

Трач В. М., д.т.н., професор, Подворний А. В., д.т.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, v.m.trach@nuwm.edu.ua ; a.v.podvorny@nuwm.edu.ua)

ВПЛИВ ПІДСИЛЕННЯ СТАЛЕВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ТУНЕЛЬНИХ СПОРУД НА НАДІЙНЕ КОРЕГУВАННЯ ЇХ СТІЙКОСТІ

В межах просторової теорії пружності, спираючись на отриману, при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, систему однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних, проведено дослідження стійкості циліндричної оболонкової конструкції тунельної споруди. Зменшення розмірності тривимірної системи диференціальних рівнянь проведено за використання процедури аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна, при розкладанні невідомих системи у подвійні тригонометричні ряди. На цій основі отримано одновимірну нескінчену розв'язуючу систему диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок в нормальній формі Коші. При використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації розроблено алгоритм та складено комп'ютерний програмний комплекс для ПК, в якому, в єдиному обчислювальному процесі, поєднано встановлення параметрів докритичного напружено-деформованого стану та розв'язку задачі стійкості анізотропних циліндричних оболонкових конструкцій тунельних споруд в просторовій постановці. Проведено дослідження стійкості сталеві циліндричної оболонки під розподіленим боковим тиском у випадку підсилення її однонапрямленим волокнистим композитом боропластиком.

Ключові слова: циліндрична сталева оболонка; тунельна споруда; рівняння стійкості; тривимірна постановка; волокнистий композит боропластик.

Вступ. Аналіз останніх досліджень

Розв'язок задач стійкості оболонкових конструкцій, якими можливо змоделювати тунельну споруду, зазвичай базується на використанні двовимірних класичних або уточнених теорій [1; 2]. Це призводить до того, що для нетонких оболонок низька зсувна жорсткість та неоднорідність матеріалу за товщиною або не

враховуються зовсім, або враховуються не повною мірою. З іншого боку, геометричні параметри оболонок з сучасних матеріалів не завжди відповідають умовам застосовності як класичного, так і уточненого варіантів теорії оболонок. Тому дослідження стійкості оболонкових конструкцій тунельних споруд з сучасних матеріалів у тривимірній постановці [3] є доцільним та актуальним в теперішній час.

Роботи присвячені дослідженню стійкості оболонкових конструкцій в просторовій постановці [4; 5] розглядали випадки, коли їх матеріал був ізотропним або ортотропним. Сучасні композитні матеріали створюються шляхом армування матриці волокнистими матеріалами, внаслідок чого можливе виникнення або може бути наперед технологічно задана розбіжність між власними осями криволінійної системи координат оболонки та напрямком укладання волокон (рис. 1). При цьому матеріал конструкції характеризується однією площиною пружної симетрії паралельною її серединній поверхні, що згідно з [1–3] має вплив на стійкість оболонок.

Мета дослідження. В представленій роботі викладено підхід до розв'язання задачі стійкості циліндричних оболонкових конструкцій, що враховує зауважені особливості. З цією метою використано систему диференціальних рівнянь стійкості в межах тривимірної теорії пружності анізотропного тіла [6], що отримана при використанні модифікації узагальненого варіаційного принципу Ху – Васідзу [7]. Процес розв'язку поставленої задачі проводиться шляхом зменшення розмірності системи з використанням аналітичного методу Бубнова – Гальоркіна [3] та розв'язку отриманої одновимірної системи чисельним методом дискретної ортогоналізації [1; 8].

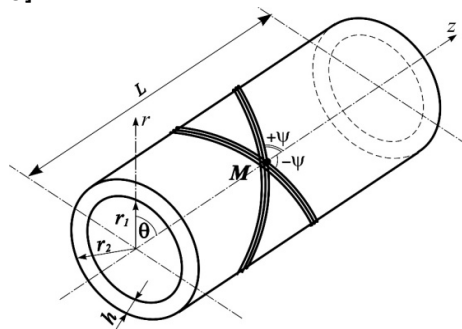


Рис. 1. Анізотропна циліндрична оболонка

Постановка задачі та методика розв'язку. Необхідні рівняння стійкості, співвідношення пружності та граничні умови відповідно до

варіаційного принципу Ху – Васідзу [7] можливо здобути з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} \times (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \right\} dV + \\ & + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (1)$$

У виразі (1) варіюються без використання додаткових умов деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} та переміщення u_i , напруження p_i на поверхні S_2 викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об’ємних і поверхневих навантажень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

З умови стаціонарності варіації функціоналу (1) отримаємо тривимірну систему з шести однорідних диференціальних рівнянь стійкості анізотропних циліндричних оболонок в частинних похідних з відповідними граничними умовами на поверхнях та торцях [6]. Скориставшись процедурою методу Бубнова – Гальоркіна [3] для зменшення розмірності отриманих рівнянь, здобудемо нескінчену одновимірну систему звичайних диференціальних рівнянь стійкості циліндричної оболонки в нормальній формі Коші [6]

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda) \bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i,j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}. \quad (2)$$

В (2) $\bar{y} = \{y_{1,pk}; y_{2,pk}; y_{3,pk}; y_{4,pk}; y_{5,pk}; y_{6,pk}; y'_{1,mk}; y'_{2,mk}; y'_{3,mk}; y'_{4,mk}; y'_{5,mk}; y'_{6,mk}\}$ – розв’язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ – матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

Система рівнянь стійкості (2) при умовах на поверхнях оболонки при $r = r_1$: $\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0$; $\tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0$; $\tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$,
при $r = r_2$: $\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0$; $\tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0$; $\tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0$ (3)
та на торцях

$$\sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0 \quad (4)$$



розв'язується за використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [1; 8], алгоритм розв'язку реалізовано у вигляді пакетів прикладних програм для ПК.

Реалізація пропонованої методики встановлення критичних навантажень циліндричної оболонки. При використанні запропонованого підходу було досліджено циліндричну оболонкову конструкцію сталевий тунельної споруди та проведено порівняння двох її варіантів. В першому варіанті розглядалась одношарова сталевий оболонкова конструкція, а у другому – двошарова, де в якості зовнішнього шару прийнято композитний волокнистий матеріал боропластик. Його головні напрямки пружності можуть бути повернуті на кут ψ відносно напрямку твірної оболонки. Таке використання волокнистого матеріалу водночас покращує механічні характеристики конструкції, а також слугує ізоляційним шаром, що захищає метал від корозійних впливів.

Механічні характеристики використаних матеріалів, наступні: сталь – $E_{11}=20,6E_0$, $\nu_{21}=0,25$; боропластик – $E_{11}=280E_0$, $E_{22}=E_{33}=31E_0$, $G_{12}=G_{23}=10,5E_0$, $G_{13}=21,2E_0$, $\nu_{21}=0,25$, $\nu_{12}=0,0277$, $E_0=10000\text{МПа}$.

Геометричні розміри конструкції такі: радіус внутрішньої бокової поверхні $r_1=4,9$ м, зовнішньої – $r_2=5,1$ м, а довжина елемента $L=10,0$ м. При розгляді двошарової конструкції геометрія за товщиною наступна: сталевий шар $r_{1s}=4,9$ м; $r_{2s}=5,07$ м, шар боропластику: $r_{1b}=5,07$ м; $r_{2b}=5,1$ м, довжина така ж.

Оболонка знаходиться під дією зовнішнього розподіленого бокового тиску q_0 .

Проведено дослідження та порівняно величини критичних навантажень для одношарового циліндра з результатами для двошарового у випадку зміни кута ψ армування композитного матеріалу від 0° до 90° .

Результати проведених за пропонованим підходом досліджень представлені в таблиці.

Аналізуючи результати, представлені в табл. 1, можна зробити висновок про те, що підсилення сталевий циліндричної оболонкової конструкції тунельної споруди волокнистим композитом дозволяє надійно впливати на зростання, до 38%, величин критичних навантажень бокового тиску. Також з результатів розрахунку видно, що існує можливість надійного зростання несучої здатності такої конструкції шляхом зміни кута укладання волокнистого композиту. Різниця між величинами критичних навантажень, при збільшенні кута ψ укладання волокнистого композита від 0° до 90° , досягає

86% у порівнянні з оболонкою, що не підсилена волокнистим композитом.

Таблиця

Критичні навантаження розподіленого бокового тиску
циліндричної оболонки

Критичне навантаження	Сталева оболонка	Двошарова циліндрична оболонка						
		Кут повороту головних напрямів пружності шару боропластику, ψ^0						
		0	15	30	45	60	75	90
q_{cr} , [МПа]	4,06	5,61	5,86	6,64	7,24	7,28	7,41	7,52

Висновки. В межах просторової теорії пружності, на основі здобутої, при використанні модифікованого варіаційного принципу Ху – Васідзу, системи однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних проведено дослідження стійкості циліндричної сталеві оболонкової конструкції тунельної споруди. Проаналізовано, вплив волокнистого композиту та кута його укладання на оболонку, стосовно надійного корегування величин критичних навантажень бокового тиску.

1. Баженов В. А., Семенюк М. П., Трач В. М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок : монографія. К. : Каравела, 2010. 352 с.
2. Трач В. М., Подворний А. В., Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок : монографія. К. : Каравела, 2019. 273 с.
3. Semenuk M. P., Trach V. M., Podvornyi A. V. Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, Issue 2. Pp. 211–221.
4. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Киев : Наук. думка, 1985. Т.4. *Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел*. 280 с.
5. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К. : Вища шк., 1986. 511 с.
6. Trach V. M., Podvornyi A. V. Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures* : наук.-техн. зб. К. : KNUBA, 2023. № 111. Р. 74–86.
7. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.
8. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей : монографія. К. : Академперіодика, 2006. 472 с.

REFERENCES:

1. Bazhenov V. A., Semeniuk M. P., Trach V. M. Nelineine deformuvannia, stiikist i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok : monohrafiia. K. : Karavela, 2010. 352 s.
2. Trach V. M., Podvornyi A. V., Khoruzhyi M. M. Deformuvannia ta stiikist netonkykh anizotropnykh obolonok : monohrafiia. K. : Karavela, 2019. 273 s.
3. Semenuk M. P., Trach V. M., Podvornyi A. V. Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, Issue 2. Pp. 211–221.
4. Huz A. N., Babych Y. Yu. Prostranstvennye zadachy teoryy uprugosti y plastychnosti. Kyev : Nauk. dumka, 1985. T. 4. *Trekhmernaia teoriya ustoichyvosti deformatsyruemykh tel*. 280 s.
5. Huz A. N. Osnovy trekhmernoii teoryy ustoichyvosti deformatsyruemykh tel. K. : Vyshcha shk., 1986. 511 s.
6. Trach V. M., Podvornyi A. V. Stability of cylindrical anisotropic composite shells under torsion in a three-dimensional formulation. *Opir materialiv i teoriia sporud/Strength of Materials and Theory of Structures* : nauk.-tekhn. zb. K. : KNUBA, 2023. № 111. P. 74–86.
7. Vasydzu K. Varyatsyonnye metody v teoryy uprugosti y plastychnosti. M. : Myr, 1987. 542 s.
8. Hryhorenko Ya. M., Vlaikov H. H., Hryhorenko A. Ya. Chyslenno-analytycheskoe reshenye zadach mekhanyky obolochek na osnove razlychnykh modelei : monohrafiia. K. : Akademperryodyka, 2006. 472 s.

Trach V. M., Doctor of Engineering, Professor, Podvornyi A. V., Doctor of Engineering, Associate Professor (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

INFLUENCE OF REINFORCEMENT OF STEEL CYLINDRICAL SHELLS OF TUNNEL STRUCTURES ON RELIABLE CORRECTION OF THEIR STABILITY

In the work, within the framework of the linear spatial theory of elasticity, using the modified variational principle of Hu – Washizu, a system of homogeneous differential equations of stability in partial derivatives is obtained. On this basis, a study of the stability of a cylindrical shell structure of a tunnel structure is carried out. Reduction of the dimension of a three-dimensional system of differential equations became possible using the procedure of the analytical method of Bubnov – Galerkin. In this case, an expansion of the unknowns of the system of stability equations in double trigonometric series along the generatrix and in the circular direction of the shell was used. On this basis, a one-dimensional infinite resolving system of differential equations of stability of anisotropic cylindrical shells in the normal Cauchy form is obtained. Using the numerical method of discrete orthogonalization, an algorithm is

developed and a computer software package for a PC is compiled, which in a single process combines the determination of the parameters of the subcritical stress-strain state and the solution of problems of stability of anisotropic cylindrical shell structures of tunnel structures in a spatial statement.

The stability of a steel cylindrical shell under distributed lateral pressure has been studied. The obtained result has been compared with critical loads determined for a steel shell reinforced with a unidirectional fibrous composite boroplastic, which can be laid at arbitrary angles to the cylinder generatrix. The obtained calculation results have been analyzed and the importance of shell reinforcement with fibrous composite for reliable increase of critical load values has been noted.

***Keywords:* cylindrical steel shell; tunnel structure; stability equations; three-dimensional formulation; boron-plastic fiber composite.**