

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних
технологій та інженерії
Кафедра комп'ютерних технологій та економічної кібернетики

04-05-104М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
до виконання лабораторних і самостійних робіт
з дисципліни «МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійними програмами
«Інформаційні системи і технології»
спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» та
«Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності
015.39 «Професійна освіта (цифрові технології)»
денної і заочної форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою
з якості ННІ КІТІ
Протокол № 8 від 28.08.2025 р.

Рівне – 2025

Методичні вказівки і завдання до виконання лабораторних і самостійних робіт з дисципліни **«Методи обчислень»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами **«Інформаційні системи і технології»** спеціальності **126 «Інформаційні системи та технології»** та **«Цифрові технології дистанційної освіти»** спеціальності **015.39 «Професійна освіта (цифрові технології)»** денної і заочної форм навчання [Електронне видання] / Гладка О. М., Карпович І. М. Рівне : НУВГП, 2025. 43 с.

Укладачі:

Гладка О. М., канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики;

Карпович І. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Відповідальний за випуск:

Грицюк П. М., д-р екон. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Гарант ОП «Інформаційні системи і технології»:

Гладка О. М., канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Гарант ОП «Цифрові технології дистанційної освіти»:

Парфенюк О. В., канд. пед. наук, доцент кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики.

Попередня версія методичних вказівок 04-05-60М

© О. М. Гладка, І. М. Карпович, 2025

© НУВГП, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП	4
МОДУЛЬ 1. Числові методи лінійної та нелінійної алгебри	
1. Предмет, задачі та методи обчислювальної математики. Основи теорії похибок	5
2. Числові методи лінійної алгебри	8
3. Числові методи нелінійної алгебри.....	16
4. Числові методи розв'язування задач на власні значення	20
МОДУЛЬ 2. Числові методи роботи з табличними даними.	
Розв'язування крайових задач	
5. Апроксимація функцій	24
6. Числове диференціювання та інтегрування функцій	30
7. Розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь	34
8. Методи розв'язування крайових задач	37
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	42

ВСТУП

Дисципліна «Методи обчислень» вивчає алгоритми побудови наближених розв'язків різних типових задач, до яких зводиться вирішення практичних проблем, що виникають в ході розробки та використання інформаційних систем і цифрових технологій. Розглядаються питання про те, як виконувати такі обчислення, наскільки отримані наближені розв'язки відрізняються від шуканих точних, які чинники впливають на покращення очікуваного результату чи можуть його погіршити тощо.

Сучасні інструментальні можливості стандартних математичних пакетів Matlab, Maple, Mathematica, MathCAD тощо дозволяють користувачам успішно розв'язувати прикладні задачі. Але ці пакети часто є для користувача “чорними скриньками” з невідомими алгоритмами. Сучасний фахівець з інформаційних технологій має добре розумітися у вибраних процедурах, вміти “керувати” ними, налаштовувати і пристосовувати процес обчислень під необхідні параметри.

Мета дисципліни полягає в оволодінні класичними та сучасними методами обчислень для розв'язування прикладних задач.

Основними завданнями вивчення дисципліни є набуття компетентностей на основі засвоєння основних теоретичних положень та придбання необхідних практичних навичок, що дозволяють застосовувати їх до розв'язування практичних задач; вміння обрати відповідний метод розв'язування задачі, провести аналіз отриманих результатів, застосовувати отримані знання і навички у вивченні спеціальних фахових дисциплін.

Для виконання лабораторних робіт у пропонованих методичних вказівках подано завдання для індивідуальних обчислень за варіантом двох рівнів складності – завдання базового рівня, що є обов'язковими для виконання, і додаткові завдання підвищеного рівня складності, за які здобувач вищої освіти може отримати додаткові бали. Окрім цього наведено очікувані результати навчання, які здобувач вищої освіти досягне в результаті вивчення кожної теми, і посилання на літературні джерела з теоретичним матеріалом та зразками виконання завдань.

Модуль 1. Числові методи лінійної та нелінійної алгебри

Тема 1. Предмет, задачі та методи обчислювальної математики. Основи теорії похибок

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів.

Література: 1, с. 6-20, 107-108, 155-158; 3, с. 9-22; 4, с. 10-11; 5, с. 3-30; 6, с. 4-13; 7, с. 5-27

Лабораторна робота № 1

Дії з наближеними числами, обчислення похибок

Теоретичні відомості

Наближеним числом a називається число, що незначно відрізняється від точного числа A і яке заміняє його в обчисленнях.

Абсолютна величина різниці A і a називається **абсолютною похибкою** наближеного числа a і позначається $\Delta a = |A - a|$.

Під **граничною абсолютною похибкою** Δ_a наближеного числа розуміють будь-яке число, яке не менше абсолютної похибки цього числа. Звідси маємо $a - \Delta_a \ll A \ll a + \Delta_a$. Значення числа A записується так: $A = a \pm \Delta_a$.

Відносною похибкою δ_a наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки Δa цього числа до модуля відповідного точного числа A ($A \neq 0$) $\delta_a = \frac{\Delta a}{A}$. **Граничною відносною похибкою** δ_a наближеного числа a називають будь-яке число, яке не менше відносної похибки цього числа. Тобто, $\Delta_a = |A| \delta_a$.

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка цифра в його десятковому поданні, відмінна від нуля, і нуль, якщо він знаходиться між значущими цифрами.

Кажуть, що n перших значущих цифр наближеного числа є **правильними**, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці розряду, що виражається n -ною значущою цифрою, рахуючи зліва направо.

Округлення числа – це заміна його числом з меншою кількістю значущих цифр. Це число вибирають так, щоб похибка округлення була мінімальною.

Правило округлення. Щоб округлити число до n значущих цифр, відкидають усі наступні значущі цифри. При цьому, якщо:

- перша з відкинутих цифр менша 5, то остання залишена цифра залишається тією самою;
- перша з відкинутих цифр більша або рівна 5, то до останньої значущої цифри додається 1.

Завдання:

1. Задане число x (див. варіанти) округлити до 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 значущих цифр.
2. Задано точне число H і наближене h . Знайти абсолютну і відносну похибки наближеного числа h .
3. Порівняти якість вимірювань маси m_1 кг і m_2 кг.
4. Знайти суму наближених чисел: $u = x + a + b + c$. Визначити граничну абсолютну і відносну похибки результату.
5. Знайти добуток наближених чисел: $v = m_1 \times m_2$. Визначити граничну абсолютну і відносну похибки результату.

Додаткові завдання:

6. Обчислити значення функції Z при заданих значеннях параметрів a , b і c з точним врахуванням правильних цифр.
7. Методом меж визначити точність обчислення функції Z із врахуванням кількості правильних цифр у параметрах.
8. Розв'язати пряму задачу теорії похибок при обчисленні функції Z .
9. Розв'язати обернену задачу теорії похибок для функції Z при $\Delta Z = 1.0$.

Самостійна робота: написати реферат на задану тему.

- ✓ *Характеристики числових методів*
- ✓ *Оцінка похибки округлення в ході комп'ютерних обчислень*
- ✓ *Вимоги до постановки задач методів обчислень*
- ✓ *Призначення до застосування основних методів обчислень*
- ✓ *Переваги та недоліки методів обчислень*
- ✓ *Властивості збіжності та стійкості методів обчислень*

Варіанти

№	x	H, h	m ₁ , m ₂	Z	a, b, c
1	538.725	45.12, 45.129	12.134, 35.84	$\frac{c + \cos b}{2c - a^2} + \frac{\pi}{2}$	0.317, 3.27, 4.7561
2	936.162	38.8, 38.75	23.123, 6.7	$\frac{\ln(a+c)}{b-ac} + e^2$	0.0399, 4.83, 0.072
3	437.729	73.65, 73.8	76.85, 92.236	$\frac{\sqrt{a+b}}{3a-c} + \sin 45^\circ$	1.574, 1.40, 1.1236
4	345.179	54.45, 55	567.1, 25.45	$\frac{ab-4c}{\ln a+3b} + \operatorname{arctg} 1$	12.72, 0.34, 0.029
5	128.945	89.1, 89.35	43.5, 67.89	$\frac{a - \operatorname{tg} b}{13c+b} - \sqrt{5}$	3.49, 0.845, 0.0037
6	862.753	56, 55.75	76.15, 35.2	$\frac{ac+3b}{\sqrt{b-c}} + \sin \frac{\pi}{4}$	0.0976, 2.371, 1.1587
7	672.958	24.157, 24.16	85.567, 32.5	$\frac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}} - 2e$	82.3574, 34.12, 7.0049
8	238.151	67.01, 66	765.18, 56.5	$\frac{b + \cos c}{3b+2a} + \ln 2$	0.11587, 4.256, 3.0097
9	945.378	90.1, 91	765.3, 56.568	$\frac{a^2-b}{\sqrt{ab+c}} + 2 \cos \frac{\pi}{6}$	3.71452, 3.03, 0.765
10	781.294	78.12, 78.012	23.15, 55.15	$\frac{\ln a + 4b}{ab-c} - 7$	7.345, 0.31, 0.0987
11	195.432	45.87, 46	139.8, 14.0503	$\frac{b^2 + \ln c}{\sqrt{c-a}} + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$	0.038, 3.9353, 5.75
12	543.918	7, 6.412	5.7, 66.7	$\frac{2 \operatorname{tg}(a+b)}{a^2c+b} - 3\sqrt{3}$	0.2471, 0.09848, 37.84
13	980.123	94.35, 93	45.89, 954.1	$\frac{4\sqrt{a^2+c}}{ab-c} + \frac{\pi}{4}$	1.284, 4.009, 3.2175
14	704.137	15.26, 15.35	502.5, 502.567	$\frac{\sin(a-\sqrt{b})}{c+\ln b} - (\sqrt{2})^3$	18.407, 149.12, 2.3078
15	467.905	8.345, 9	67.34, 27.764	$\frac{\sqrt{a}}{bc-\ln b} - \ln 2$	74.079, 5.3091, 6.234

Тема 2. Числові методи лінійної алгебри

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ застосовувати числові методи лінійної алгебри; розв'язувати лінійні системи рівнянь;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 39-46, 116-121, 163-176; 2 с. 50-70; 3, с. 23-48; 4, с. 12-47; 5, с. 35-103; 6, с. 47-76; 7, с. 28-51

Лабораторна робота № 2

Розв'язування СЛАР методами Гауса, Жордана-Гауса

Теоретичні відомості

Числові методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна розбити на дві групи: прямі (точні) й ітераційні (наближені). **Точними** (прямими) методами називаються методи, які в припущенні, що обчислення ведуться точно (без округлень), приводять за скінчене число кроків до точних значень. До прямих методів належать, наприклад, метод Гауса, метод Холецкого та ін. **Наближеними** (ітераційними) методами називаються такі методи, які навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок тільки із зазначеною точністю. Точний розв'язок системи в цьому випадку може бути отриманий теоретично як результат нескінченного (ітераційного) процесу. До наближених методів відносяться, наприклад, метод ітерацій, метод Зейделя та ін.

Найвідомішим із прямих методів розв'язання СЛАР є **метод виключення Гауса**, ідея якого полягає в послідовному виключенні невідомих із рівнянь. Спочатку задана система зводиться до системи трикутного вигляду (прямий хід), а потім невідомі визначаються за простими формулами (зворотний хід).

Завдання:

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти I) методом Гауса з вибором головного елемента або методом Жордана-Гауса.

Додаткові завдання:

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти II) методом Гауса з вибором головного елемента або методом Жордана-Гауса.
3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею (див. варіанти III) методом прогонки.

Лабораторна робота № 3

Ітераційні методи розв'язування СЛАР

Теоретичні відомості

Для застосування методу простої ітерації для розв'язання СЛАР необхідно подати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Щоб ітераційний процес був збіжним, достатньо виконання однієї з таких умов:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \text{ або } \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \text{ або } \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} \neq 1.$$

Завдання:

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти I) методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

Додаткові завдання:

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти II) методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

Лабораторна робота № 4

Розв'язування СЛАР методами факторизації матриць

Теоретичні відомості

У методі LU-розкладання матриця A системи спочатку подається у вигляді LU-розкладання, тобто у вигляді добутку двох матриць:

$$A = L U,$$

де L – нижньотрикутна матриця; U – верхньотрикутна матриця з одиницями на діагоналі.

Тоді розв'язання СЛАР проводиться в два етапи: спочатку розв'язується система:

$$L y = b,$$

а потім вже знаходиться шуканий розв'язок шляхом розв'язання системи:

$$U x = y.$$

Оскільки матриці L , U – трикутні, то знаходження розв'язків вищевказаних систем проводиться за простими формулами, аналогічними формулам зворотного ходу методу Гауса.

Для симетричної знакопепвної матриці A розкладання можна записати у вигляді:

$$A = U^T D U,$$

де U^T – нижньотрикутна матриця, транспонована до U ; D – діагональна. Застосування такого розкладання для розв'язання СЛАР має назву методу Холецького або методу квадратних коренів.

Завдання:

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти I) методом LU-розкладання.
2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь із симетричною матрицею (див. варіанти IV) методом квадратних коренів.

Додаткові завдання:

3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ (див. варіанти II) методом LU-розкладання.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи розв'язування СЛАР.

Варіанти I

1	$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & -1 & 11 \\ 3 & -11 & -8 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -19 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 5,6 & 2,7 & -1,7 \\ 3,9 & -9,6 & -6,7 \\ 0,8 & 1,3 & 3,7 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ -2,4 \\ 1,2 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 17 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -7 \\ 7 & -8 & -7 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -17 \\ -25 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -3 \\ 8 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 6 & -58 & -21 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \\ 5 & 7 & 12 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 20 \\ -14 \\ -1 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 19 & -22 & -15 \\ 0 & -4 & -11 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 9 \\ 4 & -2 & -3 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \\ -17 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 13 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 10 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -61 \\ 13 \\ -24 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ 4 & -4 & -9 \\ 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 5 \\ 11 & 10 & -5 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -22 \\ -52 \\ 11 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 11 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 31 \\ -1 \\ 33 \end{pmatrix}$

Варіанти II

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 47 & 7 & -7 & -2 \\ 39 & 41 & 5 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 11 \\ 45 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & -7 & -1 \\ 7 & 0 & -13 & -5 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 50 \\ 24 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 14 & -23 & 3 & -2 \\ 0 & 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 11 & -38 & 1 & -5 \\ 3 & -10 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ -38 \\ -6 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 6 & -19 & 10 & -1 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -12 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -14 \\ 38 \\ -5 \\ -23 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 2 & -16 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & -6 & -3 \\ 8 & -3 & 6 & 3 \\ 2 & -7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 32 \\ -20 \\ 63 \\ 29 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 6 & -5 & 11 & 4 \\ 3 & -9 & 17 & 6 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -10 \\ 36 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 6 & -1 \\ 5 & -27 & 2 & -3 \\ 7 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & -7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 25 \\ -41 \\ 66 \\ 28 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -10 & 13 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -12 & -5 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} -42 \\ 54 \\ 22 \\ -84 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 17 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 9 & -19 & 4 & -1 \\ 1 & -15 & -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -7 \\ -47 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 21 & -19 & 1 & -1 \\ 13 & 67 & 1 & 3 \\ 11 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 100 \\ 16 \\ 24 \\ -4 \end{pmatrix}$

Варіанти III

1.	$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 &= 7\end{aligned}$	2.	$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12 \\ x_3 - x_4 &= -4\end{aligned}$
3.	$\begin{aligned}-x_1 + x_2 &= 1/6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 11/12 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 43/60 \\ 2x_3 - x_4 &= 3/10\end{aligned}$	4.	$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_3 + x_4 &= 5\end{aligned}$
5.	$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 5\end{aligned}$	6.	$\begin{aligned}3x_1 - x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 11 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 &= -9 \\ -x_3 + 2x_4 &= 4\end{aligned}$
7.	$\begin{aligned}-2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$	8.	$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_3 + x_4 &= 5\end{aligned}$
9.	$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 &= 1/4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3/2 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= -5/4 \\ x_3 - 2x_4 &= 11/4\end{aligned}$	10.	$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 5/2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7/2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_3 - x_4 &= 1\end{aligned}$
11.	$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= 7\end{aligned}$	12.	$\begin{aligned}-x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1/2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 &= -1/2 \\ x_3 - 2x_4 &= 1\end{aligned}$
13.	$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= 6 \\ x_3 + x_4 &= 1\end{aligned}$	14.	$\begin{aligned}3x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3/4 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= 3/4\end{aligned}$
15.	$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= -4 \\ 2x_3 - x_4 &= 1\end{aligned}$	16.	$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1/2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 - x_4 &= -1\end{aligned}$

Варіанти IV

№	А				В
1	2,75	-0,33	1,14	7,44	-5,6033
	-0,33	7,30	-4,70	-3,54	-8,1652
	1,14	-4,70	7,49	-5,36	6,7613
	7,44	-3,54	-5,36	-8,28	-5,2470
2	1,76	-0,88	-4,25	-4,63	6,1530
	-0,88	-3,79	7,16	6,24	-8,2580
	-4,25	7,16	7,34	-3,13	-4,4608
	-4,63	6,24	-3,13	-8,45	-5,1844
3	-4,36	1,83	6,70	-4,28	-5,6981
	1,83	2,39	-4,63	-3,81	2,3190
	6,70	-4,63	-5,13	-0,30	2,5328
	-4,28	-3,81	-0,30	-0,27	-0,5553
4	6,64	-8,87	-4,18	-4,38	1,8438
	-8,87	6,10	-4,22	-4,51	-8,7128
	-4,18	-4,22	1,79	2,69	-4,7940
	-4,38	-4,51	2,69	-4,74	-5,9102
5	2,24	1,57	1,65	6,81	-4,4131
	1,57	-0,33	6,89	2,76	-0,5109
	1,65	6,89	-8,72	-3,74	-3,7101
	6,81	2,76	-3,74	7,45	-3,1816
6	-0,87	2,75	7,42	-3,47	-8,6363
	2,75	-8,86	-0,87	7,42	-4,2410
	7,42	-0,87	2,90	-3,39	-0,8095
	-3,47	7,42	-3,39	-8,47	-4,3327
7	2,21	-3,59	2,58	-5,29	-3,7721
	-3,59	-0,35	-8,75	1,29	1,4428
	2,58	-8,75	-5,87	2,23	-8,4050
	-5,29	1,29	2,23	7,55	7,3204

8	-5,31	-3,75	6,83	1,84	-3,5615
	-3,75	-5,41	2,73	-8,76	-5,1361
	6,83	2,73	-5,87	6,20	-8,1271
	1,84	-8,76	6,20	7,52	-4,3016
9	7,40	2,49	-4,24	7,79	-3,1495
	2,49	-4,61	-5,59	-5,57	2,5370
	-4,24	-5,59	1,12	7,37	7,8646
	7,79	-5,57	7,37	-4,61	-8,5660
10	-5,52	-5,70	2,65	-0,17	-5,6951
	-5,70	-4,19	6,49	1,43	-8,1595
	2,65	6,49	1,75	6,40	-4,9810
	-0,17	1,43	6,40	-5,71	-8,4580
11	-3,85	7,28	7,85	7,69	-5,5200
	7,28	-5,18	-0,39	-4,65	7,2303
	7,85	-0,39	-5,22	-0,40	-0,7021
	7,69	-4,65	-0,40	-0,52	-4,5808
12	7,13	6,31	6,85	1,28	6,1954
	6,31	1,67	7,78	2,39	6,2841
	6,85	7,78	-0,69	-0,88	-0,1847
	1,28	2,39	-0,88	-3,56	2,3309
13	1,67	-8,88	2,19	7,62	-4,1891
	-8,88	-0,38	-8,58	-3,33	6,5570
	2,19	-8,58	-8,17	2,70	-3,7097
	7,62	-3,33	2,70	-3,12	-0,4673
14	-4,56	-4,32	-8,11	2,17	6,6232
	-4,32	2,51	-5,41	-3,15	-8,5834
	-8,11	-5,41	1,29	-8,22	-8,2313
	2,17	-3,15	-8,22	-4,80	6,3750
15	-8,32	7,75	2,33	6,67	-0,1313
	7,75	-8,70	-3,83	-3,17	7,9544
	2,33	-3,83	-4,10	1,48	-5,3280
	6,67	-3,17	1,48	7,33	7,7302

Тема 3. Числові методи нелінійної алгебри

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ застосовувати числові методи нелінійної алгебри; розв'язувати нелінійні рівняння і системи рівнянь;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 21-38, 109-115, 159-162; 2, с. 29-45; 3, с. 48-68; 4, с. 60-80; 6, с. 14-46; 7, с. 52-94

Лабораторна робота № 5-6

Розв'язування нелінійних рівнянь з однією змінною

Теоретичні відомості

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$, то розв'язання рівняння $f(x) = 0$ зводиться до відшукування множини значень $x \in [a, b]$, при яких це рівняння перетворюється у тотожність. Знаходження наближених коренів рівняння $f(x) = 0$ складається із двох етапів:

- відокремлення коренів, тобто знаходження досить малих відрізків, на кожному з яких міститься один і тільки один корінь;
- уточнення кореня із наперед заданою точністю ε .

Перший етап передбачає відділення коренів, тобто встановлення відрізків, що мають лише один корінь. Це можна зробити графічно, побудувавши графік функції $f(x)$ і визначивши проміжки, де цей графік перетинає вісь OX . Аналітичний метод відокремлення коренів передбачає знаходження проміжків монотонності функції $f(x)$ і визначення того, чи змінює знак функція на кінцях проміжків монотонності. Якщо змінює – на вказаному проміжку є корінь, якщо ні – немає кореня.

До методів уточнення кореня із заданою точністю належать: метод поділу відрізка навпіл (метод дихотомії), метод хорд (метод січних), метод дотичних (метод Ньютона), метод ітерацій тощо.

За методом поділу навпіл наближення до кореня визначається як середня точка інтервалу $x = (b - a) / 2$. В залежності від знака функції в точці x інтервал пошуку звужується вдвічі: до $[a, x]$ або

$[x, b]$. Процес продовжується доти, доки не буде виконана умова збіжності, а саме: інтервал стане меншим від наперед заданого числа ε .

Метод хорд відрізняється від методу поділу навпіл тим, що нове наближення до кореня x визначається не як середина інтервалу пошуку, а як точка перетину хорди з віссю абсцис:

$$x = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

У методі дотичних дуга кривої $y = f(x)$ замінюється дотичною до цієї кривої, а нове наближення до кореня x визначається за формулою:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Завдання:

1. Знайти корінь нелінійного рівняння на заданому проміжку (див. варіанти I) одним із методів: методом поділу відрізка навпіл (методом дихотомії), методом хорд (методом січних), методом дотичних (методом Ньютона) з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.
2. Відокремити корені нелінійного рівняння (див. варіанти II) аналітичним методом та уточнити їх методом ітерацій.
3. Відокремити корені нелінійного рівняння (див. варіанти III) графічним методом та уточнити їх за допомогою MathCAD або Excel.

Додаткові завдання:

4. Розв'язати систему нелінійних рівнянь (див. варіанти IV 1)) методом ітерацій.
5. Розв'язати систему нелінійних рівнянь (див. варіанти IV 2)) методом Ньютона.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи розв'язування нелінійних рівнянь і систем нелінійних рівнянь.

Варіанти I

1. $x^3 + x^2 + 4 = 0, x \in [-2; -1]$	2. $\cos x + \frac{1}{x+2} = 0, x \in [1; 2]$
--	---

3. $e^{-x} + \ln x = 0, x \in [1;2]$	4. $x^3 + x^2 + 3 = 0, x \in [-2;-1]$
5. $\sin x - \frac{1}{x} = 0, x \in [1;1,5]$	6. $x^2 - \cos x = 0, x \in [0,7;0,8]$
7. $x^3 - 3x - 1 = 0, x \in [-2;-1]$	8. $e^{-x} + \ln x = 0, x \in [1;2]$
9. $x + \frac{1}{x^2 + 1} = 0, x \in [-1;0]$	10. $\ln x + x = 0, x \in [0,4;1]$
11. $\cos(x-1) - 3x + 2 = 0,$ $x \in [1;1,2]$	12. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0, x \in [-3;-2,2]$
13. $x^3 + x^2 + 2 = 0, x \in [-2;-1]$	14. $x^3 + x + 3 = 0, x \in [-2;-1]$
15. $x^3 - x^2 - 2 = 0, x \in [1;2]$	16. $\lg x + x = 0, x \in [0;1]$

Варіанти II

1. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	2. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$
3. $x^3 - 12x + 6 = 0$	4. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$
5. $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	6. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$
7. $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$	8. $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$
9. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$	10. $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
11. $x^3 - 12x - 5 = 0$	12. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$
13. $x^3 - 3x^2 + 1,5 = 0$	14. $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$
15. $2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	16. $x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

Варіанти III

1. $x - \sin x = 0,25$	2. $\operatorname{tg}(0,58x + 0,1) = x^2$
------------------------	---

3. $tg(0,4x + 0,4) = x^2$	4. $\cos(0,387x) = \sqrt{x}$
5. $\lg x = \frac{7}{2x + 6}$	6. $tg(0,5x + 0,2) = x^2$
7. $3x - \cos x = 1$	8. $x + \lg x = 0,5$
9. $tg(0,5x + 0,1) = x^2$	10. $4 \sin x = -x^2$
11. $ctg 1,05x = x^2$	12. $tg(0,4x + 0,3) = x^2$
13. $x \lg x = 1,2$	14. $\sin 10x = 1,8x^2$
15. $ctgx = \frac{x}{4}$	16. $tg(0,3x + 0,4) = x^2$

Варіанти IV

1.	1) $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1.2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} tg(xy + 0.4) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, x > 0, y > 0 \end{cases}$
2.	1) $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0 \end{cases}$
3.	1) $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0.7 \end{cases}$	2) $\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
4.	1) $\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y - 0.5) = 1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
5.	1) $\begin{cases} \sin(x+0.5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$	2) $\begin{cases} tg(xy + 0.3) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
6.	1) $\begin{cases} \cos(x+0.5) + y = 0.8 \\ \sin y - 2x = 1.6 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.3x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
7.	1) $\begin{cases} \sin(x-1) = 1.3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0.8 \end{cases}$	2) $\begin{cases} tg xy = x^2 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

8.	1) $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0.4 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.5x = 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
9.	1) $\begin{cases} \cos(x+0.5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2 \\ 0.7x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
10.	1) $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1.5 \\ x + \cos(y-2) = 0.5 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.2x = 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
11.	1) $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1.2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.2) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
12.	1) $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0.5 \\ y - \cos = -3 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1.5x - 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
13.	1) $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0.7 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.4) = x^2 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
14.	1) $\begin{cases} \cos y + x = 1.5 \\ 2y - \sin(x-0.5) = 1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) = 1.2x - 0.1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
15.	1) $\begin{cases} \sin(y+0.5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy+0.1) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
16.	1) $\begin{cases} \cos(y+0.5) + x = 0.8 \\ \sin x - 2y = 1.6 \end{cases}$	2) $\begin{cases} \sin(x+y) - 1.4x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Тема 4. Числові методи розв'язування задач на власні значення

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ застосовувати числові методи лінійної алгебри; знаходити власні значення;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 47-54, 122-127, 176; 2, с. 71-88; 3, с. 68-74; 4, с. 48-59

Лабораторна робота № 7

Розв'язування задач на власні значення

Теоретичні відомості

Власним значенням (власним числом) дійсної матриці A розмірності $n \times n$ називається таке число λ (дійсне або комплексне), для якого знайдеться дійсний ненульовий вектор x розмірності n , що виконується умова:

$$Ax = \lambda x.$$

При цьому вектор x називається **власним вектором** матриці A , що відповідає власному значенню λ .

Матриця розмірності $n \times n$ має n власних чисел, які можуть бути кратними.

Повна проблема обчислення власних значень і власних векторів полягає в знаходженні всіх власних значень і відповідних власних векторів квадратної матриці, **часткова проблема** – полягає в знаходженні одного власного значення, зазвичай, максимального за модулем. Такі задачі нерідко виникають при розв'язанні інженерних задач. Наприклад, при динамічному аналізі механічних систем власні значення відповідають власним частотним коливанням, а власні вектори характеризують моди (просторовий напрям і амплітуди) цих коливань. При розрахунку конструкцій власні значення дозволяють визначити критичні навантаження, перевищення яких призводить до втрати стійкості (руйнування).

Властивості власних значень матриці.

Нехай λ_i , $i=1, n$, – власні значення матриці A . Тоді:

1) вони задовольняють характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0;$$

2) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$;

3) якщо матриця A є виродженою (особливою або сингулярною), тобто $\det(A) = 0$, то хоча б одне її власне значення дорівнює нулю;

4) власні значення оберненої матриці A^{-1} дорівнюють $\frac{1}{\lambda_i}$, $i = \overline{1, n}$

5) власні значення матриці A^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) дорівнюють λ_i^k , $i = \overline{1, n}$;

6) усі n власних значень дійсної симетричної матриці розміру $n \times n$ – дійсні.

Добуток власного вектора матриці на скаляр є власним вектором тієї ж матриці. Як правило, власні вектори нормалізують, поділивши їх на норму вектора або на найбільший елемент.

Числові методи обчислення власних значень і власних векторів матриці поділяються на дві групи: ітераційні та методи перетворення подібності.

Ітераційні методи обчислення власних значень і власних векторів засновані на багатократному використанні ітераційного алгоритму, що наближає власний вектор, який одержується в кожному циклі, до точного розв'язку. Ці методи застосовують до часткової проблеми, коли треба знайти тільки окреме власне значення – максимальне за модулем.

Алгоритм методу ітерацій такий:

1) задається початковий вектор z^0 (початкове наближення для власного вектора матриці A , що відповідає найбільшому за модулем власному значенню $\lambda_{\max}$ матриці A);

2) k -та ітерація ($k = 0, 1, 2, \dots$). Проводиться нормування вектора z^k , а саме обчислюється число $\lambda_{\max}^k$, вектор y^k і наступний вектор z^{k+1} :

$$|\lambda_{\max}^k| = \max_{i=1, n} |z_i^k|, \quad y^k = \frac{z^k}{\lambda_{\max}^k}, \quad z^{k+1} = Ay^k$$

3) обчислення припиняються, коли виконується умова $|\lambda_{\max}^{k+1} - \lambda_{\max}^k| \ll \varepsilon$, де ε – задана точність обчислень.

Методи перетворення подібності засновані на використанні властивості подібних матриць, що мають однакові власні значення.

Матриця A називається **ортогональною**, якщо $A^{-1} = A^T$, де T – знак транспонування.

Матриці A і B називаються **подібними**, якщо існує така невинроджена матриця P , що має місце співвідношення

$$B = P^{-1} A P.$$

Властивість подібних матриць. Якщо дві матриці подібні, то вони мають однакові власні значення.

Для реалізації методу обертань до початкової матриці багатократно застосовується перетворення подібності. На кожній ітерації для вибраного при розв'язуванні задачі найбільшого за модулем недіагонального елемента будується ортогональна матриця – матриця обертання (матриця Якобі), яка приводить цей елемент до нуля. В результаті кількаразового застосування

перетворення подібності до початкової матриці отримуємо матрицю, діагональні елементи якої є шуканими власними значеннями.

Завдання:

1. Визначити власні значення та власні вектори матриці (див. варіанти) методом безпосереднього розгортання.
2. Знайти максимальне за модулем власне значення та відповідний йому власний вектор матриці методом ітерацій.
3. Знайти усі власні значення та власні вектори матриці методом обертань.

Додаткові завдання:

4. Знайти усі власні значення та власні вектори матриці методом ітерацій.
5. Знайти власні значення матриці методом QR-розкладання.
6. Знайти власні значення матриці A за допомогою QR-алгоритму і власні вектори методом обернених ітерацій.

Самостійна робота: написати реферат на задану тему.

- ✓ *Методи відображення-відбиття у проблемі власних значень матриць*
- ✓ *Методи перетворення подібності для обчислення власних значень і власних векторів*
- ✓ *Ітераційно-степеневий метод у частковій проблемі власних значень*

Варіанти

1.	$\begin{pmatrix} 2,1 & 1 & 1,1 \\ 1 & 2,6 & 1,1 \\ 1,1 & 1,1 & 3,1 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 2,4 & 1 & 1,4 \\ 1 & 2,3 & 1,4 \\ 1,4 & 1,4 & 3,4 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 1,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 1,3 & 0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 1,3 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 1,6 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 1,6 & 0,3 \\ 0,8 & 0,3 & 1,6 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2,2 & 1 & 2,2 \\ 1 & 2,7 & 1,2 \\ 1,2 & 1,2 & 3,2 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 2,5 & 1 & 1,5 \\ 1 & 1,3 & 1,5 \\ 1,5 & 1,5 & 1,5 \end{pmatrix}$	7.	$\begin{pmatrix} 1,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 1,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 1,4 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 1,7 & 0,8 & 0,9 \\ 0,8 & 0,7 & 0,3 \\ 0,9 & 0,3 & 1,7 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 2,3 & 1 & 1,3 \\ 1 & 2,8 & 1,3 \\ 1,3 & 1,3 & 3,3 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 2,1 & 1,2 & 1,3 \\ 1,2 & 3,1 & 2,4 \\ 1,3 & 2,4 & 4,1 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 1,4 & 1 & 1,2 \\ 1 & 2,1 & 2 \\ 1,2 & 2 & 2,5 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 1,3 & 1,6 & 2,1 \\ 1,6 & 0 & 3,3 \\ 2,1 & 3,3 & 2,1 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 0,3 & 2,1 & 1,3 \\ 2,1 & 0,5 & 1,2 \\ 1,3 & 1,2 & 0,7 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 3,2 & 4,1 & 2,5 \\ 4,1 & -2,3 & 1,1 \\ 2,5 & 1,1 & 2,5 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 4,1 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 2,2 & 2,4 \\ 1,2 & 2,4 & 1,4 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 1,0 & 2,1 & 3,2 \\ 2,1 & 2,0 & 3,3 \\ 3,2 & 3,3 & 3,0 \end{pmatrix}$

Модуль 2. Числові методи роботи з табличними даними. Розв'язування крайових задач

Тема 5. Апроксимація функцій

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ застосовувати числові методи наближення функцій; будувати інтерполяційні многочлени та апроксимаційні формули;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 55-65, 128-132, 177-186; 2, с. 112-142; 3, с. 74-98; 4, с. 81-111; 5, с. 196-250; 6, с. 129-175

Лабораторна робота № 8

Побудова апроксимаційних формул

Теоретичні відомості

В ході проведення експериментів часто виникає необхідність вивчити (дослідити, визначити) функціональну залежність $y = f(x)$, отриману як результат проведення низки вимірювань величин x та y . Нехай одержано таблицю значень:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Якщо аналітично вираз функції $f(x)$ невідомий або досить складний, то виникає важлива практична задача: знайти емпіричну формулу $y = f(x)$, значення якої при $x = x_i$ якомога менше відрізнялись би від експериментальних значень y_i .

Процес апроксимації таблично заданої функції складається з двох етапів:

- 1) з'ясування або задання загального вигляду емпіричної формули;
- 2) визначення найкращих її параметрів (побудова апроксимаційної формули).

Найчастіше застосовують такі емпіричні формули:

$$1) y = ax + b;$$

$$3) y = ax^m;$$

$$5) y = 1/(ax + b);$$

$$7) y = a/x + b;$$

$$2) y = ax^2 + bx + c;$$

$$4) y = a e^{mx};$$

$$6) y = a \ln x + b;$$

$$8) y = x/(ax + b),$$

де a, b, c, m – параметри.

Найвідомішим і ефективним методом розв'язання задачі апроксимації функцій є **метод найменших квадратів** (МНК), призначений безпосередньо для знаходження параметрів апроксимуючої функції, загальний вигляд якої вже обрано.

Нехай відомий вигляд емпіричної функції $y = f(x, a_k)$, де a_k – шукані параметри. Як міру відхилення функції $y = f(x, a_k)$ від вхідних даних (x_i, y_i) прийемо функцію:

$$S(a_k) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_k) - y_i)^2,$$

яка називається **квадратичним відхиленням**.

Для побудови апроксимуючої функції потрібно підібрати коефіцієнти a_k так, щоб величина $S(a_k)$ була мінімальною. З необхідних умов екстремуму функції кількох змінних одержуємо систему для визначення коефіцієнтів a_k : $\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0$.

Завдання:

1. Побудувати лінійну формулу $y = ax + b$, що апроксимує задані табличні дані (див. варіанти І), і визначити її параметри a і b методом найменших квадратів. Обчислити похибку апроксимації. Зобразити графічно задані табличні дані і знайдену апроксимаційну формулу.
2. Побудувати квадратичну формулу $y = ax^2 + bx + c$, що апроксимує задані табличні дані (див. варіанти І), і визначити її параметри a, b і c методом найменших квадратів. Обчислити похибку апроксимації. Зобразити графічно задані табличні дані і знайдену апроксимаційну формулу.

Додаткові завдання:

3. Для заданих табличних даних (див. варіанти І) визначити вид емпіричної залежності (степенева, показникова, логарифмічна тощо); апроксимувати функцію методом найменших квадратів та відшукати числові значення її параметрів.

Лабораторна робота № 9

Побудова інтерполяційних многочленів Лагранжа

Теоретичні відомості

Для заданих табличних даних (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ інтерполяційний многочлен Лагранжа має вигляд:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i$$

Зокрема, при $n = 1$ (лінійна інтерполяція), маємо:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1,$$

при $n = 2$ (квадратична інтерполяція):

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Завдання:

1. Для заданих табличних даних (див. варіанти II) побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа. Оцінити похибку інтерполяції.

Додаткові завдання:

2. Записати інтерполяційний многочлен Лагранжа для заданих табличних даних (див. варіанти I), обчислити одне значення заданої функції для проміжного значення аргументу (задати самостійно) за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа та оцінити похибку інтерполяції.

Лабораторна робота № 10

Побудова інтерполяційних многочленів Ньютона

Теоретичні відомості

Нехай для функції $y = f(x)$ задані значення $y_i = f(x_i)$ для рівновіддалених значень змінної x : $x_i = x_0 + i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, де h – крок інтерполяції.

Перша інтерполяційна формула Ньютона має вигляд:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Першу інтерполяційну формулу Ньютона зручно використовувати для інтерполювання на початку відрізка інтерполяції $[a, b]$. Для інтерполювання в кінці таблиці використовують другу інтерполяційну формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

При $n = 1$ (лінійна інтерполяція), маємо:

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \text{ або}$$

$$P_1(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) = y_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n);$$

при $n = 2$ (квадратична інтерполяція):

$$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \text{ або}$$

$$P_1(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1})$$

Завдання:

1. Для заданих табличних даних (див. варіанти III) побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона. Оцінити похибку інтерполяції.

Додаткові завдання:

2. Для заданих табличних даних (див. варіанти II) побудувати квадратичний сплайн. Побудувати графік отриманої сплайн-функції.
3. Для заданих табличних даних (див. варіанти II) побудувати кубічний сплайн. Побудувати графік отриманої сплайн-функції.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи апроксимації (інтерполяції) табличних функцій.

Варіанти I

варіант	x_i	y_i	варіант	x_i	y_i	варіант	x_i	y_i
1	0	0,2	2	0	1,8	3	6,2	6,4
	1	0,6		1	1,9		2,6	2,5
	2	1,2		2	2,3		0	0
	3	1,4		3	2,5		0,3	0,4
	4	1,6		4	2,8		1,4	1,2
	5	1,7		5	3,1		6,5	6,8
4			5	6	2,5	6		
	-2	3,1		0	3,5		-3	3,1
	-1	2,8		1	3,2		-1	3,6
	0	2,5		2	2,9		1	4,2
	1	2,0		3	2,1		3	4,8
	2	1,7		4	3,0		6	5,6
7	3	2,2		5	3,2		9	6,4
			8	6	3,5	9		
	-6	2,5		-2	7,7		-2	-0,3
	-4	1,2		-1	1,3		-1	0,5
	-3	0,4		0	0		0	1,5
	-1	-0,5		1	1,3		1	0,5
10	0	-1,3		1,5	4,6		2	0,3
	3	1,1		2	7,7		3	-0,2
			11				4	-1,2
	-6	-1,9		-3	1,7	12	-6	-2,0
	-2	0,6		-1	3,3		-4	-1,0
	0	2,0		0	5,1		-1	-2,3
	1	2,7		1	6,6		1	-3,1
13	3	4,1		3	5,6		2	-3,5
	7	6,7		4	4,0		5	-4,7
			14	6	3,5	15		
	0	0,5		-2	0,3		-4	-2,6
	1	0,8		-1	-0,5		-2	-1,7
	2	1,3		0	-1,5		-1	-0,9
	3	1,7		1	-0,5		1	0,9
	4	1,9		2	-0,1		2	1,7
13	5	2,5		3	0,2		4	2,6
				4	1,2			

Варіанти II

Варіант	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2
1	-1	0	3	-3	5	2
2	2	3	5	4	1	7
3	0	2	3	-1	-4	2
4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	-1	1,5	3	4	-7	1
11	2	4	7	-1	-6	3
12	-9	-7	-4	3	-3	4
13	0	1	4	7	-1	8
14	-8	-5	0	9	-2	4
15	-7	-5	-4	4	-4	5

Варіанти III

Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4	
x	$\cos x$	x	$1/x + \lg x + x^2$	x	$\ln 2,3x - 0,8/x$	x	$2,1 \sin 0,37x$
0,05	0,99375	1,3	2,5731	1,2	0,3486	-1,0	-0,7594
0,10	0,99500	1,7	3,7086	1,9	1,0537	-0,8	-0,6127
0,15	0,99877	2,1	5,2084	2,6	1,4807	-0,6	-0,4624
0,20	0,98007	2,5	7,0479	3,3	1,7844	-0,4	-0,3097
0,25	0,96891	2,9	9,2172	4,0	2,0192	-0,2	-0,1553
0,30	0,95534	3,3	11,7115	4,7	2,2103	0,0	0,0000
0,35	0,93937	3,7	14,5285	5,4	2,3712	0,2	0,1553
0,40	0,92106	4,1	17,6667	6,1	2,5101	0,4	0,3097

Варіант 5		Варіант 6		Варіант 7	
x	$x - \cos(0,4 - 0,7x)$	x	$y = \sin x/x$	x	$y = sh x$
0,6	-0,3998	0,0	1,0000	2,0	3,6267
0,9	-0,0737	0,2	0,9934	2,2	4,4571
1,2	0,2952	0,4	0,9735	2,4	5,4662
1,5	0,7039	0,6	0,9411	2,6	6,6947
1,8	1,1476	0,8	0,8967	2,8	8,1919
2,1	1,6199	1,0	0,8415	3,0	10,0179
2,4	2,1133	1,2	0,7767	3,2	12,2459
2,7	2,6193	1,4	0,7039	3,4	14,9654

Варіант 8		Варіант 9		Варіант 10		Варіант 11	
x	$\cos x$	x	$1/x + \lg x + x^2$	x	$\ln 2,3x - 0,8/x$	x	$2,1 \sin 0,37x$
0,20	0,98007	2,5	7,0479	3,3	1,7844	-0,4	-0,3097
0,25	0,96891	2,9	9,2172	4,0	2,0192	-0,2	-0,1553
0,30	0,95534	3,3	11,7115	4,7	2,2103	0,0	0,0000
0,35	0,93937	3,7	14,5285	5,4	2,3712	0,2	0,1553
0,40	0,92106	4,1	17,6667	6,1	2,5101	0,4	0,3097
0,45	0,90045	4,5	21,1254	6,8	2,6322	0,6	0,4624
0,50	0,87758	4,9	24,9043	7,5	2,7411	0,8	0,6127
0,55	0,85252	5,3	29,0030	8,2	2,8394	1,0	0,7594

Тема 6. Числове диференціювання та інтегрування функцій

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ знати методи числового диференціювання та інтегрування функцій; будувати формули числового диференціювання і інтегрування;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 66-78, 133-137, 187-191; 2, с. 143-158; 3, с. 99-110; 4, с. 112-145; 5, с. 317-360; 6, с. 176-215; 7, с. 95-125

Лабораторна робота № 11

Побудова формул числового диференціювання.

Побудова квадратурних формул

Теоретичні відомості

Задача **числового диференціювання** полягає у знаходженні значень похідних функції $y = f(x)$ в заданих точках у випадках, коли аналітичний вид функції $f(x)$ невідомий (задана неявно), дуже складний або функція $f(x)$ задана таблицею. Формули числового диференціювання будують на основі інтерполяційного багаточлена, яким апроксимують задану функцію.

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею своїх значень $y_i = f(x_i)$ у рівновіддалених вузлах $x_i = x_0 + i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Найзручнішим

інтерполяційним многочленом для числового диференціювання є поліном Ньютона. Отримані на його основі формули мають вигляд:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n y_0 \right)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots + \frac{(-1)^n 2S_{n-1}^{n-2}}{n!} \Delta^n y_0 \right)$$

Задача **числового інтегрування** полягає в обчисленні визначеного інтеграла $I = \int_a^b f(x) dx$ у випадках, коли аналітичне обчислення неможливе або дуже складне. Методи числового обчислення інтеграла засновані на тому, що в якості наближеного значення інтеграла береться значення інтеграла від інтерполюючої для $f(x)$ функції, побудованої по точках розбиття відрізка $[a, b]$.

Найбільш відомими та достатньо ефективними методами розв'язання задачі числового інтегрування функцій є методи лівих, правих, середніх прямокутників, метод трапецій і метод Сімпсона.

Формули числового інтегрування (квадратурні формули) лівих, правих, середніх прямокутників та трапецій засновані на кусково-лінійній інтерполяції заданої функції і є сумою площ відповідних прямокутників чи трапецій, ширина яких (h) – це крок між вузлами інтерполювання, а висота – визначається значеннями заданої функції y_i у вузлах інтерполювання:

$$I = h \sum_{i=1}^n y_{i-1}, \quad I = h \sum_{i=1}^n y_i, \quad I = h \sum_{i=1}^n y_{i-1/2},$$

$$I = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Квадратурні формули парабол (Сімпсона) засновані на кусково-квадратичній інтерполяції заданої функції параболоми, сума площ яких дорівнює (n – має бути парним):

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})) =$$

$$= \frac{h}{3} \left(y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} y_{2i} + 4 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} y_{2i+1} \right)$$

Завдання:

1. Для заданої табличної функції (див. варіанти I) обчислити першу та другу похідну у заданій вузловій точці z_1 ($n = 5$). Оцінити похибку диференціювання.
2. Для заданої функції (див. варіанти II) обчислити визначений інтеграл на заданому проміжку з використанням квадратурних формул прямокутників (лівих, правих чи середніх – на вибір), трапецій та Сімпсона. Оцінити похибку інтегрування.

Додаткові завдання:

3. Для заданої табличної функції (див. варіанти I) обчислити першу та другу похідну у заданій проміжній точці z_2 ($n = 5$). Оцінити похибку диференціювання.
4. Обчислити точне значення подвійного визначеного інтегралу функції (див. варіанти III) і розрахувати наближене його значення за кубатурною формулою Сімпсона. Обчислити похибку інтегрування.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи числового диференціювання та інтегрування табличних функцій.

Варіанти I

Таблиця 1

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6
$y(x)$	3.526	3.782	3.945	4.043	4.104	4.155	4.222	4.331	4.507	4.775	5.159	5.683

Таблиця 2

x	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
$y(x)$	10.517	10.193	9.807	9.387	8.977	8.637	8.442	8.482	8.802	9.701	11.132	13.302

Таблиця 3

x	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
$y(x)$	0.861	0.819	0.779	0.741	0.705	0.670	0.638	0.607	0.577	0.548	0.497	0.472

Таблиця 4

x	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.56
$y(x)$	20.19	19.61	18.94	18.17	17.30	16.31	15.20	13.95	12.55	10.99	9.26	7.35

№	№ таблиці	z_1	z_2	№	№ таблиці	z_1	z_2
1	1	2.6	3.1	2	1	3.0	3.9
3	1	3.4	2.5	4	1	2.4	2.7
5	1	4.0	2.9	6	1	2.8	3.1
7	1	3.2	3.7	8	1	3.6	3.3
9	1	3.8	3.5	10	2	5.5	2.1
11	2	3.0	1.7	12	2	5.0	3.2
13	3	0.35	0.19	14	3	0.30	0.44
15	4	0.48	0.512	16	4	0.45	0.525

Варіанти II

	$f(x)$	a	b	N	9	$x^2 \cos(x/4)$	2	3,2	12	
1	$0,37e^{\sin x}$	0	1	10	10	$\frac{\sin(0,2x-3)}{x^2+1}$	2	4	10	
2	$0,5x + x \lg x$	1	2,2	12		11	$3x + \ln x$	1	2	10
3	$(x+1,9)\sin(x/3)$	1	2	10		12	$4xe^{x^2}$	-1	2	10
4	$\frac{1}{x} \ln(x+2)$	1	3	10	13	$3x^2 + \lg x$	-0,5	0,5	10	
5	$\frac{3 \cos x}{2x+1,7}$	0	1,4	14	14	$\frac{3x^2 + \sin x}{x^2}$	0,1	1,5	14	
6	$(2x+0,6)\cos(x/2)$	1	2	10	15	$3xe^{\cos x}$	0,2	1,2	10	
7	$2,6x^2 \ln x$	1,2	2,2	10	16	$x^2 \lg \frac{x}{2}$	1,5	2,5	10	
8	$(x^2+1)\sin(x-0,5)$	0,5	1,5	10						

Варіанти III

Варіант 1 $\int_1^4 \int_0^{\pi} \sin x \cdot y^3 dx dy$

Варіант 7 $\int_0^4 \int_0^{\pi} \sin x \cdot y dx dy$

Варіант 13 $\int_1^5 \int_0^3 x^2 \cdot y^3 dx dy$

Варіант 2 $\int_0^{\pi/2} \int_2^4 x \sin y dx dy$

Варіант 8 $\int_0^{\pi} \int_0^3 \cos x \cdot y dx dy$

Варіант 14 $\int_0^5 \int_0^3 x^3 \cdot y^2 dx dy$

Варіант 3 $\int_0^3 \int_0^{\pi} \sin x \cdot y^2 dx dy$

Варіант 9 $\int_0^{\pi/2} \int_0^5 x^3 \cos y dx dy$

Варіант 15 $\int_0^2 \int_0^3 x^2 \ln y dx dy$

Варіант 4 $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 x^2 \sin y dx dy$

Варіант 10 $\int_0^{\pi/2} \int_0^6 x^3 \sin y dx dy$

Варіант 16 $\int_2^4 \int_2^4 x \ln y dx dy$

Варіант 5 $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 x \cos y dx dy$

Варіант 11 $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 x^3 \cos y dx dy$

Варіант 17 $\int_0^3 \int_0^4 \ln x \cdot y^2 dx dy$

Варіант 6 $\int_0^3 \int_0^{\pi} \cos x \cdot y^2 dx dy$

Варіант 12 $\int_0^5 \int_0^{\pi} \cos x \cdot y^3 dx dy$

Варіант 18 $\int_0^6 \int_0^3 x^3 \ln y dx dy$

Тема 7. Розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ знати числові методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь; знаходити числовий розв'язок задачі Коші;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 79-86, 138-139, 192-195; 2, с. 159-182; 3, с. 111-138; 4, с. 146-166; 6, с. 216-247

Лабораторна робота № 12

Розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

Теоретичні відомості

Задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь використовується як математична модель, що описує багато різноманітних процесів у різних сферах. Наприклад, задачі динаміки системи взаємодіючих тіл (у моделі руху матеріальних точок), задачі хімічної кінетики, електричних ланцюгів тощо. Ряд важливих рівнянь з частинними похідними у випадках, що допускають розділення змінних, приводять до задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння полягає в тому, щоб знайти функцію $y=y(x)$, що на заданому відрізку $[a, b]$ задовольняє диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ і початкову умову $y(a) = y_0$.

В залежності від форми подання розв'язку, наближені методи розв'язування таких задач поділяються на три основні групи:

- аналітичні методи, застосування яких дає розв'язок диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;
- графічні методи, що подають наближений розв'язок у вигляді графіка;
- числові методи, коли шукана функція отримується у вигляді числової таблиці.

Числові методи розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння передбачають розбиття відрізка $[a, b]$ на систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, де $x_0=a$, $x_n=b$, і знаходження значень y_i шуканої функції $y=y(x)$ у цих точках $y_i=y(x_i)$.

Метод Ейлера (метод ламаних) полягає у тому, що замість інтегральної кривої розглядається відрізок дотичної до неї в у вузловій точці. Значення шуканої функції обчислюються за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Метод Ейлера має малу точність, до того ж похибка кожного кроку систематично зростає. Найбільш прийнятним для практики методом оцінки точності є спосіб подвійних обчислень – з кроком h і з кроком $h/2$. Однакові десяткові знаки в отриманих двома способами результатах дають підставу вважати їх правильними.

Метод Ейлера модифікований (метод додаткового півкроку) полягає в тому, що спочатку обчислюють значення у проміжній точці (середині інтервалу), а вже потім отримують шукане значення

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

Метод Ейлера модифікований (метод Ейлера-Коші або метод пробного кроку) полягає в тому, що спочатку обчислюється "грубе наближення" шуканої функції і за ним обчислюють значення $f(x, y)$, а вже потім "остаточне наближення", у якому фігурує середнє значення $f(x, y)$:

$$y_{i+1}^* = y_i + hf(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)).$$

Метод Рунге–Кутта базується на застосуванні для відновлення значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку $[a, b]$ кривих вищого порядку, на відміну від методу Ейлера, що використовує кусково-лінійну ламану. Найчастіше для розв'язування практичних задач використовується метод Рунге – Кутта четвертого порядку:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = \overline{0, n-1},$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

Завдання:

1. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (див. варіанти I) методом Ейлера і одним з модифікованих методів Ейлера (Ейлера-Коші).
2. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (див. варіанти I) методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Додаткові завдання:

3. Розв'язати задачу Коші для звичайного диференціального рівняння (див. варіанти II) на відрізку $[0, 1]$ з кроком $h=0.1$ методом Адамса. Початкові значення визначити методом Рунге-Кутта.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи розв'язування задачі Коші.

Варіанти I

Варіант	$f(x, y)$	a	b	$y(x_0) = y_0$	h
1.	$xy^3 - x^2$	4	5	0,7	0,1
2.	$\sqrt{4x^2 + 1} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2
3.	$\cos(1,5x - y^2) - 1,3$	-1	1	0,2	0,2
4.	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1,2	0,1
5.	$e^{-(y^2+1)} + 2x$	0	0,5	0,3	0,05
6.	$\cos(1,5y + x)^2 + 1,4$	1	2	0,9	0,1
7.	$4,1x - y^2 + 0,6$	0,6	2,6	3,4	0,2
8.	$\frac{1}{1 + x^3 y} + 2y$	1,5	2	2,1	0,05
9.	$x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$	2,1	3,1	2,5	0,1
10.	$\frac{2xy}{x+4} - 0,4$	3	5	1,7	0,2
11.	$2,5x + \cos(y + 0,6)$	1	3	1,5	0,2
12.	$x + 2,5y^2 + 2$	1	2	0,9	0,1
13.	$2 - \sin(x + y)^2$	2	3	2,3	0,1
14.	$\frac{2}{x+2} + x + 1$	0,1	0,5	1,25	0,05
15.	$x + \cos \frac{y}{2}$	-2	-1	3	0,1

Варіанти II

1.	$y' = 1 + 0.2y \sin x - y^2, y(0) = 0$	2.	$y' = \cos(x + y) + 0.5(x - y), y(0) = 0$
3.	$y' = \frac{\cos x}{x+1} - 0.5y^2, y(0) = 0$	4.	$y' = (1 - y^2)\cos x + 0.6y, y(0) = 0$
5.	$y' = 1 + 0.4y \sin x - 1.5y^2, y(0) = 0$	6.	$y' = \frac{\cos y}{x+2} + 0.3y^2, y(0) = 0$
7.	$y' = \cos(1.5x + y) + (x - y), y(0) = 0$	8.	$y' = 1 - \sin(x + y) + \frac{0.5y}{x+2}, y(0) = 0$
9.	$y' = \frac{\cos y}{1.5+x} + 0.1y^2, y(0) = 0$	10.	$y' = 0.6 \sin x - 1.25y^2 + 1, y(0) = 0$
11.	$y' = \cos(2x + y) + 1.5(x - y), y(0) = 0$	12.	$y' = 1 - \frac{0.1y}{x+2} - \sin(2x + y), y(0) = 0$
13.	$y' = \frac{\cos y}{1.25+x} - 0.1y^2, y(0) = 0$	14.	$y' = 1 + 0.8y \sin x - 2y^2, y(0) = 0$
15.	$y' = \cos(1.5x + y) + 1.5(x - y), y(0) = 0$	16.	$y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0.3y}{x+2}, y(0) = 0$

Тема 8. Методи розв'язування крайових задач

Очікувані результати навчання:

- ✓ володіти основними поняттями, що пов'язані з методами обчислень; знати постановки типових математичних задач;
- ✓ виконувати дії з наближеними числами; оцінювати похибки результатів;
- ✓ знати числові методи розв'язання крайових задач; застосовувати різницьві методи до розв'язування крайових задач;
- ✓ здійснювати обґрунтований вибір числового методу для вирішення практичної задачі.

Література: 1, с. 86-106, 140-154, 196-201; 3, с. 138-177; 4, с. 167-250

Лабораторна робота № 13

Розв'язування крайових задач методом скінченних різниць

Теоретичні відомості

Крайова задача для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку полягає в такому: знайти функцію $y = y(x)$ на заданому відрізку $[a, b]$, що задовольняє лінійне рівняння вигляду:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

і крайові умови:

$$\begin{aligned}\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= B,\end{aligned}$$

де $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – задані неперервні функції від x ;

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ – задані константи.

Числові методи розв'язання такої задачі дозволяють знайти розв'язок (тобто функцію $y(x)$ на відрізку $[a, b]$) у табличному вигляді, тобто у вигляді набору точок $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, де $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + i h$, n – задане число розбиття відрізка $[a, b]$.

Для застосування *методу скінченних різниць* до розв'язування крайової задачі похідні $y'(x_i)$, $y''(x_i)$ в кожному внутрішньому вузлі x_i наближено замінюють скінченно-різницевиими формулами:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

а на кінцях відрізка $[a, b]$ покладають:

$$y'(x_0) \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'(x_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Використовуючи ці формули, наближено замінюють крайову задачу системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i &= f_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B.\end{aligned}$$

Отримана система є лінійною алгебраїчною системою $(n+1)$ рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих y_i , $i = 0, \dots, n$. Розв'язавши її, одержимо таблицю наближених значень шуканої функції $y(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має трьохдіагональний вигляд, а саме: в кожне i -те внутрішнє рівняння входять лише 3 невідомі y_{i-1} , y_i , y_{i+1} . Для розв'язання такого виду систем на практиці використовують метод прогонки, який є модифікацією методу Гауса, пристосованою для прискореного розв'язування систем трьохдіагонального вигляду.

У випадку, коли шукана функція залежить від декількох змінних, доводиться розв'язувати крайові (початково-крайові) задачі для *диференціальних рівнянь з частинними похідними*.

Для випадку, коли шукана функція залежить від двох змінних, тобто $u = u(x, y)$, диференціальні рівняння другого порядку з частинними похідними мають вигляд:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

і класифікуються залежно від співвідношення функцій a, b, c . Якщо $b^2 - ac < 0$, рівняння називається **еліптичним**, якщо $b^2 - ac = 0$ – **параболічним**, а якщо $b^2 - ac > 0$ – **гіперболічним**.

Еліптичні рівняння описують усталені (стаціонарні) процеси; задача ставиться в замкнутій області і на межі задаються граничні умови. Параболічними і гіперболічними рівняннями описуються еволюційні (нестационарні) процеси. У таких задачах на одній частині границі ставляться граничні умови, на іншій – початкові; можливі також відкриті області, в які "поширюється розв'язок".

В основі розв'язання рівнянь з частинними похідними методом скінченних різниць лежить різницева апроксимація похідних, що була описана вище для звичайних диференціальних рівнянь.

Завдання:

1. Розв'язати крайову задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ з крайовими умовами $\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$, $\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B$ (див. варіанти I) методом скінченних різниць.

Додаткові завдання:

2. Розв'язати крайову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними параболічного типу (рівняння теплопровідності) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ за заданих початкових і крайових умов (див. варіанти II), якщо $x \in [0, 0.6]$, $t \in [0, 0.01]$, методом скінченних різниць при $h=0.1$.
3. Розв'язати крайову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними гіперболічного типу (рівняння коливання струни) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ за заданих початкових і крайових умов (див. варіанти III), якщо $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 0.5]$, методом скінченних різниць при $h=0.1$.

Самостійна робота: розробити програмні застосування, що реалізують методи розв'язування крайових задач.

Варіанти I

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	α_0	α_1	β_0	β_1	A	B	a	b	n
1	$x^2 + 1$	$\sin x$	4	0	1	1	0	2	1	0	1,6	8
2	$2x$	$x^3 - 2$	$2x$	1	1	0	1	-3	6	1	2	10
3	$\cos x$	$3\sin x$	$x \sin x$	1	0	0	1	2	-1	-1	1	10
4	0	$\ln(x^2 + 1)$	$x - 1$	1	1	1	1	4	-2	0	2	10
5	$2\sqrt{x+1}$	$\ln x $	$4-x$	3	1	0	1	2	0	1	1,5	10
6	$\ln x$	$6x^2$	$\pi \sin x$	0	1	0	1	-1	π	0,5	1,9	8
7	e^x	$x^2 - 1$	2	1	0	0	1	6	4	0	2	10
8	$\frac{x}{x^2 + 1}$	$x \sin x$	x^2	1	0	0	1	3	0	0	1	10
9	$x^2 + x$	$\cos x$	$2 + x$	1	1	1	0	1	1	-2	0	10
10	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{2\sin x}{2x}$	1	0	1	0	0	2	0	1,2	12
11	$\sin x$	x^2	$\cos x$	0	1	0	1	2	-1	-1	1	10
12	$3\ln x$	$\ln^2 x$	$x + 1$	1	0	1	0	3	1	1	1,6	8
13	$5e^{2x}$	e^x	3	0	1	0	1	1	-1	-1	0	10
14	$\sin x + \cos x$	0	$x - 1$	2	1	1	0	2	-1	0	1	10
15	$\sin x/x$	x	$\cos x$	1	0	0	1	4	0	0,5	2,1	8

Варіанти II

- | | | |
|-------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $u(x,0) = \cos 2x$, | 4. $u(0,t) = 1 - 6t$, | 7. $u(0,6,t) = 0.3624$. |
| 2. $u(x,0) = x(x+1)$, | 5. $u(0,t) = 0$, | 8. $u(0,6,t) = 2t + 0.96$. |
| 3. $u(x,0) = 1.2 + \ln(x+0.4)$, | 6. $u(0,t) = 0.8 + t$, | 9. $u(0,6,t) = 1.2$. |
| 4. $u(x,0) = \sin 2x$, | 7. $u(0,t) = 2t$, | 10. $u(0,6,t) = 0.932$. |
| 5. $u(x,0) = 3x(2-x)$, | 8. $u(0,t) = 0$, | 11. $u(0,6,t) = t + 2.52$. |
| 6. $u(x,0) = 1.2 - \ln(x+0.4)$, | 9. $u(0,t) = 1.4$, | 12. $u(0,6,t) = t + 1$. |
| 7. $u(x,0) = \sin(0.55x + 0.03)$, | 10. $u(0,t) = t + 0.03$, | 13. $u(0,6,t) = 0.354$. |
| 8. $u(x,0) = 2x(1-x) + 0.2$, | 11. $u(0,t) = 0.2$, | 14. $u(0,6,t) = t + 0.68$. |
| 9. $u(x,0) = \sin x + 0.08$, | 12. $u(0,t) = 0.08 + 2t$, | 15. $u(0,6,t) = 0.6446$. |
| 10. $u(x,0) = \cos(2x + 0.19)$, | 13. $u(0,t) = 0.932$, | |
| 11. $u(x,0) = 2x(x+0.2) + 0.4$, | 14. $u(0,t) = 2t + 0.4$, | $u(0,6,t) = 1.36$. |
| 12. $u(x,0) = \ln(x+0.26) + 1$, | 15. $u(0,t) = 0.415 + t$, | $u(0,6,t) = 0.9345$. |
| 13. $u(x,0) = \sin(x+0.45)$, | $u(0,t) = 0.435 - 2t$, | $u(0,6,t) = 0.8674$. |
| 14. $u(x,0) = 0.3 + x(x+4)$, | $u(0,t) = 0.3$, | $u(0,6,t) = 6t + 0.9$. |
| 15. $u(x,0) = (x-0.2)(x+1) + 0.2$, | $u(0,t) = 6t$, | $u(0,6,t) = 0.84$. |

Варіанти III

1.	$f(x) = x(x+1)$, $\Phi(x) = \cos x$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = 2(t+1)$.
2.	$f(x) = x \cos \pi x$, $\Phi(x) = x(2-x)$, $\varphi(t) = 2$, $\psi(t) = -1$.
3.	$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x) = x^2$, $\varphi(t) = 1+2t$, $\psi(t) = 0$.
4.	$f(x) = (x+0.5)(x-1)$, $\Phi(x) = \sin(x+0.2)$, $\varphi(t) = t-0.5$, $\psi(t) = 3t$.
5.	$f(x) = 2x(x+1)+0.3$, $\Phi(x) = 2 \sin x$, $\varphi(t) = 0.3$, $\psi(t) = 4.3+t$.
6.	$f(x) = (x+0.2) \sin \frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x) = 1+x^2$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = 1.2(t+1)$.
7.	$f(x) = x \sin \pi x$, $\Phi(x) = (x+1)^2$, $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = 0$.
8.	$f(x) = 3x(1-x)$, $\Phi(x) = \cos(x+0.5)$, $\varphi(t) = 2t$, $\psi(t) = 0$.
9.	$f(x) = x(2x-0.5)$, $\Phi(x) = \cos 2x$, $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = 1.5$.
10.	$f(x) = (x+1) \sin \pi x$, $\Phi(x) = x^2 + x$, $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = 0.5t$.
11.	$f(x) = (1-x) \cos \frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x) = 2x+1$, $\varphi(t) = 2t+1$, $\psi(t) = 0$.
12.	$f(x) = 0.5x(x+1)$, $\Phi(x) = x \cos x$, $\varphi(t) = 2t^2$, $\psi(t) = 1$.
13.	$f(x) = 0.5(x^2+1)$, $\Phi(x) = x \sin 2x$, $\varphi(t) = 0.5+3t$, $\psi(t) = 1$.
14.	$f(x) = (x+1) \sin \frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x) = 1-x^2$, $\varphi(t) = 0.5t$, $\psi(t) = 2$.
15.	$f(x) = x^2 \cos \pi x$, $\Phi(x) = x^2(x+1)$, $\varphi(t) = 0.5t$, $\psi(t) = t-1$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ляшенко Б. М., Кривонос О. М., Вакалюк Т. А. Методи обчислень : навч.-метод. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-ту. Житомир : ЖДУ, 2014. 228 с.
2. Домбругов М. Р. Практикум з обчислювальної математики : навч. посіб. К. : КПІ ім. І. Сікорського, 2018. 211 с.
3. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи : навч. посіб. Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
4. Попов В. В. Методи обчислень: конспект лекцій для студентів мех.-мат. ф-ту. К. : ВПЦ «Київський університет», 2012. 303 с.
5. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень : підручник. К. : Вища шк., 1995. 367 с.
6. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи. К. : Либідь, 1996. 288 с.
7. Колесницький О. К., Арсенюк І. Р., Месюра В. І. Чисельні методи : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2017. 130 с.
8. Новотарський М. А. Алгоритми та методи обчислень : навч. посіб. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 407 с.
9. Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри : навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», спеціалізації «Наука про дані (Data Science) та математичне моделювання» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. В. Третиник, Н. Д. Любашенко. К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 138 с.
10. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики : навч. посіб. К. : «Либідь», 1995. 280 с.
11. Жалдак М. И., Рамский Ю. С. Чисельні методи математики. К. : Рад. шк., 1984.
12. Прокопенко Ю. В., Татарчук Д. Д., Казиміренко В. А. Обчислювальна математика. К. : Політехніка, 2003. 120 с.
13. Фельдман Л. П. Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці : підручник. К. : ВНУ, 2006. 480 с.
14. Шахно С. М., Дудикевич А. Т., Левицька С. М. Практикум з чисельних методів : навч. посіб. Л. : ЛНУ ім. І. Франка, 2013. 431 с.
15. Анісімов А. В., Дорошенко А. Ю., Погорілий С. Д., Дорогий Я. Ю. Програмування числових методів мовою *Python* :

- підруч. / за ред. А. В. Анісімова. К. : ВПЦ «Київський університет», 2014. 640 с.
16. Бомба А. Я., Гладка О. М., Кузьменко А. П. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень : монографія. Рівне : ТЗОВ «Ассоль», 2016. 283 с.
17. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах. Рівне : НУВГП, 2008. 416 с.
18. **04-05-60М** Гладка О. М., Карпович І. М. (2022) Методичні вказівки і завдання для виконання практичних і самостійних робіт з навчальної дисципліни «Методи обчислень» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійними програмами «Інформаційні системи і технології» спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» та «Цифрові технології дистанційної освіти» спеціальності 015.39 «Професійна освіта (цифрові технології)» денної і заочної форм навчання.
<http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/23590>
19. **04-01-27** Грицюк П. М., Мічута О. Р., Рощенюк, А. М. (2016) Методичні вказівки для виконання лаб. роб. з дисц. «Матем. методи і моделі».
20. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2011. 624 с.
<http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/2017>