

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування

Навчально-науковий інститут енергетики, автоматики та
водного господарства
Кафедра автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно –
інтегрованих технологій

04-03-426М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з навчальної дисципліни «**Теорія автоматичного керування**»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Автоматизація,
комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»
спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»
денної та заочної форми навчання

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННІ ЕАВГ
Протокол № 5 від 30.12.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Теорія автоматичного керування» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» спеціальності 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» денної та заочної форм навчання. [Електронне видання] / Кінчур О. Ф. – Рівне : НУВГП, 2024. – 80 с.

Укладач:

Кінчур О. Ф., старший викладач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій.

Відповідальний за випуск:

Древецький В.В., завідувач кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій, доктор технічних наук, професор.

Керівник групи забезпечення спеціальності 174 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»:
Христюк А. О., доцент кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій, кандидат технічних наук, доцент.

© О. Ф. Кінчур, 2024
© НУВГП, 2024

Зміст

Вступ	4
Практичне заняття № 1. Диференціальні рівняння і передаточні функції елементів систем автоматичного керування	5
Практичне заняття № 2. Диференціальні рівняння і передаточні функції автоматичних систем	10
Практичне заняття № 3. Структурні схеми та передаточні функції автоматичних систем	15
Практичне заняття № 4. Розрахунок та побудова частотних характеристик систем автоматичного керування	20
Практичне заняття № 5. Розрахунок стійкості САК з використанням алгебраїчних критеріїв	25
Практичне заняття № 6. Аналіз стійкості САК за частотними критеріями стійкості	29
Практичне заняття № 7. Показники якості функціонування автоматичних систем	34
Практичне заняття № 8. Синтез систем автоматичного керування	41
Практичне заняття № 9. Розрахунок і побудова перехідних процесів в нелінійних системах методом припасовування	51
Практичне заняття № 10. Дослідження нелінійних систем методами фазової площини та гармонічної лінеаризації	55
Практичне заняття № 11. Дослідження параметрів нелінійних систем автоматичного керування	68
Практичне заняття № 12. Розрахунок передаточних функцій та аналіз стійкості імпульсних систем автоматичного керування	76
Рекомендована література	80

Вступ

Методичні вказівки складені відповідно до чинного силабусу навчальної дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студентів, які навчаються за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

Мета даного навчального видання - допомогти студентам в освоєнні методів аналізу та синтезу систем автоматичного керування та надбанні необхідних практичних навичок в дослідженні типових систем керування.

Виконання практичних робіт сприятиме закріпленню, поглибленню та узагальненню теоретичних основ курсу, а також сприятиме розвитку навичок самостійної творчої роботи студентів у процесі їх навчання.

Практичне заняття № 1

Диференціальні рівняння і передаточні функції елементів систем автоматичного керування

Мета заняття. Навчитися складати математичні моделі технічних систем та визначати їх передаточні функції.

Задача №1. Скласти математичну модель об'єкта керування резервуара з вільним витоком рідини. За вхідну величину взяти зміну витрати на вході, за вихідну – зміну рівня рідини в резервуарі. Параметри резервуара: $H=6$ м, $R=2$ м, $H_0=5$ м, $w=0.1$ м.

Розв'язок. Початкові умови: $Q_{10}=Q_{20}$, $H=H_0$.

$$Q_1 = Q_{10} + \Delta Q_1$$

За проміжок часу dt об'єм в резервуарі зміниться на величину dV .

$$dV = \Delta Q \cdot dt;$$

$$dV = S \cdot dH;$$

$$S \cdot dH = \Delta Q \cdot dt -$$

рівняння

матеріального балансу.

$$S \cdot \frac{dH}{dt} = \Delta Q; \Delta Q = Q_1 - Q_2 = Q_{10} + \Delta Q - Q_2.$$

$$Q_2 = \mu w \sqrt{2gH};$$

$$S \cdot \frac{dH}{dt} + \mu w \sqrt{2gH} = Q_{10} + \Delta Q - \text{нелінійне диференційне}$$

рівняння.

$$Q_2 = Q_{20} + \left. \frac{\partial Q_2}{\partial H} \right|_{H=H_0} \cdot \Delta H = Q_{20} + \mu w \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} H_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta H;$$

$$S \frac{dH}{dt} = Q_{10} + \Delta Q_1 - Q_{20} - \mu w \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} H_0^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta H;$$

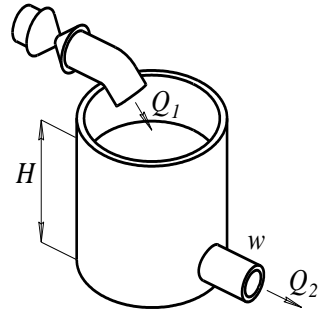


Рис. 1.1.

$$S \frac{d(\Delta H)}{dt} = Q_{10} + \Delta Q_1 - Q_{20} - \mu w \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} H_0^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta H ;$$

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = k \Delta Q_1 ;$$

$$T = \frac{S}{\mu w \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} H_0^{\frac{1}{2}}} - \text{стала часу.}$$

$$k = \frac{2\sqrt{H_0}}{\mu w \sqrt{2g}} - \text{коефіцієнт передачі.}$$

В операторній формі - $(Tp + 1)\Delta H(p) = k\Delta Q_1(p)$.

Передаточна функція об'єкта керування:

$$W(p) = \frac{\Delta H(p)}{\Delta Q_1(p)} = \frac{k}{Tp + 1} - \text{аперіодична ланка 1 порядку.}$$

Для заданих параметрів об'єкта регулювання обчислимо значення сталої часу та коефіцієнта передачі:

$$T = \frac{S}{\mu w \sqrt{2g} \cdot \frac{1}{2} H_0^{\frac{1}{2}}} = \frac{3.14 \cdot 2^2}{1 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}}} = 126,88 \text{ с,}$$

$$k = \frac{2\sqrt{H_0}}{\mu w \sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{1 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.8}} = 10,10.$$

Задача №2. Скласти математичну модель об'єкта керування у вигляді резервуара зі сталим витоком рідини. За вхідну величину взяти зміну витрати на вході, за вихідну – зміну рівня рідини в резервуарі. Параметри резервуара взяти із попередньої задачі.

Розв'язок. Початкові умови: $Q_2 = \text{const}$, $Q_{10} = Q_{20}$, $H = H_0$.

Нехай в усталеному режимі $h = H_0$, це означає, що

$$Q_1 = Q_{10} + \Delta Q.$$

Запишемо рівняння матеріального балансу. Нехай h змінилося на величину Δh :

$$\Delta h \cdot S = \Delta V_1,$$

де S площа поверхні рідини в резервуарі.

З іншого боку:

$$(Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t = \Delta V_2$$

Δt - час протягом якого відбулася зміна рівня Δh .

$$\Delta V_1 = \Delta V_2, \text{ тоді}$$

$$\Delta h \cdot S = (Q_1 - Q_2) \cdot \Delta t,$$

$$\Delta h \cdot S = (Q_{10} + \Delta Q - Q_2) \cdot \Delta t,$$

$$\Delta h \cdot S = \Delta Q \cdot \Delta t,$$

$$S \frac{\Delta h}{\Delta t} = \Delta Q.$$

За безмежно малий проміжок часу dt ми отримаємо:

$$S \frac{d(\Delta h)}{dt} = \Delta Q - \text{математична модель резервуару з постійним}$$

витоком.

Знайдемо зворотне перетворення Лапласа:

$$L\left\{\frac{dh(t)}{dt}\right\} = pH(p)$$

$$L\{\Delta Q(t)\} = \Delta Q(p)$$

тоді

$SpH(p) = \Delta Q(p)$ - диференціальне рівняння в операторній формі.

$$W(p) = \frac{H(p)}{\Delta Q(p)} = \frac{1}{Sp},$$

Виконаємо заміну $S = \frac{1}{k} = T$ - постійна часу.

Отже передаточна функція резервуара з постійним витоком буде мати вигляд:

$$W(p) = \frac{k}{p} = \frac{1}{Tp} \text{ - інтегруюча ланка.}$$

$$T = S = \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 2^2 = 12,56 \text{ с} \quad \text{або}$$

$$k = \frac{1}{T} = \frac{1}{12,56} = 0,08 \text{ с}^{-1}.$$

Задача №3. Знайти передаточну функцію пружини і демфера, враховуючи масу рухомих частин. За вхідну величину взяти силу F , а за вихідну – переміщення поршня x .

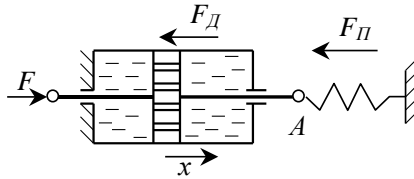


Рис. 1.2.

Розв'язок. Складаємо рівняння рівноваги сил

$$F = F_{Д} + F_{П} + F_i$$

де

$$F_{Д} = c_1 \frac{dx}{dt} \text{ - демпфуюча сила, } c_1 \text{ - коефіцієнт демпфування,}$$

$F_{П} = c_2 x$ - сила пружності, c_2 - коефіцієнт пружності пружини,

$$F_i = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \text{ } m \text{ - маса поршня і рухомих частин.}$$

$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + c_2 x$ - диференціальне рівняння демфера з пружиною.

$$\frac{m}{c_2} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{dx}{dt} + x = \frac{1}{c_2} \cdot F$$

Введемо позначення:

$$T_1 = \frac{c_1}{c_2}$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{m}{c_2}}$$

$$k = \frac{1}{c_2}$$

Тоді:

$$T_2^2 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + T_1 \cdot \frac{dx}{dt} + x = k \cdot F$$

Відповідно в операторній формі:

$$T_2^2 \cdot p^2 X(p) + T_1 \cdot pX(p) + X(p) = k \cdot F(p)$$

$$X(p)(T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1) = k \cdot F(p)$$

Звідки передаточна функція:

$$W(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{k}{T_2^2 \cdot p^2 + T_1 \cdot p + 1}$$

Завдання для самостійного опрацювання

Знайти передаточну функцію пружини і демпфера (Рис. 1.3), знехтувавши масою рухомих частин. За вхідну величину взяти силу F , а за вихідну – переміщення поршня x .

Як зміниться тип динамічної ланки, якщо вхідну і вихідну величини поміняти місцями? Знайти передаточні функції.

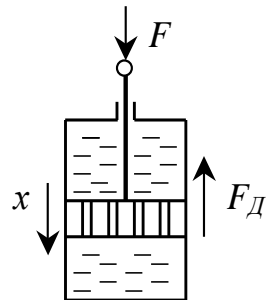


Рис. 1.3.

Практичне заняття №2

Диференціальні рівняння і передаточні функції автоматичних систем

Мета заняття. Навчитися складати математичні моделі технічних засобів систем автоматичного регулювання та визначати їх передаточні функції.

Задача №1. Скласти математичну модель автоматичного регулятора тиску схема якого наведена на рис. 2.1.

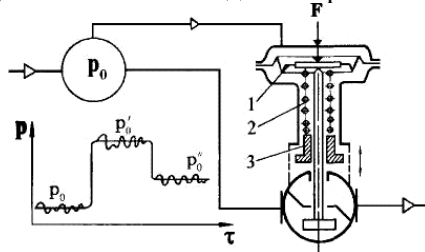


Рис. 2.1. Схема автоматичного регулятора тиску: 1 - мембрана; 2 - пружина; 3 - підтискна гайка

Регулятор забезпечує підтримку заданого тиску p_0 в резервуарі.

При тиску в резервуарі, рівному заданому p_0 , сила тиску F на мембрану 1 врівноважується протидією пружини 2, при цьому шток клапана залишається нерухомим. При підвищенні тиску під дією яких-небудь причин шток клапана опуститься, клапан відкриється, випустивши надлишки газу в магістраль, і тиск p_0 відновиться.

Якщо регулятор встановлюється на об'єкт з іншим тиском p_0' або в цій ж ємності і потрібно змінити настроювання на інший тиск p_0' (або p_0''), то настроювання регулятора на інший тиск здійснюється гайкою 3. При настроюванні на більший тиск підтискну гайку переміщують вгору. У цьому випадку мембрана під впливом додаткового зусилля пружини також переміститься вгору, і клапан прикриється. Зменшення пропускної здатності клапана приведе до підвищення тиску.

Одержимо динамічне рівняння регулятора, що характеризує

зміну в часі переміщення у штока клапана в залежності від зміни тиску p . Для цього розглянемо умову рівноваги рухомих деталей регулятора.

$$F = F_n + F_u + F_m \quad (2.1)$$

Тут F_n - сила пружності пружини; F_u - сила інерції рухомих деталей; F_m - сила тертя рухомих деталей об нерухомі.

Величини, що входять в рівняння (2.1) визначаються виразами

$$F = pf; \quad (2.2)$$

$$F_n = ky; \quad (2.3)$$

$$F_m = \xi \frac{dy}{d\tau}; \quad (2.4)$$

$$F_u = m \frac{d^2y}{d\tau^2}; \quad (2.5)$$

де f - площа мембрани, m^2 ; k - жорсткість пружини, H/m ; ξ - коефіцієнт тертя рухомих деталей, $кг/с$; m - маса рухомих деталей, $кг$.

Після підстановки знайдених величин у рівняння (2.1) одержимо рівняння динаміки

$$\frac{m}{k} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\xi}{k} \frac{dy}{d\tau} + y = \frac{f}{k} p \quad (2.6)$$

Застосувавши до отриманого рівняння операційний метод аналізу отримаємо диференціальне рівняння в операторній формі

$$\frac{m}{k} p^2 Y(p) + \frac{\xi}{k} p Y(p) + Y(p) = \frac{f}{k} P(p), \quad (2.7)$$

або

$$Y(p) \left(\frac{m}{k} p^2 + \frac{\xi}{k} p + 1 \right) = \frac{f}{k} P(p)$$

Знайдемо передаточну функцію як відношення зображень вихідної та вхідної величин:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{P(p)} = \frac{f/k}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{\xi}{k} p + 1},$$

або

$$W(p) = \frac{k_1}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

де $k_1 = \frac{f}{k}$ - коефіцієнт передачі системи;

$$T_1 = \frac{\xi}{k}, T_2^2 = \frac{m}{k} - \text{сталі часу.}$$

Таким чином регулятор тиску апроксимується інерційною ланкою другого порядку

Задача №2. Скласти математичну модель електричного кола з послідовно з'єднаними резистором і індуктивністю. За вхідну величину прийняти вхідну напругу, за вихідну – напругу на індуктивності.

Розв'язок.

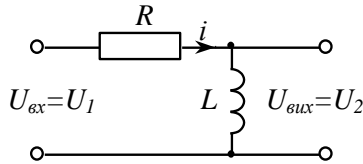


Рис. 2.2.

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень напруги

$$u_1 = u_R + u_L$$

де

$$u_L = L \frac{di}{dt}; u_R = iR.$$

Звідси отримуємо диференціальне рівняння для RL кола

$$u_1 = L \frac{di}{dt} + iR$$

Продиференціювавши ліву і праву частини рівняння дістанемо

$$\frac{du_1}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння на L/R

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{du_1}{dt} = L \frac{di}{dt} + \frac{L^2}{R} \frac{d^2i}{dt^2}$$

Позначивши $L/R = T$, $L \frac{di}{dt} = u_2$ дістанемо

$$T \cdot \frac{du_1}{dt} = u_2 + T \frac{du_2}{dt},$$

або

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = T \cdot \frac{du_1}{dt}$$

Перейдемо до зображень Лапласа

$$L\left\{T \frac{du_2}{dt} + u_2 = T \cdot \frac{du_1}{dt}\right\} \Rightarrow L\left\{T \frac{du_2}{dt}\right\} + L\{u_2\} = L\left\{T \cdot \frac{du_1}{dt}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Tp \cdot U_2(p) + U_2(p) = Tp \cdot U_1(p)$$

$$U_2(p) \cdot (Tp + 1) = Tp \cdot U_1(p)$$

Отже передаточна функція R кола буде мати вигляд

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Tp}{Tp + 1}$$

Задача №3. Розв'яжемо Задачу №2 іншим, частотним методом

Розв'язок.

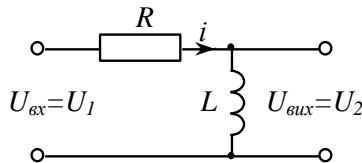


Рис. 2.3.

За другим законом Кірхгофа для даного кола в комплексній формі будемо мати:

$$U_{вх}(j\omega) = I(j\omega) \cdot R + U_L(j\omega)$$

де

$$U_L(j\omega) = I(j\omega) \cdot X_L(j\omega); X_L = j\omega L;$$

тоді
$$I(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{j\omega L}$$

Підставивши це значення в перше рівняння отримаємо

$$U_L(j\omega) + \frac{U_L(j\omega)}{j\omega L} R = U_{ex}(j\omega);$$

Домножимо дане рівняння на $j\omega$ та $\frac{L}{R}$

$$j\omega U_L(j\omega) + \frac{R}{L} U_L(j\omega) = j\omega U_{ex}(j\omega)$$

$$\frac{L}{R} j\omega U_L(j\omega) + U_L(j\omega) = \frac{L}{R} j\omega U_{ex}(j\omega)$$

Спростимо вираз

$$U_L(j\omega) \left(\frac{L}{R} j\omega + 1 \right) = \frac{L}{R} j\omega U_{ex}(j\omega)$$

Визначимо частотну функцію одночасно ввівши позначення $\frac{L}{R} = T$

$$W(j\omega) = \frac{U_L(j\omega)}{U_{ex}(j\omega)} = \frac{Tj\omega}{Tj\omega + 1}$$

Враховуючи, що $j\omega = p$, отримаємо той же результат

$$W(p) = \frac{Tp}{Tp + 1}$$

Завдання для самостійного опрацювання

Скласти математичну модель електричного кола (рис. 2.4) з послідовно з'єднаними резистором і індуктивністю. За вхідну величину прийняти вхідну напругу, за вихідну – струм в колі.

Отримати графіки перехідної та частотних характеристик.

$R=N$, $L=N/10$. N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

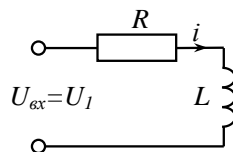


Рис. 2.4.

Практичне заняття №3

Структурні схеми та передаточні функції автоматичних систем

Мета заняття. Навчитись складати диференціальні рівняння на основі передаточних функцій та виконувати еквівалентні перетворення структурних схем.

Задача №1. По заданих диференціальних рівняннях записати рівняння в операторній формі, визначити структурні схеми ланок та характеристичні рівняння і їхні корені.

Розв'язок. Дано диференціальне рівняння, що характеризує динаміку технологічного об'єкта

$$6,25 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = 9x - 1,2 \frac{dx}{dt} - 5 \frac{du}{dt} .$$

Якщо позначити $Y(p)$, $X(p)$ і $U(p)$ як зображення сигналів y , x і u відповідно, то рівняння в операторній формі (при нульових початкових умовах) прийме вигляд

$$6,25p^2 Y(p) + 4pY(p) + Y(p) = 9X(p) - 1,2pX(p) - 5pU(p).$$

Дане рівняння можна перетворити, винісши $Y(p)$ і $X(p)$ за дужки:

$$Y(p) (6,25p^2 + 4p + 1) = X(p) (9 - 1,2p) - 5pU(p).$$

Звідси отримано:

$$Y(p) = \frac{9 - 1,2p}{6,25p^2 + 4p + 1} X(p) - \frac{5p}{6,25p^2 + 4p + 1} U(p) .$$

Отже передаточні функції об'єкта

$$W_x(p) = \frac{9 - 1,2p}{6,25p^2 + 4p + 1} \quad i \quad W_u(p) = \frac{5p}{6,25p^2 + 4p + 1} ,$$

Таким чином

$$Y(p) = W_x(p)X(p) + W_u(p)U(p).$$

Структурна схема об'єкта наведена на рис. 3.1

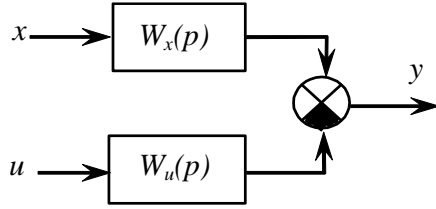


Рис. 3.1

Отримані передаточні функції мають однакові знаменники, що називаються характеристичними поліномами:

$$N(p) = 6,25p^2 + 4p + 1.$$

Якщо прирівняти даний вираз до нуля, то утвориться характеристичне рівняння

$$6,25p^2 + 4p + 1 = 0,$$

корені якого

$$p_1 = -\frac{2}{3} + j\frac{1}{2}, \quad p_2 = -\frac{2}{3} - j\frac{1}{2}$$

Розподіл коренів на комплексній площині показує, що корені лежать у лівій півплощині, отже, об'єкт стійкий.

Задача №2. По заданій передаточній функції записати диференціальне рівняння

$$W(p) = \frac{7p^3 + 5,5}{(p - 0,5)(3p^2 + 2)}$$

Розв'язок.

Для запису диференціального рівняння необхідно врахувати, що по визначенню передаточної функції

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

В результаті отримує

$$W(p) = \frac{7p^3 + 5,5}{(p - 0,5)(3p^2 + 2)} = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

$$Y(p)(p - 0,5)(3p^2 + 2) = X(p)(7p^3 + 5,5),$$

$$Y(p)(3p^3 + 2p - 1,5p^2 - 1) = X(p)(7p^3 + 5,5),$$

$$3p^3 Y(p) + 2p Y(p) - 1,5p^2 Y(p) - Y(p) = 7p^3 X(p) + 5,5 X(p).$$

Тепер, якщо застосувати зворотнє перетворення Лапласа, виходить, що

$$3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - 1,5 \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 7 \frac{d^3 x}{dt^3} + 5,5 x$$

Задача №3. Знайти передаточну функцію замкнутої системи. Система складається з об'єкта – аперіодичної ланки та регулятора – інтегруючої ланки. Система працює за відхиленням.

Розв'язок. Структурна схема системи буде мати вигляд

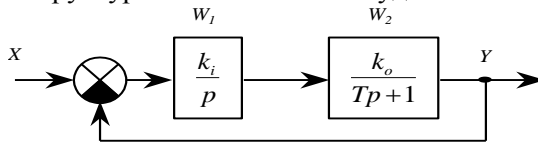


Рис. 3.2.

Знайдемо передаточну функцію розімкнутої системи:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) = \frac{k_i k_0}{p(Tp + 1)}$$

Передаточна функція замкнутої системи знаходимо за формулою

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)},$$

Отже остаточно отримуємо

$$W_3(p) = \frac{k_i k_0}{(Tp^2 + p) \left(1 + \frac{k_i k_0}{Tp^2 + p} \right)}$$

Задача №4. Визначте передаточну функцію, еквівалентну структурній схемі на рис. 3.3.

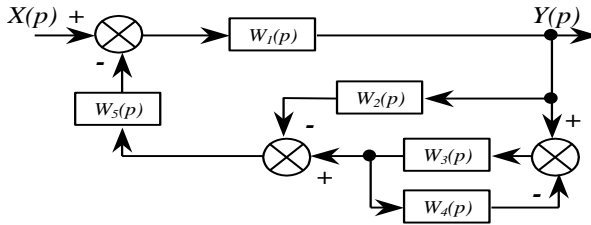


Рис. 3.3. Структурна схема системи

Розв'язок.

Знайдемо передаточну функцію ланок W_3 і W_4 :

$$W_{34} = \frac{W_3}{1 + W_3 W_4}$$

Передаточна функція W_{234} буде мати вигляд

$$W_{234} = \frac{W_{34}}{1 + W_{34} W_2} = \frac{\frac{W_3}{1 + W_3 W_4}}{1 + \frac{W_3}{1 + W_3 W_4} \cdot W_2} = \frac{W_3}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_2}$$

Передаточна функція W_{2345} буде мати вигляд

$$W_{2345} = W_{234} \cdot W_5 = \frac{W_3 \cdot W_5}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_2}$$

Передаточна функція всієї системи W_{12345} буде

$$\begin{aligned} W_{12345} &= \frac{W_1}{1 + W_1 W_{2345}} = \frac{W_1}{1 + \frac{W_1 \cdot W_3 \cdot W_5}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_2}} = \\ &= \frac{W_1 (1 + W_3 W_4 + W_3 W_2)}{1 + W_3 W_4 + W_3 W_2 + W_1 W_3 W_5} \end{aligned}$$

Завдання для самостійного опрацювання

Визначити передаточну функцію та записати диференціальне рівняння САК представленої у вигляді структурної схеми.

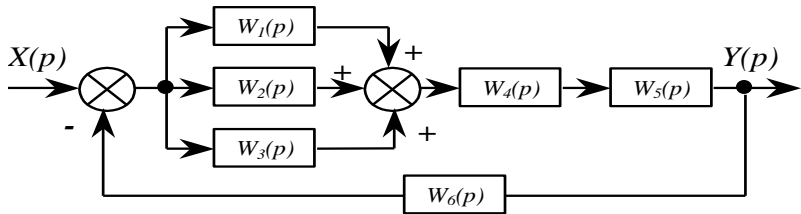


Рис. 3.4.

Якщо: $W_1(p) = 8$; $W_2(p) = \frac{1}{p}$; $W_3(p) = 5p$;

$$W_4(p) = \frac{2 \cdot N}{4p + 1}; \quad W_5(p) = \frac{4}{(0.1 \cdot N)p + 1}; \quad W_6(p) = N / 2.$$

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття №4

Розрахунок та побудова частотних характеристик системи автоматичного керування

Мета заняття. Навчитись розраховувати та будувати частотні характеристики систем автоматики.

Задача №1. Розрахувати і побудувати частотні характеристики для системи автоматичного керування в розімкненому стані.

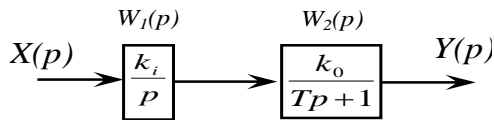


Рис. 4.1.

$$k_i=2, k_0=1, T=0.5.$$

Розв'язок.

Передаточна функція розімкнутої системи буде

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$$

Записавши $W_1(p)$ і $W_2(p)$ в показниковій формі ми отримаємо

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)} \cdot A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)} = \\ &= A_1(\omega) A_2(\omega) e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)]} \end{aligned}$$

де

$$W_1(j\omega) = \frac{k_i}{j\omega} = \frac{k_i}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$W_2(j\omega) = \frac{k_0}{Tj\omega + 1} = \frac{k_0}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{-j\arctg T\omega};$$

звідки

$$W(j\omega) = \frac{k_1 k_0}{\omega \sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \arctg T\omega\right)};$$

Тоді аналітичні вирази для побудови АЧХ та ФЧХ будуть мати вигляд

$$A(\omega) = \frac{k_i k_0}{\omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg T\omega;$$

Змінюючи ω від 0 до ∞ обчислимо і занесемо в таблицю 4.1 значення $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$

Таблиця 4.1

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	$-\infty$	-90
0,1	19,97	-92,86
0,2	9,95	-95,71
0,3	6,59	-98,53
0,4	4,90	-101,31
0,6	3,19	-106,70
1	1,79	-116,56
1,5	1,07	-126,87
2	0,71	-135
3	0,37	-146,31
4	0,22	-153,43
5	0,15	-158,20
20	0,01	-174,29

На основі таблиці 4.1 побудуємо графіки АЧХ (рис. 1.5.2) та ФЧХ (рис. 4.1)

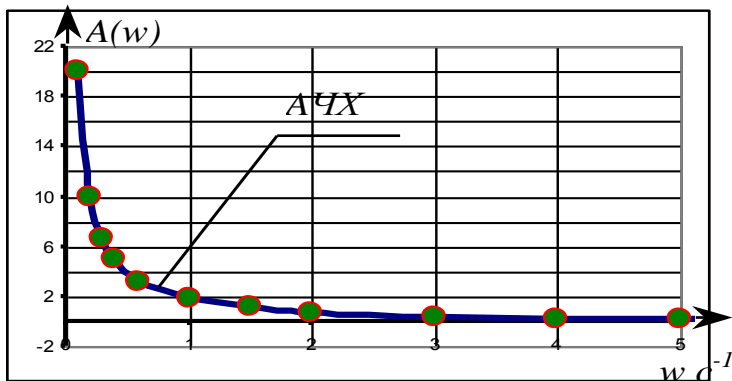


Рис. 4.2. Амплітудно частотна характеристика

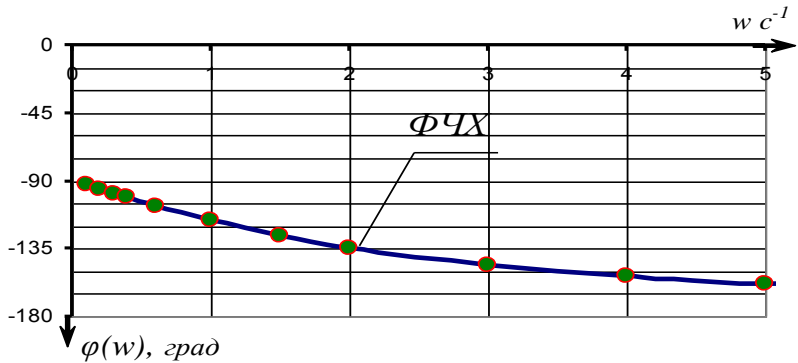


Рис. 4.3. Фазово - частотна характеристика

Годограф даної АСР показано на рис. 4.4.

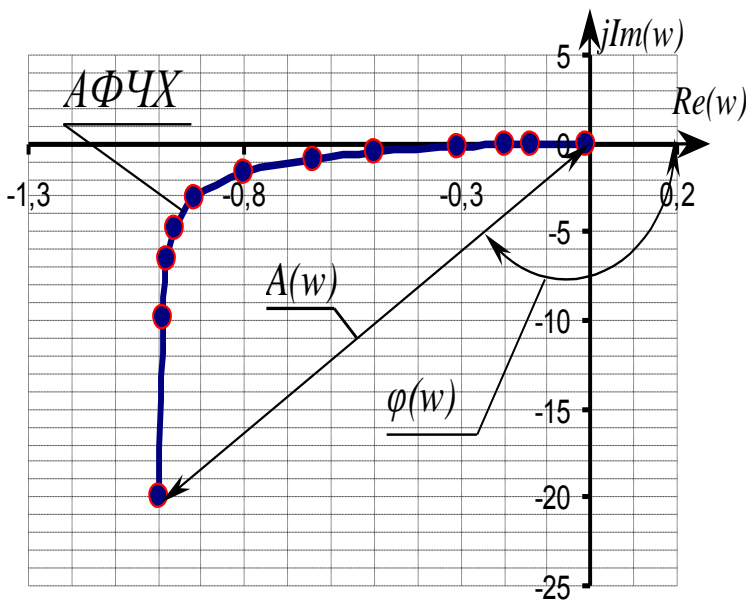


Рис. 4.4. Амплітудно-фазова частотна характеристика

Годограф можна будувати в полярних та декартових координатах. Для побудови в декартових координатах потрібно обчислити дійсну $P(\omega)$ та уявну $Q(\omega)$ частотні характеристики

$$W(jw) = \frac{k_i k_0}{Tj^2 w^2 + jw} = \frac{k_i k_0}{-Tw^2 + jw} \cdot \frac{-Tw^2 - jw}{-Tw^2 - jw} =$$

$$= \frac{k_i k_0 (-Tw^2 - jw)}{T^2 w^4 + w^2} = -\frac{k_i k_0 T w^2}{T^2 w^4 + w^2} - j \frac{k_i k_0 T w}{T^2 w^4 + w^2};$$

звідки

$$P(w) = -\frac{Tk_i k_0}{T^2 w^2 + 1}; \quad Q(w) = -\frac{k_i k_0}{T^2 w^3 + w}.$$

Змінюючи w від 0 до ∞ обчислимо і занесемо в таблицю 2 значення $P(w)$ та $Q(w)$

Таблиця 4.2

w	$Q(w)$	$P(w)$
0,1	-19,9501	-0,99751
0,2	-9,90099	-0,9901
0,3	-6,51997	-0,978
0,4	-4,80769	-0,96154
0,6	-3,0581	-0,91743
1	-1,6	-0,8
1,5	-0,85333	-0,64
2	-0,5	-0,5
3	-0,20513	-0,30769
4	-0,1	-0,2
5	-0,05517	-0,13793
20	-0,00099	-0,0099

По даних таблиці будуть годограф в декартовій системі координат рис. 4.4.

Логарифмічні характеристики поділяються на два типи: логарифмічні амплітудно-частотні (ЛАЧХ) та логарифмічні фазово-частотні (ЛФЧХ) характеристики. Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ) має вигляд: $L(w) = 20 \lg A(w)$.

Розмірність $L(w)$ – децибели. По горизонтальній осі частота відкладається в логарифмічному масштабі – в декадах. Логарифмічна фазово-частотна характеристика (ЛФЧХ) $\varphi(w)$ також будується в логарифмічному масштабі по горизонтальній

осі частот.

Дані для побудови ЛАЧХ і ЛФЧХ приведені в таблиці 4.3 а логарифмічні характеристики приведені на рис. 4.5.

Таблиця 4.3

lgw	$20lgA(w)$	$\varphi(w)$
-1	26,00756	-92,86
-0,69897	19,95646	-95,71
-0,52288	16,37771	-98,53
-0,39794	13,80392	-101,31
-0,22185	10,07581	-106,7
0	5,057061	-116,56
0,176091	0,587676	-126,87
0,30103	-2,97483	-135
0,477121	-8,63597	-146,31
0,60206	-13,1515	-153,43
0,69897	-16,4782	-158,2
1,30103	-40	-174,29

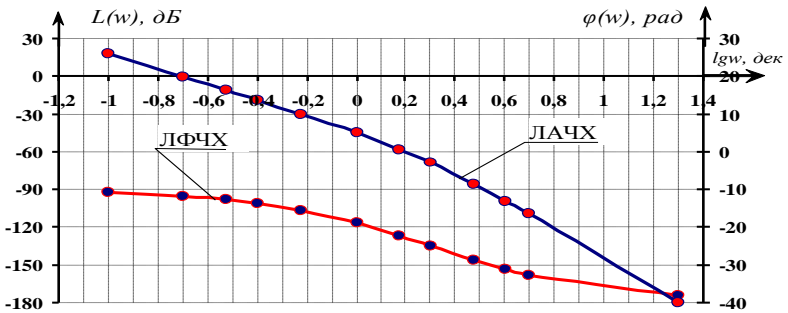


Рис. 4.5. Логарифмічні частотні характеристики

Завдання для самостійного опрацювання

Визначите вираз частотної характеристики $W(jw)$ та побудуйте годограф АФЧХ по заданій передаточній функції

$$W(p) = \frac{N \cdot p + 1}{p^2 + N \cdot p + 1}$$

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття №5

Розрахунок стійкості САК з використанням алгебраїчних критеріїв

Мета заняття. Навчитись визначати стійкість систем автоматичного керування використовуючи алгебраїчні критерії стійкості.

Задача №1. Проаналізувати стійкість САК використовуючи алгебраїчний критерій стійкості Гурвіца. Система складається з регулятора інтегральної дії і об'єкта – двох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок. Система замкнута, працює за відхиленням.

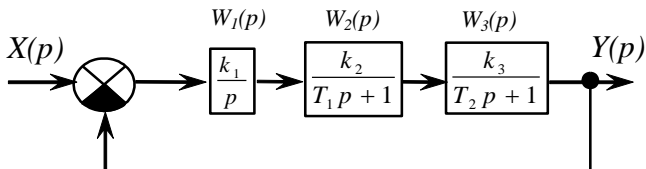


Рис. 5.1.

$$k_1=2; k_2=3; k_3=0.1; T_1=0.5 \text{ c}; T_2=0.2 \text{ c}.$$

Розв'язок. Згідно даного критерію система з характеристичним рівнянням $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ буде стійкою, якщо визначник Гурвіца:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

та всі його діагональні мінори додатні:

$$\Delta_n > 0; \Delta_{n-1} > 0; \dots \Delta_2 > 0; \Delta_1 = a_{n-1} > 0.$$

Для знаходження характеристичного рівняння спочатку визначимо передаточну функцію розімкнutoї системи:

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = \frac{k_1}{p} \cdot \frac{k_2}{T_1 p + 1} \cdot \frac{k_3}{T_2 p + 1} =$$

$$= \frac{2}{p} \cdot \frac{3}{0.5 p + 1} \cdot \frac{0.1}{0.2 p + 1} = \frac{0.6}{0.1 p^3 + 0.7 p^2 + p}$$

Передаточна функція замкнутої системи:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{0.6}{0.1 p^3 + 0.7 p^2 + p + 0.6}$$

Звідки характеристичне рівняння:

$$0.1 p^3 + 0.7 p^2 + p + 0.6 = 0;$$

Складемо визначник Гурвіца та значення всіх діагональних мінорів для отриманого рівняння будуть рівними:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.6 \end{vmatrix}$$

та проаналізуємо значення всіх діагональних мінорів :

$$\Delta_1 = a_2 = 0.7 > 0;$$

$$\Delta_2 = a_2 a_1 - a_3 a_0 = 0.7 - 0.06 = 0.64 > 0;$$

$$\Delta = 0.7 \cdot 1 \cdot 0.6 - 0.1 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0,384 > 0;$$

Отже, система стійка.

Задача №2.

Визначити область стійкості САК по методу Гурвіца, записавши умову стійкості відносно параметрів K_0 і K_1 .

Структура САК представлена на рис. 5.2. Параметри $K_2 = 1$, $K_4 = 2$, $K_5 = 0,5$. Параметри K_0 і K_1 є змінними.

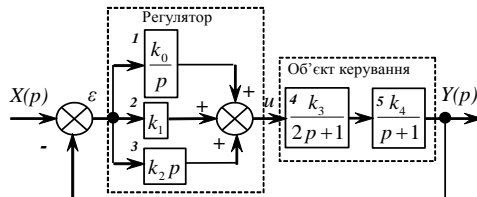


Рис. 5.2

Розв'язок.

Для запису умови стійкості в даному прикладі найбільше зручно скористатися критерієм Гурвіца.

Характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд

$$D(p) = 2p^3 + 4p^2 + (K_1 + 1)p + K_0.$$

Матриця має розмір 3x3, тому що порядок $D(p)$ дорівнює 3:

$$\begin{pmatrix} 4 & K_0 & 0 \\ 2 & K_1 + 1 & 0 \\ 0 & 4 & K_0 \end{pmatrix}.$$

Діагональні мінори матриці:

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & K_0 \\ 2 & K_1 + 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (K_1 + 1) - 2 \cdot K_0 = 4 \cdot K_1 + 4 - 2 \cdot K_0,$$

$$\Delta_3 = K_0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & K_0 \\ 2 & K_1 + 1 \end{vmatrix} = K_0 \cdot \Delta_2.$$

Відповідно до критерію Гурвіца система стійка, якщо всі $\Delta_i > 0$. Тоді одержуємо систему нерівностей ($\Delta_1 = 4$ уже задовольняє цій умові, тому далі не враховується):

$$\left. \begin{array}{l} K_0 < 2K_1 + 2 \\ K_0 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta_2 = 4K_1 + 4 - 2K_0 > 0 \\ \Delta_3 = K_0 \cdot \Delta_2 > 0 \end{array}$$



Рис. 5.3

Тобто умову стійкості можна записати як $0 < K_0 < 2K_1 + 2$. Графічно вона зображена на рис. 5.3.

Крива D-розбиття в даному прикладі являє собою пряму

$$K_0 = 2K_1 + 2,$$

вище якої налаштування відповідають нестійкій системі. Система з налаштуваннями,

взятими з області стійкості, буде стійка.

Завдання для самостійного опрацювання

Проаналізувати стійкість замкнутої системи автоматичного керування (рис. 5.4) використовуючи алгебраїчний критерій Гурвіца. Розімкнута САК складається із регулятора – інтегруючої ланки та об'єкта – інерційної ланки II – порядку. $K_1=N$, $K_2=0,5$, $T_1=0.01*N$ с, $T_2=0.1$ с.

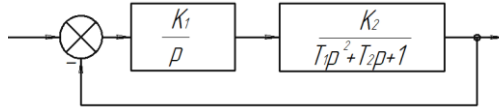


Рис. 5.4.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття №6

Аналіз стійкості САК за частотними критеріями стійкості

Мета заняття. Навчитись визначати стійкість систем автоматичного керування використовуючи частотні критерії стійкості та знаходити запаси стійкості систем.

Задача №1. Проаналізувати стійкість САК використовуючи частотний критерій стійкості Михайлова, якщо характеристичне рівняння системи.

$$0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6 = 0$$

Розв'язок. Згідно критерію стійкості Михайлова система буде стійкою, якщо годограф характеристичного вектора розпочинаючись на дійсній піввісі проходить n квадрантів, де n порядок цього рівняння.

Для застосування даного критерію побудуємо годограф характеристичного вектора $N(jw)$. Для цього розрахуємо дійсну і уявну частину вектора

$$N(jw) = 0.1(jw)^3 + 0.7(jw)^2 + (jw) + 0.6 =$$

$$= 0.6 - 0.7w^2 - j(0.1w^3 - w);$$

$$U(w) = 0.6 - 0.7w^2;$$

$$V(w) = -0.1w^3 + w.$$

За рівняннями для $U(w)$ та $V(w)$ змінюючи w від 0 до ∞ складемо табл. 6.1.

Таблиця 6.1

w	$U(w)$	$V(w)$
0	0,6	0
1	-0,1	0,9
2	-2,2	1,2
3	-5,7	0,3
4	-10,6	-2,4
5	-16,9	-7,5

За даними таблиці побудуємо криву Михайлова (рис. 6.1):

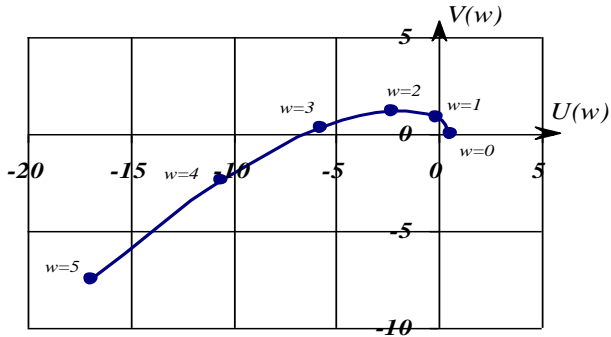


Рис. 6.1. Крива Михайлова

Крива Михайлова послідовно проходить 3 квадранти. Отже система є стійкою, та як характеристичне рівняння даної САК є 3-го порядку.

Задача 2. Передаточна функція розімкнутої системи має вигляд

$$W(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

де K – загальний коефіцієнт підсилення розімкнутої системи; $T_1=0,5c$, $T_2=0,1c$, $T_3=0,02c$ – постійні часу.

За допомогою критерію Михайлова визначити значення загального коефіцієнта підсилення K при якому система буде знаходитись на межі стійкості.

Розв’язок. Характеристичний поліном замкнутої системи буде

$$\begin{aligned} D(p) &= p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p) + K = \\ &= T_1 T_2 T_3 p^4 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) p^3 + \\ &\quad + (T_1 + T_2 + T_3) p^2 + p + K. \end{aligned}$$

Після підстановки замість T_1 , T_2 , T_3 їх числових значень отримаємо

$$D(p) = 10^{-3} p^4 + 62 \cdot 10^{-3} p^3 + 620 \cdot 10^{-3} p^2 + p + K.$$

Замінюючи в характеристичному поліномі p на jw , отримуємо вираз для частотної функції $D(jw)$

$$D(jw) = X(w) + jY(w),$$

де

$$X(w) = K - 620 \cdot 10^{-3} w^2 + 10^{-3} w^4,$$

$$Y(w) = w - 62 \cdot 10^{-3} w^3.$$

При знаходженні системи на межі стійкості крива Михайлова проходить через початок координат при частоті $w \neq 0$. Тому при $K=K_{кр}$

$$X(w) = K - 620 \cdot 10^{-3} w^2 + 10^{-3} w^4 = 0,$$

$$Y(w) = w - 62 \cdot 10^{-3} w^3 = 0.$$

Із другого рівняння знаходимо значення квадрату частоти, при якому крива Михайлова проходить через початок координат:

$$w^2 = (62 \cdot 10^{-3})^{-1} c^{-1}.$$

Підставляючи це значення в рівняння для $X(w)=0$ отримаємо

$$K_{кр} = \frac{620 \cdot 10^{-3}}{62 \cdot 10^{-3}} - \frac{10^{-3}}{62^2 \cdot 10^{-6}} = 9.67.$$

Задача №3. Проаналізувати стійкість САК використовуючи частотний критерій стійкості Найквіста. Визначити запаси стійкості.

Розв'язок. Згідно критерію стійкості Найквіста замкнута система буде стійкою якщо годограф розімкнутої системи не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.

Для застосування даного критерію побудуємо годограф розімкнутої системи, для цього виконаємо ряд обчислень:

$$W(p) = \frac{0.6}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p};$$

$$\begin{aligned}
W(p) &= W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) = \\
&= \frac{k_1}{w} e^{-j90^\circ} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{1+(T_1 w)^2}} e^{-j \arctg T_1 w} \cdot \frac{k_3}{\sqrt{1+(T_2 w)^2}} e^{-j \arctg T_2 w}; \\
A(w) &= A_1(w) \cdot A_2(w) \cdot A_3(w) = \frac{k_1}{w} \cdot \frac{k_2}{\sqrt{1+(T_1 w)^2}} \cdot \frac{k_3}{\sqrt{1+(T_2 w)^2}} = \\
&= \frac{k_1 k_2 k_3}{w(1+(T_1 w)^2)} = \frac{0,6}{w(1+0,25w^2)}; \\
\varphi(w) &= \varphi_1(w) + \varphi_2(w) + \varphi_3(w) = -90^\circ - \arctg T_1 w - \arctg T_2 w \\
&= \\
&= -90^\circ - \arctg 0,5w - \arctg 0,2w.
\end{aligned}$$

Таблиця 6.2

w	$A(w)$	$\varphi(w)$
0	∞	-90
1	0,480	-127,875
2	0,150	-156,801
3	0,061	-177,273
4	0,030	-192,094
5	0,016	-203,198

Згідно таблиці 6.2 будемо годограф рис. 6.3.

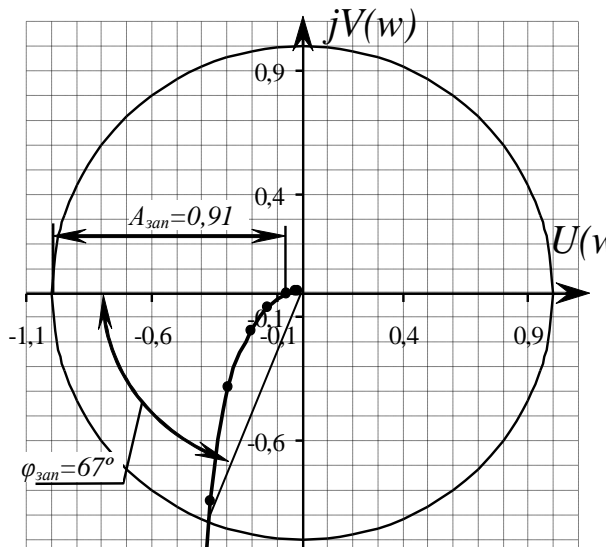


Рис. 8.3. Годограф АФЧХ

Як видно із графіка система є стійкою, оскільки годограф не охоплює критичну точку. Для визначення запасів стійкості по амплітуді і по фазі виконано допоміжні побудови з яких видно, що

$$A_{\text{зап}}=0,91, \varphi_{\text{зап}}=67^{\circ}$$

Завдання для самостійного опрацювання

Використовуючи критерій стійкості Михайлова визначити значення K_3 при якому замкнута САК буде знаходитись на межі стійкості. Розімкнута САК складається із регулятора – інтегруючої ланки та об'єкта – двох аперіодичних ланок I – порядку. $K_1=1.5 \cdot N$, $K_2=2.2$, $T_1=0.1$ с, $T_2=(0.04 \cdot N)$ с.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття №7

Показники якості функціонування автоматичних систем

Мета заняття. Навчитись знаходити аналітичні вирази та будувати перехідні характеристики з наступним визначенням показників якості САК

Задача №1. За теоремою розкладу розрахувати і побудувати перехідну характеристику замкнутої системи автоматичного керування представлені у вигляді передаточної функції:

$$W_s(p) = \frac{0.6}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6}. \quad (7.1)$$

На основі побудованої перехідної характеристики визначити прямі показники якості САК.

Розв'язок. Нехай шукана функція $h(p)$ має наступне зображення:

$$H(p) = \frac{M(p)}{p \cdot N(p)} = \frac{m_0 p^l + m_1 p^{l-1} + \dots + m_{l-1} p + m_l}{p(n_0 p^k + n_1 p^{k-1} + \dots + n_{k-1} p + n_k)}, \quad (7.2)$$

причому $l \leq k$ і рівняння $N(p) = 0$ не має нульових коренів. Тоді згідно з теоремою розкладу оригінал $h(t)$ може бути знайдений за формулою

$$h(t) = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.3)$$

де $p_1, \dots, p_k, \dots, p_n$ – корені характеристичного рівняння, а $N'(p) = \frac{d}{dp} N(p)$.

Зображення перехідної характеристики $H(p)$ визначається як

$$H(p) = G(p) \cdot W_s(p) = \frac{1}{p} \cdot W_s(p) = \frac{M(p)}{p \cdot N(p)} \quad (7.4)$$

У відповідності з (7.4) та (7.1) запишемо

$$H(p) = \frac{0.6}{p(0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6)} \quad (7.5)$$

Співставляючи (7.5) та (7.4) знайдемо

$$\left. \begin{aligned} M(p) &= 0.6, \quad M(0) = 0.6, \\ N(p) &= 0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6, \\ N(0) &= 0.6, \quad N'(p) = 0.3p^2 + 1.4p + 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

В результаті розрахунків, за допомогою комп'ютерної програми MatLab отримано наступні корені характеристичного рівняння $N(p)$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -5.3 \quad c^{-1}, \\ p_2 &= -0.8 - j0.7 \quad c^{-1}, \\ p_3 &= -0.8 + j0.7 \quad c^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Обчислимо окремо складові, що знаходяться в (7.3) під знаком суми. При $p_1 = -5.3 \quad c^{-1}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} e^{p_1 t} &= \frac{0.6}{-5.3 \cdot (0.3 \cdot (-5.3)^2 + 1.4 \cdot (-5.3) + 1)} e^{-5.3t} = \\ &= -0.056 \cdot e^{-5.3t}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

При $p_2 = -0.8 - j0.7 \quad c^{-1}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} &= \frac{0.6}{(-0.8 - j0.7) \cdot (0.3 \cdot (-0.8 - j0.7)^2 + 1.4 \cdot (-0.8 - j0.7) + 1)} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \\ &= \frac{0.6}{(-0.8 - j0.7) \cdot (-0.075 - j644)} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \frac{0.6}{-0.3908 + 0.5677j} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \\ &= \frac{0.6}{0.689 \cdot e^{j2.17}} e^{(-0.8 - j0.7)t} = 0.87 \cdot e^{-j2.17} \cdot e^{(-0.8 - j0.7)t} = 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{-j2.17 - j0.7t} = \\ &= 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{-j(2.17 + 0.7t)}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

При $p_3 = -0.8 + j0.7 \quad c^{-1}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{M(p_3)}{p_3 N'(p_3)} e^{p_3 t} &= \frac{0.6}{(-0.8 + j0.7) \cdot (0.3 \cdot (-0.8 + j0.7)^2 + 1.4 \cdot (-0.8 + j0.7) + 1)} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \\
&= \frac{0.6}{(-0.8 + j0.7) \cdot (-0.075 + j644)} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \frac{0.6}{-0.3908 - 0.5677j} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \\
&= \frac{0.6}{0.689 \cdot e^{-j2.17}} e^{(-0.8 + j0.7)t} = 0.87 \cdot e^{j2.17} \cdot e^{(-0.8 + j0.7)t} = 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{j(2.17 + 0.7t)} = \\
&= 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{j(2.17 + 0.7t)}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

В даному випадку вирази (7.9) і (7.10) являються комплексними, тому їх необхідно перетворити. Застосовуючи до суми виразів (7.9) і (7.10) формулу Ейлера

$$\frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos \alpha,$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{M(p_3)}{p_3 N'(p_3)} e^{p_3 t} &= 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{-j(2.17 + 0.7t)} + 0.87 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{j(2.17 + 0.7t)} = \\
&= 0.87 \cdot e^{-0.8t} (e^{j(2.17 + 0.7t)} + e^{-j(2.17 + 0.7t)}) = 1.74 \cdot e^{-0.8t} \cdot \cos(0.7t + 2.17)
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Остаточнo отримаємо

$$h(t) = 1 - 0.056 \cdot e^{-5.3t} + 1.74 \cdot e^{-0.8t} \cdot \cos(0.7t + 2.17). \tag{7.12}$$

Для побудови кривої $h(t)$ складемо таблицю 7.1

Таблиця 7.1

t, c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(t)$	-0,04	0,25	0,68	0,93	1,02	1,03	1,01	1,01	1,00	0,99	0,99

Графік перехідного процесу згідно формули (7.12) наведено на рис. 7.1.

Визначимо з графіка прямі показники якості:

- час регулювання $-t_p = 3.2$ с;
- перерегулювання

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\infty}}{h_{\infty}} \cdot 100\% = \frac{1.03 - 1}{1} \cdot 100\% = 3\%.$$

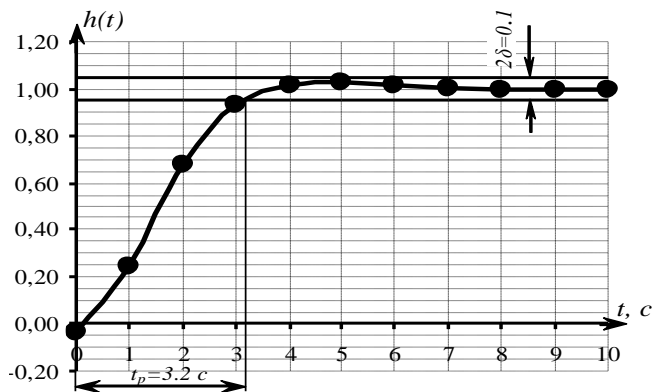


Рис. 7.1. Графік перехідного процесу

Задача №2. Для системи автоматичного керування розрахувати і побудувати перехідну характеристику за каналом збурюючої дії.

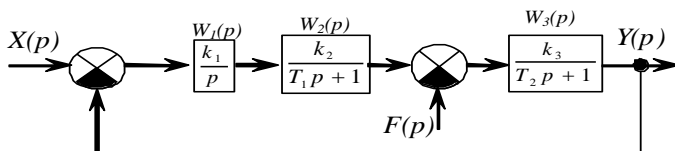


Рис. 7.2.

$$k_1=2; k_2=3; k_3=0.1; T_1=0.5 \text{ c}; T_2=0.2 \text{ c}.$$

Розв'язок. Зображення перехідної характеристики за каналом збурюючої дії визначимо як

$$H_f(p) = F(p) \cdot W_3^f(p) \quad (7.13)$$

де $F(p) = \frac{1}{p}$ зображення ступінчастого впливу по каналу збурення, $W_3^f(p)$ - передаточна функція системи за каналом збурення:

$$\begin{aligned}
 W_3^f(p) &= \frac{W_f}{1+W(p)} = \frac{-W_3(p)}{1+W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p)} = \frac{-\frac{0.1}{0.2p+1}}{1+\frac{0.6}{p(0.5p+1)(0.2p+1)}} = \\
 &= \frac{0.05p^2+0.1p}{0.1p^3+0.7p^2+p+0.6}.
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Тоді згідно (7.13) буде

$$H_f(p) = F(p) \cdot W_3^f(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{0.05p^2+0.1p}{0.1p^3+0.7p^2+p+0.6}. \tag{7.15}$$

Використовуючи теорему розкладу отримаємо

$$\left. \begin{aligned}
 M(p) &= 0.05p^2 + 0.1p, \quad M(0) = 0, \\
 N(p) &= 0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6, \\
 N(0) &= 0.6, \quad N'(p) = 0.3p^2 + 1.4p + 1.
 \end{aligned} \right\} \tag{7.16}$$

Корені характеристичного рівняння $N(p)$ такі як в попередній задачі

$$\left. \begin{aligned}
 p_1 &= -5.3 \quad c^{-1}, \\
 p_2 &= -0.8 - j0.7 \quad c^{-1}, \\
 p_3 &= -0.8 + j0.7 \quad c^{-1},
 \end{aligned} \right\} \tag{7.17}$$

Обчислимо окремо складові, що знаходяться в (7.3) під знаком суми. При $p_1 = -5.3 \quad c^{-1}$ отримаємо

$$\frac{M(p_1)}{p_1 N'(p_1)} e^{p_1 t} = \frac{0.05 \cdot (-5.3)^2 + 0.1 \cdot (-5.3)}{-5.3 \cdot (0.3 \cdot (-5.3)^2 + 1.4 \cdot (-5.3) + 1)} e^{-5.3t} = -0,082 \cdot e^{-5.3t}. \tag{7.18}$$

При $p_2 = -0.8 - j0.7 \quad c^{-1}$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} &= \frac{0.05 \cdot (-0.8 - j0.7)^2 + 0.1 \cdot (-0.8 - j0.7)}{(-0.8 - j0.7) \cdot (0.3 \cdot (-0.8 - j0.7)^2 + 1.4 \cdot (-0.8 - j0.7) + 1)} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \\
&= \frac{-0.0725 - j0.014}{(-0.8 - j0.7) \cdot (-0.075 - j644)} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \frac{-0.0725 - j0.014}{-0.3908 + 0.5677} e^{(-0.8 - j0.7)t} = \\
&= \frac{0.074 \cdot e^{-j2.95}}{0.689 \cdot e^{j2.17}} e^{(-0.8 - j0.7)t} = 0.107 \cdot e^{-j2.17} \cdot e^{-j2.95} \cdot e^{(-0.8 - j0.7)t} = 0.107 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{-j(5.12+0.7t)}.
\end{aligned}
\tag{7.19}$$

Відповідно при $p_3 = -0.8 + j0.7$ c^{-1} отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{M(p_3)}{p_3 N'(p_3)} e^{p_3 t} &= \frac{0.05 \cdot (-0.8 + j0.7)^2 + 0.1 \cdot (-0.8 + j0.7)}{(-0.8 + j0.7) \cdot (0.3 \cdot (-0.8 + j0.7)^2 + 1.4 \cdot (-0.8 + j0.7) + 1)} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \\
&= \frac{-0.0725 + j0.014}{(-0.8 + j0.7) \cdot (-0.075 + j644)} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \frac{-0.0725 + j0.014}{-0.3908 - 0.5677} e^{(-0.8 + j0.7)t} = \\
&= \frac{0.074 \cdot e^{j2.95}}{0.689 \cdot e^{-j2.17}} e^{(-0.8 + j0.7)t} = 0.107 \cdot e^{j2.17} \cdot e^{j2.95} \cdot e^{(-0.8 + j0.7)t} = 0.107 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{j(5.12+0.7t)}.
\end{aligned}
\tag{7.20}$$

Застосовуючи до суми виразів (7.19) і (7.20) формулу Ейлера отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{M(p_2)}{p_2 N'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{M(p_3)}{p_3 N'(p_3)} e^{p_3 t} &= 0.107 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{-j(5.12+0.7t)} + 0.107 \cdot e^{-0.8t} \cdot e^{j(5.12+0.7t)} = \\
&= 2 \cdot 0.107 \cdot e^{-0.8t} \cdot \frac{(e^{j(5.12+0.7t)} + e^{-j(5.12+0.7t)})}{2} = 0.214 \cdot e^{-0.8t} \cdot \cos(0.7t + 5.12)
\end{aligned}
\tag{7.21}$$

Остаточно отримаємо

$$h_f(t) = -0.082 \cdot e^{-5.3t} + 0.214 \cdot e^{-0.8t} \cdot \cos(0.7t + 5.12). \tag{7.22}$$

Для побудови кривої $h_f(t)$ складемо таблицю 7.2

Таблиця 7.2

t, c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h(t)$	0,003	0,086	0,042	0,011	-0,001	-0,003	-0,002	-0,001	0	0	0

Графік перехідного процесу за каналом збурення згідно формули (7.22) приведено на рис. 7.2.

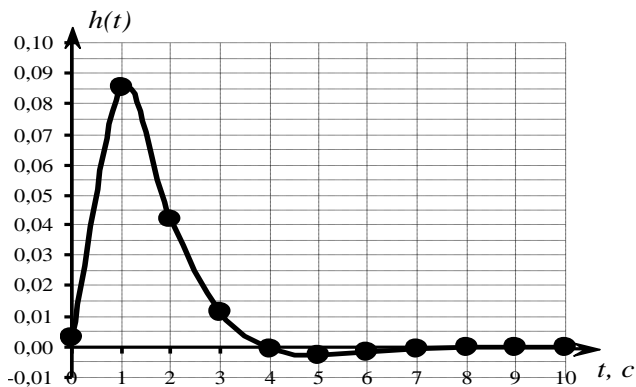


Рис. 7.2. Графік перехідного процесу за каналом збурення

Завдання для самостійного опрацювання

Розрахувати перехідну характеристику замкнутої системи автоматичного керування. Розімкнута САК складається із регулятора – інтегруючої ланки та об'єкта – інерційної ланки I – порядку. $K_1=4$, $K_2=0,5 \cdot N$, $T_I=0,3N$ с.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

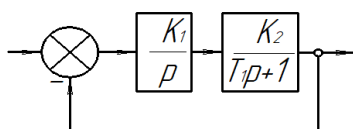


Рис. 7.3.

Практичне заняття № 8

Синтез систем автоматичного керування

Мета заняття. Вивчити методи синтезу систем автоматичного керування.

Задача 1. Для системи автоматичного управління заданої у вигляді передаточної функції виконати синтез коректуючого пристрою, який забезпечує задані показники якості.

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}$$

$$K=1,68; T_1=0,154 \text{ с}; T_2=0,035 \text{ с}; T_3=0,03 \text{ с};$$

Показники якості

$$t_{п.мак}=0.95 \text{ с}, \sigma=40\%.$$

Розв'язок. Для підвищення точності роботи системи побудуємо бажану і реальну логарифмічні амплітудно-частотні характеристики. Бажана характеристика реалізує ідеальну модель роботи системи виходячи з відомих постійних часу і частоти зрізу, тобто вона не є реальним відображенням роботи системи. Реальна характеристика є максимально наближеним до реальності відображенням роботи системи, і так само може будуватися виходячи з відомих постійних часу системи і частоти зрізу.

Розглянемо вираз для передаточної функції розімкнутої системи:

$$W(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+T_1j\omega)(1+T_2j\omega)(1+T_3j\omega)}$$

Представимо цей вираз в експоненціальному вигляді, тобто:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де $A(\omega)$ - функціональна залежність амплітуди передаточної функції розімкнутої системи від частоти. По функції $A(\omega)$ можна побудувати АЧХ системи, а по $\varphi(\omega)$ - функціональна залежність фази передаточної функції розімкнутої системи від частоти.

Знайдемо амплітудно-частотну характеристику системи

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega(\sqrt{1+\omega^2T_1^2})(\sqrt{1+\omega^2T_2^2})(\sqrt{1+\omega^2T_3^2})}$$

Запишемо вираз для логарифмічної амплітудної характеристики розімкнутої системи:

$$L_p(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20(\lg(K) - \lg(\omega) - \lg(\sqrt{1+\omega^2T_1^2}) - \lg(\sqrt{1+\omega^2T_2^2}) - \lg(\sqrt{1+\omega^2T_3^2}))$$

Даний вираз є достатнім, для побудови реальної логарифмічної характеристики (рис. 8.1).

Тепер приступимо до побудови бажаної ЛАХ.

При відпрацюванні ступінчастого керуючого впливу тривалість перехідного процесу ($t_{П.маx}$) і перерегулювання (σ) не повинні перевищувати максимально припустимих значень, зазначених у вихідних даних. Побудова бажаної ЛАХ поділяється на дві частини: побудова ЛАХ низькочастотної і середньочастотної зони. При побудові ЛАХ низькочастотної зони в точці $\omega=1$ проводимо перпендикуляр, на якому відкладаємо $20\lg K$. Через отриману точку проводимо пряму з нахилом -20дБ/дек . При побудові середньочастотної зони визначимо оптимальну частоту зрізу, як корінь квадратний від відношення номінального кутового прискорення до величини стрибка системи, тобто:

$$\omega_{3.онm} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_H}{g_0}}$$

Тоді:

$$\omega_{3.онm} = \sqrt{\frac{100}{\frac{\pi \cdot 14}{180}}} = 20,23(\text{Гц})$$

Далі, відповідно до заданих величин перерегулювання і максимальної тривалості перехідного процесу, знаходимо

величину мінімальної частоти зрізу: $\omega_{3.min} = \frac{m \cdot \pi}{t_{П.маx}}$

Тоді:
$$\omega_{3,min} = \frac{5,4 \cdot \pi}{0,95} \approx 17,86 (\text{Гц})$$

Обрана частота зрізу повинна бути менше оптимальної частоти зрізу і більше мінімальної, тобто вона повинна задовольняти наступній умові:
$$\omega_{3,opt} > \omega_3 > \omega_{3,min}$$

Виберемо частоту зрізу
$$\omega_3 = 19 (\text{Гц})$$

Таким чином, побудову графіка робимо в наступному порядку:

1. Знайдемо значення амплітуди передаточної функції $L(\omega)$ при значенні $\omega=1$. Дана точка буде початковою в побудові графіка бажаної ЛАХ.

2. Потім будуємо пряму з нахилом у -20 дБ/дек до частоти ω_1 , що визначається значенням постійної T_1 і визначається по наступній формулі:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,156} \approx 6,465 (\text{Гц})$$

3. Від частоти ω_1 до частоти зрізу бажаний графік ЛАХ являє собою пряму лінію.

4. Від частоти зрізу, до частоти ω_2 графік ЛАХ є прямою, з нахилом -20 дБ/дек . Частота ω_2 визначається постійною часу T_2 і може бути знайдена по наступній формулі

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,035} \approx 28,571 (\text{Гц})$$

5. Від частоти ω_2 до ω_3 графік логарифмічної амплітудної характеристики є прямою лінією, при цьому частота ω_3 - частота визначається постійною часу T_3 . Вона може бути обчислена по наступній формулі:

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,03} \approx 33,333 (\text{Гц})$$

6. Від частоти ω_3 до нескінченності графік ЛАХ являє собою пряму, з нахилом у -40 дБ/дек .

Таким чином, графік бажаної логарифмічної характеристики може бути представлено наступним виразом:

$$L_B(\omega) = \begin{cases} L(1) - 20 \cdot \lg(\omega), & \omega = [1; \omega_1] \\ L(1) - 20 \cdot \lg(\omega_1), & \omega = [\omega_1; \omega_{3p}] \\ L(1) - 20 \cdot \lg(\omega_1) - 20 \cdot \lg(\omega) + 20 \cdot \lg(\omega_{3p}), & \omega = [\omega_{3p}; \omega_2] \\ L(1) - 20 \cdot \lg(\omega_1) - 20 \cdot \lg(\omega_2) + 20 \cdot \lg(\omega_{3p}), & \omega = [\omega_2; \omega_3] \\ L(1) - 20 \cdot \lg(\omega_1) - 20 \cdot \lg(\omega_2) + 20 \cdot \lg(\omega_{3p}) - 40 \cdot \lg(\omega) + 40 \cdot \lg(\omega_3), & \omega = [\omega_3; \infty] \end{cases}$$

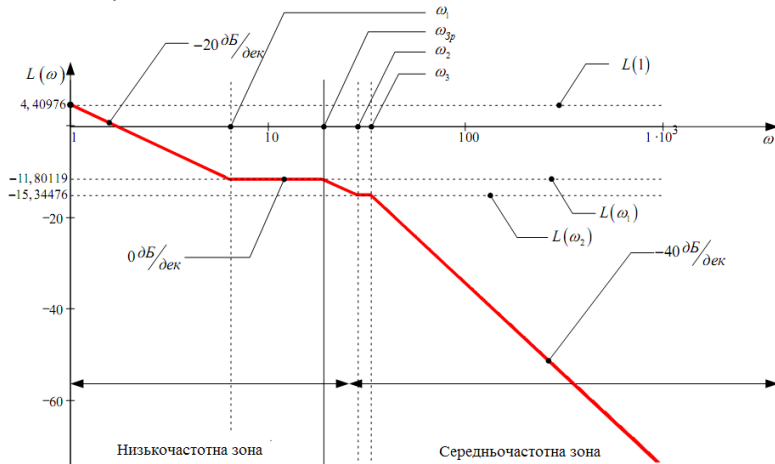


Рис 8.1. Бажана ЛАХ системи

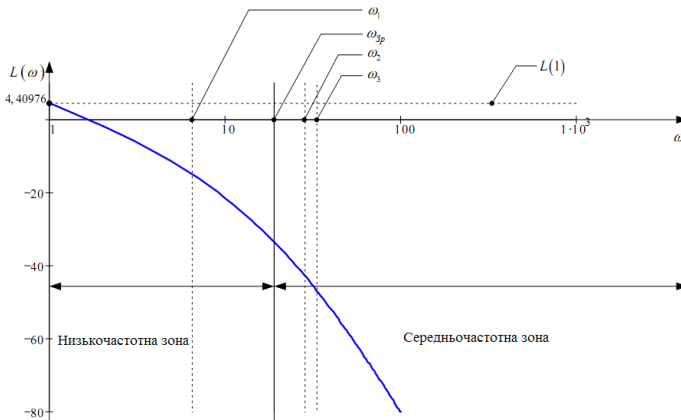


Рис 8.2. Графік реальної ЛАХ

Для того, щоб оцінити необхідність корекції роботи системи,

тобто приведення реальної логарифмічної амплітудної характеристики системи до бажаного вигляду, побудуємо реальну і бажану логарифмічні амплітудні характеристики на одному графіку. (рис. 8.3).

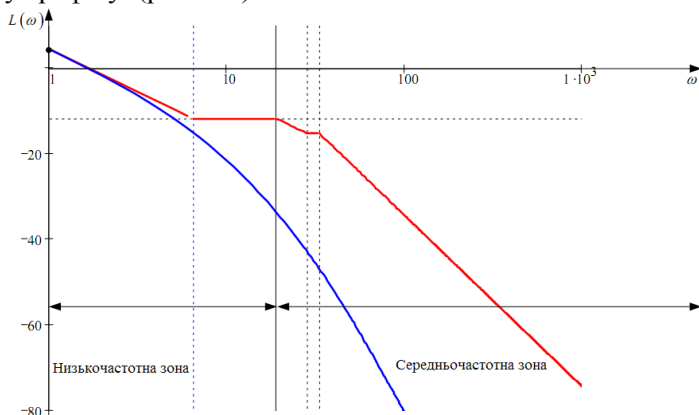


Рис. 8.3. Сполучений графік ЛАХ бажаної і реальної

Як видно з графіка, наведеного на рис 8.3, реальна ЛАХ вимагає коректування.

Скористаємося сполученим графіком для побудови ЛАХ коректуючого пристрою. Для цього знайдемо різницю між значеннями амплітуд бажаного і реального графіків. Графік логарифмічної амплітудної характеристики компенсуючого пристрою може бути побудований відповідно до наступного рівняння:

$$L_K(\omega) = L_B(\omega) - L_P(\omega)$$

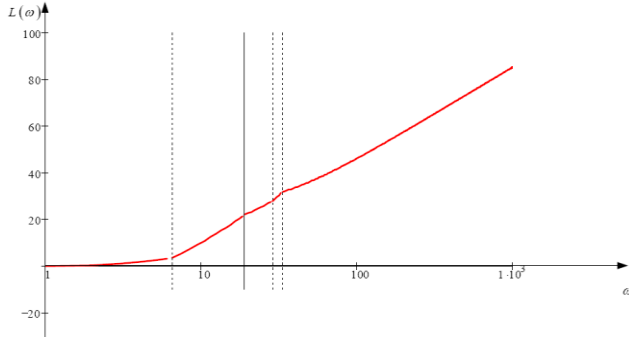


Рис. 8.4. ЛАХ компенсуючого пристрою

Виходячи з отриманої ЛАХ коректуючого пристрою (рис. 8.4), виберемо схему коригувального пристрою. Для цього спростимо графік ЛАХ коректуючого пристрою.

Як видно з графіка, у спрощеному вигляді і з незначною погрішністю можна вважати, що графік складається з двох ділянок: з підсиленням у 0дБ/дек і $+40\text{дБ/зруд}$. Частота, при переході через яку буде здійснюватися перехід від однієї ділянки до іншої, дорівнює частоті ω_1 . Рівняння графіка ЛАХ коригувального пристрою має такий вигляд:

$$L_{Кр} = \begin{cases} 0, \omega = [1, \omega_1] \\ +40\lg(\omega) - 40\lg(\omega_1), \omega = [\omega_1, \infty] \end{cases}$$

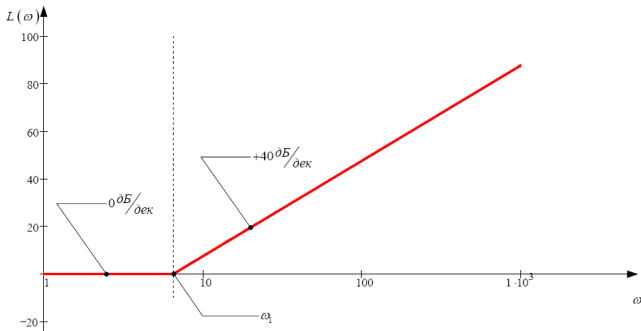


Рис 8.5. ЛАХ коригувального пристрою

Як видно з графіка ЛАХ, представленого на рис. 8.5, як

коригувальний пристрій можна використати дві диференціюючі ланки включені послідовно.

Передаточна функція корегуючого пристрою буде мати вигляд

$$W_K(p) = k(Tp + 1)^2$$

де $k=1$;

$$T = \frac{1}{\omega_1} = 154,7 * 10^{-3} \text{ с.}$$

Задача №2. Розрахувати інтегральну квадратичну оцінку для системи автоматичного регулювання рис. 8.6. Система складається з регулятора інтегральної дії і об'єкта – двох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок. Система замкнута, працює за відхиленням.

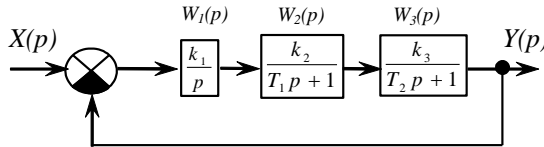


Рис. 8.6.

$$k_1=2; k_2=3; k_3=0.1; T_1=0.5\text{с}; T_2=0.2\text{с.}$$

За допомогою оцінки знайти оптимальний коефіцієнт підсилення регулятора – K_p .

Розв'язок. Для розрахунку інтегральної квадратичної оцінки існують формули на основі зображень динамічної помилки.

$$\delta_o = h(\infty) - h(t); \quad \Delta_o = L\{\delta_o\}; \quad H(0) = L\{h(\infty)\};$$

$$H(p) = L\{h(t)\};$$

$$\Delta_o(p) = H(0) - H(p);$$

$$H(p) = \frac{1}{p} W_3(p);$$

$$H(0) = \frac{1}{p} W_3(0);$$

$$\Delta_o(p) = \frac{1}{p} [W_3(0) - W_3(p)]; \quad \Delta_o(p) = \frac{B(p)}{C(p)};$$

Для знаходження оцінки використовують формули Мак-Лена (Таблиця 8.1)

Спочатку обчислимо значення квадратичної оцінки при заданих параметрах регулятора. Передаточна функція замкнутої системи автоматичного керування буде мати вигляд:

$$W_3(p) = \frac{0.6}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6};$$

Таблиця 8.1

Порядок р-ня	Рівняння динамічної помилки	Інтегральна квадратична оцінка
$n=1$	$\Delta_o(p) = \frac{b_0}{C_1p + C_0};$	$I_2 = \frac{b_0^2}{2C_0C_1};$
$n=2$	$\Delta_o(p) = \frac{b_1p + b_0}{C_2p^2 + C_1p + C_0};$	$I_2 = \frac{b_1^2C_0 + b_0^2C_2}{2C_0C_1C_2};$
$n=3$	$\Delta_o(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{C_3p^3 + C_2p^2 + C_1p + C_0};$	$I_2 = \frac{b_2^2C_0C_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)C_0C_3 + b_0^2C_2C_3}{2C_0C_3(-C_0C_3 + C_1C_2)};$

Зображення динамічної помилки обчислимо як:

$$\begin{aligned} \Delta_o(p) &= \frac{1}{p} [W_3(0) - W_3(p)] = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{0.6}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6} \right] = \\ &= \frac{0.1p^3 + 0.7p^2 + p}{p(0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6)} = \frac{0.1p^2 + 0.7p + 1}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.6}; \end{aligned}$$

Використовуючи формули Мак-Лена для рівняння 3-порядку отримаємо:

$$b_2 = 0.1, \quad b_1 = 0.7, \quad b_0 = 1, \quad c_3 = 0.1, \quad c_2 = 0.7, \quad c_1 = 1, \quad c_0 = 0.6.$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{b_2^2 C_0 C_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) C_0 C_3 + b_0^2 C_2 C_3}{2C_0 C_3 (-C_0 C_3 + C_1 C_2)} = \\
&= \frac{0.1^2 \cdot 0.6 \cdot 1 + (0.7^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0.1) 0.6 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.7 \cdot 0.1}{2 \cdot 0.6 \cdot 0.1 (-0.6 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7)} = \\
&= \frac{0.006 + 0.0174 + 0.07}{0.0768} = 1.216;
\end{aligned}$$

Знайдемо оптимальне значення K_p регулятора із умови:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial K} &= 0 \\
\Delta_\sigma(p) &= \frac{1}{p} [W_s(0) - W_s(p)] = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{0.3K}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.3K} \right] = \\
&= \frac{0.1p^3 + 0.7p^2 + p}{p(0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.3K)} = \frac{0.1p^2 + 0.7p + 1}{0.1p^3 + 0.7p^2 + p + 0.3K};
\end{aligned}$$

Рівняння для інтегральної оцінки буде

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{0.1^2 \cdot 0.3K \cdot 1 + (0.7^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0.1) 0.3K \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.7 \cdot 0.1}{2 \cdot 0.3K \cdot 0.1 (-0.3K \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7)} = \\
&= \frac{0.0117K + 0.07}{-0.0018K^2 + 0.042K}
\end{aligned}$$

Продиференціюємо дане рівняння і прирівняємо до нуля:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_2}{\partial K} &= \frac{\partial}{\partial K} \left(\frac{0.0117K + 0.07}{-0.0018K^2 + 0.042K} \right) = \\
&= \frac{0,00002106K^2 + 0,000252K - 0,00294}{0,00000324K^4 - 0,001512K^3 + 0,1764K^2} = 0 \\
0,00002106K^2 + 0,000252K - 0,00294 &= 0
\end{aligned}$$

Розв'язавши квадратне рівняння отримаємо:

$$K_1 = -19,23; \quad K_2 = 7,26;$$

Отже оптимальний коефіцієнт підсилення регулятора із умови мінімуму інтегральної квадратичної оцінки рівний:

$$K_p = 7,26.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Розрахувати інтегральну квадратичну оцінку замкнутої системи автоматичного керування. Розімкнута САК складається із регулятора – інтегруючої ланки та об'єкта – інерційної ланки I – порядку. $K_1=0,45 \cdot N$, $K_2=0,5$, $T_I=(0,25 + N/10)$ с.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття № 9

Розрахунок і побудова перехідних процесів в нелінійних системах методом припасовування

Мета заняття. Вивчення методик побудови математичних моделей нелінійних систем та ознайомлення з методами побудови перехідних процесів в нелінійних системах методом припасовування.

Задача №1. На основі наведеної схеми (рис. 9.1) нелінійної системи регулювання рівня рідини скласти математичну модель та побудувати перехідну характеристику. Схема складається з об'єкта регулювання і релейного регулятора. $H_c=1$ м, $h=0.1$ м, $k=0.01$ с⁻¹.

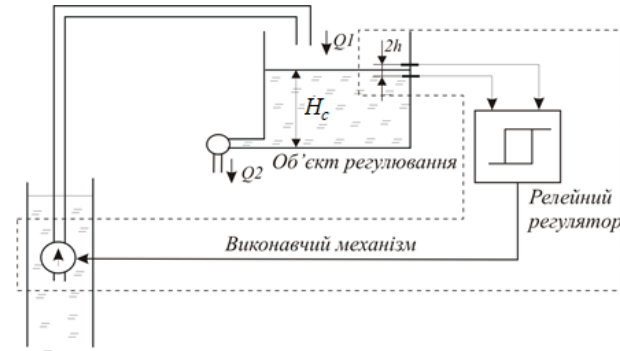


Рис. 9.1. Нелінійна система автоматичного регулювання рівня рідини

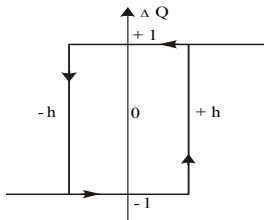
Розв'язок. Об'єктом регулювання є резервуар з постійною витратою рідини. Його динамічні властивості описуються передаточною функцією інтегруючої ланки

$$W(p) = \frac{k}{p}$$

Об'єкт регулювання входить до лінійної частини нелінійної системи.

Релейний регулятор складається з давачів рівня, аналізуючого і підсилюючого пристрою, релейного елемента і

помпи. Статична характеристика регулятора (рис. 9.2.) – кусочно-лінійна з зоною неоднозначності шириною $2h$.



$$\Delta Q = \begin{cases} +1 \text{ при } \Delta H > h \\ +1 \text{ при } |\Delta H| < h \text{ та } \frac{dH}{dt} < 0 \\ -1 \text{ при } \Delta H < -h \\ -1 \text{ при } |\Delta H| < h \text{ та } \frac{dH}{dt} > 0 \end{cases}$$

Рис. 9.2. Статична характеристика регулятора та її математичний опис

На рис. 9.3. наведена структурна схема системи регулювання.

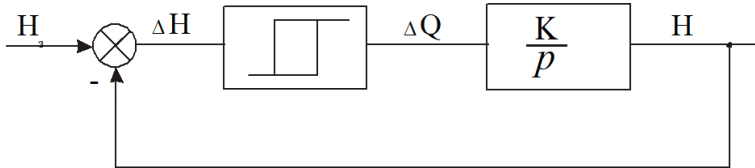


Рис. 9.3. Структурна схема системи.

Зі структурної схеми видно, що зображення регульованої величини $H(p)$ зв'язано з зображенням регулюючої дії $\Delta Q(p)$ через передаточну функцію лінійної частини нелінійної системи

$$H(p) = \frac{k}{p} \Delta Q(p).$$

Звідси диференціальне рівняння об'єкта у операторній формі $pH(p) = k\Delta Q(p)$.

Відповідно рівняння для оригіналів

$$\frac{dH(t)}{dt} = k\Delta Q(t).$$

Величина ΔQ є нелінійною функцією ΔH , а отже, диференціальне рівняння

$$\frac{dH(t)}{dt} = k\Delta Q(\Delta H)$$

є також нелінійним.

Як слідує з рис. 9.2. характер нелінійності є такий, що $\Delta Q(t) = \pm 1$ у відповідності до того у якому стані знаходиться реле. Таким чином нелінійне рівняння може бути представлено у вигляді двох лінійних рівнянь, які відповідають включеному (1) і виключеному (2) станіві реле

$$\frac{dH(t)}{dt} = k ;$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = -k .$$

Розв'язок цих рівнянь дає змогу знаходити зміну регульованої величини у часі на окремих інтервалах часу, котрі відповідають різним станам реле. При цьому використовується метод “припасовування” або “зшивання” при якому кінцеві значення зміни регульованої величини на попередньому інтервалі приймаються за початкові для розрахунку руху на наступному інтервалі.

При $k = 0.01 \text{с}^{-1}$ після включення релейного регулятора рівень рідини буде змінюватися за законом

$$H(t) = kt + c_1 ,$$

де c_1 - константа інтегрування, що визначається з початкових умов. У даному випадку початкові умови нульові $H(0) = 0$, тому $c_1 = 0$, а рівень рідини досягне заданої верхньої межі спрацювання 1.1 м, у момент часу t_1 , який визначимо з рівняння //

$$t_1 = \frac{H}{k} = \frac{1.1}{0.01} = 110 \text{ с} .$$

Після першого вимикання реле рівень рідини буде знижуватися. Закон зміни рівня на другому інтервалі знайдемо з розв'язку рівняння

$$H(t) = -kt + c_2$$

Згідно з принципом припасовування початкові умови для другого інтервалу відповідають кінцевим значенням на першому інтервалі, тобто

$$H(110) = 1.1 \text{ м. Тому } c_2 = 1.1 + k110.$$

У результаті зміна рівня на другому інтервалі

$$H(t) = -k(t - 110) + 1.1.$$

Другий інтервал закінчиться, коли рівень знизиться до відмітки 0.9 м, тобто в момент

$$t_2 = \frac{1.1 + 110k - H}{k} = \frac{1.1 + 1 - 0.9}{0.01} = 130 \text{ с.}$$

Далі побудову можна продовжувати аналогічним чином.

В результаті отримаємо наступну перехідну характеристику рис. 9.4.

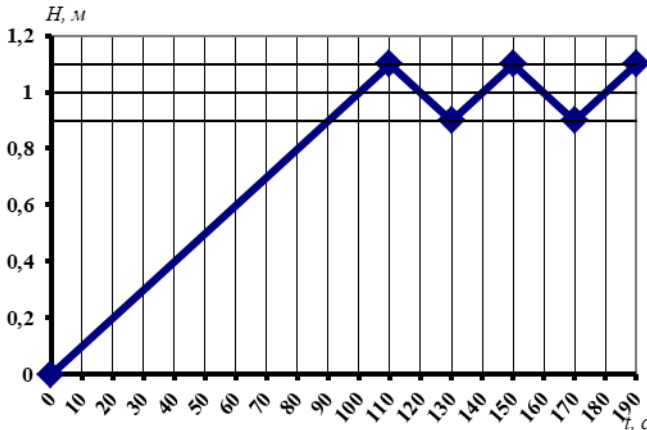


Рис. 9.4. Перехідна характеристика нелінійної АСР

Завдання для самостійного опрацювання

1. Дослідити перехідний процес в системі, структурна схема якої показана на рис. 9.5

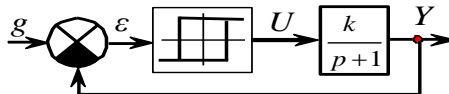


Рис. 9.5

Вихідні дані: $k = N c^{-1}$, $b = 0.5$, $c = 5$

Практичне заняття №10

Дослідження нелінійних систем методами фазової площини та гармонічної лінеаризації

Мета заняття. Вивчити методику розрахунку і побудови фазового портрету нелінійних САК.

Вивчити методику дослідження нелінійних САК методом гармонічної лінеаризації.

Задача №1. Побудувати фазовий портрет для точки, яка здійснює гармонічні коливання за законом

$$x = A \sin \omega t.$$

Для побудови фазового портрета визначимо похідну від координати x .

$$\frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t. \quad (10.1)$$

Для одержання рівняння фазових траєкторій виключимо час t з рівнянь для x і dx/dt . Рівняння (10.1) піднесемо до квадрату, причому dx/dt позначимо через y :

$$y^2 = A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t. \quad (10.2)$$

Рівняння для x також зведемо в квадрат і помножимо на ω^2 :

$$\omega^2 x^2 = A^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \quad (10.3)$$

Зробивши додавання лівих і правих частин рівнянь (10.2) і (10.3), одержимо:

$$y^2 + \omega^2 x^2 = A^2 \omega^2$$

або

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \omega^2} = 1 \quad (10.4)$$

Рівнянням (10.4) представлені рівняння фазових траєкторій зображуючої, точки [рівняння (10.4) є канонічним рівнянням еліпса]. На рис. 10.1 представлені криві зміни координати x зображуючої точки і швидкості $y = dx/dt$ як функції часу.

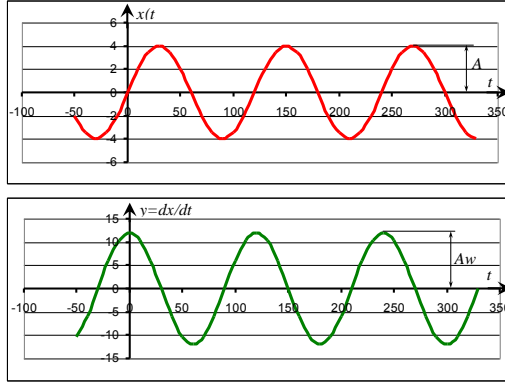


Рис. 10.1. Криві зміни координати x зображуючої точки і швидкості $y=dx/dt$

Фазовий портрет (рис. 10.2) являє собою сімейство еліпсів. Кожній фіксованій амплітуді A відповідає визначений еліпс із півосями: $a = A$, $b = wA$. Стрілками зазначений напрямок руху зображуючої точки M_1 . У верхній половині фазової площини, де $dx/dt > 0$, що означає збільшення x , зображуюча точка завжди рухається зліва направо (убік збільшення x). У нижній половині фазової площини, де $dx/dt < 0$, зображуюча точка рухається з права наліво. На осі x , що розділяє верхню і нижню половини фазової площини, $y = dx/dt = 0$, тобто швидкість зміни x дорівнює нулеві. Отже, фазова траєкторія перетинає вісь x під прямим кутом.

$$A=4, w=3.$$

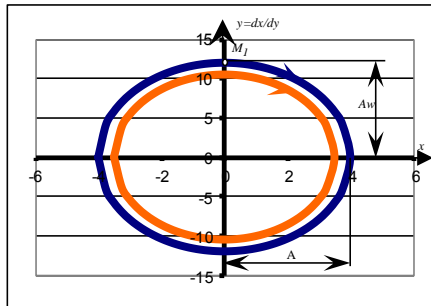


Рис. 10.2. Фазовий портрет

Задача №2. Розрахувати і побудувати фазовий портрет нелінійної САК.

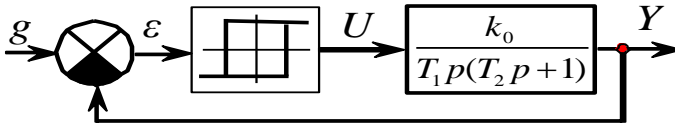


Рис. 10.3. Структурна схема нелінійної САК

Параметри ланок $T_1=1$, $T_2=1$, $B=1$, $a=1$.

Розв'язок. На основі структурної схеми можна записати рівняння:

$$Y(p) = \frac{k_0}{T_1 p (T_2 p + 1)} * U(\varepsilon)$$

Диференціальне рівняння в операторній формі буде:

$$Y(p)T_1 p^2 + Y(p)p = k_0 U(\varepsilon)$$

Перейшовши до оригіналів отримаємо:

$$T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = k_0 U(\varepsilon)$$

Статична характеристика нелінійного елемента описується наступним рівнянням:

$$U(\varepsilon) = \begin{cases} B & \text{при } \varepsilon > c \\ B & \text{при } |\varepsilon| < c \quad \varepsilon' < 0 \\ -B & \text{при } \varepsilon < -c \\ -B & \text{при } |\varepsilon| < c \quad \varepsilon' > 0 \end{cases}$$

Так як функція $U(\varepsilon)$ приймає значення $+B$ та $-B$ тому матимемо:

$$\begin{cases} T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = k_0 B & (1) \\ T_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -k_0 B & (2) \end{cases}$$

В нашому випадку нелінійність складається з двох відрізків прямих ліній, яким відповідають умови (1) і (2).

Запишемо в 1-ій нормальній формі Коші

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{k_0}{T_1} B - \frac{1}{T_1} \frac{dy}{dt};$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{k_0}{T_1} B - \frac{1}{T_1} x_2 \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на друге:

$$T_1 \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + k_0 B}{x_2}$$

І проінтегруємо:

$$dx_1 = \int \frac{T_1 x_2 dx_2}{-x_2 + k_0 B}$$

Проінтегрувавши, знайдемо x для першого і другого випадків:

$$(1) \quad x_1 = -T_1 x_2 - T_1 B k_0 \ln|x_2 - B k_0| + C_1$$

$$(2) \quad x_1 = -T_1 x_2 + T_1 B k_0 \ln|x_2 + B k_0| + C_2$$

Врахувавши вихідні дані маємо:

$$x_1 = -x_2 - \ln|x_2 - 1| + C_1 \quad (1)$$

$$x_1 = -x_2 + \ln|x_2 + 1| + C_2 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad x_1 < -C \quad x_2 < 0 & (1) \\ 1 \quad \text{при} \quad x_1 < C \quad x_2 > 0 \\ -1 \quad \text{при} \quad x_1 > -C \quad x_2 < 0 & (2) \\ -1 \quad \text{при} \quad x_1 < C \quad x_2 > 0 \end{cases}$$

З початкових умов знайдемо C_2 :

$$C_2 = 1;$$

Будуємо таблицю $x_1(x_2)$ для випадку (2)

x_1	x_2
1	0
0,98	-0,2
0,89	-0,4
0,68	-0,6
-1	-0,95

Коли x_1 стало рівним (-1) то приймаємо кінцеві значення x_1 та x_2 як початкові умови для розрахунку C_1

$$C_1 = -1.282$$

Будуємо таблицю $x_1(x_2)$ для випадку (1) при $C_1 = -1.282$

x_1	x_2
-1,15	-0,6
-1,28	0
-1,17	0,4
-0,47	0,8
1	0,96

Аналогічно знаходимо C_2'

$$C_2' = 1.287;$$

Будуємо таблицю $x_1(x_2)$ для випадку (2) при $C_2' = 1.287;$

x_1	x_2
1,16	0,6
1,287	0
1,18	-0,4
0,48	-0,8
-1	-0,94

По всіх трьох таблицях будуємо графік:

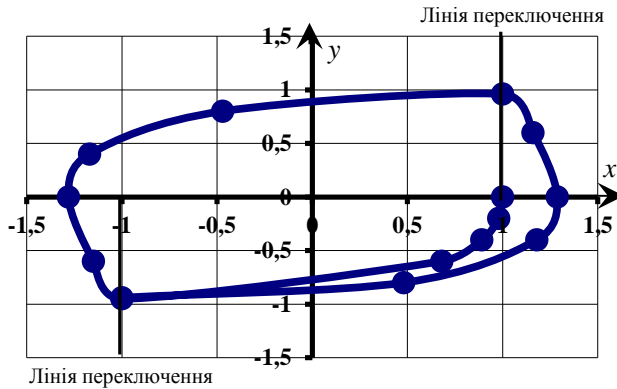


Рис. 10.4. Фазовий портрет нелінійної САК

Це і є шуканий **фазовий портрет**

Задача №3. Для системи автоматичного керування побудувати фазовий портрет методом ізоклін. Параметри ланок $T_1=1, T_2=1, B=1, a=1$.

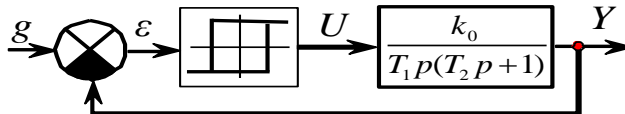


Рис. 10.5.

Динамічні властивості нелінійної системи описуються наступними рівняннями:

$$Y(p) = -U(\varepsilon) \cdot \frac{1}{T_1 p (T_2 p + 1)}$$

$$Y(p) T_1 p (T_2 p + 1) = -U(\varepsilon)$$

$$T_1 T_2 p^2 Y(p) + T_1 p Y(p) = -U(\varepsilon)$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} = -U(\varepsilon)$$

Так як статична характеристика нелінійного елемента має вигляд:

$$U(\varepsilon) = \begin{cases} b & \text{при } \varepsilon \geq -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon \geq a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \text{ (I)} \\ -b & \text{при } \varepsilon < -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon < a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

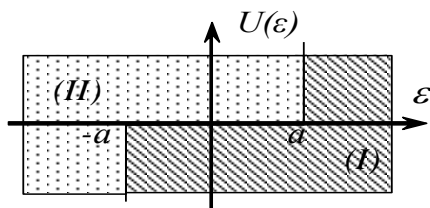


Рис. 10.6

Диференціальні рівняння руху системи будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} = -b & \text{при } \varepsilon \geq -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon \geq a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \text{ (2.2.1)} \\ T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} = b & \text{при } \varepsilon < -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon < a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \text{ (2.2.2)} \end{cases}$$

Так як фазова площина може бути розбита на дві області, то необхідно визначити рівняння ізоклін для кожної області.

Знайдемо рівняння ізоклін для області (I) на рис. 10.6. Введемо позначення

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = x_1; \quad \frac{dx_1}{dy} = N \text{ — для рівняння (10.1);}$$

$$\frac{dx_1}{dy} = M \text{ — для рівняння (10.2);} \quad (10.3)$$

Останні вирази визначають нахил фазової траєкторії в даній точці.

Рівняння (10.1) і (10.2) запишемо в наступному вигляді:

$$\begin{cases} T_1 T_2 \frac{dx_1}{dt} + T_1 x_1 = -b \\ T_1 T_2 \frac{dx_1}{dt} + T_1 x_1 = b \end{cases} \quad (10.4)$$

або

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{b}{T_1T_2} \\ \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{T_2}x_1 + \frac{b}{T_1T_2} \end{cases} \quad (10.5)$$

Для виключення часу t розділимо рівняння (10.5) на $x_1 = \frac{dy}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dy} = -\frac{1}{T_2} - \frac{b}{T_1T_2x_1} \\ \frac{dx_1}{dy} = -\frac{1}{T_2} + \frac{b}{T_1T_2x_1} \end{cases} \quad (10.6)$$

Звідси

$$\begin{cases} N = \frac{dx_1}{dy} = \frac{-T_1x_1 - b}{T_1T_2x_1} \\ M = \frac{dx_1}{dy} = \frac{-T_1x_1 + b}{T_1T_2x_1} \end{cases} \quad (10.7)$$

Із рівнянь (10.7) отримуємо рівняння ізоклін

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b}{NT_1T_2 + T_1} \\ x_1 = \frac{b}{MT_1T_2 + T_1} \end{cases} \quad (10.8)$$

Ізокліни (10.8) представляють собою прями, паралельні до осі Ox і знаходяться від початку координат на відстанях, що залежать від величини нахилу N та M при заданих параметрах системи b і T . Задаючи значення N та M від 0 до нескінченності, отримаємо сім'ю ізоклін.

Для побудови фазового портрета зручніше спочатку виразити параметри N та M через координату y .

Із рівнянь (10.8) після підстановки числових значень параметрів отримаємо:

$$\begin{cases} N = \frac{-x_1 - 1}{x_1} & \text{при } \varepsilon \geq -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon \geq a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \\ M = \frac{-x_1 + 1}{x_1} & \text{при } \varepsilon < -a \text{ і } \dot{\varepsilon} < 0 \text{ або } \varepsilon < a \text{ і } \dot{\varepsilon} > 0 \end{cases} \quad (10.9)$$

Для рівнянь (9) при зміні у обчислимо N , M , $\arctg N$ та $\arctg M$

Таблиця 10.1

Y	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1	-1,25
N	-1,8	-2	-2,33	-3	-5	0	3	1	0,33	0	-0,2
$\arctg N$	-60,94	-63,43	-66,80	-71,5651	-78,69	90	71,56	45	18,43	0	-11,30

Таблиця 10.2

Y	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1	-1,25	0,97
N	-0,2	0	0,33	1	3	0	-5	-3	-2,33	-2	-1,8	0,03
$\arctg M$	-11,30	0	18,43	45	71,56	90	-78,69	-71,56	-66,80	-63,43	-60,94	1,77

Згідно таблиць 10.1 і 10.2 на рис. 10.7. проводимо ізокліни. На кожній ізокліні нанесені лінії, що вказують нахил фазової траєкторії $\arctg N$ і $\arctg M$, коли вона перетинає дану ізокліну.

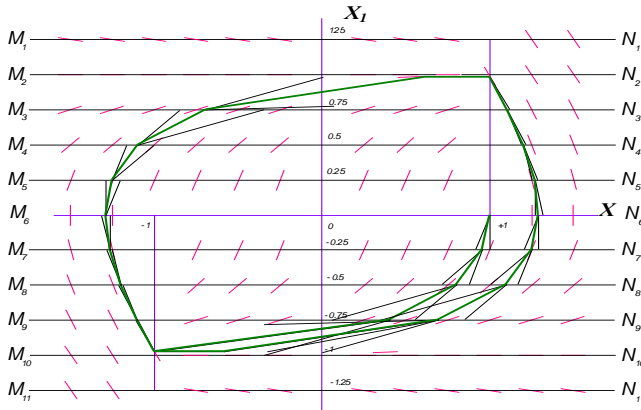


Рис. 10.7. Побудова фазового портрету методом ізоклін

Задача №4. Знайти гармонічний коефіцієнт передачі двопозиційного реле з гістерезисною статичною характеристикою. $W_{не}(A)=?$

Розв'язок. Для нелінійної характеристики, графік якої показано на рис. 10.8

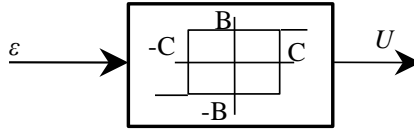


Рис. 10.8. Двопозиційне реле з гістерезисною статичною характеристикою

гармонічна лінеаризація при автоколиваннях $x=Asinwt$ має вигляд:

$$W_{не}(A) = \left[q_1(A) + \frac{P}{w} q_2(A) \right] = q_1(A) + j q_2(A)$$

Підрахуємо значення коефіцієнтів $q_1(A)$ і $q_2(A)$ для даної нелінійності.

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} U(A \sin wt) \sin wtdwt$$

$$q_2(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} U(A \sin wt) \cos wtdwt$$

$$\begin{aligned} q_1(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} U(A \sin wt) \sin wtdwt = \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\varphi} + \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} + \int_{\pi+\varphi}^{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left(\int_0^{\varphi} -B \sin wtdwt + \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} B \sin wtdwt + \int_{\pi+\varphi}^{2\pi} -B \sin wtdwt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left(B \cos wt \Big|_0^{\varphi} - B \cos wt \Big|_{\varphi}^{\pi+\varphi} + B \cos wt \Big|_{\pi+\varphi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{B}{\pi A} ((\cos \varphi - \cos 0) - (\cos(\pi + \varphi) - \cos \varphi) + (\cos 2\pi - \cos(\pi + \varphi))) = \\ &= \frac{B}{\pi A} (\cos \varphi - 1 + \cos \varphi + \cos \varphi + 1 + \cos \varphi) = \frac{4B \cos \varphi}{\pi A} \end{aligned}$$

З рисунка 10.9 видно, що $A \sin \varphi = C$,

$$\text{тоді } \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}}.$$

$$q_1(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}}.$$

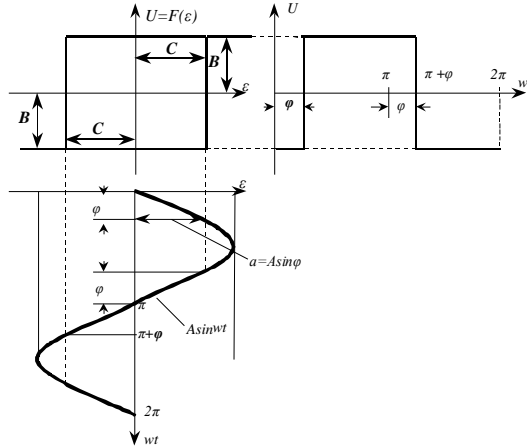


Рис. 10.9. Допоміжний графік для визначення коефіцієнтів $q_1(A)$ та $q_2(A)$

Аналогічно для $q_2(A)$:

$$\begin{aligned} q_2(A) &= \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} U(A \sin wt) \cos wt dw = \frac{1}{\pi A} \left[\int_0^{\varphi} + \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} + \int_{\pi+\varphi}^{2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left(\int_0^{\varphi} -B \cos wt dw + \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} B \cos wt dw + \int_{\pi+\varphi}^{2\pi} -B \cos wt dw \right) = \\ &= \frac{1}{\pi A} \left(-B \sin wt \Big|_0^{\varphi} + B \sin wt \Big|_{\varphi}^{\pi+\varphi} - B \sin wt \Big|_{\pi+\varphi}^{2\pi} \right) = \\ &= \frac{B}{\pi A} \left(-(\sin \varphi - \sin 0) + (\sin(\pi + \varphi) - \sin \varphi) - (\sin 2\pi - \sin(\pi + \varphi)) \right) = \\ &= \frac{B}{\pi A} (-\sin \varphi + 0 - \sin \varphi - \sin \varphi - 0 - \sin \varphi) = \frac{-4B \sin \varphi}{\pi A} \end{aligned}$$

так як що $A \sin \varphi = C \Rightarrow \sin \varphi = \frac{C}{A}$, тоді.

$$q_2(A) = -\frac{4BC}{\pi A^2}$$

Вираз для гармонічного коефіцієнта передачі двопозиційного реле з гістерезисною статичною характеристикою з врахуванням рівностей для $q_1(A)$ та $q_2(A)$ має вигляд:

$$W_{HE}(A) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} - j \frac{4BC}{\pi A^2}$$

Задача №5. Знайти гармонічний коефіцієнт передачі нелінійного елемента, статична характеристика якого представляє релейну характеристику із зоною нечутливості. $W_{ne}(A)=?$

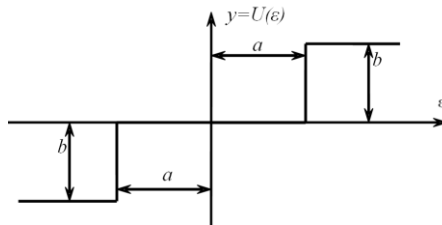


Рис. 10.10. Релейна характеристика із зоною нечутливості

Для синусоїдального вхідного сигналу $x=A \sin \omega t$ при $A > a$ будемо графік сигналу на виході $y=U(\varepsilon)$ (рис. 10.10.). В нашому випадку статична характеристика нелінійного елемента являється однозначною функцією, тому комплексний коефіцієнт передачі має тільки дійсну частину:

$$W_{ne}(A) = q_1 + j q_2 \quad (10.9)$$

Визначимо амплітуду синусоїдної складової першої гармоніки на виході нелінійного елемента A_1 , використовуючи формулу коефіцієнта ряду Фур'є і криві рис. 10.10:

$$q_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \omega t) \sin \omega t d\omega t = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} b \sin \omega t d\omega t = \frac{4b}{\pi A} \cos \varphi \quad (10.10)$$

На основі рис. 10.10 маємо:

$$\sin \varphi = a / A; \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}. \quad (10.11)$$

Вираз (10.9) для комплексного коефіцієнта передачі з врахуванням рівностей (10.10) і (10.11) має вигляд:

$$W_{не}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}.$$

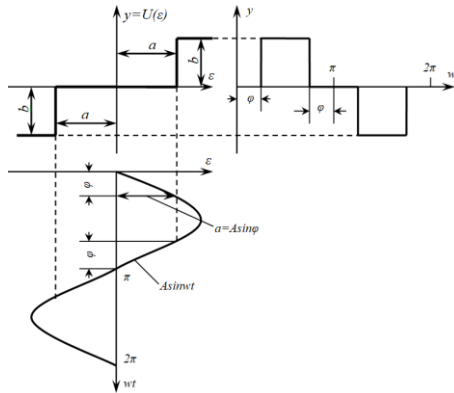


Рис. 10.11. Допоміжний графік для визначення коефіцієнтів $q_1(A)$ та $q_2(A)$

Завдання для самостійного опрацювання

Для нелінійної САК структурна схема якої показана на рис 10.12 вивести рівняння для побудови фазового портрету.

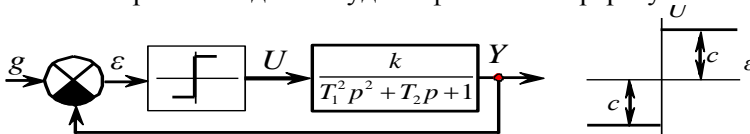


Рис. 10.12

Початкові умови $T_1^2 = 0,5 \text{ с}^2$, $T_2 = 1 \text{ с}$, $k=N$. N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Практичне заняття №11
Дослідження параметрів нелінійних систем
автоматичного керування

Мета заняття. Вивчити метод Гольдфарба та критерій В.М. Попова для дослідження параметрів нелінійних систем.

Задача №1. Визначити методом гармонічної лінеаризації амплітуду і частоту автоколивань нелінійної системи.

Нехай задана гармонічно лінеаризована система, причому вхідний сигнал $G=0$ (рис. 11.1).

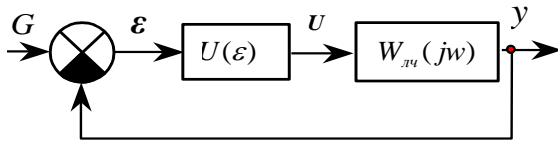


Рис. 11.1.

Лінійна частина системи задана інтегруючою ланкою та інерційною 1-го порядку: $k_0=1, T_1=1c$

$$W_{ли}(p) = \frac{k_0}{T_1 p + 1} \cdot \frac{1}{p}$$

Характеристика $U(\varepsilon)$ є характеристикою реального релейного елемента (рис. 11.2) з параметрами: $b=10 B, c=4 рад$.

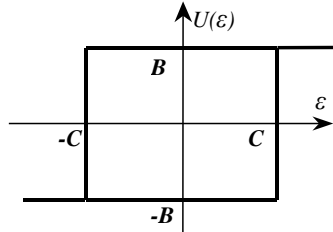


Рис. 11.2.

Розв'язок. Передаточна функція гармонічно лінеаризованого нелінійного елемента має вигляд

$$W_{не}(A) = q_1 + q_2 \frac{P}{w}$$

де відповідно до таблиць

$$q_1 = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}};$$

$$q_2 = -\frac{4bc}{\pi A^2}$$

Застосуємо метод Гольдфарба:

$$W_{не}(A) \cdot W_{лч}(jw) = -1.$$

$$\text{Згідно цього методу } W_{лч}(jw) = -\frac{1}{W_{не}(A)}.$$

Підставивши $p=jw$, дістанемо

$$W_{не}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} = \frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right);$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{W_{не}(A)} &= -\frac{1}{\frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right)} = \frac{-1}{\frac{4bc}{\pi A^2} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right)}{\left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right)} = \frac{-\left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right)}{\frac{4bc}{\pi A^2} \left(\frac{A^2}{c^2} - 1 + 1 \right)} = \\ &= -\frac{\pi c}{4b} \left(\sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right) = -\frac{\pi c}{4b} \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \frac{\pi c}{4b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{лч}(jw) &= \frac{k_0}{T_1 jw + 1} \cdot \frac{1}{jw} = \frac{k_0}{-T_1 w^2 + jw} \cdot \frac{(-T_1 w^2 - jw)}{(-T_1 w^2 - jw)} = \frac{k_0(-T_1 w^2 - jw)}{T_1^2 w^4 - j^2 w^2} = \frac{k_0(-T_1 w - j)}{w(T_1^2 w^2 + 1)} = \\ &= \frac{-k_0 T_1}{T_1^2 w^2 + 1} - j \frac{k_0}{w(T_1^2 w^2 + 1)} = U_x(w) + jV_x(w). \end{aligned}$$

Підставивши задані коефіцієнти маємо:

$$W_{лч}(jw) = -\frac{1}{w^2 + 1} - j \frac{1}{w^3 + w};$$

$$-\frac{1}{W_{не}(A)} = -\frac{\pi}{40} \sqrt{A^2 - 16} - j \frac{\pi}{10}.$$

Побудуємо годограф для лінійної і нелінійної частини системи керування. Для цього складемо таблицю 11.1, по якій

спільний годограф буде мати вигляд рис. 11.3. З координат точки перетину двох кривих визначимо параметри нелінійної САК.

Таблиця 11.1.

w	$U_l(w)$	$V_l(w)$
0	-1	∞
0,1	-0,99	-9,90
0,2	-0,96	-4,81
0,5	-0,8	-1,6
0,8	-0,61	-0,76
1	-0,5	-0,5
2	-0,2	-0,1
4	-0,06	-0,01
6	-0,03	-0,004
10	-0,01	-0,0009

Графіки функцій $-1/W_{не}(A)$ і $W_l(jw)$ зображено на рис. 11.3. Уявна частина характеристики $-1/W_{не}(A)$ не залежить від амплітуди, тому характеристика походить паралельно осі абсцис. При $A=c=4$

$$-1/W_{не}(A) = -j \frac{\pi c}{4b}.$$

У точці перетину характеристик $-1/W_{не}(A)$ і $W_l(jw)$ їх уявні частини однакові, тобто

$$jV_l(w_a) = j \frac{\pi c}{4b}$$

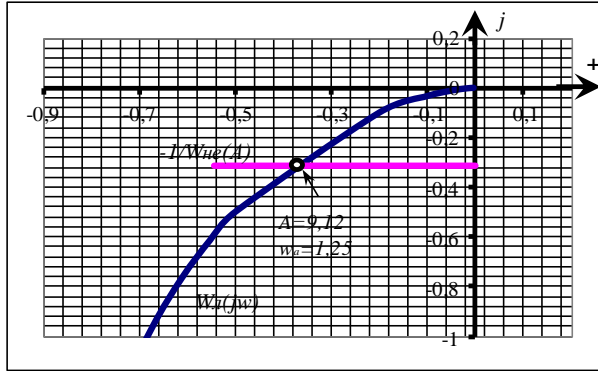


Рис. 11.3.

або

$$\frac{k_0}{w(T_1^2 w^2 + 1)} = \frac{\pi c}{4b}$$

$$\frac{1}{w^3 + w} = 0.314$$

звідки отримаємо рівняння

$$0.314w_a^3 + 0.314w_a - 1 = 0$$

розв'язавши яке визначимо частоту автоколивань. Це рівняння має один дійсний додатний корінь 1.2468, отже

$$w_a = 1.2468 \text{ c}^{-1}.$$

Амплітуду автоколивань A визначимо з умови, що при $w = w_a$ дійсні частини характеристик $-1/W_{не}(A)$ і $W_d(jw)$ однакові, тобто

$$-\frac{\pi}{40} \sqrt{A^2 - 16} = -\frac{1}{w^2 + 1}$$

або

$$0,0785 \sqrt{A^2 - 16} = 0.6433$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{0,6433}{0,0785}\right)^2 + 16}$$

Звідки $A = 9.1190$.

Задача №2. Перевірити виконання достатньої умови стійкості нелінійної системи автоматичного регулювання. Структурна схема системи зображена на рис. 11.4. Параметри системи: $T_1=5$ с, $T_2=12,5$ с, коефіцієнт передачі лінійної частини системи $\kappa_n=4$, коефіцієнт підсилення нелінійної ланки $\kappa_H = \frac{c}{b} = 0.5$ (рис. 11.5).

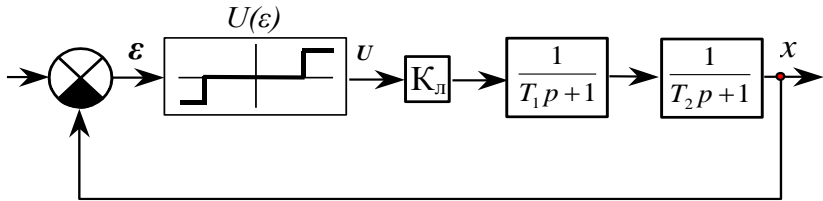


Рис. 11.4.

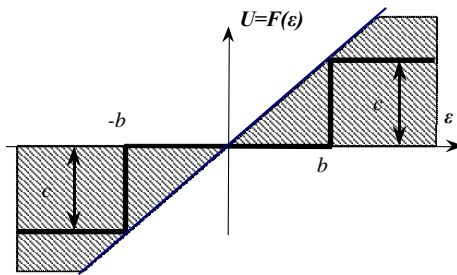


Рис. 11.5.

Розв'язок. Згідно критерію В.М. Попова для того, щоб мала місце абсолютна стійкість у куті $[0; K]$, досить, щоб у площині $W_n^*(j\omega)$ можна було провести пряму, що проходить через точку з координатами $(-1/\kappa, j0)$ так, щоб годограф $W_n^*(j\omega)$ весь лежав праворуч від цієї прямої. $W_n^*(j\omega)$ - видозмінена частотна характеристика лінійної частини (крива Попова). Вираз цієї характеристики

$$W_n^*(j\omega) = U^*(w) + jV^*(w) = U_n(w) + j\omega V_n(w)$$

Для побудови цієї характеристики визначимо $U_n(w)$ та

$j\omega V_n(\omega)$.

$$\begin{aligned} W_n(j\omega) &= \frac{1}{T_1 j\omega + 1} \cdot \frac{1}{T_2 j\omega + 1} = \frac{1}{-T_1 T_2 \omega^2 + T_1 j\omega + T_2 j\omega + 1} = \\ &= \frac{1}{1 - T_1 T_2 \omega^2 + j(T_1 \omega + T_2 \omega)} = \\ &= \frac{1}{(1 - T_1 T_2 \omega^2) + j(T_1 \omega + T_2 \omega)} \cdot \frac{(1 - T_1 T_2 \omega^2) - j(T_1 \omega + T_2 \omega)}{(1 - T_1 T_2 \omega^2) - j(T_1 \omega + T_2 \omega)} = \\ &= \frac{1 - T_1 T_2 \omega^2 - j(T_1 \omega + T_2 \omega)}{1 - 2T_1 T_2 \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4 + T_1^2 \omega^2 + 2T_1 T_2 \omega^2 + T_2^2 \omega^2} = \\ &= \frac{1 - T_1 T_2 \omega^2 - j(T_1 \omega + T_2 \omega)}{1 + T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2} \end{aligned}$$

Остаточню маємо

$$\begin{aligned} U^*(\omega) &= \operatorname{Re} W_n(j\omega) = \frac{1 - T_1 T_2 \omega^2}{1 + T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2} = \\ &= \frac{1 - 62,5\omega^2}{1 + 3906,25\omega^4 + 181,25\omega^2} \\ V^*(\omega) &= \omega \operatorname{Im} W_n(j\omega) = \frac{-(T_1 + T_2) \omega^2}{1 + T_1^2 T_2^2 \omega^4 + (T_1^2 + T_2^2) \omega^2} = \\ &= \frac{-17,5\omega^2}{1 + 3906,25\omega^4 + 181,25\omega^2} \end{aligned}$$

Коефіцієнт передачі розімкнутої системи

$$k = k_n k_H = 4 \cdot 0,5 = 2$$

Змінюючи ω від 0 до ∞ будемо характеристику $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$.

Таблиця 11.2.

ω	$U^*(\omega)$	$V^*(\omega)$
0	1	0
0,01	0,976	-0,002
0,02	0,908	-0,007
0,1	0,117	-0,055
0,2	-0,103	-0,048
0,3	-0,094	-0,032

0,4	-0,069	-0,022
0,5	-0,050	-0,015
0,6	-0,037	-0,011
0,7	-0,029	-0,008
0,8	-0,023	-0,006
0,9	-0,018	-0,005
1	-0,015	-0,004

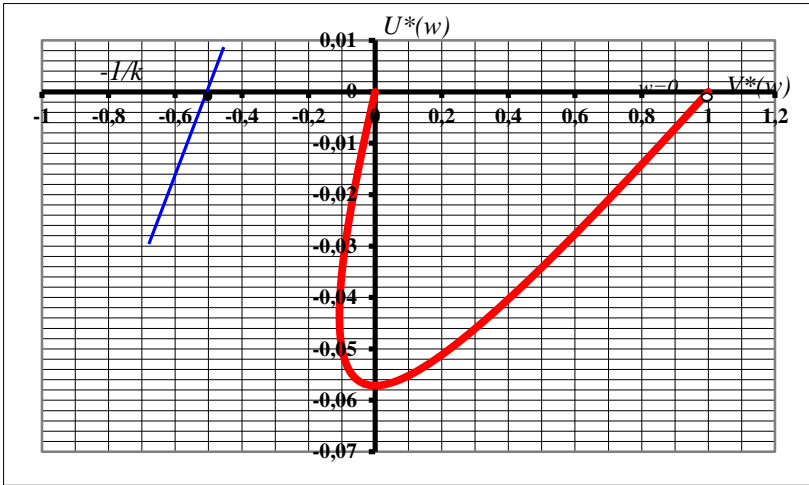


Рис. 11.6.

На дійсній осі відкладемо точку з координатами $\left(-\frac{1}{k}, j0\right)$, через дану точку проводимо пряму Попова. Характеристика $V^*(w) = f[U^*(w)]$ повністю знаходиться в нижній півплощині і через точку $\left(-\frac{1}{k}, j0\right)$ при будь якому $0 < k < \infty$ можна провести пряму Попова так, що вся характеристика розташована праворуч неї, тому система абсолютно стійка при всіх $k = k_a k_n$ і для всіх нелінійних ланок, статичні характеристики яких розташовані в I і III чвертях.

Завдання для самостійного опрацювання

Визначити методом гармонічної лінеаризації амплітуду і частоту автоколивань нелінійної системи, структурна схема якої показана на рис. 11.7, якщо задано коефіцієнт передачі лінійної частини системи $k=N c^{-1}$ і статична характеристика нелінійної ланки (рис. 11.8) для якої $c=0.5$, $b=10$.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

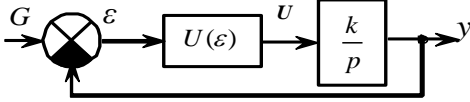


Рис. 11.7.

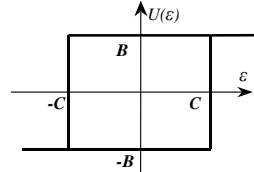


Рис. 11.8.

Практичне заняття №12

Розрахунок передаточних функцій та аналіз стійкості імпульсних систем автоматичного керування

Мета заняття. Знаходження передаточних функцій імпульсних систем та визначення їх стійкості.

Задача №1. Знайти передаточну функцію розімкнутої імпульсної системи. Система складається з імпульсного елемента і неперервної частини.

Імпульсний елемент здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію, тобто виробляє прямокутні імпульси з відносною тривалістю $\gamma = 0.1$. Період слідування імпульсу $0,1$ с. Неперервна частина – інерційна ланка 1-го порядку: $\kappa = 1$ і $T = 1$ с.

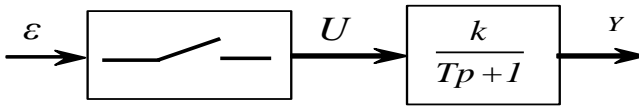


Рис. 12.1.

Розв'язок. Перетворимо структурну схему рис. 12.1. до вигляду рис. 12.2, в якій імпульсний елемент представлений двома ланками. Формуюча ланка є аналоговою ланкою.

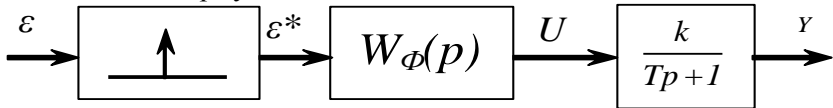


Рис. 12.2.

$$W_{\phi}(p) = \frac{1}{p} e^{p\gamma T_i} \quad \text{При } \gamma \ll 1 \quad W_{\phi}(p) = \gamma T_i$$

Знайдемо передаточну функцію зведеної неперервної частини:

$$W_{з.н.ч.}(p) = W_{\phi}(p) \quad W_{л}(p) = \gamma T_i \quad \frac{k}{Tp + 1} = \frac{\gamma T_i k}{Tp + 1} = \frac{0.01}{p + 1}$$

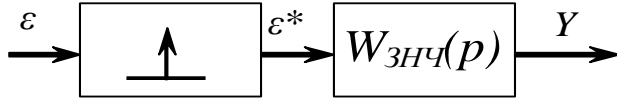


Рис. 12.3.

Передаточна функція розімкнутої системи $W_p(p) = L\{w_{з.н.ч.}(t)\}$. На вході діє сигнал $\varepsilon(nT_i)$, на виході $y(nT_i)$, Беремо дискретне зображення Лапласа від решітчастої функції:

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(e^{pT_i}) &= \sum_n \varepsilon(nT_i) e^{-pnT_i}; \\ e^{-pnT_i} &= e^{-pT_i} e^n; \\ e^{pT_i} &= z; \\ \varepsilon^*(e^{pT_i}) &= \sum_n \varepsilon(nT_i) z^{-n} \quad - z \text{ - зображення} \\ Y^*(e^{pT_i}) &= \sum_n y(nT_i) z^{-n}; \end{aligned}$$

Дискретна передаточна функція тоді: $W(z) = \frac{Y(z)}{\varepsilon(z)}$;

Передаточна функція імпульсної системи визначиться за наступною формулою:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{W_{ЗНЧ}(p)\}; \\ W(z) &= Z\left(\frac{0.01}{p+1}\right). \end{aligned}$$

Для визначення даного Z - зображення скористаємось таблицею 12.1 Z - зображень Лапласа.

Таблиця 12.1

$X(t)$	$X(nT_i)$	L	Z
$\delta(t)$	$\delta(nT_i)$	1	1
$1(t)$	$1(nT_i)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$1 \cdot t$	nT_i	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_i z}{(z-1)^2}$

e^{-at}	e^{-anTi}	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-d}, d=e^{-\alpha T_i}$
$1-e^{-at}$	$1-e^{-anTi}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$	$\frac{(1-d)z}{(z-1)(z-d)}$

Згідно таблиці

$$W(z) = Z\left(\frac{0.01}{p+1}\right) = 0.01 \cdot Z\left(\frac{1}{p+1}\right) = 0.01 \cdot \frac{z}{z-d};$$

де $d = e^{-T_i} = e^{-0.1} = 0.9$;

тоді:

$$W(z) = \frac{0.01}{z-0.9}.$$

Задача №2. Визначити за критерієм Гурвіца стійкість системи, характеристичне рівняння якої має вигляд

$$25z^3 - 5z^2 - 10z - 1 = 0.$$

Розв'язок. Виконаємо w – перетворення даного рівняння,

тобто виконаємо заміну $z = \frac{1+w}{1-w}$:

$$\begin{aligned} 25\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 5\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 10\frac{1+w}{1-w} - 1 &= \\ = \frac{20w^3 + 90w^2 + 80w + 10}{(1-w)^3} &= 0. \end{aligned}$$

Перетворене характеристичне рівняння має вигляд:

$$a'_0 w^3 + a'_1 w^2 + a'_2 w + a'_3 = 20w^3 + 90w^2 + 80w + 10 = 0$$

Згідно з критерієм Гурвіца система стійка, тому що $a'_0 > 0$;

$a'_1 > 0$; $a'_2 > 0$; $a'_3 > 0$ і

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_3 \\ a'_0 & a'_2 \end{vmatrix} = a'_1 a'_2 - a'_0 a'_3 = 7000 > 0.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Знайти передаточну функцію розімкнутої імпульсної системи. Система (рис. 12.4) складається з імпульсного елемента і неперервної частини. Параметри імпульсного елемента: $\gamma = 0.1$, $T_i = 0,1$ с. Неперервна частина – інерційна ланка 1-го порядку.

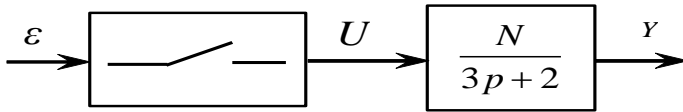


Рис. 12.4.

N – порядковий номер студента в журналі академічної групи.

Рекомендована література

1. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
2. Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К., Бріцький О. І. Теорія автоматичного управління навч. посіб. Київ : Техніка, 2002. 688 с.
3. Харабет О. Н. Вивчення класичної теорії автоматичного управління за допомогою сучасного персонального комп'ютера. Одеса : Бахва, 2014. 187 с.
4. Іванов А. О. Теорія автоматичного керування : підручник. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2003. 250 с.
5. Голюк П. Ф., Гречин Т. М. Теорія автоматичного керування : навч. посіб. Львів : Львівська політехніка, 2012. 280 с.
6. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Теорія автоматичного керування. Методологія та практика оптимізації : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2013. 210 с.