на надійність, довговічність і безперебійну експлуатацію цих споруд здатні впливати наступні фактори: швидкість зниження рівня води у водоймищі, гідродинамічні сили від неусталеного фільтраційного потоку, геометричні параметри споруди, зміна властивостей міцності ґрунту та інші фактори.

Оцінка стану ґрунтових споруд з урахуванням наведених вище факторів, дозволять більш детально вивчити фізико-механічні процеси, що відбуваються в тілі і основі цих споруд і вибрати найбільш надійну конструкцію для заданих умов будівництва і експлуатації. При цьому в розвиток прогресивних методів проектування ґрунтових споруд, під конструкцією будемо розуміти не тільки геометричні параметри споруди, але і її експлуатаційні особливості.

Господарська діяльність людини все більш впливає на зміну гідрогеологічних умов ґрунтових основ та дії на них техногенних факторів. Причиною таких змін та впливів є створення водосховищ, хвостосховищ, гідромеліоративних і енергетичних об'єктів, розробки корисних копалин тощо. Так,

наприклад, будівництво міст, а особливо промислових комплексів приводить до значних змін розміщення горизонту ґрунтових вод. Як правило, з розвитком міста і в процесі експлуатації промислових підприємств в районах з високим рівнем ґрунтових вод спостерігається його пониження і, навпаки, в районах глибокого залягання ґрунтових вод або їх відсутності спостерігається поява і підвищення рівня ґрунтових вод.

Високий рівень ґрунтових вод може бути обумовлений природними факторами, якщо він підвищується при зміні кліматичних умов, або може залежати від інших умов (порушення експлуатації водних комунікацій, що призводить до втрати води; використання «мокрих» процесів у виробництві; зміни рельєфу місцевості і, як наслідок, умов стоку атмосферних опадів тощо). Також впливає на підтоплення ґрунтових основ фільтрація води із зрошувальних систем, водосховищ, хвостосховищ, басейнів ГАЕС та інших господарських об'єктів.

На пониження горизонту ґрунтових вод може впливати зменшення інфільтрації опадів у ґрунт; забудова і асфальтування території; дренажування товщі ґрунту каналізаційними колекторами, різними підземними комунікаціями, лініями метрополітену тощо. Значна зміна режиму підземних вод проходить при некерованій роботі водозбірних свердловин, влаштуванні глибоких кар'єрів, шахт і інше.

Зміна гідрогеологічних умов у ґрунтових масивах і основ та техногенний вплив ведуть до виникнення різноманітних факторів: гідродинамічних сил фільтраційного потоку; зміни власної ваги ґрунту та фільтраційних і деформаційних його характеристик тощо.

Під час надзвичайних ситуацій (повенях, надлишкових атмосферних опадах, аварій в інженерних мережах тощо) величина і інтенсивність зростання названих факторів може

суттєво змінюватися, що приводить до виникнення значних вертикальних зміщень поверхні землі. Ці деформації ускладнюють нормальну експлуатацію, а в деяких випадках приводять до аварій промислових і енергетичних об'єктів, та можуть приносити значний економічний збиток.

Вивчення досвіду експлуатації природних і штучних ґрунтових основ промислових і енергетичних об'єктів показало, що оцінка їх напружено-деформованого стану (НДС) і вибір інженерних заходів з покращення їх роботи у багатьох випадках залежить від режиму і інтенсивності зміни гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів. Разом з тим у діючих нормах на сьогоднішній день відсутні чіткі рекомендації і методи розрахунку з прогнозу вертикальних зміщень поверхні землі залежно від вказаних факторів.

Таким чином, розробка теоретичних та методичних основ з оцінки стійкості водонасичених укосів та прогнозу деформацій ґрунтових масивів і основ, при зміні їх гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів є актуальною проблемою. Вирішення даної проблеми дозволить дати якісну і кількісну оцінку стану ґрунтових водонасичених укосів і основ, виконати прогнозування зміни НДС на будь-який проміжок часу, встановити допустимі деформації природних і штучних ґрунтових основ промислових і енергетичних об'єктів при зміні гідрогеологічних умов. Це дасть можливість запобігти розвитку аварій та техногенних катастроф при будівництві і експлуатації господарських об'єктів, заощадити значні матеріальні ресурси.

1. Узагальнення досліджень з оцінки стану водонасичених укосів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищі

Основні вимоги до оцінки стану ґрунтових споруд викладенні у діючих ДБН. Виходячи з їх вимог, оцінку стійкості водонасичених ґрунтових укосів слід виконувати для максимально можливого пониження рівня води у водоймищі з найбільшою допустимою швидкістю і при цьому враховувати фільтраційні сили неусталеного фільтраційного потоку. Перевірку фільтраційної міцності ґрунту в тілі і основи споруди, а також місцевої стійкості слід виконувати для поперечного перерізу, що визначений з умови забезпечення загальної стійкості укосів. Крім того, для ґрунтових насипних споруд, в основі яких знаходяться глинисті водонасичені ґрунти, слід виконувати розрахунки надлишкових тисків від консолідації (ущільнення) ґрунту.

На сьогодні для оцінки загальної стійкості укосів ґрунтових споруд застосовують дві основні розрахункові моделі.

Згідно із першою моделлю рахують, що потенційно-нестійка область ґрунтового масиву є жорстким недеформівним тілом (рис. 1.1).

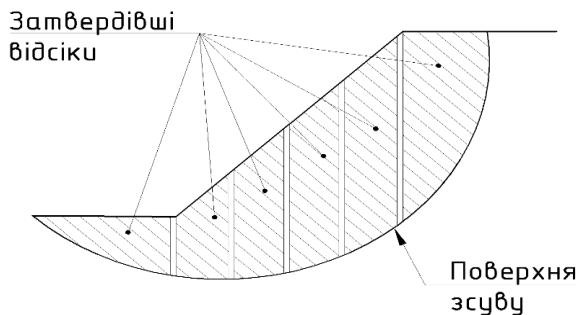


Рис. 1.1. Модель затверділих відсіків зсуву укосу

При цьому приймають допущення про наявність граничного стану ґрунту вздовж можливої поверхні зсуву укосу. В практиці, таку розрахункову модель, нерідко називають моделлю затвердівших відсіків зсуву укосів.

На основі моделі затвердівших відсіків зсуву розроблено ряд інженерних способів оцінки стійкості ґрунтових укосів, основними з яких є способи Г. Крея, К. Терцаги, Р. Р. Чугаєва, М. М. Маслова, А. Л. Можевітінова та інші.

Ступінь стійкості ґрунтових укосів (схилів) в узагальненому вигляді з використанням вище названих способів визначається за формулою

$$k_s = \frac{R}{A}, \quad (1.1)$$

де R , A — відповідно розрахункове значення здержуючих і зрушуючих сил відносно поверхні зсуву укосу.

Розрахунки стійкості ґрунтових укосів слід виконувати для круглоциліндричних поверхонь зсуву. При наявності в основі або в тілі споруди шарів ґрунту з більш низькими міцностними властивостями, слід виконувати розрахунки для довільних поверхонь зсуву.

При розрахунках стійкості ґрунтових укосів необхідно використовувати методи, що задовільняють умови рівноваги призми зсуву і її елементів у граничному стані і враховують напружений стан споруди і її основи.

Стосовно до конкретних геологічних умов однорідної конструкції тіла споруди можуть бути використані при відповідному обґрунтуванні перевірені практикою спрощені методи розрахунку.

Розрахунки фільтраційної міцності ґрунту тіла споруди виконують для поперечного перерізу, що призначений виходячи із розрахунку загальної стійкості укосів. При цьому, необхідно щоб виконувалась умова

$$J \leq \frac{1}{\gamma_n} J_{cr}, \quad (1.2)$$

де J – діючий середній градієнт напору в розрахунковій області фільтрації; J_{cr} – критичний середній градієнт напору, що приймається на основі дослідження ґрунтів, які відповідають реальним умовам експлуатації споруди.

Другою розрахунковою моделлю з оцінки несучої здатності основ і стійкості укосів ґрунтових споруд є модель, в основі якої лежить гіпотеза про те, що у всіх точках потенційно-нестійкої області ґрунт знаходиться у граничному стані (рис. 1.2).

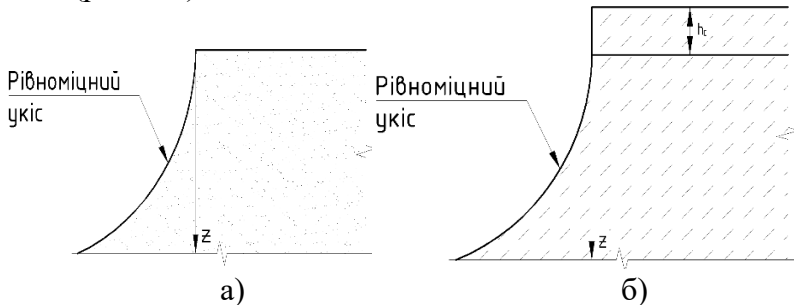


Рис. 1.2. Модель граничного (рівномірного) контура укоса: а – з піщаних ґрунтів, б – з глинистих ґрунтів

Основні положення цієї моделі і загальний метод рішення задач з оцінки стану ґрунтових споруд викладені у працях В. В. Соколовського, С. С. Галушкевича, В. Г. Березанцева. Подальший теоретичний розвиток ця модель отримала у працях Ю. А. Соболевського, А. С. Строганова, П. І. Яковлева та інших.

Методи моделі граничної рівноваги, з точки зору математичної постановки задач є досить точними. Але при аналізі зсувів ґрунтових масивів в реальних умовах встановлено, що ґрунт у потенційно-нестійких областях знаходяться в граничному стані у невеликому об'ємі. Крім

того, при використанні цих методів виникають труднощі з врахуванням неоднорідності ґрунтів.

З врахуванням вищесказаного найбільш широкого практичного застосування отримала модель затвердівших відсіків зсуву.

Поряд з названими розрахунковими моделями розроблені способи оцінки стану ґрунтових споруд на основі аналізу їх напружено-деформівного стану з використанням тої чи іншої математичної моделі ґрунту (деформаційної, енергетичної, зміцнюючого пластичного середовища та інші). Дані способи дозволяють виконати оцінку стану споруди в досить повному об'ємі, але за своєю складністю і великим об'ємом робіт, застосовуються головним чином для оцінки споруд I або II класу надійності.

Таким чином, застосування того чи іншого методу з аналізу стійкості ґрунтових укосів дає можливість з достатнього ступеню точності оцінити стан ґрунтових споруд. Однак існуючі методи з оцінки стану ґрунтових споруд різного призначення повинні містити не тільки загальні для них елементи розрахунку, але й відображати специфічні особливості, що обумовлені конструктивними, технологічними і експлуатаційними вимогами до даних споруд.

На основ узагальнення досвіду проектування, будівництва і експлуатації ґрунтових споруд, а також аналізу наукових досягнень з даної проблеми встановлюємо, що є ряд питань, що пов'язані з оцінкою стану цих споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах. Практика проектування вимагає вирішення таких питань, як визначення оптимальних параметрів ґрунтових споруд, експлуатація яких проходить в умовах зміни гідрогеологічних умов, встановлення допустимої швидкості пониження рівня води у водоймищі.

Практичну цінність актуальності перерахованих питань можна показати на прикладах влаштування будівельних

котлованів під основи споруд деяких існуючих гідровузлів. Внаслідок відсутності методики оцінки стану огорожуючих ґрунтових споруд при осушенні котловану, інтенсивність пониження рівня води призначалась на основі практичного досвіду, без глибоких теоретичних обґрунтувань. Так, наприклад, при будівництві Каховського гідровузла середня інтенсивність водопониження складала 23 м/добу, найбільша – 28 м/добу; Кременчуцького – відповідно від 8 до 23 м/добу; Іркутського від 15 до 15 м/добу. Ці дані показують, що навіть в межах одного гідровузла швидкість пониження рівня води між мінімальним і максимальним її значенням коливається в значних межах. В загальному випадку на основі аналізу наукових досліджень з даного питання встановлено, що зміна коефіцієнту запасу стійкості укосів при пониженні рівня води у водоймищі може відбуватися в межах 0,6–1,6.

Наведені дані дозволяють зробити висновок, що на сьогоднішній день немає задовільного рішення з проблеми забезпечення стійкості ґрунтових споруд, експлуатація яких проходить в умовах змінного рівня води у водоймищі.

2. Основні фактори, що впливають на стійкість водонасичених ґрунтових укосів і масивів під час зниження рівня води у водоймищі

При експлуатації ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищі на надійність, довговічність і безперебійну експлуатацію здатні впливати наступні основні фактори [8]: швидкість зниження рівня води у водоймищі, гідродинамічні сили від неусталеного фільтраційного потоку, геометричні параметри споруди, фільтраційні властивості ґрунту, зміна фізико-механічних властивостей ґрунту тіла і основи споруди у наслідок його водонасичення і осушення тощо.

Вплив основних факторів на стан ґрунтових споруд, експлуатація на яких проводиться в умовах змінного рівня води у водоймищі, розглянемо на прикладі укосу споруди, що влаштована з водопроникливого ґрунту і в основі якої знаходиться стисливий зв'язний ґрунт (рис. 2.1).

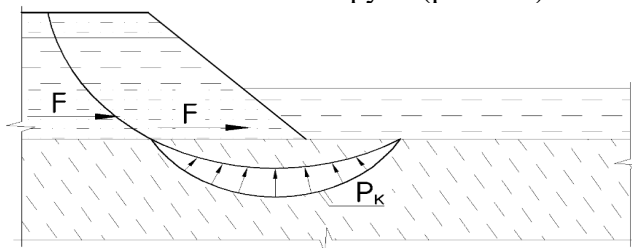


Рис. 2.1. Розрахункова схема укосу в умовах змінного рівня води у водоймищі

Для аналізу механічних процесів в тілі і основі споруди, розглянемо стан ґрунту нижче депресійної поверхні. Відомо що основними компонентами ґрунту є тверді мінеральні частки, води і газу. При цьому, тверді частинки знаходяться у зваженому стані. За цих обставин, при пониженні рівня води у водоймищі, ґрунтова вода буде швидко витікати з тіла укосу. Це дозволить деякій його частині звільнитися від

гідростатичного зважування і стати більш важкою. В зв'язку з цим, вага ґрунту в межах потенційно нестійкої області споруди буде визначатися за наступною розрахунковою схемою (рис. 2.2).

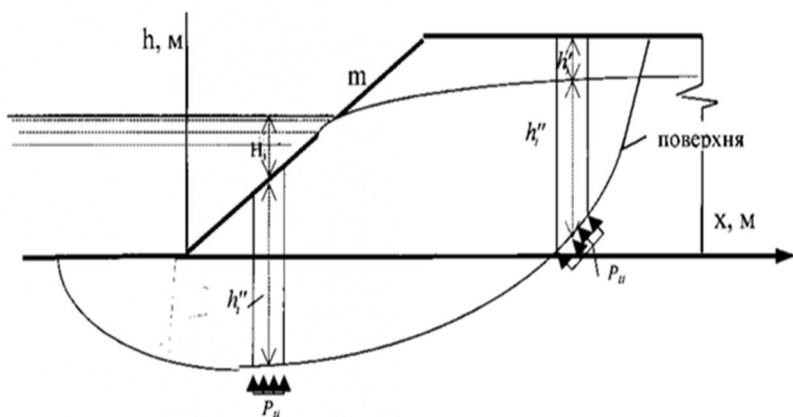


Рис. 2.2. Схема розрахунку ваги ґрунту відсіків зсуву укосу

а) для відсіків зсуву вище депресійної поверхні

$$Q_i = h_i \cdot \gamma_i \cdot b_i, \quad (2.1)$$

де γ_i – питома вага ґрунту природної вологості i -го відсіку зсуву; h_i – середня висота i -го відсіку; b_i – ширина i -го відсіку зсуву;

б) для відсіків зсуву, в межах якої проходить депресійна крива

$$Q_i = (h_i \cdot \gamma_i + h_i'' \cdot \gamma_{нас,i}) \cdot b_i, \quad (2.2)$$

де h_i'' – середня висота між депресійною поверхнею і поверхнею зсуву; $\gamma_{нас,i}$ – питома вага ґрунту у насиченому стані i -го відсіку зсуву;

в) для відсіків області зсуву, що знаходяться під водою зі сторони водоймища

$$Q_i = (h_i'' \cdot \gamma_{nac,i} + H_i \cdot \gamma_w) \cdot b_i, \quad (2.3)$$

де H_i – висота стовпа води над i -тим відсіком зсуву зі сторони водоймища; γ_w — питома вага води.

Таким чином, вага ґрунту у водонасиченому укосі з пониженням рівня води постійно змінюється в часі в залежності від розташування депресійної поверхні в тілі споруди і коливання рівня води у водоймищі.

На частину потенційно нестійкої області зсуву, в межах якої проходить депресійна поверхня, буде діяти сила гідростатичного зважування. Значення якої в межах i -го відсіку зсуву можна визначити із залежності:

$$P_z = \gamma_w \cdot b_i \cdot h_i'' \cdot (2.4)$$

З пониженням депресійної поверхні в тілі споруди сила гідростатичного зважування частин ґрунту в межах області зсуву укосу зменшується.

Крім того, в системи діючих сил в межах i -го відсіків зсуву, що розміщені нижче депресійної поверхні діє фільтраційна сила від неусталеного фільтраційного потоку

$$F_{hi} = \gamma_w \cdot b_i \cdot h_i'' \cdot I, \quad (2.5)$$

I – середній градієнт напору в межах i -го відсіку зсуву, який можна прийняти рівним середньому нахилу депресійної поверхні.

Для випадку, коли фільтраційний потік в укосі плавно змінюється, то можна зробити припущення, що лінії рівних напорів вертикальні, а розподілення тисків у воді проходить за гідростатичним законом. Тоді фільтраційні сили будуть горизонтальні і визначаються за формулою:

$$F_{hi} = \gamma_w \cdot h_i'' \cdot \Delta H, \quad (2.6)$$

де ΔH – пониження кривої депресії в межах i -го відсіку зсуву.

Аналіз механічних процесів в споруді з ґрунтових матеріалів показав, що збільшення ваги її верхньої частини (див. рис. 2.1) може спричинити стиснення (консолідацію) водонасиченого глинистого ґрунту основи. Для такого стану

грунту характерна наявність надлишкових тисків в поровій воді.

$$P_{\kappa} = \gamma_w \cdot H, \quad (2.7)$$

де H – надлишкові напори у воді від дії додаткового навантаження.

Якісну картину процесів, що відбуваються в тілі і основі споруди при осушенні можна охарактеризувати наступним чином. Наявність водонасиченого стисливого глинистого ґрунту призводить до того, що зі збільшенням на нього навантаження на деяку величину ΔQ , значна його частина в початковий момент часу може передаватися на воду, що знаходиться в порах ґрунту. В результаті чого, активні сили, що намагаються порушити стійкість укусу збільшуються за рахунок зростання навантаження на величину ΔQ на укис, а реактивні сили опору практично не збільшуються, так як додаткове навантаження ΔQ , що передається на воду, не збільшує нормальні напруження в скелеті ґрунту. В результаті чого стійкість укусу на початковий момент часу під час збільшення навантаження, зменшується. З перебігом деякого часу, в залежності від інтенсивності розсіювання надлишкових тисків, нормальні напруження будуть збільшуватися. Відповідно до цього і збільшаться реактивні сили опору. Таким чином, стійкість укусу буде підвищуватися до моменту часу, коли розсіювання надлишкових тисків закінчиться повністю.

Тривалість процесу консолідації ґрунту залежить від багатьох факторів. Дослідження з даного питання показали, що процес виникнення, збільшення і розсіювання надлишкових тисків при консолідації ґрунту є досить складним. Їх значення залежить від величини і часу прикладання навантаження, фізико-механічних властивостей ґрунту, умов на межі області фільтрації. Крім того, на час розсіювання надлишкових тисків впливають конструктивні особливості споруди і її геометричні розміри. Для визначення

надлишкових тисків при консолідації ґрунту, розроблено ряд методів [6].

Експлуатація ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищі призводить до багаторазового водонасичення і осушення ґрунтів з яких вони влаштовані, і як наслідок, до зміни їх міцнісних характеристик. Це кута внутрішнього тертя і питомого зчеплення ґрунту. Так, як кут внутрішнього тертя ґрунту, а особливо зчеплення, не залишаються для великої групи ґрунтів при водонасиченні і осушенні сталими величинами. При цьому багаточисельними дослідженнями встановлено, що у залежності від природи сил зчеплення і вологості ґрунтів їх значення по різному відображається на величині зчеплення. Зчеплення, яке утворене цементациєю частин, є найбільш стабільним. Капілярне зчеплення зникає при вологості ґрунту, яка перевищує повну капілярну вологоємність. Зчеплення, що утворене молекулярними силами, знижується з ростом вологості. Швидкість зменшення зчеплення зі збільшенням вологості залежить від ступеня ущільнення ґрунту, його дисперсності і складу рідкої фази.

Таким чином, на основі розглянутих механічних процесів в межах потенційно-нестійкої області укусу можна зробити висновок, що зі зміною рівня води у водоймищі ступінь стійкості його залежить від наступних факторів: додаткової ваги верхніх шарів ґрунту, що звільнилися від гідростатичного зважування, неусталеного фільтраційного потоку в масиві споруди; надлишкових тисків від консолідації ґрунту; зміни сил зчеплення в пилувато-глинистих ґрунтах внаслідок їх водонасичення і осушення тощо.

2.1. Динаміка депресійної поверхні у тілі ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі

Значним силовим фактором, що виникає в межах потенційно-нестійкої призми зсуву, є неусталений фільтраційний потік, що обумовлений зміною умов на межі області фільтрації. Його наявність призводить до виникнення гідродинамічних сил, що значно впливають на напружений стан в скелеті ґрунту.

Критерієм необхідності врахування гідродинамічних сил від неусталеного фільтраційного потоку при зниженні рівня води у водоймищі згідно із дослідженням Можевітінова А. Л. і Сулейманова І. А є:

$$\alpha = \frac{k}{\mu \cdot V \cdot t}, \quad (2.8)$$

де k – коефіцієнт фільтрації ґрунту тіла споруди; V – швидкість зниження рівня води у водоймищі; μ, t – відповідно, коефіцієнт водовіддачі ґрунту тіла споруди і закладання укосу.

При цьому, критерій α повинен знаходитись у межах:

$$0,05 \leq \alpha \leq 5,0. \quad (2.9)$$

При $\alpha < 0,05$, можна вважати, що депресійна поверхня в тілі і в укосів споруди не змінюється за час зниження рівня води у водоймищі. Для даного випадку, розрахунки стійкості укосів необхідно вести, як для миттєвого зниження рівня води у водоймищі.

При $\alpha > 5,0$, можна вважати, що депресійна поверхня отримує незначне відставання від рівня води, що понижується у водоймищі. Для даного випадку, можна допустити, що розміщення депресійної поверхні в тілі укосу відповідає рівню води у водоймищі на певний час його спорощення.

Розміщення депресійної поверхні в тілі і укосі ґрунтової споруди на будь-який момент зниження рівня води у водоймищі можна встановити експериментально, наприклад

методом ЕГДА, існуючими аналітичними або чисельними розв'язками.

Для гребель, що влаштовані з однорідного ґрунту (рис. 2.3), розміщення депресійної поверхні в їх тілі і укосі на будь який момент часу зниження рівня води у водоймищі можна встановити з використанням залежності В. И. Шестакова.

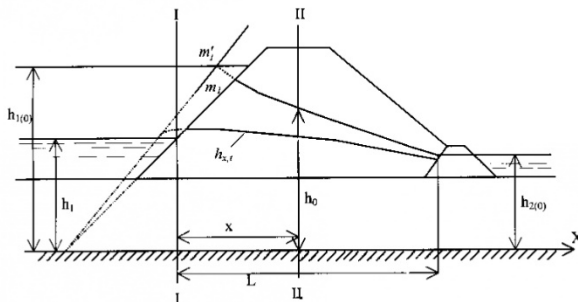


Рис. 2.3. Розрахункова схема з визначення депресійної поверхні в тілі греблі при пониженні рівня води у водоймищі

$$h(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & h_0^2 - v \cdot t \left[h_{1(0)} + h_1 + \frac{m_1 (h_{1(0)}^2 - h_{2(0)}^2)}{L} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \cdot \left[F(\lambda, n) - \frac{x + m_1 \cdot vt}{L + m_1 \cdot vt} F(\lambda_L, n) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (2.10)$$

де v – середня швидкість зниження рівня води у водоймищі;
 $h_1 = h_{1(0)} - vt$ – глибина води у водоймищі під час зниження рівня води; $F(\lambda, n); F(\lambda_L, n)$ – функції, що визначаються з монограм (рис. 2.4).

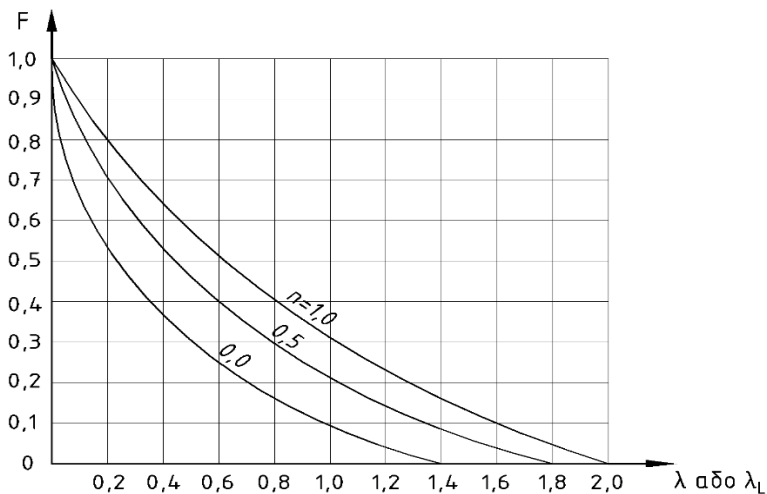


Рис. 2.4. Монограми для визначення функцій $F(\lambda, n)$; $F(\lambda_L, n)$

Автором [9] отримано залежність для встановлення депресійної поверхні на будь-який момент часу спорожнення водоймища для однорідних укосів або схилів фільтраційний потік у яких відбувається із нескінченності зі сторони ґрунтового масиву (рис. 2.5).

З метою спрощення задачі пониження рівня води у водоймищі буде відбуватися за лінійним законом

$$h = V \cdot t, \quad (2.11)$$

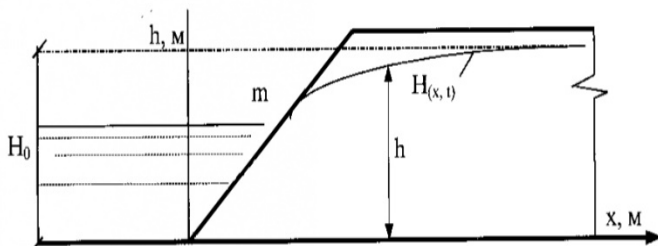


Рис. 2.5. Розрахункова схема з визначення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води у водоймищі

Під час зниження рівня води у водоймищі в ґрунтовому масиві виникає неусталений фільтраційний потік, який для випадку одновимірного потоку з достатньою точністю можна описати рівнянням

$$\frac{k \cdot h}{\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H(x, t)}{\partial t}, \quad (2.12)$$

де k – коефіцієнт фільтрації; h – потужність фільтраційного потоку; μ – коефіцієнт водовіддачі.

Граничні умови для ґрунтового укосу, притік води у якому відбувається із нескінченності, запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= H_0; \quad 0 < x < \infty; \quad \text{при } t = t_0 = 0; \\ H(x, 0) &= H_0 - V \cdot t = h_1; \quad 0 < t < \infty; \\ \frac{\partial H(+\infty, t)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Розв'язок даної задачі є аналогічним рішенням з теорії теплопровідності. Це дозволило використати ряд формул з даної теорії. Тоді розв'язок рівняння (2.12) з урахуванням граничних умов (2.13) отримаємо у вигляді:

$$H_{(x,t)} = H_0 - V \cdot t + (V \cdot t) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt[2]{\frac{k \cdot h}{\mu} \cdot t}} \right), \quad (2.14)$$

де H_0 – глибина води у водоймищі до початку спорожнення; t – будь-який час спорожнення рівня води у водоймищі; x – горизонтальна координата деякої точки, що характеризує розміщення кривої депресії; V – швидкість пониження рівня води у водоймищі.

З метою встановлення закономірностей динаміки депресійної поверхні у водонасичених укосах ґрунтових спорудах під час зниження рівня води у водоймищі були виконані теоретичні дослідження з використанням залежності

(2.14). При цьому, дослідження виконувались для параметрів ґрунтових споруд і швидкості пониження рівня води у водоймищі в межах критерію $0,05 \leq \alpha \leq 5,0$, що визначає необхідність урахування неусталеного фільтраційного потоку в оцінці стійкості укосів. Крім того, в процесі досліджень розглянуто два види основ: 1 – з добре водопроникливими ґрунтами $k_f > 0,75$ м/добу; 2 – з мало водопроникливими ґрунтами $k_f < 0,05$ м/добу.

Звичайно, мало водопроникна основа з $k_f < 0,05$ м/добу прийнята з допущенням, так, як швидкість фільтрації в даному випадку незначна у порівнянні зі швидкістю зниження рівня води у водоймищі.

Розрахунки виконувались для наступних значень α : 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 5,0, що дозволило урахувати практично основні випадки, які зустрічаються під час експлуатації ґрунтових споруд в умовах зниження рівня води у водоймищі.

За результатами проведених досліджень для однорідних ґрунтових споруд трапецеїдального перерізу розташованих на мало водопроникливих основах, побудовані графіки залежності (рис. 2.6).

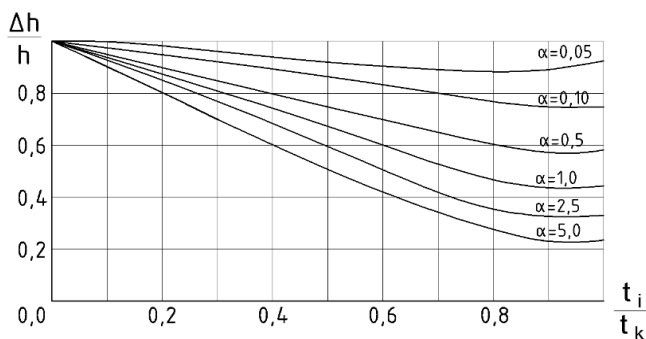


Рис. 2.6. Динаміка кривої депресії у тілі укосу дамби при пониженні рівня води у водоймищі, що розміщена на мало водопроникливих ґрунтах основи

$$\frac{\Delta h}{h} = f\left(\frac{t_i}{t_k}\right), \quad (2.15)$$

де $\Delta h = h_i$ – розміщення депресійної поверхні в масиві споруди на деякий час t_i ; h – початкове розміщення депресійної поверхні в тілі укосу; t_k – кінцевий момент часу який відповідає цілковитому зниженню рівня води.

На основі одержаних розрахункових даних підтверджено, що при даних умовах будівництва і експлуатації ґрунтових споруд депресійна поверхня має значне відставання від зниження рівня води у водоймищі. Наприклад, при $\alpha=5,0$ відставання депресійної поверхні на момент часу $\left(\frac{t_i}{t_k}\right)=1$,

становить $0,25h$, а для $\alpha=0,05$ складає $0,92h$. Крім того, в процесі досліджень встановлено, що швидкість падіння депресійної поверхні по висоті укосу змінюється. Її значення в початковий момент часу зростає, потім зменшується, а при незначному співвідношенні $\left(\frac{t_i}{t_k}\right)$ падіння депресійної поверхні

практично не відбувається.

Аналогічно були виконані дослідження для випадку, коли споруда розташовані на добре водопроникливих ґрунтах основи. Результати досліджень наведені на рис. 2.7.

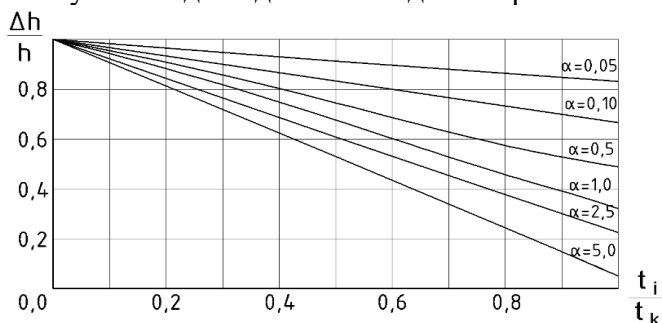


Рис. 2.7. Динаміка кривої депресії у тілі укосу дамби при пониженні рівня води у водоймищі, що розміщена на добре водопроникливих ґрунтах основи

На основі проведених досліджень встановлено, що за прийнятих умов будівництва і експлуатації ґрунтових споруд відставання депресійної поверхні від рівня води при $\alpha=5,0$ складає всього $0,05h$, а при $\alpha=0,05$ воно рівне $0,88h$. Крім того, на відміну від розрахункової схеми з мало водопроникними ґрунтами основи, падіння депресійної поверхні в тілі укосу змінюється незначно. Для даного випадку на динаміку депресійної поверхні в тілі укосу значно впливає дренажна здатність ґрунту основи, що забезпечує рух фільтраційного потоку у вертикальному напрямку. При цьому градієнт напору дорівнює одиниці, а падіння депресійної поверхні в тілі укосу відбувається практично з однаковою швидкістю.

2.2 Вплив фільтраційних сил на стійкість водонасичених укосів ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі

Аналіз механічних процесів, що відбуваються в тілі ґрунтових споруд під час зниження води у водоймищі показав, що рух неусталеного фільтраційного потоку відбуваються, як у горизонтальному, так і вертикальному напрямках. За наявності водопроникливих ґрунтів в основі – у вертикальному напрямку. Це призводить до збільшення активних сил і тим самим до зменшення стійкості укосів споруди.

Із залежності (2.5) видно, що маючи величину градієнта напору I для кожної точки ґрунтового масиву у якому відбувається фільтрація, можна знайти значення питомої фільтраційної сили для всіх точок ґрунтового масиву, а потім дуже легко визначити сумарну фільтраційну силу F_h на весь фільтруючий ґрунтовий масив. Але у багатьох випадках (особливо при розрахунках стійкості ґрунтових укосів за методом плоских поверхонь зсуву) більш зручним методом з визначення сумарної фільтраційної сили F_h є контурний

спосіб. Відповідно до цього способу не вимагається визначення величини градієнта напору I для кожної точки фільтраційного потоку, і відповідно побудови ліній рівних напорів для усієї області фільтрації. Згідно даному способу, для визначення сумарної фільтраційної сили F_h , достатньо знати тільки розподіл напорів на межах області фільтрації. Такий підхід підтверджується теоремою М.В. Остроградського, згідно якої функція, що розподілена у деякій області може бути визначена граничними значеннями.

При визначенні горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h , як правило, застосовували графоаналітичний метод (рис. 2.8).

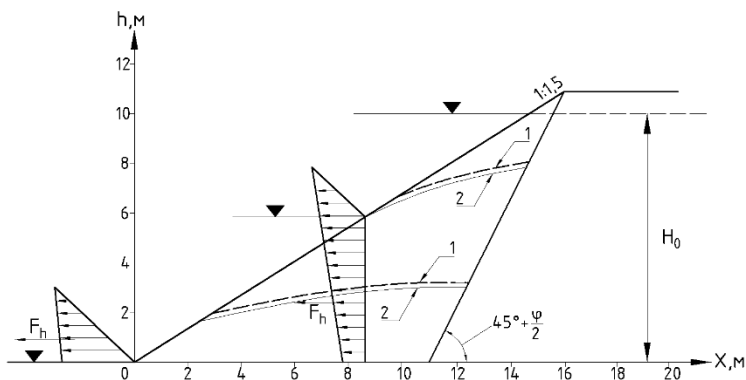


Рис. 2.8. Розрахункова схема з визначення горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h : 1 – положення кривої депресії в тілі укосу, що отримано теоретично; 2 – теж, експериментально

Для підвищення ефективності виконання розрахунків з допомогою ПЕОМ вимагається заміна такої побудови. У зв'язку з цим, виникла необхідність в отриманні аналітичної

залежності з визначення горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h .

Для випадку, що наведено на рис. 2.8, залежності з визначення горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h отримано у вигляді [9]:

$$F = 0,5 \cdot \gamma_w \left(H_{(x,t)3} \cdot H_{(x,t)2} - H_{(x,t)3} \cdot h_1 - h_1^2 + H_{(x,t)1} \cdot h_1 \right), \quad (2.16)$$

де $\left(H_{(x,t)3}; H_{(x,t)2}; H_{(x,t)1} \right)$, ордината кривої депресії у характерних точках призми зсуву укусу на момент деякого часу t (визначається від площини порівняння, що проходить на рівні горизонту води у водоймищі); $h_1 = H_0 - V \cdot t$ – глибина води у водоймищі на деякий момент часу t .

Для більш складної геологічної будови укусу і основи залежність (2.16) буде мати вигляд:

$$F = 0,5 \cdot \gamma_w \left(\begin{aligned} &H_{(x,t)3} \cdot H_{(x,t)2} - H_{(x,t)3} \cdot h_1 - h_1^2 + H_{(x,t)1} \cdot h_1 + \\ &+ H_{(x,t)1} \cdot h_2 - h_1 \cdot h_2 \end{aligned} \right), \quad (2.17)$$

де h_2 заглиблення поверхні зсуву в ґрунт основи (вимірюється від нижньої брівки укусу).

Для попередніх розрахунків, можна прийняти достатньо малий похил кривої депресії і осереднити функції

$H_{(x,t)}$:

$$H_{(c)} = \frac{1}{l} \int_0^l H_{(x,t)} dx, \quad (2.18)$$

де l – відстань від початку координат по осі абсцис до крайньої точки частини укусу, що зсувається.

$$\text{Тоді,} \quad H_{(c)} = H_0 - V \cdot t + (V \cdot t) \operatorname{erf} \left(\frac{l}{2 \sqrt{\frac{k \cdot h}{\mu} \cdot t}} \right), \quad (2.19)$$

де $-h$ потужність фільтраційного потоку.

Взявши за основу формулу (2.19) можна безпосередньо визначати значення горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h . Для прикладу, що наведено на рис. 2.8 значення, F_h запишиться у вигляді:

$$F_h = 0,5 \cdot \gamma_w \left\{ \left[H_0 - V \cdot t + (V \cdot t) \operatorname{erf} \left(\frac{l}{2 \sqrt{\frac{k \cdot h}{\mu}} \cdot t} \right) \right]^2 - (H_0 - V \cdot t)^2 \right\}, \quad (2.20)$$

У загальному випадку, для більш складних інженерно-геологічних умов і форми поверхні зсуву укусу, утримано залежність у вигляді.

$$F_h = 0,5 \cdot \gamma_w \left\{ \left[H_0 - V \cdot t + (V \cdot t) \operatorname{erf} \left(\frac{l}{2 \sqrt{\frac{k \cdot h}{\mu}} \cdot t} \right) \right]^2 - (H_0 - V \cdot t)^2 + \left[H_0 - V \cdot t + (V \cdot t) \operatorname{erf} \left(\frac{l}{2 \sqrt{\frac{k \cdot h}{\mu}} \cdot t} \right) \right] \cdot h_2 - (H_0 - V \cdot t) \cdot h_2 \right\}, \quad (2.21)$$

Отримані залежності дають можливість, без графічної побудови, аналітично визначати значення горизонтальної складової сумарної фільтраційної сили F_h при пониженні рівня води у водоймищі.

При цьому величина фільтраційних сил залежатиме від таких основних факторів, як швидкість зниження рівня води у

водоймищі, фільтраційних властивостей ґрунту, геометричних параметрів споруди.

Названі фактори мають обмеження і можуть знаходитись в діапазонах, що наведені в таблиці 2.1.

Таблиці 2.1

Основні фактори, що впливають на величину фільтраційних сил в межах призми зсуву ґрунтового укосу під час зниження рівня води у водоймищі

Фактори	Значення
Швидкість зниження рівня води, V м/добу	0,15–1,0
Коефіцієнт фільтрації ґрунту, k_f м/добу	0,05–0,75
Коефіцієнт водовід давання, μ м	0,10–0,22
Коефіцієнт закладання укосу, t	2,0–3,0

Значення наведених факторів прийняті в межах критерію $0,05 \leq \alpha \leq 5,0$, що визначає необхідність урахування неусталеного фільтраційного потоку в ґрунтових спорудах під час зниження рівня води у водоймищах. Крім того на величину фільтраційних сил значно впливають граничні умови на контакті ґрунтової споруди з основою. За наявності добре водопроникливих ґрунтів в основі, або наявності піщаного горизонтального дренажу, як відмічалось вище, рух фільтраційного потоку в масиві ґрунтової споруди відбувається і у вертикальному напрямку.

На основі сказаного, в процесі вивчення цього питання, можна відмітити два характерних розрахункових випадки, за якими буде спостерігатися різний вплив фільтраційних сил на ступінь стійкості укосів.

Перший розрахунковий випадок характеризується водопроникливою межею на контакті споруди з основою і критерієм $\alpha = 5,0$. У другому розрахунковому випадку приймаємо водонепроникливу межу на контакті споруди з основою і $\alpha = 0,05$. Якщо у першому розрахунковому випадку передбачалось вивчити мінімальний вплив фільтраційних сил на стійкість ґрунтових укосів, то в другому – максимальний.

Методика проведення серії розрахунків здійснювалась

таким чином. Для кожного розрахункового випадку знаходилась нижня межа фільтраційної області, шляхом встановлення поверхні зсуву частини укосу. Її розміщення відповідає мінімальному коефіцієнту запасу стійкості укосу. Зазначимо, що приймаючи поверхню зсуву призми укосу в якості нижньої межі, робилось допущення, що в процесі спрацювання горизонту води перед укосом, в масиві ґрунтової споруди формується «сімейство» поверхонь зсуву, які займають деяку товщу (зону) ґрунту (1–2 м). Проте, враховуючи, що товщина цієї зони значно менша у порівнянні з фільтруючою областю, приймаємо її за поверхню.

Наступним етапом проведення розрахунків було вивчення положення кривої депресії в масиві споруди від неусталеного фільтраційного потоку, що обумовлений зниженням рівня води у водоймищі. На цьому підготовчий етап для проведення серії розрахунків закінчувався.

Оцінка впливу фільтраційних сил на стійкість ґрунтових укосів виконувалась в рамках моделі затвердівши відсіків зсуву (див. рис. 1.1) за методом похилих сил.

$$k_s = \frac{R}{A} = \frac{\left[\sum G_i \cos(\beta + \delta_i) \operatorname{tg}(\varphi_i + \beta - \alpha_i) + \sum \frac{c_i \cos \varphi_i \Delta s_i}{\cos(\varphi_i + \beta - \alpha_i)} \right]}{\sum G_i \sin(\beta + \delta_i)}, \quad (2.22)$$

де G_i – рівнодіюча активних сил в i -тому відсіку зсуву; α_i – кут нахилу поверхні зсуву в i -му відсіку відносно горизонтальної осі; δ_i – кут відхилення рівнодіючі G_i відносно вертикальної осі; φ_i , c_i – відповідно кут внутрішнього тертя і питоме зчеплення ґрунту i -го інженерно-геологічного елемента.

Значення кута β у формулі (2.22) визначається за залежністю:

$$\beta \approx \frac{1}{l} \sum (\alpha_i + \delta_i) \Delta x_i, \quad (2.23)$$

де l – відстань по горизонталі від початкової і кінцевої точки

поверхні зсуву укосу; Δx_i – горизонтальна координата і-го відсіку зсуву.

За результатами розрахунків побудовані графіки залежності коефіцієнта стійкості укосу і відносним зниженням рівня води у водоймищі $k_s = f\left(\frac{\Delta h}{h}\right)$ (рис. 2.9).

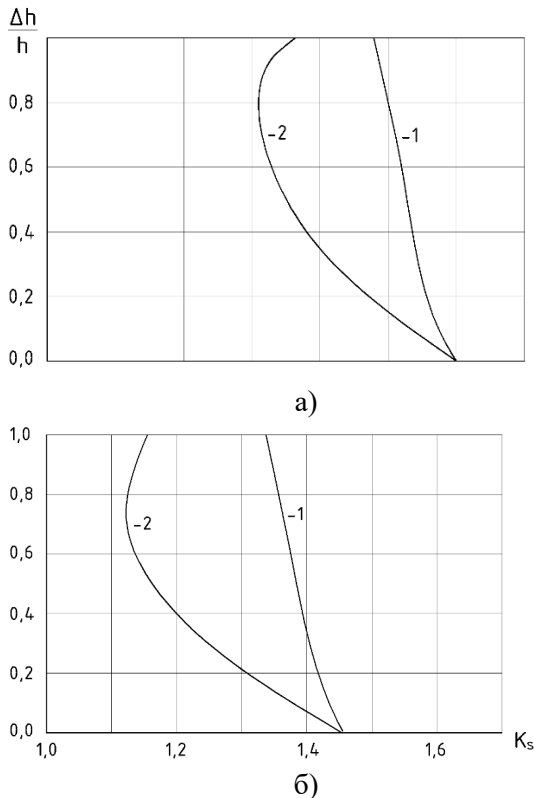


Рис. 2.9. Результати досліджень впливу фільтраційних сил на стійкість ґрунтового укосу при пониженні рівня води у водоймищі:
а) – перший розрахунковий випадок; б) – другий розрахунковий випадок

З аналізу досліджень встановлено, що коефіцієнт запасу стійкості укусу для першого розрахункового випадку знижується до 10–12% від загального свого значення (див. рис. 2.9, крива 1). Його мінімальне значення спостерігається у разі повного зниження рівня води у водоймищі. Такий незначний вплив фільтраційних сил на стійкість укусів пояснюється тим, що ґрунти тіла споруди і основи володіють високою водопроникністю і дренуючою здатністю, а також тим, що зниження рівня води у водоймищі відбувається з незначною інтенсивністю.

Інша картина спостерігається у другому розрахунковому випадку. В зв'язку з низькою водопроникністю і дренуючою здатністю ґрунтів тіла споруди і основи, а також інтенсивним зниженням рівня води у водоймищі, коефіцієнт запасу стійкості укусу знижується до 20–30%. При цьому, на відміну від першого випадку, мінімальне значення коефіцієнта запасу стійкості укусу спостерігається приблизно на глибині $2/3h$ спорожнення водоймища, де h – глибина води у водоймищі (див. рис. 2.9, крива 2). Ця обставина підтверджує висновок, зроблений проф. Р.А. Чугаєвим проте, що на характер зміни коефіцієнта запасу стійкості під час зниження рівня води у водоймищі впливає коефіцієнт закладання укусу споруди.

На основі виконаних розрахунків можна зробити висновок, що у першому розрахунковому випадку спостерігається мінімальний вплив фільтраційних сил на стійкість укусів ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі. Однак, виходячи з того, що коефіцієнт запасу стійкості укусу знижується на 10–12%, врахування фільтраційних сил в оцінці стійкості ґрунтових укусів необхідне.

У другому розрахунковому випадку спостерігається максимальний вплив фільтраційних сил на стійкість укусів.

На основі виконаних досліджень можемо зробити висновок, що одержані закономірності дозволили отримати

більш повну інформацію про динаміку депресійної поверхні в ґрунтових спорудах під час зниження рівня води у водоймищі. Результати досліджень можна використати для попередньої оцінки впливу фільтраційних сил на стійкість укосів ґрунтових споруд, експлуатація яких передбачається в умовах змінного рівня води у водоймищах.

2.3. Вплив зміни сил зчеплення в глинистих ґрунтах на стійкість укосів ґрунтових споруд

У більшості випадків ґрунтові споруди (дамби, греблі тощо) влаштовуються з глинистих ґрунтів. Під час експлуатації даних споруд в умовах змінного рівня води, міцнісні властивості ґрунтів можуть значно змінюватись. При цьому, на основі виконаних досліджень з даного питання встановлено, що сили зчеплення C на відміну від кута внутрішнього тертя φ здатні зменшувати свої значення до 50% і більше від початкових значень.

Слід зауважити, що розглядаючи питання з цієї точки зору, вплив сил зчеплення на стійкість укосів ґрунтових споруд також залежатиме від сумарної довжини елементарних ділянок поверхні призми зсуву. В свою чергу довжини елементарних ділянок поверхні зсуву визначаються геометричними параметрами споруди і фізико-механічними властивостями ґрунту. У зв'язку з цим дослідження даного питання проводились для різних значень питомого зчеплення C і щільності ґрунту ρ , а також коефіцієнта закладення укосу m і висоти споруди h (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Основні фактори і діапазони їх змін

Фактори	Прийняті значення
Питоме зчеплення ґрунту C , кПа	20–100
Щільність ґрунту ρ , г/см ³	1,6–1,9
Висота споруди h , м	5–16
Закладення укусу, m	1,5–3,0

Діапазони змін основних факторів приймалися на основі досвіду проектування, будівництва і експлуатації ґрунтових споруд.

Ступінь впливу питомого зчеплення ґрунту на стійкість укусів визначали за формулою:

$$\Delta k_s = k'_s - k''_s, \quad (2.24)$$

де k'_s – значення коефіцієнта стійкості укусу при заданому питомому зчепленні ґрунту; k''_s – значення коефіцієнта стійкості укусу при зміні питомого зчеплення ґрунту без зміни інших параметрів укусу.

Необхідна кількість розрахункових даних встановлювалась на основі теорії планування експерименту. Результати досліджень наведені на рис. 2.10.

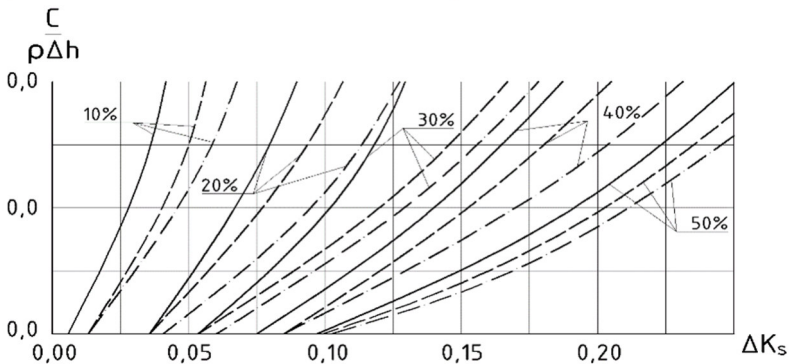


Рис. 2.10. Результати досліджень впливу сил зчеплення у ґрунті на ступінь стійкості ґрунтового укусу:

— $m = 1,5$; --- $m = 2,0$; - - - $m = 3,0$

На основі досліджень встановлено, що зменшення питомого зчеплення від його початкового значення і збільшення геометричних параметрів споруди приводять до значного зменшення коефіцієнта стійкості k_s . Наприклад, для $C = 0,05$ зменшення питомого зчеплення на 10% від початкового значення змінює коефіцієнт запасу стійкості всього на $\Delta k_s = 0,012$, а для $C = 0,78$ зменшення питомого зчеплення на 50% приводить до зниження коефіцієнта запасу стійкості на $\Delta k_s = 0,32$ (див. рис. 2.10).

На основі виконаних розрахунків можна зробити висновок, що використання інженерних способів розрахунків стійкості ґрунтових укосів дав можливість за мінімальною участю спеціалістів в області механіки ґрунтів оцінити стан ґрунтової споруди з урахуванням зміни сил зчеплення в глинистих ґрунтах. Наведені графіки (див. рис. 2.10) показують ступінь впливу зміни сил зчеплення в ґрунті на стійкість укосів споруд.

3. Методика розрахунку оптимальних параметрів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах

3.1 Визначення оптимальних параметрів ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах

У відповідності за існуючими підходами до конструювання та розрахунків ґрунтових споруд спочатку визначають властивості ґрунтів, вибирають геометричні параметри споруд (висоту, закладення укосів, ширину берм та інше) і виконують необхідні розрахунки на міцність і стійкість. Якщо одержані результати незадовільні то проводять коректування прийнятих параметрів і знову виконують необхідні розрахунки. Однак, як показує досвід експлуатації ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах, проектування їх таким чином не дає впевненості у тому, що вони будуть економічними і надійними.

На основі виконаних нами досліджень встановлено, що на надійність, довговічність і безперебійну експлуатацію ґрунтових споруд в умовах змінного рівня води у водоймищах, здатні впливати такі основні фактори: швидкість зниження рівня води у водоймищі, гідродинамічні сили від неусталеного фільтраційного потоку, геометричні параметри споруди, зміна властивостей міцності ґрунту тощо.

Оцінка стану ґрунтових споруд, експлуатацію яких проводять в умовах змінного рівня води у водоймищі з урахуванням розглянутих факторів, дозволить більш детально вивчити роботу їх конструкцій і вибрати найбільш економічну для заданих інженерно-геологічних умов будівництва і експлуатації. При цьому в розвиток прогресивних методів проектування ґрунтових споруд, під конструкцією будемо розуміти не тільки геометричні параметри споруди, але і її експлуатаційні особливості.

Для вирішення розглянутої проблеми в такій постанові, при розробці основних положень методики розрахунку даних споруд, використаємо елементи математичної теорії планування експерименту. Зокрема, застосування теорії математичного планування експерименту дозволить зменшити кількість можливих розрахунків і урахувати взаємний вплив різних факторів, що є важливим показником у проектуванні ґрунтових споруд експлуатацію яких планується проводити в умовах змінного рівня води у б'єфі. Для цього, як відмічалось в роботах Л. Н. Расказова, В. Г. Мельника, найбільш ефективного використовувати план повнофакторного або дрібнофакторного експерименту. Крім того, при використанні теорії математичного планування експерименту, для оцінки стану споруди можна використовувати регресивну математичну модель, яка в загальному вигляді записується так:

$$y = f(x, B), \quad (3.1)$$

де y – функція відгуку (y нашому випадку буде коефіцієнт запасу стійкість укусу); x – фактор, що вивчається; B – вектор (коефіцієнт) параметрів моделі.

У рівнянні (3.1) вид функції f задається, виходячи з інженерно-геологічних умов будівництва і експлуатації, а також параметрів споруди. Вона може мати, як лінійний, так і нелінійний характер (див. рис.2.5). Найбільш широкого застосування, в оцінці стану ґрунтових споруд, отримала поліноміальна регресивна модель у вигляді

$$y = B_0 \cdot f_0(x) + B_1 \cdot f_1(x) + B_2 \cdot f_2(x) + \dots + B_j \cdot f_j(x) + \dots + B_n \cdot f_n(x), \quad (3.2)$$

де $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_j(x)$, ..., $f_n(x)$ – транспонований вектор-рядок базисних функцій факторів x , що не залежить від параметрів моделі; B_0 , B_1 , B_2 , ..., B_j , ..., B_n – транспонований вектор (коефіцієнт) параметрів моделі.

У виразі (3.2) змінна x задається в деякій області, що визначається факторним простором. Тільки параметри моделі

B_j і B_n незалежні і їх необхідно визначити на основі розрахунку-експерименту і його статистичної обробки.

Відмітимо, що при використанні регресивних математичних моделей є можливим встановити не тільки оптимальні параметри ґрунтової споруди, а і режим експлуатації. Для цього на основі розрахунку-експерименту і його статистичної обробки необхідно отримати поліноміальне рівняння типу (3.2) з відомими коефіцієнтами B_j і B_n . В лівій частині цього рівняння знаходиться невідома змінна y (коефіцієнт запасу стійкості ґрунтових укосів). Її значення можна задати, виходячи з класу капітальності споруди за нормативними документами, а для деяких типів ґрунтових споруд прийняти рівними 1. Потім, відносно змінної x , якою виражена швидкість зниження рівня води і при заданих значеннях змінних x_n , що залишилися, необхідно розв'язати рівняння (3.2). Результат, який отримаємо при цьому і є допустимою швидкістю заниження рівня води перед спорудою. Приклад з визначенням оптимальних параметрів ґрунтових споруд експлуатація яких проходить в умовах змінного рівня води у водоймищі наведений розділі 3.2.

Згідно вимог ДБН для ґрунтових споруд розрахунок стійкості, водонасичених ґрунтових укосів слід виконувати для максимально можливого зниження рівня води з найбільшою допустимою швидкістю і при цьому враховувати фільтраційні сили від змінного фільтраційного потоку.

Для ґрунтових споруд, в основі яких знаходиться глинисті водонасичені стисливі ґрунти, в розрахунках стійкості слід враховувати фільтраційні сили, що виникають в процесі консолідації цих ґрунтів.

Взявши до уваги, що в залежності від фільтраційних властивостей ґрунту в тілі споруди і її основи, інтенсивність падіння депресивної поверхні змінюється за висотою укосу. Також змінюється ступінь стійкості водонасиченого укосу в

залежності від місця знаходження в ньому депресійної поверхні.

У зв'язку з цим, швидкість пониження рівня води у водоймищі необхідно визначати по висоті укосу окремо. Це дозволить встановити максимально можливу швидкість зниження рівня води у водоймищі.

Розглянемо випадок, коли відсутні додаткові фільтрації сили від процесу консолідації ґрунту основи. У даному випадку розрахунки ведемо таким чином:

а) з початку глибину води в б'єфі H ділимо на окремі ділянки Δh_i так, щоб $\sum_{i=1}^n \Delta h_i = H$ (рис. 3.1);

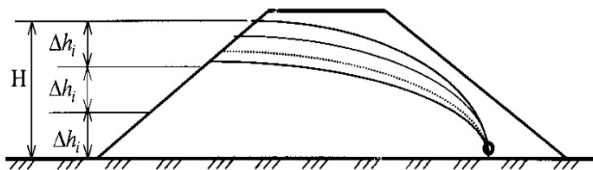


Рис. 3.1. Розрахункова схема з визначення інтенсивності пониження рівня води у водоймищі в залежності від стійкості верхового укосу греблі

б) на кожній ділянці, розпочинаючи з верхньої, встановлюємо положення депресійної поверхні в тілі споруди на різні проміжки часу t_i пониження рівня води у водоймищі та визначаємо відповідні коефіцієнти стійкості укосу k_{si} ;

в) визначення k_{si} виконуємо відносно встановленої поверхні зсуву укосу, а у випадку відсутності інформації про місце знаходження поверхні зсуву, розрахунки виконуємо для мінімального коефіцієнта стійкості k_{si} ;

г) в обох випадках за отриманими значеннями k_{si} будуємо графік залежності $k_{si} = f(t_i)$ (рис. 3.2).

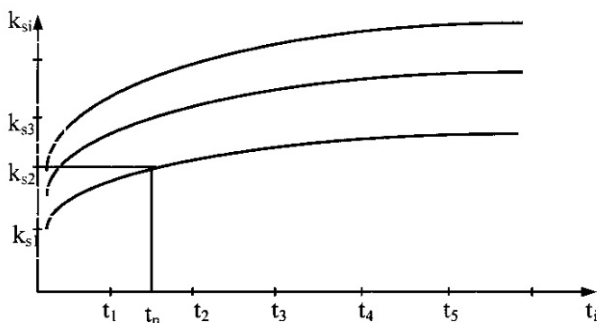


Рис. 3.2. Графік залежності $k_{si} = f(t_i)$

д) за величиною коефіцієнта стійкості K_s , що відповідає нормативному, або граничному ($K_s = 1, 0$), із залежності $K_s = f(t)$ встановлюємо час t пониження рівня води у водоймищі для даної ділянки (див. рис. 3.2).

ж) за встановленим значенням t , визначаємо місце знаходження депресійної поверхні в тілі споруди, яке є початком для ведення розрахунків на наступній ділянці та виконуємо розрахунки аналогічно, як і на попередній ділянці;

з) на основі даних розрахунків будуємо графік інтенсивності зниження рівня води у водоймищі за глибиною його спорожнення (рис. 3.3).

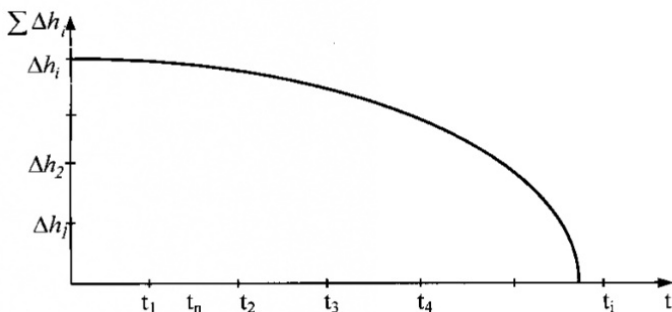


Рис. 3.3. Графік інтенсивності зниження рівня води у водоймищі за глибиною його спорожнення

Викладена методика представлена у вигляді блок-схеми для розрахунків на ПЕОМ (рис. 3.4).

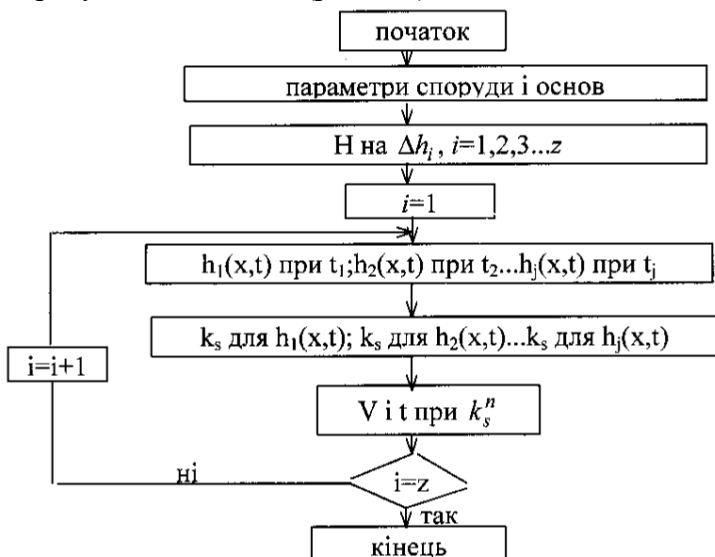


Рис. 3.4. Блок схема з визначення оптимальних параметрів ґрунтових споруд при зміні гідрогеологічних умов

Розроблено методику розрахунку для випадку, коли враховуються додаткові фільтраційні сили, що виникають від процесу консолідації ґрунту основи. Для даного випадку розрахунки виконуємо таким чином:

а) з початку, як і у випадку, коли відсутні додаткові фільтраційні сили від процесу консолідації ґрунту основи будуюмо графік залежності $k_{si} = f(t_i)$;

б) знаходимо час t зниження рівня води за значенням k_{si} , яке дещо більше нормативного (на величину зменшення коефіцієнта запасу стійкості за рахунок дії додаткових фільтраційних сил від процесу консолідації ґрунту);

в) для встановленого значення t визначаємо надлишковий тиск від консолідації ґрунту і вираховуємо нове

значення коефіцієнта запасу стійкості укусу $k_{\text{з.д}}$ з урахуванням даного фактора;

г) одержане значення $k_{\text{з.д}}$ порівнюємо з нормативним k_s^n , якщо $k_{\text{з.д}} \geq k_s^n$, розрахунки для першої ділянки закінчуємо і починаємо для другої, де всі операції проводимо аналогічно, як і для першої ділянки;

д) у випадку $k_{\text{з.д}} < k_s^n$ встановлюємо нове значення часу t пониження рівня води у водоймищі (в сторону збільшення) і повторюємо вище описані операції;

ж) розрахунки виконують до тих пір, поки не отримаємо $k_{\text{з.д}} \geq k_s^n$, і тільки після цього переходим до наступної ділянки, де розрахунки виконуємо таким же чином, як і для першої ділянки.

Викладена методика реалізована у вигляді блок-схеми для розрахунків на ПЕОМ (рис. 3.5).

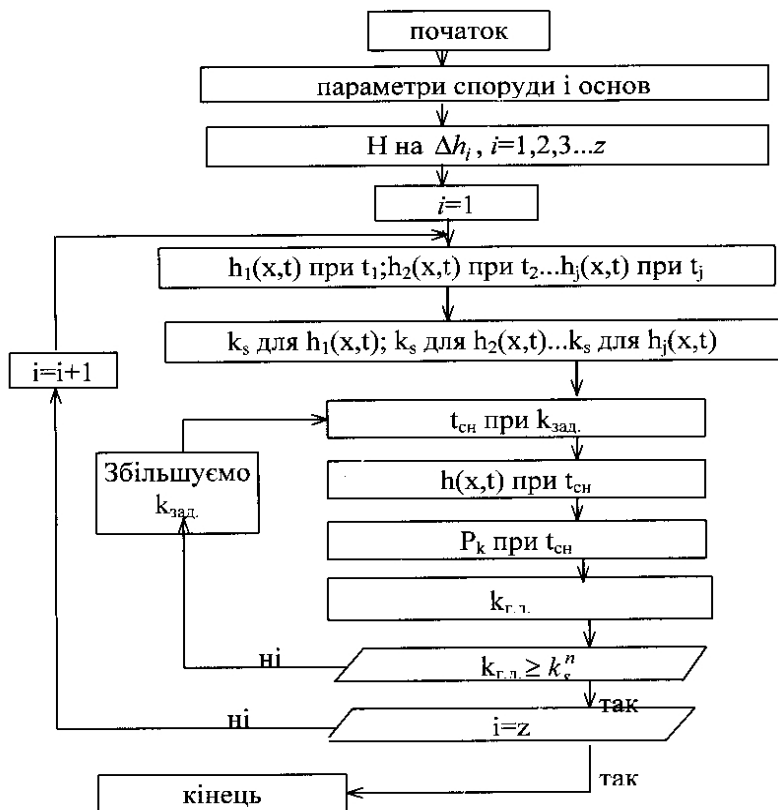


Рис. 3.5. Блок схема з визначення оптимальних параметрів ґрунтових споруд при зміні гідрогеологічних умов з урахуванням консолідації ґрунту основи

3.2. Приклад з визначення оптимальних параметрів ґрунтової греблі з урахуванням інтенсивності пониження рівня води у водоймищі

Для визначення оптимальних параметрів ґрунтової греблі з урахуванням інтенсивності пониження рівня води у водоймищі припустим, що тіло ґрунтової греблі влаштовано із

суглинка, що має такі фізико-механічні характеристики: $\rho=1,65 \text{ г/см}^3$; $\varphi=23^\circ$; $C=0,042 \text{ МПа}$. При цьому висота греблі 8,0м, а максимальна глибина води у водоймищі 5,3 м. В основі греблі розміщені водопроникні ґрунти. Основні їх різновиди і фізико-механічні властивості наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Фізико механічні властивості ґрунту основи греблі

Різновид ґрунту	Щільність мінеральних частин $\rho_s, \text{ г/см}^3$	Щільність ґрунту $\rho, \text{ г/см}^3$	Вологість $\omega, \%$	Кут внутрішнього тертя φ°	Питоме зчеплення $C, \text{ кг/см}^2$	Коефіцієнт фільтрації k_f , м/добу
Глина м'якопластична	2,65	1,60	50	8	0,15	0,1÷0,8
Суглинок тугопластичний	2,68	1,70	40	10	0,15	0,1÷1,0
Супіски пластичні	2,68	1,65	38	15	0,10	0,2÷1,5

Розв'язок

1. Вибираємо основні фактори, що впливають на параметри греблі і їх кількість. В наведеному прикладі кількість факторів, що досліджуються рівне 3: швидкість пониження рівня води у водоймищі V ; критерій, що характеризує положення депресійної поверхні, в тілі греблі від неусталеного фільтраційного потоку α ; коефіцієнт закладання укосів m .

2. Узявши до уваги, що в основі греблі розміщені водопроникливі ґрунти, характер зміни значення коефіцієнту запасу стійкості укосів при пониженні рівня води у водоймищі може мати з деяким допущенням лінійну залежність (див. рис.2;5 крива1). У зв'язку з цим, для встановлення основних параметрів греблі приймаємо лінійну математичну модель, яка для випадку варіації трьох факторів має вигляд:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{123} \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad (3.3)$$

де x_1 – швидкість пониження рівня води, $0,1 \text{ м/добу} \leq V_n \leq 1,0 \text{ м/добу}$; x_2 – критерій, що характеризує положення депресійної поверхні в тілі греблі від неусталеного фільтраційного потоку, $0,1 \leq V_n \leq 5,0$; x_3 – коефіцієнт закладання укосів; $2 \leq m \leq 3$.

Матриця вибраного плану і результати розрахунку наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Матриця планування і результати розрахунку параметрів греблі

x_1	x_2	x_3	Паралейні розрахунки			Середнє значення у
			y_1	y_2	y_3	
1	2	3	4	5	6	7
-1	-1	-1	1,299	1,418	1,289	1,335
+1	-1	-1	1,178	1,282	1,51	1,204
-1	+1	-1	1,340	1,452	1,337	1,376
+1	+1	-1	1,189	1,299	1,179	1,222
-1	-1	+1	1,370	1,484	1,361	1,405
+1	-1	+1	1,215	1,325	1,203	1,246
-1	+1	+1	1,400	1,510	1,393	1,434
+1	+1	+1	1,225	1,335	1,215	1,258

Примітки:

1. позначення «+1» показує максимальне значення фактура, що розглядається, «-1» – мінімальне;

2. y_1, y_2, y_3 , – значення коефіцієнтів запасу стійкості укосу, що визначені відповідно за формулами К. Терцаги Р.Р. Чугаєва, А.В. Бішопу.

На основі виконаних розрахунків і їх статистичної обробки отримана слідуєча регресивна математична модель:

$$y = 1,310 - 0,0773 \cdot x_1 + 0,0123 \cdot x_2 + 0,0258 \cdot x_3 - 0,0051 \cdot x_1 \cdot x_2 - 0,0061 \cdot x_1 \cdot x_3 - 0,00237 \cdot x_2 \cdot x_3. \quad (3.4)$$

Отримане рівняння необхідно перевірити на адекватність, тобто встановити, чи вірно відображує модель (3.4) стійкість укосів греблі при пониженні рівня води у водоймищі. Для цього, було виконано додаткові розрахунки стійкості укосів в області варіації діючих факторів.

Для встановлення нормального режиму експлуатації греблі розглянемо рівняння (3.4). У цьому рівнянні міститься три змінні x_i з постійними коефіцієнтами, що отримані на основі розрахунку. За прийнятими позначення змінна x_1 характеризує швидкість пониження рівня води у водоймищі. Розв'язавши рівняння (3.4) відносно x_1 при заданих значеннях змінних x_2, x_3 і y , отримуємо певне значення допустимої швидкості пониження рівня води у водоймищі. При цьому, якщо змінювати x_2, x_3 і y , отримуємо нове значення швидкості пониження рівня води у водоймищі. Таким чином, можна отримати необхідну кількість розрахункових даних, що дозволить побудувати номограму (рис. 3.6).

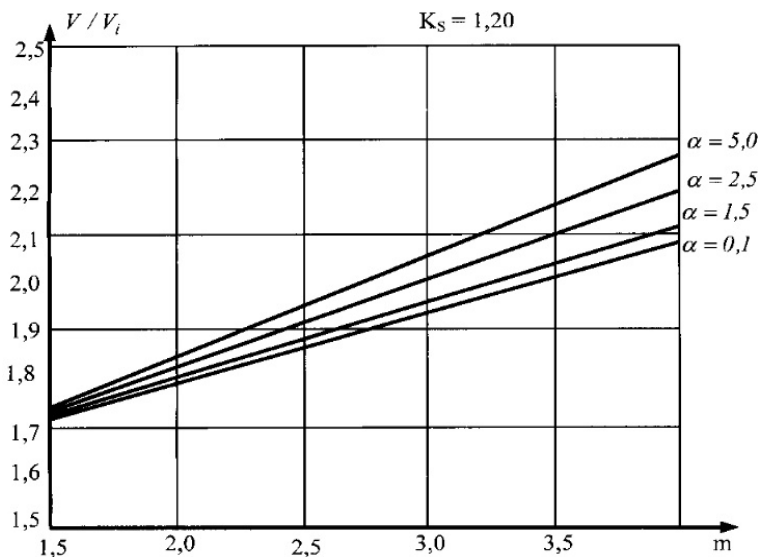


Рис. 3.6. Номограма з визначення оптимальних параметрів ґрунтової греблі з урахуванням інтенсивності пониження рівня води у водоймищі

За допомогою яких можна встановити оптимальні параметри ґрунтової греблі з урахуванням інтенсивності пониження рівня води у водоймищі.

3.3. Приклад з визначення інтенсивності пониження рівня води у водоймищі в залежності від стійкості верхового укосу греблі

Дано основні параметри греблі: ширина гребня греблі – 6,5 м; закладання верхового і низового укосів у верхній частині греблі – $m_1=m_2=2,0$, у нижній – $m_1=m_2=3,0$; висота греблі – 8,0 м; максимальна глибина води у водоймищі – 5,3 м (рис. 3.7). Основні фізико-механічні властивості ґрунту тіла і основи греблі наведені у таблиці 3.1.

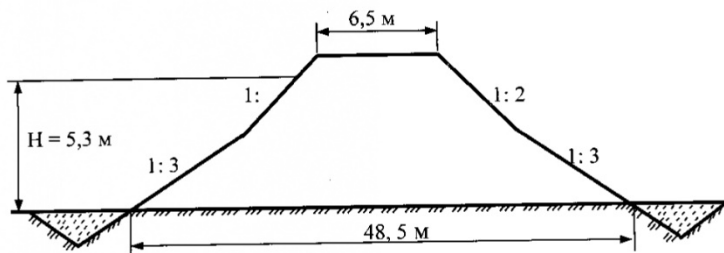


Рис. 3.7. Розрахункові параметри греблі

Розв'язок

1. З метою скорочення розрахунків, а також ураховуючи те, що максимальна глибина у водосховищі становить $H=5,3$ м, кількість розрахункових ділянок на які розбивається глибина води Δh_i у водоймищі приймаємо рівним 3. При цьому $\Delta h_1=1,9$ м, а $\Delta h_2=\Delta h_3=1,7$ м (рис. 3.8).

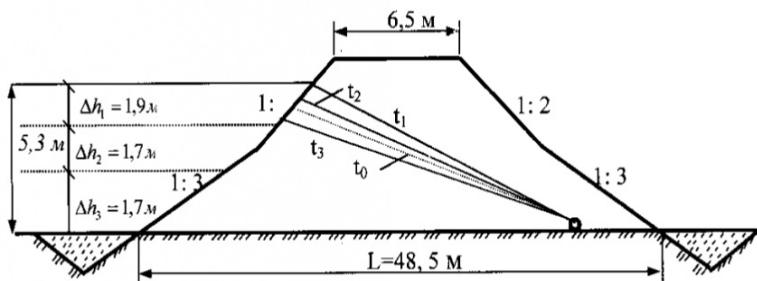


Рис. 3.8. Розрахункова схема

3. За заданими довільними швидкостями пониження рівня води у водоймищі 0,1, 0,5 і 0,1 м/добу, встановлюємо відповідне положення депресійної поверхні у тілі греблі на ділянці Δh_1 , на час t_i , що відповідає заданій швидкості.

4. Для кожного розміщення депресійної поверхні в тілі греблі визначаємо відповідні коефіцієнти стійкості укоосу k_{si} .

5. За отриманими значеннями k_{si} будуємо графіки залежності $k_{si} = f(t_i)$ (рис. 3.9, крива 1).

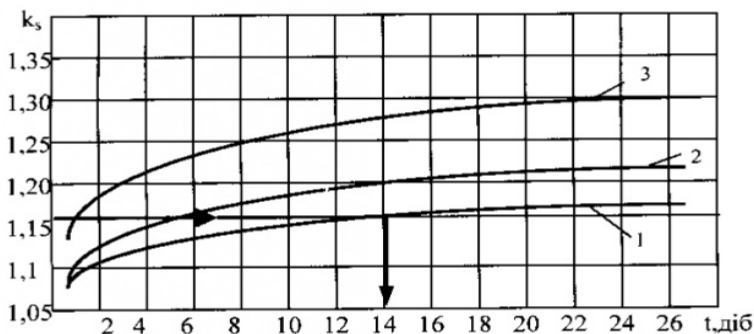


Рис. 3.9. Графік залежності $k_{si} = f(t_i)$

6. В залежності від нормативного значення коефіцієнта стійкості укусу $k_{si} = 1,15$ (приймається від класу капітальності споруди за нормативними документами) з графіка $k_{si} = f(t_i)$ встановлюємо допустимий час пониження рівня води у водоймищі на першій ділянці, $t_1 = 14$ діб.

7. За отриманим значенням t_1 встановлюємо небезпечно для стійкості укусу положення депресійної поверхні у тілі греблі, що є початковими для розрахунку на другій ділянці.

8. На другій Δh_2 і на третій Δh_3 ділянках розрахунки виконуємо таким же чином, як і на першій Δh_1 ділянці.

Результати розрахунків наведені у таблиці 3.3, а графіки залежності $k_{si} = f(t_i)$ на рис. 3.9, крива 2,3.

Таблиця 3.3

Результати розрахунку стійкості верхового укусу греблі при
різній інтенсивності пониження рівня води у водоймищі

$\Delta h_1=1,9$ м			$\Delta h_2=1,7$ м			$\Delta h_3=1,2$ м		
V , м/добу	t , дів	K_s	V , м/добу	t , дів	K_s	V , м/добу	t , дів	K_s
0,1	9	1,15	0,1	17,0	1,21	0,1	17,0	1,29
0,5	3,8	1,13	0,5	3,4	1,17	0,5	3,4	1,24
1,0	1,9	1,07	1,0	1,7	1,08	1,00	1,7	1,12

Це дозволило встановити небезпечний для стійкості укусу час
пониження рівня води у водоймищі.

Інтенсивність пониження рівня води у водоймищі за
глибиною не порушуючи стійкість верхового укусу греблі
наведена (рис. 3.10).

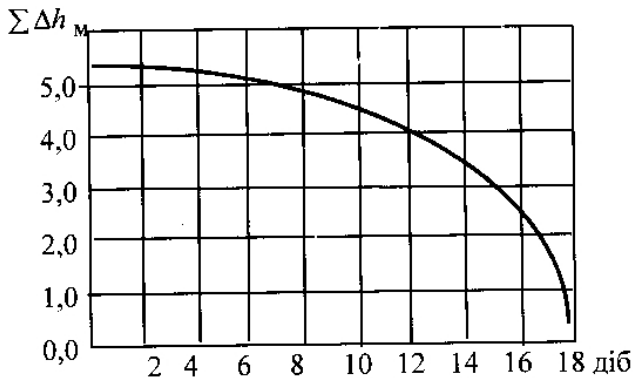


Рис. 3.10. Інтенсивність пониження рівня води у водоймищі за
глибиною з урахуванням стійкості верхового укусу греблі

4. Аналіз сучасних уявлень з математичного моделювання деформацій ґрунтових водонасичених масивів при зміні гідрогеологічних умов

4.1. Розрахункові схеми і моделі з оцінки стану водонасичених ґрунтових масивів і основ

Ґрунтові масиви і основи в природному або водонасиченому стані знаходяться під дією зовнішнього навантаження і внутрішніх зусиль. Для розробки методів розрахунку ґрунтового середовища і їх математичних моделей, процеси, що в них спостерігаються, доводиться деякою мірою схематизувати. При цьому залежно від поставленої задачі виділяють найбільш важливі для неї фактори, а всі інші не враховують. В результаті чого складаються розрахункові моделі або розрахункові схеми ґрунту, що частково відображають діючу природу процесу в ґрунті. З розвитком експериментальних досліджень процесів, що проходять в ґрунтах, виникають нові розрахункові моделі, котрі більш глибоко їх враховують. Нові моделі, як правило, в математичному і розрахунковому відношенні більш складні. Однак більш прості або менш повні моделі не втрачають практичного значення. Області застосовування кожної моделі визначаються на основі практичного досвіду і особливо експериментів.

В теперішній час, для оцінки стану ґрунтових середовищ під дією зовнішніх навантажень і внутрішніх зусиль застосовують дві основні розрахункові схеми ґрунту.

Згідно першої розрахункової схеми вважають, що ґрунт є дискретним середовищем, який складається з окремих часток. В зв'язку з цим досить близько до дійсності є модель, що описує взаємодію окремих часток з урахуванням зв'язків між ними. В загальному вигляді така модель настільки складна, що практично не може бути реалізована, і при її

застосуванні приймаються значні спрощення. Найпростішим прикладом моделі дискретного середовища може бути система взаємодіючих кульок або циліндрів. Частинки ґрунту можуть бути різні за розмірами, формою і взаємним розміщенням. Для такого середовища можуть застосовуватись положення теорії ймовірності і математичної статистики. Перші кроки в цьому напрямку були зроблені Г. І. Покровським, а більш повні дослідження дискретних моделей виконані І. І. Кандауровим. В багатьох випадках ці моделі застосовують для великоуламкових ґрунтів. Застосування цих моделей для дрібнодисперсних ґрунтів (піщаних і глинистих) вимагає природу даних ґрунтів значно схематизувати, що в багатьох випадках є недопустимим.

Найбільш широке застосування в сучасній механіці ґрунтів отримала модель суцільного середовища. Згідно якої, не розглядається поведінка окремої частинки, а приймається, що складові частини ґрунту (мінеральні частки, вода і гази) заповнюють весь простір безперервно. Крім того, неперервність будови такого ідеалізованого тіла зберігається в процесі його деформування. Концентрація суцільності тіла є основним постулатом механіки суцільності тіла і забезпечує єдиний підхід до вивчення поведінки під навантаженням або внутрішніх зусиль твердих тіл, рідин і газів.

При застосуванні до ґрунтового середовища концепції суцільності, необхідно виконувати вимогу, щоб структурні малі елементи середовища (мінеральні частки) мали розміри набагато менші характерних розмірів ґрунтового масиву або основи, що досліджується.

У випадку повного заповнення пор ґрунту водою застосовують модель суцільності двохкомпонентного ґрунту, що складається з твердих часток і води. Більш загальною моделлю є розрахункова модель трьохкомпонентного середовища, що враховує вплив затисненого газу або повітря.

В багатокомпонентних моделях кожній фазі надають свої розрахункові властивості і обов'язково враховують взаємодію фаз, наприклад силу зважування (Архімедову силу), а при русі води – фільтраційну силу і інші. При цьому не повинне виникати враження, що ґрунт розглядаємо як дискретне середовище, а навпаки, в цьому випадку всі фази розглядаються нерозривними в середовищі. Така ідеалізація ґрунту дозволяє успішно вирішувати складні задачі для оцінки стану багатокомпонентного ґрунтового середовища, застосовуючи рішення теорії пружності, теорії пластичності та інші.

В основу моделі теорії пружності покладено закон Гука, згідно якого існує лінійна залежність між напруженнями і деформаціями, а тіло є ідеально пружним матеріалом, тобто здатне повністю відновлювати форму і об'єм при знятті навантаження. Для ґрунтів, навпаки, характерна наявність залишкових деформацій після зняття навантаження. У зв'язку з цим модель середовища теорії пружності може застосовуватися тільки на етапі одноразового завантаження ґрунтового середовища без наступного розвантаження, що характерно для більшості практичних задач. Враховуючи, що із закону Гука в цьому випадку використовується тільки ділянка лінійної залежності між напруженнями та деформаціями і роботу ґрунту розглядаємо тільки при його завантаженні, М. М. Герсєванов запропонував для ґрунтів замість терміну «середовище теорії пружності» застосовувати більш коректний в цьому випадку термін лінійно деформованого середовища.

При використанні моделі лінійно деформованого середовища будь-яка задача зводиться до рішення системи рівнянь, в склад якої входять статичні рівняння рівноваги, геометричні співвідношення і фізичні рівняння зв'язку напружень з деформаціями. Крім перерахованих є ще рівняння

нерозривності деформацій, яке задовольняє умову, що середовище після його навантаження залишається суцільним.

Саме рішення задач теорії пружності виконується трьома основними методами: напружень, переміщень і змішаним.

Необхідно підкреслити, що модель середовища теорії пружності, враховуючі природні умови рівноваги і нерозривності (суцільності) середовища, передбачає, що при будь-якому напруженому стані додержується закон Гука, тобто залежність між напруженнями і деформаціями залишається лінійною, і ні в одній точці ґрунтового середовища, ні при яких умовах не може виникнути стан пластичної текучості, руйнування тощо. Застосування даної моделі на практиці повинно бути правильним і розумним.

Напружено-деформований стану (НДС) водонасичених ґрунтових масивів і основ при зміні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів залежить від впливу внутрішніх об'ємних сил (гідродинамічного тиску фільтраційного потоку, зміни власної ваги ґрунту та інших), інтенсивність яких, як правило, не перевищує початковий критичний тиск на ґрунт, тобто в межах лінійної залежності між напруженнями і деформаціями. Ця обставина, дає можливість для оцінки НДС ґрунтових масивів і основ при роботі в таких умовах використовувати модель теорії лінійно деформованого середовища.

Другою розрахунковою моделлю з оцінки НДС є модель середовища теорії граничної рівноваги, або її ще називають модель середовища теорії пластичності. Ця модель заснована на допущеннях, що у всіх точках ґрунтового середовища виконується умова граничної рівноваги. При застосуванні моделі граничної рівноваги середовища, як і в моделі лінійно деформованого середовища, використовуються статичні рівняння рівноваги, але третім рівнянням є рівняння граничної рівноваги, що визначає всі особливості даної моделі.

В моделі середовища теорії граничної рівноваги приймається допущення, що у всіх точках ґрунтового середовища виникає спочатку стан граничних деформацій, які трансформуються в глобальні поверхні зсуву. Подальше збільшення зовнішніх навантажень або внутрішніх зусиль веде до руйнування ґрунтового масиву. Основні положення даної моделі і розробка загального методу рішення задач з оцінки НДС ґрунтових масивів і основ викладені в працях В. В. Соколовського, В. Г. Березанцева. Подальший теоретичний розвиток ця модель отримала в працях Ю. О. Соболевського, А. С. Строганова, П. І. Яковлева та в інших працях. Методи моделі граничної рівноваги в постановці рішення задач в математичному плані є досить точними. Однак, при руйнуванні ґрунтових масивів в реальних умовах у нестійких областях ґрунт знаходиться в граничному стані тільки в невеликій зоні. Крім того, при використанні даної моделі виникають складнощі, при врахуванні неоднорідності ґрунтів і дії внутрішніх зусиль (фільтраційного тиску, зміни власної ваги ґрунту, порового тиску консолідації ґрунту та інших). Ця модель в практичному застосуванні має значне обмеження.

Третьою розрахунковою моделлю з оцінки НДС ґрунтових масивів і основ є модель пружно-пластичного середовища. Ця розрахункова модель є синтезом двох раніше згаданих моделей, що розглядалися і передбачає наявність в ґрунтовому середовищі, як областей лінійного деформованого середовища, так і областей, що знаходяться в стані граничної рівноваги.

Визначення НДС ґрунтового середовища в такій постановці відноситься до групи так званих змішаних задач теорії пружності і теорії пластичності. Система рівнянь, що описують НДС ґрунтового середовища об'єднує фізичні рівняння стану теорії пружності середовища граничного стану.

Постановкою і рішеннями змішаної задачі, що заснована на використанні моделі, яка враховує в ґрунтовому середовищі

наявність областей лінійного деформованого середовища і граничного напруженого стану, розглядалися В. А. Флорінім, М. І. Горбуновим-Посадовим, А. К. Бугровим, А. Б. Фадєєвим та іншими вченими.

В останні десятиріччя для оцінки НДС ґрунтових середовищ розроблено багато інших моделей, що відображають ряд важливих фізико-механічних процесів, які проходять в ґрунтових масивах. Одним із шляхів наближення до реальної роботи ґрунтових середовищ від дії зовнішніх навантажень і внутрішніх зусиль є використання моделей нелінійного пружного середовища. Слід зазначити, що на основі експериментальних досліджень, для деяких різновидів глинистих ґрунтів спостерігається майже з початку завантаження нелінійна залежність між деформаціями і напруженнями. При збільшенні навантаження спостерігаються процеси пружно-пластичних деформацій. У цьому випадку слід застосовувати модель пружно-пластичного середовища.

Таким чином на сучасному етапі розвитку нелінійного напрямку оцінки НДС ґрунтів з формувалось два основних підходи до рішення практичних задач розрахунку ґрунтових масивів і основ: нелінійно-пружного і пружно-пластичного середовища. Постановкою і рішеннями практичних задач займалися І. П. Бойко [2], М. М. Кризький [7], Ю. Л. Винников [5], та інші автори.

Враховуючи складність поставлених задач, відмітимо основні положення кожного із цих підходів.

В основі нелінійно-пружного рішення лежить модель з використанням нелінійних залежностей між напруженнями і деформаціями, що приймаються єдиними у всіх точках ґрунтового масиву, як при навантаженні, так і при розвантаженні.

Відомо, що задачі лінійної і нелінійної теорії пружності полягають в тому, що знаючи діючі навантаження і граничні

умови, необхідно визначити в будь-якій точці середовища напруження, деформації і переміщення у вигляді функцій координат точок середовища. Вихідними для рішення цих задач є статичні рівняння рівноваги, геометричні співвідношення і фізичні рівняння.

Задачі нелінійної теорії пружності можуть характеризуватися фізичною або геометричною нелінійністю, або в загальному випадку можуть мати одночасно і ту, і іншу нелінійність. Під фізичною розуміють нелінійність фізичних рівнянь, тобто наявність нелінійних співвідношень між напруженнями і деформаціями. Під геометричною розуміють нелінійність зв'язків деформації з переміщеннями, тобто нелінійність геометричних співвідношень. Більшість нелінійних задач механіки ґрунтів – це фізичні нелінійні задачі.

Фізично нелінійна теорія пружності застосовує вихідні рівняння, які за своїм складом такі ж, що і в лінійній теорії пружності. При цьому статичні рівняння рівноваги і геометричні співвідношення у двох теоріях повністю ідентичні, а різними є лише фізичні рівняння. Нерідко фізичні рівняння при рішенні нелінійних задач теорії пружності приймаються у вигляді тих же співвідношень узагальненого закону Гука, що і в лінійній теорії пружності, але при змінних, що залежить від напруженого стану, значеннях модуля Юнга E і коефіцієнта Пуассона ν , або еквівалентним, що їх замінюють: модуля зсуву G і модуля об'ємного стиснення K . Для нелінійно змінного модуля Юнга E при наявності сольового розчину в ґрунтовому середовищі в даній роботі запропонована емпірична залежність.

При врахуванні нелінійних деформацій ґрунту величини E і ν в рівняннях закону Гука приймають не постійними, а такими, що залежать від напружень. В цьому випадку залежності називають рівняннями Генки.

До рівнянь фізичної нелінійної теорії пружності, що включають залежність Генки, класичні методи інтегрування, розвинуті в лінійній теорії пружності, неприйнятні. При рішенні задач фізичної нелінійної теорії пружності застосовують метод послідовних наближень (ітерацій). При цьому, вирішення нелінійної задачі зводиться до рішення послідовних лінійних задач, кожна з них є деякою окремою задачею лінійної теорії пружності. Цей спосіб отримав назву методу пружних рішень. Він досить простий і застосовується на практиці в різних варіантах.

Нелінійні пружні рішення в загалом дозволяють отримати більш достовірні результати у порівнянні з лінійними. Вони забезпечують врахування нелінійності зв'язків напружень з деформаціями, а також залежності деформацій форми і об'єму від інваріанту напруженого стану. Однак ці рішення не дозволяють врахувати в розрахунках траєкторії навантаження. В результаті чого виникає несумісність тензора напружень і деформацій та порушення подібності напруженого і деформованого стану, що характерно для складних шляхів навантаження ґрунтів. З цього витікає, що застосування нелінійно-пружних рішень до ґрунтових масивів слід обмежувати випадками простих або близькими до них траєкторіями навантаження.

В основі пружно-пластичного підходу лежить окреме описання фізичними залежностями пружних і пластичних деформацій ґрунту. В цьому підході можна виділити різні варіанти пружно-пластичних рішень. В основі більшості з них покладено уявлення теорії пластичної текучості.

У відповідності до теорії пластичної текучості для пружно-пластичних рішень задач механіки ґрунтів характерне використання диференціальних залежностей між напруженнями і деформаціями (пластичними і повними) та процедури послідовного (крокового) навантаження ґрунтових масивів відповідно черговості прикладання і зміни

зовнішнього навантаження. В такій постановці пружно-пластичні рішення дозволять враховувати в розрахунках траєкторію навантаження, врахувати несумісність тензорів напружень і деформацій та деякі інші деталі поведінки ґрунтів, що не вдалося здійснити в рамках нелінійно-пружного підходу. Важливим в пружно-пластичних розрахунках ґрунтових масивів є вибір відповідних диференціальних фізичних рівнянь для пластичних деформацій. Вони визначаються моделлю ґрунту, що реалізується в даному рішенні.

В теперішній час в практичних додатках найбільш широкого застосування знайшли моделі пружно-ідеально-пластичного і пружно-пластичного зміцнюючого середовища.

У моделі пружно-ідеально-пластичного середовища приймається, що ґрунт (скелет ґрунту) веде себе як тіло Прандтля. В окремому випадку при одноосьовому напруженому стані його деформування на початковій ділянці, що відповідає дограничному напруженому стану, ґрунт описується моделлю лінійного деформованого середовища. Це означає, що пластичні (залишкові) деформації, що розвиваються в до граничному стані, приєднуються до зворотних (пружних) і для повних (сумарних) деформацій, умовно названих пружними, можуть прийматися рівняння узагальненого закону Гука. Ці рівняння використовуються для пружної складової повної деформації при пластичному деформуванні.

Опис процесу розвитку пластичних деформацій ґрунту, що знаходиться в граничному напруженому стані, в моделі пружно-ідеально-пластичного середовища найпростіше здійснюється асоційованим законом пластичної текучості. Модель пружно-ідеально-пластичного середовища знайшла своє використання при рішенні змішаної задачі теорії пружності і пластичності.

Водонасичені ґрунтові масиви і основи, що знаходяться під дією внутрішніх об'ємних сил, як правило, сприймають незначні деформації, і напруження не перевищують початковий критичний тиск на ґрунт.

У моделі пружно-пластичного зміцнюючого середовища істинно пружні (зворотні) і пластичні (залишкові) деформації з самого початку навантаження середовища, в тому числі і при до граничного стані, розглядаються і визначаються окремо і незалежно один від одного. В зв'язку з цим при використанні моделі зміцнюючого середовища вдалося відрізати деякі процеси дограничної поведінки ґрунту, що не можливо було врахувати в моделі пружно-ідеально-пластичного середовища. При застосуванні моделі пружно-пластичного зміцнюючого середовища, стало можливим описати всю історію накопичення (залишкових) деформацій залежно від того, по якому шляху навантаження ґрунт приходить в дограничний стан, і тим самим відрізати ділатансійні властивості ґрунту на всьому етапі його деформування.

В моделі пружно-пластичного зміцнюючого середовища для пружних (зворотних) деформацій приймаються співвідношення узагальненого закону Гука, в яких модулі G і K є модулями пружності, що встановлюються дослідним шляхом при розвантаженні ґрунту. Для пластичних деформацій в моделі, що розглядається використовуються співвідношення асоційованого закону пластичної текучості. Випустивши деталі практичного застосування моделі пружно-пластичного зміцнюючого середовища, необхідно відмітити, що реалізація цієї моделі пов'язана з необхідністю проведення досить широких експериментів з виявлення форми поверхні навантаження ґрунту, а проведення розрахунків є можливим з використанням числових методів, ефективних обчислювальних програм і потужних ПЕОМ. Застосування даної моделі доцільно для унікальних і особливо відповідальних споруд.

При розрахунках водонасичених ґрунтових масивів і основ робота, яких передбачається при зміні гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів процес деформування протікає в порівняно невеликому діапазоні зміни напружень і може бути описаний більш простою моделлю, наприклад, моделлю лінійно деформованого середовища.

Описані вище моделі оцінки НДС ґрунтового середовища можна назвати основними в механіці ґрунтів і такими, які найбільш широко застосовуються при вирішенні прикладних інженерних задач.

Розрахункові моделі лінійного деформованого середовища і середовища теорії граничного стану є моделями, що відображають крайні можливості стану ґрунтового середовища. Так, як одна з них заснована на допущенні, що ні в одній точці ґрунтового середовища немає граничного напруженого стану, а друга, навпаки, на допущенні, що граничний стан має місце у всіх точках ґрунтового середовища.

Однак рішення конкретних інженерних задач на основі цих моделей розроблені і найбільш широко застосовуються в інженерній практиці. Вони є основою сучасних будівельних норм проектування ґрунтових масивів і основ. В зв'язку з цим важливо оцінити область застосування кожної з них і можливість їх використання.

В загальному випадку можна впевнено стверджувати, що чим менші розміри області граничного напруженого стану, тим більш обґрунтованим є застосування рішень теорії лінійно деформованого середовища. Такі незначні області граничного напруженого стану ґрунтових масивів і основ спостерігаються при дії внутрішніх об'ємних сил при зміні гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів (наявність фільтрації сольових розчинів, робота водозбірних свердловин тощо). В даному випадку на виникнення областей граничного стану великий

вплив має співвідношення горизонтальних σ_x і вертикальних σ_z напружень від власної ваги ґрунту

$$\xi = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}. \quad (4.1)$$

Чим менша величина ξ , тим інтенсивніше розвиваються області граничного стану.

Умовою граничного стану ґрунту у будь-якій точці ґрунтового масиву може бути залежність Кулона $\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + C$ або, що теж саме, $Q_{\max} = \varphi$, де φ і C – параметри лінійної залежності, що називають відповідно кутом внутрішнього тертя і питомим значенням ґрунту; σ – нормальні до площини зсуву напруження в ґрунті.

Слід відмітити, що іноді для характеристики напруженого стану ґрунту, в протизагальному, вводять поняття про дограничний стан ґрунту, умовою якого є $\tau < \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + C$.

Для аналізу подальшого процесу розвитку значних областей пластичних деформацій і руйнування ґрунту, іноді вводять також термін заграничного стану ґрунту.

В загальному випадку в будь-якій точці ґрунтового середовища діють дотичні і нормальні напруження. Рівнодіюча цих напружень, буде відхилятися від нормалі до площини зсуву на кут θ . Його значення в залежності від співвідношення нормальних і дотичних напружень може змінюватись від 0 до $\theta_{\max}$. Звідси можна зробити висновок, що стан граничної рівноваги у будь-якій точці ґрунтового середовища буде наступати при умові $\theta_{\max} = \varphi$.

При $\theta_{\max} < \varphi$ в будь-якій точці ґрунтового масиву відсутній граничний стан. Для даного випадку може застосуватися теорія лінійно деформованого середовища з оцінки НДС. Слід зауважити, що крайньою межею

застосування даної теорії може бути відомий в механіці ґрантів початковий критичний тиск на ґрунт.

В працях М. П. Пузиревського і М. М. Герсєванова, а потім В. А. Флоріна було доведено можливість застосування до ґрунтів рішень теорії пружності і, що особливо суттєво, обґрунтовані межі застосування цієї розрахункової моделі. Все це дозволило в подальшому широко використовувати для ґрунтів уже існуючий потужний розрахунковий апарат механіки суцільних пружних середовищ.

Хоча постановка змішаної задачі теорії пружності і теорії пластичності відома порівняно давно, її практичне використання і впровадження в проектну практику спостерігається тільки в останні роки для оцінки стану ґрунтових основ унікальних і відповідальних споруд. Це викликано появою більш потужних ПЕОМ і використанням в механіці ґрунтів досить ефективних числових методів рішення задач механіки суцільних середовищ [5]. Модель пружно-пластичного тіла дозволяє отримати рішення для будь-якого випадку розвитку областей граничної рівноваги, з поступовим переходом від чистого «пружного» рішення дограничного стану. Тому, ця модель значно більшою мірою наближує розрахунки до результатів спостережень і експериментів.

У зв'язку з розвитком рішень змішаної задачі може виникнути думка відмовитися від застосування моделей лінійно деформованого середовища і середовища теорії граничної рівноваги, що є її частковими випадками. Для інженерної практики це буде нераціонально і невигідно. Скрізь, де це обґрунтовано і може рахуватися допустимим для практичних цілей наближенням, слід використовувати більш прості і доступні моделі, що вимагає менших витрат праці і кваліфікації спеціалістів.

Слід підкреслити, що нема «поганих» моделей, а є неправильне їх використання за межами границь їх застосувань.

4.1.1. Обґрунтування напряму досліджень

Зміна гідрогеологічних умов на Землі проходить все більше швидкими темпами. Причиною таких змін є людська діяльність. При цьому, можна вважати, технічну діяльність людини як рушійну геологічну силу, яка не тільки міняє обличчя земної поверхні, але і вносить значні зміни у верхню частину земної кори, що за масштабами і наслідками співставленні з геологічними процесами.

Зміна гідрогеологічних умов виникає в результаті господарської діяльності людини. В одних випадках проходить поступове осушення ґрунтів, тобто пониження рівня ґрунтових вод, в інших – інтенсивне насичення водою ґрунтів і підтоплення території.

Пониження рівня ґрунтових вод у всіх випадках викликає вертикальні зміщення поверхні землі і розташованих на ній будівель та споруд.

Відкачування води із свердловин для водопостачання, добування нафти і газу також приводить до розвитку вертикальних зміщень поверхні ґрунту і споруд. В цьому випадку крім можливого пониження рівня води виникають гідродинамічні сили від фільтраційного потоку. Під дією цих сил створюються додаткові стискаючі напруження в скелеті ґрунту, що викликають його ущільнення і вертикальні зміщення поверхні землі на значній території навколо свердловини.

Прикладом катастрофічних наслідків відкачування води із свердловин може служити м. Венеція. Вертикальні зміщення поверхні землі проходили у Венеції зі швидкістю близько 1м в рік і все ще продовжуються, так як нового вирішення проблеми водопостачання поки ще не знайдено. В результаті все більше районів Венеції затоплюються в період морських припливів і побудоване практично на рівні моря унікальне за архітектурою місто поступово руйнується.

В Японії, де використовуються підземні артезіанські води, наприклад, в м. Токіо осідання за 50 років досягло 3,3 м, причому в окремих місцях швидкість осідання дорівнювала 18 см за рік.

На о. Хонсю (м. Ніагата) внаслідок відкачування газу спостерігалось осідання поверхні землі до 50 см за рік.

В м. Осака (Японія) в результаті відкачування води із свердловини горизонт ґрунтових вод понизився приблизно на 20 м, що сумісно з дією фільтраційних сил викликало ущільнення 30-ти метрового шару алювіальних глин. У зв'язку з цим вертикальні зміщення поверхні землі за період 1885–1928 рр. досягло 6–13 мм в рік, що привело до осідання ґрунту на деяких ділянках на 3 м і більше.

Іншим яскравим прикладом значних (6–7 м) і інтенсивних (до 30 см в рік) вертикальних зміщень території в результаті зниження горизонту ґрунтових вод і дії фільтраційних сил під час відкачування води із свердловин для водопостачання є м. Мехіко. Причому на деяких ділянках осідання було нерівномірне, що викликало потужні деформації капітальних споруд. таких, як Театральний центра, Музей-мавзолей та інших.

Необхідність проведення досліджень в даному напрямку є актуальним і при проектуванні Канівської ГАЕС (рис. 4.1).

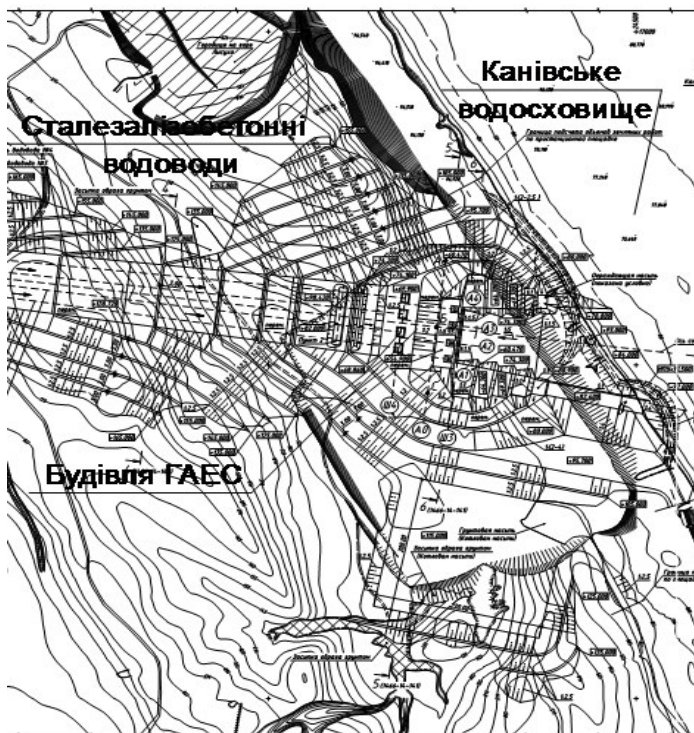


Рис. 4.1. Схема розміщення основних споруд Канівської ГАЕС

Для зведення основних споруд на даному об'єкті виникла необхідність в осушенні нижньої частини природного водонасиченого правобережного схилу р. Дніпра. Для цього передбачається влаштування котловану з попереднім глибинним водопониженням. В процесі осушення можуть виникнути вертикальні і горизонтальні зміщення, що можуть суттєво змінювати важливі проектні позначки розміщення гідротехнічних споруд.

В роботі [22] для безпосереднього вивчення вертикальних зміщень рельєфу виконані повторні топографічні знімання земної поверхні площею 100 га на осушувальній системі «Стубла» в Дубровицькому районі

Рівненської області. З географічної точки зору досліджувану територію можна вважати репрезентативною для Західного Полісся.

В 1973 р. в заплаві р. Стубли проведено топографічне знімання, після чого побудовано осушувальну систему відкритого типу (глибина каналів становила 1,5 м). Вертикальне планування осушувальної території не проводилось, а вибраний із меліоративних каналів ґрунт вивезено на сусідні землі. Через 12 років з метою реконструкції осушувальної системи в однакових польових умовах проведено повторне топографічне знімання. Вихідні геодезичні пункти для створення планово-висотного обґрунтування в обох випадках були однакові і мали відносно стабільне положення.

Шляхом співставлення двох топографічних планів в масштабі 1:2000 з висотою перерізу рельєфу 0,5 м, виконаних на різний момент часу, було визначено вертикальні зміщення поверхні землі. Вертикальні зміщення для 1208 дискретних точок обчислені як різниця відміток H_1 та H_2 цих точок на вихідному та повторно побудованому топографічних планах. Вертикальні зміщення поверхні землі, що наведені в табл. 4.1 мають значення в інтервалі від 0,13 м до 0,53 м. Середнє значення вертикальних зміщень по всій території становить 0,38 м.

Таблиця 4.1

Значення вертикальних зміщень поверхні землі

Номер масиву	1	2	3	4	5
Кількість точок	5 85	400	173	48	2
Вертикальні зміщення h , м	0,53	0,29	0,14	0,04	0,13

Примітка. Картосхема масиву з його номерами наведена на рис. 4.2.



Рис. 4.2. Картосхема масиву осушувальній системі «Стубла»

Проведення таких досліджень вимагає дуже багато часу та значних матеріальних затрат. Альтернативою цьому може бути математичне моделювання вертикальних зміщень поверхні ґрунтового масиву в процесі його осушення [3; 15; 18; 19; 20; 26].

Не менш важливою проблемою є встановлення вертикальних зміщень прилеглої території на Горбаківському водозабірї. Цей водозабір є основним джерелом постачання питною водою м. Рівне.

Математичне моделювання гідродинамічного потоку в процесі роботи водозабірних свердловин дозволить прогнозувати небезпечні деформації прилеглої території на якій розміщені будівлі і споруди і тим самим забезпечувати їх нормальну експлуатацію.

Із наведених вище прикладів, (перелік яких можна було б значно поповнити), однозначно зрозуміла актуальність проблеми дослідження деформацій ґрунтових масивів при зміні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів.

Подальше удосконалення методів оцінки деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ промислових і енергетичних об'єктів передбачає використання таких математичних моделей, які б найбільш достовірно відображали фактичні процеси, що протікають в ґрунтових масивах і основах даних об'єктів в експлуатаційний період.

Існуючі методи оцінки деформацій ґрунтових масивів і основ що працюють в умовах змінного рівня ґрунтових вод і дії техногенних факторів, розроблені для випадку стабілізованого рівня ґрунтових вод поки що не в повній мірі відображають їх стан [27]. При такому підході не можливо врахувати вплив основних факторів (гідродинамічних сил фільтраційного потоку, зміни власної ваги ґрунту та його фільтраційних і деформаційних властивостей тощо) на деформації ґрунтових масивів і основ, що обумовлені зміною гідрогеологічних умов і дією техногенних факторів. З іншої сторони, негативний вплив гідродинамічних сил фільтраційного потоку, зміни власної ваги ґрунту та його фільтраційних і деформаційних властивостей на деформації водонасичених ґрунтових масивів і основ може привести до невиправданих витрат по забезпеченню надійності і безпечної експлуатації промислових і енергетичних об'єктів. Крім того, виходячи з практики проектування, будівництва і експлуатації даних об'єктів випадок знаходження ґрунтових водонасичених основ та масивів без зміни гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів практично не зустрічається. У зв'язку з цим при вивченні даної проблематики виникає необхідність використовувати сучасні математичні моделі і відповідні їм розв'язки та програмне забезпечення, що дозволить врахувати інтенсивність гідродинамічних сил

фільтраційного потоку, зміну власної ваги ґрунту та його фільтраційних і деформаційних властивостей при дії техногенних факторів. Такий підхід дає можливість визначити НДС ґрунтових масивів і основ, встановити їх вертикальні зміщення, застосування на практиці яких дозволить підвищити надійність і безпеку експлуатації промислових і енергетичних об'єктів.

Водонасичені ґрунтові масиви та основи і побудовані на них водогосподарські об'єкти, що працюють в умовах зміни гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів є складною системою. Їх надійність, довговічність і безперебійність експлуатації визначається різноманітними факторами. Оцінку НДС ґрунтових водонасичених масивів і основ, що працюють в умовах зміни гідрогеологічних умов і дії техногенних впливів необхідно виконувати на основі аналізу найбільш важливих факторів. Вони можуть бути природні (зміна гідрогеологічних умов) і техногенні (наявність сольових розчинів, влаштування водозабірних свердловин і осушувальних каналів та дренажів тощо). Чим більша кількість факторів, що розглядається, тим більш повну уяву можна отримати про НДС водонасичених ґрунтових масивів і основ при зміні гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів. Разом з тим отримуємо досить складну математичну модель з оцінки НДС водонасичених ґрунтових масивів і основ.

Розв'язок конкретних задач на основі таких математичних моделей отримуємо досить складний, кількість їх обмежена. Вирішення проблеми суттєво спрощується з розвитком числових методів моделювання НДС ґрунтових масивів і основ [4].

У зв'язку з цим пропонується вивчити параметри фільтраційного потоку (швидкість, градієнт напору, розміщення кривої дисперсії тощо) в ґрунтовому масиві в залежності від часу його осушення, інтенсивності роботи

водозабірних свердловин, проникливості ґрунту, фільтрації сольових розчинів тощо.

При цьому з усіх задач, що вимагають рішень з даної проблеми, найбільш актуальними є вивчення динаміки зміни параметрів фільтраційного потоку в ґрунтовому масиві в процесі його осушення, деформаційних і фільтраційних властивостей ґрунту при наявності сольових розчинів, зміни власної ваги ґрунту тощо. Взявши до уваги те, що на параметри фільтраційного потоку при зміні гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів впливає швидкість осушення водонасиченого ґрунту, інтенсивність роботи водозабірних свердловин, наявність сольових розчинів тощо, вивчення цих питань буде виконуватися в лабораторних і натурних умовах, а також аналітичними і чисельними методами.

В лабораторних умовах передбачається виконати експериментальні дослідження з визначення основних фільтраційних і деформаційних характеристик ґрунтів при наявності сольових розчинів різної концентрації за стандартною методикою.

На основі виконаних експериментальних досліджень передбачається встановити емпіричні залежності у вигляді поліномів деформаційних характеристик ґрунту і коефіцієнта фільтрації від концентрації сольових розчинів.

Розміщення кривої дисперсії в ґрунтовому масиві на будь-який момент часу в процесі його осушення передбачається отримати в процесі рішень диференціальних рівнянь нестационарної фільтрації аналітичним методом.

Встановлення параметрів фільтрації у будь-якій точці ґрунтового масиву (швидкість фільтрації, градієнтів напору, ліній рівних напорів і токів) передбачається отримати шляхом рішень диференціальних рівнянь стаціонарної і нестационарної фільтрації чисельними методами (методом конформних відображень, ітераційним методом). Вивчення питань в такій постановці надає можливість дослідити параметри

фільтраційного потоку у будь-якій точці ґрунтових масивів і основ (лінії рівних напорів і токів) в процесі їх осушення, при роботі водозабірних свердловин та наявності підпірних гідротехнічних споруд.

Не менш важливим питанням є встановлення деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ при дії гідродинамічних сил фільтраційного потоку та техногенних факторів (наявність солових розчинів, дренажних осушувальних систем, водозабірних свердловин, підпірних гідротехнічних споруд тощо).

Встановлення деформацій поверхні ґрунтового масиву та у будь-якій внутрішній його тички передбачається отримати шляхом рішень рівнянь НДС в переміщеннях.

Проведення, перерахованих досліджень, дозволить встановити вертикальні і горизонтальні зміщення водонасичених ґрунтових масивів і основ в процесі їх осушення, при роботі водозабірних свердловин, наявності підпірних гідротехнічних споруд, фільтрації та масопереносу солових розчинів.

Для оцінки достовірності результатів досліджень, отриманих в лабораторних умовах, а також числовими і аналітичними методами, в роботі будуть використовуватися дані натурних спостережень і досліджень найбільш типових ґрунтових масивів і основ, що зустрічаються у водогосподарському будівництві.

В підсумку, на основі отриманих результатів досліджень передбачається розробити алгоритми і програмні засоби для числового моделювання деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ при зміні гідрогеологічних умов та дії техногенних факторів. Використання результатів досліджень дозволить шляхом математичного моделювання отримати параметри фільтраційного потоку, вертикальні і горизонтальні зміщення водонасичених ґрунтових масивів і основ в умовах зміни гідрогеологічних умов та дії техногенних

факторів. У зв'язку з цим навіть на етапі проектування можна отримати прогнозовані деформації водонасичених ґрунтових масивів і основ, що знаходяться в таких умовах.

Існуючі на сьогоднішній день програми для роботи на ПЕОМ з оцінки деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ при зміні гідрогеологічних умов не працюють в комплексі одна з одною, через складність обміну інформації з визначенням параметрів фільтраційного потоку та вертикальних і горизонтальних зміщень. Враховуючи важливість цих розрахунків для водонасичених ґрунтових масивів і основ, експлуатація яких передбачається при зміні гідрогеологічних умов і дії техногенних факторів, розробка таких програмних комплексів є необхідною і своєчасною.

4.2. Рух рідини в пористих середовищах

У всіх вище описаних моделях в системі рівнянь рівноваги (статичних рівнянь) входять складові об'ємних сил (наприклад, складові об'ємних сил фільтраційного потоку). У зв'язку з цим, виникла необхідність виконати аналіз досліджень з питань руху ґрунтових вод. Оскільки рух ґрунтових вод проходить, головним чином, шляхом фільтрації, тобто шляхом гравітаційного руху рідини (води) в дисперсних (пористих) середовищах, то із точних наук найбільш широко описує рух ґрунтових вод гідромеханіка, що розглядає закономірності фільтрації, як механічного процесу. Разом з тим слід підкреслити, що фільтрація ґрунтових вод має ряд суттєвих особливостей, які пов'язані з постановкою гідрогеологічних задач, а також обумовлених специфікою дисперсних ґрунтів, як фільтруючим середовищем.

Теорія фільтрації розглядає рух рідини в пористих середовищах, тобто в твердих тілах, що містять зв'язну систему пор. Саме пористе середовище при цьому може бути,

як жорстке так і деформоване. В теорії фільтрації рух твердих мінеральних частин ґрунту, як правило, не враховується.

Будова пористого простору природних ґрунтових середовищ носить складний не впорядкований характер, тому, як правило, розглядають осереднену картину руху рідини. Відповідно цьому і саме пористе ґрунтове середовище описується осередненими параметрами, що представляють собою інтегральні характеристики.

Важливою характеристикою ґрунтового середовища, є пористість n – доля об'єму пористого середовища, яку займають порожнини. При цьому зазвичай враховуються лише ті порожнини, що можуть бути заповнені рідиною (так звана активна пористість).

Поряд з пористістю можна розглядати і інші геометричні характеристики порового простору. В силу нерівномірності будови пористого ґрунтового середовища будь-який наперед вибраний набір характеристик є, безумовно, неповним. Для найбільш вивчених зразків виконується щільність розподілу пор, а для зернистих середовищ (піску) – крива розподілу часток за розмірами (крива гранулометричного складу).

Для мінеральних частин і пор неправильної форми вибираються деякі умовні розміри. Часто, наприклад, приймають розподіл мінеральних часток за розмірами логарифмічно нормальним і характеризують їх двома параметрами – середнім діаметром d і дисперсією D . В більшості досліджень обмежуються лише одним характерним розміром пор n або зерен d . Іноді в якості характерного розміру пористого середовища приймають зворотну величину питомої

поверхні $\frac{1}{S_0}$, де S_0 – повна поверхня частин в одиниці об'єму

пористого середовища. Ця величина зручна у тому відношенні, що для ряду тіл існують незалежні фізико-хімічні способи її визначення.

Всі згадані характеристики пористого середовища є локальними і вважаються заданими в кожній точці.

При русі рідин в пористому середовищі виникають поля мікрошвидкостей і мікротисків, що мають складну структуру, яка відповідає геометрії пористого простору. Відмовляючись від розгляду цих складних полів в теорії фільтрації вводять їх осереднені характеристики та швидкість фільтрації $\mathcal{U}$ і тиск P . Ці величини визначаються в кожній точці як середнє значення в елементарному об'ємі. При цьому тиск P отримуємо як середнє у тій частині об'єму, що зайнятий рідиною, а швидкість фільтрації $\mathcal{U}$ – осередненням поля швидкостей по всьому об'єму середовища (у середині твердих часток швидкість приймається рівною нулю). При цьому проекція швидкості фільтрації на деякий напрямок рівна витраті рідини через виділену в середовищі одиницю площі, що перпендикулярна цьому напрямку. Таким чином, швидкість фільтрації може бути визначена як витрати рідини через одиничну площу середовища.

В основі теорії фільтрації покладено припущення про те, що поле швидкостей фільтрації $\mathcal{U}(x,y,z)$ при стаціонарному русі у відсутності зовнішніх масових сил, визначається заданням тиску $P(x,y,z)$ на поверхні S , що обмежує даний об'єм середовища, а також властивостями рідини і пористого середовища.

Нехай, наприклад, в пористому середовищі рухається рідина з в'язкістю ν і щільністю ρ . Виберемо поблизу точки $M(x,y,z)$ достатньо малий об'єм. У середині всього об'єму, що розглядається швидкість фільтрації з точністю до малих величин рівна $\mathcal{U}$. Явно, для того, щоб швидкість фільтрації не дорівнювала нулю, необхідно, щоб на поверхні у виділеному об'ємі тиск P не залишався постійним. Вибравши об'єм V досить малим, знаходимо, що місцеве значення швидкості фільтрації $\mathcal{U}$ визначається властивостями рідини і середовища

та місцевими значеннями похідних $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dP}{dz}$. Від самого ж тиску P швидкість фільтрації може залежити лише безпосередньо через властивості рідини і твердого скелету. Звідки можемо отримати

$$gradP = \frac{\mu}{d^2}(\nu, \rho, d / \mu)\nu. \quad (4.2)$$

Припустимо, що рух рідини в поровому просторі є повзучим (безінерціальним), тоді щільність рідини повинна бути виключена з числа параметрів, що визначаються. При цьому функція f є постійною, що визначається геометрією порового простору. Тоді відношення (1.2) можна записати у вигляді

$$\nu = -\frac{k'}{\mu} gradP, \quad (4.3)$$

де k' – проникність середовища, що має розмірність площі.

Відношення (4.3) є сучасною формою запису закону Дарсі. Закон Дарсі, неодноразово підтверджувався експериментально і лежить в основі більшості досліджень з теорії фільтрації.

Залежність (4.3) при вивченні фільтрації, дозволяє враховувати властивості рідин (щільність і в'язкість) у зв'язку із зміною її мінералізації.

Для більш простого випадку закон Дарсі можна записати у вигляді:

$$\nu = -k \cdot gradP, \quad (4.4)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що називається коефіцієнтом фільтрації.

Величина тиску, як правило, у теорії фільтрації записується у вигляді:

$$P = \gamma_{\omega} \cdot H + Z, \quad (4.5)$$

де H – напір води в точки, що розглядається; Z – висота над площиною порівняння.

В теорії фільтрації скелет ґрунту приймається у вигляді жорсткого пористого середовища з незмінною в часі пористістю і постійним коефіцієнтом фільтрації для кожного різновиду ґрунту, якщо не враховувати явища суфозії ґрунту, тобто вимивання з нього дрібних твердих часток.

Якщо на одному кінці трубки довжиною S , яка заповнена ґрунтом, підняти тиск у воді до величини P_2 , а на другому кінці трубки тиск P_1 прийняти рівним нулю, то при скелеті ґрунту у вигляді жорсткого пористого середовища, як показав М. М. Павловський, фільтраційний режим, встановиться практично миттєво, а епюра тисків у воді або напорів буде прямолінійною. Прямолінійність епюри витікає з умови, що у всіх перерізах трубки по довжині S коефіцієнт фільтрації k і швидкість фільтрації однакові і постійні. Така закономірність характерна для піщаних ґрунтів з досить жорстким скелетом.

Зовсім інші результати отримують, якщо досліджувати у тій же трубці процес фільтрації у глинистих ґрунтах, в яких скелет є досить стисливим. У глинистих ґрунтах пористість, а отже, і водопроникність, яка характеризується коефіцієнтом фільтрації, можуть суттєво змінюватися під тиском стискуючих напружень в скелеті ґрунту. В даному випадку, якщо підняти тиск на одному кінці трубки до величини P_2 , а на другому кінці знизити до величини $P_1=0$, то у випадку глинистих стисливих ґрунтів, епюра тисків у воді не буде прямолінійною. Наближення епюри до прямолінійної буде проходити при малій водопроникності ґрунтів досить повільно, наприклад, протягом місячного терміну і більше. При закінченні процесу деяке кінцеве окреслення епюри тисків не буде прямолінійним, як то отримували при жорсткому скелеті ґрунту. Це пояснюється тим, що під впливом дії фільтраційного потоку, ґрунт в кінці трубки ущільнюється дуже сильно і майже не ущільнюється на

початку трубки. У зв'язку з цим, по довжині трубки, величина коефіцієнта фільтрації зменшується. В такому випадку для виконання умови суцільності, з якої випливає, що витрати по всій довжині трубки повинні бути постійними, необхідно, щоб із збільшенням довжини трубки значення градієнтів напору поступово збільшувалось. Це і визначає криволінійність кінцевої епюри напорів.

Значні розбіжності результатів досліджень, що отримані для ґрунтів із жорстким скелетом і ґрунтів із стисливим скелетом не виключають цілком доречного застосування схеми жорсткого скелету ґрунту у багатьох випадках. По-перше, слід зазначити, що її можна застосовувати майже у всіх стаціонарних процесах фільтрації, так як зміною водопроникності ґрунту, що знаходиться під впливом фільтраційного потоку можна в багатьох випадках знехтувати. Також цілком допустимим є застосування схеми жорсткого скелету ґрунту при нестационарних процесах фільтрації у випадку наявності вільної поверхні (безнапірний рух води у ґрунті). Однак, у випадках, коли зміна пористості ґрунту є основним фактором як, наприклад, при зміні режиму фільтрації в сильно стисливих ґрунтах, врахування зміни пористості є необхідним. Із зміною пористості ґрунту змінюється відповідно і коефіцієнт фільтрації.

Результати експериментальних досліджень показують, що у багатьох випадках можна приблизно прийняти лінійну залежність між коефіцієнтом пористості і коефіцієнтом фільтрації при зміні напруженого стану ґрунту. Для даного випадку, формулу з визначення коефіцієнта фільтрації можна записати у вигляді

$$k = k_1 - \frac{k_1 - k_2}{e_1 - e_2} (e_1 - e), \quad (4.6)$$

де k_1 , k_2 , e_1 і e_2 – відповідно коефіцієнт фільтрації і пористості для двох різних напружених станів ґрунту; e – коефіцієнт пористості для деякого проміжного напруженого стану ґрунту.

В загальному випадку водопроникність ґрунтів залежить від багатьох факторів. Встановлено, що водопроникність ґрунтів є як би фокусом, у якому відображуються сукупність їх гранулометричного і хіміко-мінералогічного складу, структури, величини і характеру пористості тощо. До усіх цих факторів, що прямо або побічно впливають на водопроникність ґрунтів належать розміри і форми пор, по яких рухається вода у ґрунті, і характер взаємодії між водою і твердою фазою ґрунту.

Величина пористості, розмір і форма пор в значній мірі визначається гранулометричним складом ґрунту. У зв'язку з цим і величина водопроникності ґрунтів дуже сильно залежить від їх гранулометричного складу.

Дослідження показують, що добавки дрібних фракцій до більш крупних завжди викликають зменшення водопроникності середовища. Водопроникність піску також зменшиться з добавками глинистих ґрунтів.

Для двох випадків встановлена закономірність між складом суміші і величиною водопроникності не спостерігається. Це для суміші, що складається із гравійних і піщаних часток, водопроникність із збільшенням вмісту піщаних частин зменшується до певної межі, після якої залишається постійною.

Інша картина спостерігається у сумішах піщаних і глинистих фракцій. Добавки глинистих фракцій до піску приводять до того, що водопроникність його сильно зменшується. За даними В. В. Охотіна, суміш, що складається із піску і 30% глинистих частин виявилась практично водонепроникною.

Кількість вмісту в ґрунті глинистих частин ще не визначають повністю величину його водопроникності. Суттєво в якому стані знаходиться в ґрунті глинисті частинки: в коагуляційному або диспергованому. Оскільки коагуляція і дисперсія глинистих часток залежать від складу обмінних

катионів вони в значній мірі впливають на водопроникність ґрунтів. Дослідження І. М. Антіпова-Каратаєва показали, що кількісне співвідношення фільтрату, зібраного за один і той же час, змінюється залежно від насичення ґрунту Na^+ , Mg^+ і Ca^{++} , як 1:33:46.

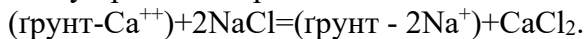
С. С. Морозов досліджував вплив обмінних катионів на деякі ґрунти. На основі отриманих даних він робить висновок, що насичення ґрунтів іоном натрію викликає помітне зменшення швидкості фільтрації води, особливо для тих ґрунтів, які містять значну кількість мулистих і колоїдних частин. Швидкість фільтрації води може зменшитись в декілька десятків разів.

Різке пониження водопроникності ґрунту від наявності обмінного катіона Na^+ пояснюється його диспергуючою дією. У результаті чого зменшуються розміри пор, в ґрунті утворюється значна кількість зв'язаної води, що перешкоджає руху вільної води і тим самим зменшує водопроникність ґрунту.

Здатність Na^+ зменшувати водопроникність ґрунтів використовується для практичних цілей.

А. Н. Соколовский встановив, що заміна Ca^+ на NH_4^+ веде до зменшення і навіть до припинення фільтрації в ґрунтах. На основі цього він запропонував метод боротьби з фільтрацією з водосховищ і каналів.

Суть методу А. Н. Соколовського полягає в тому, що в ґрунт вносять NaCl з розрахунку величини ємкості поглинання ґрунту. При цьому проходить реакція:



Катіон натрію Na^+ , що переходить в поглинальний комплекс, диспергує ґрунт і тим самим значно зменшує і навіть нерідко припиняє водопроникність останнього.

Мінералогічний склад також впливає на величину водопроникності ґрунтів. Глинисті мінерали обумовлюють різноманітне набухання ґрунтів, від якого змінюються розміри пор і, як наслідок, величина водопроникності. Ґрунт, що

містить в глинистій фракції мінерали групи монтморилоніта, повинні мати меншу величину водопроникності, ніж ґрунти, що містять мінерали групи каолініта при рівному ступені їх дисперсності. Присутність органічних дуже набухаючих речовин значно понижує водопроникність. Так, наприклад, ряд мулів, що містять велику кількість органічних речовин виявляються водонепроникними.

Первинні мінерали впливають на величину водопроникності ґрунту головним чином тим, що визначають форму пор. Мінерали з добре виявленою спайністю утворюють пори менших розмірів, ніж мінерали, що не володіють спайністю і добре обкатані. Встановлено, що, якщо розмістити первинні мінерали за величиною зростання їх коефіцієнта фільтрації, то він буде такий: слюда < польовий шпат < гострокутний кварц < округлений кварц.

Великий вплив на водопроникність ґрунтів має їх будова. Слід розрізняти ґрунти, що мають однакову водопроникність у вертикальному і горизонтальному напрямках (ізотропні за водопроникністю ґрунти), і ґрунти, у яких водопроникність у різних напрямках неоднакова (анізотропні за водопроникністю ґрунти).

Водопроникність лесів і лесовидних супісків або суглинків набагато більша у вертикальному напрямку, ніж у горизонтальному. Це обумовлено наявністю трубчатих вертикальних макропор.

У стрічкових глинах, навпаки, коефіцієнт фільтрації значно більший в горизонтальному, ніж у вертикальному напрямках. Шаруватість ґрунтів взагалі знижує їх водопроникність у значній мірі. На цьому явищі був заснований метод боротьби з водопроникністю за допомогою шаруватих екранів. Теоретично цей метод був розроблений А. Ф. Лебедевим і М. А. Качинським.

На думку М. А. Качинського, у зменшенні водопроникності ґрунтів за допомогою шаруватих екранів

велике значення має неоднорідність пор, які стають аналогічні до капілярів змінного перерізу. Виконаний М. А. Качинським дослід показує, що витрати води в капілярах змінного перерізу значно менші, ніж у прямих капілярах. З цього можна зробити висновок, що значне зниження водопроникності в капілярах змінного перерізу пояснюється великою поверхнею тертя води стінок капіляру. Крім того, зниження водопроникності може також сприяти криволінійний хід водної течії з утворенням завихрень, що спостерігаються в капілярах змінного перерізу і наявність бульбашок повітря, що накопичується у тонких ділянках капіляра.

За допомогою шаруватих екранів водопроникність ґрунтів можливо практично звести до нуля. Природна шаруватість ґрунтів зазвичай менше впливає на величину їх водопроникності.

Присутність в ґрунті газів, зв'язаної і капілярної води знижує його водопроникність. Наявність газів в адсорбованому і защемленому стані або у вигляді бульбашок, що містяться у воді, теж зменшує водопроникність. Защемлені гази займають частину вільних пор ґрунту і роблять їх недоступними для фільтрації. Адсорбовані гази також зменшують активну пористість ґрунту. Вільно плаваючі бульбашки газів зменшують водопроникність ґрунтів тому, що наявність їх збільшує в'язкість води і приводить до часткової втрати напору. Втрати напору води пов'язані з тим, що на проштовхування бульбашок газу через вузькі місця пор витрачається певна робота.

Зв'язана і капілярна вода, зменшує активну пористість і величину напору води, що зменшує величину водопроникності ґрунтів.

При цьому, відмічено деяку зміну коефіцієнта фільтрації при наявності в ґрунті повітря. Було встановлено пряму залежність коефіцієнта фільтрації від атмосферного тиску. Підвищення атмосферного тиску викликає зменшення об'єму

повітря, що знаходиться у ґрунті і збільшує його водопроникність. Зниження атмосферного тиску, навпаки, приводить до зменшення водопроникності ґрунту.

Проникність одних і тих же ґрунтів значною мірою залежить від хімічного складу і концентрації фільтруючої рідини. Дослідженнями, що були виконані В. С. Шаровим і Б. В. Дерагіним, показали, що при фільтрації сольового розчину з концентрацією до 10% через монтмориллонітову глину коефіцієнт фільтрації збільшився у 2,7 рази порівняно з фільтрацією чистої води.

Описані вище досліди згаданих авторів обмежуються тільки глинистими ґрунтами вказаного генетичного типу, що є досить складною дисперсною системою. Це не дало змоги авторам дати кількісну і якісну оцінку процесів, що відбуваються при фільтрації солевих розчинів.

Вплив різних факторів на водопроникність ґрунтів різноманітного генетичного типу неоднакова. Наприклад, вирішальним фактором, що впливає на водопроникність пісків, є їх гранулометричний склад, а водопроникність глин визначається головним чином характером їх структури і текстури.

Як було відмічено вище, важливою характеристикою з оцінки водопроникності ґрунтів є коефіцієнт фільтрації. Його можна визначити лабораторними, розрахунковими і польовим методами.

Лабораторними методами коефіцієнт фільтрації визначають на спеціальних приладах. Ці прилади являють собою металевий циліндр із сіткою всередині, на яку кладуть зразок досліджуваного ґрунту непорушеної або порушеної структури. Через ґрунт під напором фільтрується вода (наприклад, знизу вверху). Пройшовши через ґрунт, вода збирається в мірній посудині. Фільтраційну витрату Q в цьому випадку визначають за формулою

$$Q = \frac{W}{t}, \quad (4.7)$$

де W – об'єм води в мірній посудині, t – час, за який зібрано цей об'єм води.

Коефіцієнт фільтрації k , визначають за формулою

$$k = \frac{Q}{\omega \cdot i}, \quad (4.8)$$

де ω – площа поперечного перерізу металевої посудини; i – гідравлічний похил між двома перерізами посудини, що розташовані на деякій відстані один від одного.

Визначення коефіцієнта фільтрації за формулами в які входять дані гранулометричного аналізу ґрунту дають наближене значення коефіцієнта фільтрації. При цьому, вони застосовуються головним чином для визначення коефіцієнта фільтрації у піщаних ґрунтах. При отриманні таких формул, виходять із міркувань про розмірність коефіцієнта фільтрації, кореляційної залежності між діаметром мінеральних частинок і середнім розміром пор по яким рухається рідина. У загальному випадку ці формули можна записати у вигляді:

$$k = A \cdot d^2, \quad (4.9)$$

де d – розрахунковий діаметр частинок ґрунту.

Коефіцієнт A , що входить у формулу (4.9) визначається по різному. У загальному він залежить від пористості, форми часток ґрунту, коефіцієнта в'язкості рідини.

Так, як у дійсності ґрунти є різнозернистими, то для застосування формули (4.9) необхідно характеризувати ґрунти деяким діючим або ефективним діаметром часток.

Значення коефіцієнта фільтрації одержані розрахунковим методом, менш точні, ніж одержані лабораторним методом.

Польовий метод визначення коефіцієнта фільтрації полягає в тому, що із спеціально влаштованого колодязя відкачують воду, на основі чого і визначають витрату Q . В

природних умовах вимірюють криву депресії, яку одержують в результаті відкачування. Знаючи витрату Q і маючи положення кривої депресії, за формулами визначають коефіцієнт фільтрації.

Витрату води Q колодязя (дебіт колодязя) визначають за формулою

$$Q = \omega \cdot v, \quad (4.10)$$

де ω – площа поперечного перерізу колодязя; v – швидкість води, що відкачується.

Витрата води на одиницю ширини ґрунтового масиву (наприклад, на 1 м) називається питомою витратою. Питому фільтраційну витрату q , визначають за формулою

$$q = \frac{Q}{b}, \quad (4.11)$$

де b – ширина ґрунтового масиву.

Вода, що фільтрується через пори ґрунту тисне на ґрунтовий скелет (гідродинамічний тиск). Величина його не залежить від швидкості фільтрації. Напрямок гідродинамічного тиску співпадає з напрямом руху води. У глинистих ґрунтах, що мають дуже малий коефіцієнт фільтрації, гідродинамічний тиск може бути значним.

Величина гідродинамічного тиску Φ визначається за формулою

$$\Phi = \gamma_w \cdot I, \quad (4.12)$$

де γ_w – питома вага води; I – градієнт напору.

При $I = 0$ ґрунтова вода, не рухається і гідродинамічний тиск $\Phi = 0$, тобто гідродинамічний тиск виникає тоді, коли є фільтрація води.

Зміна гідрогеологічних умов ґрунтових масивів пов'язана з водовіддачею і пониженням рівня ґрунтових вод. Під водовіддачею розуміють здатність насичених водою ґрунтів віддавати воду під впливом сили тяжіння. Кількісною характеристикою водовіддачі є коефіцієнт водовіддачі, що

визначається відношенням об'єму води, що витікає під дією сили тяжіння повністю водонасиченого ґрунту, до всього об'єму ґрунту або до повного об'єму води:

$$\mu_w = \frac{V_1 - V_2}{V_1}, \quad (4.13)$$

де V_1 – об'єм води, що приходить на одиницю початкового об'єму ґрунту; V_2 – величина об'єму води, що залишається у ґрунті після стікання.

Водовіддача ґрунту, тобто його здатність віддавати воду, виникає при порушенні умови рівноваги, коли розпочинається процес осушення. При цьому, витікання води із ґрунту під дією сили тяжіння проходить поступово, і з часом інтенсивність осушення безперервно зменшується. У процесі дренажування із ґрунту вода витікає не повністю. Частина її затримується у порах ґрунту сорбційними і капілярними силами. Таким чином, поняття коефіцієнта водовіддачі нерозривно зв'язано з процесом осушення ґрунту. Звідси витікає, що коефіцієнт водовіддачі ґрунту принципово відрізняється від так названої активної пористості, яка характеризує об'єм води, що рухається у порах у процесі фільтрації. Природа сили, що задержує від стікання воду у зразках дренажного ґрунту інша, ніж сил, що перешкоджають руху води у повністю насиченому водою поровому просторі.

У теперішній час для визначення коефіцієнта водовіддачі безпосередньо у природних умовах рекомендується декілька способів. Одним із них є визначення коефіцієнта водовіддачі за результатами вимірювань вологості в осушувальній області до початку дренажування масиву ґрунту і після закінчення осушення. Для цього, виконується відбір зразків ґрунту у декількох точках по висоті ґрунтового масиву з подальшим визначенням вологості.

За результатами досліджень значення коефіцієнта водовіддачі визначається за формулою:

$$\mu_w = \omega_{z1} - \omega_{z2}, \quad (4.14)$$

де ω_{z1} – вологовміст ґрунту на висоті позначки Z перед початком дослідів; ω_{z2} – вологовміст ґрунту на тій же позначці після закінчення дослідів.

Якщо за даними природних спостережень рівня ґрунтових вод необхідно визначити деякий загальний коефіцієнт водовіддачі можна використати диференціальне рівняння нестационарної фільтрації, що записується у вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_k \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H_k \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \mu_w \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.15)$$

де H_k – водопровідність ґрунтового масиву.

Значення коефіцієнта водопровідності можна визначити за формулою:

$$H_k = k \cdot H, \quad (4.16)$$

де k – коефіцієнт фільтрації; H – потужність ґрунтового масиву.

Запишемо рівняння (4.15) у різницевій схемі:

$$\frac{H_k}{a^2} (h_2 + h_3 + h_4 + h_5 - 4h_1) = \mu_w \frac{\Delta H_1}{\Delta t}, \quad (4.17)$$

де a – сторона квадрата; ΔH_1 – зміна глибини в точці I за проміжок часу Δt ; h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – напори у відповідних точках, що спостерігаються за проміжок часу Δt .

Таким чином, для визначення коефіцієнта водовіддачі в одній точці необхідно мати п'ять свердловин для спостереження (рис. 4.3).

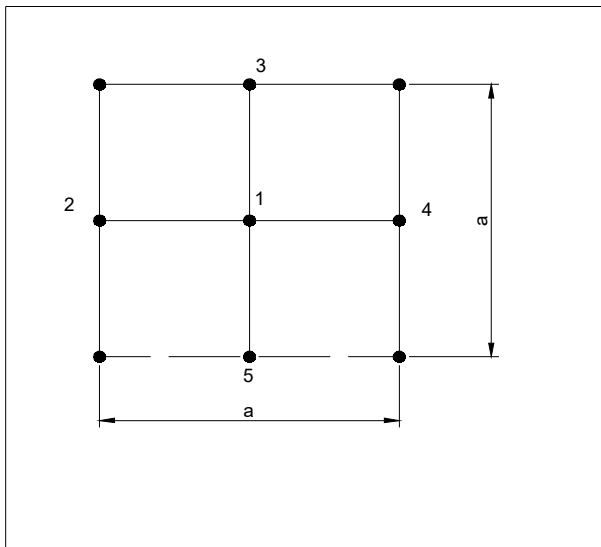


Рис. 4.3. Схема п'єзометричних свердловин при дослідженні водовіддачі ґрунту

Дана методика теоретично обґрунтована, так, як впливає з рівняння (4.17) і практично підтверджена.

З рівняння (4.17) коефіцієнт водовіддачі буде дорівнювати:

$$\mu_w = \frac{H_k (h_2 + h_3 + h_4 + h_5 - 4h_1) \cdot \Delta t}{a^2 \Delta H_1}. \quad (4.18)$$

Для попередньої оцінки стану ґрунтових масивів при їх осушенні дуже часто використовують емпіричні залежності для визначення коефіцієнта водовіддачі, наприклад, формулу П. А. Бецинського:

$$\mu_w = 0,117 \sqrt{k^I}, \quad (4.19)$$

де k^I – проникність ґрунту.

Водовіддача ґрунтового масиву, що було розглянуто вище, проходить під впливом гравітаційного витікання води із пор ґрунту. Крім того, водовіддача насичених водою ґрунтів може проходити в результаті зміни порового об'єму при його стисканні гідродинамічним тиском води.

Направлений рух фільтруючого потоку може суттєво вплинути на напружений стан і деформації ґрунту. Параметр, що характеризує зміну водовіддачі ґрунтів, який обумовлюється їх деформаціями називається коефіцієнтом пружної ємкості ґрунту. Для його обґрунтування розглядаються деформації елементу водоносного шару об'ємом V під дією зміни тисків у воді. Вагова кількість води в цьому елементі рівна $m = \gamma_w \cdot n \cdot V$, а її зміна $\Delta m = \Delta(\gamma_w \cdot n \cdot V)$, де γ_w – питома вага води; n – об'єм пор, що міститься в одиничному об'ємі ґрунту. Об'єм пор визначається за формулою:

$$n = \frac{e}{1 + e}, \quad (4.20)$$

де e – коефіцієнт пористості ґрунту.

Тоді, зміна маси води в об'ємі V в результаті його деформації, з урахуванням (4.20) запишеться у вигляді:

$$\Delta m = \Delta\left(\gamma_w \cdot e \frac{V}{1 + e}\right). \quad (4.21)$$

Складова $\frac{V}{1 + e}$ у виразі (4.21) описує об'єм, що займають тверді частки.

Якщо прийняти, що деформованість твердих часток набагато менша у порівнянні з деформацією самого ґрунту, то можна знехтувати деформаціями самих твердих частин. Тоді залежність (4.21) можна записати у вигляді:

$$\Delta m = \frac{V}{1 + e} \Delta(\gamma_w \cdot e) = \frac{V}{1 + e} (e \cdot \Delta\gamma_w + \gamma_w \cdot \Delta e). \quad (4.22)$$

В отриманій формулі (4.22) встановлюють значення $\Delta\gamma_w$ і Δe . Вода є мало-стисливою рідиною, і для неї справедливий закон Гука.

$$\frac{\Delta\gamma_w}{\Delta P} = \alpha_w \cdot \gamma_w; \Delta\gamma_w = \alpha_w \cdot \gamma_w \cdot \Delta P, \quad (4.23)$$

де α_w – коефіцієнт стискання води.

Для визначення зміни коефіцієнта пористості ґрунту Δe від дії тиску води, використаємо закон ущільнення ґрунтів:

$$\Delta e = m_0 \cdot \Delta P, \quad (4.24)$$

де m_0 – коефіцієнт стисливості ґрунту.

При цьому, прийнята умова, що зміна напруженого стану ґрунту відбувається внаслідок дії фільтраційного потоку.

З урахуванням (4.23) і (4.24) залежність (4.22) запишеться у вигляді:

$$\Delta m = \frac{\gamma_w \cdot V}{1 + e} (e \cdot \alpha_w + m_0) \cdot \Delta P. \quad (4.25)$$

Величину $\frac{\gamma_w}{1 + e} (e \cdot \alpha_w + m_0) = \eta$ називають коефіцієнтом пружної ємності ґрунту.

Для надання кількісної і якісної оцінки фільтраційного потоку ґрунтових вод використовують гідродинамічну сітку, що складається з системи ліній рівного напору і ліній току. Найбільш загальною є просторова форма потоку, в якому гідродинамічна сітка деформується за всіма трьома просторовими координатами. Аналіз просторових фільтраційних потоків досить складний і умови, що вимагають просторового опису структури фільтраційного потоку, зустрічаються в практиці розрахунків дуже рідко.

Найбільш широко використовуються у фільтраційних розрахунках площинні потоки у вертикальних перерізах (профільні) і планові, для яких характерна деформація гідродинамічної сітки в якій-небудь одній площині. В профільних потоках деформації ліній току проходять

переважно у вертикальній площині, а в плані потік має плоско паралельний характер. В планових потоках деформації ліній току відбуваються в основному у плані, а у вертикальних перерізах потік приймається плоско паралельний. Найбільш простою структурною формою фільтраційного потоку є лінійний (одновимірний) потік, у якому всі лінії току паралельні одна одній. Зазвичай напрямок фільтраційного потоку поєднують з напрямом горизонтальної або вертикальної осі.

На структуру фільтраційного потоку суттєво впливає водопроникність шарів, з яких складається ґрунтовий масив або основа. В таких шаруватих системах формується специфічна структура фільтраційного потоку, яку можна ефективно описувати, вводячи допущення перетікання, що було внесено в методику фільтраційних досліджень Г. М. Каменским, М. К. Гірінским. Згідно допущення перетікання при суттєвій існуючій різниці водопроникності двох шарів, рух у слабоводопроникних шарах слід розглядати тільки у вертикальному напрямку, а у сильноводопроникних шарах у горизонтальному напрямку.

Для обґрунтування допущення про перетікання води у слабоводопроникних ґрунтах у вертикальному напрямку можна виходити з того, що при значній різниці водопроникності двох шарів ґрунту, водопровідність такої системи практично повністю визначається водопроникністю сильно водопроникного шару ґрунту. Тоді в межах слабоводопроникних ґрунтів рухом фільтраційного потоку можна знехтувати. Таке допущення згідно досліджень, що були виконанні М. К. Гірінским, можливе, коли виконується умова $k_1 < 0,05 k_2$, де k_1 і k_2 – відповідні коефіцієнти фільтрації слабоводопроникного і сильноводопроникного ґрунту. Дана умова справедлива, коли товщина двох шарів ґрунту однакова.

Оскільки, в допущені перетікання фільтраційний потік деформується по вертикалі лише в слабоводопроникних шарах, а в сильноводопроникних шарах він має плановий характер, то за структурою фільтраційний потік в шаруватих системах може характеризуватися як планово-профільний.

Режим фільтраційного потоку характеризується зміною параметрів потоку в часі. У загальному випадку режим фільтраційного потоку є нестационарним, оскільки параметри потоку змінюються в часі. Однак нерідко ці зміни бувають несуттєві, і тоді режим фільтраційного потоку можна рахувати стаціонарним. Виділяють також квазістаціонарний режим фільтраційного потоку, при якому зміна рівнів потоку у всіх точках ґрунтового масиву проходить з однаковою інтенсивністю.

За характером формування вільної поверхні ґрунтових вод фільтраційні потоки діляться на безнапірні (з вільною поверхнею) і напірні (з напірною поверхнею). При цьому на вільній поверхні безнапірного потоку тиск рівний атмосферному, а на поверхні напірного потоку тиск перевищує атмосферний. Більш чіткий і достовірний поділ на напірний і безнапірний потік обґрунтовується ємкісними властивостями ґрунтових шарів. В напірних шарах відображають вплив пружної ємкості ґрунтів і характеризується коефіцієнтом пружної ємкості ґрунтів η . Тоді, як в безнапірних шарах визначаючим є гравітаційна ємність, що характеризується величиною коефіцієнта водовіддачі μ_w . Відповідно різниця між напірним і безнапірним потоком досить чітко виявляється у величині коефіцієнта водовіддачі, оскільки в безнапірному потоці μ_w має величину порядку 0,01–0,1, а в напірному потоці η має величину порядку 10^{-3} – 10^{-5} .

В практиці розрахунку параметрів фільтраційного потоку є випадки, коли фільтраційний потік в нижньому водоносному шарі досить добре пов'язаний з вільною

поверхнею у верхньому слабоводопроникному шарі. При довготривалих нестационарних процесах ємність верхнього шару має гравітаційний характер, тобто характеризується коефіцієнтом μ_w водовіддачі. Такий фільтраційний потік зазвичай повинен розглядатися як безнапірний. Взявши до уваги ці особливості, такий потік виділяють в окремий тип. Його називають субнапірним. В планових фільтраційних потоках градієнти напору за глибиною вважаються постійними, а в якості фільтраційного параметру, що характеризує водопроникність ґрунту, приймають провідність $T = k \cdot m$, де k, m – відповідно коефіцієнт фільтрації і товщина шару ґрунту. При отриманні розрахункових залежностей для планових потоків суттєвим є характер залежності провідності від напору. В напірних шарах зміна провідності залежно від напору пов'язана лише із зміною водопроникності при деформаціях шару. Однак зазвичай такі зміни не суттєві. У зв'язку з цим в напірних шарах провідність практично не залежить від напору. В безнапірних потоках провідність більш тісно пов'язана із зміною рівнів води, що є причиною зміни глибини потоку, а отже, і потужності водоносного шару. Таким чином, у безнапірних шарах зміна провідності залежить від умов формування фільтраційного потоку. При цьому характер цієї залежності визначається будовою фільтраційного потоку у вертикальному напрямку.

Для практичного рішення фільтраційних задач виділяють три основні схеми будови фільтраційного потоку по вертикалі:

1) з постійною провідністю, коли провідність у будь-якому перерізі вважається незмінною (не залежить від зміни напору потоку);

2) однорідного по вертикалі безнапірного потоку, провідність якого лінійно залежить від його глибини (схема Дюпюї [162]);

3) багатошарового безнапірного потоку на горизонтальному водонепроникному шарі (схема М. К. Гірінського).

Природно, що для обґрунтування принципів методики фільтраційних розрахунків безнапірних потоків важливим є встановлення раціональної області застосування кожної з приведених вище схем побудови фільтраційного потоку по вертикалі і вибору основної розрахункової схеми, для якої перш за все слід обґрунтувати розрахункові залежності. В літературі з динаміки ґрунтових вод для безнапірного потоку в якості основної зазвичай застосовують схему Дюпюї (потік однорідної будови на горизонтальному водонепроникному шарі ґрунту).

Разом з тим в роботах [23; 25] була показана необхідність врахування неоднорідності водоносних шарів по вертикалі. Розвиваючи це положення, на основі аналізу реальних гідрогеологічних умов можна досить впевнено стверджувати, що умови, коли водоносний шар може рахуватися однорідним, а водонепроникний шар горизонтальним, зустрічаються дуже рідко. Значно більш реально слід рахувати припущення про незміну провідність водоносного шару. Таке допущення безперечно виконується для двохшарового ґрунтового масиву, коли основний водоносний шар знаходиться під слабководонепроникним шаром. Оскільки в цьому випадку коливання рівнів ґрунтових вод в межах слабководонепроникного шару практично не впливає на величину провідності ґрунтового масиву.

Допущення про незмінну провідність ґрунтових масивів прийнятне і для фільтраційного потоку значної потужності з багатошаровою будовою та криволінійним розміщенням водонепроникних підстилаючих ґрунтів, оскільки в цьому випадку достовірність будь-якої розрахункової схеми є невизначеною. В цьому випадку вирішальне значення набуває простота схеми напірного шару (з постійною провідністю).

Отже, можна відмітити, що схема Дюпюї має досить обмежену область застосування, головним чином в однорідних сильноводопроникних ґрунтах при швидкій зміні потужності потоку. Схема М. К. Гірінського досить ефективно застосовується при чітко виділених шаруватих ґрунтових масивах.

При вирішенні фільтраційних задач дуже часто замість швидкості фільтрації використовують поняття питомих витрат фільтраційного потоку q , що є витратами планового потоку шириною 1м. Таким чином, площа поперечного перерізу для питомих витрат чисельно рівна потужності шару ґрунту. Тому, можна записати вираз для питомих витрат фільтраційного потоку в диференціальній формі для будь-якого напрямку l стосовно різних схем будови шарів ґрунтового масиву.

Для схеми напірного шару $I = -\frac{dH}{dl}$ цей вираз запишеться у вигляді

$$V = q = -T \frac{dU}{dl}, \quad (4.26)$$

де $T = k \cdot m$, де k – коефіцієнт фільтрації; m – потужність (товщина) шару.

Для схеми Дюпюї $T = k \cdot h$, а при площині порівняння на рівні водоутримуючих ґрунтів, ця залежність запишеться як:

$$V = q = -k \cdot h \frac{dU}{dl} = -k \frac{d(\frac{h^2}{2})}{dl}. \quad (4.27)$$

Для схеми М. К. Гірінського загальний вигляд для питомих витрат в напрямку l має вигляд:

$$V = q = -\frac{dG}{dl}. \quad (4.28)$$

Тут G – функція М. К. Гірінського, яка для фільтраційного потоку глибиною h з n шарів ґрунту, визначається виразом

$$G = \sum_{i=1}^n k_i \cdot m_i (h - z_i), \quad (4.29)$$

де k_i , m_i і z_i – відповідно, коефіцієнт фільтрації, потужність і відстань для i -го шару від його середини до підстилаючих водонепроникних ґрунтів.

Співставивши вирази (4.26), (4.27), (4.28) для різних схем, фільтраційного потоку, можна відмітити, що вони однотипні. Якщо взяти за основу схему потоку з постійною (заданою) провідністю, що записується в загальній формі рівнянням (4.26), то для переходу до схеми Ж. Дюпюї слід виконати наступні заміни:

$$T \Rightarrow k, H \Rightarrow \frac{h^2}{2}, \quad (4.30)$$

а для переходу до схеми М.К. Гірінського слід замінити

$$T \Rightarrow 1, H \Rightarrow G. \quad (4.31)$$

Користуючись цими замінами, завжди можна перейти від залежностей, що побудовані для фільтраційного потоку з постійною провідністю, до залежностей для схем Ж. Дюпюї і М. К. Гірінського, що дозволяє суттєво уніфікувати розрахункові залежності.

Оскільки схема напірного шару найбільш проста і має широке застосування, то в подальшому вона буде розглядатися як основна. При необхідності застосування для безнапірного потоку схем Дюпюї або М. К. Гірінського відповідні розрахункові залежності отримують на основі наведених вище загальних правил переходу.

4.3. Об'ємні сили, що діють у водонасичених ґрунтових масивах і основах

4.3.1. Гідродинамічні сили фільтраційного потоку

При русі вільної води в порах ґрунту між нею і твердими частинками виникають сили взаємодії. Результируюча всіх цих

сил представляє собою силу гідравлічної дії фільтраційного потоку води на одну мінеральну частинку скелету ґрунту (рис. 4.4, а). Рівнодіюча таких елементарних сил, що прикладені до всіх частин, які знаходяться в одиничному об'ємі ґрунту, буде визначати об'ємні сили від дії фільтраційного потоку (рис. 4.4, б).

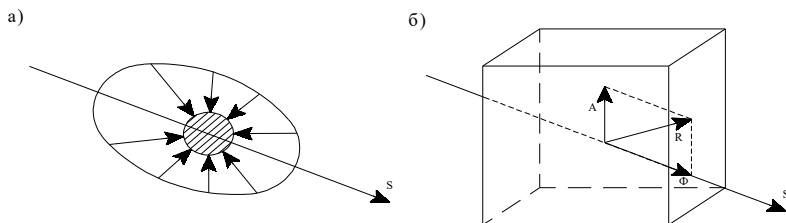


Рис. 4.4. Схема сил, що діють на частинку ґрунту (а), об'ємні архімедова і фільтраційна сила при фільтрації води (б)

Розклавши її на дві складові. Одну із них направимо по вертикалі, а другу – за напрямком руху потоку, тобто за лінією току S тоді вертикальна сила буде зважуючою (архімедовою силою), а друга, що діє за напрямком лінії току S , фільтраційною силою Φ . В окремому випадку при відсутності фільтрації $\Phi = 0$ на частинку ґрунту діє тільки сила зважування води. Таким чином, додаткова дія фільтраційного потоку на скелет ґрунту визначається у вигляді об'ємних фільтраційних сил, що направлені за лінією току, тобто перпендикулярно до ліній рівних напорів. Дія скелету ґрунту на рухому воду відбувається у вигляді гальмуючої сили тертя T , яка рівна фільтраційній силі, що направлена у зворотну сторону:

$$\Phi = -T. \quad (4.32)$$

Для визначення інтенсивності фільтраційної сили віділимо за лінією току S елементарний об'єм ґрунту циліндричної форми (скелет ґрунту та вода, що заповнює

пори) довжиною ds і поперечним перерізом F (рис. 4.5). Розглянемо сили, що діють тільки на порову воду в трубці.

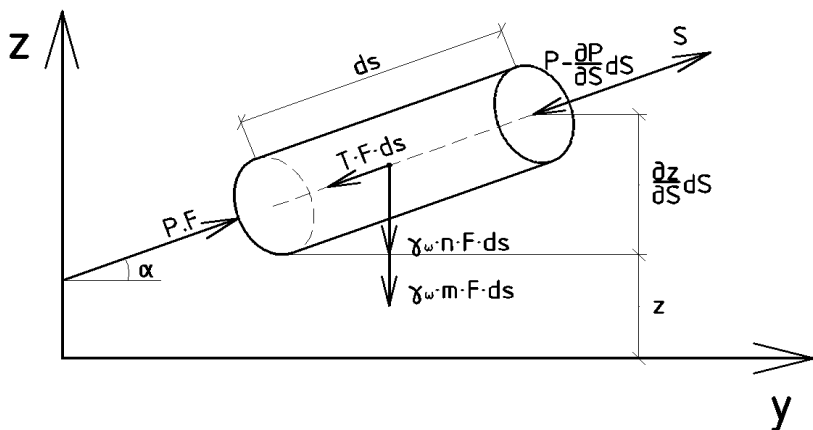


Рис. 4.5. Схема сил, що діють при фільтрації води в елементарному об'ємі ґрунту

На торцях трубки діють сили тиску води: на одному – $p \times F$, на другому – $(P - \frac{\partial P}{\partial S} dS)$. У середині трубки діють вага води в порах ґрунту, яка дорівнює $\gamma_w \cdot n \cdot F \cdot dS$, і сила, що зворотна архімедовій, яка рівна $\gamma_w \cdot m \cdot F \cdot dS$.

Врахування її обов'язкове, оскільки, якщо вода зважає частинки з архімедовою силою, спрямованою вертикально вверх, то принципом рівності дії й протидії на воду буде діяти однакова за величиною, але спрямована вертикально вниз сила, що зворотна архімедовій. Крім того, у середині трубки на воду, діє спрямована вздовж осі лінії току S об'ємна гальмуюча сила, яка дорівнює $T \cdot F \cdot dS$.

Відповідно до рис. 4.5 складемо рівняння рівноваги всіх сил, що діють на воду всередині пор ґрунтової трубки, у вигляді їхніх проекцій за напрямком лінії току S .

$$P \cdot F - (P - \frac{\partial P}{\partial S} ds)F - T \cdot F \cdot dS - m \cdot \gamma_w \cdot F \cdot dS \cdot \sin \alpha - \\ - n \cdot \gamma_w \cdot F \cdot dS \cdot \sin \alpha = 0$$

Звідки, враховуючи те, що $m+n=1$, отримаємо:

$$T = \frac{\partial P}{\partial S} + \gamma_w \cdot \sin \alpha.$$

Маючи на увазі, що відповідно до рис. 4.5.

$$\sin \alpha = \frac{(\frac{\partial z}{\partial S}) \cdot dS}{dS} = \frac{\partial z}{\partial S},$$

вираз для гальмуючої сили набуде вигляду:

$$T = \frac{\partial P}{\partial S} - \gamma_w \cdot \frac{\partial z}{\partial S} \text{ або } T = \gamma_w \frac{\partial}{\partial S} (\frac{P}{\gamma_w} - z).$$

Вираз у дужках являє собою напір H , а враховуючи залежність (4.32), його можна записати:

$$\Phi = -T = -\gamma_w \frac{\partial H}{\partial S}.$$

У випадку постійного градієнту напору I :

$$\Phi = \gamma_w \cdot I.$$

Проектуючи фільтраційну силу за напрямком осей x і y , отримаємо вирази для складових об'ємної фільтраційної сили:

$$Y = \Phi_y = -T_y = -\gamma_w \frac{\partial H}{\partial S} \cos(S, y) = -\gamma_w \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$X = \Phi_x = -T_x = -\gamma_w \frac{\partial H}{\partial S} \cos(S, x) = -\gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.33)$$

Знак «мінус» свідчить про те, що фільтраційна сила діє в напрямку руху води.

4.3.2. Сили від власної ваги ґрунту

Як було вказано вище, в систему рівнянь рівноваги входять складові об'ємних сил. Одними із них є об'ємні сили від власної ваги ґрунту.

Перед тим, як перейти безпосередньо до визначення напружень від власної ваги ґрунту, зупинимося на визначенні самої ваги ґрунту, що знаходиться нижче рівня ґрунтових вод.

На ґрунтові мінеральні частинки, що знаходиться у нерухомій воді, діють власна вага цих частинок і архімедова сила. Архімедова сила рівна рівнодійній гідростатичного тиску води на частинку ґрунту і направлена вверх, тобто протилежно напрямку дії власної ваги частинки.

При визначенні напружень від власної ваги ґрунту, що залягає нижче рівня ґрунтових вод, вагу ґрунту приймають з урахуванням зважування. Відомо, що для його визначення використовують залежність:

$$\gamma_{sb} = \gamma_{nac} - \gamma_w, \quad (4.34)$$

де γ_{nac} — питома вага насиченого водою ґрунту; γ_w — питома вага води.

В глинистих практично водонепроникних ґрунтах, не проходить передача гідростатичного тиску між частинками ґрунту. У зв'язку з цим при визначенні напружень у товщі і на поверхні шару водонепроникних ґрунтів потрібно використовувати вагу ґрунту без врахування зважування. Якщо під водонепроникними ґрунтами розміщуються ґрунти, насичені водою, то при визначенні їх напруженого стану необхідно враховувати вагу розміщених над ними ґрунтів без врахування зважування, а вагу насичених ґрунтів у яких визначається напруження — з урахуванням звужуючої дії води. Напруження на поверхні шару другого водонепроникного ґрунту необхідно визначити без врахування звужуючої дії води.

При визначенні напруженого стану ґрунтових масивів і основ, що обумовлено їх власною вагою вважають, що ґрунт до прикладання до нього будь-якого додаткового навантаження не знаходиться в стані граничної рівноваги, так як в протилежному випадку прикладання навантаження викликало б порушення міцності. У зв'язку з цим застосування

рішень теорії лінійно деформованого середовища для визначення напружень від власної ваги ґрунту є цілком доречним.

Об'ємні сили від власної ваги ґрунту можна записати у вигляді

$$X = Y = 0 \text{ і } Z = \gamma(z), \quad (4.35)$$

де $\gamma(z)$ означає, що власна вага ґрунту залежить від глибини розміщення точки від поверхні землі для якої визначається напруження.

Складові напружень визначаються з системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \frac{\nu}{1-\nu} \int_0^z \gamma(z) dz + az + b, \\ \sigma_z &= \int_0^z \gamma(z) dz, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (4.36)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

При горизонтальній поверхні землі вирази для визначення напружень задовольняють також необхідним граничним умовам, які полягають в тому, що на поверхні ґрунтового середовища при $Z = 0$ напруження $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_z = 0$. Дійсно, дотичні напруження τ_{zx} і τ_{yz} згідно виразу (4.36), рівні нулю у всіх точках ґрунтового середовища, а отже і на поверхні $Z = 0$. Напруження σ_z при $Z = 0$ перетворюються в нуль, так як перетворюється в нуль верхня межа інтегралу.

Якщо ґрунтовий масив однорідний і зміною ваги на різних глибинах можна знехтувати, тобто можна прийняти, що $\gamma(z) = \gamma = const$, то складові нормальних напружено запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \xi \cdot \gamma \cdot z + az + b, \\ \sigma_z &= \gamma \cdot z, \end{aligned} \right\}, \quad (4.37)$$

$$\text{де } \xi = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Якщо ґрунтовий масив або основа складається із декількох шарів товщиною h_i , питома вага яких γ_i , то напруження на глибині z будуть рівні:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \gamma_i \cdot h_i + az + b, \\ \sigma_z &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i, \end{aligned} \right\}. \quad (4.38)$$

Необхідно звернути увагу на те, що у виразах (4.37) і (4.38) напруження σ_x і σ_y залишились невизначеними за наявності невідомих коефіцієнтів a і b . Це пояснюється тим, що при розв'язуванні простої задачі теорії пружності граничні значення були задані тільки на площині $Z = 0$, а на всій іншій частині граничної поверхні, що віддалена у нескінченність, вони залишились невизначеними. Це обумовило отримання невизначеності рішення.

Задати недостатні умови на досить великому віддаленні від поверхні землі не передбачається можливим, так як вони залежать від цілого ряду факторів, як наприклад, від рельєфу місцевості, геологічних і ґрунтоутворюючих процесів тощо.

У виразах (4.37) і (4.38) коефіцієнти a і b , як правило, приймають рівними нулю.

5. Основні закономірності теорії пружності та теорії фільтрації з визначення напружено-деформованого стану водонасичених ґрунтових масивів

5.1. Сили та напруження в ґрунтовому масиві

Зовнішні сили, що діють на ґрунтовий масив можна розділити на дві групи: поверхневі і об'ємні.

Поверхневі сили – це результат контакту двох тіл. Вони розподілені на поверхні тіла, наприклад, тиск фундаменту будівлі або споруди на ґрунт. Поверхневі сили характеризуються інтенсивністю, тобто значенням сили, що припадає на одиницю площі поверхні, на яку розподілена ця сила. Якщо розміри площі, на яку діє сила, досить малі у порівнянні з розмірами тіла, то такою площею можна знехтувати і вважати, що сила прикладена в точці. Таку силу називають зосередженою.

Об'ємні сили діють в кожній точці ґрунтового масиву. До них відносяться власна вага ґрунту, гідродинамічні сили фільтраційного потоку. Для встановлення об'ємних внутрішніх сил, що виникають в ґрунтовому масиві, виконуємо перетин деякого об'єму ґрунту (рис. 5.1).

Розташування площини перетину в просторі визначається напрямом нормалі n . Дію відкинутої частини ґрунту можна замінити силою N_p , що прикладена до центру ваги перетину, і парою сил з моментом N_m . Сила N_p і пара N_m визначаються з умови рівноваги частини ґрунту, що залишився і називаються зусиллями в перетині яке розглядається.

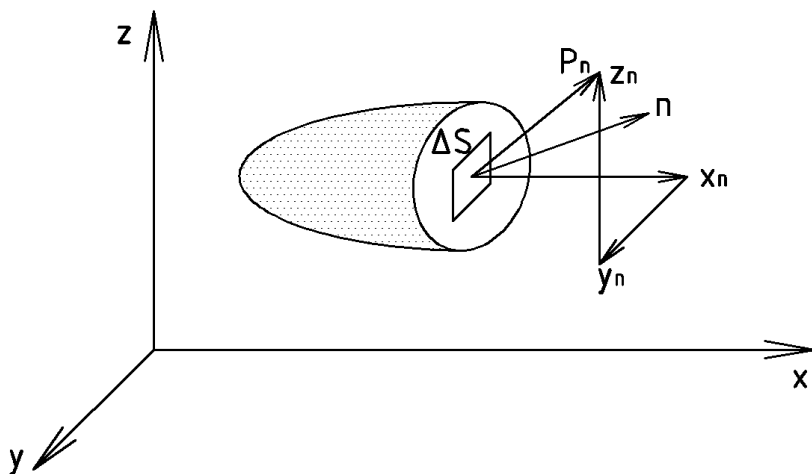


Рис. 5.1. Складові повного напруження в площині перетину

Зусилля N_p і N_M є рівнодіючими елементарних сил ΔN на всіх нескінченно малих площах ΔS , на які розбито перетин, що розглядається. Інтенсивність внутрішніх сил є повним напруженням. У зв'язку з цим відношенням $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ буде середнім напруженням на площі ΔS . Перейшовши до границі при ΔS , що прямує до нуля, отримаємо повне напруження в даній точці на майданчику з нормаллю n :

$$P_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta S}. \quad (5.1)$$

Повне напруження P_n в загальному випадку не співпадає з напрямом нормалі n (див. рис. 5.1). У зв'язку з цим, крім величини повного напруження, необхідно знати його напрямок у просторі. Зручно замість повного напруження P_n розглядати його складові в координатних осях X_n, Y_n, Z_n . Позначення, наприклад X_n читається так: проекція на вісь X

повного напруження на майданчику з нормаллю n . Складові повного напруження показані на рис. 5.1.

В перетинах, що паралельні координатним площинам, індекс n можна замінити індексом координатної осі, яка перпендикулярна до перетину. Наприклад, в перетині, що паралельне координатній площині yOz (рис. 5.2), нормаль n співпадає за напрямком з віссю X , то зовнішні напруження можна записати у вигляді X_x, Y_x, Z_x .

Складова X_x направлена перпендикулярно до перетину і називається нормальним напруженням. Складові Y_x і Z_x , що лежать в площині перетину, називаються дотичними напруженнями.

Для позначення нормальних і дотичних напружень застосовують ще інші позначення. Наприклад, нормальні напруження позначають грецькою буквою σ , а дотичні – грецькою буквою τ . Так, нормальні напруження замість X_x можна позначити σ_X , де індекс X означає нормаль до перетину. Дотичні напруження в цьому перетину замість Y_x і Z_x можна позначити відповідно τ_{YX} і τ_{ZX} , де перший індекс показує напрямок дотичного напруження, а другий – нормаль до площини перетину.

Таким же чином, можна розглянути складові напружень в площині zox і yox . З дев'яти складових напружень на всіх трьох площинах yoz , zox , yox маємо три складові нормальних напружень $X_x = \sigma_X$, $Y_y = \sigma_Y$, $Z_z = \sigma_Z$ і шість складових дотичних напружень $Y_x = \tau_{YX}$, $Z_y = \tau_{ZY}$, $X_z = \tau_{XZ}$, $X_y = \tau_{XY}$, $Y_z = \tau_{YZ}$, $Z_x = \tau_{ZX}$.

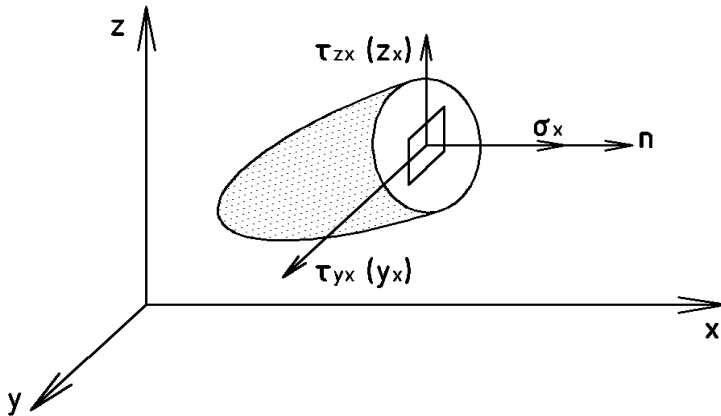


Рис. 5.2. Складові напружень в площині yOz

Напруження, що виникають в ґрунтовому масиві, в загальному випадку можуть бути різними в різних точках ґрунтового масиву, тобто вони є функціями координат точок:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z), \text{ та інші.}$$

5.2. Рівняння рівноваги напружено-деформованого стану ґрунтових масивів

Для встановлення рівнянь рівноваги, виділимо в ґрунтовому масиві нескінченно малий паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам, і ребрами довжиною dx, dy, dz (рис. 5.3).

Запишемо складові напружень, що діють на гранях цього паралелепіпеда. На кожній грані маємо три складові напружень, що паралельні координатним осям. Всього на шістьох гранях отримаємо вісімнадцять складових напружень.

Складові напружень на паралельних гранях паралелепіпеда, що розміщені одна від одної на нескінченно малій відстані, відрізняються одна від одної на нескінченно

малу величину. Наприклад, якщо на стороні паралелепіпеда $dydz$, що співпадають з координатною площиною yz , діє нормальне напруження σ_x , та на стороні, що знаходиться на відстані dx , діє нормальне напруження $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, яке відрізняється на нескінченно малу величину за рахунок зміни координати x . Аналогічно записуються напруження і на решті парах паралельних гранях паралелепіпеда. Таким чином з вісімнадцяти складових напружень невідомими є тільки дев'ять: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$.

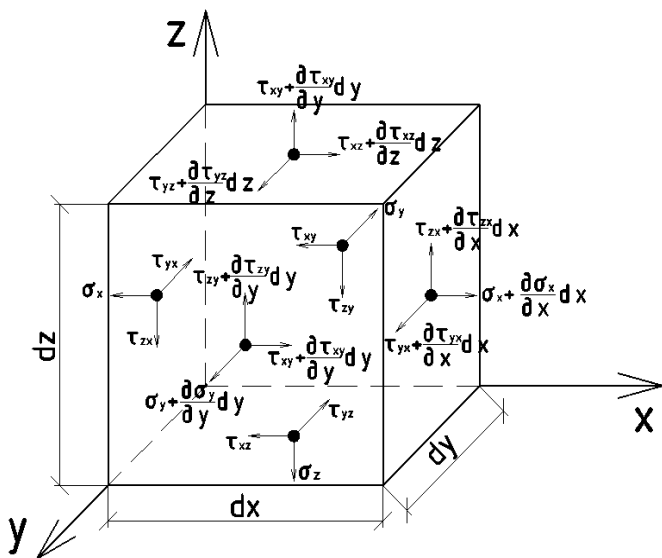


Рис. 5.3. Складові напружень на гранях кубічного паралелепіпеда

Крім напружень, на виділений паралелепіпед будуть діяти об'ємні сили X, Y і Z . Складові об'ємних сил, що діють в об'ємі паралелепіпеда, запишуться: $Xdx dy dz, Ydx dy dz, Zdx dy dz$.

Для ґрунтового масиву, що знаходиться в рівновазі, повинні задовольнятися шість рівнянь статки: три рівняння

проекцій на координатні осі та три рівняння моментів відносно цих осей.

Розглянемо рівняння проекцій на вісь x . На вісь x проєктуються тільки напруження і сили, що паралельні цій осі. При проєктуванні кожне напруження будемо множити на величину площі, на яку воно діє.

$$\begin{aligned} &(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dzdx - \\ &- \tau_{xy} dzdx + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dxdy - \tau_{xz} dydx + X dxdydz = 0. \end{aligned}$$

Після зведення подібних членів і діленням на об'єм $dV = dxdydz$ можна записати:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (5.2)$$

Аналогічно можна скласти рівняння проекцій на вісь y і z . Таким чином, отримаємо три диференціальні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.3)$$

Для знаходження шести невідомих функцій σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} маємо тільки три диференціальні рівняння рівноваги (5.3). Це означає, що рівнянь статки недостатньо і задача теорії пружності з визначення напружень є статично невизначеною. Недостатні рівняння можна отримати, вивчаючи деформації ґрунту і враховуючи його фізичні властивості.

5.3. Рівняння деформацій ґрунтового масиву при дії на нього об'ємних сил

Щоб визначити деформацію будь-якого ґрунтового масиву, необхідно порівняти положення точок ґрунту до і після прикладання навантаження (рис. 5.4).

На рис. 5.4 показано ґрунтовий масив і точка A , координати якої до деформації x, y, z . Під дією навантаження точка A переміститься в нове положення – в точку A' з координатами x', y', z' . Таке переміщення можливе у наслідок деформації ґрунтового масиву.

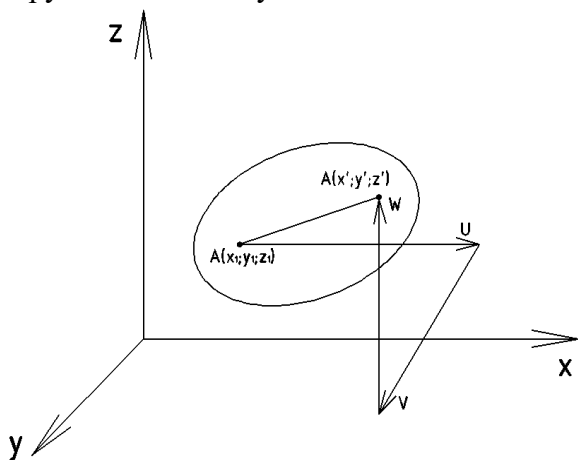


Рис. 5.4. Деформація ґрунтового масиву

Проекції переміщення точки A на координатні осі x, y і z дорівнюють різниці відповідних координат точок A і A' : $u = x' - x$, $v = y' - y$, $w = z' - z$, і є функцією координат точки; $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$.

Різниця у величинах переміщень в різних точках ґрунтового масиву викликають його деформацію.

Нескінченно малий паралелепіпед з ребрами довжиною dx, dy і dz , що вирізаний з ґрунтового масиву біля довільної

точки A , в наслідок різниці переміщень його точок деформується, тобто змінюється довжина його ребер і спотворюються початкові прямі кути між гранями (рис. 5.5).

На рис. 5.5 показано два ребра паралелепіпеда. Ребро AB , що паралельне осі x , і ребро AC , що паралельно осі z . Довжина ребра AB рівна dx , ребра AC – dz . Після деформування точки A , B і C займуть нове положення – A' , B' , C' .

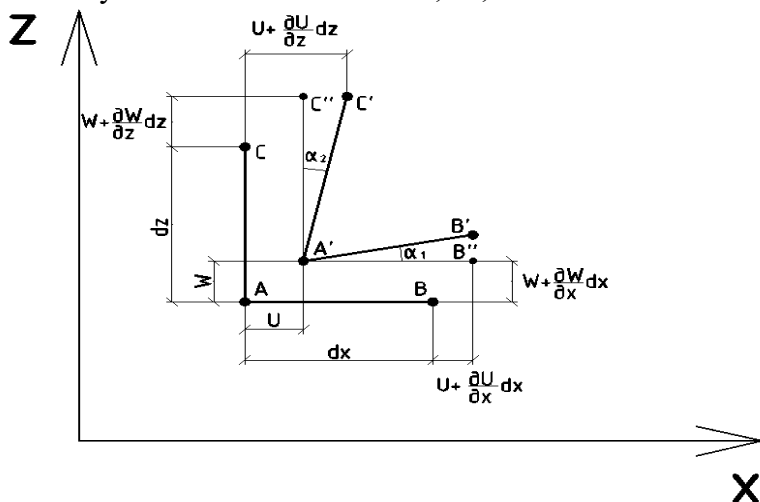


Рис. 5.5. Деформація точок в нескінченно малому паралелепіпеді

При цьому точка A отримає переміщення u і w . Точка B , що розміщена від точки A на нескінченно малій відстані dx , отримає нескінченно малу величину переміщення за рахунок зміни координати x :

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

Переміщення точки C будуть відрізнятись від переміщень точки A на нескінченно малу величину за рахунок зміни координати z :

$$u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \quad w + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Довжина проекції ребра AB на вісь x після деформації буде дорівнювати:

$$A'B'' = dx - u + (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (5.4)$$

Проекція абсолютного видовження ребра AB на вісь x рівна:

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Відносне видовження ребра AB уздовж осі x називається лінійною деформацією за напрямком осі x . Вона рівна:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно отримаємо лінійні деформації за напрямком координатних осей y і z :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Розглянемо зміну кутів між ребрами паралелепіпеда (див. рис. 5.4). Тангенс кута повороту ребра AB в площині xOz рівний:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{w + \frac{\partial w}{\partial x} dx - w}{dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x})} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

Обмежуючись розглядом тільки малих деформацій, можна допустити $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ і знехтувати лінійною деформацією ε_x у порівнянні з одиницею. Тоді $\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$.

Аналогічно знаходимо кут повороту ребра AC в тій же площині:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial z} . \quad (5.5)$$

Кут зсуву в площині xOz , тобто спотворення прямого кута BAC , називається кутовою деформацією і виражається як сума кутів повороту ребра AB і AC :

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} .$$

Аналогічно знайдемо кутові деформації в двох інших координатних площинах:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} .$$

Таким чином ми отримали шість основних залежностей складових лінійних і кутових деформацій від складових переміщень:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} . \quad (5.6)$$

5.4. Рівняння, що описують фізичні властивості ґрунтових масивів

Для сумісного розгляду теорії напружень і теорії деформації необхідно встановити залежність між напруженнями і деформаціями. Ця залежність носить фізичний характер. Дійсно, при розгляді в курсі опору матеріалів діаграм розтягу різних матеріалів, встановлено, що залежність між напруженнями і деформаціями визначається властивостями матеріалів.

Обмежуючись малими деформаціями пружного тіла, зв'язок між напруженнями і деформаціями можна прийняти лінійним.

При випробуванні ґрунтів на стиснення в початковій фазі встановлена пропорційність між нормальним напруженням і лінійною деформацією в одному напрямку:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (5.7)$$

що описується законом Гука. Пружна постійна E називається модулем пружності.

Також експериментально встановлений закон, що зв'язує лінійні деформації в повздовжньому і поперечному напрямках:

$$\varepsilon' = -\nu \varepsilon. \quad (5.8)$$

Пружна постійна ν називається коефіцієнтом Пуассона.

При випробуванні на чистий зсув встановлена пропорційність між дотичним напруженням і кутовою деформацією в площині дії цього напруження:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (5.9)$$

В даному випадку з'являється третя пружна постійна G , що називається модулем зсуву. Але модуль зсуву не є новою незалежною пружною постійною, так як він визначається через перші дві відомі залежності:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.10)$$

Щоб встановити залежність між складовими деформацій і складовими напружень при об'ємному напруженому стані, виділимо з ґрунтового масиву нескінченно малий паралелепіпед (див. рис. 5.3) і розглянемо дію тільки нормальних напружень $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Різницею між напруженнями на протилежних гранях можна знехтувати, так як вона дає деформації більш високого порядку малості.

Вирахуємо видовження ребра ab (рис. 5.3), що паралельне напруженню σ_x . Від дії напруження σ_x відносно видовження ε_x ребра ab , згідно закону Гука, рівне

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Напруження σ_y , згідно закону Гука, викликає видовження в напрямку, що перпендикулярне ребру ab :

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E},$$

а за напрямком ребра ab викликає укорочення згідно закону, що зв'язує лінійні деформації в повздовжньому і поперечному напрямках:

$$\varepsilon''_x = -\nu \varepsilon_y,$$

або з урахуванням деформації ε_y

$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}.$$

Аналогічно можна знайти відносне укорочення ребра ab від дії нормального напруження σ_z :

$$\varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

На основі принципу незалежності дії сил знаходимо повне відносне видовження ребра ab , як суму видовжень від дії кожного напруження:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

або, при виносі за дужки E і ν :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

Аналогічно можна знайти лінійні деформації за напрямками осей y і z :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Зв'язок між кутовими деформаціями і дотичними напруженнями, згідно з законом Гука при зсуві, можна записати незалежно для кожної з трьох площин, що паралельні координатним площинам:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Таким чином, маємо шість формул:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\}. \quad (5.11)$$

Ці залежності, ще називають узагальненим законом Гука.

При розв'язках задач часто буває необхідно мати вираз складових напружень через складові деформацій.

Для отримання таких залежностей введемо попереднє співвідношення для об'ємних деформацій. Склавши перші три формули узагальненого закону Гука (5.11) знаходимо

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (5.12)$$

Ввівши позначення, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$, а $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1$, формулу (5.12) можна записати у вигляді

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} S_1, \quad (5.13)$$

тобто відносна об'ємна деформація θ пропорційна першому інваріанту напруженого стану S_1 . Ввівши модуль об'ємного розширення

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (5.14)$$

отримаємо:

$$S_1 = 3K\theta$$

Якщо перший інваріант напруженого стану S_1 замінити середнім напруженням в точці

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1, \quad (5.15)$$

то отримаємо наступне рівняння:

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (5.16)$$

Для визначення складових напружень через складові деформацій візьмемо першу формулу закону Гука (5.11) і в квадратні дужки додамо і віднімемо величини $\nu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]. \quad (5.17)$$

Ввівши позначення S_1 першого інваріанта напруженого стану отримаємо:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_x - \nu S_1]. \quad (5.18)$$

Із формули (5.13):

$$S_1 = \frac{E}{1+2\nu} \theta. \quad (5.19)$$

Підставивши формулу (5.19) в формулу (5.18) отримаємо:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1+\nu)\sigma_x - \frac{E\nu}{1-2\nu}\theta \right], \quad (5.20)$$

звідси знаходимо вираз

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x. \quad (5.21)$$

Введемо позначення

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.22)$$

Тоді замість формули (5.21) отримаємо:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x. \quad (5.23)$$

Пружні постійні λ і μ називаються коефіцієнтами Ламе. Вони також, як і модулі пружності E і G , характеризують пружні властивості матеріалу. З порівняння формул (5.10) і (5.22) витікає, що $\mu = G$.

Аналогічно формули (5.23) можна отримати ще дві формули для σ_y і σ_z :

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Приєднавши до (5.23) і (5.24) три останні формули із системи рівнянь (5.11) отримаємо рішення складових напружень через складові деформацій:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \tau_{xy} = \mu \cdot \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \tau_{yz} = \mu \cdot \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, \tau_{zx} = \mu \cdot \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}. \quad (5.25)$$

Ці формули зазвичай називають зворотньою формою закону Гука.

5.5. Рішення задач напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в переміщеннях

При розв'язанні задач напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву в переміщеннях за основні невідомі приймають три складові переміщень

$$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z).$$

Для їх знаходження необхідно мати три рівняння, які можна отримати із диференціальних рівнянь рівноваги (5.3), визначивши в них напруження через переміщення. Для цього візьмемо перше рівняння рівноваги (5.3) і підставимо систему напружень із формул закону Гука у формі (5.11). В результаті отримаємо:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0. \quad (5.26)$$

Потім з формул (5.6) підставимо в отримане рівняння деформації. Після групування знаходимо:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (5.27)$$

Вираз в перших дужках можна позначити спрощено:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u, \quad (5.28)$$

де $\nabla^2 u$ – називається оператором Лапласа над функцією $U(x, y, z)$.

Вираз, що знаходиться у других дужках (5.27), можна спростити наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (5.29)$$

Підставимо співвідношення (5.27) і (5.28) в рівняння (5.26), отримаємо:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0.$$

Аналогічно можна перетворити і два інших диференціальних рівнянь рівноваги (5.3).

Таким чином, отримаємо групу рівнянь для розв'язку задач НДС ґрунтового масиву в рамках теорії пружності у переміщеннях:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (5.30).$$

Рівнянь системи (5.30) називають рівняннями Ламе. Вони містять умову рівноваги кожного елементу ґрунту, геометричні характеристики деформації u, v, w, θ і фізичні характеристики λ, μ .

Порядок рішення задач НДС ґрунтових масивів в переміщеннях виконується наступним чином. Для знаходження трьох складових переміщення u, v, w необхідно проінтегрувати три рівняння Ламе (5.30). За знайденими переміщеннями за формулами (5.6) визначаємо складові деформацій, а потім за формулами закону Гука (5.25) – складові напружень.

5.6. Основні рівняння фільтрації води в ґрунтовому середовищі

Математична модель фільтраційного потоку води в ґрунтових середовищах включає рівняння руху (головний закон фільтрації), рівняння нерозривності потоку, рівняння стану, що пов'язують напруження і деформації шару ґрунту, а

також умови однозначності, що складаються з початкових і граничних умов процесу.

Рівняння руху для фільтраційного потоку записують у вигляді основного закону фільтрації. Для фільтраційного потоку прийемо рівняння руху в узагальненій формі закону Дарсі. У якому градієнт напору запишемо через його похідні у відповідних напрямках руху фільтраційного потоку. Для фільтраційного потоку з постійною густиною рідини компоненти швидкостей фільтрації v_x, v_y, v_z – за напрямком координат x, y, z записуються у вигляді

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -k_x \frac{dH}{dx}, \\ v_y &= -k_y \frac{dH}{dy}, \\ v_z &= -k_z \frac{dH}{dz}, \end{aligned} \right\}, \quad (5.31)$$

де k_x, k_y, k_z – коефіцієнти фільтрації ґрунту за напрямком відповідних координат.

Необхідно відмітити, що диференціальна форма основного закону фільтрації вперше була представлена Дюпюї [162].

Для виведення рівняння нерозривності розглядають нескінченно малий елемент просторового фільтраційного потоку за нескінченно малий час dt (рис. 5.6).

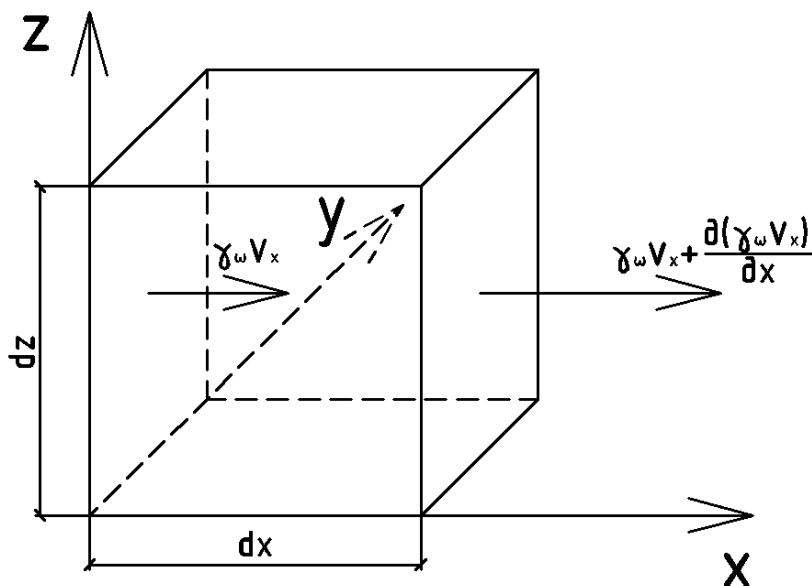


Рис. 5.6. Схема просторового фільтраційного потоку

Нехай через одну грань цього об'єму входить вода, а через протилежну виходить. Витрати фільтраційного потоку, що поступають в елемент за напрямком осі x , будуть рівні $\gamma_w \cdot v_x \cdot dy \cdot dz$, де γ_w – питома вага води. При виході з елемента

витрати отримують приріст $\frac{\partial}{\partial x}(\gamma_w \cdot v_x) dx$. Тоді витрати

фільтраційного потоку, що виходять з елемента за напрямком осі x , будуть рівні $[\gamma_w \cdot v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\gamma_w \cdot v_x) dx] dy \cdot dz$. Таким чином,

різниця між витратами фільтраційного потоку, що входить в елемент і виходить за напрямком осі x складе:

$$-\frac{\partial(\gamma_w \cdot v_x)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Аналогічно можна записати зміну витрат фільтраційного потоку за напрямком осей y і z :

$$-\frac{\partial(\gamma_w \cdot v_y)}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \text{ і } -\frac{\partial(\gamma_w \cdot v_z)}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz .$$

Сумарні витрати води в елементі за час dt рівні

$$-\left(\frac{\partial(\gamma_w \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\gamma_w \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma_w \cdot v_z)}{\partial z}\right) dx \cdot dy \cdot dz . \quad (5.32)$$

Зміна кількості води Δm_x в нескінченно малому елементі за час dt дорівнює

$$\Delta m = \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{1 + e} \cdot \frac{\partial(\gamma_w \cdot e)}{\partial t} dt . \quad (5.33)$$

Виходячи з того, що сумарна зміна кількості води при проходженні фільтраційного потоку через нескінченно малий елемент за різними напрямками повинна компенсуватися зміною кількості води, що містить в цьому елементі, після скорочення нескінченно малих величин отримаємо рівняння нерозривності фільтраційного потоку:

$$-\frac{\partial(\gamma_w \cdot v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma_w \cdot v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\gamma_w \cdot v_z)}{\partial z} = \frac{1}{1 + e} \cdot \frac{\partial(\gamma_w \cdot e)}{\partial t} . \quad (5.34)$$

При розгляді пружного режиму фільтрації повинні бути рівняння стану, що пов'язують деформації шару ґрунту із зміною тиску у воді і ґрунті.

Характерною формою рівняння стану для води і ґрунту є коефіцієнт пружної ємкості ґрунту

$$\eta = \frac{\gamma_w}{1 + e} (e \cdot \alpha_w + m_0) . \quad (5.35)$$

Використовуючи (5.35) запишемо вираз рівняння нерозривності, що враховує деформації шару ґрунту:

$$\frac{\partial(\gamma_w \cdot e)}{\partial t} = e \frac{\partial \gamma_w}{\partial t} + \gamma_w \frac{\partial e}{\partial t} = e \cdot \gamma_w \cdot \alpha_w \frac{\partial P}{\partial t} - \gamma_w \cdot m_0 \frac{\partial P_{CK}}{\partial t} . \quad (5.36)$$

При формуванні пружного режиму фільтрації під дією фільтраційного потоку $dP_{CK} = -dP_x$ і

$$\frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial(\gamma_w \cdot e)}{\partial t} = \frac{\gamma_w}{1+e} (e \cdot \alpha_w + m_0) \frac{\partial P}{\partial t},$$

або
$$\frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial(\gamma_w \cdot e)}{\partial t} = \eta \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (5.37)$$

Диференціальні рівняння фільтрації описують розподіл напорів (тисків) у фільтраційному потоці. Для їх виведення в рівнянні нерозривності компоненти швидкостей фільтраційного потоку визначають із закону фільтрації Дарсі, а деформації ґрунтового масиву (води і ґрунту) пов'язують з тисками через рівняння стану.

Розглянемо найбільш розповсюджені умови формування фільтраційного потоку під дією гідродинамічних факторів.

В такій постановці для компонентів швидкостей фільтрації приймається вираз (5.31), а для деформацій шару ґрунту вираз (5.37), у якому вважається, що

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx \gamma_w \cdot \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння нерозривності (5.34), отримаємо диференціальне рівняння, що описує розподіл напорів у фільтраційному потоці

$$\eta \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial H}{\partial z}). \quad (5.38)$$

Для однорідного анізотропного шару ґрунту рівняння (5.38) записується у вигляді

$$\eta \frac{\partial H}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \quad (5.39)$$

Для однорідного ізотропного шару ґрунту

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla^2 H, a = \frac{k}{\gamma_w (e \cdot \alpha_w + m_0)}, \quad (5.40)$$

де k – коефіцієнт фільтрації ізотропного ґрунту; ∇ – оператор Лапласа над функцією $H(x,y,z)$.

При так названому «жорсткому» режимі фільтрації, коли зміною пористості ґрунту у часі нехтують, рівняння (5.38), перетвориться в однорідне еліптичного типу

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_z \frac{\partial H}{\partial z}) = 0. \quad (5.41)$$

При осушенні значних розмірів ґрунтових масивів, маємо випадок нестационарної фільтрації планових потоків. Для виведення диференціальних рівнянь планового-плоского потоку розглядають рух фільтраційного потоку в нескінченно малому елементі з основою $dx dy$ і висотою, що рівна потужності водоносного шару (рис. 5.7). В цей елемент за час dt попадають витрати $q_x \cdot dy$ за напрямком осі x і $q_y \cdot dx$ – за напрямком осі y . При виході з елемента, вони отримують приріст $\frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy$ за напрямком осі x і $\frac{\partial q_y}{\partial y} dx \cdot dy$ – за напрямком осі y .

Різниця між вхідними і вихідними витратами складає приріст об'єму води в блоці. Інтенсивність якого визначається величиною $\mu_w \frac{\partial U}{\partial t} dx \cdot dy$, де μ_w – коефіцієнт водовіддачі.

Запишемо рівняння балансу фільтраційного потоку, для елемента, що розглядається

$$q_x \cdot dy + q_y \cdot dx = q_x \cdot dy + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy + q_y \cdot dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx \cdot dy + \mu_w \frac{\partial U}{\partial t} dx \cdot dy. \quad (5.42)$$

Після скорочення отримаємо рівняння нерозривності планового безнапірного потоку:

$$\mu_w \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (5.43)$$

Для планового-плоского потоку справедливе допущення Дюпюї про незмінність горизонтальних градієнтів напору I_x і I_y в кожному вертикальному перерізі. При цьому вважають, що

$$I_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, I_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad (5.44)$$

де H – напори на вільній поверхні води.

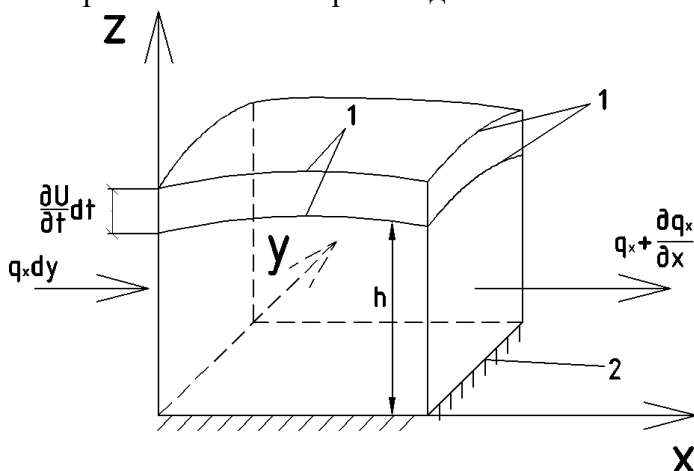


Рис. 5.7. Схема безнапірного планового потоку; 1 – розміщення поверхні депресії; 2 – водонепроникна основа

У зв'язку з цим можна записати вираз для компонентів витрат q_x і q_y

$$q_x = k \cdot h \cdot I_x = -k_x \cdot h \frac{\partial H}{\partial x}, q_y = k_y \cdot h \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (5.45)$$

Підставивши (5.45) в (5.43), отримали диференціальне рівняння однорідного нестационарного фільтраційного потоку по вертикалі

$$\mu_w \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot h \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (5.46)$$

Оскільки $h \cdot dh = d(\frac{h^2}{2})$, то рівняння (5.46) можна також записати у вигляді

$$\mu_w \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial \frac{h^2}{2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial \frac{h^2}{2}}{\partial y}). \quad (5.47)$$

Як, видно, рівняння (5.46) є нелінійним, оскільки провідність ґрунту змінюється не тільки в площині, але і залежить від зміни напору. Його за пропозицією Бусінеска, можна лінеаризувати, усереднивши глибину потоку h під знаком похідної. Для однорідного в плані фільтраційного потоку ($k=\text{const}$) рівняння (5.46) записують у вигляді:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}, \quad (5.48)$$

де $a = \frac{k \cdot h_c}{\mu_w}$ – коефіцієнт рівня провідності.

Дещо більш ефективна лінеаризація рівняння (5.46) була зроблена способом Богрова-Веригина. В цьому способі використовується залежність (5.47) у якій виконано перетворення

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2h} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}.$$

Ввівши далі функцію $\varphi = 0,4 \cdot h^2$, рівняння (5.47) приводять до вигляду

$$\frac{\mu_w}{k \cdot h} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (5.49)$$

Для лінеаризації рівняння (5.49) усереднюють величину h в лівій частині цього рівняння. Тоді рівняння (5.49) запишеться:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \quad (5.50)$$

Для багатошарового ґрунтового масиву (схема М. К. Гірінського) диференціальне рівняння прийме вигляд:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}, \quad (5.51)$$

де $a = \frac{T}{\mu_w}$.

Співставляючи лінеаризовані диференціальні рівняння (5.48), (5.49), (5.50) і (5.51), можна виділити в них одну формальну однотипність. Вони переходять одне в одне, за правилами, що обґрунтовані для умов стаціонарного режиму фільтрації. У зв'язку з цим для умов нестационарної фільтрації доцільно розглядати методику побудови розрахункових залежностей стосовно схеми шару ґрунту з постійною провідністю. Використання схем Дюпюї і М. К. Гірінського можна рекомендувати лише для таких умов, коли зміна потужності шару ґрунту викличе суттєву зміну його провідності.

Суттєву зміну в характері розвитку стаціонарного режиму фільтрації може викликати шарувата будова безнапірного ґрунтового масиву і особливо наявність слабоводопроникних верхніх шарів, у яких розміщується вільна поверхня фільтраційного потоку. В цьому випадку розповсюдження фільтраційного потоку в плані проходить в основному у нижньому шарі ґрунту. В таких умовах структуру фільтраційного потоку можна приймати, використовуючи припущення перетікання, тобто в нижньому шарі фільтраційний потік рухається в горизонтальному напрямку, а у верхньому – в вертикальному напрямку.

Якщо зробити аналіз рівнянь (5.39) і (5.46) можна відмітити їх аналогію. При цьому рівняння пружного режиму фільтрації (5.39) переходить в рівняння безнапірного фільтраційного потоку (5.46), якщо замість η прийняти μ . Ця

обставина дає можливість уніфікувати рішення для безнапірних і напірних фільтраційних потоків.

При рішенні диференціальних рівнянь задаються граничними умовами на характерних межах фільтраційного потоку значення функції, що відшукують або її похідну, а також їх комбінаціями. Оскільки у фільтраційних розрахунках функцією, що відшукуємо, зазвичай є напір, то граничні умови задають у вигляді напору (умова першого роду), градієнт напору або витрати потоку (умова другого роду) або їх комбінація (умова третього роду).

Основними зовнішніми межами фільтраційного потоку є: контури водоймищ (водосховища, річки, канали тощо) і водонепроникні межі, що проходять по контуру водостійких шарів ґрунту. У безнапірних потоках верхньою межею є їх вільна поверхня (крива депресії). Внутрішні межі виникають при наявності зон з різною водопроникністю або внутрішніх джерел (свердловини, дрени тощо).

При встановленні граничних умов на контурі водотоку (водоймища) зазвичай вважають, тиск води у водоймищі розподіляється за гідростатичним законом, як в нерухомому басейні. Тоді по контуру водоймища напір буде мати постійну величину H_0 , що буде складатися з глибини водойми h_0 і вертикальної координати від дна водоймища до лінії порівняння z_0 :

$$H_0 = h_0 + z_0 = \text{const.} \quad (5.52)$$

Таким чином, контур водоймища представляє собою лінію рівних напорів. При цьому, згідно з принципом ортогональності гідродинамічної сітки лінії токів будуть направлені по нормалі до контуру водоймища.

Водонепроникні межі задаються по контуру водостійких ґрунтів. Уздовж такої межі проходить лінія току, а градієнт напору по нормалі до неї дорівнює нулю. Таким чином, на водонепроникній межі задається частковий випадок граничних умов другого роду.

Верхньою межею безнапірного фільтраційного потоку є його вільна поверхня, на якій тиск рівний атмосферному, зазвичай приймають рівний нулю. Відповідно на вільній поверхні напір H рівний вертикальній координаті z відносно площини порівняння, тобто тут виконується умова

$$H = z. \quad (5.53)$$

На межі двох шарів ґрунту з різними коефіцієнтами фільтрації k_1 і k_2 (рис. 5.8) відбувається заломлення ліній току, що приводить до виникнення специфічної граничної умови.

Для обґрунтування даної граничної умови знайдемо співвідношення кутів α_1 і α_2 між напрямками швидкостей V_1 і V_2 (ліній току) і нормаллю n до межі двох середовищ. З умови рівності проекцій швидкостей фільтрації на нормаль маємо

$$V_1 \cdot \cos \alpha_1 = V_2 \cdot \cos \alpha_2 \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}. \quad (5.54)$$

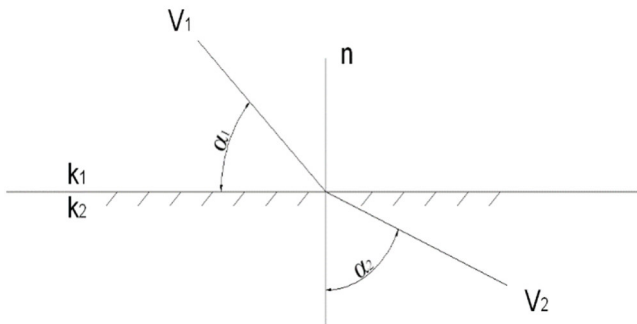


Рис. 5.8. Фільтраційний потік на межі двох шарів ґрунту з різними коефіцієнтами фільтрації

Запишемо вираз для проекцій швидкостей фільтрації на дотичну l до межі двох середовищ за законом Дарсі, враховуючи при цьому рівність градієнтів напору $\frac{dH}{dl}$ в кожному ґрунтовому шарі:

$$V_1 \cdot \sin \alpha_1 = -k_1 \frac{dH}{dl}, \quad V_2 \cdot \sin \alpha_2 = -k_2 \frac{dH}{dl}, \quad (5.55)$$

звідси витікає співвідношення:

$$\frac{dH}{dl} = \frac{V_1 \cdot \sin \alpha_1}{k_1} = \frac{V_2 \cdot \sin \alpha_2}{k_2}. \quad (5.56)$$

Взявши до уваги співвідношення швидкостей $\frac{V_1}{V_2}$, що визначаються виразом (5.54), отримаємо з (5.55) наступну умову перелому лінії току на межі двох шарів ґрунту:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (5.57)$$

Умову (5.57) зазвичай називають «правилом тангенсів».

Наведені вище диференціальні рівняння фільтрації і граничні умови для їх рішень, дозволять встановити параметри фільтраційного потоку для багатьох задач з оцінки стану ґрунтових масивів при зміні їх гідрогеологічних умов.

Для рішення диференціальних рівнянь фільтрації застосовують аналітичні і чисельні методи. Аналітичні методи рішення диференціальних рівнянь виду (5.50) широко представлені в працях з математичної фізики, особливо для задач теплопровідності. Використання і розвиток цих методів стосовно задач нестационарної фільтрації перш за все пов'язано з роботами С. Ф. Аверьянова, М. М. Верігіна, П. Я. Полубарінової-Кочіной, І. А. Чарного. В теперішній час розроблений широкий аспект таких рішень. Вони можуть бути використані тільки для однорідних фільтраційних потоків при певних граничних умовах, що є їх суттєвим недоліком.

Розвиток сучасної обчислювальної техніки дозволяє отримувати ефективні рішення багатьох задач теорії фільтрації в пористих середовищах. Це у першу чергу відноситься до складних задач, що описуються диференціальними рівняннями в часткових похідних і містять

велику кількість вихідної інформації. При застосуванні ПЕОМ необхідно:

- 1) отримати математичну модель задачі, що розглядається відповідними диференціальними рівняннями і граничні умови області фільтрації ґрунтового масиву;

- 2) розробити або вибрати з існуючих методів метод чисельного рішення отриманих диференціальних рівнянь з оцінкою його похибки і стійкості рішення;

- 3) скласти програму, що реалізує розроблений або вибраний метод рішення.

Чисельні рішення диференціальних рівнянь фільтрації відображені в багатьох роботах. Більшість згаданих робіт присвячені числовому рішення рівнянь Бусінеска (одновимірного або двовимірного) в лінеаризованому і нелінеаризованому видах.

Оскільки в більшості робіт розглядається чисельне інтегрування рівняння в часткових похідних типу Бусінеска, то в якості методу рішення таких задач в основному використовується кінцево-різницевий метод у тому чи іншому варіанті, як найбільш універсальний і зручний при застосуванні ПЕОМ.

В працях Баклановської В. Ф. досліджена збіжність рішень системи кінцево-різницевих рівнянь.

В працях В. С. Усенко і А. Х. Альтшуля розглянута задача про осе-симетричний стаціонарний потік ґрунтових вод до неудосконаленої свердловини в напірному шарі. Рішення виконано кінцево-різницевим методом в циліндричних координатах.

Огляд робіт з чисельного рішення диференціальних рівнянь фільтрації показує, що область їх застосування в останні роки значно розширилась. Однак, вони вирішувались окремо, без подальшого застосування отриманих параметрів фільтраційного потоку з оцінки стану ґрунтових масивів і основ.

6. Моделювання деформацій ґрунтових масивів при дії фільтраційного потоку рідини у вертикальному напрямку

6.1. Деформації ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води

Рух ґрунтових вод веде до виникнення об'ємних сил (гідродинамічних сил фільтраційного фільтраційного потоку) і зміни напружено-деформованого стану ґрунтових масивів і основ. У зв'язку з цим виникла необхідність з визначення переміщень, деформацій і напружень в водонасичених ґрунтових масивах і основах.

Виходячи зі складності поставленої проблеми, розглянемо одновимірну задачу з визначення переміщень, деформацій та напружень шару ґрунту з врахуванням дії фільтраційного потоку у вертикальному напрямку. Для цього розглянемо водопроникний ґрунтовий масив (рис. 6.1).

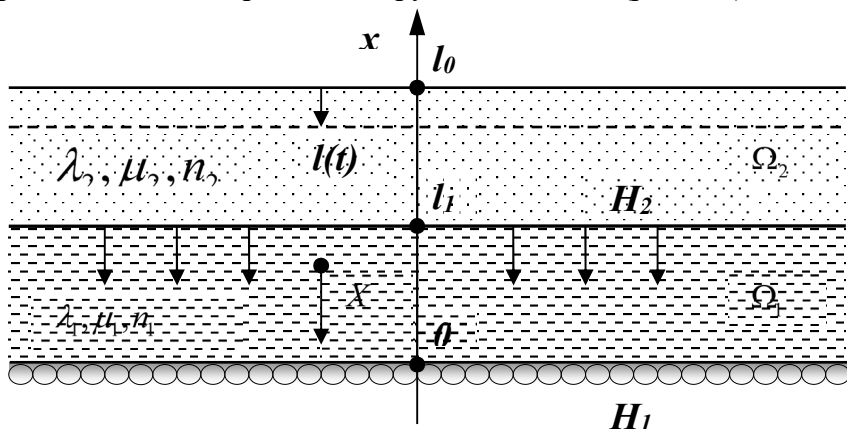


Рис. 6.1. Розрахункова схема ґрунтового масиву при наявності фільтраційного потоку

Розглянемо одновимірну задачу НДС ґрунтового масиву при наявності фільтрації ґрунтових вод у вертикальному напрямку [14]. Нехай на нижній поверхні ґрунту на межі $x = 0$ задано п'єзометричний напір H_1 , а на глибині l_1 відповідно H_2 ($H_2 > H_1$). В результаті різниці напорів відбувається рух води у вертикальному напрямку.

Математична модель даної задачі буде складатися з рівнянь НДС ґрунту, що записані у переміщеннях та рівняння фільтрації ґрунтових вод. Рівняння НДС ґрунту у переміщеннях записуються у вигляді:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{d^2 w_1}{dx^2} = X_1, \quad x \in (0, l_1), \quad (6.1)$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{d^2 w_2}{dx^2} = X_2, \quad x \in (l_1, l), \quad (6.2)$$

$$X_2 = \gamma_{sb} + \frac{dp}{dx}, \quad X_2 = \gamma_{np}. \quad (6.3)$$

Тут γ_{sb} – ґрунт, що знаходиться в зваженому стані; γ_{np} – питома вага ґрунту в природному стані; p – фільтраційний тиск, що визначається за формулою

$$p = \gamma_w (h - x), \quad (6.4)$$

де h – п'єзометричний напір; x – вертикальна координата.

Фільтрація води у ґрунтовому масиві відбувається згідно закону Дарсі

$$V = -k(x) \frac{dh}{dx}, \quad \frac{dV}{dx} = 0, \quad (6.5)$$

$$h(l_1) = H_2, \quad (6.6)$$

де V – швидкість фільтрації; $k(x)$ – коефіцієнт фільтрації.

Знайдемо розв'язок задачі фільтрації ґрунтових вод. Використовуючи формули (6.4), маємо:

$$\frac{d\left(k(x)\frac{dh}{dx}\right)}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dh}{dx}=\frac{A}{k(x)},$$

$$h(x)=A\int_0^x\frac{ds}{k(s)}+B. \quad (6.7)$$

Невідомі коефіцієнти в (6.7) знаходимо, використовуючи крайові умови (6.5), (6.6). З формули (6.5) маємо:

$$B=H_1. \quad (6.8)$$

З формули (6.6) випливає, що

$$A=\frac{H_2-H_1}{\int_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)}}. \quad (6.9)$$

$$\text{Отже, } h(x)=\frac{H_2-H_1}{\int_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)}}\int_0^x\frac{ds}{k(s)}+H_1. \quad (6.10)$$

Знайдемо $\frac{dp}{dx}$, використовуючи формулу (6.4):

$$\frac{dp}{dx}=\gamma_w\cdot\left(\frac{1}{k(x)}\cdot\frac{H_2-H_1}{\int_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)}}-1\right).$$

Таким чином:

$$X_1=\gamma_{se.}+\gamma_w\cdot\left(\frac{1}{k(x)}\cdot\frac{H_2-H_1}{\int_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)}}-1\right). \quad (6.11)$$

Математична модель НДС ґрунту у безрозмірних змінних запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = a_1 + A_1 \cdot \frac{1}{k(x)}, \quad x \in (0, l_1), \quad (6.12)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = a_2, \quad x \in (l_1, l), \quad (6.13)$$

$$\text{де } a_1 = \frac{\gamma_{\text{нас.}} - \gamma_p}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \quad A_1 = \frac{\gamma_p \cdot (H_2 - H_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1) \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}}, \quad a_2 = \frac{\gamma_{\text{нр.}}}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

Крайові умови для переміщень мають вигляд:

$$w_1(0) = 0, \quad (6.14)$$

$$\frac{dw_2(l)}{dx} = 0. \quad (6.15)$$

Це означає наявність переміщення верхньої межі ґрунту.

Умови спряження на межі знаходження рівня ґрунтових вод запишуться у вигляді:

$$w_1(l_1) = w_2(l_1), \quad (6.16)$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{dw_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{dw_2(l_1)}{dx}. \quad (6.17)$$

При переході до безрозмірних величин користувалися такими формулами (риски для зручності опущенні):

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{l_0}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l_0},$$

$$\bar{A}_1 = A_1 \cdot l_0, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{l_0}, \quad \bar{a}_i = a_i \cdot l_0, \quad i = 1, 2,$$

де $\bar{l} < 1$ для будь-якого $t > 0$.

Враховували, що $l(t) \leq l_0$,

$$l(t) - l_0 = w_2(l(t)), \quad l(0) = l_0.$$

В даному випадку розв'язок задачі (6.12)–(6.17) задається формулами

$$w_1(x) = \frac{a_1 x^2}{2} + A_1 \int_0^x \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + c_1 x + c_2, \quad x \in (0, l_1), \quad (6.18)$$

$$w_2(x) = \frac{a_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4, \quad x \in (l_1, l), \quad (6.19)$$

$$\text{де } c_2 = 0, \quad (6.20)$$

$$c_3 = -a_2 l, \quad (6.21)$$

$$c_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} (a_2 l_1 - a_2 l) - a_1 l_1 - A_1 \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}, \quad (6.22)$$

$$c_4 = A_1 \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz - A_1 l_1 \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)} - \frac{(a_1 + a_2) l_1^2}{2} + a_2 l l_1 + \\ + a_2 l l_1 + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} (a_2 l_1^2 - a_2 l l_1). \quad (6.23)$$

Деформації ґрунтового масиву визначаються за формулами:

$$\varepsilon_1(x) = a_1 x + A_1 \int_0^x \frac{ds}{k(s)} + c_1, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (6.24)$$

$$\varepsilon_2(x) = a_2 x + c_3, \quad l_1 \leq x \leq l. \quad (6.25)$$

Напруження матимуть вигляд:

$$\sigma_1(x) = (\lambda_1 + 2\mu_1) (a_1 x + A_1 \int_0^x \frac{ds}{k(s)} + c_1), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (6.26)$$

$$\sigma_2(x) = (\lambda_2 + 2\mu_2) (a_2 x + c_3), \quad l_1 \leq x \leq l. \quad (6.27)$$

Таким чином, оцінка НДС ґрунтового масиву при наявності фільтраційного потоку виконується згідно формул (6.18)–(6.27).

У зв'язку з тим, що відбувається переміщення верхньої межі ґрунту, то, відповідно, спостерігається його осідання, що визначається за формулою:

$$l(t) - l_0 = w_2(l(t)). \quad (6.28)$$

Використовуючи вираз (6.19), маємо:

$$w_2(l(t)) = \frac{a_2 l^2(t)}{2} + c_3 l(t) + c_4, \quad (6.29)$$

де коефіцієнти c_3 і c_4 визначаються згідно формул (6.21) і (6.23).

Підставивши значення (6.21) і (6.23) у формулу (6.29), а (6.29) у (6.28), після певних перетворень отримаємо:

$$\frac{a_2}{2} l^2(t) + b_1 \cdot l(t) + b_2 = 0, \quad (6.30)$$

$$\text{де } b_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1 - a_2 l_1 + 1, \quad (6.31)$$

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} l_1^2 - \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1^2 - A_1 \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + A_1 l_1 \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)} - l_0 \quad (6.32)$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (6.30) відносно змінної $l(t)$, отримаємо:

$$l(t) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 2a_2 b_2}}{a_2}, \quad (6.33)$$

де b_1 і b_2 визначаються за формулами (6.32), (6.33).

Нижче наведені результати числових розрахунків при наступних вхідних даних: $\lambda_1 = 13500 \text{ кг/м}^2$; $\lambda_2 = 17000 \text{ кг/м}^2$; $\mu_1 = 9000 \text{ кг/м}^2$; $\mu_2 = 11500 \text{ кг/м}^2$; $\gamma_{\text{зв.}} = 10,5 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_{\text{пр.}} = 17,0 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_p = 10,0 \text{ кг/м}^3$; $H_1 = 0,1 \text{ м}$; $H_2 = 0,5 \text{ м}$; $l_1 = 0,5 \text{ м}$; $l_0 = 1 \text{ м}$.

За формулою (6.33) знаходимо значення $l \approx 0,989 \text{ м}$.

Результати розрахунку з визначення значення переміщень, деформацій та напружень наведені в табл. 6.1.

Графіки розподілу переміщень, деформацій та напружень за глибиною ґрунтового масиву наведені відповідно на рис. 6.2–6.4.

Пунктирною лінією побудовані графіки НДС ґрунту при дії фільтраційного потоку води, суцільною – без руху фільтраційного потоку води.

Таблиця 6.1

Значення переміщень, деформацій та напружень

	x	$w(x),$ $\times 10^{-3}$	$\varepsilon(x),$ $\times 10^{-3}$	$\sigma(x)$
Ґрунт в природному стані	1	-2,21669	0,00094	0,00377
	0,9	-2,19553	-0,42406	-1,69623
	0,8	-2,13188	-0,84906	-3,39623
	0,7	-2,02572	-1,27406	-5,09623
	0,6	-1,87707	-1,69906	-6,79623
	0,5	-1,68591	-2,12406	-8,49623
Ґрунт в зваженому стані	0,5	-1,68591	-2,69722	-8,49623
	0,4	-1,40270	-2,96706	-9,34623
	0,3	-1,09250	-3,23690	-10,19623
	0,2	-0,75531	-3,50674	-11,04623
	0,1	-0,39115	-3,77658	-11,89623
	0	0	-4,04642	-12,74623

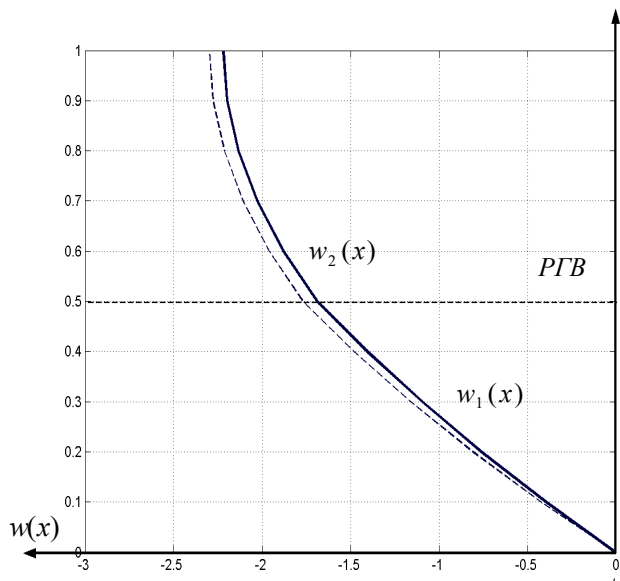


Рис. 6.2. Графік розподілу переміщень в ґрунтовому масиві

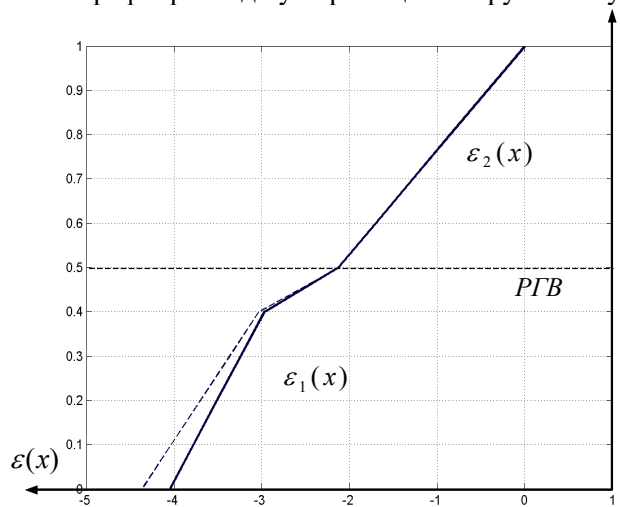


Рис. 6.3. Графік розподілу деформацій в ґрунтовому масиві

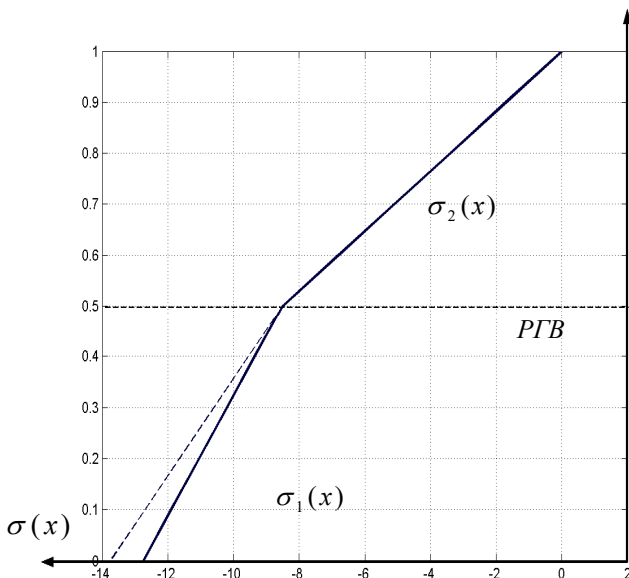


Рис. 6.4. Графік розподілу напружень в ґрунтовому масиві

6.2. Деформації багат шарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води

Природні ґрунтові масиви і основи є багат шарові системи, які при зміні гідрогеологічних умов піддаються дії гідродинамічним силам фільтраційного потоку і як, наслідок, деформаціям.

Для встановлення деформацій розглянемо ґрунтовий масив, що складається з n горизонтальних шарів і в якому на висоті l_k знаходиться рівень ґрунтових вод (рис. 6.5).

На нижній межі ґрунту ($x = 0$) задано п'єзометричний напір H_1 , а на глибині l_k відповідно H_2 ($H_2 > H_1$). В результаті різниці напорів відбувається фільтрація води у

грунті. При цьому процес фільтрації води підлягає закону Дарсі.

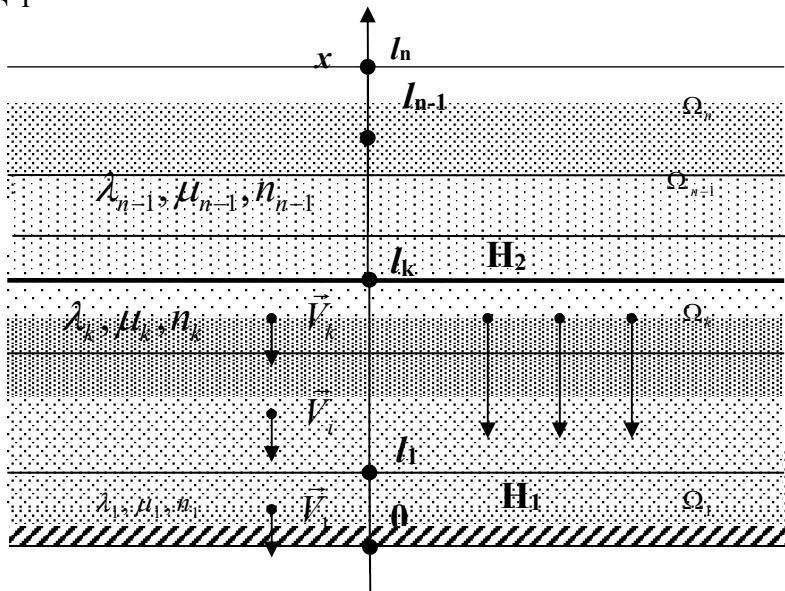


Рис. 6.5. Розрахункова схема багат шарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку

Математична модель даної задачі описується рівняння НДС в переміщеннях та рівняннями фільтрації води у ґрунті [16]. Рівняння НДС в переміщеннях записується у вигляді:

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{d^2 w_i}{dx^2} = X_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^n (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (6.34)$$

де w – переміщення вздовж осі Ox в ґрунтах, що знаходяться відповідно в зваженому та в природному станах; $\lambda_i, \mu_i, i = \overline{1, n}$ – коефіцієнти Ламе (пружні сталі);

$$X_i = \begin{cases} \gamma_{sb,i} + \frac{dp_i}{dx}, & i = \overline{1, k}, \\ \gamma_{np,i}, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (6.35)$$

де $\gamma_{se,i}$ – питома вага ґрунту в i -ому шарі у зваженому стані, $i = \overline{1, k}$; $\gamma_{np,i}$ – питома вага ґрунту в природному стані, $i = \overline{k+1, n}$; p_i – фільтраційний тиск, що визначається за формулою

$$p_i = \gamma_{w,i}(h_i - x), i = \overline{1, k}. \quad (6.36)$$

У формулі (3.36) h_i – п'єзометричні напори у відповідних шарах, $i = \overline{1, k}$; x – вертикальна координата.

Згідно закону Дарсі рівняння фільтрації ґрунтових вод записуються у вигляді:

$$V_i = -k(x) \frac{dh_i}{dx}, \frac{dV_i}{dx} = 0, i = \overline{1, k}, \quad (6.37)$$

$$h_1(0) = H_1, \quad (6.38)$$

$$h_i(l_i) = h_{i+1}(l_i), i = \overline{1, k-1}, \quad (6.39)$$

$$k(l_i) \frac{dh_i(l_i)}{dx} = k(l_i) \frac{dh_{i+1}(l_i)}{dx}, i = \overline{1, k-1}, \quad (6.40)$$

$$h_k(l_k) = H_2, \quad (6.41)$$

де V_i – швидкість фільтрації ґрунтових вод, $i = \overline{1, k}$; $k(x)$ – коефіцієнт фільтрації.

Знайдемо розв'язок задачі фільтрації ґрунтових вод з рівнянь (6.37)–(6.41) при $n=3$. Використовуючи формули (6.37), маємо

$$\frac{d\left(k(x) \frac{dh_i}{dx}\right)}{dx} = 0, i = 1, 2 \Rightarrow \frac{dh_i}{dx} = \frac{A_i}{k(x)}, i = 1, 2, \quad (6.42)$$

$$h_i(x) = A_i \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{ds}{k(s)} + B_i, i = 1, 2.$$

Невідомі коефіцієнти в (6.41) знаходимо, використовуючи крайові умови (6.38), (6.41) та умови спряження (6.39), (6.40). З формули (6.38) маємо:

$$B_1 = H_1. \quad (6.43)$$

З формули (6.41) випливає, що

$$A_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(s)} + B_2 = H_2 \Rightarrow B_2 = H_2 - A_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(s)}.$$

З умов спряження маємо, що

$$k(l_1) \frac{A_1}{k(l_1)} = k(l_1) \frac{A_2}{k(l_1)} \Rightarrow A_1 = A_2 = A,$$

$$A_1 \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)} + B_1 = A_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(s)} + B_2 \Rightarrow$$

$$A \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)} + H_1 = H_2 - A \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(s)}.$$

$$\text{Отже, } A = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}}. \quad (6.44)$$

$$B_2 = H_2 - \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}} \int_{l_1}^{l_2} \frac{ds}{k(s)}. \quad (6.45)$$

Враховуючи (6.44), отримаємо:

$$\frac{dh_i}{dx} = \frac{1}{k(x)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}}, \quad i = 1, 2. \quad (6.46)$$

Знайдемо $\frac{dp_i}{dx}$, $i = \overline{1, 2}$ використовуючи формулу (6.36):

$$\frac{dp_i}{dx} = \gamma_p \left(\frac{dh_i}{dx} - 1 \right), i = \overline{1, 2}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0. \quad (6.47)$$

Отже, підставляючи (6.46) в (6.47), маємо:

$$\frac{dp_i}{dx} = \gamma_p \cdot \left(\frac{1}{k(x)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}} - 1 \right), \quad i = \overline{1, 2}.$$

Таким чином

$$X_i = \gamma_{\text{зв.}i} + \gamma_p \cdot \left(\frac{1}{k(x)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}} - 1 \right), \quad i = 1, 2. \quad (6.48)$$

Для розв'язання поставленої задачі розглянемо масив ґрунту, що складається з двох шарів при наявності рівня ґрунтових вод на висоті l_2 . Знайдемо розв'язок задачі при наявності переміщення верхньої межі ґрунту.

Перейдемо у (6.34)–(6.41) до безрозмірних величин

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{l_0}, \quad \bar{a}_i = a_i \cdot l_0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \bar{a}'_i = a'_i \cdot l_0,$$

$$\bar{l}_i = \frac{l_i}{l_0}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_i}{l_0}, \quad \bar{p}_i = \frac{p_i}{l_0}, \quad i = \overline{1, 2},$$

де $\bar{l} < 1$ для будь-якого $t > 0$.

Враховуємо, що $l(t) \leq l_0$, $l(t) - l_0 = w_3(l(t))$, $l(0) = l_0$.

Математичну модель НДС ґрунту у безрозмірних змінних запишеться у вигляді (рисочки над безрозмірними змінними опустимо):

$$\frac{d^2 w_i}{dx^2} = a_i + a'_i \cdot \frac{1}{k(x)}, \quad i = 1, 2, \quad x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (6.49)$$

$$\frac{d^2 w_3}{dx^2} = a_3, \quad x \in (l_2, l), \quad (6.50)$$

$$\text{де } a_i = \frac{\gamma_{\text{нас.}i} - \gamma_p}{\lambda_i + 2\mu_i}, \quad a'_i = \frac{\gamma_p (H_2 - H_1)}{(\lambda_i + 2\mu_i) \int_0^{l_2} \frac{ds}{k(s)}}, \quad i = \overline{1,2}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{\text{нр.}}}{\lambda_3 + 2\mu_3}.$$

Розглянемо випадок, коли крайові умови для переміщень мають вигляд:

$$w_1(0) = 0, \quad \frac{dw_3(l)}{dx} = 0. \quad (6.51)$$

З умови (6.51) випливає наявність переміщення верхньої межі ґрунту.

Умови спряження запишуться у вигляді:

$$w_i(l_i) = w_{i+1}(l_i), \quad i = \overline{1,2}, \quad (6.52)$$

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \frac{dw_i(l_i)}{dx} = (\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}) \frac{dw_{i+1}(l_i)}{dx}, \quad i = \overline{1,2}. \quad (6.53)$$

Загальний розв'язок (6.49), (6.50) прийме вигляд

$$w_i(x) = \frac{a_i x^2}{2} + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \left(\int_{l_{i-1}}^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + c_{2i-1} x + c_{2i}, \quad i = \overline{1,2}, \quad (6.54)$$

$$w_3(x) = \frac{a_3 x^2}{2} + c_5 x + c_6, \quad (6.55)$$

$$\text{де } c_2 = 0, \quad (6.56)$$

$$c_5 = -a_3 l, \quad (6.57)$$

$$c_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} (a_2 l_1 + c_3) - a_1 l_1 - a'_1 \int_0^{l_1} \frac{dz}{k(z)}, \quad (6.58)$$

$$c_3 = \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2 + c_5) - a_2 l_2 - a'_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(z)}, \quad (6.59)$$

$$c_4 = \frac{a_1 - a_2}{2} l_1^2 + a'_1 \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + l_1 (c_1 - c_3), \quad (6.60)$$

$$c_6 = \frac{a_2 - a_3}{2} l_2^2 + a'_2 \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_{l_1}^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + l_2 (c_3 - c_5) + c_4. \quad (6.61)$$

Величина деформації обчислюється за формулою:

$$\varepsilon_i(x) = a_i x + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \frac{dz}{k(z)} + c_{2i-1}, \quad i = 1, 2, \quad (6.62)$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (6.62)$$

$$\varepsilon_3(x) = a_3 x + c_5, \quad x \in (l_2, 1). \quad (6.63)$$

Напруження матимуть вигляд:

$$\sigma_i(x) = (\lambda_i + 2\mu_i) \left(a_i x + a'_i \int_{l_{i-1}}^x \frac{dz}{k(z)} + c_{2i-1} \right), \quad i = 1, 2,$$

$$x \in \bigcup_{i=1}^2 (l_{i-1}, l_i), \quad l_0 = 0, \quad (6.64)$$

$$\sigma_3(x) = (\lambda_3 + 2\mu_3)(a_3 x + c_5), \quad x \in (l_2, 1). \quad (6.65)$$

Таким чином, задача НДС в шарі ґрунту при наявності переміщення верхньої межі та фільтрації з вільної поверхні розв'язана повністю і задається формулами (6.55)–(6.61) та (6.62)–(6.65).

У зв'язку з тим, що відбувається переміщення верхньої межі ґрунту $\left(\frac{dw_3(l)}{dx} = 0 \right)$, то відповідно спостерігається її осідання, яке визначається за формулою:

$$l(t) - l_0 = w_3(l(t)). \quad (6.66)$$

Використовуючи формулу (6.55), маємо

$$w_3(l(t)) = \frac{a_3 l^2(t)}{2} + c_5 l(t) + c_6, \quad (6.67)$$

де коефіцієнти C_5 і C_6 визначаються згідно формул (6.57) і (6.61).

Підставивши значення (6.57) і (6.61) у формулу (6.67), після певних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_3 l^2(t)}{2} + l(t) \left(\frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 + \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2 - a_3 l_1) - a_3 l_2 + 1 \right) + \\
 & + \frac{a_1 + a_2}{2} l_1^2 + \frac{a_2 + a_3}{2} l_2^2 - a_2 l_1 l_2 - \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(a_2 l_1^2 - a_2 l_1 l_2 - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(z)} \right) - \\
 & - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 l_2 - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2^2 - a_3 l_1 l_2) + a_1' l_1 \int_0^{l_1} \frac{dz}{k(z)} + \\
 & + a_2' (l_2 - l_1) \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(z)} - a_1' \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz - l_0 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6.68}$$

Введемо позначення:

$$b_1 = \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 + \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2 - a_3 l_1) - a_3 l_2 + 1, \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 = & \frac{a_1 + a_2}{2} l_1^2 + \frac{a_2 + a_3}{2} l_2^2 - a_2 l_1 l_2 - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_3 l_1 l_2 - \\
 & - \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(a_2 l_1^2 - a_2 l_1 l_2 - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(z)} \right) - \frac{\lambda_3 + 2\mu_3}{\lambda_2 + 2\mu_2} (a_3 l_2^2 - a_3 l_1 l_2) + \\
 & + a_1' l_1 \int_0^{l_1} \frac{dz}{k(z)} + a_2' (l_2 - l_1) \int_{l_1}^{l_2} \frac{dz}{k(z)} - a_1' \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz - \\
 & - a_2' \int_{l_1}^{l_2} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz - l_0.
 \end{aligned}
 \tag{6.70}$$

Вираз рівняння, (6.68) прийме вигляд:

$$\frac{a_3}{2} l^2(t) + b_1 \cdot l(t) + b_2 = 0. \tag{6.71}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (6.71) відносно змінної $l(t)$, отримаємо:

$$l(t) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 2a_3b_2}}{a_3}, \quad (6.72)$$

де b_1 і b_2 визначаються за формулами (6.69), (6.70).

Нижче наведені результати числових розрахунків задачі НДС багат шарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку у вертикальному напрямку при наступних вхідних даних: $\lambda_1 = 7500 \text{ кг/м}^2$; $\lambda_2 = 13500 \text{ кг/м}^2$; $\lambda_3 = 17000 \text{ кг/м}^2$; $\mu_1 = 5000 \text{ кг/м}^2$; $\mu_2 = 9000 \text{ кг/м}^2$; $\mu_3 = 11500 \text{ кг/м}^2$; $\gamma_{\text{сг.1}} = 11,5 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_{\text{сг.2}} = 10,5 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_{\text{нр.}} = 17,0 \text{ кг/м}^3$; $l_1 = 0,3 \text{ м}$; $l_2 = 0,7 \text{ м}$; $l_0 = 1 \text{ м}$; $H_1 = 0,05 \text{ м}$; $H_2 = 0,65 \text{ м}$.

Результати розрахунків наведені в таблиці 6.2 та рис. 6.6, 3.7 та 8.8.

Пунктирна лінія – графік НДС ґрунту при дії фільтраційного потоку, суцільна – без наявності фільтраційного потоку.

Таблиця 6.2

Значення переміщень, деформацій і напружень

	x	$w(x),$ $\times 10^{-3}$	$\varepsilon(x),$ $\times 10^{-3}$	$\sigma(x)$
Ґрунт у природному стані	1	0	1,88244	7,529
	0,9	-1,66994	1,45744	5,829
	0,8	-2,91487	1,03244	4,129
	0,7	-3,73481	0,60743	2,429

продовження табл. 6.2

Ґрунт у зваженому стані	0,7	-3,73481	0,77135	2,429
	0,6	-4,36217	0,48336	1,522
	0,5	-4,70154	0,19538	0,615
	0,4	-4,75294	-0,09259	-0,298
	0,3	-4,51635	-0,38058	-1,198
Ґрунт в зваженому стані	0,3	-4,51635	-0,68504	-1,198
	0,2	-3,55784	-1,23198	-2,155
	0,1	-2,05239	-1,77892	-3,113
	0	0	-2,32586	-4,070

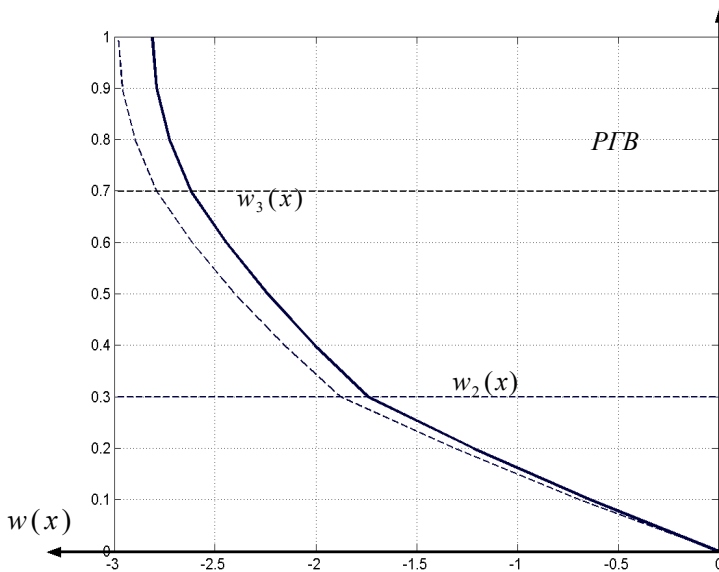


Рис. 6.6. Графік розподілу переміщень

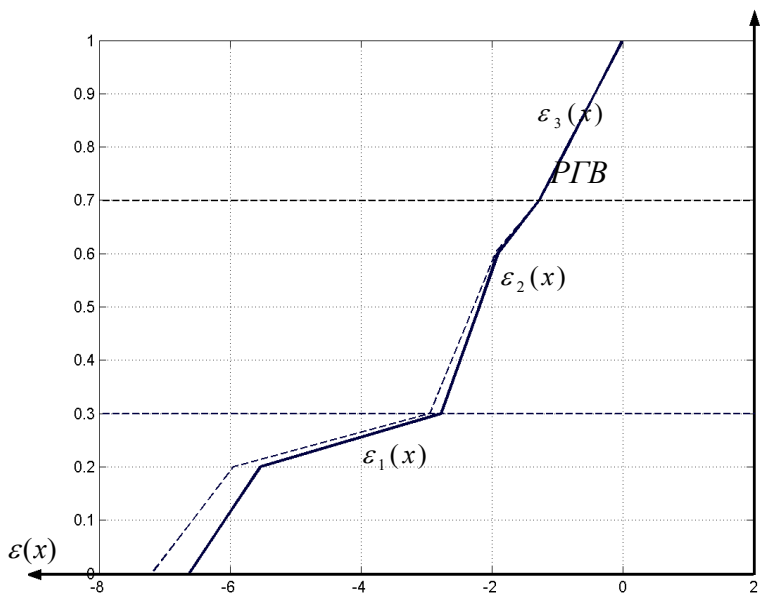


Рис. 6.7. Графік розподілу деформацій

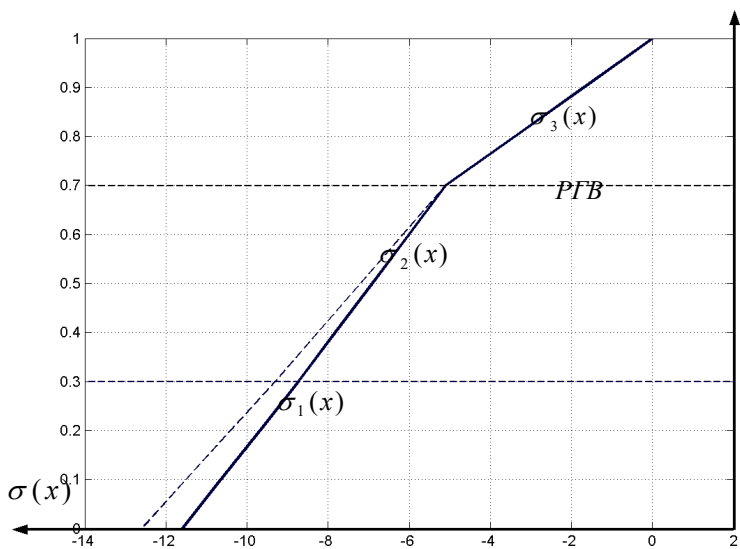


Рис. 6.8. Графік розподілу напружень

7. Моделювання деформацій ґрунтових масивів і основ при дії техногенних факторів

7.1. Моделювання деформацій ґрунтових масивів в процесі їх осушення

7.1.1. Динаміка кривої депресії в ґрунтовому масиві в процесі його осушення

Для осушення значних територій від розміщення високого рівня ґрунтових вод часто доводиться влаштовувати різноманітні дренажні системи або канали. Особливо це питання є актуальним при влаштуванні гідромеліоративних осушувальних систем. При цьому виникає необхідність з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві на будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних дренах або відкритих водотоках з різною інтенсивністю.

Аналіз останніх досліджень показав, що існує ряд теоретичних рішень і розроблених експериментальних методик з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води в дренажних системах, або відкритих водотоках. Однак, питання з визначення положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві на будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних паралельних дренажних системах з різною швидкістю недостатньо вивчено. Для спрощення рішення поставленої задачі прийняті припущення:

1) розглядається водопроникний однорідний ґрунтовий масив, що розміщений на водонепроникних ґрунтах;

2) пониження рівня води у відкритих горизонтальних дренах відбувається за лінійним законом. Необхідно розрахувати положення депресійної поверхні в ґрунтовому масиві у будь-який момент часу при пониженні рівня води в горизонтальних паралельних дренах зі швидкістю V_0 та V_l .

Розрахункова схема поставленої задачі наведена на рис. 7.1.

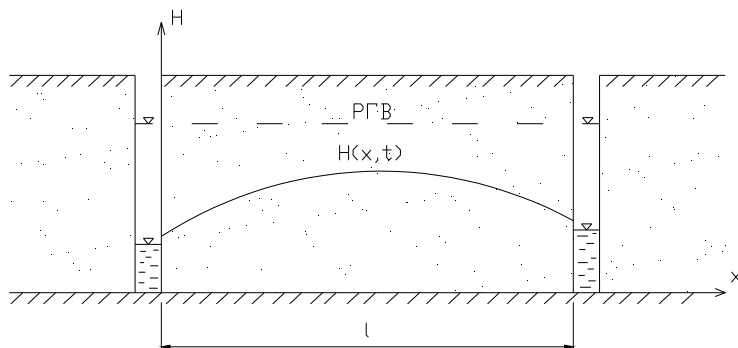


Рис. 7.1. Розрахункова схема динаміки депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води в горизонтальних дренах

В даному випадку в ґрунтовому масиві виникає нестационарний фільтраційний потік, який описується рівнянням

$$\frac{kh}{\mu_w} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (7.1)$$

де k – коефіцієнт фільтрації; h – потужність фільтраційного потоку; μ_w – коефіцієнт водовіддачі.

Відношення $\frac{k \cdot h}{\mu_w}$ називають коефіцієнтом

водопровідності, яке можна записати у вигляді a^2 . Це означає, що воно завжди має додатне значення. Тоді рівняння (4.1) набуде вигляду:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (7.2)$$

Крайові умови для визначення положення депресійної поверхні в ґрунтового масиву при пониженні рівня води в

горизонтальних дренах за лінійним законом запишуться у вигляді:

$$H(x, 0) = H_0(x), \quad (7.3)$$

$$H(0, t) = H_0(0) - V_0 \cdot t, \quad (7.4)$$

$$H(l, t) = H_0(l) - V_l \cdot t. \quad (7.5)$$

Зведемо однорідне рівняння до неоднорідного, але з однорідними граничними умовами. Для цього проведемо заміну

$$H(x, t) = u(x, t) + H_0(0) - V_0 \cdot t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x. \quad (7.6)$$

Отримаємо наступну задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad (7.7)$$

$$u(x, 0) = H_0(x) - H_0(0) - \frac{H_0(l) - H_0(0)}{l} x, \quad (7.8)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (7.9)$$

де
$$f(x) = V_0 + \frac{V_l - V_0}{l} x. \quad (7.10)$$

Позначимо $u(x, 0) = \phi(x)$. Знайдемо розв'язок отриманої крайової задачі:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (0, l), \quad (7.11)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in [0, l], \quad (7.12)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.13)$$

На основі [95] розв'язком першої змішаної крайової задачі для неоднорідного параболічного рівняння (7.11)–(7.13) є функція:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \quad f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx. \quad (7.14)$$

Функції f_n у нашому випадку мають вигляд:

$$f_n = \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n). \quad (7.15)$$

Підставивши f_n в отриманий розв'язок та звівши доданки біля $\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$, отримаємо

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Повернувшись до заміни, отримаємо

$$\begin{aligned} H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\ + H_0(0) - V_0 t + \frac{H_0(l) - V_l t - (H_0(0) - V_0 t)}{l} x, \end{aligned} \quad (7.16)$$

Після спрощення отримаємо

$$\begin{aligned} H(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_l (-1)^n) \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + \\ + H_0(0) - V_0 t + \frac{h_0(l) - V_l t - (h_0(0) - V_0 t)}{l} x, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l} \int_0^l H_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx + \frac{2}{\pi n} (-H_0(0) + H_0(l) (-1)^n).$$

7.1.2. Деформації ґрунтового масиву в процесі його осушення

Натурні спостереження за процесами осушення водонасичених ґрунтових масивів показали, що розподіл фільтраційних сил від гідродинамічного потоку в тілі масиву під час будівництва осушувального каналу залежить від швидкості влаштування екскаватором і водопроникності ґрунтів масиву. Встановлення гідродинамічної картини фільтрації в ґрунтовому масиві в процесі влаштування каналу можна виконати чисельним моделюванням. За основну розрахункову схему при моделюванні був прийнятий ґрунтовий масив, у якому відбувається інтенсивна фільтрація по всій області. Така схема може відповідати реальній картині при певних умовах:

1) швидкому влаштуванню каналу із значним відставанням пониження рівня ґрунтових вод;

2) різкому спаду води в каналах після проходження весняних і літньо-осінніх повенів.

Розглянемо процес осушення ґрунтового масиву шляхом влаштування каналу (рис. 7.2).

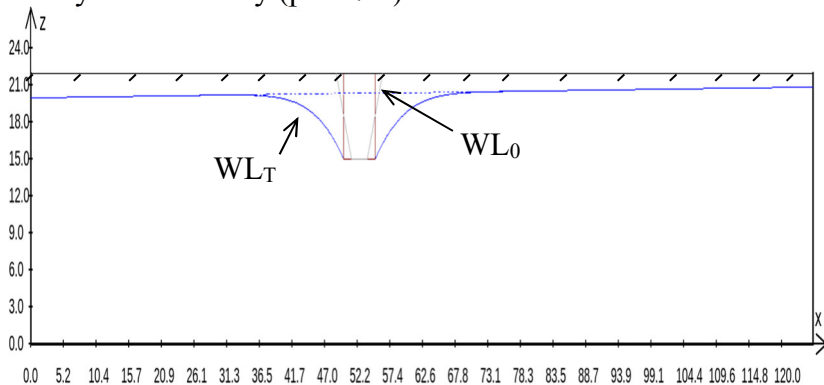


Рис. 7.2. Схема ґрунтового масиву при його осущенні

Для встановлення деформацій ґрунтового масиву від дії фільтраційного потоку, необхідно розрахувати поле напорів у кожній точці ґрунтового масиву і відповідні їм деформації (зміщення).

Математична модель задачі в переміщеннях на момент часу $t = t_1$ в області нижче рівня ґрунтових вод $\Omega_{t_1} = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h(x, t_1))\}$ описується наступними диференціальними рівняннями

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (7.18)$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (7.19)$$

при таких крайових умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (7.20)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(r, z) = 0, \quad (7.21)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(r, z) = 0, \quad (7.22)$$

$$\tau_n(x, l_1(x)) = 0, \quad \sigma_n(x, l_1(x)) = \gamma_n(l_1(x) - l(x)). \quad (7.23)$$

Тут $h(x, 0)$ – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу t ; $H(x, z)$ – напір у точці (x, z) у момент часу t ; Δ – оператор Лапласа; λ, μ – пружні сталі; $u(x, z)$ – горизонтальні, а $w(x, z)$ – вертикальні зміщення точки, яка у момент t знаходиться в точці (x, z) ; $\gamma_w = \rho_w g$ – питома вага води; γ_{sb} – питома вага ґрунту в насиченому стані; τ_{xz} – головні дотичні напруження; σ_n – нормальні напруження; τ_n – дотичні напруження; $l_1(x)$ – початкова товща ґрунтового масиву; $l(x)$ – шукана висота (глибина) ґрунтового масиву в момент часу t ; γ_n – питома вага ґрунту в природному стані.

Дренажний канал розміщений на відстані r_1 від лівої межі масиву, має ширину r_d . Відстань від дренажного каналу до правої межі масиву r_2 .

Для того, щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву на певний момент часу. Для визначення напорів у змінній області $\Omega_1 = \{(x, z, t) | x \in (0, r), z \in (0, h(x, t)), t > 0\}$ знайдемо розв'язок диференціального рівняння нестационарної фільтрації, що має вигляд:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right), \quad (7.24)$$

при таких крайових умовах:

$$H(x, z, 0) = H_1(x, z), \quad (7.25)$$

$$H(0, z, t) = H_0(z, t), \quad H(r, z, t) = H_r(z, t), \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial H(x, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad H(x, h(x, t), t) = h(x, t), \quad (7.27)$$

де $a^2 = \frac{kh_{col}}{\mu_w}$; k – коефіцієнт фільтрації; h_{col} – потужність фільтраційного потоку; μ_w – коефіцієнт водовіддачі; $H_1(x, z)$ – розподіл напорів у початковий момент часу; $H_0(z, t)$, $H_r(z, t)$ – напори на лівій та правій межі ґрунтового масиву (відомі функції).

Для розв'язання задачі (7.24) – (7.27) потрібно знайти $h(x, t)$ та $H_1(x, z)$. У зв'язку з цим розглянемо дві допоміжні задачі.

Задача 1. В області $\Omega = \{(x, t) | x \in (0, s), t > 0\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (7.28)$$

при таких крайових умовах:

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad (7.29)$$

$$h(0, t) = h_0(0) - V_0 t, \quad h(s, t) = h_0(s) - V_s t. \quad (7.30)$$

Для знаходження розміщення рівня ґрунтових вод зліва від дренажного каналу прийmemo, що $s = r_1$, $V_0 = 0$, $V_s = V$ і справа від дренажного каналу — $s = r_2$, $V_0 = V$, $V_s = 0$. В обох випадках $h_0(x)$ — початковий рівень ґрунтових вод. При цьому справа від дренажного каналу необхідне зміщення аргументу на $r_1 + r_d$.

Задача 2. В області $\Omega = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h_0(x))\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} = 0, \quad (7.31)$$

при таких крайових умовах:

$$\frac{\partial H_1(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad H_1(x, h_0(x)) = h_0(x), \quad (7.32)$$

$$H_1(0, z) = H_0(z, 0), \quad H_1(r, z) = H_r(z, 0). \quad (7.33)$$

Розв'язок задачі (7.28)–(7.30) з вимогою, що $h_0(x) \in C^{(1)}(0, s)$ згідно (6.17) має вигляд

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{s}\right)^2 t} + \frac{2}{\pi n} (V_0 - V_s (-1)^n) \left(\frac{s}{\pi n}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(\frac{\pi n}{s}\right)^2 t}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{s} x\right) + h_0(0) - V_0 t + \frac{h_0(s) - V_s t - (h_0(0) - V_0 t)}{s} x, \quad (7.34)$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{s} \int_0^s h_0(x) \sin\left(\frac{\pi n}{s} x\right) dx + \frac{2}{\pi n} (-h_0(0) + h_0(s) (-1)^n). \quad (7.35)$$

Для обчислень використовувались різні значення h_{col} зліва і справа від дренажного каналу. Спочатку знайдемо середнє значення рівня ґрунтових вод у дренажному каналі:

$$h_c = \frac{h(r_1, 0) + h(r_1, T)}{2}, \quad (7.36)$$

де T – кінцевий момент часу.

$$\text{Тоді зліва } h_{lcol} = \frac{h_0(0) + h_c}{2}, \text{ а справа } h_{rcol} = \frac{h_c + h_0(r)}{2}.$$

Загальне значення h_{col} для двовимірної задачі задамо

$$h_{col} = \frac{h_{lcol} + h_{rcol}}{2}.$$

Для знаходження початкового розподілу напорів у ґрунтовому масиві необхідно отримати розв'язок задачі, що описується формулами (7.31)–(7.33). Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області $\Omega = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h_0(x))\}$ на параметричний прямокутник у площині ξ, η [22].

Відображення здійснюємо таким чином: задаємо h_ξ – крок сітки по ξ , h_η – крок сітки по η . Для покращення збіжності при побудові конформної сітки вибираємо $h_\xi = h_\eta$.

$$\Gamma_1 : z = 0 \Rightarrow \eta = 0,$$

$$\Gamma_2 : z = h(x, t) \Rightarrow \eta = b,$$

$$\Gamma_3 : x = 0 \Rightarrow \xi = 0,$$

$$\Gamma_4 : x = r \Rightarrow \xi = a,$$

$$n = \frac{r}{h_\xi}, m = \frac{h_{col}}{h_\eta},$$

де n – кількість кроків по ξ , m – кількість кроків по η .

Алгоритм побудови гідродинамічної сітки, згідно методу чисельного конформного відображення, полягає в наступному. Спочатку задаємо початкові значення координат плаваючих вузлів на сторонах параметричного прямокутника $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : & \begin{cases} x_{i0} = ih_\xi, \\ z_{i0} = 0; \end{cases} \\ \Gamma_2 : & \begin{cases} x_{im} = ih_\xi, \\ z_{im} = h(x_{im}, t); \end{cases} \\ \Gamma_3 : & \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{h(0, t)}{m} j; \end{cases} \\ \Gamma_4 : & \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{h(r, t)}{m} j. \end{cases} \end{aligned}$$

Обчислюємо початкові координати внутрішніх вузлів різницевої сітки, використовуючи формули:

$$\begin{cases} x_{ij}^0 = \frac{1}{2}(x_{i0} + x_{im}), \\ z_{ij}^0 = \frac{1}{2}(z_{0j} + z_{nj}), i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Уточнюємо координати внутрішніх вузлів сітки, використовуючи метод послідовної верхньої релаксації:

$$\begin{cases} x_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(x_{i-1,j}^{k+1} + x_{i+1,j}^k + x_{i,j-1}^{k+1} + x_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot x_{i,j}^k, \\ z_{ij}^{k+1} = \frac{\omega}{4}(z_{i-1,j}^{k+1} + z_{i+1,j}^k + z_{i,j-1}^{k+1} + z_{i,j+1}^k) + (1-\omega) \cdot z_{i,j}^k, i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}, \end{cases}$$

$$\text{де } \omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}, \rho = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m} \right)}{2}.$$

Уточнюємо координати «плаваючих» вузлів на межах.

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x_{i0} = \frac{1}{3}(-x_{i2} + 4x_{i1}), \\ z_{i0} = 0; \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x_{im} = (z_{i-1,m} - z_{i+1,m}) \frac{h_\eta}{h_\xi} + \frac{1}{3}(4x_{i,m-1} - x_{i,m-2}), \\ p_{im} = \min \{ \max \{ x_{im}, 0 \}, r \}, \\ z_{im} = \max \{ h(p_{im}, t), 0 \}, \end{cases}$$

де величина p_{im} вводиться для того, щоб можна було задавати функцію h , визначену по змінній x лише на відрізку $[0, r]$.

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x_{0j} = 0, \\ z_{0j} = \frac{1}{3}(-z_{2,j} + z_{1,j}), \end{cases}$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x_{nj} = r, \\ z_{nj} = \frac{1}{3}(-z_{n-2,j} + 4z_{n-1,j}). \end{cases}$$

Почергове уточнення координат внутрішніх та «плаваючих» вузлів проводимо до тих пір, поки середня відстань між попередніми та поточними точками сітки S більша від заданої точності ε .

$$S = \frac{1}{nm} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{(x_{ij}^{k+1} - x_{ij}^k)^2 + (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k)^2}.$$

Чисельний розв'язок крайової задачі (7.31)–(7.33) отримаємо шляхом побудови на сітці параметричного прямокутника в площині ξ, η різницевої схеми з використанням шаблону типу «хрест» та розв'язання її ітераційним методом послідовної верхньої релаксації.

Для цього перейдемо до змінних ξ, η

$$\xi = \xi(x, z), \eta = \eta(x, z). \quad (7.37)$$

З умов Коші-Рімана маємо

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (7.38)$$

Підставивши (7.37) у (7.31), отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Врахувавши те, що $\xi(x, z)$ та $\eta(x, z)$ – спряжені гармонічні функції, матимемо

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right) = 0, \quad (7.40)$$

$$\text{або } \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0. \quad (7.41)$$

Для рівняння Лапласа (7.41) та граничних умов (7.32), (7.33) побудуємо різницеву схему з використанням шаблону типу «хрест» (рис. 7.3) та розв'яжемо її ітераційним методом верхньої релаксації:

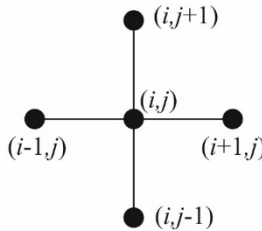


Рис. 7.3. Різницевий шаблон типу «хрест»

$$H_{ij}^{s+1} = \frac{w}{4} \left(H_{i-1,j}^{s+1} + H_{i,j-1}^{s+1} + H_{i,j+1}^s + H_{i+1,j}^s \right) + (1-w) H_{ij}^s. \quad (7.42)$$

Граничні умови першого роду означають відомі фіксовані значення H на відповідних межах. Гранична

умова другого роду на нижній межі $\frac{\partial H(x,0)}{\partial z} = 0$ у змінних ξ ,

η має вигляд $\frac{\partial H(x,0)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial H(x,0)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0$. Оскільки лінії конформної сітки перпендикулярні до межі, яка в даному

випадку є горизонтальною, то $\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{J_1} = 0$, де

$$J_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \text{якобіан оберненого}$$

відображення. Оскільки $\frac{\partial \eta}{\partial z} \neq 0$, остаточно гранична умова на

нижній межі матиме вигляд $\frac{\partial H(x,0)}{\partial \eta} = 0$. Її апроксимація

першого порядку точності має вигляд

$$H_{i0}^{s+1} = H_{i1}^{s+1}. \quad (7.43)$$

Тут ми вибрали апроксимацію першого порядку точності, оскільки тільки в цьому випадку доведена збіжність ітераційного методу. Ітерації проводимо до тих пір, поки максимальна різниця між значеннями функції на двох послідовних ітераціях більша від заданої точності ε . Отже, стаціонарна задача фільтрації розв'язана чисельно. При цьому знайдені значення функції напору в усіх точках конформної сітки.

Для знаходження напорів у змінній двовимірній області необхідно розв'язати задачу, що описується формулами (7.24)–(7.27). Для розв'язання даної задачі перейдемо до змінних ξ, η :

$$\xi = \xi(x, z), \eta = \eta(x, z). \quad (7.44)$$

З умов Коші-Рімана маємо:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (7.45)$$

Підставивши (7.44) у (7.24), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} = & a^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Врахувавши те, що $\xi(x, z)$ та $\eta(x, z)$ – спряжені гармонічні функції, матимемо:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (7.47)$$

Між модулями якобіанів прямого та оберненого відображення справедливе співвідношення

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2}. \quad (7.48)$$

Отже, (7.46) набуде вигляду

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} \right). \quad (7.49)$$

Для (7.49) і відповідних крайових умов побудуємо неявну різницеву схему та отримаємо її розв'язок ітераційним методом.

Нехай, знайдено значення функції H у вузлах сітки області у площині xOz на перших k кроках по часу, $k \geq 0$. На кроці $(k+1)$ задаємо початкові значення функції H у вузлах конформної сітки з урахуванням крайових умов. Провівши різницеву апроксимацію рівняння (7.49), отримаємо:

$$\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^k}{\tau} = \frac{a^2}{\left(\frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2} \times \\ \times \left(\frac{H_{i+1,j}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_\xi^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} - 2H_{ij}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_\eta^2} \right). \quad (7.50)$$

Позначимо

$$b_{ij}^{k+1} = \frac{a^2 \tau}{\left(\frac{x_{i+1,j}^{k+1} - x_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2 + \left(\frac{z_{i+1,j}^{k+1} - z_{i-1,j}^{k+1}}{2h_\xi} \right)^2}. \quad (7.51)$$

b_{ij}^{k+1} не змінюється під час ітерацій, залежить лише від конформної сітки на кроці $(k+1)$ по часу. Для побудови ітераційного процесу виразимо H_{ij}^{k+1} з формули (7.50):

$$H_{ij}^{k+1} = \frac{\left(H_{ij}^k + b_{ij}^{k+1} \left(\frac{H_{i+1,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \frac{H_{i,j+1}^{k+1} + H_{i,j-1}^{k+1}}{h_2^2} \right) \right)}{1 + 2b_{ij}^{k+1} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)}. \quad (7.52)$$

Ітерації проводимо до тих пір, поки максимальна різниця між значеннями функції на двох послідовних ітераціях більша від заданої точності ε . Але значення H_{ij}^k відоме в попередній момент часу на попередній сітці. Для знаходження H_{ij}^k у вузлі (i, j) поточної сітки використаємо інтерполяцію по чотирикутнику попередньої сітки, в який потрапляє вузол (i, j) поточної сітки. Цю операцію потрібно проводити на початку кроку $(k+1)$, бо сітка під час ітерацій, а отже, й розташування вузла (i, j) , незмінні.

Для знаходження деформацій ґрунтового масиву від дії фільтраційного потоку необхідно розв'язати задачу, що

описується формулами (7.18)–(7.23). Для цього запишемо напруження через переміщення

$$\tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.53)$$

Згідно (7.21), $u|_{x=0} = u|_{x=r} = 0$, тому $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{x=r} = 0$,

отже, (7.22) набуде вигляду:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=r} = 0. \quad (7.54)$$

Крім цього, згідно [120] мають місце формули

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x n_x^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xz} n_x n_z, \\ \tau_n &= \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - \sigma_n^2}, \end{aligned} \quad (7.55)$$

де $P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z$, $P_z = \tau_{zx} n_x + \sigma_z n_z$ – складові вектора напружень; n_x, n_z – напрямляючі косинуси вектора нормалі до верхньої межі Ω_1 , тобто $n_x = -\sin \alpha$, $n_z = \cos \alpha$, тут $\alpha = \arctg(l_1'(x))$.

Врахувавши (7.55) і виразивши напруження через переміщення, із (7.23) отримаємо:

$$\left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x n_z + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_x^2 - n_z^2) \right) \Big|_{z=l_1} = 0, \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned} & \left(\left(\lambda (n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_x^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\lambda (n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_z^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \\ & \left. + \mu n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_{z=l_1} = \gamma_n (l_1(x) - l(x)). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Початкова умова має вигляд:

$$-w(x, l_1(t), t) = l_0(x) - l(x, t),$$

$$\text{де } l_0(x) = l(x, 0) - w(x, l_1(0), 0). \quad (7.58)$$

Для розв'язання задачі (7.18) – (7.21), (7.54), (7.56); (7.58) перейдемо до змінних ξ, η :

Виразимо похідні функцій ξ, η по x, z через похідні x, z по ξ, η . Для знаходження перших похідних розв'яжемо систему лінійних рівнянь відносно $d\xi, d\eta$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta, \end{cases} \quad (7.59)$$

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 = J_1, \quad (7.60)$$

$$d\xi = \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{\Delta} dx - \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\Delta} dz, \quad d\eta = -\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{\Delta} dx + \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\Delta} dz,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{\Delta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\Delta}, \quad (7.61)$$

$$\text{де } J_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \quad \text{— якобіан}$$

оберненого відображення.

Для знаходження других похідних про диференціюємо знайдені вирази для перших похідних

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{\Delta} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \Delta - \frac{\partial}{\partial z} (\Delta) \frac{\partial z}{\partial \eta}}{\Delta^2}, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}(\Delta) = & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial \eta} + \\
& + \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial \xi} - \\
& - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \quad (7.64)
\end{aligned}$$

З (7.62)–(7.64) остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} = & \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right) - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right) \right). \quad (7.65)
\end{aligned}$$

Решта формул отримаємо аналогічно. Вони мають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} = & \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \right) - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right) \right), \quad (7.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = & \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial z}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right), \quad (7.67)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial z}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right), \quad (7.68)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial z}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right), \quad (7.69)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{J_1^3} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial z}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right). \quad (7.70)$$

Підставивши (7.44) в (7.18), (7.19), отримаємо

$$\frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \right. \\ \left. + \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (7.71)$$

$$\frac{\mu}{J_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \right.$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \Bigg) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (7.72)$$

Крайові умови (7.20), (7.21) в змінних ξ, η набудуть вигляду

$$u(x(\xi, \eta), 0) = 0, \quad w(x(\xi, \eta), 0) = 0, \quad (7.73)$$

$$u(0, z(\xi, \eta)) = 0, \quad u(r(\xi, \eta), z(\xi, \eta)) = 0, \quad (7.74)$$

Умови (7.22) на основі (7.54) в змінних ξ, η запишуться так:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=0, \xi=a} = 0. \quad (7.75)$$

Умови (7.56), (7.57) до змінних ξ, η перетворюються аналогічно.

Дискретизуємо рівняння (7.71) на шаблоні типу «ящик» (рис. 7.4).

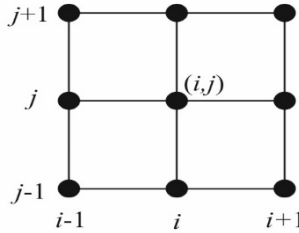


Рис. 7.4. Різницевий шаблон типу «ящик»

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h_\xi^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h_\eta^2} \right) + \\ & (\lambda + \mu) \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2h_\xi h_\eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) = F_{1,ij}, \end{aligned} \quad (7.76)$$

Рис. 7.4. Різницевий шаблон типу “ящик”

де використовуємо позначення

$$\begin{aligned}
 F_{1,ij} = & \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x} - (\lambda + \mu) \left(\frac{W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}}{h_\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \right. \\
 & + \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j-1}}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \frac{W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}}{h_\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \\
 & \left. + \frac{W_{i+1,j+1} - W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1}}{2h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right). \quad (7.77)
 \end{aligned}$$

Згрупуємо подібні доданки

$$\begin{aligned}
 & -2U_{ij} \left(\frac{\mu}{J_1} \left(\frac{1}{h_\xi^2} + \frac{1}{h_\eta^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{h_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) \right) + \\
 & + U_{i-1,j} \left(\frac{\mu}{J_1} \frac{1}{h_\xi^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{h_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \right) + \\
 & + U_{i+1,j} \left(\frac{\mu}{J_1} \frac{1}{h_\xi^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{h_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \right) + \\
 & + U_{i,j-1} \left(\frac{\mu}{J_1} \frac{1}{h_\eta^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{h_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right) + \\
 & + U_{i,j+1} \left(\frac{\mu}{J_1} \frac{1}{h_\eta^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{h_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \right) + \\
 & + (\lambda + \mu) \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2h_\xi h_\eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = F_{1,ij}, \quad (7.78)
 \end{aligned}$$

Покладемо $h_\xi = h_\eta = h$, та введемо позначення

$$\begin{aligned}
 A_{1,ij} &= \frac{1}{J_{1,ij} h^2} \left(\mu + \frac{(\lambda + \mu)}{J_{1,ij}} \left(\frac{z_{ij+1} - z_{ij-1}}{2h} \right)^2 \right), \\
 B_{1,ij} &= \frac{1}{J_{1,ij} h^2} \left(\mu + \frac{(\lambda + \mu)}{J_{1,ij}} \left(\frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2h} \right)^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$C_{1,ij} = \frac{(\lambda + \mu)}{2h} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_{ij}, \quad D_{1,ij} = \frac{(\lambda + \mu)}{2h} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)_{ij},$$

$$E_{1,ij} = \frac{(\lambda + \mu)}{2J_1^2 h^2} \frac{(z_{i+1,j} - z_{i-1,j})(z_{ij+1} - z_{ij-1})}{4h^2}.$$

Тоді рівняння (7.78) запишеться так:

$$\begin{aligned} & -(A_{ij} + B_{ij})U_{ij} + U_{i-1,j}(A_{ij} - C_{1,ij}) + U_{i+1,j}(A_{ij} + C_{1,ij}) + \\ & + U_{i,j-1}(B_{ij} - D_{1,ij}) + U_{i,j+1}(B_{ij} + D_{1,ij}) - E_{1,ij}(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}) = F_{1,ij}, \end{aligned} \quad (7.79)$$

Розв'язок (7.79) шукатимемо ітераційним методом Гауса-Зейделя

$$\begin{aligned} U_{ij}^{s+1} = & \left(a_{1,ij} U_{i-1,j}^{s+1} + a_{2,ij} U_{i+1,j}^s + a_{3,ij} U_{ij-1}^{s+1} + a_{4,ij} U_{ij+1}^s \right) - \\ & - a_{5,ij} \left(U_{i+1,j+1}^s - U_{i-1,j+1}^{s+1} - U_{i+1,j-1}^{s+1} + U_{i-1,j-1}^{s+1} \right) - a_{6,ij} \\ a_{1,ij} = & \frac{A_{1,ij} - C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{2,ij} = \frac{A_{1,ij} + C_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{3,ij} = \frac{B_{1,ij} - D_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{4,ij} = \frac{B_{1,ij} + D_{1,ij}}{a_{0,ij}}, \\ a_{5,ij} = & \frac{E_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{6,ij} = \frac{F_{1,ij}}{a_{0,ij}}, a_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_1 h^2} \end{aligned} \quad (7.80)$$

Доданок $F_{1,ij}$ після перетворень набуде вигляду

$$\begin{aligned} F_{1,ij} = & \frac{\gamma_w}{4h^2 J_{1,ij}} \left((H_{i+1,j} - H_{i-1,j})(z_{ij+1} - z_{ij-1}) - (H_{ij+1} - H_{ij-1})(z_{i+1,j} - z_{i-1,j}) \right) - \\ & - (\lambda + \mu) \left(-\frac{W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}}{h^2} \frac{(z_{ij+1} - z_{ij-1})(x_{ij+1} - x_{ij-1})}{4J_{1,ij}^2 h^2} + \right. \\ & + \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j-1}}{2h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} - \frac{W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}}{h^2} \frac{(z_{i+1,j} - z_{i-1,j})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{4J_{1,ij}^2 h^2} + \\ & \left. + \frac{W_{i+1,j+1} - W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1}}{2h^2} \frac{(x_{ij+1} - x_{ij-1})(z_{i+1,j} - z_{i-1,j}) + (z_{ij+1} - z_{ij-1})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{4J_{1,ij}^2 h^2} \right) \end{aligned}$$

Дискретизуємо рівняння (7.72) на шаблоні типу «ящик»

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu}{J_1} \left(\frac{W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}}{h_\xi^2} + \frac{W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}}{h_\eta^2} \right) + \\
& + (\lambda + \mu) \left(\frac{W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}}{h_\xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 + \frac{W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}}{h_\eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right) + \quad (7.81) \\
& + \frac{W_{i+1,j+1} - W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1}}{2h_\xi h_\eta} \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \\
& + \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{W_{i,j+1} - W_{i,j-1}}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = F_2 \\
& F_2 = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} - (\lambda + \mu) \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h_\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \right. \\
& + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h_\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h_\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h_\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} + \\
& \left. + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right)
\end{aligned}$$

Покладемо $h_\xi = h_\eta = h$, та введемо позначення

$$\begin{aligned}
A_{2,ij} &= \frac{1}{J_{1,ij} h^2} \left(\mu + \frac{(\lambda + \mu)}{J_{1,ij}} \left(\frac{x_{ij+1} - x_{ij-1}}{2h} \right)^2 \right), \\
B_{2,ij} &= \frac{1}{J_{1,ij} h^2} \left(\mu + \frac{(\lambda + \mu)}{J_{1,ij}} \left(\frac{x_{i+1j} - x_{i-1j}}{2h} \right)^2 \right), \\
C_{2,ij} &= \frac{(\lambda + \mu)}{2h} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)_{ij}, \quad D_{2,ij} = \frac{(\lambda + \mu)}{2h} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)_{ij}, \\
E_{2,ij} &= \frac{(\lambda + \mu) (x_{i+1j} - x_{i-1j}) (x_{ij+1} - x_{ij-1})}{2J_1^2 h^2} \frac{1}{4h^2}.
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (7.81) запишеться:

$$\begin{aligned}
& -\left(A_{2,ij} + B_{2,ij}\right)W_{ij} + W_{i-1,j}\left(A_{2,ij} - C_{2,ij}\right) + W_{i+1,j}\left(A_{2,ij} + C_{2,ij}\right) + \\
& + W_{i,j-1}\left(B_{2,ij} - D_{2,ij}\right) + W_{i,j+1}\left(B_{2,ij} + D_{2,ij}\right) - \\
& - E_{2,ij}\left(W_{i+1,j+1} - W_{i-1,j+1} - W_{i+1,j-1} + W_{i-1,j-1}\right) = F_{2,ij},
\end{aligned} \quad (7.82)$$

Розв'язок (7.82) шукатимемо ітераційним методом Гауса-Зейделя

$$\begin{aligned}
W_{ij}^{s+1} &= \left(b_{1,ij}W_{i-1,j}^{s+1} + b_{2,ij}W_{i+1,j}^s + b_{3,ij}W_{ij-1}^{s+1} + b_{4,ij}W_{ij+1}^s\right) - \\
& - b_{5,ij}\left(W_{i+1,j+1}^s - W_{i-1,j+1}^{s+1} - W_{i+1,j-1}^{s+1} + W_{i-1,j-1}^{s+1}\right) - b_{6,ij} \\
b_{1,ij} &= \frac{A_{2,ij} - C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{2,ij} = \frac{A_{2,ij} + C_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{3,ij} = \frac{B_{2,ij} - D_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{4,ij} = \frac{B_{2,ij} + D_{2,ij}}{b_{0,ij}}, \\
b_{5,ij} &= \frac{E_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{6,ij} = \frac{F_{2,ij}}{b_{0,ij}}, b_{0,ij} = \frac{2(\lambda + 3\mu)}{J_{1,ij}h^2}
\end{aligned} \quad (7.83)$$

Доданок $F_{2,ij}$ після перетворень набуде вигляду

$$\begin{aligned}
F_2 &= \gamma_{sb} + \frac{\gamma_w}{4h^2J_{1,ij}} \left(-(H_{i+1,j} - H_{i-1,j})(x_{ij+1} - x_{ij-1}) + (H_{ij+1} - H_{ij-1})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \right) - \\
& - (\lambda + \mu) \left(\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2} \frac{(z_{ij+1} - z_{ij-1})(x_{ij+1} - x_{ij-1})}{4J_{1,ij}^2h^2} + \right. \\
& + \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j-1}}{2h^2} \frac{(x_{ij+1} - x_{ij-1})(z_{i+1,j} - z_{i-1,j}) + (z_{ij+1} - z_{ij-1})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{4J_{1,ij}^2h^2} + \\
& + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h^2} \frac{(z_{i+1,j} - z_{i-1,j})(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{4J_{1,ij}^2h^2} + \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} + \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \left. \right)
\end{aligned}$$

Описані вище формули слід доповнити різницеvim аналогом

$$J_1 = \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{h} \right)^2 + \left(\frac{x_{ij+1} - x_{ij-1}}{h} \right)^2$$

та різницеvim аналогами перетворень, наведених у формулах (7.65)–(7.70).

Розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (7.76), (7.81) методом Гауса-Зейделя за формулами (7.80), (7.83), що доповнені відповідними аналогами крайових умов, знайдемо значення горизонтальних і вертикальних зміщень у заданих точках.

Для чисельного розв'язання задачі створена програма на мові програмування C++. Результати виводяться у вигляді графіка у вікні. Є також можливість зберігати числові результати у текстовий файл. Під час виконання програми можна переглядати графік у довільний момент часу (у межах кроків за часом).

Згідно з описаним алгоритмом, проведені чисельні експерименти при наступних вхідних даних:

$$r = 52 \text{ м} ; a = 25 \text{ м} ; b = 27 \text{ м} ; l(x, 0) = 7,3 \text{ м} ; h(x, 0) = 7 \text{ м} ;$$

$$H_0(z)|_{t=0} = 7 \text{ м} ; \quad H_r(z)|_{t=0} = 7 \text{ м} ; \quad H_0(z)|_{t=t_1} = 6 \text{ м} ;$$

$$H_r(z)|_{t=t_1} = 6 \text{ м} ; \lambda = 10385 \text{ КПа} ; \mu = 6920 \text{ КПа} ; e_0 = 0,65$$

$$; \quad e_1 = 0,55 ; \quad \gamma_w = 9,8 \text{ кН} / \text{м}^3 ; \quad \gamma_{sb} = 10,5 \text{ кН} / \text{м}^3 ;$$

$$\gamma_n = 16,5 \text{ кН} / \text{м}^3 .$$

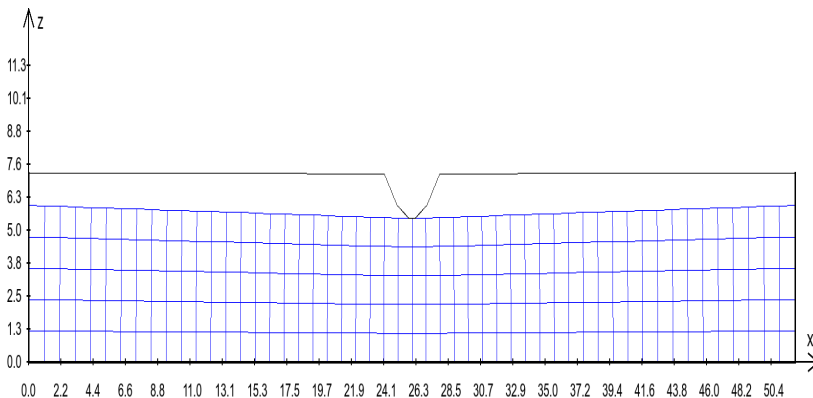


Рис. 7.5. Поверхня ґрунтового масиву та конформна сітка в кінцевий момент часу (момент стабілізації)

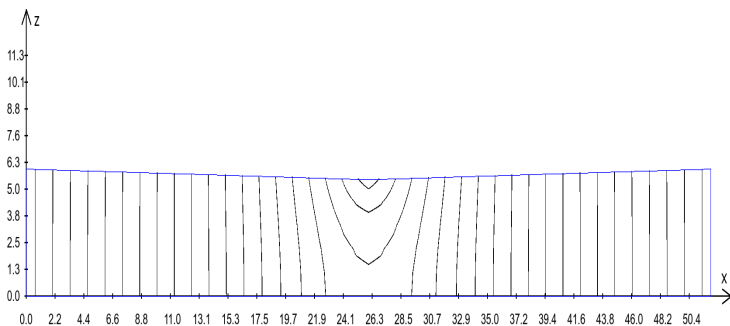


Рис. 7.6. Рівень ґрунтових вод і лінії рівних напорів у кінцевий момент часу

Результати обчислень наведені на рис. 7.5, 7.6 та в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Значення зміщень верхньої межі ґрунтового масиву

$x, м$	0,00	1,082	2,139	3,189	4,233	5,271
$l(x, t_1), м$	7,23	7,238	7,236	7,235	7,234	7,233
$x, м$	6,30	7,334	8,359	9,379	10,39	11,40
$l(x, t_1), м$	7,23	7,230	7,229	7,228	7,227	7,226
$x, м$	12,4	13,41	14,41	15,40	16,39	17,37
$l(x, t_1), м$	7,22	7,223	7,222	7,221	7,220	7,219
$x, м$	18,3	19,33	20,30	21,27	22,23	23,18
$l(x, t_1), м$	7,21	7,216	7,215	7,214	7,213	7,212
$x, м$	24,1	25,08	26,00	26,92	27,86	28,81
$l(x, t_1), м$	7,21	7,211	7,210	7,210	7,212	7,212
$x, м$	29,7	30,72	31,69	32,66	33,64	34,62
$l(x, t_1), м$	7,21	7,214	7,215	7,216	7,217	7,219
$x, м$	35,6	36,59	37,58	38,58	39,58	40,59
$l(x, t_1), м$	7,22	7,221	7,222	7,223	7,224	7,226
$x, м$	41,6	42,62	43,64	44,66	45,69	46,72
$l(x, t_1), м$	7,22	7,228	7,229	7,230	7,232	7,233
$x, м$	47,7	48,81	49,86	50,91	52,00	
$l(x, t_1), м$	7,23	7,235	7,236	7,238	7,239	

Чисельний експеримент проведено після повної стабілізації рівня ґрунтових вод, тобто коли пройшло повне осушення ґрунтового масиву.

Встановлення характеру руху води в ґрунті з допомогою так названої гідродинамічної сітки дає можливість визначити напрямок і інтенсивність фільтраційних сил в кожній точці ґрунтового масиву.

Навіть, якщо фільтрація води в ґрунтових масивах в процесі їх осушення і носить невстановлений характер, однак для врахування дії гідродинамічних сил її можна привести до встановленого фільтраційного потоку і розглядати картину фільтрації в найбільш небезпечному варіанті. Встановлено, що невстановлений рух води вимірюється для ґрунтів при незмінних їх фільтраційних властивостях десятитисячними долями секунди. У зв'язку з цим дія фільтраційних сил розглядалася, виходячи з уявлення про встановлений рух води в порах ґрунту.

Відомо, що при влаштуванні землерийними механізмами осушувальних каналів у водонасиченому ґрунті утворюється фільтраційний потік. Цей потік буде мати тим більшу інтенсивність, чим швидше будуть виконуватись роботи по виїмці ґрунту і чим менша водопроникність фільтруючих ґрунтів масиву.

В тілі ґрунтового масиву і укусу в процесі осушення слід розрізнати три зони, в межах яких ґрунт знаходиться в різних умовах, як за фізичними показниками, так і за умовами фільтрації.

Перша зона (дно каналу і частина ґрунтового масиву нижче кривої депресії), ділянка яку можна розглядати як поверхню рівних напорів. В цьому випадку фільтраційний потік направлений перпендикулярно до поверхні укусу і дна каналу.

Друга зона є ділянкою капілярного насичення ґрунту водою. У зв'язку з тим, що незабаром після влаштування

каналу проходить падіння рівня води в ґрунтовому масиві і в тілі укусу, можна вважати, що волога в межах капілярної облямівки неперервна, а лінія капілярних менісків повторює криву депресії.

В дослідженнях встановлено, що капілярна вода при повному заповненні пор ґрунту під дією різниці напорів рухається за тим же законом, що і вільна ґрунтова вода.

В третій зоні ґрунт знаходиться в стані природної вологості.

При влаштуванні осушувальних каналів піщані ґрунти, особливо дрібні і пилюваті, отримують деформації. Область деформацій стає тим більшою, чим швидші темпи прокладання каналу. Досить часто в таких ґрунтах необхідно виконувати прокладання каналу не за один раз, а за два і навіть за три рази. В цьому випадку слід передбачити певний порядок виконання робіт відповідними землерийними механізмами.

При аналізі деформацій ґрунтового масиву в процесі його осушення особливу увагу було звернуто на вивчення ділянки біля укусу каналу, так як на цій ділянці ми отримали найбільші деформації. На основі аналізу дослідних даних встановлено, що характеристики ґрунту зазнали змін під дією фільтраційного потоку. Так, наприклад, коефіцієнт пористості ґрунту став менший, а значення коефіцієнта фільтрації збільшилось.

Збільшення водопроникності ґрунтів в області фільтрації властиве однорідному середовищу. Ці зміни в крупних і середньої крупності пісках незначні. В дрібних і пилюватих пісках, як показали досліди, вони більш значні і аналогічні змінам фізичних характеристик, що спостерігалися у торф'яних ґрунтах.

При будівництві осушувальних каналів мають місце випадки раптових деформацій пилюватих і дрібних пісків пухкої будови. Додаткове ущільнення піщаних ґрунтів, зазвичай, пов'язують з дією фільтраційного потоку. Пояснення

цього явища можна дати на прикладі щільності будови ідеалізованого ґрунту, що складається з кулястих часток однакового діаметру. На рис. 7.7а. показана система з таких часток, що характеризується пористістю $n = 48\%$. Мінімальна можлива пористість при найбільш щільному розміщенню часток буде відповідати значенню $n = 26\%$ (рис. 7.7, б).

При осушенні ґрунтового масиву пухка структура пісків намагається перейти в більш щільну. В процесі дії фільтраційного потоку частинки ґрунту переміщуються у вільний поровий простір і, як наслідок, відбудуться деформації (зміщення) ґрунтового масиву.

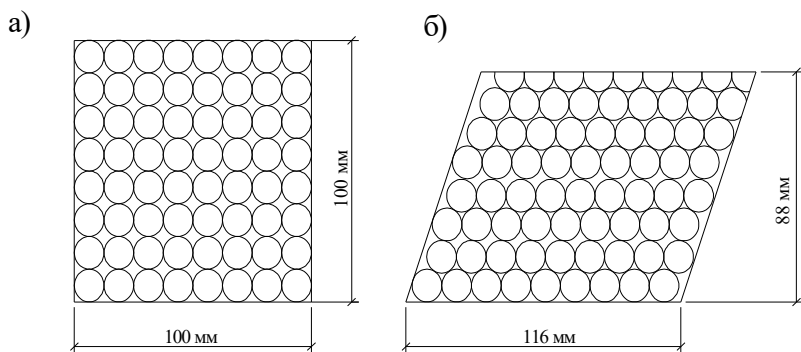


Рис. 7.7. Модель пухкої (а) і щільної будови (б) ідеалізованого ґрунту із кулястих частин

Дослідженнями встановлено, що в зоні взаємного зміщення часток пористість досягне величини, що залежить від крупності зерен, яку називають критичною.

В деяких дослідженнях викладена думка про те, що пухкі водонасичені піски можуть зазнавати ущільнення внаслідок різких коливань атмосферного тиску. Спостереженнями встановлено, що при збільшенні атмосферного тиску рівень ґрунтових вод падає, а при зменшенні атмосферного тиску – підвищується. При цьому падіння і підвищення рівня

проходить миттєво без переміщення води і відбувається лише в перетворенні капілярної води в гравітаційну і навпаки.

Вплив атмосферного тиску на ґрунтові води виявлено уже давно, причому швидке барометричне коливання впливає значно більше, ніж повільне коливання тиску. Так, під час бур коли атмосферний тиск падає, рівень води в колодязях значно підвищується.

В капілярній зоні ґрунтового масиву може бути защемлений деякий об'єм повітря. При різних коливаннях атмосферного тиску можлива поява відносного вакууму. Так, як защемлене повітря ізольоване від атмосферного, то воно буде сприяти інтенсивному руху води.

Результати числових досліджень та їх порівняння з геодезичними вимірюваннями наведено в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Результати числових досліджень та їх порівняння з геодезичними вимірюваннями

Номер масиву	Кількість точок геодезичних вимірювань	Вертикальні зміщення, м		Відхилення, %
		геодезичні вимірювання	числове моделювання	
1	585	0,53	0,49	7,5
2	400	0,29	0,26	10
3	173	0,14	0,13	7,0
4	48	0,04	0,035	12,0
5	2	0,13	0,12	8,0

Значення вертикальних зміщень, що прогнозовані при числовому моделюванні, підтвердилися геодезичними вимірюваннями в натурних умовах. Відхилення між експериментальними значеннями вертикальних зміщень та розрахунковими знаходиться в межах 7–12%, що задовольняє прийнятій точності.

7.2. Моделювання деформацій при осушенні водонасиченого природного схилу ГАЕС

При проектуванні та будівництві гідроакумуючих електростанцій (ГАЕС) нерідко приходится виконувати осушення водонасичених природних схилів. Наявність фільтраційного потоку і зміни ваги ґрунту в процесі осушення, приводить до виникнення вертикальних і горизонтальних деформацій природного схилу.

Місце розташування основних споруд визначено при виборі майданчика розміщення ГАЕС. До складу основних споруд входять (рис. 7.8): верхня водойма; водоприймач з підвідним каналом; напірні сталезалізобетонні водоводи; будівля ГАЕС з чотирма агрегатами та монтажним майданчиком; відвідний канал з устоями.

Верхня водойма ГАЕС слугує штучним басейном, що утворений на береговому схилі Канівського водосховища у піввиїмці – півнаси́пу. Нижньою водоймою слугує існуюче Канівське водосховище.

Для зведення даних об'єктів виникла необхідність в осушенні нижньої частини природного схилу Канівській ГАЕС. Для цього передбачається влаштування котловану з попереднім глибинним водопониженням і відкритим водовідливом (рис. 7.8).

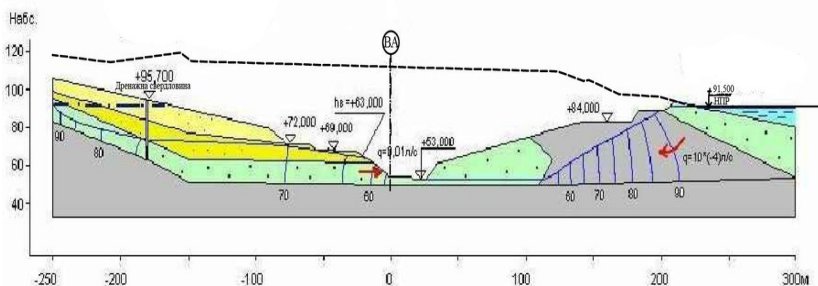


Рис. 7.8. Схема водопониження для влаштування котловану

При осушенні нижньої частини водонасиченого природного схилу виникають додаткові деформації, що можуть суттєво змінювати важливі проектні позначки будівлі ГАЕС і розміщення анкерних опор сталезалізобетонного напірного водоводу.

Для встановлення вертикальних і горизонтальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення виконані чисельні дослідження на основі розроблених математичних моделей і методів їх рішень.

Математична модель, що описує дану задачу складається з диференціальних рівнянь фільтраційного потоку і рівнянь НДС ґрунтового масиву, що записуються в переміщеннях.

Рівняння фільтраційного потоку води в початковий момент осушення ґрунтового масиву записується у вигляді:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (7.84)$$

де $H(x, z)$ – напір води в точці (x, z) ґрунтового масиву.

У кінцевий момент часу після осушення вода в ґрунті відсутня, то $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0$.

Математична модель задачі в зміщеннях у момент часу t в області нижче рівня ґрунтових вод $\Omega_t = \{(x, z) | x \in (0, r), z \in (0, h(x, t))\}$ описується наступними диференціальними рівняннями:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (7.85)$$

$$\mu \Delta w + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \gamma_{sb} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} \quad (7.86)$$

при таких граничних умовах

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad (7.87)$$

$$u(0, z) = 0, \quad u(r, z) = 0, \quad (7.88)$$

$$\tau_{xz}(0, z) = 0, \quad \tau_{xz}(r, z) = 0, \quad (7.89)$$

$$\tau_n(x, l_1(x)) = 0, \quad \sigma_n(x, l_1(x)) = \gamma_n(l_1(x) - l(x)). \quad (7.90)$$

Тут $h(x, 0)$ – висота розміщення ґрунтових вод у момент часу t ; $H(x, z)$ – напір у точці (x, z) у момент часу t ; Δ – оператор Лапласа; λ, μ – пружні сталі; $u(x, z)$ – горизонтальні, а $w(x, z)$ – вертикальні зміщення точки, яка у момент t знаходиться в точці (x, z) ; $\gamma_w = \rho_w g$ – питома вага води; γ_{sb} – питома вага ґрунту в зваженому стані; τ_{xz} – головні дотичні напруження; σ_n – нормальні напруження; τ_n – дотичні напруження; $l_1(x)$ – рівень ґрунтових вод; $l(x)$ – товщина ґрунтового масиву в момент часу t ; γ_n – питома вага ґрунту в природному стані.

У кінцевий момент часу питому вагу ґрунту приймаємо в природному стані. Також коефіцієнти λ, μ можуть відрізнитись для ґрунту у водонасиченому і природному стані.

Позначимо загальну ширину області фільтрації, що розглядається через r .

Для того, щоб знайти зміщення у ґрунтовому масиві, необхідно знати напори в усіх точках масиву в початковий та кінцевий моменти часу. Для визначення напорів в області Ω , знайдемо розв'язок диференціального рівняння стаціонарної фільтрації (7.84) при таких граничних умовах:

$$H(0, z) = H_0(z), \quad H(r, z) = H_r(z), \quad (7.91)$$

$$\frac{\partial H(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad H(x, h(x, t)) = h(x, t), \quad (7.92)$$

де $H_0(z), H_r(z)$ – напори на лівій та правій межі ґрунтового масиву (відомі функції).

Для цього здійснимо чисельне конформне відображення області $\Omega_l = \{(x, z) \mid x \in (0, r), z \in (0, h(x, t))\}$ на параметричний прямокутник у площині $\xi O \eta$.

Алгоритм здійснення відображення і побудові гідродинамічної сітки наведено в розділі 6.1.

Розв'яжемо задачу (7.85) – (7.86). Для цього виразимо напруження через зміщення

$$\tau_{xz} = \mu \varepsilon_{xz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.92)$$

Згідно (7.46), $u|_{x=0} = u|_{x=r} = 0$, тому

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x=r} = 0.$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=r} = 0. \quad (7.93)$$

З опору матеріалів відомі формули

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xz} n_x n_z, \\ \tau_n = \sqrt{P_x^2 + P_z^2 - \sigma_n^2}, \quad (7.94)$$

де $P_x = \sigma_x n_x + \tau_{xz} n_z$, $P_z = \tau_{zx} n_x + \sigma_z n_z$ – складові вектора напружень; n_x, n_z – напрямні косинуси вектора нормалі до верхньої межі Ω_l , а саме: $n_x = -\sin \alpha$, $n_z = \cos \alpha$, де $\alpha = \arctg(l'_1(x))$.

Запишемо напруження через переміщення отримаємо

$$\left(2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x n_z + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n_x^2 - n_z^2) \right) \Big|_{z=l_1} = 0, \quad (7.95)$$

$$\left(\left(\lambda (n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_x^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\lambda (n_x^2 + n_z^2) + 2\mu n_z^2 \right) \frac{\partial w}{\partial z} + \mu n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \Big|_{z=l_1} = \gamma_n (l_1(x) - l(x)). \quad (7.96)$$

Для розв'язання даної задачі (перейдемо до змінних ξ, η). Послідовність розв'язання даної задачі наведено в розділі 6.1.

Згідно з описаним алгоритмом, проведені чисельні експерименти з визначенням вертикальних і горизонтальних зміщень при осушенні природного ґрунтового схилу Канівської ГАЕС.

Вихідні дані, що застосовувалися в розрахунках були наступні:

Вихідні дані, що застосовувалися в розрахунках були наступні: $r = 180 \text{ м}$; $l(x, 0) = 67 - 5 \cdot \frac{x}{r} \text{ м}$;

$$h(x, 0) = 43 - \frac{x}{r} \text{ м}; \quad H_0(z) \Big|_{t=0} = 43 \text{ м}; \quad H_r(z) \Big|_{t=0} = 42 \text{ м};$$

$$H_r(z) \Big|_{t=t_i} = 23 \text{ м}; \quad H_r(z) \Big|_{t=t_i} = 13 \text{ м}; \quad \lambda_1 = 18493 \text{ КПа};$$

$$\mu_1 = 15748 \text{ КПа}; \quad \lambda_2 = 18000 \text{ КПа}; \quad \mu_2 = 18000 \text{ КПа};$$

$$\gamma_w = 10 \text{ кН} / \text{м}^3; \quad \gamma_n = 16,48 \text{ кН} / \text{м}^3; \quad \gamma_{sb} = 9,63 \text{ кН} / \text{м}^3;$$

$$\gamma_{dr} = 16,48 \text{ кН} / \text{м}^3. \text{ Заданий крок сітки } \approx 3 \text{ м}.$$

Чисельне моделювання виконано при частковому і повному осушенні ґрунтового схилу.

Гідродинамічна сітка області фільтрації в початковий момент часу наведена на рисунку 7.9, а при частковому осушенні на момент стабілізації кривої депресії на рис. 7.10.

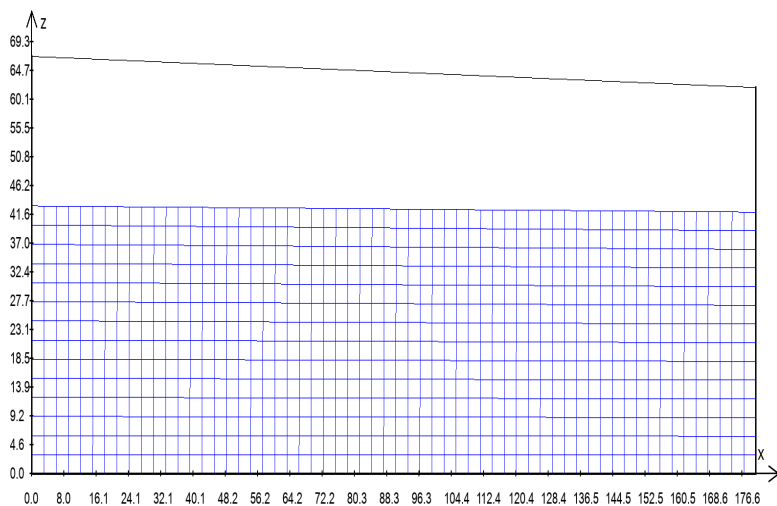


Рис. 7.9. Гідродинамічна сітка області фільтрації в початковий момент часу

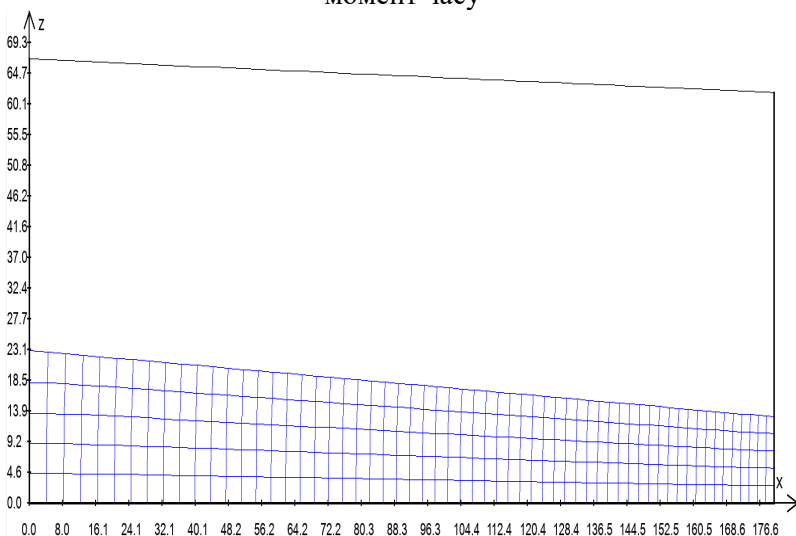


Рис. 7.10. Гідродинамічна сітка області фільтрації при частковому осушенні на момент стабілізації кривої депресії

Значення вертикальних і горизонтальних зміщень для випадку, коли осушення його відбувається частково наведені в табл. 7.3, 7.4 та на рис. 7.11.

Таблиця 7.3

Значення вертикальних зміщень

$\begin{matrix} Z \\ X \end{matrix}$		45	67,5	90	112,5	135	157,5
39,9	-78,56	-78,66	-78,67	-78,64	-78,62	-78,63	-78,74
29,925	-75,53	-75,60	-75,59	-75,57	-75,54	-75,54	-75,61
19,95	22,5	-61,44	-61,41	-61,36	-61,31	-61,28	-61,28
9,975	-36,28	-36,25	-36,21	-36,17	-36,13	-36,09	-36,06

Таблиця 7.4

Значення горизонтальних зміщень

Z X							
	22,5	45	67,5	90	112,5	135	157,5
39,9	-1,33	-2,18	-2,62	-2,76	-2,62	-2,18	-1,34
29,925	-1,31	-2,07	-2,46	-2,58	-2,46	-2,07	-1,31
19,95	-1,07	-1,66	-1,95	-2,04	-1,95	-1,66	-1,06
9,975	-0,64	-0,97	-1,13	-1,17	-1,12	-0,96	-0,63

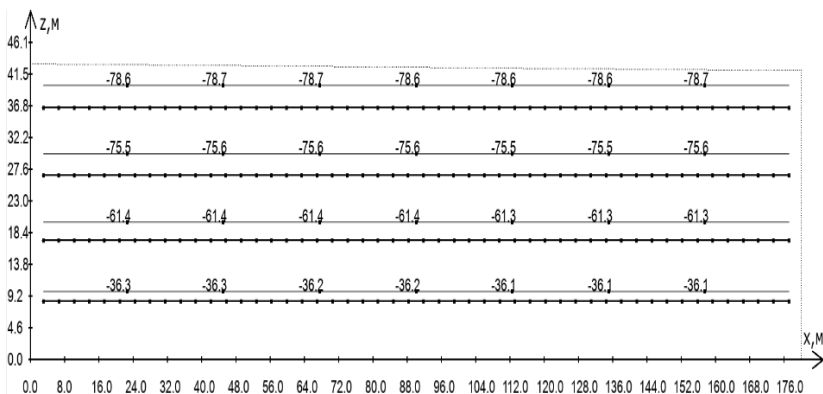


Рис. 7.11. Діаграма вертикальних зміщень в заданих точках

На рис. 7.11 наведені лише вертикальні зміщення, оскільки горизонтальні зміщення значно менші. Числові значення зміщень у заданих вузлах, що наведені таблицях 7.3, 7.4 і на рисунку 7.11 вимірюються у міліметрах.

Числові значення вертикальних зміщень поверхні ґрунтового масиву при повному осушенні наведені в табл. 7.5.

Таблиця 7.5

Вертикальні зміщення поверхні ґрунтового схилу

	0	4,55519	8,80328	12,9693	17,0705	21,1151
$\Delta l, \text{мм}$	146,4	148,966	148,264	147,741	147,419	147,369
$x, \text{м}$	25,1074	29,0497	32,9436	36,7899	40,5895	44,3429
$\Delta l, \text{мм}$	147,472	147,863	148,4	149,058	149,613	150,352
$x, \text{м}$	48,0508	51,7134	55,3315	58,9053	62,4354	65,9221
$\Delta l, \text{мм}$	150,955	151,516	152,113	152,641	153,183	153,730
$x, \text{м}$	69,366	72,7674	76,1268	79,4445	82,7211	85,9568
$\Delta l, \text{мм}$	154,166	154,583	155,066	155,408	155,791	156,111
$x, \text{м}$	89,1521	92,3074	95,423	98,4994	101,537	104,536
$\Delta l, \text{мм}$	156,452	156,905	157,261	157,605	157,9278	158,222
$x, \text{м}$	107,497	110,42	113,306	116,154	118,967	121,742

продовження табл. 7.5

$\Delta l, мм$	158,472	158,777	159,011	159,2	159,4611	159,677
$x, м$	124,482	127,186	129,854	132,488	135,087	137,652
$\Delta l, мм$	159,766	159,955	160,144	160,277	160,3833	160,433
$x, м$	140,182	142,679	145,143	147,573	149,97	152,335
$\Delta l, мм$	160,555	160,594	160,75	160,85	160,9667	161,072
$x, м$	154,668	156,968	159,237	161,475	163,681	165,856
$\Delta l, мм$	161,066	161,077	161,05	160,983	160,9056	160,688
$x, м$	168	170,112	172,191	174,236	176,243	178,201
$\Delta l, мм$	160,433	159,966	159,316	158,511	157,4611	156,672

Висновки

В монографії поставлено і розв'язано актуальну та важливу науково-практичну проблему з удосконалення існуючого та створення нового розрахунково-теоретичного апарату для оцінки деформацій водонасичених ґрунтових укосів і масивів при зміні гідрогеологічних умов. При цьому отримано такі наукові і практичні результати.

1. Встановлено основні фактори, що впливають на стійкість водонасичених ґрунтових укосів під час зниження рівня води у водоймищі.

2. Досліджено динаміку депресійної поверхні у тілі і укосі ґрунтових споруд під час зниження рівня води у водоймищі та вплив фільтраційного потоку і зміни сил зчеплення у глинистих ґрунтах на стійкість водонасичених укосів ґрунтових споруд.

3. Наведено приклади з визначення оптимальних параметрів ґрунтової греблі з урахуванням умов експлуатації та інтенсивності пониження рівня води у водоймищі в залежності від стійкості верхового укосу греблі.

4. Отримано аналітичні розв'язки з визначення зміщень, деформацій і напружень при дії фільтраційного потоку води у вертикальному напрямку для одношарового та багатошарового ґрунтового масиву. На основі отриманих розв'язків проведені числові експерименти, які показали відмінність між деформаціями, що відбуваються в ґрунтовому масиві при наявності фільтраційного потоку та при відсутності його.

5. Розвинено і вдосконалено математичні моделі з прогнозу деформацій водонасичених ґрунтових масивів і основ при дії внутрішніх об'ємних сил (гідродинамічних сил фільтраційного потоку води, зміни власної ваги ґрунту). Для даних математичних моделей отримано чисельні розв'язки відповідних крайових задач фільтрації та напружено-

деформованого стану ґрунту в областях зі змінною в часі криволінійною межею, які дозволили визначити вертикальні і горизонтальні зміщення водонасичених ґрунтових масивів і основ при їх осушенні.

6. Встановлено, що при осушенні ґрунтового масиву, у зв'язку з різною інтенсивністю фільтраційного потоку найбільше осідання поверхні землі отримуємо на незначній відстані від розміщення дренажу з подальшим зменшенням у напрямку крайніх меж області фільтрації.

7. Встановлено, що значення вертикальних зміщень поверхні землі, прогнозованих при чисельному моделюванні за розробленою методикою, підтвердились геодезичними вимірюваннями осідань поверхні землі при осушенні ґрунтового масиву в заплаві р. Стубла. Відхилення експериментальних та розрахункових значень осідань знаходяться в межах 7–12% в бік заниження за результатами моделювання.

8. Проведені чисельні експерименти з визначенням вертикальних і горизонтальних зміщень при осушенні природного ґрунтового схилу Канівської ГАЕС.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецкий В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. К. : Наук. думка, 2007. 291 с.

2. Бойко И. П., Лебеда А. Ф., Давыдюк В. В. Влияние гидрогеологических условий на деформацию оснований существующих фундаментов. *Основания и фундаменты*. К. : Будівельник, 1991. Вип. 24. С. 23–30.

3. Власюк А. П., Кузло М. Т., Кушнір І. О. Математичне моделювання напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву у процесі його осушення. *Вісник НУВГП* : зб. наук. праць. 2011. Вип. 4(56). С. 190–205.

4. Власюк А. П., Кузло М. Т. Математичне моделювання деформацій ґрунтових масивів при дії техногенних факторів. Рівне : НУВГП, 2017. 211 с.

5. Винников Ю. Л. До загальних принципів математичного моделювання процесів ущільнення основ. *Зб. наук. праць (галузеве машинобудування, будівництво) ПДТУ ім. Юрія Кондратюка*. Полтава, 2002. Вип. 8. С. 80–83.

6. Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи та фундаменти / М. Л. Зоценко, В. І. Коваленко, А. В. Яковвлєв, О. О. Петраков, В. Б. Швець, О. В. Школа, С. В. Біда, Ю. Л. Винников. Полтава : ПолНТУ, 2004. 568 с.

7. Кризький М. М. Інженерний спосіб розрахунку стійкості ґрунтової споруди на основі моделі пружно-пластичної призми ковзання. *Меліорація і водне господарство*. К. : Уражай, 1994. Вип. 80. С. 83–88.

8. Кузло М. Т. Влияния снижения уровня воды на прочность ґрунтового откоса. *Повышение эффективности осушительно-увлажнительных систем* : сб. научн. трудов. К. : УкрНИИГиМ, 1985. С. 134–137.

9. Кузло М. Т. Исследование фильтрационных сил в ґрунтовым откосе при понижении уровня воды в бьефе.

Гидротехнические сооружения на мелиоративных системах : сб. научн. трудов. К. : УкрНИИГиМ, 1986. С. 84–90.

10. Кузло М. Т. Фільтрація води в деформованому ґрунтовому середовищі. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди* : зб. наук. праць. Рівне, 1999. Вип. 3. С. 175–178.

11. Кузло М. Т. Встановлення режиму фільтрації у ґрунтових укосах при пониженні рівня води. *Меліорація і водне господарство* : міжвідомчий темат. наук. зб. К. : Аграрна наука, 2004. Вип. 91. С. 64–274.

12. Кузло М. Т., Філатова І. А. Про деякі математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод. *Вісник НУВГП. Технічні науки* : зб. наук. праць. Рівне, 2005. Вип. 2(30). С. 282–287.

13. Кузло М. Т. Математичне моделювання напружено-деформованого стану водонасичених ґрунтових масивів. *Коммунальное хозяйство городов* : науч.-техн. сб. К., 2007. Вип. 76. С. 79–85.

14. Кузло М. Т., Філатова І. А. Моделювання напружено-деформованого стану водопроникливого ґрунтового масиву при фільтрації води у вертикальному напрямку. *Вісник НУВГП. Технічні науки* : зб. наук. праць. 2011. Вип. 1(53). С. 111–118.

15. Кузло М. Т. Моделювання напружено-деформованого стану ґрунтових масивів при пониженні рівня ґрунтових вод. *Світ геотехніки* : наук.-техн. журнал. 2011. № 2(30). С. 12–14.

16. Кузло М. Т. Оцінка напружено-деформованого стану багат шарового ґрунтового масиву при дії фільтраційного потоку води. *Комунальне господарство міст* : наук.-техн. зб. Харків, 2012. Вип. 105. С. 232–241.

17. Кузло М. Т. Динаміка депресійної поверхні в ґрунтовому масиві при пониженні рівня води в горизонтальних

дренах. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди* : зб. наук. праць. Рівне, 2012. Вип. 23. С. 585–591.

18. Кузло М. Т. Математичне моделювання напружено-деформованого стану водонасиченого ґрунтового масиву у процесі його осушення. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво* : наук.-техн. зб. Київ, 2012. Вип. 83. С. 40–48.

19. Кузло М. Т. Моделювання вертикальних зміщень ґрунтового масиву в процесі його осушення. *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво* : наук.-техн. зб. Київ, 2013. Вип. 87. С. 49–55.

20. Кузло М. Т. Моделювання деформацій природного схилу при його осушенні. *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)* / Полт. нац. техн. ун-т ім. Юрія Кондратюка. Полтава : ПНТУ, 2013. Вип. 3(38). Том 1. С. 199–2007.

21. Моргун А. С., Андрухов В. М., Метъ І. М. Вплив техногенного фактора замокання ґрунтової основи на НДС висотної будівлі. *Дороги і мости* : зб. наук. праць. К., 2009. С. 233–238.

22. Остапчук С. М. Кількісна оцінка зміни рельєфу на меліоративних землях. *Меліорація і водне господарство* : міжвідомчий темат. наук. зб. К. : Аграрна наука, 1997. Вип. 84. С. 125–131.

23. Рудаков Д. В. Математичні методи в охороні підземних вод. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2012. 158 с.

24. Стефанишин Д. В., Жеребятєв О. В. Оцінка надійності ґрунтових гідроспоруд за даними геотехнічного контролю. *Будівельні конструкції* : міжвід. наук-техн. зб. К. : НДІБК, 2011. Вип. 75. Кн. 2. С. 525–533.

25. Трофимчук А. Н., Калюх Ю. І., Глебчук А. С. Практичне відпрацювання методики оцінки і прогнозу зміни складних гідрогеологічних та інженерно-геологічних процесів. *Наука та інновації*. 2012. № 4. Т. 8. С. 18–24.

26. Хлапук М. М. Математичне моделювання взаємовпливових процесів фільтрації і механічної суфозії. *Вісник УДАВГ* : зб. наук. праць. Рівне, 1998. Вип. 1. С. 83–87.

Наукове видання

Кузло Микола Трохимович

**ОЦІНКА СТАНУ ВОДОНАСИЧЕНИХ ҐРУНТОВИХ
УКОСІВ І МАСИВІВ ПРИ ЗМІНІ
ГІДРОГЕОЛОГІЧНИХ УМОВ**

Монографія

*Видавець і виготовлювач
Національний університет
водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028.*

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до
державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.*