Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально-науковий інститут кібернетики, інформаційних технологій та інженерії
Кафедра комп'ютерних наук та прикладної математики

04-01-73М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни
«**Математичне та комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем**»
для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика»
спеціальності 113 «Прикладна математика»
денної та заочної форм навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІКІТІ
Протокол №2 від 2 грудня 2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни «Математичне та комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем» для здобувачів вищої освіти другого (магістерського) рівня за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Остапчук О. П. – Рівне : НУВГП, 2024. – 65 с.

Укладач: Остапчук О. П., к.т.н, доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

Відповідальний за випуск: Турбал Ю. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики

Керівник групи забезпечення спеціальності 113 «Прикладна математика»: Климюк Ю. Є, к.т. н., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Математичне та комп'ютерне моделювання природних і техногенних систем» полягає у вивченні студентами головних аспектів побудови математичних моделей природних та техногенних систем, методики розробки обчислювальних алгоритмів розв'язування відповідних крайових задач з можливістю використання сучасного програмного забезпечення, а також дозволяє підготувати студентів до використання отриманих знань при написанні кваліфікаційних (магістерських) робіт.

Здобувачам, зокрема магістрам, що навчаються за освітньо-професійною програмою «Прикладна математика» спеціальності 113 «Прикладна математика» необхідні глибокі знання щодо чисельного розв'язування широкого класу задач шляхом програмування обчислювальних алгоритмів з використанням універсальних, спеціалізованих мов програмування та спеціалізованих прикладних програм.

У методичних вказівках до кожної лабораторної роботи зазначено тему та мету заняття. Також наведено основні теоретичні відомості щодо загальних положень теми, детальну інформацію щодо методів та алгоритмів розв'язування задач, завдання для лабораторних робіт та порядок їх виконання, а також контрольні запитання до кожної теми. Тому дані методичні вказівки можуть бути використані як для лабораторних робіт, так і для самостійної роботи студентів.

Методичні вказівки складені відповідно до освітньо-професійної програми підготовки магістрів зазначеної спеціальності з метою забезпечення необхідних загальних, фахових компетентностей та програмних результатів навчання.

Лабораторна робота № 1
Математичне та комп'ютерне моделювання одновимірної задачі масоперенесення розчинених речовин у фільтраційному потоці підземних вод

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання природних процесів забруднення підземного середовища шляхом розрахунку концентрації мігруючих речовин, які переносяться фільтраційним потоком.

Теоретичні відомості

Математична модель одновимірної задачі масоперенесення розчинених речовин у фільтраційному потоці підземних вод задачі має вигляд

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}; \qquad (1.1)$$

$$V = -k\frac{\partial h}{\partial x}; \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \qquad (1.3)$$

$$h(0)=H_1, \quad h(l)=H_2; \qquad (1.4)$$

$$c(x,0) = \tilde{C}_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (1.5)$$

$$c(0,t) = \tilde{C}_1(t), \quad 0 < t \le t_1, \qquad (1.6)$$

$$c(l,t) = \tilde{C}_2(t), \quad 0 < t \le t_1. \qquad (1.7)$$

Тут використані наступні позначення:

$c(x,t)$ – концентрація розчинених речовин в точці x в момент часу t;

h - п'єзометричний напір;

D – коефіцієнт конвективної дифузії;

σ – пористість ґрунту;

C_* - концентрація граничного насичення;

γ – коефіцієнт масообміну;

t_1 – проміжок часу, упродовж якого досліджується процес.

Обчислювальний алгоритм

Розглянутий процес масоперенесення водорозчинених у фільтраційному потоці речовин зводиться до розв'язання двох крайових задач.

1) Розв'язок **задачі фільтрації** (1.2)-(1.4)

Підставимо (1.2) в (1.3), отримаємо $\dfrac{\partial\left(k\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial x}=0$. Тоді

$$k\frac{\partial h}{\partial x}=A,\quad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{A}{k}\quad\Rightarrow\quad h=\frac{A}{k}\cdot x+B, \tag{1.8}$$

де A, B – деякі невідомі константи.

Використовуючи граничні умови (1.4), отримаємо:

$$h(0)=B=H_1;\ \ h(l)=\frac{A}{k}\cdot l+H_1=H_2;\ \ A=\frac{H_2-H_1}{l}\cdot k;$$

$$V=\frac{H_1-H_2}{l}\cdot k,\ V\text{ – константа.} \tag{1.9}$$

2) Числовий розв'язок **задачі масоперенесення**

Для знаходження числового розв'язку задачі (1.1), (1.5)–(1.7) побудуємо монотонну різницеву схему. Для цього поділимо ліву і праву частини рівняння (1.1) на D. Матимемо

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\frac{V}{D}\cdot\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{\gamma}{D}(c-C_*)=\frac{\sigma}{D}\cdot\frac{\partial c}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Введемо позначення наступні:

$$\sigma'=\frac{\sigma}{D},\quad r=-\frac{V}{D},\quad F(x,c)=-\frac{\gamma}{D}\cdot(c-C_*).$$

Тоді отримаємо $$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+r\frac{\partial c}{\partial x}+F(x,c)=\sigma'\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Різницева схема задачі

Введемо рівномірну сітку $\omega_{h_1\tau}$ з кроками h_1 і τ по осях OX та Ot відповідно:

$$\omega_{h_1\tau} = \left\{ (x_i, t_k) \,\middle|\, \begin{array}{l} x_i = i \cdot h_1,\ h_1 \cdot n = l, i = \overline{0,n},\ k = \overline{0,K_1}, \\ t_k = k \cdot \tau,\ \tau \cdot K_1 = t_1. \end{array} \right\}.$$

Для крайової задачі побудована монотонна різницева схема, яка має порядок апроксимації $O(h_1^2 + \tau)$.

Монотонна схема:

$$\mu\ \frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} + r_+ \frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} + r_- \frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} - \tag{1.11}$$
$$- \frac{\gamma}{D}(C_i^{k+1} - C_*) = \sigma' \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}$$

де
$$\mu = \frac{1}{1 + 0.5h_1 \,|\, r \,|} = \frac{1}{1 + \dfrac{h_1 V}{2D}};$$

$$r = r_+ + r_-;\ \ r_+ \equiv 0;\ \ r_- \equiv r < 0;\ \ \tau = \frac{t_1}{K_1}.$$

Запишемо різницеву схему (1.11) у прогоночному вигляді

$$\begin{cases} a\ C_{i-1}^{k+1} - c\ C_i^{k+1} + b\ C_{i+1}^{k+1} = -f\ , \\ C_0^{k+1} = k_1 C_1^{k+1} + \mu_1;\ \ C_n^{k+1} = k_2 C_{n-1}^{k+1} + \mu_2, \end{cases} \tag{1.12}$$

де
$$a = \frac{\mu}{h_1^2} - \frac{r_-}{h_1};\quad b = \frac{\mu}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1};$$

$$c = \frac{2\mu}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1} - \frac{r_-}{h_1} + \frac{\gamma}{D} + \frac{\sigma}{D\tau};\quad f = \frac{\gamma}{D} C_* + \frac{\sigma}{D\tau} C_i^k;$$

$$k_1 \equiv 0,\ \mu_1 \equiv \tilde{C}_1,\ k_2 \equiv 0,\ \mu_2 \equiv \tilde{C}_2 .$$

Метод прогонки

Розв′язок шукаємо методом прогонки у вигляді:

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1} C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1},\quad i = \overline{1, n-1}, \tag{1.13}$$

де

$$\alpha_{i+1} = \frac{b}{c - \alpha_i a},\quad \beta_{i+1} = \frac{a\beta_i + f}{c - \alpha_i a},$$

$$\alpha_1 \equiv k_1 \equiv 0,\quad \beta_1 \equiv \mu_1 \equiv \tilde{C}_1 .$$

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок розподілу концентрації мігруючих речовин методом скінченних різниць, використовуючи монотонну різницеву схему, у вибраному програмному середовищі.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати. Зробити висновок.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Знайти розв’язок одновимірної задачі масоперенесення розчинених речовин у фільтраційному потоці підземних вод згідно варіанту (N - порядковий номер студента в групі) з наступними вхідними даними для крайових умов:

$$H_1 = 1.5 + 0.1\sin N,\ H_2 = 0.5 + 0.1\cos N,\ D{=}0.01\ м^2/доба,$$

$$\gamma = 0{,}065\ 1/доба,\ \sigma = 0.2,\ l{=}500\ м,\ h{=}50\ м.$$

$$k=\begin{cases}1{,}18; & 0<N\le 5,\\ 1{,}25; & 5<N\le 10,\\ 1{,}40; & 10<N\le 15,\\ 1{,}60; & 15<N\le 20,\\ 1{,}80; & 20<N\le 25,\\ 2{,}04; & 25<N\le 30,\end{cases}$$

Також відомо:

а) розподіл концентрації розчинених солей по області фільтрації на початку досліджень (*t=0*):

$$c(x,0)=\begin{cases}a_0e^{-Nx}, \quad 0<N\le 5;\\ (N-6)+\sin^2 Nx,\ 5<N\le 10;\\ N+\cos^2 Nx,\ 10<N\le 15;\\ a_0(x+a_1)^{-N}, \quad 15<N\le 20;\\ a\sin\omega_1 x+b\cos\omega_2 x, \quad a=5N, \quad b=5(N-1), \quad 0<N\le 25;\\ 0; \quad 25<N\le 30.\end{cases}$$

Тут ω_1 - кількість букв в прізвищі студента, ω_2 - кількість букв в імені студента, $a_0=100$, $a_1=10$, $b=5(N-1)$.

б) задана концентрація мігруючих речовин у лівому водному басейні $c(0,t)=a_1t^{\nu_1 N}e^{-\nu_2 t}$, де

$$a_1=\begin{cases}a_0; \quad \nu_1=\nu_2=0, \quad 0<N\le 5;\\ 0; \quad \nu_1=\nu_2=0, \quad 5<N\le 10;\\ N+1; \quad \nu_1=0, \quad \nu_2=N-10, \quad 10<N\le 15;\\ \dfrac{a_0}{a_1}; \quad \nu_1=N-15, \quad \nu_2=\dfrac{N-10}{2}, \quad 15<N\le 20;\\ b; \quad \nu_1=0, \quad \nu_2=\dfrac{N-20}{2}, \quad 20<N\le 25;\\ 0; \quad \nu_1=\dfrac{1}{N+3}, \quad \nu_2=0, \quad 25<N\le 30.\end{cases}$$

в) задана концентрація мігруючих речовин у правому водному басейні $c(l,t) = e^{-\nu t} \sum C_i t$,

де $n = 0,\ c_0 = a_0 e^{-Nl},\ \ \nu = 0,\ \ 0 < N \le 5$;

$n = 1,\ c_0 = N - b + \sin^2 Nl,\ \ c_1 = 0{,}2,\ \ \nu = 0,\ \ 5 < N \le 10$;

$n = 2,\ c_0 = N + \cos^2 Nl,\ c_1 = 0{,}5,\ c_2 = 0{,}1,\ \nu = 0,\ \ 10 < N \le 15$;

$c_i = 0,\ \ i = \overline{1,n};\ \ \ c_0 = \dfrac{a_0}{a_1},\ \ \nu = N - 15,\ \ 15 < N \le 20$;

$c_i = 0,\ \ i = \overline{1,n};\ \ \ c_0 = a \sin \omega_1 l + b \cos \omega_2 l,\ \ \nu = \dfrac{N - 20}{2}$,

$20 < N \le 25$;

$c_i = 0,\ i = \overline{0,n};\ \ 25 < N \le 30$.

г) замість умови **в)** можна задати одну з умов:

– умова швидкого виносу забруднень (2 роду): $\dfrac{\partial c(l,t)}{\partial x} = 0$;

– умова Данкверста (3 роду): $\dfrac{\partial c(l,t)}{\partial x} = \alpha (c - C_*)$,

де $\alpha = -\dfrac{\nu}{D}$, $C_* = 0.1k$.

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель процесу масопереносення мігруючих речовин в фільтраційному потоці.
2. Що означають позначення в даній математичній моделі?
3. Які фізичні процеси описуються даною крайовою задачею?
4. В чому полягає суть методу скінченних різниць?
5. Чому для знаходження розв’язку використовуємо монотонну різницеву схему?
6. Який порядок апроксимації монотонної різницевої схеми?

Лабораторна робота № 2
Математичне та комп'ютерне моделювання процесу тепло-масопереносення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у одновимірному випадку

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання природних процесів перенесення фільтраційним потоком солей у грунтових масивах під впливом неізотермічних умов.

Теоретичні відомості

Математична модель задачі процесу тепломасоперенесення розчинених солей у фільтраційному потоці підземних вод описується наступними диференціальними рівняннями:

1) рівняння конвективної дифузії:

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) + D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\frac{\partial C}{\partial t}; \qquad (2.1)$$

2) рівняння фільтрації підземних вод:

$$V = -k\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{dV}{dx} = 0; \qquad (2.2)$$

3) рівняння конвективного теплового переносу:

$$\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - VC_p\frac{\partial T}{\partial x} = C_n\frac{\partial T}{\partial t}; \qquad (2.3)$$

при наступних крайових умовах:

а) для напору:

$$h(0) = H_1, \quad h(L) = H_2; \qquad (2.4)$$

б) для концентрації:

$c(x,0) = \tilde{C}_0(x)$ – початкові умови для концентрації; (2.5)

$c(0,t) = \tilde{C}_1(t)$ – граничні умови для концентрації на вході; (2.6)

$c(L,t) = \tilde{C}_2(t)$ – граничні умови для концентрації на виході; (2.7)

в) для температури:

$T(x,0) = \tilde{T}_0(x)$ – задає початковий розподіл температур; (2.8)

$T(0,t) = \tilde{T}_1(t)$ – значення температури в лівому басейні; (2.9)

$T(L,t) = \tilde{T}_2(t)$ – значення температури в правому басейні. (2.10)

Отже, (2.1)-(2.10) – крайова задача, що описує процес тепломасоперенесення в одновимірному випадку.

Обчислювальний алгоритм розв'язку

У даній задачі розглядається три фізичні процеси:

1) процес фільтрації сольового розчину який описується рівняннями фільтрації (2.2) з граничними умовами (2.4);

2) процес конвективного теплопереносу (2.3) з крайовими умовами (2.8)-(2.10);

3) процес масопереносу з урахуванням теплопереносу, який описується (2.1) з крайовими умовами (2.5)-(2.7).

Неважко бачити, із математичної моделі (2.1)-(2.10), що дана крайова задача розщеплюється на три піддзадачі:

- задача фільтрації підземних вод (2.2), (2.4);
- задача теплопереносу (2.3), (2.8)-(2.10);
- задача масопереносу (2.1), (2.5)-(2.7).

Будемо розв'язувати їх у вищенаведеній послідовності

1) Розв′язок задачі фільтрації

$$V = \frac{k(H_1 - H_2)}{L}, \quad (2.11)$$

де V - const.

2) Розв′язок задачі теплоперенесення

$$\begin{cases} \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V \cdot C_p \dfrac{\partial T}{\partial x} = C_n \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(x,0) = \widetilde{T}_0(x), \\ T(0,t) = \widetilde{T}_1(t), \\ T(L,t) = \widetilde{T}_2(t). \end{cases} \tag{2.12}$$

Знайдемо числовий розв’язок задачі (2.12). Із диференціального рівняння крайової задачі (2.12) отримаємо наступне рівняння, поділивши ліву і праву частину на λ і ввівши позначення записані нижче

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r^1 \frac{\partial T}{\partial x} = n_T \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2.13}$$

де
$$r^1 = \frac{-V \cdot C_p}{\lambda}; \quad n_T = \frac{C_n}{\lambda}.$$

Запишемо монотонну різницеву схему для (2.13)

$$\mu^1 \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{h_1^{\,2}} + r_+^1 \frac{T_{i+1}^{k+1} - T_i^{k+1}}{h_1} + r_-^1 \frac{T_i^{k+1} - T_{i-1}^{k+1}}{h_1} = n_T \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\tau}, \tag{2.14}$$

де
$$\mu^1 = \frac{1}{1 + 0.5 h_1 |r^1|}; \qquad r^1 = r_+^1 + r_-^1,$$

$$r_+^1 = 0{,}5(r^1 + |r^1|) \geq 0, \quad r_-^1 = 0{,}5(r^1 - |r^1|) \leq 0, \quad r_+^1 \equiv 0.$$

Подамо (2.14) в прогоночному вигляді:

$$\begin{cases} a_1 T_{i-1}^{k+1} - c_1 T_i^{k+1} + b_1 T_{i+1}^{k+1} = -f_1, \\ T_0^{k+1} = \chi_1 T_1^{k+1} + \mu_1, \\ T_n^{k+1} = \chi_2 T_{n-1}^{k+1} + \mu_2, \end{cases} \tag{2.15}$$

де
$$\chi_1 = 0, \quad \mu_1 = \widetilde{T}_1^{\,k+1}, \quad \chi_2 = 0, \quad \mu_2 = \widetilde{T}_2^{\,k+1}.$$

$$f_1 = \frac{n_T}{\tau} T_i^k, \quad a_1 = \frac{\mu_1^1}{h_1^2} - \frac{r_-^1}{h_1}; \quad b_1 = \frac{\mu_1^1}{h_1^2} + \frac{r_+^1}{h_1};$$

$$c_1 = \frac{2\mu_1^1}{h_1^2} + \frac{r_+^1}{h_1} - \frac{r_-^1}{h_1} + \frac{n_T}{\tau}.$$

Виконання наступних умов $a_1,\ b_1,\ c_1 > 0$, $с_1 > a_1 + b_1$ забезпечує стійкість методу прогонки.

Розв′язок (2.15) знаходиться методом прогонки і має вигляд:

$$T_i^k = \alpha_{i+1\,j}^1 T_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{2.16}$$

де
$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}, \quad \beta_{\text{i}+1}^1 = \frac{a_1 \beta_i^1 + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1},$$

$$\alpha_1^1 \equiv \chi_1^1 \equiv 0, \quad \beta_1^1 = \mu_1 = \tilde{T}_1^{k+1}.$$

3) Чисельний розв′язок задачі масоперенесення

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) + D_T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}, \tag{2.17}$$

$$c(x,0) = \tilde{C}_0(x), \tag{2.18}$$

$$c(0,t) = \tilde{C}_1(t), \tag{2.19}$$

$$c(L,t) = \tilde{C}_2(t). \tag{2.20}$$

Монотонна різницева схема (2.17)- (2.20) має вигляд

$$\begin{cases} \mu_2 \dfrac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h_1^2} + r_+^2 \dfrac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h_1} + r_-^2 \dfrac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h_1} - \\ -\dfrac{\gamma}{D}(C_i^{k+1} - C_*) + \dfrac{D_T}{D} \cdot \dfrac{(T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1})}{h_1^2} = \dfrac{\sigma}{D} \cdot \dfrac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau}, \\ C_i^0 = \tilde{C}_0, \quad C_0^{k+1} = \tilde{C}_1, \quad C_n^{k+1} = \tilde{C}_2. \end{cases}$$

(2.21)

де $$\mu_2 = \frac{1}{1+0.5h_1\,|\,r^2\,|} = \frac{1}{1+\frac{h_1 V}{2D}}\,; \quad r^2 = r_+^2 + r_-^2\,,$$

$$r_+^2 = 0{,}5(\,r^2 + |\,r^2\,|) \geq 0\,, \quad r_-^2 = 0{,}5(\,r^2 - |\,r^2\,|) \leq 0\,, \quad r_+^2 \equiv 0\,;$$

$$r_-^2 = r^2 < 0\,; \quad r_-^2 = -\frac{V}{D} \quad .$$

Запишемо (2.21) у прогоночному вигляді

$$\begin{cases} a_2\ C_{i-1}^{k+1} - c_2 C_i^{k+1} + b_2 C_{i+1}^{k+1} = -f_2\ , \\ C_0^{k+1} = \chi_3 C_1^{k+1} + \mu_3\,;\ \ C_n^{k+1} = \chi_4 C_{n-1}^{k-1} + \mu_4\ , \end{cases} \tag{2.22}$$

де $$a_2\ = \frac{\mu_2}{h_1^2} - \frac{r_-^2}{h_1}\,; \qquad b_2 = \frac{\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+^2}{h_1}\,;$$

$$c_2 = \frac{2\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+^2}{h_1} - \frac{r_-^2}{h_1} + \frac{\gamma}{D} + \frac{\sigma}{D\tau}\,; \quad f_2\ = \frac{\gamma}{D}C_* + F_1 + \frac{\sigma}{\tau D}\cdot C_i^k\,;$$

$$F_1 = \frac{D_T}{D}\cdot\frac{(T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1})}{h_1^{\,2}}\,.$$

Розв’язок знаходимо методом прогонки:

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2\,, \tag{2.23}$$

де $$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}\,, \quad \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2\beta_i^2 + f_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}\,,$$

$$\alpha_1^2 = \chi_3 \equiv 0;\ \ \beta_1^2 = \mu_3 = \tilde{C}_1\,.$$

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок розподілу концентрації сольових розчинів під впливом теплового поля, використавши одну з мов програмування.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати. Зробити висновок.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Знайти розв'язок одновимірної задачі тепло-масопереносення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод, тобто дослідити прогноз розподілу температурного поля $T(x,t)$ та концентрації сольових розчинів $c(x,t)$ в грунтовому пласті при наступних вхідних даних:

H_1=1,5 *м;* H_2=0,5 *м;* $\tau = 30\,діб$; l=100 *м;* h=10 *м;* $k = 1{,}5\,м/добу$, σ=0,2; γ=0,0065 *доба*$^{-1}$; $D = 0{,}2\,м^2/добу$ D_T=0,01 *м*^{2}*/добу;* λ=0,3 $Вт/(м \cdot град)$; $\tilde{C}_0$ =0 *г/літр;* $\tilde{C}_1 = t^2 e^{-0{,}1 \cdot t \cdot N}$ *г/літр;* $\tilde{C}_2 = t^2 e^{-0{,}2 \cdot t \cdot N}$ *г/літр*; $C_* = 0.1k$ *г/літр;* $T(x,0) = T_0 = \dfrac{T_2 - T_1}{l^2} x^2 + T_1$; $\tilde{T}_1 = 20 + N$ *град;* $\tilde{T}_2$ =5 *град;* $C_p = 4.2 \cdot 10^6$ *Дж/кг*$\cdot$*град*; $C_п = 3 \cdot 10^6$ *Дж/кг*$\cdot$*град*, N – № варіанту.

Контрольні запитання

1. Математична модель задачі поширення сольових розчинів в грунтових масивах з урахуванням неізотермічних умов.
2. Які крайові умови використовуються в математичній моделі, їх фізичний зміст?
3. Фізична інтерпретація крайових умов даної задачі.
4. Неявна різницева схема задачі.
5. Метод прогонки розв'язування неявної різницевої схеми задачі теплоперенесення.
6. Стійкість неявної різницевої схеми.

Лабораторна робота № 3
Математичне та комп'ютерне моделювання процесу масоперенесення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання природних процесів масоперенесення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку.

Теоретичні відомості

Математична модель задачі

В результаті формалізації задачі отримуємо наступну математичну модель:

1) Диференціальні рівняння процесу

а) рівняння конвективної дифузії:

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-V_x\frac{\partial c}{\partial x}-V_y\frac{\partial c}{\partial y}-\gamma(c-C_*)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (3.1)$$

б) рівняння фільтрації підземних вод:

$$V_x=-k\frac{\partial h}{\partial x},\ V_y=-k\frac{\partial h}{\partial y},\ \ div\vec{V}=0\Leftrightarrow\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0. \quad (3.2)$$

2) Крайові умови

а) для напору:

$$h(0,y,t)=H_1,\ \ h(L,y,t)=H_2, \quad (3.3)$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=0,y=l}=0\ ; \quad (3.4)$$

б) для концентрації:

$c(x,y,0)=\tilde{C}_0(x,y)$ – початкові умови для концентрації; (3.5)

$c(0,y,t)=\tilde{C}_1(y,t)$ – граничні умови для концентрації на вході; (3.6)

$c(L,y,t) = \tilde{C}_2(y,t)$ – граничні умови для концентрації на виході; (3.7)

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$$ – умова непроникності на верхній стороні; (3.8)

$c(x,0,t) = C_*$ – концентрація граничного насичення. (3.9)

Обчислювальний алгоритм розв′язку задачі

Обчислювальний алгоритм розв′язку даної крайової задачі аналогічний, як і для одновимірної задачі, розглянутої вище, тобто:

1) Спочатку знаходимо **розв′язок задачі фільтрації (3.2)-(3.4).** В даному випадку хоча розглядувана область і є двовимірною, потік розчину є плоско-паралельним, тому

$$V_y \equiv 0 \ \ i \ \ V \equiv V_x = \frac{k(H_1 - H_2)}{L}. \tag{3.10}$$

Відповідно спростяться рівняння (3.1),(3.2), оскільки $V_y \equiv 0$.

2) **Розв′яок задачі масоперенесення**

$$\begin{cases} D\left(\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right) - V\dfrac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = \sigma\dfrac{\partial c}{\partial t}, \\ c(x,y,0) = \tilde{C}_0(x,y), \\ c(0,y,t) = \tilde{C}_1(y,t), \\ c(L,y,t) = \tilde{C}_2(y,t), \\ c(x,0,t) = C_*, \\ \dfrac{\partial c}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Для знаходження числового розв’язку крайової задачі (3.11) поділимо рівняння конвективної дифузії в даній задачі на D. Отримаємо

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - \frac{V}{D}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\gamma}{D}(c - C_*) = \frac{\sigma}{D}\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Застосуємо ЛОС Самарського для розв'язання поставленої задачі. Згідно даного методу поставимо у відповідність даній крайовій задачі дві підзадачі:

а) повздовжня прогонка в напрямку осі OX :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{V}{D}\frac{\partial c}{\partial x} - 0.5\frac{\gamma}{D}(c - C_*) = 0.5\frac{\sigma}{D}\frac{\partial c}{\partial t}, \\ c(x,y,0) = \tilde{C}_0(x,y), \\ c(0,y,t) = \tilde{C}_1, \\ c(L,y,t) = \tilde{C}_2; \end{cases} \tag{3.12}$$

а) поперечна прогонка в напрямку осі OY :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - 0.5\frac{\gamma}{D}(c - C_*) = 0.5\frac{\sigma}{D}\frac{\partial c}{\partial t}, \\ c(x,y,0) = \tilde{C}_0(x,y), \\ (x,0,t) = C_*, \\ \left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=b} = 0; \end{cases} \tag{3.13}$$

Монотонна різницева схема для (3.12) має наступний вигляд:

$$\begin{cases} \mu\frac{C_{i-1j}^{k+1/2} - 2C_{ij}^{k+1/2} + C_{i+1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + r_+\frac{C_{i+1j}^{k+1/2} - C_{ij}^{k+1/2}}{h_1} + \\ r_-\frac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1} - -0.5\frac{\gamma}{D}(C_{ij}^{k+1/2} - C_*) = 0.5\frac{\sigma}{D}\frac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{ij}^{k}}{\tau}, \\ C_{ij}^0 = \tilde{C}_0, \quad C_{0j}^{k+1/2} = \tilde{C}_1, \quad C_{nj}^{k+1/2} = \tilde{C}_2; \end{cases} \tag{3.14}$$

де $\mu = \frac{1}{1 + 0.5h_1|r|} = \frac{1}{1 + \frac{h_1 V}{2D}}, \quad r = r_+ + r_-, \quad r = -\frac{V}{D}$

$$r_+ = 0.5(r+|r|) \geq 0\,,\;\; r_- = 0.5(r-|r|) \leq 0\,,\;\; r_+ \equiv 0\,,\; r_- = r < 0\,.$$

Прогоночний вигляд (3.14) наступний:

$$\begin{cases} a_1 C_{i-1j}^{k+1/2} - c_1 C_{ij}^{k+1/2} + b_1 C_{i+1j}^{k+1/2} = -f_1\;, \\ C_{0j}^{k+1/2} = k_1 C_{1j}^{k+1/2} + \mu_1, \\ C_{nj}^{k+1/2} = k_2 C_{n-1j}^{k+1/2} + \mu_2, \end{cases} \tag{3.15}$$

де
$$a_1 = \frac{\mu}{h_1^2} - \frac{r_-}{h_1}, \qquad b_1 = \frac{\mu}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1}\,,$$

$$c_1 = \frac{2\mu}{h_1^2} + \frac{r_+}{h_1} - \frac{r_-}{h_1} + \frac{\gamma}{2D} + \frac{\sigma}{D\tau}\,, \quad f_1 = \frac{\gamma}{2D} C_* + \frac{\sigma}{\tau D} C_{ij}^k\,.$$

Розв′язок (3.15) знаходиться методом прогонки:

$$C_{ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^1 C_{i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^1\,,\;\; i = \overline{1,n-1};\;\; j = \overline{1,m-1}\,, \tag{3.16}$$

де
$$\alpha_{i+1j}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_{ij}^1 a_1}\,,\;\; \beta_{i+1j}^1 = \frac{a_1 \beta_{ij}^{\,1} + f_1}{c_1 - \alpha_{ij}^1 a_1}\,,$$
$$\alpha_{1j}^1 \equiv k_1 \equiv 0, \quad \beta_{1j}^1 \equiv \mu_1 \equiv \tilde{C}_1\,.$$

Розв′яжемо задачу (3.13). В результаті дискретизації будемо мати:

$$\begin{cases} \dfrac{C_{ij-1}^{k+1} - 2C_{ij}^{k+1} + C_{ij+1}^{k+1}}{h_2^2} - 0.5\dfrac{\gamma}{D}(C_{ij}^{k+1} - C_*) = 0.5\dfrac{\sigma}{D}\dfrac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^{k+1/2}}{\tau}\,, \\ C_{ij}^{o} = \tilde{C}_0, \\ C_{i0}^{k+1} = C_*, \\ C_{im}^{k+1} = C_{im-1}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Прогоночний вигляд (3.17) наступний:

$$\begin{cases} a_2\ C_{ij-1}^{k+1} - c_2\ C_{ij}^{k+1} + b_2 C_{ij+1}^{k+1} = -f_2\ , \\ C_{i0}^{k+1} = k_3 C_{i1}^{k+1} + \mu_3\,, \\ C_{im}^{k+1} = k_4 C_{im-1}^{k+1} + \mu_4\,, \end{cases} \qquad (3.18)$$

де

$$a_2 = \frac{1}{h_2^2}; \quad b_2 = \frac{1}{h_2^{\ 2}}; \quad c_2 = \frac{2}{h_2^{\ 2}} + \frac{\gamma}{2D} + \frac{\sigma}{D\tau};$$

$$f_2 = \frac{\gamma}{2D} C_* + \frac{\sigma}{D\tau} C_{ij}^{k+1/2}\,.$$

Розв′язок (3.18) знаходимо методом прогонки згідно формул

$$C_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^2 C_{ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^2\,,\ \ i = \overline{1,n-1};\ \ j = \overline{1,m-1}; \qquad (3.19)$$

де
$$\alpha_{ij+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2}; \quad \beta_{ij+1}^2 = \frac{a_2 \beta_{ij}^{\ 2} + f_2}{c_2 - \alpha_{ij}^2 a_2};$$

$$\alpha_{i1}^2 = k_3 \equiv 0;\ \beta_{i1}^2 = \mu_3 = C_*\,.$$

Для того, щоб розпочати прогонку за формулою (3.19), треба знати концентрацію C_{im}^{k+1}, яка невідома, оскільки на верхній межі задається умова другого роду. Вона знаходиться так:

$$C_{im}^{k+1} = \frac{\beta_{im}^2}{1 - \alpha_{im}^2}\,.$$

В двох різницевих схемах коефіцієнти a_1, b_1, c_1 та a_2, b_2, c_2 строго більші нуля, а це гарантує стійкість методу прогонок для поздовжньої і поперечної прогонок відповідно.

Таким чином, задача масопереносенння у двовимірному випадку алгоритмічно розв′язана повністю.

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок розподілу концентрації сольових розчинів у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку, використавши одну з мов програмування.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати. Зробити висновок.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Виконати розрахунок розподілу концентрації сольових розчинів $c(x,t)$ в грунтовому пласті при наступних вхідних даних:

$\tau = 30\,діб$; $l = 100м$; $h_1 = 10м$; $b = 10м$; $h_2 = 2м$; $\sigma = 0.4$;
$D = 2 \cdot 10^{-2}\, м^2/добу$; $\gamma = 0{,}0065 доба^{-1}$; H_1=1,5 *м;* H_2=1 *м;*
$\tilde{C}_0 = \dfrac{\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1}{l} x + C_1$; $\tilde{C}_1 = 350кг/м^2$; $\tilde{C}_2 = 8кг/м^2 * N$;
$\tilde{C}_m = 350кг/м^2$; $C^* = 0{,}1 * C_m$, N – № варіанту,

$$k = \begin{cases} 1{,}18; & 0 < N \le 5, \\ 1{,}25; & 5 < N \le 10, \\ 1{,}40; & 10 < N \le 15, \\ 1{,}60; & 15 < N \le 20, \\ 1{,}80; & 20 < N \le 25, \\ 2{,}04; & 25 < N \le 30. \end{cases}.$$

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель задачі поширення сольових розчинів в грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку.
2. Основні позначення в математичній моделі.

3. Які фізичні процеси описуються даною крайовою задачею?
4. Суть методу прогонки.
5. Як впливає коефіцієнт дифузії на процес масоперенесення?

Лабораторна робота № 4
Математичне та комп'ютерне моделювання процесу тепломасоперенесення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання природних процесів тепломасоперенесення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку.

Теоретичні відомості

Математична модель задачі тепломасоперенесення у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку описується наступними залежностями:

1) Диференційні рівняння процесу

а) рівняння конвективної дифузії:

$$D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)-V_x\frac{\partial C}{\partial x}-V_y\frac{\partial C}{\partial y}-\gamma(C-C_*)+ \qquad , \qquad (4.1)$$

$$+D_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\sigma\frac{\partial C}{\partial t},$$

б) рівняння фільтрації підземних вод:

$$V_x=-k\frac{\partial h}{\partial x},\ V_y=-k\frac{\partial h}{\partial y},\ \ div\vec{V}=0\Leftrightarrow\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0,\quad (4.2)$$

в) рівняння конвективного теплового переносу:

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)-V_x C_p\frac{\partial T}{\partial x}-V_y C_p\frac{\partial T}{\partial y}=C_n\frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.3)$$

2) Крайові умови

а) для напору:

$$h(0)=H_1,\ h(L)=H_2,\quad \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{y=0,\,y=l}=0; \quad (4.4)$$

б) для концентрації:

$$C(x,y,0)=\tilde{C}_0(x,y), \quad (4.5)$$

$$C(0,y,t)=\tilde{C}_1(y,t), \quad (4.6)$$

$$C(L,y,t)=\tilde{C}_2(y,t), \quad (4.7)$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=b}=0, \quad (4.8)$$

$$C(x,0,t)=C_m\ (=C_*); \quad (4.9)$$

в) для температури:

$$T(x,y,0)=\tilde{T}_0(x,y), \quad (4.10)$$

$$T(0,y,t)=\tilde{T}_1(y,t), \quad (4.11)$$

$$T(L,y,t)=\tilde{T}_2(y,t), \quad (4.12)$$

$$T(x,b,t)=\tilde{T}_4(x,t), \quad (4.13)$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \quad (4.14)$$

Обчислювальний алгоритм розв′язку задачі (4.1)-(4.14)

Обчислювальний алгоритм розв′язку даної крайової задачі аналогічний, як і для одновимірної задачі, розглянутої вище, тобто спочатку розв′яжемо задачу фільтрації розчинених речовин, потім задачу теплоперенесення і масоперенесення.

1) Розв′язок задачі фільтрації (4.2), (4.4). В даному випадку хоча розглядувана область і є двовимірною, потік розчину є плоско-паралельним, тому

$$V_y \equiv 0 \;\; i \;\; V \equiv V_x = \frac{k(H_1 - H_2)}{L}. \tag{4.15}$$

Відповідно спростяться рівняння (4.1), (4.3), оскільки $V_y \equiv 0$.

2) Розв′язок задачі теплоперенесення (4.3), (4.10)-(4.14). Спростимо одну з граничних умов в крайовій задачі і вона набуде вигляду:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - V \cdot C_p \dfrac{\partial T}{\partial x} = C_n \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(x,y,0) = \tilde{T}_0(x,y), \\ T(0,y,t) = \tilde{T}_1(y,t), \quad T(L,y,t) = \tilde{T}_2(y,t), \\ T(x,0,t) = \tilde{T}_3(x,t), \quad T(x,b,t) = \tilde{T}_4(x,t). \end{cases} \tag{4.16}$$

Поділивши ліву і праву частину диференціального рівняння задачі (4.16) на λ, отримаємо

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + r^1 \frac{\partial T}{\partial x} = n_T \frac{\partial T}{\partial t},$$

де

$$r^1 = \frac{-V \cdot C_p}{\lambda}; \;\; n_T = \frac{C_n}{\lambda}.$$

Побудуємо для даної задачі різницеву схему, для цього використаємо метод змінних напрямків, зокрема локально-одновимірну схему О.Самарського (ЛОС Самарського). Згідно даного методу поставимо у відповідність даній крайовій задачі дві підзадачі:

а) повздовжня прогонка в напрямку осі OX:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r^1 \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0{,}5 n_T \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(x,y,0) = \widetilde{T}_0(x,y), \\ T(0,y,t) = \widetilde{T}_1(y,t), \\ T(L,y,t) = \widetilde{T}_2(y,t), \end{cases} \tag{4.17}$$

а) поперечна прогонка в напрямку осі OY:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0{,}5 n_T \dfrac{\partial T}{\partial t}, \\ T(x,y,0) = T_0(x,y), \\ T(x,b,t) = \widetilde{T}_4(x,t), \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

У крайовій задачі (4.17) ***y*** розглядається як параметр, а в (4.18) – ***x*** як параметр. Побудуємо монотонну різницеву схему для задачі (4.17) та неявну різницеву схему для (4.18).

Монотонна різницева схема, після дискретизації задачі (4.17), має наступний вигляд:

$$\mu^1 \frac{T_{i-1j}^{k+1/2} - 2T_{ij}^{k+1/2} + T_{i+1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + r_+^1 \frac{T_{i+1j}^{k+1/2} - T_{ij}^{k+1/2}}{h_1} +$$

$$+ r_-^1 \frac{T_{ij}^{k+1/2} - T_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1} = 0{,}5 n_T \frac{T_{ij}^{k+1/2} - T_{ij}^{k}}{\tau}, \tag{4.19}$$

$$T_{ij}^0 = T_0, \quad T_{0j}^{k+1/2} = \widetilde{T}_1, \quad T_{nj}^{k+1/2} = \widetilde{T}_2,$$

де
$$\mu^1 = \frac{1}{1 + 0.5 h_1 |r^1|}, \quad r^1 = r_+^1 + r_-^1,$$

$$r_+^1 = 0{,}5(r^1 + |r^1|) \ge 0, \quad r_-^1 = 0{,}5(r^1 - |r^1|) \le 0, \quad r_+^1 \equiv 0,$$

$$r_-^1 = \frac{-V \cdot C_p}{\lambda}.$$

Запишемо прогоночний вигляд різницевої схеми (4.19)

$$\begin{cases} a_1^1\, T_{i-1j}^{k+1/2} - c_1^1\, T_{ij}^{k+1/2} + b_1^1\, T_{i+1j}^{k+1/2} = -f_1^1, \\ T_{0j}^{k+1/2} = k_1^1 T_{1j}^{k+1/2} + \mu_1^1, \\ T_{nj}^{k+1/2} = k_2^1 T_{n-1j}^{k+1/2} + \mu_2^1, \end{cases} \tag{4.20}$$

де $$a_1^1 = \frac{\mu_1^1}{h_1^2} - \frac{r_-^1}{h_1}, \quad b_1^1 = \frac{\mu_1^1}{h_1^2} + \frac{r_+^1}{h_1}, \quad c_1^1 = \frac{2\mu_1^1}{h_1^2} + \frac{r_+^1}{h_1} - \frac{r_-^1}{h_1} + \frac{n_T}{\tau},$$

$$f_1^1 = \frac{n_T}{\tau} T_{ij}^k.$$

У даному випадку:

$$k_1^1 = 0;\ \mu_1^1 = T_{1j}(=\tilde{T}_1), \quad k_2^1 = 0;\ \mu_2^1 = T_{2j}(=\tilde{T}_2).$$

Розв′язок (4.20) знаходиться методом прогонки і має вигляд:

$$T_{ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^1 T_{i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^1, \quad i = \overline{1,n-1};\ j = \overline{1,m-1}, \tag{4.21}$$

де

$$\alpha_{i+1j}^1 = \frac{b_1^1}{c_1^1 - \alpha_{ij}^1 a_1^1}, \quad \beta_{i+1j}^1 = \frac{a_1^1 \beta_{1j}^1 + f_1^1}{c_1^1 - \alpha_{ij}^1 a_1^1},$$

$$\alpha_{1j}^1 \equiv k_1^1 \equiv 0, \quad \beta_{1j}^1 \equiv \mu_1^1 \equiv T_{1j}.$$

Розв′яжемо задачу (4.18). В результаті дискретизації будемо мати:

$$\begin{cases} \dfrac{T_{ij-1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{ij+1}^{k+1}}{h_2^2} = 0.5 n_t \dfrac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^{k+1/2}}{\tau}, \\ T_{ij}^o = \tilde{T}_0,\ T_{i0}^{k+1} = \tilde{T}_3,\ T_{im}^{k+1} = \tilde{T}_{im-1}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Запишемо (4.22) у прогоночному вигляді:

$$\begin{cases} a_1^2\, T_{ij-1}^{k+1} - c_1^2\, T_{ij}^{k+1} + b_1^2\, T_{ij+1}^{k+1} = -f_1^{\,2}\ , \\ T_{i0}^{k+1} = k_1^2 T_{i1}^{k+1} + \mu_1^{\,2}, \\ T_{im}^{k+1} = k_2^2 T_{im-1}^{k+1} + \mu_2^{\,2}, \end{cases} \tag{4.23}$$

де

$$a_1^2 = \frac{1}{h_2^2},\ \ b_1^{\,2} = \frac{1}{h_1^{\,2}},\ c_1^{\,2} = \frac{2}{h_2^{\,2}} + \frac{n_T}{\tau},\ \ f_1^{\,2} = \frac{n_T}{\tau} T_{ij}^{k+1/2},$$

$$k_1^{\,2} = 0,\ \mu_1^{\,2} = \tilde{T}_3;\quad k_2^{\,2} = 0,\ \mu_2^{\,2} = \tilde{T}_4.$$

Розподіл температур на *(k+1)*-му кроці знаходиться методом прогонки згідно формул:

$$T_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^2 T_{ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^2,\ \ i = \overline{1,n-1};\ \ j = \overline{1,m-1}, \tag{4.24}$$

де

$$\alpha_{ij+1}^2 = \frac{b_1^{\,2}}{c_1^{\,2} - \alpha_{ij}^2 a_1^{\,2}},\ \ \beta_{ij+1}^2 = \frac{a_1^2 \beta_{ij}^{\,2} + f_1^{\,2}}{c_1^{\,2} - \alpha_{ij}^2 a_1^{\,2}},$$

$$\alpha_{i1}^2 \equiv k_1^2 \equiv 0,\quad \beta_{i1}^2 \equiv \mu_1^{\,2} \equiv \tilde{T}_3\ .$$

Таким чином, двовимірна задача теплоперенесення розв′язана повністю. Її розв′язок знайдено в два етапи з використанням ЛОС Самарського:

1. В результаті поздовжньої прогонки знайдено розв′язок крайової задачі (4.17), якій відповідає різницева схема (4.19), розв′язок якої знаходиться за формулами (4.21). Таким чином, в результаті поздовжньої прогонки знайдено проміжний розв′язок на півшарі по часу (k+1/2).

2. В результаті поперечної прогонки знайдено розв′язок задачі (4.18), якій відповідає різницева схема (4.22). Числовий розв′язок задачі на (k+1)-му шарі по часу знайдено за формулами (4.24).

3) Чисельний розв′язок задачі масоперенесення з урахуванням неізотермічних умов.

$$D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-V\ \frac{\partial c}{\partial x}-\gamma(c-C_*)+D_T\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\sigma\frac{\partial c}{\partial t}\ , \quad (4.25)$$

$$c(x,y,0) = \tilde{C}_0(x,y)\,, \quad (4.26)$$

$$c(0,y,t) = \tilde{C}_1(y,t)\,, \quad (4.27)$$

$$c(L,y,t) = \tilde{C}_2(y,t)\,, \quad (4.28)$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{y=b}=0\,, \quad (4.29)$$

$$c(x,0,t) = C_m\ . \quad (4.30)$$

Оскільки на кожному кроці по часу температурне поле відоме, то доданок, в який входить температура в (4.25), теж відомий і відіграє роль джерела.

Таким чином, дана задача масопернесення схожа до задачі теплоперенесення, лише з деякими видозмінами. Розв′яжемо її різницевим методом з використанням ЛОС Самарського.

Для цього поділимо рівняння (4.25) на *D*:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}-\frac{V}{D}\ \cdot\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\gamma}{D}(C-C_*)+\frac{D_T}{D}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)=\frac{\sigma}{D}\cdot\frac{\partial C}{\partial t}\,. \quad (4.31)$$

Згідно ЛОС Самарського, розіб′ємо (4.31), (4.26) – (4.29) на дві підзадачі:

I. Для поздовжньої прогонки у напрямку осі *OX*:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\frac{V}{D}\ \cdot\frac{\partial C}{\partial x}-0{,}5\frac{\gamma}{D}(C-C_*)+\frac{D_T}{D}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0{,}5\frac{\sigma}{D}\cdot\frac{\partial C}{\partial t}\ , \quad (4.32)$$

$$C(x,y,0) = \tilde{C}_0(x,y)\,, \quad (4.33)$$

$$C(0,y,t) = \tilde{C}_1(y,t)\,, \quad (4.34)$$

$$C(L,y,t) = \tilde{C}_2(y,t)\,. \quad (4.35)$$

II. Для поперечної прогонки у напрямку осі *OY*:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - 0{,}5\frac{\gamma}{D}(C - C_*) + \frac{D_T}{D}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0{,}5\frac{\sigma}{D}\cdot\frac{\partial C}{\partial t}, \quad (4.36)$$

$$C(x,y,0) = C_0(x,y), \quad (4.37)$$

$$C(x,0,t) = C_m, \quad (4.38)$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \quad (4.39)$$

Для знаходження розв′язку задачі (4.32)-(4.35), застосуємо монотонну схему:

$$\begin{cases} \mu^2 \dfrac{C_{i-1j}^{k+1/2} - 2C_{ij}^{k+1/2} + C_{i+1j}^{k+1/2}}{h_1^2} + r_+^2 \dfrac{C_{i+1j}^{k+1/2} - C_{ij}^{k+1/2}}{h_1} + \\ + r_-^2 \dfrac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{i-1j}^{k+1/2}}{h_1} - 0{,}5\dfrac{\gamma}{D}(C_{ij}^{k+1/2} - C_*) + \\ + \dfrac{D_T}{D}\cdot\dfrac{(T_{i-1j}^k - 2T_{ij}^k + T_{i+1j}^k)}{h_1^2} = 0{,}5\dfrac{\sigma}{D}\cdot\dfrac{C_{ij}^{k+1/2} - C_{ij}^k}{\tau}, \\ C_{ij}^0 = \widetilde{C}_0, \quad C_{0j}^{k+1/2} = \widetilde{C}_1, \quad C_{nj}^{k+1/2} = \widetilde{C}_2, \end{cases} \quad (4.40)$$

де

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + 0.5h_1 |r^2|} = \frac{1}{1 + \dfrac{h_1 V}{2D}}, \qquad r^2 = r_+^2 + r_-^2,$$

$$r_+^2 = 0{,}5(r^2 + |r^2|) \geq 0, \quad r_-^2 = 0{,}5(r^2 - |r^2|) \leq 0,$$

$$r_+^2 \equiv 0, \quad r_-^2 = r^2 < 0, \quad r_-^2 = \frac{-V}{D}.$$

Запишемо (4.40) у прогоночному вигляді:

$$\begin{cases} a_2^1 C_{i-1j}^{k+1/2} - c_2^1 C_{ij}^{k+1/2} + b_2^1 C_{i+1j}^{k+1/2} = -f_2^1, \\ C_{0j}^{k+1/2} = k_3^1 C_{1j}^{k+1/2} + \mu_3^1; \quad C_{nj}^{k+1/2} = k_4^1 C_{n-1j}^{k-1/2} + \mu_4^1, \end{cases} \quad (4.41)$$

де

$$a_2^{\,1} = \frac{\mu_2}{h_1^2} - \frac{r_-^2}{h_1}, \; b_2^1 = \frac{\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+^2}{h_1}, \; c_2^1 = \frac{2\mu_2}{h_1^2} + \frac{r_+^2}{h_1} - \frac{r_-^2}{h_1} + \frac{\gamma}{2D},$$

$$f_2^1 = \frac{\gamma}{2D} C_* + F_1 + \frac{\sigma}{\tau D} \cdot C_{ij}^k, \; F_1 = \frac{D_T}{D} \cdot \frac{(T_{i-1j}^k - 2T_{ij}^k + T_{i+1j}^k)}{h_1^{\,2}}.$$

Розв’язок (4.41) знайдемо методом прогонки

$$C_{ij}^{k+1/2} = \alpha_{i+1j}^3 C_{i+1j}^{k+1/2} + \beta_{i+1j}^3; \tag{4.42}$$

де

$$\alpha_{i+1j}^3 = \frac{b_2^1}{c_2^1 - \alpha_{ij}^3 a_2^1}, \; \beta_{i+1j}^3 = \frac{a_2^1 \beta_{ij}^3 + f_2^1}{c_2^1 - \alpha_{ij}^3 a_2^1},$$

$$\alpha_{1j}^3 = k_3^1 \equiv 0; \; \beta_{1j}^3 = \mu_3^1 = \tilde{C}_1.$$

Таким чином, в результаті поздовжньої прогонки за формулою (4.42) знайдено розподіл поля концентрації на півкроках по часу $C_{ij}^{k+1/2}$. Ці значення слугуватимуть допоміжними значеннями для знаходження концентрації на часовому шарі (k+1).

Розв′яжемо задачу (4.36)-(4.39). Оскільки рівняння (4.36) не містить конвективних членів (першої похідної $\frac{\partial C}{\partial x}$), то для розв′язування цієї задачі використаємо звичайну неявну різницеву схему. Будемо мати:

$$\begin{cases} \dfrac{C_{i-1j-1}^{k+1} - 2C_{ij}^{k+1} + C_{i-1j}^{k+1}}{h_2^2} - 0{,}5\dfrac{\gamma}{D}(C_{ij}^{k+1} - C_*) + \\ + \dfrac{D_T}{D} \cdot \dfrac{(T_{ij-1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{ij+1}^{k+1})}{h_2^2} = 0{,}5\dfrac{\sigma}{D} \cdot \dfrac{C_{ij}^{k+1} - C_{ij}^{k+1/2}}{\tau}, \\ C_{ij}^0 = \tilde{C}_0, \quad C_{i0}^{k+1} = C_m, \quad C_{im}^{k+1} = C_{im-1}. \end{cases} \tag{4.43}$$

Подамо (4.43) в прогоночному вигляді

$$\begin{cases} a_2^2 C_{ij-1}^{k+1} - c_2^2 C_{ij}^{k+1} + b_2^2 C_{ij+1}^{k+1} = -f_2^{\,2}, \\ C_{i0}^{k+1} = k_3^2 C_{i1}^{k+1} + \mu_3^2; \quad C_{im}^{k+1} = k_4^2 C_{im-1}^{k+1} + \mu_4^2, \end{cases} \tag{4.44}$$

де

$$a_2^2 = \frac{1}{h_2^2}, \quad b_2^2 = \frac{1}{h_1^2}, \quad c_2^2 = \frac{2}{h_2^2} + \frac{\gamma}{2D} + \frac{\sigma}{D\tau},$$

$$f_2^{\,2} = \frac{\gamma}{2D} C_* + F_2 + \frac{\sigma}{D\tau} \cdot C_{ij}^{k+1/2} \quad ,$$

$$F_2 = \frac{D_T}{D} \cdot \frac{(T_{ij-1}^{k+1} - 2T_{ij}^{k+1} + T_{ij+1}^{k+1})}{h_2^{\,2}}.$$

Розв′язок (4.44) матиме наступний вигляд:

$$C_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij+1}^4 C_{ij+1}^{k+1} + \beta_{ij+1}^4; \tag{4.45}$$

де

$$\alpha_{ij+1}^4 = \frac{b_2^2}{c_2^2 - \alpha_{ij}^4 a_2^2}, \; \beta_{ij+1}^4 = \frac{a_2^2 \beta_{ij}^4 + f_2^{\,2}}{c_2^2 - \alpha_{ij}^4 a_2^2},$$

$$\alpha_{i1}^4 = k_3^2 \equiv 0, \quad \beta_{i1}^4 = \mu_3^2 = C_m .$$

Для того, щоб почати прогонку за формулою (4.45), треба знати концентрацію C_{im}^{k+1}, яка невідома, оскільки на верхній межі задається умова другого роду. Вона задається так:

$$C_{im}^{k+1} = \frac{\beta_{im}^4}{1 - \alpha_{im}^4} .$$

Таким чином, двовимірна задача тепломасоперенесення алгоритмічно розв′язана повністю.

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок розподілу концентрації сольових розчинів у грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку під впливом неізотермічних умов, використавши одну з мов програмування.

2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати. Порівнявши результати, отримані в лабораторних роботах 3 та 4 зробити висновок про вплив теплового поля на процес масоперенесення в двовимірному випадку.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Виконати розрахунок розподілу концентрації сольових розчинів $c(x,t)$ в грунтовому пласті в неізотермічних умовах при наступних вхідних даних:

$$\tau = 30\,діб;\ \ l = 100 м;\ \ h_1 = 10 м;\ \ b = 10 м;\ \ h_2 = 2 м;\ \ \sigma = 0.4;$$

$$D_T = 10^{-3}\, м^2/добу;\ \ D = 2\cdot 10^{-2}\, м^2/добу;\ \ \gamma = 0{,}0065\, доба^{-1};$$

$$H_1 = 1{,}5\ м;\ \ H_2 = 1\ м;\ \ \tilde{T}_1 = 25°C + N;\ \ \tilde{T}_2 = 8°C + N;\ \ \tilde{T}_3 = 18°C;$$

$$T(x,0) = T_0 = \frac{T_2 - T_1}{l^2}x^2 + T_1;\ \ C^* = 0{,}1 * C_m;\ \ \tilde{C}_0 = \frac{\tilde{C}_2 - \tilde{C}_1}{l}x + C_1;$$

$$\tilde{C}_1 = 350 кг/м^2;\ \ \tilde{C}_2 = 8 кг/м^2 * N;\ \ \tilde{C}_m = 350 кг/м^2.$$

$$k = \begin{cases} 1{,}18; & 0 < N \le 5, \\ 1{,}25; & 5 < N \le 10, \\ 1{,}40; & 10 < N \le 15, \\ 1{,}60; & 15 < N \le 20, \\ 1{,}80; & 20 < N \le 25, \\ 2{,}04; & 25 < N \le 30, \end{cases}$$

де N – № варіанту.

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель задачі поширення сольових розчинів в грунтових масивах при фільтрації підземних вод у двовимірному випадку при наявності теплового поля.
2. Основні позначення в математичній моделі.

3. Неявна різницева схема задачі. Порядок апроксимації даної схеми.
4. Як апроксимується гранична умова другого роду на верхній межі області?
5. Яким чином теплове поле впливає на проходження процесу масоперенесення?

Лабораторна робота № 5
Математичне і комп'ютерне моделювання процесу фільтраційної консолідації в грунтових масивах

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання процесу фільтраційної консолідації в грунтових масивах на прикладі одновимірної задачі з урахуванням переносу солей.

Теоретичні відомості

Математична модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації грунтів при лінійній залежності між напруженнями та деформаціями з урахуванням переносу солей фільтраційним потоком описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial H^*}{\partial t}-\frac{1}{\gamma_{гр.}}\frac{\partial \sigma^*}{\partial t}+\frac{1+\bar{e}}{\gamma_{гр.}a}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right], \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)-U\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma(c-C_*)=n\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (5.2)$$

$$U=-k\frac{\partial h}{\partial x}+\nu\frac{\partial c}{\partial x}, \quad (5.3)$$

$$h(x,0)=\tilde{H}_0(x),\;\; h(0,t)=\tilde{H}_1(t),\;\; h(l,t)=\tilde{H}_2(t), \quad (5.4)$$

$$c(x,0)=\tilde{C}_0(x),\;\; c(0,t)=\tilde{C}_1(t),\;\; c(l,t)=\tilde{C}_2(t). \quad (5.5)$$

де

$h(x,t)$- надлишковий напір в тілі греблі, який розсіюється;

$c(x,t)$ - концентрація сольового розчину в тілі греблі (в шарі грунту);

k – коефіцієнт фільтрації сольового розчину;

ν – коефіцієнт осмосу;

U – швидкість фільтрації сольового розчину з врахуванням осмотичних явищ;

D – коефіцієнт конвективної дифузії;

n – пористість грунту;

H^*, σ^* – надлишковий напір і напруження в стані стабілізації;

$\bar{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості;

$\gamma_{гр.}$ - питома вага грунту;

a - коефіцієнт стисливості грунту;

γ - коефіцієнт масообміну.

Запишемо математичну модель (5.1)-(5.5) у дещо спрощеному вигляді. Матимемо наступну крайову задачу:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k(c)\frac{1+\bar{e}}{\gamma_{гр.}a} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \nu \frac{1+\bar{e}}{\gamma_{гр.}a} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}; \qquad (5.6)$$

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - U\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma(c - C_*) = n\frac{\partial c}{\partial t}; \qquad (5.7)$$

$$U = -k(c)\frac{\partial h}{\partial x} + \nu\frac{\partial c}{\partial x}; \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \qquad (5.8)$$

$$h(x,0) = \tilde{H}_0(x); \qquad (5.9)$$

$$h(0,t) = \tilde{H}_1(t); \qquad (5.10)$$

$$h(l,t) = \tilde{H}_2(t); \qquad (5.11)$$

$$c(x,0) = \tilde{C}_0(x); \qquad (5.12)$$

$$c(0,t) = \tilde{C}_1(t); \qquad (5.13)$$

$$c(l,t) = \tilde{C}_2(t). \qquad (5.14)$$

Рівняння (5.1) або (5.6) – це рівняння фільтраційної консолідації для збиткового напору $h(x,t)$. Це рівняння параболічного типу, що не містять вільних членів.

Рівняння (5.2) або (5.7) – це рівняння масоперенесення солей для концентрації $C(x,t)$. Рівняння (5.3) або (5.8) – це узагальнений закон Дарсі-Герсеванова, або ж це рівняння фільтрації.

Таким чином, для знаходження невідомих функцій $h(x,t)$ і $c(x,t)$ отримаємо нелінійну одновимірну систему рівнянь параболічного типу.

Дещо спростимо дану крайову задачу. Будемо вважати, що k – константа і другим доданком $\nu \dfrac{\partial c}{\partial x}$ у формулі (5.8) будемо нехтувати, тобто будемо вважати, що

$$\left| k \frac{\partial h}{\partial x} \right| \geq \left| \nu \frac{\partial c}{\partial x} \right|. \tag{5.15}$$

Або ж, якщо це не так, при дискретизації (5.8) значення напору і концентрації будемо брати з попереднього шару, тобто при розв′язуванні (5.6) і (5.7) будемо вважати, що U вже відоме на даному початковому шарі. При врахуванні умови (5.15) швидкість U обчислюється за формулою:

$$U = -k \frac{H_2 - H_1}{L}. \tag{5.16}$$

Обчислювальний алгоритм розв′язку даної задачі

1) Розв’язок задачі фільтрації

Спочатку за формулою (5.16) знаходимо швидкість фільтрації.

2) Розв′язок задачі масоперенесення (5.7), (5.12)-(5.14)

Розв′язок даної задачі аналогічний розв′язку одновимірної задачі масопереннення, що розглянута в темі 1.

Розв′язок шукаємо методом прогонки у вигляді:

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^1 C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^1, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{5.17}$$

де

$$\alpha_{i+1}^1 = \frac{b_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}, \quad \beta_{i+1}^1 = \frac{a_1\beta_i + f_1}{c_1 - \alpha_i^1 a_1}, \quad \alpha_1^1 \equiv 0, \quad \beta_1^1 \equiv \widetilde{C}_1. \quad (5.18)$$

3) Роз′вязок задачі для знаходження надлишкових напорів (5.6), (5.9)-(5.11)

Спочатку введемо наступні позначення:

$$k\frac{1+\bar{e}}{\gamma_{гр.}a} = \bar{a}; \quad \nu\frac{1+\bar{e}}{\gamma_{гр.}a} = \bar{b}. \qquad (5.19)$$

Запишемо різницеву схему даної задачі для визначення надлишкового напору, яка буде мати наступний вигляд:

$$\begin{gathered}\bar{a}\frac{H_{i-1}^{k+1} - 2H_i^{k+1} + H_{i+1}^{k+1}}{h^2} + \bar{b}\frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h^2} = \\ = \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau}, \; i = \overline{1,n-1},\end{gathered} \qquad (5.20)$$

$$H_i^0 = \widetilde{H}_0(ih), \; i = \overline{0,n}, \qquad (5.21)$$

$$H_0^{k+1} = \widetilde{H}_1, \quad k = \overline{0,K-1}, \qquad (5.22)$$

$$H_n^{k+1} = \widetilde{H}_2, \quad k = \overline{0,K-1}. \qquad (5.23)$$

Для роз′вязання задачі представимо різницеву схему у прогоночному вигляді:

$$a_2 H_{i-1}^{k+1} - c_2 H_i^{k+1} + b_2 H_{i+1}^{k+1} = f_2; \qquad (5.24)$$

де

$$a_2 = \frac{\bar{a}}{h^2} = b_2; \quad c_2 = \frac{1}{\tau} - \frac{2a}{h^2}; \quad f_2 = \frac{1}{\tau}H_i^k + \bar{b}\cdot\frac{C_{i-1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i+1}^{k+1}}{h^2}.$$

Розв′язок задачі знаходимо методом прогонки

$$H_i^{k+1} = \alpha_{i+1}^2 H_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}^2, \; i = \overline{1,n-1}, \qquad (5.25)$$

де $$\alpha_{i+1}^2 = \frac{b_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \; \beta_{i+1}^2 = \frac{a_2\beta_i + f_2}{c_2 - \alpha_i^2 a_2}, \; \alpha_1^2 \equiv 0, \quad \beta_1^2 \equiv \widetilde{H}_1.$$

Таким чином, одновимірна задачі фільтраційної консолідації алгоритмічно роз′язана повністю.

Порядок виконання роботи

1. Виконати розрахунок розподілу надлишкових напорів під впливом фільтрації сольових розчинів у грунтових масивах, використавши одну з мов програмування.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати, зробити висновок щодо впливу концентрації солей на процес консолідації грунтів.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Дослідити проходження процесу фільтраційної консолідації з урахуванням масопереносу та остмотичних явищ в грунтових середовищах при наступних вхідних даних:

$$H_0(x)=\frac{H_2-H_1}{L}x+H_1; \qquad H_1=65\,м; \qquad H_2=20+N\ м;$$

$$C_0(x)=C_1e^{-\frac{x}{L}ln\frac{C_1}{C_2}}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \qquad C_1(t)=350\frac{кг}{м^3}; \qquad C_2(t)=8N\frac{кг}{м^3};$$

$$D=2\cdot10^{-2}\ \frac{м^2}{добу}; \quad k=10^{-3}\ \frac{\text{м}}{\text{добу}}; \quad \nu=2{,}8\cdot10^{-5}\ м^5/кг\cdot добу;$$

n=0,4; $\bar{e}$ =0,6; $a=51{,}2\cdot10^{-7}\,\text{Па}^{-1}$ (м²/Н); $\gamma_{гр}=2\cdot10^4\,H/м^3$;

L=100 м; Δx=10 м; $t_0=0$; $\tau=30\,діб$, N – № варіанту.

Контрольні запитання

1. Що таке консолідація грунтів, фільтраційна консолідація?
2. Записати математичну модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації грунтів з урахуванням переносу солей.
3. Назвати основні позначення в математичній моделі.

4. Записати неявну різницеву схему задачі. Який порядок апроксимації даної різницевої схеми?
5. Яким чином концентрація сольових розчинів впливає на розподіл надлишкових напорів?

Лабораторна робота № 6
Математичне та комп'ютерне моделювання процесу вологоперенесення при урахуванні масоперенесення сольових розчинів в ненасиченому ґрунтовому середовищі в одновимірному випадку

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання процесів вологоперенесення при урахуванні масоперенесення сольових розчинів в ненасиченому ґрунтовому середовищі в одновимірному випадку під впливом осмотичних явищ.

Теоретичні відомості

Математичну модель задачі вологоперенесення при масоперенесенні сольових розчинів в ненасиченому ґрунтовому середовищі в одновимірному випадку можна записати в такому вигляді:

$$\frac{\partial\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)}{\partial x} - V\frac{\partial c}{\partial x} - \gamma\,(c - C_*) = \sigma\frac{\partial c}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\mu(h)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(h)\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \nu\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (6.2)$$

$$V = -k\frac{\partial h}{\partial x} + \nu\frac{\partial c}{\partial x}, \quad (6.3)$$

$$c(0,t) = \tilde{C}_1(t), \quad c(l,t) = \tilde{C}_2(t), \quad c(x,0) = \tilde{C}_0(x), \quad (6.4)$$

$$h\big|_{x=0} = \tilde{H}_1(t), \quad h\big|_{x=l} = \tilde{H}_2(t), \quad h\big|_{t=0} = \tilde{H}_0(x). \quad (6.5)$$

Тут: $D(c)$ – коефіцієнт конвективної дифузії, γ – коефіцієнт масообміну, C_* – коефіцієнт граничного насичення сольового розчину, σ – пористість ґрунту, V – швидкість фільтрації, $k(h)$ – коефіцієнт водопроникності, $h = P - x$ – напір вологи, $P = \frac{p}{\rho g}$ – висота тиску, $\mu(h) = \frac{\partial \omega}{\partial h}$ – коефіцієнт вологоємності при неповному насиченні ґрунту, ν – коефіцієнт осмосу.

Для зони неповного насичення ґрунту маємо:

$$\mu(h) = \frac{\partial W}{\partial h} = \frac{\partial(a\rho g(h+x)+b)}{\partial h} = a\rho g\left(1+\frac{\partial x}{\partial h}\right) = a\rho g\left(1+\frac{1}{\frac{\partial h}{\partial x}}\right),$$

де $h = \frac{p}{\rho g} + x$ – гідравлічний потенціал (напір),

$p = \rho g(h+x)$ – тиск рідини,

a, b – константи, які визначаються експериментально,

$k(h)$ – коефіцієнт водопроникності

$$k(h) = \frac{a_0}{b_0 + P^{\alpha}} = \frac{a_0}{b_0 + [\rho g(h+x)]^2},$$

де величини $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $\alpha = 2$ визначаються експериментально.

Обчислювальний алгоритм знаходження розв'язку задачі

Розв'язок задачі (6.1)-(6.5) знайдемо методом скінченних різниць. Обчислювальний алгоритм знаходження чисельного розв'язку даної задачі полягає у почерговому розв'язанні трьох підзадач на кожному часовому шарі. Спочатку знаходимо швидкість фільтрації, користуючись формулою (6.3), потім концентрацію розчинених речовин (6.8), розв'язавши задачу масоперенесення, і нарешті після розв'язання задачі вологоперенесення знаходимо розподіл вологи (6.12).

1. **Розв'язок задачі фільтрації**

Провівши дискретизацію рівняння швидкості фільтрації (6.3) маємо:

$$V_i^{k+1} = -k\,\frac{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}{2h} + \nu\,\frac{C_{i+1}^k - C_{i-1}^k}{2h}\,. \tag{6.5}$$

2. Алгоритм розв’язування задачі масоперенесення

Для знаходження числового розв’язку задачі масоперенесення солей в області неповного насичення використаємо монотонну різницеву схему. Різницева схема задачі (6.1), (6.4) матиме вигляд

$$\begin{gathered}\eta_i^{k+1}\left(\frac{C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right) + r_{+i}^{k+1}\,\frac{C_{i+1}^{k+1} - C_i^{k+1}}{h} + \\ + r_{-i}^{k+1}\,\frac{C_i^{k+1} - C_{i-1}^{k+1}}{h} - \gamma\left(C_i^{k+1} - C_*\right) = \frac{\sigma}{\tau}\left(C_i^{k+1} - C_i^k\right).\end{gathered} \tag{6.6}$$

Запишемо різницеву схему (6.6) в прогоночному вигляді

$$\begin{gathered}\left(\frac{\eta_i^{k+1}}{h^2} - \frac{r_{-i}^{k+1}}{h}\right)C_{i-1}^{k+1} - \left(\frac{2\eta_i^{k+1}}{h^2} + \frac{r_{+i}^{k+1}}{h} - \frac{r_{-i}^{k+1}}{h} + \frac{\gamma}{D} + \frac{\sigma}{D\tau}\right)C_i^{k+1} + \\ + \left(\frac{\eta_i^{k+1}}{h^2} + \frac{r_{+i}^{k+1}}{h}\right)C_{i+1}^{k+1} = -\left(\frac{\gamma}{D}C_* + \frac{\sigma}{D\tau}C_i^k\right),\end{gathered} \tag{6.7}$$

де
$$\eta_i^k = \frac{1}{1 + \dfrac{h\left|r_i^k\right|}{2}}, \qquad r_i^k = r_{+i}^k + r_{-i}^k, \qquad r_i^k = -\frac{V_i^k}{D},$$

$$r_{+i}^k = \frac{-V_i^k + \left|V_i^k\right|}{2} \ge 0, \qquad r_{-i}^k = \frac{-V_i^k - \left|V_i^k\right|}{2} \le 0.$$

Розв’язок задачі масоперенесення солей знайдемо методом прогонки:

$$C_i^{k+1} = \alpha_{i+1}C_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{6.8}$$

де $$\alpha_{i+1} = \frac{b}{c - \alpha_i a}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a\beta_i + f}{c - \alpha_i a},$$

$$\alpha_1 \equiv k_1 \equiv 0, \quad \beta_1 \equiv \mu_1 \equiv \tilde{C}_1 .$$

3. Розв'язок задачі вологоперенесення

Для знаходження розв'язку задачі вологоперенесення (6.2), (6.5) застосуємо неявну різницеву схему

$$k\frac{H_{i-1}^{k+1} - 2H_i^{k+1} + H_{i+1}^{k+1}}{h^2} - \nu\left(\frac{C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}}{h^2}\right) = \tag{6.9}$$

$$= \mu_i \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau}$$

або

$$H_i^{k+1} - H_i^k = \frac{k\,\tau}{h^2\mu_i}\left(H_{i-1}^{k+1} - 2H_i^{k+1} + H_{i+1}^{k+1}\right) - \frac{\nu\,\tau}{h^2\mu_i}\left(C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}\right), \tag{6.10}$$

де $$\mu_i = a\rho g\left(1 - \frac{2h}{H_{i+1}^k - H_{i-1}^k}\right).$$

Для знаходження розв'язку різницевої схеми (6.9) використаємо метод прогонки. Для цього запишемо її в прогоночному вигляді:

$$aH_{i-1}^{k+1} - cH_i^{k+1} + bH_{i+1}^{k+1} = -f\,, \tag{6.11}$$

де $a = b = \dfrac{k}{h^2}$, $c = \dfrac{\mu_i}{\tau} + \dfrac{2k}{h^2}$, $f = \dfrac{\mu_i}{\tau}H_i^k - \dfrac{\nu}{h^2}\left(C_{i+1}^{k+1} - 2C_i^{k+1} + C_{i-1}^{k+1}\right)$.

Розв'язок задачі знайдемо методом прогонки

$$H_i^{k+1} = \alpha_{i+1}H_{i+1}^{k+1} + \beta_{i+1}, \tag{6.12}$$

де $\alpha_{i+1}=\dfrac{b}{c-a\alpha_i}$, $\beta_{i+1}=\dfrac{a\,\beta_i+f_1}{c-a\,\alpha_i}$, $\alpha_1=0$, $\beta_1=H_1$.

Таким чином, одновимірна задача вологоперенесення в ненасиченому шарі грунту під впливом процесу масоперенесення з урахуванням осмотичних явищ алгоритмічно розв’язана повністю.

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати швидкість фільтрації, поле концентрації та напір вологи в зоні неповного насичення грунтового середовища, використавши одну з мов програмування.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувати отримані результати та дослідити вплив процесу перенесення солей з урахуванням осмотичних явищ на вологоперенесення в ґрунтовому середовищі. Зробити висновок.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Дослідити проходження процесу вологоперенесення з урахуванням масоперенесення та остмотичних явищ в грунтових середовищах при наступних вхідних даних:

$T=360$ *діб*, $\tau=30$ *діб*; $l=20$ *м*; $h=2$ *м*, $\sigma=0.5$, $\gamma=0{,}0065\,доба^{-1}$, $D=2\cdot10^{-2}\,м^2/добу$, $\rho=1000\,кг/м^3$, $\nu=2{,}8\cdot10^{-5}\,м^5/кг\cdot доба$, $H_0(x)=\dfrac{H_2-H_1}{L}x+H_1$, $H_1=5$ *м*; $H_2=15+N$ *м*;, $C_0=0$ *г/літр*, $\tilde{C}_1=2$ *г/літр*, $\tilde{C}_2=8*N$ *г/літр*, $C_*=350$ *г/літр*, N – № варіанту,

$$k=\begin{cases}0{,}4, & 0<N\le5; \qquad 0{,}8, \quad 5<N\le10;\\ 1{,}2, & 10<N\le15; \qquad 1{,}6, \quad 15<N\le20;\\ 1{,}8, & 20<N\le25; \qquad 2{,}2, \quad 25<N\le30.\end{cases}$$ де

Контрольні запитання

1. Записати математичну модель задачі вологоперенесення з вказівкою основних позначень.
2. Як визначаються коефіцієнти водопроникності та вологоємності?
3. Які основні фізичні процеси розглядаються в даній задачі?
4. Які величини знаходяться в процесі розв'язання кожної підзадачі, що відповідає конкретному фізичному процесу?
5. В чому полягає особливість знаходження розв'язку даної задачі?
6. Як впливає процес масоперенесення на процес вологоперенесення в ґрунтовому середовищі з урахуванням осмотичних явищ?

Лабораторна робота № 7
Математичне моделювання НДС в шарі грунту в одновимірному випадку

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання НДС в шарі грунту в одновимірному випадку для різних типів грунтів.

Теоретичні відомості

Математична модель задачі в шарі сухого грунту

Математична модель задачі НДС в шарі сухого грунту, на основі рівнянь рівноваги лінійної теорії пружності, описується такою крайовою задачею:

$$-(\lambda+2\mu)\frac{d^2U}{dx^2}=X\,, \tag{7.1}$$

$$U(0)=U(L)=0\,, \tag{7.2}$$

де $X=-\rho_{гр.}g$.

U – переміщення грунту,

$\lambda,\ \mu$ – сталі Ламе,

$\rho_{гр.}$ – густина грунту,

g – прискорення вільного падіння.

Сталі Ламе обчислюються за формулами:

$$\lambda = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}, \qquad \mu = \frac{E\cdot}{2(1+\nu)},$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуасона.

В даній крайовій задачі (7.1) – рівняння лінійної теорії пружності в одновимірному випадку для сухого грунту; (7.2) – крайові умови, що означають відсутність зміщень на краях грунту.

Для визначення НДС шару грунту в пружній постановці перейдемо в крайовій задачі (7.1), (7.2) до безрозмірних величин

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \overline{U} = \frac{U}{L}, \tag{7.3}$$

Тоді в безрозмірних змінних математична модель (7.1), (7.2) прийме наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{\partial x^2} = a, \qquad x\,\epsilon\,(0;1), \\ U(0) = U(1) = 0, \end{cases} \tag{7.4}$$

де
$$a = \frac{\rho_{гр.}g}{\lambda + 2\mu} = const. \tag{7.5}$$

Тобто дана математична модель розглядається в шарі одиничної величини.

Розв'язок задачі задачі НДС в шарі сухого грунту

Загальний розв'язок (7.4) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a \Rightarrow U(x) = \frac{ax^2}{2} + C_1x + C_2, \tag{7.6}$$

де C_1, C_2 - невідомі сталі, які знаходяться з крайових умов задачі (7.4):

$$C_2 = 0; \tag{7.7}$$

$$0 = \frac{a}{2} + C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -\frac{a}{2}. \qquad (7.8)$$

Таким чином, частковий розв'язок даної задачі прийме такий вигляд:

$$U(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2}x = \frac{ax}{2}(x-1). \qquad (7.9)$$

Деформації та напруження обчислюються за наступними формулами:

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx},\ \sigma = (\lambda + 2\mu)\frac{dU}{dx},\ \ x\epsilon(0;1). \qquad (7.10)$$

або

$$U'(x) = \varepsilon(x) = ax - \frac{a}{2}; \quad \sigma(x) = (\lambda + 2\mu)\left(ax - \frac{a}{2}\right). \qquad (7.11)$$

Таким чином, одновимірна задача НДС в пружній постановці (в сухому шарі грунту) розв'язана повністю і розв'язок знаходиться за формулами (7.9), (7.12).

Математична модель НДС в шарі змоченого грунту має вигляд

$$-(\lambda + 2\mu)\frac{d^2U}{dx^2} = X, \qquad (7.12)$$

$$U(0) = U(L) = 0, \qquad (7.13)$$

де $X = -\rho_{гр.}g + \frac{dp}{dx},\ p = \rho_p g(h + x),$

h – п'єзометричний напір,

p – гідростатичний тиск рідини,

g – прискорення вільного падіння,

$\rho_{гр.}$ – густина грунту,

ρ_p – густина рідини.

В безрозмірних величинах задача (7.12)-(7.13) набуде вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{\partial x^2} = a, \qquad x \in (0;1), \\ U(0) = U(1) = 0, \end{cases} \tag{7.14}$$

де

$$a = \frac{(-\rho_{р.} + \rho_{гр.})g}{\lambda + 2\mu}. \tag{7.15}$$

Розв'язок задачі (переміщення, напруження, деформації) знаходиться аналогічно, як і в попередньому випадку, за формулами (7.9), (7.11), але лише з урахуванням обчислення a за формулою (7.15).

Математична модель НДС в одновимірному випадку при фільтрації підземних вод

Розглянемо попередню задачу при наявності фільтраційних процесів у грунті

Математична модель задачі має вигляд

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{d^2U}{\partial x^2} = X, \quad x \in (0;L) \\ V = -k\dfrac{dh}{dx}, \quad \dfrac{dV}{dx} = 0, \\ U(0) = U(L) = 0, \\ h(0) = H_1, \quad h(L) = H_2, \end{cases} \tag{7.15}$$

де $\quad X = \rho_{гр.}g + \dfrac{dp}{dx},\ h = \dfrac{p}{\rho_p g} + x,$

причому x зі знаком „+", бо вісь OX напрямлена вгору;

H_1, H_2 - значення п'єзометричних напорів при $x = 0,\ x = L$;

p – тиск рідини.

Спочатку розв'язуємо задачу **фільтрації**

$$\begin{cases} V = -k\dfrac{dh}{dx}, \quad \dfrac{dV}{dx} = 0, \\ h(0) = H_1, \quad h(L) = H_2. \end{cases}$$

В результаті чого знаходимо швидкість фільтрації за формулою

$$V = -k\,\frac{H_1 - H_2}{L}\,. \qquad (7.16)$$

З рівняння нерозривності крайової задачі (7.15) слідує:

$$\frac{d^2h}{dx^2} = 0 \Rightarrow h = Ax + B \qquad (7.17)$$

Використовуючи крайові умови задачі(7.15), будемо мати

$$\frac{dh}{dx} = A,\ h(0) = A\cdot 0 + B = H_1 \Rightarrow B = H_1;$$

$$h(L) = A\cdot L + H_1 = H_2 \Rightarrow A = \frac{H_2 - H_1}{L}\,.$$

Підставляючи значення A і B у (7.17), отримаємо:

$$h = \frac{H_2 - H_1}{L}\,x + H_1\,. \qquad (7.18)$$

Звідси слідує формула (7.16). Використовуючи (7.17), знаходимо $\frac{dp}{dx}, p$.

Підставивши (7.18) у формулу $p = \rho_{p.} g\,(h - x)$,

отримаємо:

$$p = \rho_{p.} g\left(\frac{H_2 - H_1}{L}\,x + H_1 - x\right) = \rho_{p.} g\left(\left(\frac{H_2 - H_1}{L} - 1\right)\cdot x + H_1\right).$$

Тоді
$$\frac{dp}{dx} = \rho_{p.} g\left(\frac{H_2 - H_1}{L} - 1\right).$$

В безрозмірних величинах отримаємо задачу для визначення переміщення:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2} = a, \qquad x \in (0;1), \\ U(0) = U(1) = 0, \end{cases} \qquad (7.19)$$

де

$$a = \frac{\left[\rho_{гр.} + \left(\frac{H_2 - H_1}{L} - 1\right)\rho_{р.}\right] g}{\lambda + 2\mu}. \qquad (7.20)$$

Розв’язок задачі (7.19), а саме переміщення знаходимо, як раніше

$$U(x) = \frac{ax}{2}(x-1), \qquad (7.21)$$

де a має вигляд (7.20). Деформації $\varepsilon = \varepsilon(x)$, напруження $\sigma = \sigma(x)$, знаходимо аналогічно, як в попередньому випадку за формулами (7.11), лише з урахуванням, що a обчислюється за формулою (7.20).

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати НДС у вигляді розподілу напружень, деформацій і переміщень в сухому, зволоженому шарах грунту та в шарі грунті при наявності фільтрації підземних вод.
2. Результати обчислень представити в табличній формі.
3. Вивести графічні представлення величин, що характеризують НДС грунту: переміщення, напруження, деформації. На кожному графіку представити розподіли відповідних величин для трьох станів грунту (сухий, зволожений, при фільтрації).
4. Порівняти отримані результати для трьох випадків та зробити висновок.
5. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Розрахувати НДС у вигляді розподілу напружень, деформацій і переміщень переміщень в сухому, зволоженому шарах грунту та в шарі грунті при наявності фільтрації підземних вод.

Результати чисельних розрахунків провести при наступних вхідних даних:

N – № варіанту парний	H_1=1 *м;* H_2=7 *м;* L=10 *м;* $g=9{,}8 м/с^2$; $\rho_р=1020+N\ кг/м^3$; $\rho_{гр}=1650+N\ кг/м^3$; $E=3\cdot10^6 кг/м^3$; $\nu=0{,}35$.
N – № варіанту непарний	H_1=0,5 *м;* H_2=5 *м;* L=20 *м;* $g=9{,}8 м/с^2$; $\rho_р=1000+N\ кг/м^3$; $\rho_{гр}=2000+N\ кг/м^3$; $E=2{,}5\cdot10^6 кг/м^3$, $\nu=0{,}25$.

Контрольні запитання

7. Дати визначення напружено-деформовного стану грунту (НДС).
8. Записати математичну модель задачі НДС в шарі сухого грунту.
9. Записати математичну модель задачі НДС в шарі зволоженого грунту.
10. Записати математичну модель задачі НДС в шарі грунту, де відбуваються процеси фільтрації.
11. Чим відрізняються математичні моделі для різних типів грунтів?
12. Записати формули для визначення основних характеристик НДС (переміщення, деформація, напруження).

Лабораторна робота № 8
Математичне моделювання НДС в шарі грунту при наявності вільної поверхні (РГВ)

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання НДС в шарі грунту при наявності вільної поверхні (при відсутності переміщень нижньої і верхньої поверхонь ґрунту).

Теоретичні відомості

Математична модель задачі

Дослідження впливу рівня ґрунтових вод на НДС ґрунтового масиву проведемо в рамках одновимірної математичної моделі.

НДС в шарі ґрунту в природному стані та тому, що знаходиться нижче РГВ, у стаціонарному одновимірному випадку описується рівнянням рівноваги лінійної теорії пружності

$$\left(\lambda_1 + 2\mu_1\right)\frac{d^2 u_1}{dx^2} = X_1,\ x \in (0, l_1), \tag{8.1}$$

$$\left(\lambda_2 + 2\mu_2\right)\frac{d^2 u_2}{dx^2} = X_2,\ x \in (l_1, l). \tag{8.2}$$

Тут: u_i, $i = 1{,}2$ – переміщення вздовж осі OX в ґрунтах, що знаходяться відповідно в зваженому $\left(x \in (0, l_1)\right)$ та в природному $\left(x \in (l_1, l)\right)$ стані;

$$X_1 = \gamma_{зв.},\ X_2 = \gamma_{пр.}.$$

Тут $\gamma_{зв.}$ – питома вага ґрунту в зваженому стані, причому

$$\gamma_{зв.} = \gamma_{нас.} - \gamma_{р.}, \tag{8.3}$$

де $\gamma_{нас.}$ – питома вага ґрунту в насиченому стані, яка обчислюється за формулою

$$\gamma_{нас.} = \gamma_{Г.} + n_1 \cdot \gamma_{р.}. \tag{8.4}$$

Підставляючи значення (8.4) в (8.3), отримаємо

$$\gamma_{зв.} = \gamma_{Г.} - (1 - n_1)\gamma_{р.}, \tag{8.5}$$

де $\gamma_{Г.}$ – питома вага ґрунту в сухому стані, γ_P – питома вага рідини.

$\gamma_{пр.}$ – питома вага ґрунту в природному стані, причому

$$\gamma_{пр.} = \rho_{пр.} \cdot g, \tag{8.6}$$

де $\rho_{пр.}$ – густина ґрунту в природному стані, g – прискорення вільного падіння.

Крайові умови для переміщень мають вигляд

$$u_1(0) = 0,\ u_2(l) = 0. \tag{8.7}$$

Умови спряження записуються так:

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \tag{8.8}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{du_2(l_1)}{dx}. \tag{8.9}$$

Отже, НДС поставленої вище задачі описується математичною моделлю (8.1), (8.2), (8.7)-(8.9).

Таким чином, для визначення НДС шару ґрунту з РГВ необхідно розв'язати крайову задачу (8.1), (8.2), (8.7)-(8.9) для системи рівнянь лінійної теорії пружності.

Перейдемо у (8.1), (8.2), (8.7)-(8.9) до безрозмірних величин згідно формул

$$\overline{x} = \frac{x}{l},\ \overline{u_i} = \frac{u_i}{l},\ \overline{l_1} = \frac{l_1}{l},\ \overline{a_i} = a_i \cdot l\,, i = 1{,}2\,. \tag{8.10}$$

Тоді у безрозмірних змінних математична модель НДС ґрунту матиме такий вигляд (надалі рисочки над безрозмірними змінними для простоти опущені):

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} = a_1,\ x \in (0, l_1)\,, \tag{8.11}$$

$$\frac{d^2u_2}{dx^2} = a_2,\ x \in (l_1, 1)\,, \tag{8.12}$$

$$u_1(0) = 0\,, \tag{8.13}$$

$$u_1(l_1) = u_2(l_1)\,, \tag{8.14}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{du_2(l_1)}{dx}\,, \tag{8.15}$$

$$u_2(1) = 0\,, \tag{8.16}$$

де $a_1 = \dfrac{\gamma_{зв.}}{\lambda_1 + 2\mu_1}$, $a_2 = \dfrac{\gamma_{пр.}}{\lambda_2 + 2\mu_2}$ – безрозмірні параметри.

Розв'язок задачі

Знайдемо розв'язок задачі НДС масиву ґрунту при відсутності переміщень нижньої та верхньої поверхонь ґрунту у безрозмірних змінних.

Загальний розв'язок сформульованої задачі (8.11)-(8.16) має вигляд

$$u_1(x) = \frac{a_1 x^2}{2} + c_1 x + c_2\,,\ \ x \in \left(0, l_1\right), \tag{8.17}$$

$$u_2(x) = \frac{a_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4\,,\ \ x \in \left(l_1, 1\right), \tag{8.18}$$

де c_i, $i = \overline{1,4}$ – невідомі сталі.

Для визначення невідомих сталих c_i, $i = \overline{1,4}$ використаємо крайові умови (8.13), (8.16) та умови спряження (8.14), (8.15).

Оскільки на основі (8.13) $u_1(0) = 0,$ то маємо

$$c_2 = 0\,. \tag{8.19}$$

Використовуючи умову (8.16), маємо

$$u_2(1) = \frac{a_2}{2} + c_3 + c_4 = 0\,. \tag{8.20}$$

Із умов спряження (8.14), (8.15) отримаємо

$$\frac{a_1 l_1^2}{2} + c_1 l_1 = \frac{a_2 l_1^2}{2} + c_3 l_1 + c_4\,, \tag{8.21}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)(a_1 l_1 + c_1) = (\lambda_2 + 2\mu_2)(a_2 l_1 + c_3)\,. \tag{8.22}$$

Із формули (7.20) слідує

$$c_4 = -c_3 - \frac{a_2}{2}\,. \tag{8.23}$$

Із формули (7.22) маємо, що

$$c_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1}(a_2 l_1 + c_3) - a_1 l_1\,. \tag{8.24}$$

Підставивши значення (8.23) та (8.24) у формулу (8.21) отримаємо

$$c_3 = \frac{\dfrac{a_2}{2} - \dfrac{(a_1 + a_2) l_1^2}{2} + \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1^2}{\left(1 - \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right) l_1 - 1}\,. \tag{8.25}$$

Величина деформації обчислюється за формулою $\varepsilon = \dfrac{du}{dx}$ і згідно (8.17), (8.18) набуде вигляду

$$\varepsilon_1(x) = a_1 x + c_1,\ 0 \le x \le l_1, \tag{8.26}$$

$$\varepsilon_2(x) = a_2 x + c_3,\ l_1 \le x \le 1. \tag{8.27}$$

Напруження знаходяться згідно формули $\sigma = (\lambda + 2\mu)\dfrac{du}{dx}$ і матимуть такий вигляд:

$$\sigma_1(x) = (\lambda_1 + 2\mu_1)(a_1 x + c_1),\ 0 \le x \le l_1, \tag{8.28}$$

$$\sigma_2(x) = (\lambda_2 + 2\mu_2)(a_2 x + c_3),\ l_1 \le x \le 1\ . \tag{8.29}$$

Таким чином, задача НДС в шарі грунту з РГВ розв'язана повністю і дається формулами (8.17)-(8.19), (8.23)-(8.29).

Знайдемо розв'язок задачі НДС масиву ґрунту при відсутності переміщень нижньої та верхньої поверхонь у розмірних змінних

Перейдемо у (8.17)-(8.19), (8.23)-(8.29) до розмірних величин, враховуючи, що рисочки над безрозмірними величинами для зручності були опущені, згідно формул (8.10).

Отже, маємо розв'язок задачі у розмірних величинах

$$u_1(x) = \frac{a_1 x^2}{2} + c_1 x + c_2,\ x \in \left(0, l_1\right), \tag{8.30}$$

$$u_2(x) = \frac{a_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4,\ x \in \left(l_1, l\right), \tag{8.31}$$

де

$$c_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1}(a_2 l_1 + c_3) - a_1 l_1, \tag{8.32}$$

$$c_2 = 0\,, \tag{8.33}$$

$$c_3 = \frac{\dfrac{a_2 l^2}{2} - \dfrac{(a_1 + a_2) l_1^2}{2} + \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1^2}{\left(1 - \dfrac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right) l_1 - l}, \tag{8.34}$$

$$c_4 = -c_3 l - \frac{a_2 l^2}{2}. \qquad (8.35)$$

Порядок виконання роботи

1. Розрахувати НДС у вигляді розподілу напружень, деформацій і переміщень в шарах ґрунту в природному стані ґрунту та в зволоженому (нижче РГВ), при умові, що відсутнє переміщення нижньої та верхньої меж ґрунту.
2. Результати обчислень представити в табличній та графічній формах.
3. Проаналізувавши отримані результати, зробити висновок.
4. Оформити і захистити лабораторну роботу.

Завдання

Розрахувати НДС у вигляді розподілу напружень, деформацій і переміщень в шарах ґрунту в природному та в зволоженому станах ґрунту (нижче РГВ), при умові, що відсутнє переміщення нижньої та верхньої меж ґрунту. Результати чисельних розрахунків провести при наступних вхідних даних:

№ варіанту	λ, $кг/м^2$	μ_1, $кг/м^2$	γ, $кг/м^3$	l, $м$
1.	$\lambda_1 = 15000$ $\lambda_2 = 19000$	$\mu_1 = 10000$ $\mu_2 = 12000$	$\gamma_{зв.} = 10{,}5$ $\gamma_{пр.} = 19{,}0$	$l_1 = 0{,}4$ $l = 1$
2.	$\lambda_1 = 13500$ $\lambda_2 = 18000$	$\mu_1 = 9000$ $\mu_2 = 13500$	$\gamma_{зв.} = 10{,}9$ $\gamma_{пр.} = 17{,}0$	$l_1 = 0{,}5$ $l = 1$
3.	$\lambda_1 = 17000$ $\lambda_2 = 20000$	$\mu_1 = 11000$ $\mu_2 = 14000$	$\gamma_{зв.} = 10{,}5$ $\gamma_{пр.} = 17{,}0$	$l_1 = 0{,}3$ $l = 1$
4.	$\lambda_1 = 150000$ $\lambda_2 = 170000$	$\mu_1 = 90000$ $\mu_2 = 115000$	$\gamma_{зв.} = 5$ $\gamma_{пр.} = 7$	$l_1 = 1{,}5$ $l = 3$

5.	$\lambda_1 = 2160000$ $\lambda_2 = 2950000$	$\mu_1 = 926000$ $\mu_2 = 111000$	$\gamma_{зв.} = 0{,}25$ $\gamma_{пр.} = 0{,}35$	$l_1 = 7$ $l = 10$
6.	$\lambda_1 = 2000000$ $\lambda_2 = 2700000$	$\mu_1 = 906000$ $\mu_2 = 100000$	$\gamma_{зв.} = 0{,}5$ $\gamma_{пр.} = 0{,}7$	$l_1 = 5$ $l = 10$
7.	$\lambda_1 = 216000$ $\lambda_2 = 295000$	$\mu_1 = 926000$ $\mu_2 = 111000$	$\gamma_{зв.} = 2{,}5$ $\gamma_{пр.} = 3{,}50$	$l_1 = 6$ $l = 10$
8.	$\lambda_1 = 160000$ $\lambda_2 = 950000$	$\mu_1 = 926000$ $\mu_2 = 111000$	$\gamma_{зв.} = 3{,}5$ $\gamma_{пр.} = 4{,}7$	$l_1 = 4$ $l = 8$
9.	$\lambda_1 = 2000000$ $\lambda_2 = 3150000$	$\mu_1 = 920000$ $\mu_2 = 113000$	$\gamma_{зв.} = 0{,}55$ $\gamma_{пр.} = 0{,}7$	$l_1 = 3$ $l = 6$
10.	$\lambda_1 = 155000$ $\lambda_2 = 180000$	$\mu_1 = 80000$ $\mu_2 = 110000$	$\gamma_{зв.} = 5{,}5$ $\gamma_{пр.} = 7{,}55$	$l_1 = 1{,}2$ $l = 2$

Контрольні запитання

1. Що таке НДС?
2. Що називається вільною поверхнею (рівень грунтових вод)?
3. Записати математичну модель задачі НДС в шарі грунту при наявності вільної поверхні (рівня ґрунтових вод).
4. Як визначається питома вага грунту в зваженому та природньому станах?
5. Яким чином визначаються невідомі сталі у формулі для знаходження переміщення?
6. Як знайти переміщення, деформацію, напруження для задачі НДС в шарі грунту при наявності вільної поверхні?

Лабораторна робота № 9
Математичне та комп'ютерне моделювання ідентифікації місцеположення джерела забруднення в одновимірних задачах масоперенесення

Мета роботи – навчитися проводити математичне та комп'ютерне моделювання ідентифікації місцеположення джерела забруднення на відрізку в одновимірних задачах масоперенесення.

Теоретичні відомості

Постановка задачі та математична модель

Розглянемо задачу чисто дифузійного перенесення забруднень в деякому однорідному середовищі (грунті, повітрі, воді) на прямій від деякого точкового джерела потужності Q, розміщеного в точці $x = x_0$. Нехай процес перенесення забруднення є встановленим і описується першим законом Фіка. Задача полягає в тому, що потрібно знайти координату x_0 розміщення джерела забруднень.

Знайдемо точку x_0 розміщення джерела, концентрація забруднень $c(x, x_0)$ від якого визначається із розв'язку такої крайової задачі:

$$D\frac{d^2c}{dx^2} - \gamma c = -Q\delta(x - x_0), \quad x \in (0, l), \quad (9.1)$$

$$c(0, x_0) = \tilde{C}_1, \quad c(l, x_0) = \tilde{C}_2. \quad (9.2)$$

Тут $c(x, x_0)$ - концентрація забруднень в точці x від джерела, розміщеного в точці x_0, $D -$ коефіцієнт дифузії, $\gamma -$ коефіцієнт, що враховує зміну інтенсивності забрудненої речовини, $Q -$ потужність точкового джерела забруднень, x_0 - координата точки розміщення джерела забруднення. До того ж

$$c \in C^2[0; l] / \{x_0\},$$

де C^2 - простір неперервних функцій, крім похідних, що в точці x_0 мають розрив.

Потрібно при заданих вхідних даних $\gamma > 0,\ Q > 0\ ,D > 0$ та значеннях концентрацій, заміряних в деяких точках x_i, $i = \overline{1,n}$ знайти точку розміщення джерела $x = x_0$ на відрізку $[0,l]$.

Зауважимо, що права частина рівняння (9.8) записана у вигляді дельта-функції, яка моделює миттєвий викид забруднення точковим джерелом з потужністю Q, розміщеним у точці $x = x_0$.

Розв'язок задачі у випадку нульових граничних умов

Знайдемо точку x_0 розміщення джерела, концентрація забруднень $c(x)$ від якого визначається із розв'язку крайової задачі

$$D\frac{d^2c}{dx^2} - \gamma c = -Q\delta(x - x_0),\quad x \in (0,l), \tag{9.3}$$

$$c(0,x_0) = 0,\quad c(l,x_0) = 0. \tag{9.4}$$

$c(x,x_0)$ належить простору неперервних функцій та її похідної аж до другого порядку (крім точки x_0) $c \in C^2[0;l]/\{x_0\}$.

Потрібно при заданих вхідних даних $\gamma > 0,\ Q > 0\ ,D > 0$ знайти точку розміщення джерела $x = x_0$ на відрізку $[0,l]$.

Знаходження концентрації забруднення $c(x,x_0)$ методом функції Гріна

Знайдемо концентрацію забруднень $c(x,x_0)$, що задовільняє (9.3), (9.4), іншим методом – методом функції Гріна. Запишемо (9.3), (9.4) у вигляді

$$\frac{d^2c}{dx^2}-\omega^2c=-\frac{Q}{D}\delta(x-x_0), \tag{9.5}$$

$$c(0,x_0)=c(x_0,l)=0, \tag{9.6}$$

де $\omega^2=\dfrac{\gamma}{D}$, $\gamma>0$.

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді такої функції Гріна

$$c(x,x_0)=\begin{cases}A_1e^{\omega x}+B_1e^{-\omega x}, & 0<x<x_0,\\ C_1e^{\omega x}+D_1e^{-wx}, & x_0<x<l.\end{cases} \tag{9.7}$$

Для знаходження невідомих констант A_1, B_1, C_1 і D_1 маємо дві крайові умови (9.6) і дві умови спряження при $x=x_0$

$$\begin{aligned}&G(x_0-0,x_0)=G(x_0+0,x_0),\\ &G'_x(x_0+0,x_0)=G'_x(x_0-0,x_0)-\frac{Q}{D}.\end{aligned} \tag{9.8}$$

Ці чотири рівняння однозначно визначають A_1, B_1, C_1 і D_1. Враховуючи крайові умови (9.6), функцію Гріна шукаємо у такому вигляді:

$$G(x,x_0)=\begin{cases}A(x_0)sh\omega x, & 0<x<x_0,\\ B(x_0)sh\omega(x-l), & x_0<x<l.\end{cases} \tag{9.9}$$

де $A(x_0)$, $B(x_0)-$ невідомі коефіцієнти, що залежать від параметра x_0.

Врахувуючи умови спряження (9.8), маємо

$$\begin{cases}A(x_0)sh\omega x_0-B(x_0)sh\omega(x_0-l)=0,\\ -A(x_0)\omega ch\,\omega x_0+B(x_0)\omega ch\,\omega(x_0-l)=-\dfrac{Q}{D}.\end{cases} \tag{9.10}$$

$$\begin{cases} A(x_0) = -\dfrac{Q}{D}\dfrac{sh\omega(x_0 - l)}{\omega sh\omega l} = -\dfrac{Q}{\omega D sh\omega} sh\omega(l - x_0), \\ B(x_0) = -\dfrac{Q}{D}\dfrac{sh\omega x_0}{\omega sh\omega} = -\dfrac{Q}{\omega D sh\omega} sh\omega x_0. \end{cases} \quad (9.11)$$

Остаточно, функція Гріна задачі (9.5), (9.6) має вигляд

$$c(x, x_0) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{D}\dfrac{sh\omega(x_0 - l)sh\omega x}{\omega sh\omega l} = \dfrac{Q}{\omega D sh\omega l} sh\omega(l - x_0)sh\omega x, 0 < x < x_0, \\ -\dfrac{Q}{D}\dfrac{sh\omega x_0 sh\omega(x - l)}{\omega sh\omega} = \dfrac{Q}{\omega D sh\omega l} sh\omega x_0 sh\omega(l - x), x_0 < x < l. \end{cases}$$

(9.11)

$$c(x, x_0) = \frac{Q}{\omega D sh\omega l}\begin{cases} sh\omega(l - x_0)sh\omega x, & 0 < x < x_0, \\ sh\omega x_0 sh\omega(l - x), & x_0 < x < l. \end{cases} \quad (9.12)$$

Із (9.12) випливає, що максимальна концентрація C_{max} досягається в точці $x = x_0$ і визначається як

$$C_{\max}(x_0) = c(x_0, x_0) = \frac{Q}{2\omega D sh\omega l}\left[ch\omega l - ch\omega(l - 2x_0)\right]. \quad (9.13)$$

З (9.13) легко бачити, що максимум функції $C_{max}(x_0)$досягається при $x_0 = \dfrac{l}{2}$ і дорівнює

$$C_{max}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Q}{2\omega D} th\frac{\omega l}{2}. \quad (9.14)$$

Кількість викинутих джерелом забруднень обчислюється з формули:

$$q(x_0)=\int_0^l c(x,x_0)dx = = \frac{Q}{Dw^2 sh\omega l}\left(sh\omega(l-x_0)-sh\omega x_0 - sh\omega l\right). \tag{9.15}$$

Знаходження точного значення координати розміщення джерела x_0, використовуючи значення точного розв'язку

Запишемо формулу (9.12) для обчислення концентрації забруднень $c(x,x_0)$ у вигляді :

$$c(x,x_0)=A_0\begin{cases} A_1(x_0)sh\omega x, & 0<x<x_0, \\ A_2(x_0)sh\omega(l-x), & x_0<x<l, \end{cases} \tag{9.16}$$

де

$$A_0=\frac{Q}{\omega D sh\omega l},\ A_1(x_0)=sh\omega(l-x_0),\ A_2(x_0)=sh\omega x_0 . \tag{9.17}$$

Якщо з якихось міркувань відоме хоч одне точне значення концентрації забруднень в точці $x=x_i : C_i=c(x_i,x_0)$, то тоді отримаємо

$$C_i = A_0 sh\omega(l-x_0)sh\omega x_i, \quad 0<x_i<x_0, \tag{9.18}$$

або

$$C_i = A_0 sh\omega x_0 sh\omega(l-x_i), \quad x_0<x_i<l. \tag{9.19}$$

Звідки маємо

$$sh\omega(l-x_0)=\frac{C_i}{A_0 sh\omega x_i}, \quad 0<x_i<\frac{l}{2}, \tag{9.20}$$

або

$$sh\omega x_0=\frac{C_i}{A_0 sh\omega(l-x_i)}, \quad \frac{l}{2}<x_i<l. \tag{9.21}$$

З (9.20), (9.21) легко визначаємо x_0

$$x_0 = \begin{cases} l - \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{C_i}{A_0 sh\omega x_i}\right), & 0 < x_i < \frac{l}{2}, \\ \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{C_i}{A_0 sh\omega(l - x_i)}\right), & \frac{l}{2} < x_i < l. \end{cases} \qquad (9.22)$$

Знаходження наближеного значення координати розміщення джерела $\tilde{x}_0^i$ за даними вимірювання

Нехай у точці x_i маємо заміряне значення концентрації $c(x_i, x_0) = \overline{C_i}$, яке може дещо відрізнятись від точного значення C_i. При підстановці $\overline{C_i}$ в (9.22), замість точного значення x_0, отримаємо деяке наближене його значення $\tilde{x}_0^i$.

$$\tilde{x}_0^i = \begin{cases} l - \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{\overline{C_i}}{A_0 \cdot sh\omega x_1}\right), & 0 < x_i < \frac{l}{2}, \\ \frac{1}{\omega} Arsh\left(\frac{\overline{C_i}}{A_0 \cdot sh\omega(l - x_i)}\right), & \frac{l}{2} < x_i < l. \end{cases} \qquad (9.23)$$

Таким чином за результатами замірів концентрації в точці $x = x_i$, користуючись формулою (9.23) легко знаходимо наближене значення координати розміщення джерела забруднень $\tilde{x}_0^i$.

Порядок виконання роботи

1. Обчислити розподіл концентрації на відрізку $[0; l]$ при заданих коефіцієнтах $D, \gamma, Q, l,$ використовуючи формулу точного розв'язку (9.12). Значення x_0 задати будь-яке з $[0; l]$.
2. Зобразити графічно $C(x, x_0)$.

3. Задати декілька значень $x_0 : x_0^1, x_0^2, x_0^3, ...,$ серед яких має бути середина. Побудувати на одному графіку різними кольорами декілька залежностей $C = C(x, x_0^1)$, $C = C(x, x_0^2)$, $C = C(x, x_0^3)$, … .
4. При заданому $x_1 = 1$ і $C = C(x, x_0^1) = C_1$ за формулою (9.22) обчислити значення x_0 і порівняти його з $x_0^1, x_0^2, x_0^3, ...$.
5. При заданому $\overline{C_1}$, користуючись наближеною формулою (9.23), обчислити $\tilde{x}_0$ і порівняти його з x_0^1.

№ варіанту	Вхідні дані
1.	$D=1,\quad Q=1,\quad \gamma=1,\quad l=10,\quad x_0=2.82$
2.	$D=1{,}8\quad Q=1{,}2,\quad \gamma=0.01,\quad l=10,\quad x_0=3$
3.	$D=1{,}5,\quad Q=1,\quad \gamma=0{,}1,\quad l=12,\quad x_0=5$
4.	$D=1,\quad Q=2,\quad \gamma=1{,}5,\quad l=16,\quad x_0=7$
5.	$D=2,\quad Q=2,\quad \gamma=2,\quad l=18,\quad x_0=8$
6.	$D=1{,}5\quad Q=2,\quad \gamma=1{,}5,\quad l=15,\quad x_0=9$
7.	$D=3,\quad Q=2{,}5,\quad \gamma=2,\quad l=17,\quad x_0=7$
8.	$D=1{,}7\quad Q=2{,}5,\quad \gamma=1{,}5,\quad l=23,\quad x_0=11$
9.	$D=1{,}7\quad Q=1{,}5,\quad \gamma=0{,}05,\quad l=20,\quad x_0=9$
10.	$D=1{,}3\quad Q=1{,}2,\quad \gamma=0{,}15,\quad l=25,\quad x_0=7$

Контрольні запитання

7. Сформулювати постановку задачі дифузійного перенесення забруднень в деякому однорідному середовищі (грунті, повітрі, воді) на прямій від деякого

точкового джерела потужності Q, розміщеного в точці $x = x_0$.

8. Записати математичні моделі задач ідентифікації місцеположення джерела забруднення в стаціонарному одновимірному випадку на прямій та на відрізку. Чим відрізняються дані математичні моделі?
9. Які методи знаходження розв'язку задачі ідентифікації джерела забруднення знаєте?
10. В чому полягає суть методу скінченних синус-перетворень Фур'є для знаходження концентрації забруднення $c(x, x_0)$?
11. В чому полягає метод функцій Гріна? Основна формула.
12. Як визначається максимальна концентрація забруднень $C_{\max}$, що досягається в точці $x = x_0$?
13. Як визначити кількість викинутих джерелом забруднень?
14. Записати формули для знаходження точного значення координати розміщення джерела забруднення x_0 наближеного значення координати розміщення джерела $\tilde{x}_0^i$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Власюк А. П., Жуковська Н. А., Жуковський В. В. Математичне і комп'ютерне моделювання впливу тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів на деформаційні процеси ґрунтових масивів : монографія. Рівне : НУВГП, 2019. 267 с.
2. Власюк А. П., Мартинюк А. П. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів : монографія. Рівне : УДУВГП, 2004. 211 с.
3. Власюк А. П., Остапчук О. П. Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах : монографія. Рівне : НУВГП, 2015. 214 с.
4. Власюк А. П., Цвєткова Т. П. Математичне моделювання перенесення солей при фільтрації та вологоперенесенні у насичено-ненасичених ґрунтах : монографія. Рівне : НУВГП, 2018. 198 с.
5. Іванчук Н. В., Мартинюк П. М., Кузло М. Т. Математичне моделювання фільтраційних процесів в грунтових середовищах з урахуванням впливу елементів інженерних споруд : монографія. [Електронне видання]. Рівне : НУВГП, 2021. 121 с.

Допоміжна

1. Samarskii Alexander A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, 2001. 761 p.
2. Samarskii A. A., Vabishchevich Petr N. Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics, Berlin, New York : De Gruyter, 2007.
3. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. Львів : ЛНУ ім. І.Франка, 2004. 221 с.

Інформаційні ресурси

1. Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/
2. Обласна наукова бібліотека (м. Рівне, майдан Короленка, 6). URL: http://www.libr.rv.ua/
3. Наукова бібліотека НУВГП (м. Рівне, вул. Олекси Новака, 75). URL: https://lib.nuwm.edu.ua/