Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий механічний інститут

Кафедра транспортних технологій і технічного сервісу

02-02-255М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних робіт
з навчальної дисципліни
«Дослідження операцій в транспортних системах»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського)
рівня за освітньо-професійною програмою
275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)»
спеціальності 275 «Транспортні технології (за видами)»
галузі знань 27 «Транспорт»
денної та заочної форми навчання
(Частина І)

Рекомендовано
науково-методичною радою
з якості ННМІ
Протокол № 3 від 19.11.2024 р.

Рівне – 2024

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з навчальної дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» спеціальності 275 «Транспортні технології (за видами)» галузі знань 27 «Транспорт» денної та заочної форми навчання. [Електронне видання] / Пашкевич С. М., Козак С. В. – Рівне : НУВГП, 2024. – 31 с.

Укладач: Пашкевич С. М., к.т.н., доц. кафедри транспортних технологій і технічного сервісу; Козак С. В. к.е.н., доц. кафедри транспортних технологій і технічного сервісу.

Відповідальний за випуск:
в.о. завідувача кафедри Никончук В. М., д.е.н., професорка.

Керівник групи забезпечення спеціальності 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)» Хітров І. О

Попередня версія видання МВ: 02-02-120

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Складність процесів управління сучасними підприємствами та необхідність швидкого реагування на зміни зовнішніх факторів, що впливають на господарську діяльність, зумовлюють необхідність використання математичних методів, зокрема дослідження операцій, динамічного програмування та методів управління сітковим плануванням, для демонстрації економічної ефективності управлінських рішень. Для демонстрації економічної ефективності управлінських рішень необхідно використовувати математичні методи, зокрема дослідження операцій, динамічного програмування та методи сіткового планування. Використання комп'ютерних технологій для реалізації математичних методів підтримки процесів прийняття рішень може надати допомогу в режимі реального часу. Підготовка фахівців з транспортних технологій вимагає оволодіння різноманітними методами та прийомами як безпосереднього застосування математичних методів для прийняття рішень, так і реалізації цих методів засобами комп'ютерних технологій.

Курс "Дослідження операцій в транспортних системах" призначений для студентів спеціальності 275 «Транспортні технології (за видами)»

Студенти повинні уміти: самостійно складати математичні моделі складних транспортних систем, застосовувати методи оптимізації для вирішення виробничих задач, застосовувати ПЕОМ і сучасні програмні продукти при вирішенні оптимізаційних задач.

Мета методичних вказівок – допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал з дисципліни "Дослідження операцій в транспортних системах" на основі самостійного вирішення практичних завдань.

У процесі виконання завдань студенти глибше опановують питання побудови і аналізу моделей функціонування транспортних систем, показників для оцінки ефективності транспортних операцій і застосуванням математичного інструментарію дослідження операцій, а також розвитку творчих здібностей та ініціативи при вирішенні поставлених завдань на практиці.

У методичних вказівках викладено послідовність виконання завдань. Роботу студенти виконують відповідно до варіантів, індивідуально з допоміжними розрахунками. Студенти передають викладачеві виконані завдання для перевірки з подальшим їх захистом.

2. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, рівень вищої освіти	Характеристика навчальної дисципліни	
		денна форма навчання	заочна форма навчання
Кількість кредитів – 6	Галузь знань 27 “Транспорт”	Нормативна	
Модулів – 2	Спеціальність 275 “Транспортні технології (на автомобільному транспорті)”	Рік підготовки	
Змістових модулів – 2		2-й	3-й
Індивідуальне науково-дослідне завдання: *не перелдбачене*		Семестр	
Загальна кількість годин – 180		4-й	5-й
		Лекції	
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента – 8	Рівень вищої освіти: перший	30 год.	2 год.
		Практичні, семінарські	
		30 год.	14 год.
		Лабораторні	
		-	-
		Самостійна робота	
		120 год.	164год.
		Індивідуальні завдання: -	
		Форма контролю:	
		екзамен	екзамен

Примітка.

Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить(%):

для денної форми навчання – 66,7.

для заочної форми навчання – 8,7

3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ..

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Мета: набуття і закріплення навичок побудови лінійних економіко-математичних моделей

План

1. Загальна постановка задачі дослідження операцій. Викладення основних етапів побудови математичних моделей практичних оптимізаційних задач

2. Побудова математичних моделей конкретних задач

2.1. Оптимізація плану виробництва продукції

2.2. Оптимальне змішування

2.3. Задачі оптимального розкрою

2.4. Оптимальне планування фінансів

2.5. Пошук оптимального плану транспортування продукції

Теоретичні відомості

Математичні моделі будують на основі відомої змістової постановки задачі. Їх складання починають з коректного вибору змінних. Слід розуміти, що у більшості випадків від цього залежить простота моделі, а, отже, її розв'язок. Після вибору змінних, виходячи із змістового формулювання, послідовно складають обмеження, які вони повинні задовольняти. При цьому потрібно слідкувати, щоб у модель були введені всі обмежувальні умови, і в той самий час не було жодної зайвої або записаної у більш жорсткій, ніж потрібно за умов задачі, формі. Наступним кроком є складання цільової функції, яка в математичній формі відображає заданий в межах задачі критерій оптимізації. Зауважимо, що в деяких моделях зручніше її будувати відразу після вибору змінних задачі, тобто порядок побудови моделі не є жорстким і може змінюватись. Після цього модель, якщо це можливо, спрощують.

Завдання

1. Оптимізація плану виробництва продукції

Змістова постановка задачі: при заданих запасах ресурсів, відомих нормах витрат кожного з них окремо на виробництво одиниці усякого виду продукції, відомій ціні виробів на ринку максимізувати загальну вартість виробленого.

Математична постановка задачі: нехай підприємство виробляє n видів продукції, при цьому використовується k видів ресурсів. Позначимо через: $b_i, i = \overline{1,k}$ − запас i -го виду ресурсу; $a_{ij}, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n}$ − норми витрат i -го виду ресурсу на виробництво одиниці j -го виду продукції; $c_j, j = \overline{1,n}$− ціну j -го виду продукції на ринку (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1.

Систематизація даних про виробництво продукції

Тип ресурсу	Норма витрат ресурсу на одиницю продукції				Наявність ресурсу
	1	2	…	n	
1 2 … k	a_{11} a_{21} … a_{k1}	a_{12} a_{22} … a_{k2}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{kn}	b_1 b_{k2} … b_k
Ціна одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_n	

Введемо змінні $x_j, j = \overline{1,n}$ − невідому кількість виробництва $\boldsymbol{j}$ -го виду продукції. Тоді вартість плану виробництва $\boldsymbol{x}$=($\boldsymbol{x_1}$,$\boldsymbol{x_2}$,…,$\boldsymbol{x_n}$) буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n}. \qquad (1.1)$$

Витрати $\boldsymbol{i}$ -го виду ресурсу на виробництво всіх видів продукції дорівнюють

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n}$$

і мають не перевищувати запасу $b_i, i = \overline{1,k}$, тобто

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i, i = \overline{1,k}} \qquad (1.2)$$

За змістом задачі компоненти плану виробництва невід’ємні:

$$\boldsymbol{x_j \ge 0, j = \overline{1,n}} \qquad (1.3)$$

Отже, задача про оптимальний план виробництва полягає у пошуку таких значень невідомих $\boldsymbol{x_j, j = \overline{1,n}}$, які максимізують лінійну функцію (1.1) і задовольняють умови (1.2), (2.3).

2. Оптимальне змішування (оптимальний раціон)

Задачі на суміші утворюють важливий клас прикладних оптимізаційних завдань. Вони виникають під час вибору найкращого способу змішування вихідних інгредієнтів для отримання конгломерату із заданими властивостями, які визначаються кількістю компонентів, що входять до складу вихідних матеріалів. Як правило, відомі вартісні характеристики інгредієнтів, і шукану суміш потрібно одержати з найменшими витратами. Для багатопродуктових задач, де необхідно отримати кілька сумішей, характерним є критерій максимізації прибутку.

Задачі оптимального змішування трапляються в багатьох галузях промисловості (металургія, парфумерія, виробництво харчів, фармакологія, сільське господарство). Їх прикладами є визначення кормового раціону худоби на тваринницьких фермах, складання рецептури шихти на металургійному заводі тощо. Розглянемо однопродуктову модель оптимального змішування.

Змістова постановка задачі: при заданому асортименті продуктів з відомим вмістом поживних речовин у кожному з них і відомій ціні скласти найбільш дешевий добовий раціон, що задовольняє потреби організму.

Математична постановка задачі: нехай є n різних продуктів, що містять k поживних речовин (білків, жирів, вуглеводів, вітамінів і т.і.). Позначимо через: $b_i, i=\overline{1,k}-$ найменшу добову потребу в i -й поживній речовині; $a_{ij}, i=\overline{1,k}, j=\overline{1,n}-$ питомий вміст i -ї поживної речовини у ваговій чи об’ємній одиниці j -го продукту; $c_j, j=\overline{1,n}-$ ціну j -го продукту (тобто вартість вагової або об’ємної одиниці j -го продукту (інформацію можна звести у табл. 1).

Введемо змінні $\boldsymbol{x_j, j=\overline{1,n}}-$ невідому кількість одиниць $\boldsymbol{j}$ -го продукту, що використовується за добу. Тоді вартість добового раціону $\boldsymbol{x}$=($\boldsymbol{x_1}$,$\boldsymbol{x_2}$,...,$\boldsymbol{x_n}$) буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n}. \quad (1.4)$$

Вміст $\boldsymbol{i}$ -ї поживної речовини в раціоні

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n}$$

не повинен бути меншим за мінімальну потребу $\boldsymbol{b_i}$ в ній організму, тобто

$$\boldsymbol{a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \geq b_i, i=\overline{1,k}} \quad (1.5)$$

За змістом задачі компоненти раціону невідємні:

$$\boldsymbol{x_j \geq 0, j=\overline{1,n}}. \quad (1.6)$$

Отже, задача про оптимальний раціон полягає у пошуку таких значень змінних $\boldsymbol{x_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}$, які мінімізують лінійну функцію (1.4) і задовольняють умови (1.5), (1.6).

3. Задачі оптимального розкрою

Більшість матеріалів, що використовуються в промисловості, надходить на виробництво у вигляді стандартних форм. Безпосереднє їх застосування, як правило, не можливе, спочатку треба їх розрізати на заготівлі необхідних розмірів. Це можна зробити за допомогою різних способів розкрою матеріалу. Задача при цьому полягає у їх раціональному виборі, а також визначенні, яку кількість матеріалу слід розкроювати, застосовуючи кожен з обраних способів. Подібна необхідність зазвичай виникає в металургії і машинобудуванні, лісовій, лісопереробній, легкій промисловості.

Змістова постановка задачі. З огляду на відомий асортимент і запаси матеріалів, можливі способи розкрою та задану умову комплектності розкроїти всі матеріали так, щоб отримати максимальне число комплектів виробів.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m різних видів матеріалів, які можуть бути розкроєні n способами на k різних видів виробів. Ці вироби, взяті відповідно у кількостях $b_l, l = \overline{1, k}$, утворюють комплект. Позначимо через: $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{m}}$– запас i -го матеріалу; $a_{ij}^l, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ l = \overline{1, k}$– кількість одиниць l -го виробу, отримана при розкрої одиниці i -го матеріалу j -м способом.

Нехай x – кількість комплектів, $x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$– кількість одиниць i -го матеріалу, розкроєного j -м способом.

Використання $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу не повинно бути більшим за його запас $a_i, i = \overline{1, m}$, тобто

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \leq a_i, i = \overline{1, m} \tag{1.7}$$

Оскільки з одиниці $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу $\boldsymbol{j}$ -м способом розкрою одержуємо $\boldsymbol{a_{ij}^l}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу, то при розкрої $\boldsymbol{x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{i}$ -го матеріалу $\boldsymbol{j}$ -м способом одержуємо $\boldsymbol{a_{ij}^l x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. Використання всіх матеріалів і всіх способів розкрою дає $\boldsymbol{\Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n a_{ij}^l x_{ij}}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. З іншого боку помічаємо, що в $\boldsymbol{x}$ комплектах міститься $\boldsymbol{x b_l}$ одиниць $\boldsymbol{l}$ -го виробу. Тому умова комплектності набуває вигляду

$$\boldsymbol{\Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n a_{ij}^l x_{ij} = x b_l, l = \overline{1, k}} \tag{1.8}$$

За змістом задачі всі змінні $\boldsymbol{x, x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}}$ невід’ємні:

$$\boldsymbol{x, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}}. \tag{1.9}$$

Отже, задача на оптимальний розкрій полягає у максимізації цільової функції $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ за виконання умов (7) − (9).

4. Пошук оптимального плану транспортування продукції

Змістова постановка задачі. Знайти найбільш дешевий план перевезень однорідного продукту з пунктів із відомими його запасами до місць з заданими його потребами при відомій вартості транспортування одиниці продукту з кожної точки зберігання у будь-який пункт споживання.

Математична постановка задачі. Нехай маємо m пунктів відправлення і n пунктів призначення. Позначимо через: $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}$– об'єм запасу продукту на i-му пункті відправлення; $\boldsymbol{b_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$ – об'єм потреби у продукті в j-му пункті призначення; $\boldsymbol{c_{ij}}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$ – вартість перевезення однієї одиниці продукту безпосередньо із i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення.

Нехай за планом перевезень із i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення перевозиться $x_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$одиниць продукту.

Тоді вартість всіх перевезень буде дорівнювати значенню функції

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Sigma}_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Sigma}_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_{ij} x_{ij}} \tag{1.10}$$

де $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{x_{ij}}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$– матриця перевезень.

Кількість продукту, що вивозиться з $\boldsymbol{i}$ -го пункту не повинно перевищувати його запасу $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}$, тобто

$$\boldsymbol{x_{i1}} + \boldsymbol{x_{i2}} + \ldots + \boldsymbol{x_{in}} \le \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}. \tag{1.11}$$

Для задоволення попиту у продукті в $\boldsymbol{j}$-му пункті призначення його кількість, що завозиться, має бути не меншою за потреби $\boldsymbol{b_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$, тобто

$$\boldsymbol{x_{1j}} + \boldsymbol{x_{2j}} + \ldots + \boldsymbol{x_{mj}} \ge \boldsymbol{b_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}. \tag{1.12}$$

За змістом задачі всі змінні $\boldsymbol{x_{ij}}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$ невід'ємні:

$$\boldsymbol{x_{ij}} \ge \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}. \tag{1.13}$$

Отже, транспортна задача полягає у пошуку такого плану перевезень $\boldsymbol{x} = \{\boldsymbol{xij}\}_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, який мінімізує функцію (1.10) і задовольняє умови (1.11) − (1.13).

Зауважимо, що без додаткових умов, накладених на величини $\boldsymbol{b_j}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}}$, і $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}}$ ця задача може виявитись нерозв'язуваною.

Необхідною і достатньою умовою її розв'язуваності є виконання умови балансу: загальний об'єм запасу продукту має дорівнювати загальному об'єму потреби в ньому, тобто

$$\Sigma_{j=1}^{n} b_j = \Sigma_{i=1}^{m} a_i \quad (1.14)$$

За виконання умови балансу (1.14) ***транспортна задача називається збалансованою або закритою***.

Поточні контрольні запитання

1. Що розуміють під назвою «дослідження операцій»?
2. Які основні етапи дослідження операцій?
3. В яких ситуаціях використовуються змінні з двома індексами при побудові математичної моделі задачі оптимізації?
4. Наведіть приклад операції, в якій невідомі величини приймають цілі значення.
5. Що таке цільова функція задачі дослідження операцій?
6. В якому вигляді записуються обмеження на невідомі змінні в задачах дослідження операцій?
7. Чи можна розглядати задачу про призначення як окремий випадок транспортної задачі?
8. Який зміст мають змінні в задачах оптимального розкрою?

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета: закріпити знання теорії двоїстості в лінійному програмуванні та вміння практично використовувати двоїсті оцінки в аналізі економічних моделей. При виконанні завдань студенти мають набути та закріпити навички побудови лінійних економіко-математичних моделей; виконання аналізу розв'язків задач лінійного програмування; оцінки рентабельності продукції, що випускається, і нової, виготовлення якої планується; проведення аналізу обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

План

1. Теореми двоїстості в лінійному програмуванні
2. Застосування теорії двоїстості для після оптимізаційного аналізу розв'язку задачі лінійного програмування

Теоретичні відомості

Теореми двоїстості в лінійному програмуванні

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі розглянемо на прикладі завдання оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва n видів продукції застосовується m видів ресурсів, запаси яких обмежені значенням $b_i (i = \overline{1,m})$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $a_{ij} (j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$. Ціна одиниці продукції j-го виду дорівнює $c_j (j = \overline{1,n})$. Математична модель задачі має вигляд:

$$maxF = max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}) ; \; x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}). \tag{2.2}$$

Пряма задача полягає у визначенні оптимального плану виробництва продукції $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, який дає найбільший дохід при обмежених ресурсах.

Двоїста задача до поставленої прямої матиме вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y \ge c_j (j = \overline{1,n}) \; y_i \ge 0 (i = \overline{1,m}) \tag{2.4}$$

Економічний зміст двоїстої задачі: необхідно визначити оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів y_i, що використовуються для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою за умови, що витрати на ресурси при виробництві кожного виду продукції будуть не менше прибутку (виручки) від реалізації цієї продукції. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці i-го ресурсу, їх інколи ще називають **тіньовою ціною відповідного ресурсу**.

<u>Перша теорема двоїстості</u>. Якщо одна з взаємно двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то його має і друга, при цьому оптимальні значення їх лінійних функцій рівні: $F_{max}=Z_{min}$. Якщо лінійна функція однієї із задач не обмежена, то умови другої несумісні.

<u>Друга теорема двоїстості</u>. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють абсолютним значенням коефіцієнтів при відповідних змінних лінійної функції вихідної задачі, що записана через неосновні змінні її оптимального розв'язку.

<u>Третя теорема двоїстості</u>. Компоненти оптимального розв'язку двоїстої задачі дорівнюють значенням часткових похідних лінійної функції $Fmax(b)$ за відповідними аргументами, тобто

$$\frac{\partial F_{max}}{\partial b_i^*}, \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{2.5}$$

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції , що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на **дефіцитні** та **недефіцитні** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є **недефіцитним**. Якщо ж двоїста оцінка $y_i>0$, то i-й ресурс застосовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається **дефіцитним**. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (cj), виготовляти продукцію не вигідно, вона **нерентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $xj=0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона **рентабельна** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $xj>0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до зміни умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

✓склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

✓склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

✓змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв`язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

Введення нової змінної до математичної моделі задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

Завдання

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування:

$F = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min\ (\max)$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Розв'язок.

1. Згідно з обмеженнями математичної моделі задачі будуємо допустиму область. Для цього всі нерівності обмежень подамо рівняннями та побудуємо прямі

$x_1 + 2x_2 = 10$; $x_1 = 6$; $x_1 + x_2 = 2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$.

Кожна пряма поділяє площину на дві півплощини – допустиму та недопустиму. Щоб знайти допустиму півплощину потрібно взяти довільну точку в одній з півплощин (наприклад початок координат) та підставити її координати до відповідного даній прямій обмеження. Якщо при цьому обмеження порушується, то півплощина, якій належить вибрана точка є недопустимою, інакше –допустимою (допустиму область доцільно відмічати на малюнку, наприклад, штриховкою). Після побудови всіх допустимих півплощин знаходимо допустиму область, як перетин цих півплощин (рис.2.1.).

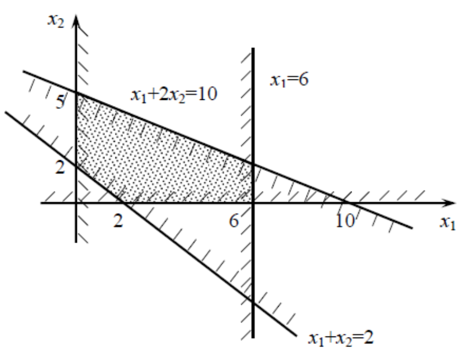


Рис. 2.1. Побудова допустимих півплощин

2. Будуємо пряму цільової функції F. Для цього знаходимо градієнт цільової функції – вектор, координати якого дорівнюють коефіцієнтам при відповідних змінних цільової функції. $grad\ F$=(1;3).

Перпендикулярно до градієнта будуємо пряму цільової функції, наприклад, через початок координат (рис.2.2.).

3. Знаходимо оптимальні точки. Для цього пряму цільової функції переміщуємо перпендикулярно до напрямку градієнта. Найближча точка дотику області допустимих розв’язків відповідає точці мінімуму – точка A, а найвіддаленіша відповідає точці максимуму – точка B.

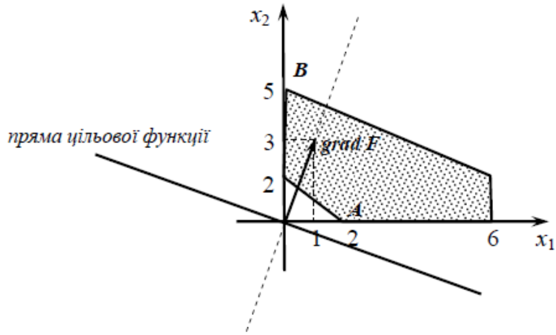


Рис.2.2. Побудова прямої цільової функції F
при відповідних ($grad\ F$=(1;3))

4. Знаходимо координати оптимальних точок як точок перетину прямих: A(2;0), B(0;5).

5. Обчислюємо значення цільової функції у оптимальних точках:

F_{min} =F(2;0)=2, F_{max}= F(0;5) =15 .

Зауваження. Якщо пряма цільової функції паралельна одній з границь допустимої області, то задача має безліч оптимальних розв’язків.

Поточні контрольні запитання

1. Які властивості задачі лінійного програмування?
2. Що таке опукла множина?
3. Яку функцію називають опуклою?
4. Що таке лінія рівня функції? Який вигляд вона має для лінійної функції двох змінних?
5. Градієнт функції − це…
6. Коли ЗЛП не має розв'язків?

7. В яких випадках ЗЛП має безліч розв'язків?

8. Як визначається лінійна комбінація двох точок опуклої множини?

9. Яка множина на площині відповідає обмеженню нерівності?

10. Чи може задача лінійного програмування мати три розв'язки?

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В СЕРЕДОВИЩІ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ EXCEL

Мета: побудова математичних моделей лінійних задач програмування. Отримання навичок розв’язування задач лінійного програмування в середовищі електронних таблиць Excel. Вміння аналізувати розв’язок задачі.

План

1. Основні відомості про математичне моделювання процесів
2. Основні етапи моделювання
3. Побудова математичної моделі
4. Аналіз результатів розв’язку задачі

Теоретичні відомості

Основні відомості про математичне моделювання процесів

Під моделюванням розуміється відтворення поведінки якої-небудь реальної системи на її аналогу, побудованому за певними правилами.

Математична модель на відміну від фізичної не зберігає геометричної подібності з об’єктом, вона абстрактна.

Економічна модель являє собою вираження загальних взаємозв’язків і закономірностей явищ у математичній формі.

Математичне моделювання систем і процесів дозволяє експериментувати, не звертаючись до досвіду, – досить побудувати математичну модель і програти її на персональному комп’ютері. Для цього всі характеристики та властивості досліджуваного процесу треба записати математичною мовою за допомогою математичних символів.

Основні етапи моделювання

1. Вивчення процесу.

Беручись до моделювання процесу, необхідно вивчити його за літературними джерелами або в натурі. При цьому виявляються внутрішні характеристики якісних і кількісних сторін процесу та взаємозв'язку між ними.

2. Постановка задачі.

На цьому етапі формулюється словесна постановка задачі. Вона повинна бути чіткою і містити ясні відповіді на питання: що відомо, на які питання необхідно відповісти, яка мета Розв'язок. задачі і за яких умов вона досягається.

3. Побудова математичної моделі.

Оптимізаційні моделі – це задачі досягнення мінімуму чи максимуму цільової функції ($Z_{min(max)}$). На етапі моделювання мета задачі, економічні умови, зовнішні і внутрішні зв'язки виражаються в алгебраїчній формі за допомогою економічної символіки. Модель задачі лінійного програмування в загальному вигляді записується в такий спосіб.

Визначити значення функції мети:

$Z_{min(max)} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$

за умов-обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n <= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n >= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n <= b_m; \\ \text{де } x_1 >= 0;\ x_2 >= 0;\ x_3 >= 0;\ \ldots;\ x_n >= 0. \\ \text{У моделі використано позначення:} \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ – шукані (незалежні) змінні.

$C_1, C_2, \ldots Cn$ – коефіцієнти при шуканих змінних у критерії оптимальності.

$a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21} \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1} \ldots, a_{mn}$ – техніко-економічні коефіцієнти при змінних в обмеженнях задачі.

4. Підготовка вхідної інформації та розв'язування задачі на комп'ютері.

На цьому етапі вхідна інформація вводиться в комп'ютер і зважується оптимізаційна задача за допомогою стандартних програм наближеними методами (симплекс-метод, метод Ньютона і т. д.).

5. Аналіз результатів розв'язку задачі.

У випадку незадовільних чи від’ємних результатів Розв’язок. змінюються вхідні дані (шукаються помилки) і процес розв’язування повторюється. Підготовку вхідної інформації та Розв’язок. задачі в середовищі електронних таблиць можна поділити на шість основних етапів.

1. Задання таблиці вхідної інформації.
2. Задання діапазону чарунок для незалежних змінних.
3. Задання чарунок і формул для цільової функції.
4. Задання чарунок і формул для обмежень.
5. Робота в діалоговому вікні **Пошук рішення.**
6. Аналіз розв’язку задачі.

Завдання

Побудувати математичну модель задачі. Розв’язати отриману задачу за допомогою електронних таблиць Microsoft Excel.

Проблема "двох картопель". Фірма по переробці картоплі робить три види продукції: картопляні чіпси, кубики і пластівці. Аналіз завантаженості устаткування і попиту на ринку показує можливість зробити і збути до 1.8 т чіпсів, 1.2 т кубиків і 2.4 т пластівців. Необхідний для переробки картоплі фірма закуповує в двох постачальників. Кількість готової продукції і відносний прибуток (дохід від реалізації готової продукції за винятком вартості сировини), який можна одержати з однієї т картоплі кожного постачальника, зазначені в наступній таблиці.

Вихідні дані задачі про “дві картоплі”

Вид готової продукції	*Вихід готової продукції з 1 т картоплі, т*		*Потреби ринку збуту, т*
	Постачальник 1	*Постачальник 2*	
Чіпси	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Пластівці	0,3	0,3	2,4
Відносний прибуток, ум.од.	5,0	6,0	

Потрібно визначити, яку кількість картоплі треба придбати в кожного постачальника, щоб забезпечити найбільший відносний прибуток з урахуванням можливості збуту готової продукції.

Розв’язок.

Позначимо через x_1 кількість тонн картоплі від постачальника 1, а через x_2 – кількість тонн картоплі постачальника 2. Тоді перше обмеження запишеться у вигляді нерівності:

$0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 \le 1{,}8.$

Друге обмеження має вигляд:

$0{,}2 \cdot x_1 + 0{,}1 \cdot x_2 \le 1{,}2.$

Третє обмеження має вигляд:

$0{,}3 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_2 \le 2{,}4.$

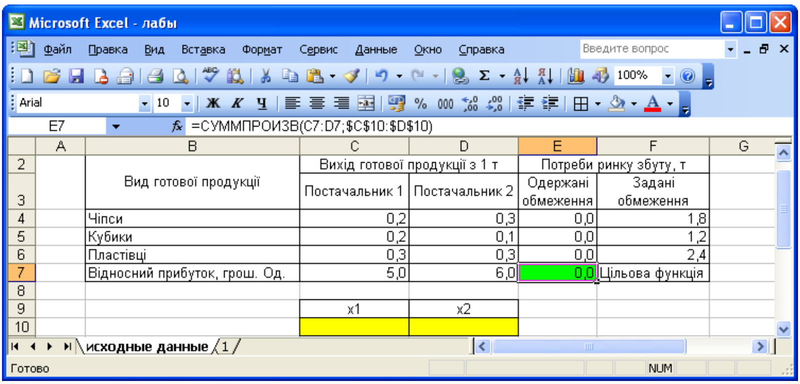
Тоді цільова функція буде такою:

$Z = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \to \max.$

Для Розв’язок. задачі потрібно увійти в додаток Microsoft Excel і виконати послідовно шість етапів.

1. Задання таблиці вхідної інформації

Вхідна інформація заноситься в таблицю (рис. 3.1). При цьому числові значення показників заносяться в окремі чарунки в діапазоні **C4:E6.**



	A	B	C	D	E	F
2		Вид готової продукції	Вихід готової продукції з 1 т		Потреби ринку збуту, т	
3			Постачальник 1	Постачальник 2	Одержані обмеження	Задані обмеження
4		Чіпси	0,2	0,3	0,0	1,8
5		Кубики	0,2	0,1	0,0	1,2
6		Пластівці	0,3	0,3	0,0	2,4
7		Відносний прибуток, грош. Од.	5,0	6,0	0,0	Цільова функція
8						
9			x1	x2		
10						

Рис. 3.1 Вихідні дані в середовищі електронних таблиць Excel

2. Задання діапазону чарунок для незалежних змінних

У розглянутому прикладі для одержання значень незалежних змінних x_1, x_2 обрано діапазон чарунок **C10:D10.**

3. Задання чарунки для цільової функції

У діапазоні **C7:D7** задані коефіцієнти цільової функції (5, 6).

Формули для визначення значення цільової функції вводимо за допомогою фунції **СУММПРОИЗВ**.

4. Задання обмежень

У діапазон чарунок **Е4:Е6** уведено коефіцієнти лівих частин обмежень. У чарунки **F4:F6** введено праві частини (вільні члени) обмежень (1,8, 1,2, 2,4).

Формули для визначення лівих частин обмежень вводимо за допомогою функції **СУММПРОИЗВ**.

5. *Робота в діалоговому вікні* **Пошук рішення.**

Для роботи в діалоговому вікні **Пошук рішення** треба:

1) Вибрати в меню **Сервіс ⇒ Пошук рішення.** Відкриється діалогове вікно **Пошук рішення** (рис. 2).

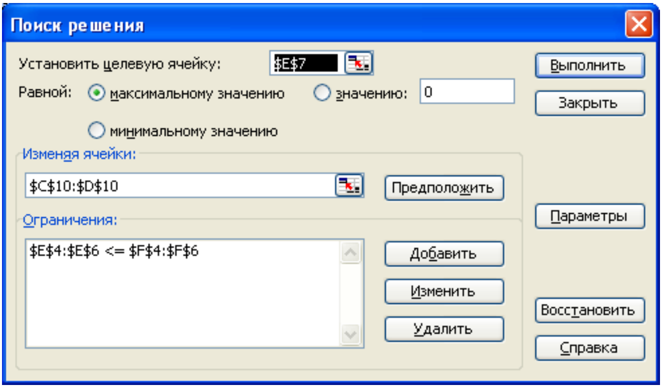


Рис. 3.2 Робота в діалоговому вікні Пошук рішення

2) У полі **Установить целевую** ввести **Е7.**

3) Встановити перемикач у поле **Равной** в положення **Максимальному значенню.**

4) У полі **Зміна чарунки** ввести діапазон **С10:D10.**

5) Задати праві частини обмежень у такий спосіб. У діалоговому вікні **Пошук рішення** клацнемо на кнопці **Добавить**. Відкриється діалогове вікно **Добавление ограничений**. У полі **Ссылка на чарунку** вводимо адресу чарунки з обмеженням (**Е4:Е6**). У полі <= вводимо необхідний знак обмеження, натиснувши на кнопку . У полі **Обмеження** вводимо адресу чарунки з правою частиною обмеження, клацнувши на ній мишею. У нашому випадку це чарунка **F4:F6.**

6) Для встановлення параметрів пошуку розв’язку натискаємо на кнопці **Параметры** діалогового вікна **Пошук рішення**. Відкриється діалогове вікно **Параметры поиска решения**.

Встановлюємо прапорці в полі **Линейная модель** і в полі **Неотрицательные значения**, клацнувши по них мишею. У категорії **Оценки** натискаємо в полі **Линейная**. Натискаємо **ОК.** Відкриється діалогове вікно **Пошук рішення**.

7) Клацнемо на кнопці **Выполнить** діалогового вікна **Пошук рішення.** Після закінчення розрахунку з'явиться діалогове вікно **Результаты поиска решения** (рис. 3).

8) Клацнемо на кнопці **ОК**, щоб зберегти знайдений розв'язок.

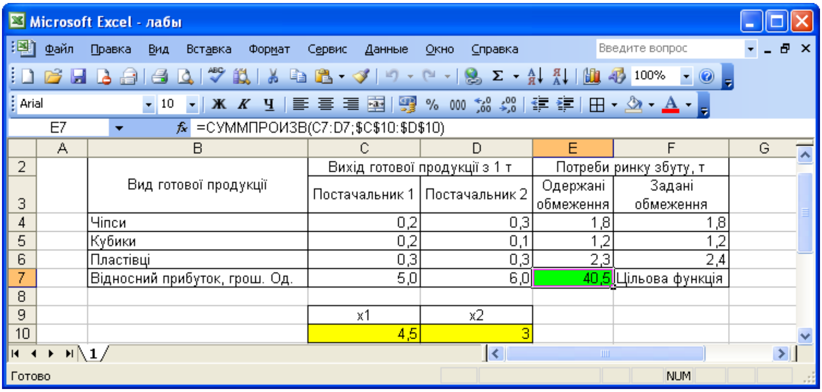


Рис. 3.3 Розв'язок задачі

Аналіз розв'язку задачі

Аналізуючи розв'язок задачі, можна зробити висновки, що оптимальний (максимальний) прибуток від реалізації становить 40,5 грош. од.. Оптимальне сполучення асортименту таке: картопля від постачальника 1 – 4,5 т; картопля від постачальника 2 – 3 т

Поточні контрольні запитання

1. Сформулювати першу теорему двоїстості.
2. Дати економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості.
3. Сформулювати другу теорему двоїстості.
4. Дати економічну інтерпретацію двоїстим оцінкам.
5. Сформулювати третю теорему двоїстості.
6. Дати економічну інтерпретацію третьої теореми двоїстості.
7. Що таке інтервали стійкості двоїстих оцінок?
8. Як визначити рентабельність продукції за двоїстою оцінкою?
9. Як визначається дефіцитність ресурсу за відповідною двоїстою оцінкою?
10. Що означає основна нерівність двоїстості?

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ В СЕРЕДОВИЩІ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ EXCEL

Мета: побудова математичної моделі транспортної задачі за загальним критерієм вартості. Отримання навичок розв'язування транспортної задачі в середовищі електронних таблиць Excel. Вміння аналізувати розв'язок задачі.

План

1. Поняття транспортної задачі
2. Призначення транспортної задачі
3. Загальна постановка транспортної задачі
4. Математична модель транспортної задачі
5. Поняття незбалансованої моделі та зведення її до збалансованої
6. Поняття плану та оптимального плану транспортної задачі
7. Механізм розв'язування транспортної задачі в середовищі електронних таблиць Excel

Теоретичні відомості

Транспортні задачі – спеціальний клас задач лінійного програмування. Ці задачі найчастіше описують перевезення деякого товару з пункту відправлення (постачальників) до пункту призначення (споживачів). **Призначення транспортної задачі** – визначення об'єму перевезень з пунктів відправлення до пунктів призначення з мінімальною вартістю перевезень. При цьому повинні враховуватися обмеження, які накладені на об'єм вантажу, який є у пунктах відправлення (пропозиція), та обмеження, які враховують необхідність вантажу в пунктах призначення (попит).

В загальному випадку транспортну модель можна використовувати для описання ситуацій, які пов'язані з керуванням запасами, керуванням руху капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу і таке інше.

Загальна постановка транспортної задачі полягає у знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з пунктів відправлення $A_1,..., A_m$ у n пунктів призначення $B_1,..., B_n$. При цьому критерієм оптимальності є мінімальна вартість, або мінімальний час його доставки.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \quad x_{ij} \ge 0 \quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right),$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача; c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i – запаси продукції i-го постачальника; b_j – попит на продукцію j-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальника дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ то таку транспортну задачу називають **збалансованою**, або закритою. В протилежному випадку задача називається **незбалансованою** (відкритою).

Якщо виявилось, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу або у системі обмежень записати обмеження у формі нерівностей відповідного виду ($\le, \ge$). Для зведення задачі до закритого типу вводимо фіктивного умовного постачальника A_{m+1}, якщо $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Або вводимо фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника або фіктивного споживача вважається такою, що дорівнює нулю.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід’ємний розв’язок системи обмежень транспортної задачі, який позначають матрицею $X = \left(x_{ij}\right)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція набуває найменшого значення.

Завдання 1

Побудувати математичну модель транспортної задачі. Розв'язати за допомогою електронних таблиць Microsoft Excel

Компанія, що займається видобутком залізної руди, має чотири кар'єри. Продуктивність кар'єрів відповідно 170, 130, 190 і 200 тис. т щомісяця. Залізна руда направляється на три збагачувальні фабрики, що належать цій компанії, потужності яких відповідно 250, 150 і 270 тис. т на місяць. Транспортні витрати (у тис. грн.) на перевезення 1 тис. т руди з кар'єрів на фабрики зазначені в наступній таблиці:

Кар'єр / ***Фабрика***	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	1
2	4	2	5	9
3	5	7	10	5

Необхідно визначити план перевезень залізної руди на збагачувальні фабрики, що забезпечує мінімальні сукупні транспортні витрати.

Скільки руди варто перевозити з кар'єру 1 на збагачувальну фабрику 2? Скільки руди варто перевозити з кар'єру 4 на збагачувальну фабрику 1? Який обсяг потужностей по видобутку руди виявиться невикористаним? Які мінімальні сукупні транспортні витрати?

Розв'язок.

Перевіримо задачу на закритість. Так як

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 170 + 130 + 190 + 200 = 690,$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 250 + 150 + 270 = 670,$$

тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$. Отримали, що задача відкрита, а це означає, що необхідно додати фіктивного споживача з потребою у 20 тис. т продукції. Дана дія перетворить задачу у закриту, а отже складати обмеження у задачі будемо не у формі нерівностей, а у формі рівнянь.

Побудуємо математичну модель даної транспортної задачі. Нехай x_{ij} – кількість тон залізної руди, яку перевезуть з *i*-го кар'єру до *j*-ї фабрики, $i \in \{1,...,4\}$, $j \in \{1,...,4\}$.

Складемо систему обмежень:

1. Продуктивність кар'єру К1:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 170$

2. Продуктивність кар’єру К2:

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}= 130;$

3. Продуктивність кар’єру К3:

$x_{31}+x_{32} +x_{33}+x_{34} = 190$

4. Продуктивність кар’єру К4:

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}= 200;$

5. Потреба фабрик у залізній руді:

Ф1: $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}= 250;$

Ф2: $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 150;$

Ф3: $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}= 270;$

Ф4: $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}= 20;$

Позначимо цільову функцію через Z. Цільова функція буде визначати сумарну вартість усіх перевезень.

$$Z = 1\,x_{11} + 4\,x_{12} + 5\,x_{13} + 0\,x_{14} + 2\,x_{21} + 2\,x_{22} + 7\,x_{23} + 0\,x_{24} +$$
$$+ 3\,x_{31} + 5\,x_{32} + 10\,x_{33} + 0\,x_{34} + 1\,x_{41} + 9\,x_{42} + 5\,x_{43} + 0\,x_{44} \rightarrow \min.$$

Не слід забувати, що всі змінні повинні бути невід’ємними, а саме $x_{ij} \geq 0$, $i = 1,\ldots,4$; $j = 1,\ldots,4$.

Далі задача розв’язується в середовищі Excel за допомогою меню **Сервіс⇒Пошук рішення**. На рис. 4.1 подано вихідну інформацію, а результати Розв’язок. задачі на рис. 2. Так, у чарунках B14:Q21 знаходяться коефіцієнти при невідомих (матриця). У чарунках R14:R21 записано формули для визначення обмежень і величини обмежень, отримані в результаті Розв’язок. задачі. У чарунці R22 наведено формулу для отримання значення функції мети (цільової функції). У чарунках B25:Q25 знаходяться шукані значення незалежних змінних (до Розв’язок. задачі там порожньо, що відповідає значенню 0).

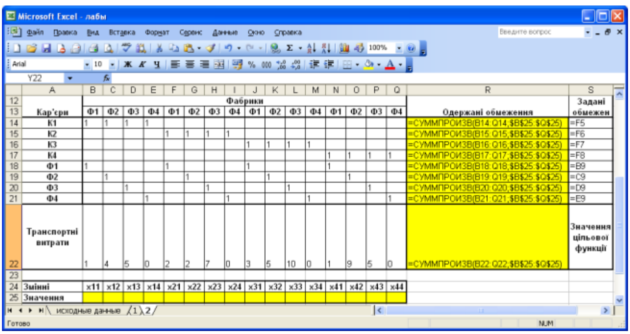


Рис. 4.1 Вихідні дані для завдання у середовищі Excel

На рис. 4.2 зображено вихідну інформацію для **Пошук рішення**.

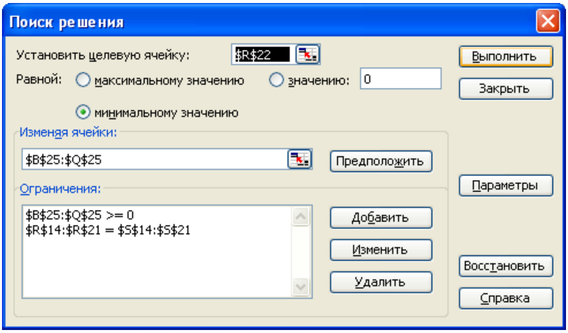
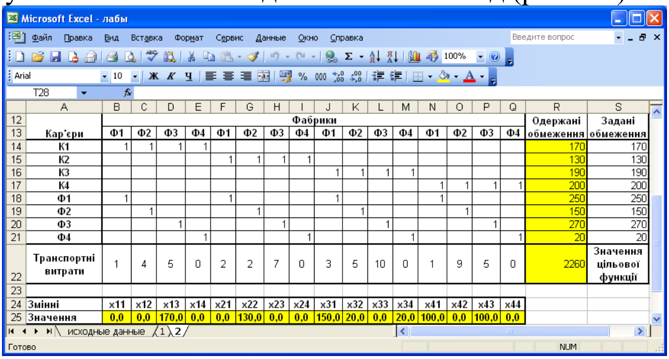


Рис. 4. 2 Внесення даних до сервісу Пошук рішення

У результаті Розв'язок. задачі матиме вигляд (рис. 4.3).



Кар'єри	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4	Одержані обмеження	Задані обмеження
К1	1	1	1	1													170	170
К2					1	1	1	1									130	130
К3									1	1	1	1					190	190
К4													1	1	1	1	200	200
Ф1	1				1				1				1				250	250
Ф2		1				1				1				1			150	150
Ф3			1				1				1				1		270	270
Ф4				1				1				1				1	20	20
Транспортні витрати	1	4	5	0	2	2	7	0	3	5	10	0	1	9	5	0	2260	Значення цільової функції
Змінні	x11	x12	x13	x14	x21	x22	x23	x24	x31	x32	x33	x34	x41	x42	x43	x44		
Значення	0,0	0,0	170,0	0,0	0,0	130,0	0,0	0,0	150,0	20,0	0,0	20,0	100,0	0,0	100,0	0,0		

Рис. 4.3 Розв'язок задачі

Аналіз розв'язку задачі

Відповідно до цього плану на першу фабрику з третього кар'єру перевозять 150 тис т залізної руди, з четвертого – 100 тис. т руди. На другу фабрику з другого кар'єру перевозять 130 тис т. залізної руди, з третього – 20 тис т. На третю фабрику з першого кар'єру перевозять 170 тис. т залізної руди, з четвертого кар'єру – 100 тис т залізної руди. Незатребуваним залишилося 20 тис т залізної руди, яка знаходиться на третьому кар'єрі. При такому варіанті витрати на перевезення будуть найменшими і дорівнюватимуть 2260 тис. грн.

Завдання 2.

Розв’язати транспортну задачу методом потенціалів. Перевірити знайдений розв’язок засобами Excel.

Табл.4.1.

Вихідні дані до завдання2

	8	6	20	8
12	*2*	*8*	*1* *2*	*6*
14	*3*	*4*	*2*	*2*
16	*1*	*5*	*7*	*9*

Розв’язок.

1. Знайдемо допустимий розв’язок з урахуванням вартостей (табл.4.2.). Для цього виберемо клітинку з найменшою вартістю перевезень *р*13= *р*31=1. Здійснимо перевезення, наприклад, зі складу № 1 до споживача № 3. Ми можемо перевезти 12 одиниць продукції, після чого склад № 1 стане порожнім. Викреслимо перший рядок. Зліва від першого стовпця та над першим рядком відмічаємо відповідно залишок товару на складі та залишковий попит споживача. Другу клітинку вибираємо з частини таблиці, яка залишилася, також з мінімальною вартістю перевезень. Такою вартістю буде *р*31=1. Перевеземо 8 одиниць. При цьому перший споживач отримає всю необхідну кількість товару, тому перший стовпчик викреслимо. У таблиці, що залишилася, найменша вартість буде *р*23=*р*24=2. Виберемо, наприклад, другий склад і третього споживача. Останній вже має 12 одиниць, тому перевеземо 8 одиниць і третій споживач буде повністю забезпечений товаром. Викреслюємо третій стовпчик. Наступним перевезенням з найменшою вартістю буде зі складу № 2 до споживача № 4 (*р*24=2). Тут перевозимо 6 одиниць, які залишились на другому складі і викреслимо другий рядок. Далі, перевозимо товар зі складу № 3: 6 одиниць до споживача № 2 (*р*32=5) та 2 одиниці до споживача № 4 (*р*34=9). В результаті ми заповнили таблицю значеннями, які вказують скільки потрібно перевезти одиниць, звідки і куди.

Табл.4.2.

Допустимий розв'язок з урахуванням вартостей

						0	0
				0	0	8	2
				8	6	20	8
		0	12	*2* ---	*8* ---	*1* *12*	*6* ---
	0	6	14	*3* ---	*4* ---	*2* *8*	*2* *6*
0	*2*	*8*	16	*1* *8*	*5* *6*	*7* ---	*9* *2*

Запишемо значення *потенціалів* (табл.4.3.) – чисел u_i та v_j у рядок та стовпчик після останніх рядка та стовпчика так, щоб для клітинок з заповненою кількістю перевезень виконувалось

$$p_{ij} = u_i + v_j. \quad (4.1)$$

Для цього один із потенціалів (наприклад u_1) покладаємо рівним 0, а решта послідовно знаходимо.

Для незаповнених клітинок обчислимо значення

$$\Delta_{ij} = p_{ij} - u_i - v_j. \quad (4.2)$$

Табл.4.3.

Значення потенціалів

	8	6	20	8	u_i
12	*2*	*8*	*1* *12*	*6*	*0*
14	*3*	*4*	*2* *8* -	*2* *6* +	*1*
16	*1* *8*	*5* *6*	*7* +	*9* *2* -	*8*
v_j	*-7*	*-3*	*1*	*1*	

Оскільки є від'ємні Δ_{ij} ($\Delta_{33} = -2$), то розв'язок неоптимальний. Позначимо клітинку, що стоїть на перетині третього рядка та третього стовпця знаком "+". Змінна, що відповідає цій клітинці повинна ввійти в базис. Крім неї позначимо знаками "+" та "–" клітинки так, щоб утворився цикл, а знаки чергувались при обході цього циклу. Знаходимо мінімум чисел x_{ij}, позначених знаком "–". Це число $M = 2$. Модифікуємо транспортну таблицю. Клітинку з числом M залишаємо незаповненою. Для інших клітинок, помічених знаком "–" число M віднімаємо від записаного та додаємо до значення клітинки, поміченої знаком "+". Решту значень переписуємо без зміни. Для нової таблиці (табл.4.4.) шукаємо потенціали та обчислимо значення

Δ_{ij} Оскільки всі значення Δ_{ij} додатні, то знайдений розв'язок є оптимальним.

Табл.4.4.

Обчислення значення Δ_{ij}

	8	6	20	8	u_i
12	*2*	*8*	*1* *12*	*6*	*0*
14	*3*	*4*	*2* *6*	*2* *8*	*1*
16	*1* *8*	*5* *6*	*7* *2*	*9*	*6*
v_j	*-5*	*-1*	*1*	*1*	

Оптимальним буде перевезення, при якому кількості товару з i-го складу до j-го споживача будуть визначатися кількостями $x_{13} = 12$, $x_{23} = 6$, $x_{24} = 8$, $x_{31} = 8$, $x_{32} = 6$, $x_{33} = 2$. При цьому вартість перевезення буде F=12·1+6·2+8·2+8·1+6·5+2·7=92.

2. Перевіримо знайдений розв'язок засобами Excel. Введемо умови задачі в таблицю Excel (A2:E5).

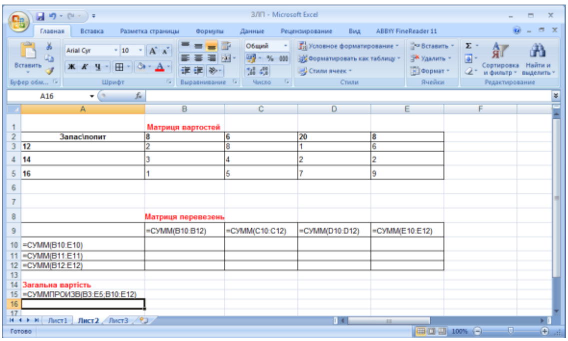


Рис.4.4 Розв'язок транспортної задачі в середовищі електронних таблиць Excel

Далі накреслимо границі невідомої матриці перевезень (A9:E12). В клітинку A15 введемо формулу для обчислення функції мети =СУММПРОИЗВ(B3:E5;B10:E12).

В клітинку A10 введемо формули для обчислення обсягу перевезення з першого пункту відправлення =СУММ(B10:E10) та скопіюємо цю формулу у діапазон A11:A12 (обсяг перевезення для інших пунктів відправлення).

В клітинку В9 введемо формули для обчислення поступлень до першого споживача =СУММ(B10:B12) та скопіюємо цю формулу у діапазон C9:E9 (поступлення для інших споживачів).

Вибираємо Данные>=Пошук рішення.

Заповнюємо поле «Установить целевую чарунку» – A15. Потім встановимо перемикач на «минимальному значению». Визначимо дані поля «Изменяя чарунки», виділивши діапазон B10:E12.

Введемо обмеження, виходячи з умови задачі \$A\$3:\$A\$5=\$A\$10:\$A\$12, \$B\$9:\$E\$9=\$B\$2:\$E\$2

Налаштовуємо параметри моделі (кнопка «Параметры») та натискаємо кнопку «Выполнить».

Отримали оптимальний план перевезення загальна вартість якого F = 92, що підтверджує результати, знайдені за допомогою метода потенціалів.

Поточні контрольні запитання

1. Яка умова визначає закриту модель транспортної задачі?
2. Сформулюйте критерій оптимальності плану перевезень в ТЗ.
3. Чи будь-яка задача транспортного типу розв’язна?
4. У якому випадку вводиться до розгляду фіктивний споживач?
5. У якому випадку вводиться до розгляду фіктивний виробник?
6. На скільки зміниться розмірність ТЗ у випадку, коли сумарний обсяг споживання менший за сумарний обсяг виробництва продукції?
7. На скільки зміниться розмірність ТЗ у випадку, коли сумарний обсяг споживання більший за сумарний обсяг виробництва продукції?
8. Які критерії оптимальності можуть розглядатися в задачі транспортного типу?
9. Які є методи визначення початкового плану перевезення продукції?
10. Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вовк В. М., Зомчак Л. М. Оптимізаційні методи і моделі : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 360 с.

2. Богаєнко І. М., Григорків В. С., Бойчук М. В., Рюмшин М. О. Математичне програмування : навч. посібник. Київ : Логос, 1996. 266 с.

3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник. Київ : ВІПОЛ, 2000. 688 с.

4. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці: підручник. Суми : Довкілля, 2010. 594 с.

5. Авраменко В. І., Карімов І. К. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посібник / 2-ге вид., перероб. і доп. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. 245 с.

6. Карімов І. К. Інформаційно-обчислювальні системи в економіці : навч. посібник / 2-ге вид., перероб. і доп. Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2013. 279 с.

7. Кунда Н. Т. Дослідження операцій у транспортних системах. Київ : Видавничий Дім „Слово", 2008. 400 с.

8. Карагодова О. О., Кігель В. Р., Рожок В. Д. Дослідження операцій. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

9. Кузик А. Д. Основи системного аналізу. Львів, 2005. 100 с.