Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Навчально-науковий інститут енергетики, автоматики та
водного господарства
Кафедра автоматизації, електротехнічних та
комп’ютерно-інтегрованих технологій

04-03-420М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни
«**Дискретна математика**»
(Частина 1. Елементи теорії математичної логіки та теорії множин) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання

Рекомендовано науково-
методичною радою
з якості ННІ ЕАВГ
Протокол № 4 від 17.12.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дискретна математика» (Частина 1. Елементи теорії математичної логіки та теорії множин) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп’ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання. Частина 1. [Електронне видання] / Мащенко В.А. – Рівне : НУВГП, 2024. – 49 с.

Укладач: Мащенко В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск: Древецький В. В., доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Керівник групи забезпечення: Христюк А. О., кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп’ютерно-інтегрованих технологій.

Зміст

Вступ

Курс «Дискретної математики» носить важливий характер при ознайомлення студентів з її основами для успішного вивчення профільних дисциплін та отримання знань, які будуть необхідні в майбутній практичній діяльності, а також формування навичок математичного розв'язування та дослідження задач, розвиток логічного і алгоритмічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури.

В методичних вказівках зібраний, систематизований та викладений теоретичний матеріал за темами: «Основи математичної логіки» та «Основи теорії множин», який охоплює практичні питання розв'язку типових задач. В кінці кожної практичної роботи є завдання для самостійної роботи, що роблять методичні вказівки зручним інструментом як на аудиторних заняттях так і для студентів заочної форм навчання.

Практична робота № 1
Елементи математичної логіки

1.1. Поняття висловлення. Логічні операції. Складені висловлення

Просте (елементарне) висловлення – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити запитання про його правильність або неправильність. Прості висловлення, у яких виражено правильну думку, називають **істинними**, а ті, що виражають неправильну, – **хибними**.

Зазвичай конкретні елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, … (інколи з індексами), а значення висловлень *істинно* та *хибно* – відповідно символами „1” та „0” (або **I** та **X**, а в англомовній літературі – відповідно **T** і **F**).

Крім того, розглядатимемо **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, … (інколи з індексами) і називатимемо також **пропозиційними змінними**. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення
(1 або 0).

Окремі елементарні висловлення можна з’єднувати між собою за допомогою певних зв’язок (сполучників), утворюючи складені висловлення.

Наприклад, вирази *Число* 5 *– просте та число* 23 *– просте*; *Київ – столиця України, а Берн – столиця Швейцарії*; *Якщо число* 27 *кратне* 3, *то число* 27 *кратне* 6; *Неправильно, що* $2 < 3$, *або неправильно, що* $4 < 3$ є складеними висловленнями, що утворені з простіших (елементарних) висловлень шляхом використання зв’язок *і*; *а*; *якщо …, то*; *неправильно, що* та *або*.

У математичній логіці використання мовного зв’язку трактується як виконання над висловленнями певних логічних операцій, що мають такі назви: **кон'юнкція**, **диз'юнкція**, **заперечення**, **імплікація** та **еквівалентність**.

У табл. 1.1 наведено різні назви та позначення, що використовують для цих операцій.

Таблиця 1.1

Назва	Позначення
Кон'юнкція (логічне множення, логічне *і*)	$\wedge$ & $\cdot$
Диз'юнкція (логічне додавання, логічне *або*)	$\vee$
Заперечення (логічне *ні*)	$\neg$ $'$ $\overline{}$
Імплікація (логічне *якщо, …то…*)	$\rightarrow$ $\supset$ $\Rightarrow$
Еквівалентність (рівнозначність)	$\sim$ $\leftrightarrow$ $\equiv$

Зазвичай використовуватимемо перші із наведених назв і позначень. Таблиця 1.2 містить означення цих операцій.

Таблиця 1.2

$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0 0	0	0	1	1	1
0 1	0	1	1	1	0
1 0	0	1	0	0	0
1 1	1	1	0	1	1

Отже, з елементарних висловлень і пропозиційних змінних за допомогою означених операцій і дужок утворюються складені висловлення, яким відповідають формули або вирази. Зауважимо, що символам логічних операцій відповідають у звичайній мові такі мовні зв'язки, або сполучники:

$\wedge$ – *і*; *та*; *а*; *але*; *хоч*; *разом із*; *незважаючи на*; …

$\vee$ – *або*; *чи*; *хоч* (*принаймні*) *одне з*; …

$\neg$ – *не*; *неправильно, що*; …

$\rightarrow$ – *якщо* (*коли*) … , *то* (*тоді*)…; … *імплікує* …; *із* … *випливає* …; *у разі* … *має місце* …; …

~ – … *тоді й тільки тоді, коли* …; … *якщо й тільки якщо* …;

… *еквівалентне* …; … *рівносильне* … тощо.

Застосовуючи пропозиційні змінні та символи логічних операцій, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, тобто перетворити на формулу, яка виражатиме (задаватиме) його *логічну структуру*.

У математичній мові імплікацію $p \rightarrow q$ трактують так: твердження p є достатньою умовою для q, а твердження q – необхідною умовою для твердження p. Вираз $p \rightarrow q$ інтерпретують ще як q тоді, коли p або p тільки тоді, коли q. В імплікації $p \rightarrow q$ операнд p називають **антецедентом**, або **засновком**, а q – **консеквентом**, або **висновком**.

1.2. Формула алгебри висловлень. Таблиця істинності. Тавтології

За аналогією зі звичайними числовими алгебрами, де змінні можуть набувати значень із певної множини чисел (напр., цілі, раціональні або дійсні числа), розглянемо **алгебру висловлень**, в якій значеннями відповідних змінних будуть якісь висловлення.

Операціями алгебри висловлень будуть означені вище кон’юнкція, диз’юнкція, заперечення, імплікація та еквівалентність. Застосовуючи до елементарних висловлень і пропозиційних змінних ці операції, діставатимемо складені висловлення, яким відповідатимуть формули (або вирази) алгебри висловлень. Для запису цих формул і дослідження їхніх властивостей використовують формальні мови, тобто певні множини слів у деякому алфавіті.

Алфавіт найбільш поширеної формальної мови алгебри висловлень складається з трьох груп символів:

1) символи елементарних висловлень і пропозиційних змінних: a, b, c, … та x, y, z, … (інколи з індексами);

2) символи операцій: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, ~;

3) допоміжні символи – круглі дужки: (і).

Із символів цього алфавіту будують пропозиційні формули або просто формули алгебри висловлень за індуктивним правилом:

1) усі пропозиційні змінні та елементарні висловлення є формулами;

2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ також є формулами (для всіх цих виразів формули A та B є підформулами);

3) інших формул, крім тих, що побудовані за правилами 1) та 2), немає.

Формули алгебри висловлень позначатимемо великими латинськими літерами.

Кожна формула A зображує форму або схему складеного висловлення: вона перетворюється на висловлення, якщо замість її пропозиційних змінних підставити якісь конкретні висловлення. Оскільки кожне із підставлених висловлень має значення 0 або 1, то, послідовно обчислюючи значення всіх підформул формули A, одержимо значення формули A на цьому наборі висловлень, яке дорівнюватиме 0 або 1. Підставляючи у формулу A замість її пропозиційних змінних інший набір висловлень, аналогічно обчислимо нове значення формули A і т.д. Оскільки кожне із висловлень набору повністю характеризується своїм значенням (істинно або хибно, тобто 1 або 0), то замість пропозиційних змінних у формулу можна підставляти не самі висловлення, а їхні значення – 1 або 0.

Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – це всі пропозиційні змінні, що входять до формули A; позначатимемо цей факт $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Формулі $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ поставимо у відповідність функцію $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, що означена на множині впорядкованих наборів $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, де кожне p_i набуває значення у множині $B = \{0, 1\}$, і значенням функції f є 0 або 1. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$ її змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при підстановці до неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$, відповідно. Зауважимо, що кількість елементів в області визначення функції f дорівнює 2^n.

Функцію f називають функцією істинності для формули A або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати таблицю істинності (табл. 1.3). Традиційно набори значень змінних розташовують у цій таблиці в лексикографічному порядку.

Таблиця 1.3

$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$	$f(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0 0 … 0 0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0 0 … 0 1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0 0 … 1 0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
0 0 … 1 1	$f(0, 0, \ldots, 1, 1)$
……..	……..
1 1 … 1 0	$f(1, 1, \ldots, 1, 0)$
1 1 … 1 1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Формулу алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називають тавтологією, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює 1. Те, що формула A є тавтологією, позначають як $\vDash A$.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами, або законами алгебри висловлень**.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \vee (\neg\, p))$ (закон виключення третього);

$(\neg\, (p \wedge (\neg\, p)))$ (закон виключення суперечності);

$(p \to p)$ (закон тотожності).

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності. Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою способу відшукання контрприкладу (або методу від супротивного).

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула A **сильніша ніж** B, а формула B **слабша ніж** A. Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, яка набуває значення 0 на всіх наборах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ значень своїх пропозиційних змінних, називається **суперечністю**, або **тотожно хибно формулою**.

Формулу, що не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають **нейтральною**.

Множину всіх формул алгебри висловлень розбивають на тавтології, суперечності та нейтральні формули. Формулу, яка не є суперечністю, називають **виконуваною**, інакше – **невиконуваною**.

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. Задля зменшення їх кількості випускають зовнішні дужки й запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: $\neg, \wedge, \vee, \to, \sim$ (за спаданням). Часто у формулах алгебри висловлень випускають знак кон'юнкції $\wedge$ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Для визначення порядку виконання операцій у формулі пріоритету операцій не достатньо. Потрібно ще вказувати для однакових операцій, групуються вони зліва направо чи справа наліво. Наприклад, операції $\wedge$ та $\vee$ групуються зліва направо, а операція $\to$ – справа наліво. Тому для формули $a \wedge b \wedge c$ дужки розставляємо таким чином: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \to b \to a$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to a))$. Зазначимо, що для операцій $\wedge$ та $\vee$ порядок групування не є суттєвим, але для операції $\to$ він є важливим. Тому для формули $a \to b \to a$ при групуванні дужок справа наліво отримаємо формулу $(a \to (b \to a))$, яка не еквівалентна формулі $((a \to b) \to a)$. Для операції еквівалентності групування не використовують.

Структура формули. Розстановка дужок у формулі вказує не лише на порядок виконання операцій, а фактично задає її структуру. Тут важливими є поняття головної операції у формулі та її аргументів.

Проаналізуємо структуру формули

$$(a \to (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c)))))).$$

Головною буде перша імплікація (позначаємо головну операцію зірочкою *). Маємо такий запис:

$$(a \to^{*} (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg c)))))).$$

Далі аналізуємо підформули. Підформули

a та $(b \rightarrow (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c)))))$

задають перший і другий аргументи цієї операції. Для другої підформули головною буде перша імплікація, тобто

$(b \rightarrow * (((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c))))).$

Далі, у під формулі

$(((\neg b) \wedge a) \rightarrow (c \vee (a \wedge (\neg c))))$

головною є імплікація, тому отримуємо

$(((\neg b) \wedge a) \rightarrow* (c \vee (a \wedge (\neg c)))).$

Аргументами є підформули

$((\neg b) \wedge a)$ та $(c \vee (a \wedge (\neg c)))$.

Подаємо першу підформулу у вигляді

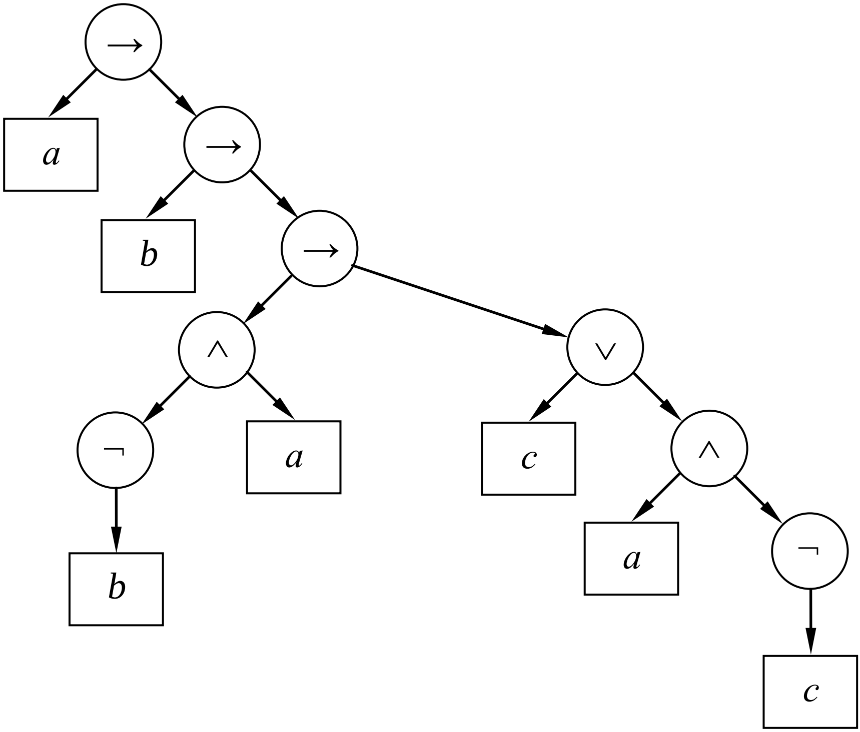
$((\neg b) \wedge* a),$

а другу –

$(c \vee* (a \wedge (\neg c))).$

Продовжуючи таким чином, підійдемо до найпростіших підформул a, b, c.

Структуру формули часто подають **деревом синтаксичного аналізу формули**. У дереві синтаксичного аналізу дужки не вказують. Для проаналізованої формули дерево синтактичної аналізу має вигляд.



Проблема розв'язності в алгебрі висловлень – це задача знаходження алгоритму, за допомогою якого для будь-якої формули A алгебри висловлень можна визначити, є A тотожно істинною (тавтологією), чи ні. Для алгебри висловлень цю проблему можна, зокрема, розв'язати такими двома способами

1) побудувати таблицю істинності для формули A й перевірити, чи складається стовпчик значень A лише з одиниць;

2) застосувати спосіб відшукання контрприкладу. Аналогічно можна сформулювати й розв'язати проблему розв'язності для визначення того, чи є певна формула алгебри висловлень суперечністю або виконуваною.

1.3. Рівносильні формули алгебри висловлень

Формули A та B алгебри висловлень називають **рівносильними**, якщо їм відповідає та сама функція істинності, тобто вони набувають однакових значень на всіх наборах значень їхніх пропозиційних змінних.

Рівносильність формул A та B позначають за допомогою знаку ≡ (= або ↔): записують $A \equiv B$.

Рівносильні формули ще часто називають **еквівалентними**.

Рівносильність формул можна перевірити складанням таблиць істинності відповідних функцій і порівнюванням цих таблиць.

Рівносильним перетворенням формули A називають дію або процедуру, у результаті якої дістаємо формулу B, рівносильну формулі A.

Основні тотожності (рівносильності, закони) алгебри висловлень.

1. $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ – **асоціативність**;
2. $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ – **комутативність**;
3. $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – **дистрибутивність**;
4. $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ – **ідемпотентність**;
5. $\neg (a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$, $\neg (a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ – **закони де Моргана**;
6. $\neg \neg a \equiv a$ – закон подвійного заперечення;
7. $a \vee 0 \equiv a$, $a \wedge 1 \equiv a$; $a \vee 1 \equiv 1$, $a \wedge 0 \equiv 0$ – властивості елементів 0 та 1;
8. $a \vee \neg a \equiv 1$, $a \wedge \neg a \equiv 0$ – властивості заперечення;
9. $a \vee (a \wedge b) \equiv a$; $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ – правила поглинання.

1.4. Нормальні форми логічних функцій

1.4.1. Досконала диз'юктивна нормальна форма

У 1.2 описаний спосіб побудови таблиці істинності для заданої пропозиційної формули, тобто побудови таблиці логічної функції, яку задає ця формула.

Не менш важливою є обернена задача: для функції, заданої таблицею, графіком, словесно тощо, визначити (побудувати) формулу, що задає цю функцію. У багатьох розділах математики побудувати таку формулу для довільної функції не вдається. Замість формули, яка абсолютно точно визначає вихідну функцію, використовують методи побудови різних формул, що відтворюють цю функцію наближено (або апроксимують її) з певною точністю.

В алгебрі логіки існує кілька процедур, що дають змогу для заданої логічної функції побудувати формули, які задають цю функцію й використовують певний набір логічних операцій. Розглянемо дві такі процедури. Будемо вважати, що основною формою задання логічної функції є її таблиця істинності. Якщо функція задана якимось іншим способом (словесно, графіком, якоюсь формулою з іншим набором операцій тощо), то спочатку визначаємо за заданням відповідну таблицю істинності.

Введемо такі позначення: для логічної змінної x вважатимемо, що $x^0 = \neg x$ та $x^1 = x$. Неважко переконатись, що для логічної змінної a виконується $x^a = 1$, якщо $a = x$ (тобто якщо значення змінних a та x збігаються), а $x^a = 0$, якщо $a \neq x$.

Розглянемо довільну логічну функцію $f(x, y, z)$ від трьох змінних. Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), …, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких функція f істинна (тобто дорівнює 1). Тоді формула, що задає цю функцію, має вигляд:

$$x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \vee x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} y^{b_k} z^{c_k} . \qquad (1.4.1)$$

Справді, якщо до цієї формули підставити замість x, y та z один із наборів (a_i, b_i, c_i) (тобто покласти $x = a_i$, $y = b_i$ і $z = c_i$), то рівно один із логічних доданків формули (1.4.1), а саме доданок $x^{a_i} y^{b_i} z^{c_i}$, дорівнюватиме 1, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отже, значенням усієї формули (1.4.1) на цьому наборі (a_i, b_i, c_i) буде 1. Якщо ж до (1.4.1) підставити будь-який інший набір значень змінних (тобто набір, що не увійшов до вищезазначеного списку з k елементів), то всі доданки формули (1.4.1) дорівнюватимуть 0, отже, і значенням усієї формули на такому наборі буде 0.

Таким чином, обґрунтовано, що значення формули (1.4.1) збігається зі значенням заданої функції $f(x, y, z)$ на будь-якому наборі (a, b, c) значень її змінних, тобто (1.4.1) задає (реалізує) функцію $f(x, y, z)$.

Формулу (1.4.1) називають досконалою **диз'юнктивною нормальною формою** (ДДНФ) логічної функції $f(x, y, z)$.

1.4.2. Досконала кон'юктивна нормальна форма

За допомогою тих самих операцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення можна побудувати іншу формулу, що реалізує певну логічну функцію.

Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), …, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких логічна функція $f(x, y, z)$ хибна (набуває значення 0). Тоді формула

$$\left(x^{\neg a_1} \vee y^{\neg b_1} \vee z^{\neg c_1}\right) \wedge \left(x^{\neg a_2} \vee y^{\neg b_2} \vee z^{\neg c_2}\right) \wedge \ldots \wedge \left(x^{\neg a_k} \vee y^{\neg b_k} \vee z^{\neg c_k}\right). \tag{1.4.2}$$

реалізує функцію f.

Аналогічно вищенаведеним міркуванням можна обґрунтувати, що для будь-якого набору (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, …, k$ значенням формули (1.4.2) буде 0, а для будь-якого іншого набору, що не увійшов до цього списку, (1.4.2) дорівнюватиме 1. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно. Формулу (1.2.4) називають досконалою **кон'юнктивною нормальною формою** (ДКНФ) відповідної логічної функції $f(x, y, z)$.

1.5. Приклади розв'язку задач

Приклад 1.1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) *Число 357 кратне 7*.
(б) *Це речення складається із шести слів*.
(в) *Хай живе кібернетика!*
(г) *Женева – столиця Швейцарії*.
(д) *Не існує найбільшого простого числа*.
(е) *Чи існує найменше просте число*?
(є) *Будьте уважні та взаємно ввічливі*.

(ж) *Сонце зійшло*.

(з) *Виходячи з кімнати, вимикайте світло*.

(и) *Нерівність* $3 < 2$ *хибна*.

(і) *Нерівність* $2 < 3$ *хибна*.

(ї) *Це висловлення – хибне*.

Вирази (а), (б), (г), (д), (и) та (і) є висловленнями, (а), (б), (д), та (и) – істинними, а (г) та (і) – хибними. Вираз (ї) не є висловленням, оскільки, послідовно припускаючи, що в ньому виражено правильну або неправильну думку, отримуємо логічну суперечність. Цей вираз є одним із варіантів логічного парадоксу брехуна.

Приклад 1.2.

1. Висловлення *Якщо число* 24 *кратне* 2 *і* 3, *то число* 24 *кратне* 6 має таку логічну структуру: $(a \wedge b) \rightarrow c$. Тут пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 24 *кратне* 2, змінній b – висловлення *Число* 24 *кратне* 3, а змінній c – висловлення *Число* 24 *кратне* 6.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

a – 7 – *ціле число*; c – 7 – *просте число*;

b – 7 – *від'ємне число*; d – *Число* 7 *кратне* 3.

Сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність для таких формул:

(а) $a \wedge b$; (б) $a \vee b$; (в) $a \rightarrow \neg b$;

(г) $(b \rightarrow \neg a) \vee c$; (д) $(\neg a \wedge \neg c) \rightarrow d$.

Першій із цих формул відповідає складене висловлення 7 – *ціле число* і 7 – *від'ємне число* (звичайно таке висловлення формулюється у вигляді 7 – *ціле і від'ємне число*). Отримане висловлення є хибним, оскільки перша його елементарна складова a є істинним висловленням, а друга b – хибним. За означенням операції кон'юнкції $\wedge$ значенням цього складеного висловлення є хибно, або 0.

Формулі (б) відповідатиме складене висловлення 7 – *ціле число або* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, адже одна з його складових (а саме перша) є істинним висловленням.

Формула (в) задає складене висловлення якщо 7 – *ціле число, то неправильно, що* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, оскільки йому відповідає вираз 1 → 1, який має значення 1.

Формула (г) задає складене висловлення якщо 7 – *від'ємне число, то неправильно, що* 7 – *ціле число або* 7 – *просте число*, яке є істинним, оскільки остання його елементарна складова *c* є істинним висловленням. Якщо принаймні одне з елементарних висловлень, з'єднаних мовною зв'язкою або (логічною операцією диз'юнкції ∨), є істинним, то й усе складене висловлення є істинним.

Остання формула задає складене висловлення *якщо неправильно, що* 7 – *ціле число та неправильно, що* 7 – *просте число, то число* 7 *кратне* 3, що є істинним, адже йому відповідає логічний вираз 0 → 1, який має значення 1.

Приклад 1.3.

1. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи з відомих значень істинності простих висловлень, із яких воно складається.

(а) *Число* 777 *кратне* 7*, але не кратне* 11.

(б) *Число* 36 *кратне* 6 *або* 7.

(в) *Якщо* 4 < 3, то 42 < 32.

(г) –2 > –3 *та* (–1/2) > (–1/3).

(д) –2 > –3, *але* (–2)2 < (–3)2.

(е) *Якщо* 2 < 3, *то* 22 < 32.

(є) *Принаймні одне із чисел* 21, 24 *чи* 27 *парне*.

(ж) *Якщо число* 24 *кратне* 6*, то число* 24 *кратне* 3.

(з) *Якщо число* 27 *кратне* 6*, то число* 27 *кратне* 3.

(и) *Якщо число* 27 *кратне* 3*, то число* 27 *кратне* 6.

(і) *Якщо* 2 < 3 та 3 < 1*, то* 2 < 1.

(ї) *Неправильно, що принаймні одне з чисел* 35, 57, 77 *просте*.

Вираз (а) має логічну структуру $a \wedge b$, де пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 777 *кратне* 7, а змінній b – висловлення *Число* 777 *не кратне* 11. Обидва висловлення істинні, тому й задане складене висловлення істинне.

Вираз (б) має логічну структуру $a \lor b$, де a – *Число* 36 *кратне* 6 і b – *Число* 36 *кратне* 7. Отже, значенням усього висловлення буде 1.

Вирази (в), (е), (ж), (з), (и) та (і) мають логічну структуру $a \to b$. Висловлення (и) – хибне, решта – істинні.

Вирази (г) і (д) мають однакову логічну структуру $a \land b$. Перший із них є хибним, а другий – істинним. Логічна структура виразу (є) має вигляд $a \lor b \lor c$, де a – 21 – *парне число*, b – 24 – *парне число* та c – 27 – *парне число*. Отже, значенням складеного висловлення буде 1.

Логічна структура виразу (ї) має вигляд $\neg (a \lor b \lor c)$, де a – 35 – *просте число*, b – 57 – *просте число* і c – 77 – *просте число*. Значенням складеного висловлення буде 1, оскільки a, b і c – хибні висловлення.

2. Визначити значення істинності висловлень a, b, c, d, які фігурують у складених висловленнях, якщо складені висловлення 1) та 2) – істинні, а 3) та 4) – хибні.

1) *Якщо 7 – просте число, то* a.

2) *Якщо* b, *то 7 – складене число*.

3) *Якщо 7 – просте число, то* c.

4) *Якщо* d, *то 7 – складене число*.

Оскільки перше висловлення істинне та його елементарна складова 7 – *просте число* є також істинним висловленням, то із правила виконання операції імплікації випливає, що його друга елементарна складова а має бути істинним висловленням. Аналогічно аналізуємо решту висловлень. У результаті отримаємо, що висловлення a та d – істинні, b та c – хибні.

3. Із хибної рівності $2 \times 2 = 5$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення математичних виразів, вивести:

(а) хибну рівність $3 \times 3 = 8$;

(б) правильну рівність $2 \times 3 = 6$.

(а) Це можна зробити, наприклад, так: спочатку віднімемо почленно від даної рівності $2 \times 2 = 5$ правильну рівність $2 \times 2 = 4$, отримаємо, що $0 = 1$. Потім віднімемо почленно отриману рівність від правильної рівності $3 \times 3 = 9$, дістанемо рівність $3 \times 3 = 8$.

(б) $2 \times 3 = 2 \times (2 + 1) = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7$. Від останньої рівності $2 \times 3 = 7$ віднімемо почленно отриману у попередньому пункті рівність $0 = 1$, дістанемо, що $2 \times 3 = 6$.

Приклад 1.4. Записати словами у вигляді твердження задане висловлення різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова*; *достатня умова*; *тоді, коли*; *тільки тоді, коли*.

(а) (24 кратне 6) → (24 кратне 3).

(б) Число 45 кратне 15 тільки тоді, коли 45 кратне 3 і кратне 5.

Для пункту (а) такими твердженнями будуть:

– висловлення 24 *кратне* 3 є необхідною умовою для висловлення 24 *кратне* 6;
– висловлення 24 *кратне* 6 є достатньою умовою для висловлення 24 *кратне* 3;
– 24 *кратне* 3 тоді, коли 24 *кратне* 6;
– 24 *кратне* 6 тільки тоді, коли 24 *кратне* 3.

Для пункту (б) маємо:

– висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 є необхідною умовою для висловлення 45 *кратне* 15;
– висловлення 45 *кратне* 15 є достатньою умовою для висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5;
– 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 тоді, коли 45 *кратне* 15.

Приклад 1.5.

1. Визначити, чи є послідовність символів формулою алгебри висловлень.

$$\text{(а) } (((x \to y) \wedge z) \sim ((\neg x) \to (y \vee z)));$$
$$\text{(б) } (((\neg x) \wedge y) \to (x \sim ((\neg y) \vee x).$$

Для цього за допомогою індексів спочатку занумеруємо порядок виконання операцій у першій послідовності символів (у багатьох випадках ця процедура виконується неоднозначно). Матимемо такий вираз: $(((x \to_1 y) \wedge_2 z) \sim_6 ((\neg_3 x) \to_5 (y \vee_4 z)))$ (зручно відповідний номер записувати над операцією). Подамо його у вигляді $(F_1 \sim_6 F_2)$, де $F_1 = ((x \to_1 y) \wedge_2 z)$ і $F_2 = ((\neg_3 x) \to_5 (y \vee_4 z))$.

У свою чергу, формула F_1 має вигляд $(F_{11} \wedge_2 F_{12})$ і розкладається на підформули $F_{11} = (x \to_1 y)$ і $F_{12} = z$, а формула F_2 має вигляд $(F_{21} \to_5 F_{22})$ і розкладається на підформули $F_{21} = (\neg_3 x)$ і $F_{22} = (y \vee_4 z)$. Вираз F_{12} є формулою згідно з п. 1) в означенні пропозиційної формули. А кожна з решти підформул F_{11}, F_{21} та F_{22} утворюється відповідно до п. 2) цього означення:

$$F_{11} = (F_{111} \to_1 F_{112}),$$

де $F_{111} = x$ і $F_{112} = y$,

$$F_{21} = (\neg_3 F_{211}),$$

де $F_{211} = x$ і, нарешті,

$$F_{22} = (F_{221} \vee_4 F_{222}),$$

де $F_{221} = y$ та $F_{222} = z$.

Отже, ми продемонстрували, що ця формула побудована із пропозиційних змінних

$$F_{12} = z,\ F_{111} = x,\ F_{112} = y,\ F_{211} = x,\ F_{221} = y,\ F_{222} = z.$$

за викладеними вище правилами.

При спробі аналогічно розкласти другу послідовність символів на певному кроці отримаємо вираз $(F_1 \sim F_2$, який не має закриваючої дужки. Отже, ця послідовність не є пропозиційною формулою.

2. Виписати всі підформули формули:

$$(((x \to y) \wedge z) \sim ((\neg x) \to (y \vee z))).$$

Скориставшись процедурою, що описана в попередньому пункті, дістанемо, що F_1, F_2, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{111}, F_{112}, F_{211}, F_{221}, F_{222} – це всі підформули даної формули.

Приклад 1.6.

Обчислити значення формули алгебри висловлень

$$(((a \to (\neg b)) \to (b \wedge ((\neg c) \to a))) \sim (\neg a))$$

на наборі (1, 1, 0) значень її змінних, тобто за умови, що $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$.

Для цього за допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у даній формулі, як було зроблено у прикладі 1.5(1). Матимемо:

$$(((a \to_4 (\neg_1 b)) \to_7 (b \wedge_6 ((\neg_2 c) \to_5 a))) \sim_8 (\neg_3 a)).$$

Підставимо замість пропозиційних змінних a, b, c задані вище значення, дістанемо

$$(((1 \to_4 (\neg_1 1)) \to_7 (1 \wedge_6 ((\neg_2 0) \to_5 1))) \sim_8 (\neg_3 1)).$$

Обчисливши операції 1, 2 та 3, дістанемо вираз

$$(((1 \to_4 0) \to_7 (1 \wedge_6 (1 \to_5 0))) \sim_8 0),$$

який після обчислення операцій 4 та 5 набуде вигляду $((0 \to_7 (1 \wedge_6 0)) \sim_8 0)$. Результатом операції 6 є 0, отже, матимемо $((0 \to_7 0) \sim_8 0)$. Після виконання операції 7 дістанемо $(1 \sim_8 0)$. Останній вираз має значення 0. Таким чином, значенням даної формули на наборі (1,1,0) буде 0. Аналогічні обчислення можна виконати й для решти семи наборів значень змінних a, b, c.

Приклад 1.7.

Побудувати таблицю істинності для формули із попереднього прикладу.

У першому рядку кожного стовпця останньої таблиці записано вираз (підформулу) і номер відповідної операції. Наприклад, запис $(a \to (1))$ (4) означає, що результатом операції із номером 4 є імплікація значення пропозиційної змінної a та результату операції з номером 1, а запис $((4) \to (6))$ (7) означає, що результатом операції з номером 7 є імплікація значення операції із номером 4 і результату операції із номером 6 тощо.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією, суперечністю або нейтральною:

1) $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \wedge (b \to c))$;
2) $(a \wedge c \vee b \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;
3) $(a \wedge b \vee c \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;
4) $((a \sim b) \to (c \sim d)) \to ((a \vee c) \sim (b \vee d))$;
5) $((a \to b) \wedge a \wedge b) \sim ((a \to b) \wedge a)$;

2. Визначити послідовність операцій у формулах. Побудувати дерево синтаксичного аналізу.

1) $a \wedge b \to c \to (a \to c \wedge (b \to c))$;
2) $a \wedge c \vee b \wedge d \to (a \vee b) \wedge c \vee d$;

3) $a \wedge b \vee c \wedge d \to a \vee b \wedge c \vee d$;

4) $(a \sim b) \to (c \sim d) \to a \vee c \sim b \vee d$;

5) $a \to b \wedge a \wedge b \sim (a \to b) \wedge a$;

3. За допомогою таблиць істинності і методу еквівалентних перетворень довести, що формули є тавтологіями:

1) $p \to (q \vee p)$; 2) $(p \wedge q) \to p$;

3) $p \to (q \to p)$; 4) $p \to (q \to (p \wedge q))$;

5) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

Практична робота № 2
Елементи логіки предикатів. Квантори

2.1. Числення предикатів

Алгебра висловлень, розглянута раніше, є важливою й невід'ємною складовою математичної логіки. Однак вона занадто бідна для опису й аналізу навіть простих логічних міркувань науки і практики. Одна із причин цього полягає в тому, що в логіці висловлень будь-яке просте висловлення розглядають як елементарний об'єкт, неподільне ціле, без частин і внутрішньої структури, яке має лише одну властивість – бути або істинним, або хибним. Щоб побудувати систему правил, яка давала б змогу здійснювати логічні міркування для виведення нетривіальних правильних висновків з урахуванням будови складених висловлень і змісту простих висловлень, запропоновано формальну теорію, що дістала назву **числення предикатів**.

Теорія предикатів починається з аналізу простих висловлень і ґрунтується на такому їх розумінні: прості висловлення виражають той факт, що деякі об'єкти (або окремий об'єкт) мають певні властивості, або що вони перебувають між собою в певному відношенні.

Наприклад, в істинному висловленні 3 – *просте число* підмет 3 – це об'єкт, а присудок *просте число* виражає певну його властивість.

У латинській граматиці присудок називається **предикатом**, звідки цей термін і ввійшов до математичної логіки. Головною для логіки предикатів є саме друга складова речення висловлення – присудок-властивість. Її фіксують, а значення об'єкта пропонують змінювати так, щоб кожного разу отримувати змістовні речення, тобто висловлення.

Наприклад, замінюючи в наведеному вище висловленні 3 на числа 1, 5, 9 або 12, матимемо відповідно такі висловлення: 1 – *просте число*, 5 – *просте число*, 9 – *просте число*, 12 – *просте* *число*, з яких друге істинне, а решта – хибні висловлення. Це дозволяє розглянути вираз *x – просте число* не як елементарне висловлення, а як **пропозиційну (висловлювальну) форму**, тобто форму (або формуляр), після підстановки до якої замість параметра (змінної) x об'єктів (значень) із певної множини M дістаємо висловлення.

Аналогічно можна трактувати, наприклад, пропозиційні форми *a – українець*, b і c – однокурсники, c важче, ніж d або точка x лежить між точками y та z. До перших двох із них можна підставляти замість параметрів a, b і c прізвища конкретних людей, до третьої – замість c і d назви будь-яких об'єктів (предметів), що мають вагу. Для четвертої множиною M значень змінних x, y та z може бути множина точок певної прямої.

Перша із цих пропозиційних форм задає, як і в наведеній раніше формі, певну властивість для об'єкта а. Інші три форми описують деякі відношення між відповідними об'єктами.

Розглянувши конкретні приклади й коротко зупинившись на мотивації та змістовній інтерпретації подальших понять, перейдемо до формальних математичних означень.

***n*-місним предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на якійсь множині M називають довільну функцію, яка впорядкованому набору елементів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ множини M ставить у відповідність логічне значення 1 або 0.

Множину M називають предметною областю, або універсальною множиною, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметними змінними предиката P. Множина наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, що $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, називається **областю істинності** (або **характеристичною множиною**) предиката P. Якщо $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то згідно із логічною інтерпретацією говоритимемо, що предикат P є **істинним** на $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В іншому випадку говоритимемо, що предикат P є **хибним**.

Вираз $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що перетворюється на висловлення після заміни всіх його змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на елементи певної предметної області M, називають **пропозиційною (висловлювальною) формою**.

Пропозиційна форма є одним зі способів задання предиката.

Для $n = 1$ предикат $P(x)$ називається **одномісним**, або **унарним**, для $n = 2$ $P(x, y)$ – **двомісним**, або **бінарним**, для $n = 3$ $P(x, y, z)$ – **тримісним**, або **тернарним** предикатом.

Якщо в n-арному предикаті $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зафіксувати значення деяких m змінних (тобто надати їм певних значень із множини M), то отримаємо $(n - m)$-місний предикат на множині M. Тому можна вважати висловлення нульмісними предикатами, які утворено з багатомісних предикатів підстановкою замість усіх їх параметрів певних значень із предметної області. Отже, висловлення можна розглядати як окремий випадок предиката.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати й логічні зв'язки (операції), можна будувати складені предикати, або предикатні формули.

Зазвичай основні логічні операції $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\sim$ означають для предикатів, що задані на тій самій предметній області M і залежать від тих самих змінних.

Нехай $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

називають предикат $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють 1. Зауважимо, що на інших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Диз'юнкцією

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

називають предикат $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких принаймні один із предикатів $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює 1. Відповідно на інших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Запереченням

$$\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що дорівнює 1 на тих і лише тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює 0.

Імплікацією

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

називають предикат $J(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких предикатів $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює 0, або обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють 1. Відповідно на інших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Еквівалентністю

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

називають предикат $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення 1 на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють 0, або на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють 1. Відповідно на інших наборах значень змінних предикат набуває значення 0.

Знаючи, як виконуються окремі операції предикатів, можна утворювати вирази або формули, операндами яких є предикати. Наприклад, формула

$$P_1(x) \vee (\neg P_3(x, z) \to P_2(x, y, z))$$

задає деякий предикат $Q(x, y, z)$. Значення предиката Q неважко обчислити для будь-якого набору значень його змінних x, y, z, виходячи зі значень предикатів P_1, P_2, P_3 на цьому наборі.

2.2. Квантори

Додатково в логіці предикатів використовують дві спеціальні операції предикатів, які називають **кванторами**. Ці операції роблять теорію предикатів значно гнучкішою, глибшою й багатшою, ніж теорія висловлень. Саме тому логіку предикатів іноді називають **теорією квантифікації**.

Найпопулярнішими й найуживанішими виразами в математиці є фрази або формулювання типу *для всіх* та *існує*.

Вони входять до більшості математичних міркувань і доведень, висновків, лем і теорем.

Наприклад:

Для всіх дійсних чисел x виконується рівність $sin^2x + cos^2x = 1$;

Для заданих натуральних a та b завжди існує натуральне число d, яке ділить числа a та b;

Для всіх натуральних n справедливе твердження: якщо n ділиться на 6 *і на* 15*, то n ділиться на* 30.

Поняття, що відповідає словам для всіх, лежить в основі означення квантора загальності.

Нехай $P(x)$ – предикат на множині M. Тоді **квантор загальності** (із параметром x) – це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення *для всіх x із M P(x) істинне*; для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, записують $\forall xP(x)$ (читають *для всіх x P від x*).

Іншу операцію називають **квантором існування** та позначають її знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ – деякий предикат на множині M, то висловлення *існує в множині M елемент x такий, що Q(x) істинне* записують у вигляді $\exists xQ(x)$ і читають *існує такий x, що Q від x* або *є такий x, що Q від x*.

Походження обраних позначень пояснюється тим, що символ $\forall$ –англійського слова *all*, що перекладають як усі. А символ $\exists$ відповідає першій *exist* – існувати.

Вираз $\forall x$ читають також як *усі x*; *для кожного x*; *для довільного x*; *для будь-якого x*; а вираз $\exists x$ – як *деякий x*; *для деякого x*; *знайдеться такий x* тощо.

Зазначимо, що, крім уведених символічних позначень кванторів, використовують також інші позначення. Наприклад, замість $\forall x$ іноді пишуть $\forall(x)$, (x) або $\wedge x$, а замість $\exists x$ – відповідно $\exists(x)$, (Ex) або $\vee x$.

Розглянемо два бінарні предикати на множині натуральних чисел N: предикат *x менше y* та предикат *x ділить y*. Перший із них записуватиме у традиційній формі $x < y$, а другий – у вигляді $x \mid y$. Тоді неважко переконатись, що висловлення:

$\forall x \exists y(x < y)$ та $\forall x \exists y(x \mid y)$ є істинними,

$\exists y \forall x (x < y)$ та $\exists y \forall x (x \mid y)$ є хибними.

Істинними будуть, наприклад, висловлення

$$\forall x (0 < x^2 - x + 1),$$
$$\exists x ((x \mid 1) \wedge (\neg (1 < x))),$$
$$\forall x ((x < 1) \rightarrow (x < 2)),$$
$$\forall x (((2 \mid x) \wedge (3 \mid x)) \rightarrow (6 \mid x)),$$

а хибними –

$$\forall x (2 \mid x),$$
$$\exists x (x^2 < 0),$$
$$\forall x ((3 \mid x) \rightarrow (6 \mid x)).$$

Запишемо формулою логіки предикатів таке твердження: *Існує таке x, що* $P(x)$ – хибне;

$$\exists x (\neg P(x)) \text{ або } \neg \exists x P(x).$$

Нехай предметна область є множина R дійсних чисел. Визначимо, чи є вираз

$$\exists y (x < y)$$

висловленням або пропозиційною формою. В даному випадку маємо пропозиційну форму. Перетворити її на істинне висловлення можна, наприклад, так:

$$\forall x \exists y \, (x < y) \text{ або } \exists x \exists y \, (x < y)).$$

Розглянемо наступне

$$\forall x \forall y \exists z \, (xy = z).$$

Маємо істинне висловлення. У ньому виражено твердження, що для будь-яких дійсних чисел x та y існує дійсне число z, яке є їхнім добутком.

Важливу роль у логіці предикатів відіграє **поняття області дії квантора у заданій формулі**, під якою розумітимемо той вираз (підформулу), до якого належить квантор. Область дії квантора позначають за допомогою дужок. Ліва дужка, що відповідає початку області дії, записується безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а відповідна до неї права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Там, де це не викликає невизначеності, дужки можна опускати й замість $\forall x (P(x))$ або $\exists x (P(x))$ писати відповідно $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$. Це означає, що операції квантифікації мають більший пріоритет, ніж логічні операції.

В усіх нижченаведених кванторних виразах область дії квантора підкреслено:

$$\exists x\underline{((3 \mid x) \to (6 \mid x))},$$
$$\exists x\underline{(3 \mid x)} \to (6 \mid x),$$
$$\forall x\underline{((x^2 < 9) \to (x < 3))},$$
$$\forall x\underline{(x^2 < 9)} \to (x < 3).$$

Перший і другий вирази з останнього прикладу, а також третій і четвертий відрізняються не лише областю дії квантора. Відмінність між ними істотніша, і про це слід сказати окремо.

Розглянемо на універсальній множині R дійсних чисел вирази:

$$x^2 < 10 \text{ та } \exists x(x^2 < 10).$$

Перший із них є предикатом, що залежить від змінної x. Замість x до нього можна підставляти різні дійсні значення й отримувати певні висловлення (істинні чи хибні). Та сама предметна змінна x входить до другого виразу інакше. Якщо замість неї підставити будь-яке дійсне значення, то дістанемо беззмістовний вираз.

Нехай $P(x)$ – деякий предикат на M. Перехід від $P(x)$ до $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$ називають **зв'язуванням** змінної x. Інші назви – **навішування квантора** на змінну x у предикаті $P(x)$ (або на предикат $P(x)$), квантифікацією змінної x. Змінну x, на яку навішено квантор, називають зв'язаною, інакше змінну x називають **вільною**.

Зауважимо, що така ситуація не виняткова й доволі часто зустрічається в інших розділах математики. Наприклад, у виразах:

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \lim_{x\to c} x^n, \qquad \sum_{j=k}^{n} f(j),$$

параметри a, b, c, k і n – це змінні, замість яких можна підставляти певні значення, а параметри x та j – зв'язані змінні, підстановка замість яких будь-яких значень не має жодного сенсу.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$ і $\exists$ до змінних x та y

двомісного предиката $A(x, y)$, отримаємо чотири різні одномісні предикати: $\forall xA(x, y)$, $\exists xA(x, y)$, $\forall yA(x, y)$ і $\exists yA(x, y)$.

У перших двох змінна x є зв’язаною, а змінна y – вільною, а у двох останніх – навпаки.

Вираз $\forall xA(x, y)$ (читають як *для всіх x A від x та y*) є одномісним предикатом $B(y)$. Він є істинним для тих і тільки тих $b \in M$, для яких одномісний предикат $A(x, b)$ є істинним для всіх x із M.

Розглянемо двомісний предикат $A(x, y)$, означений на множині $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ за допомогою табл. 2.1. Значенням предиката $A(a_i, a_j)$ є елемент на перетині рядка, що відповідає a_i, та стовпчика, що відповідає a_j.

Таблиця 2.1

$x \setminus y$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	0
a_2	0	1	1	1
a_3	0	0	1	1
a_4	0	0	1	0

Таблиці істинності для чотирьох відповідних одномісних предикатів, отримуваних з $A(x, y)$ навішуванням одного квантора, наведено у табл. 2.2.

Таблиця 2.2

y	$\forall xA(x, y)$	y	$\exists xA(x, y)$	x	$\forall yA(x, y)$	x	$\exists yA(x, y)$
a_1	0	a_1	0	a_1	0	a_1	1
a_2	0	a_2	1	a_2	0	a_2	1
a_3	1	a_3	1	a_3	0	a_3	1
a_4	0	a_4	1	a_4	0	a_4	1

У всіх чотирьох випадках до вільної змінної, що залишилася, можна застосовувати один із кванторів і, зв’язавши таким чином обидві змінні, перетворити відповідні предикати на висловлення.

У результаті отримаємо такі висловлення:

$$\forall x(\forall yA(x, y)) = 0,$$
$$\forall y(\forall xA(x, y)) = 0,$$
$$\exists y(\forall xA(x, y)) = 1,$$
$$\exists x(\forall y\, A(x, y)) = 0,$$
$$\exists x(\exists yA(x, y)) = 1,$$
$$\exists y(\exists xA(x, y)) = 1,$$
$$\forall y(\exists xA(x, y)) = 0,$$
$$\forall x(\exists yA(x, y)) = 1.$$

Неважко переконатися, що перестановка однакових кванторів зумовлює рівносильні висловлення. Дійсно, обидва висловлення $\forall x(\forall yA(x, y))$ і $\forall y(\forall xA(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли предикат $A(x, y)$ набуває значення 1 на всіх кортежах значень (a, b) з M^2. Висловлення $\exists x(\exists yA(x, y))$ і $\exists y(\exists xA(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли існує принаймні одна пара (a, b) така, що $A(a, b) = 1$.

Водночас усі чотири висловлення з різнойменними кванторами є нерівносильними. Особливо слід наголосити, що суттєвим є порядок слідування різнойменних кванторів. Висловлення $\forall x(\exists yA(x, y))$ і $\exists y(\forall xA(x, y))$ нерівносильні. Наприклад, у термінах табличного задання предиката $A(x, y)$ істинність першого висловлення $\forall x(\exists yA(x, y))$ означає, що кожен рядок таблиці істинності містить принаймні одну одиницю. Друге ж висловлення $\exists y(\forall xA(x, y))$ істинне тоді й лише тоді, коли в таблиці є стовпчик, що складається тільки з одиниць.

Неважко поширити всі наведені вище міркування й висновки на предикати більшої арності. Навішування одного квантора завжди зменшує кількість вільних змінних і арність предиката на одиницю. Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його на висловлення (іноді таку предикатну формулу називають **замкненою**).

2.3. Формули логіки предикатів

Наведемо індуктивне означення поняття формули **логіки предикатів** (**предикатної** формули, або просто **формули**).

1. Якщо P – символ елементарного n-місного предиката, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметні змінні, то вираз $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – формула. Такі формули називають **елементарними**, або **атомарними**.

2. Якщо A та B – формули, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ – теж формули.

3. Якщо A – формула, а x – предметна змінна в A, то $(\forall x(A))$ і $(\exists x(A))$ – теж формули.

4.Інших формул, крім утворених за правилами 1–3, немає.

Це означення дозволяє стверджувати, що всі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів, оскільки висловлення – це нульмісні предикати.

Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деяка формула логіки предикатів, а множина M – деяка предметна область. Для **інтерпретації** $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\boldsymbol{M}$ необхідно задати значення символів елементарних предикатів у M як n-місних предикатів у M. За наявності такої логічної (істиннісної) інтерпретації формули F у M можливі три основні ситуації.

1. Існує набір значень змінних, для якого формула F набуває значення 1. У цьому разі формулу F називають **виконуваною в області** M.

2. Якщо формула F набуває значення 1 (виконувана) для всіх наборів значень з області M, то її називають **тотожно істинною** в M.

3. Якщо формула F невиконувана в області M, то її називають **тотожно хибною** в M.

Наведені означення можна узагальнити, якщо розглядати різні предметні області, а саме: якщо для формули F існує область M, в якій вона виконувана, то формулу F називають **виконуваною**; формулу, тотожно істинну в будь-яких областях M, називають **тотожно істинною**, або **логічно загальнозначущою**; формула, невиконувану в усіх областях M, називають **тотожно хибною**, або **суперечністю**.

Формула

$$\exists x A(x, y) \to \forall x A(x, y)$$

виконувана й тотожно істинна в усіх одноелементних областях M.

Формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно істинна, а формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно хибна.

Тотожно істинними є формули

$$\forall x P(x, y) \to P(y) \text{ і } P(y) \to \exists x P(x).$$

Формули F_1 і F_2 називають **рівносильними (еквівалентними)**, якщо за всіх можливих підстановок значень замість їхніх змінних вони набувають однакових значень; позначають $F_1 = F_2$ або $F_1 \equiv F_2$.

Множина всіх тотожно істинних формул логіки предикатів є складовою частиною всіх формальних математичних теорій, тому її дослідження й опис – важлива задача математичної логіки. Значення цієї множини підкреслює також той факт, що їй, як було зазначено вище, належать усі рівносильні співвідношення (тотожності) логіки предикатів.

Як і в логіці висловлень, постають дві проблеми: перша – опис або побудова множини всіх тотожно істинних формул, друга – перевірка тотожної істинності заданої формули логіки предикатів.

Якщо існує процедура розв’язання другої проблеми, то на її основі можна сформулювати такий алгоритм, що породжує шукану множину T тотожно істинних формул. Послідовно будуємо всі формули, кожну з них за відомою процедурою перевіряємо на тотожну істинність і вносимо до множини T ті, для яких результат перевірки позитивний.

Однак на відміну від логіки висловлень, де така процедура існує та зводиться до обчислення значень формули на скінченній множині значень її параметрів, у логіці предикатів області визначення предметних і предикатних змінних формул нескінченні.

Метод обчислення значення формули шляхом підстановки значень замість змінних і послідовного виконання зазначених дій є зручним для встановлення виконуваності заданої формули або доведення нерівносильності певних формул. Для цього достатньо підібрати одну відповідну підстановку, тобто побудувати контрприклад. Застосовувати цей метод можна також, коли предметна область M скінченна. Пов'язано це з тим, що для скінченної множини $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ кванторні формули можна перетворити на рівносильні їм формули логіки висловлень:

$$\forall x P(x, y) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$
$$\exists x P(x, y) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Замінивши всі квантори за допомогою наведених співвідношень, будь-яку формулу логіки предикатів можна перетворити на рівносильну пропозиційну форму, або формулу логіки висловлень. Істинність останньої на скінченній на скінченній множині M можна перевірити за допомогою скінченної кількості підстановок й обчислень.

Завдання для самостійної роботи

Вказати вільні та зв'язані змінні у виразі. Для кожної зв'язаної змінної визначити, яким саме квантором її зв'язано:

1. $P(x) \to \forall y\, (Q(y) \vee \exists z\, P(z) \sim \neg P(y))$;
2. $\exists x\, (P(y) \to P(x) \wedge \exists z\, (Q(z) \sim \exists y (Q(y) \vee Q(x))) \wedge$
   $\forall x\, (P(x) \to \neg (\exists y\, Q(y)))$;
3. $\forall x\, (x^2 y > 0 \to y > 0)$;
4. $x > 3 \wedge \forall x\, \forall y\, (xy^2 > 0)$;
5. $\forall x\, \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y))$;
6. $\exists x\, (P(y) \to P(x)) \wedge \exists y\, (Q(z) \sim Q(y)) \vee Q(x) \wedge \forall x\, (P(x) \to$
   $\neg (\exists y\, Q(y)))$.

Практична робота № 3
Елементи теорії чітких і нечітких множин

3.1. Поняття множини. Способи задання множин

Множина утворюється із елементів, що мають деякі властивості і знаходяться в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин.

На письмі множини позначають зазвичай великими літерами. Для деяких множин у математиці використовують сталі позначення. Наприклад, N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається задана множина, називаються її **елементами**. Елементи множин позначатимемо малими літерами латинського алфавіту. Той факт, що об'єкт а є елементом множини M, записують так: $a \in M$ (читають: a належить множині M або a – елемент множини M). Знак належності елемента множині $\in$ є стилізацією першої літери грецького слова εστι (бути). Те, що елемент a не належить множині M, позначають так: $a \notin M$.

Множину називають **скінченною**, якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k, що є кількістю елементів цієї множини; інакше множина є **нескінченною**. Кількість елементів скінченної множини A традиційно позначають через $|A|$.

Для **задання множини**, утвореної із будь-яких елементів, використовуватимемо два способи. В основі обох лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1. Якщо $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякі об'єкти, то множину цих об'єктів позначають як $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. Так можна задавати лише скінченні множини. Порядок запису елементів множини в такому позначенні неважливий.

Наприклад. Множину всіх десяткових цифр записують як $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, множину основних арифметичних операцій – як $\{+, –, \times, /\}$.

2. Другий спосіб задання множин ґрунтується на зазначенні загальної властивості або породжувальної процедури для всіх об'єктів, що утворюють описувану множину. У загальному випадку задання множини M має вигляд $M = \{a \mid P(a)\}$. M – це множина всіх тих і тільки тих елементів a, для яких виконується умова P.

Через $P(a)$ позначено або властивість, яку мають елементи множини M, або деяку породжувальну процедуру, що описує спосіб отримання елементів множини M з уже відомих її елементів чи інших об'єктів.

Наприклад. Множину всіх непарних цілих чисел можна задати так: $S = \{n \mid n$ – непарне ціле число$\}$ або $S = \{n \mid n = 2k + 1, k \in Z\}$.

Дві множини A та B називають **рівними** (записують $A = B$), якщо вони складаються з тих самих елементів.

Для зручності та однорідності виконання математичних викладок уводять поняття множини, яка не містить жодного елемента. Таку множину називають **порожньою множиною** і позначають $\varnothing$.

Множина A називається **підмножиною** множини B (записують $A \subseteq B$) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B. Говорять також, що множина A міститься в множині B.

Неважко переконатись, що $A = B$ тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення: $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Крім того, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$. Останні два факти часто використовують у доведеннях тверджень про рівність двох заданих множин.

3.2. Операції над множинами та їх властивості

Для множин можна ввести низку операцій, результатом виконання яких також є множини. За допомогою цих операцій можна конструювати нові множини із заданих.

Нехай A та B –множини.

Об’єднанням множин A та B (позначають $A \cup B$) називають множину тих елементів, які належать принаймні одній із множин A або B. Символічно операцію об’єднання множин записують так: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$, або $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

Наприклад.

$$\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\},$$
$$\{a, c\} \cup \varnothing = \{a, c\},$$
$$\{a, b, c\} \cup \{a, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}.$$

Перетином множин A та B (позначають $A \cap B$) називають множину, що складається із тих і тільки тих елементів, які належать множинам A та B одночасно, тобто $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}$, або $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Наприклад.

$$\{a, b, c\} \cap \{a, c, d, e\} = \{a, c\},$$
$$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing.$$

Кажуть, що множини A та B не перетинаються, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Різницею множин A та B (позначають $A \setminus B$) називають множину тих елементів, які належать множині A та не належать множині B.

Отже, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}$, або $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in B)$.

Наприклад.

$$\{b, c\} \setminus \{a, d, c\} = \{b\},$$
$$\{a, c, d, e\} \setminus \{a, b, c\} = \{d, e\},$$
$$\{a, b\} \setminus \varnothing = \{a, b\},$$
$$\{a, b\} \setminus \{a, b, c, d\} = \varnothing.$$

Симетричною різницею множин A та B (позначають $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$) називають множину, що складається зі всіх елементів множини A, які не містяться у B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A, тобто

$$A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B), \text{ або } x \mid x \in B \text{ та } x \notin A)\},$$

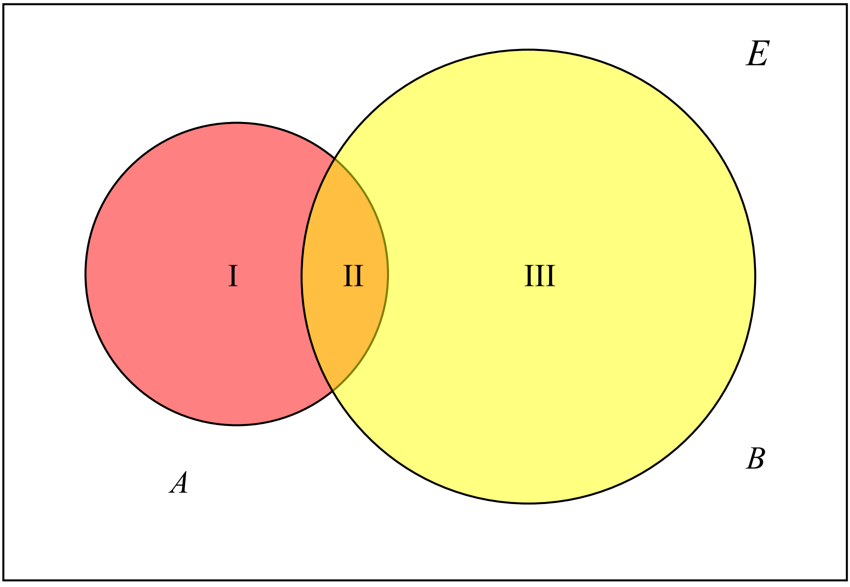
або

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg (x \in B))(\neg(x \notin A) \wedge (x \in B)).$$

Наприклад.

$$\{a, b, c\} \Delta \{a, c, d, e\} = \{b, d, e\},$$
$$\{a, b\} \Delta \{a, b\} = \varnothing,$$
$$\{a, b\} \Delta \varnothing = \{a, b\}.$$

Уведені операції можна проілюструвати **діаграмою Венна** (або **діаграмою Ейлера**)



Тут A та B – множини точок двох кругів. Тоді множина $A \cup$ В складається із точок областей I, II, III, $A \cap B$ – область II, $A \setminus B$ – область I, $B \setminus A$ – область III, $A \Delta B$ складається із точок областей I та III.

У математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають **універсальною множиною,** і позначають через *E* (або *U*).

Якщо зафіксовано універсальну множину *E*, то **доповненням** множини *A* (воно є підмножиною універсальної множини *E* і позначається $\overline{A}$) називають множину всіх елементів універсальної множини, що не належать множині *A*, тобто

$$\overline{A} = \{x \mid x \in E \text{ та } x \notin A\}, \text{ або } x \in \overline{A} \Leftrightarrow \neg(x \in A).$$

Зауважимо, що $\overline{A} = E \setminus A$.

Наприклад. Якщо за універсальну множину взяти множину *N* усіх натуральних чисел, то доповненням $\overline{P}$ множини *P* усіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

3.3. Основні закони алгебри множин

Основні властивості введених вище операцій:

1. Асоціативність:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

2. Комутативність:

$$A \cup B = (B \cup A);$$
$$A \cap B = (B \cap A).$$

3. Дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Ідемпотентність:

$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A.$$

5. Інволютивність:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

6. Правила (закони) де Моргана:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

7. Закони поглинання:

$(A \cup B) \cap A = A$;

$(A \cap B) \cup A = A$.

8. Закон доповнення:

$A \cup \overline{A} = E$;

$A \cap \overline{A} = \varnothing$;

$\overline{E} = \varnothing$;

$\overline{\varnothing} = E$.

9. Закон тотожності:

$A \cup \varnothing = A$;

$A \cup E = E$;

$A \cap \varnothing = \varnothing$;

$A \cap E = A$.

10. Вираз для різниці

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

3.4. Декартів (прямий) добуток множин

Декартовим (прямим) добутком множин A та B (позначають $A \times B$) називають множину всіх пар (a, b), у яких перша компонента належить множині A ($a \in A$), а друга – множині B ($b \in B$), тобто $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ та $b \in B\}$, або $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$.

Декартів добуток можна природно узагальнити для довільної скінченної сукупності множин. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множини, то їхнім декартовим добутком називається множина

$$D = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\},$$

яка складається зі всіх наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, у кожному з яких i-й член, що називається ***і*-ю координатою**, або **і-м компонентом** набору, належить множині A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Декартів добуток позначають $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Щоб відрізняти набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ від множини, що складається з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, його записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають **кортежем**, **вектором** або **впорядкованим набором**.

Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ однакової довжини вважають рівними тоді й тільки тоді, коли рівні відповідні їхні координати, тобто $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, кортежі (a, b, c) і (a, c, b) різні, у той час як множини $\{a, b, c\}$ і $\{a, c, b\}$ рівні між собою.

Декартів добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times \ldots \times A$, називають ***n*-м декартовим (прямим) степенем** множини A та позначають A^n.

Вважають, що $A^0 = \varnothing$ $(n = 0)$ і $A^1 = A$ $(n = 1)$.

Наприклад. Нехай $A = \{a, b\}$ і $B = \{b, c, d\}$, то

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\},$$

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

Операція декартового добутку неасоціативна і некомутативна, тобто множини

$$(A \times B) \times C,\ A \times (B \times C) \text{ та } A \times B \times C,$$

а також множини

$$A \times B \text{ та } B \times A$$

не рівні між собою.

3.5. Нечіткі множини. Операції із нечіткими множинами

Зі звичайними (чіткими) множинами тісно пов’язане поняття **характеристичної функції.**

Характеристичною функцією $\chi_A(x)$ називається функція, значення якої вказують, чи належить елемент множині A:

$$\chi_A = \begin{cases} 1, \text{якщо } x \in A, \\ 0, \text{якщо } x \notin A. \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

Нехай E – довільна непуста множина. **Нечіткою підмножиною** A множини E називається множина пар

$$A = \{(x, \mu_A(x))\},$$

де $x \in E$, $\mu_A(x) \in [0, 1]$.

Функція μ_A називається функцією належності нечіткої підмножини A, а E – **базовою множиною**, або **базовою шкалою**. Значення $\mu_A(x)$, визначене для кожного $x \in E$ називається **ступенем належності** елемента x нечіткій множині E.

Наприклад. Нечітку множину A можна задати наступним чином:

$$A = \{(1, 0); (2, 0,2); (3, 0,4); (4, 0,6); (5, 0,8); (6, 1)\};$$

Над нечіткими множинами можуть бути визначені наступні операції.

Рівність. Дві нечіткі підмножини A і B базової множини E називаються рівними між собою, якщо для будь-якого $x \in E$ $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Позначатимемо як і для множин $A = B$.

Включення. Будемо говорити, що A є підмножиною B (позначають аналогічно $A \subseteq B$) якщо для будь-якого $x \in E$ $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$.

Перетин. Перетином двох нечітких множин A і B називається нечітка множина $C = A \cap B$ з функцією належності

$$\mu_C(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Об'єднання. Об'єднанням двох нечітких множин A і B називається нечітка множина $C = A \cup B$ з функцією належності

$$\mu_C(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Доповнення. Нечітку множину B називають доповненням нечіткої множини A, якщо

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Для нечітких множин виконуються всі основні властивості звичайних чітких множин, крім двох:

об'єднання $A \cup \overline{A}$ не обов'язково дорівнює базовій множині; перетин $A \cap \overline{A}$ не обов'язково дорівнює порожні множині.

3.6. Нечітке логічне виведення

Одну з найтиповіших задач логічного виведення за умов нечіткості можна сформулювати так:

Дано (нечітке) продукційне правило *"Якщо А, то В"*.

Спостерігається *А'* (*А* **в певній мірі).**

Яким повинно бути *В*?

Формальніше, задані носії *U і V* та їх нечіткі підмножини *А* і *В*. Задано або елемент $x \in U$, або множина $A' \subseteq U$. Потрібно визначити елемент $v \in V$, що являє собою висновок системи, який визначає результат застосування нечіткого продукційного правила.

Наприклад. Дане нечітке продукційне правило:

Якщо студент багато працює в бібліотеці, він отримає високу оцінку.

Як множину *U* розглядаємо множину чисел, що визначають кількість годин на тиждень, які студент може проводити в бібліотеці. Можна взяти *U* як діапазон чисел від 0 до 30. Для простоти обмежимося невеликою кількістю можливих значень:

$$U = \{0, 3, 6, 9, 12, 18, 21, 27\}.$$

Аналогічно, якщо оцінки (рейтинги) виставляються за 100-бальною шкалою, за *V* можна взяти діапазон чисел від 59 до 100. Знову ж таки, обмежимося невеликим набором можливих значень:

$$V = \{59, 72, 84, 91, 96, 100\}.$$

Задамо функції належності для нечітких множин *А* (*"багато працює в бібліотеці"*) та *В* (*"високий рейтинг"*) таким чином:

$$A = \{(3, 0); (6, 0{,}1); (9, 0{,}4); (12, 0{,}6); (18, 0{,}8); (21, 1); (27, 1)\};$$

$$B = \{(59, 0); (72, 0{,}2); (84, 0{,}4); (91, 0{,}7); (96, 0{,}9); (100, 1)\};$$

Нехай явним чином задана кількість годин, які студент працює в бібліотеці, або ступінь належності, що визначає, чи багато він працює в бібліотеці (це практично еквівалентно, оскільки, знаючи конкретну кількість годин, ми завжди можемо визначити відповідний ступінь належності). Нехай цей ступінь належності дорівнює α. Тоді для отримання висновку можна застосувати **метод простої підстановки нечіткого значення,** відповідно до якого *V* вибирається з умови:

$$\mu_B(v) = \alpha.$$

Нехай у нашому прикладі дано, що *студент працює в бібліотеці 9 годин.* Ступінь належності дорівнює 0,4, і система повинна дійти висновку, що такий *студент повинен отримати оцінку 84* (*"добре"*). Якби в нашій спрощеній множині V не виявилося значення точно з таким ступенем належності, слід було б провести інтерполяцію або взяти найближче значення.

Як повинно змінитися нечітке логічне виведення, якщо *A'* задається не як конкретне значення, а як нечітка множина (наприклад, якщо у вищенаведеному прикладі відомо, що *студент проводить в бібліотеці середню кількість часу)?* Для цього необхідно залучити до розгляду **відношення нечіткої імплікації.**

Нечітким відношенням між множинами A та B називається нечітка підмножина їх декартового добутку. Інакше кажучи, якщо

$$A = \{(u_i, \mu_A(u_i)),\ u_i \in U\},\ B = \{(v_i, \mu_B(v_i)),\ v_i \in V\},$$

то відношення $A \times B$ визначається як множина пар

$$A \times B = \{((u_i, v_i)\ \mu_D(u_i, v_i)),\ u_i \in U,\ v_i \in V\}.$$

Відношення нечіткої імплікації $A \to B$ можна вводити по-різному. Часто використовується формула ***min*-імплікації:**

$$\mu_{A\to B}^{(min)}(u_i, v_i) = min(\mu_A(u_i), \mu_B(v_i)).$$

Для задання імплікації застосовуються й інші формули:

нечітке розширення класичної імплікації:

$$\mu_{A\to B}^{(KI)}(u_i, v_i) = min(\mu_B(v_i), 1 - \mu_A(u_i));$$

нечітка імплікація Лукасевича:

$$\mu_{A\to B}^{(Luc)}(u_i, v_i) = min(1,\ 1 - \mu_A(u_i) + \mu_B(v_i)).$$

Тепер ми можемо отримати множину *B'* – нечітку множину висновків, які відповідають множині *A'*. Ця множина є результатом **композиції *max-min*** множини *A'* і нечіткої імплікації:

$$B' = A' \bullet (A \to B),$$

де • – знак *max-min* композиції, що обчислюється за формулою:

$$\mu_{B'}(u_i, v_i) = max\,min(\mu_{A'}(u_i), \mu_{A\to B}(u_i, v_i)).$$

Але отримати одну лише множину *B'* недостатньо, треба ще знайти конкретну числову відповідь (кажуть, що треба провести

дефадзифікацію). Найчастіше за числову відповідь береться **центр тяжіння** знайденої нечіткої множини, який обчислюється за формулою:

$$v^{*} = \frac{\sum v_j \mu_{B'}\left(v_j\right)}{\sum v_j \mu_{B'}\left(v_j\right)}.$$

Увесь описаний метод нечіткого логічного виведення часто називають **методом центру тяжіння композиції максимум-мінімум.**

Повернемося до прикладу.
Ми задали функції належності для нечітких множин *A* (*"багато працює в бібліотеці"*) та *B* (*"високий рейтинг"*) таким чином:

A = {(3, 0); (6, 0,1); (9, 0,4); (12, 0,6); (18, 0,8); (21, 1); (27, 1)};

B = {(59, 0); (72, 0,2); (84, 0,4); (91, 0,7); (96, 0,9); (100, 1)}.

Нехай дано, що *студент працює у бібліотеці середню кількість часу.*

Задамо нечітку множину *A'* (*середня кількість часу*):

A′ = {(3, 0); (6, 0,2); (9, 0,7); (12, 1); (18, 0,6); (21, 0,2); (27, 0)};

Обчислимо відношення *min*-імплікації нечітких множин *A* та *B*:

		59	**72**	**84**	**91**	**96**	**100**
	B A	**0**	**0,2**	**0,4**	**0,7**	**0,9**	**1**
3	**0**	0	0	0	0	0	0
6	**0,1**	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
9	**0,4**	0	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4
12	**0,6**	0	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6
18	**0,8**	0	0,2	0,4	0,7	0,8	0,8
21	**1**	0	0,2	0,4	0,7	0,9	1
27	**1**	0	0,2	0,4	0,7	0,9	1

Знайдемо *max-min* композицію множини *A'*, та щойно знайденого відношення $A \rightarrow B$. Результатом буде нечітка множина *B'*:

		59	**72**	**84**	**91**	**96**	**100**
	B A′	**0**	**0,2**	**0,4**	**0,7**	**0,9**	**1**
3	**0**	0	0	0	0	0	0
6	**0,2**	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
9	**0,7**	0	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4
12	**1**	0	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6
18	**0,6**	0	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6
21	**0,2**	0	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
27	**0**	0	0	0	0	0	0
	B′	0	0,2	0,4	0,6	0,6	0,6

Нарешті проведемо дефадзифікацію отриманої множини *B’*:

$$v^* = \frac{72\cdot 0{,}2+84\cdot 0{,}4+91\cdot 0{,}6+96\cdot 0{,}6+100\cdot 0{,}6}{0{,}2+0{,}4+0{,}6+0{,}6+0{,}6} = \frac{220{,}2}{2{,}4} = 91{,}75 \approx 92\cdot$$

Отже на основі проведеного розрахунку із застосуванням нечіткого композиційного правила виведення можна дійти висновку, що студент повинен отримати оцінку 92 бали.

Завдання для самостійної роботи

1. Спростити теоретико-множинне співвідношення:

а) $\left(A\cap B\cap C\cap \overline{D}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\right)\cup\left(\overline{B}\cap C\right)\cup\left(C\cap D\right)$;

б) $\overline{\left(\overline{\overline{\overline{A}\cup B}}\right)\cup\left(A\cup\overline{B}\right)}$;

с) $($ $\overline{\overline{A\cup B}\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)}$;

2. Довести методом логічних таблиць теоретико-множинні рівності:

а) $A \setminus (B \,\Delta\, C) = (A \setminus B) \,\Delta\, (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$. Обчислити:

а) $A \cup B$;

б) $(A \cup C) \setminus B$;

в) $A \cap B \cap C$;

г) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$;

д) $A \Delta B$;

е) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$.

4. За допомогою діаграм Венна та методу логічних таблиць перевірити такі теоретико-множинні рівності:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

д) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

е) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

5. Для заданих множин $A = \{1, 2\}$ і $B = \{2, 3, 4\}$ визначити:

а) $A \times B$;

б) $B \times A$;

в) B^2;

г) $(B\setminus A) \times A$;

д) $A \times B \times A$;

е) $A \times (A \cup B)$.

6. Знайти перетин, об'єднання нечітких множин A і B доповнення нечіткої множин A до B та B до A.

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	1	0,6	0,1	0	0,4	0,2
$\mu_B(x)$	1	0,4	0,5	1	0,1	0,5	0,2	0,3	0	0,7

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	1	0,4	0,3	0,6	0,1	0,6	0,1	1	0,4	0,6
$\mu_B(x)$	0	0,1	0,5	0,6	0,9	0,4	0,2	0,3	1	0,4

3.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0,1	0,4	0	0,5	1	0,4	0,1	1	0,4	0,2
$\mu_B(x)$	0,9	0,2	0,5	0	0,1	0,5	0,2	0,3	0	1

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0	0,1	0,3	0,5	1	0,6	0,1	0	0,4	0,2
$\mu_B(x)$	1	0,4	0,5	1	0,1	0,5	0,2	0,3	0	0,7

5.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0,2	0,1	0,1	0,5	0	0,1	0,3	1	0,4	0,7
$\mu_B(x)$	0,2	1	0,6	0,8	0,1	0,5	0,2	0,3	0,9	0,7

6.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0,5	1	0,3	0,5	1	0,6	0,1	0	0,4	0,3
$\mu_B(x)$	0,2	0,4	0,5	1	0,1	0,4	0,2	0,3	0	0,3

Список літератури

1. Трохимчук Р. М., Нікітенко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах : навчальний посібник / М-во освіти і науки України, Київ нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ : Київський університет, 2017. 248 с.
2. Коноваленко О. Є., Ткачук М. А., Грабовський А. В. Дискретна математика : навч.-метод. посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2016. 84 с.
3. Дискретна математика : навчальний посібник / уклад. С. І. Балога. Ужгород : ПП «АУТДОР–ШАРК», 2021. 124 с.
4. Нікольський Ю. С., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. Київ : Видавнича група BHV, 2007. 368 с.

5. Висоцька В. А. Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика: практикум (Збірник задач з дискретної математики : Навчальний посібник. Львів : Новий Світ – 2000, 2019. 575 с.
6. Михайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика : підручник. Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2003. 319 с.